POTPUNA, STROGA INDUKCIJA *

Princip stroge indukcije

Neka je dat $P(n)$ – iskaz, tvrdnja

Ako je: • $P(0)$ tačno

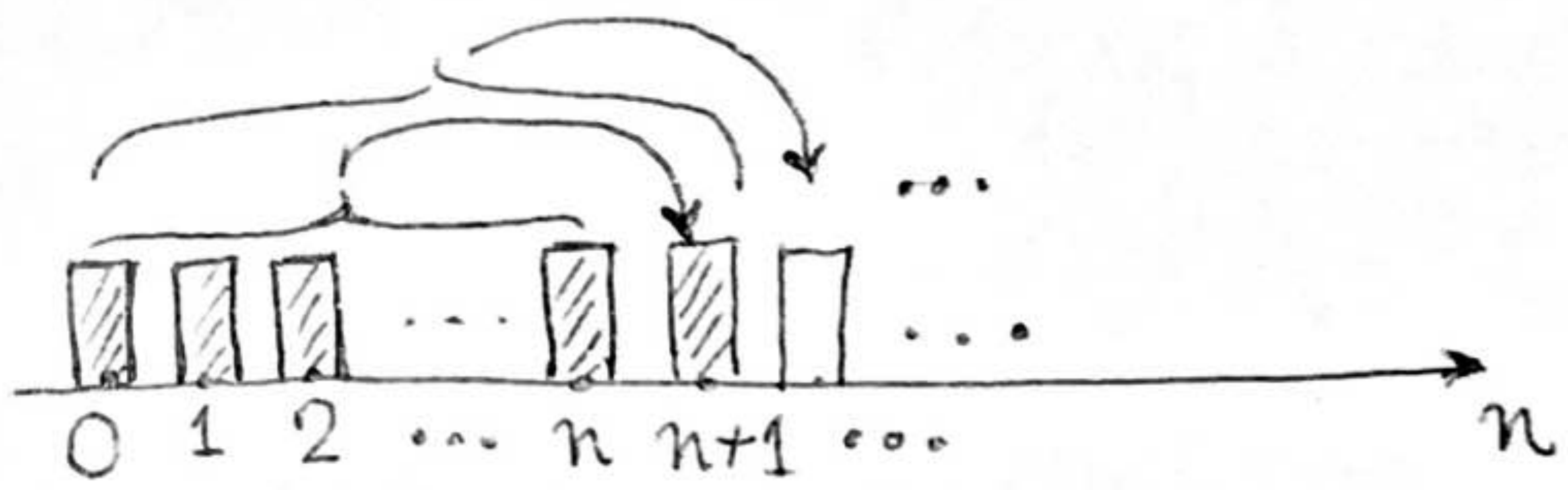
• $P(0), P(1), \dots, P(n)$ zajedno implicira $P(n+1)$ za sve nenegativne cijele n

tada je: • $P(m)$ tačno za sve nenegativne cijele m.

Indukciono pravilo:

$$P(0), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(0), P(1), \dots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad P(m)$$



Problem [MIT, Meyer, str. 103, 6.2.1.] 10

Svaki prirodan broj $n \geq 2$ se može razložiti na proizvod prostih brojeva. Dokazati!

Dakle iskaz $P(n)$ je da je svaki $n \geq 2$ proizvod prostih brojeva

• Ova tvrdnja će se dokazati potpunom, strogom indukcijom

• Dokaz za početnu vrijednost $n = 2$

$n = 2 \cdot 1 \rightarrow$ prosti brojevi, tačno T

• Pp. da je tvrdnja tačna za sve brojeve i ($2, 3, \ldots, n$)

$2 \leq i < n+1$ (tj. $P(2), P(3), \ldots, P(n)$ su T)

Treba dokazati da je tvrdnja tačna za $n+1$ tj. da se broj $n+1$ može razložiti na proste brojeve. (tj. ? $P(n+1)$ je T)

Razlikujemo dva slučaja:

a) $n+1 \rightarrow$ prost broj $\Rightarrow$ $n+1 = (n+1) \cdot 1$ $\Rightarrow$ tvrdnja tačna T

b) $n+1 \rightarrow$ nije prost tj. $n+1 \rightarrow$ složen broj što po def.

znači:

$$n+1 = k \cdot m$$

$$k, m \in \mathbb{N}$$

$$2 \leq k, m < n+1$$

Sada je po induktivnoj pp.:

$k \rightarrow$ proizvod prostih brojeva

$m \rightarrow$ proizvod prostih brojeva

Dakle i broj $n+1 = k \cdot m$ je proizvod prostih brojeva

tj. $P(n+1)$ je tačna!

Dakle, tvrdnja je tačna za sve $n \in \mathbb{N}$!

Problem. (Igra skladištenja!) [MIT, Meyer, str. 104, 6.2.3.] ($n \in \mathbb{N}$) 11

Na početku se ima skladište koje sadrži n kutija.
Igra se sastoji od niza koraka. U svakom koraku se jedno proizvoljno skladište dijeli na dva neprazna skladišta.
Igra se završava kada dobijemo tačno n skladišta koji sadrže po tačno jednu kutiju.
U svakom koraku igre se zarađuju određeni bodovi i to na način da se, u nekom koraku, pri dijeljenju skladišta od $(a+b)$ kutija na dva skladišta od po a i b kutija, dobija $a \cdot b$ bodova. Rezultat igre je ukupan broj bodova dobijen u svim koracima.
Dokazati da je za svako početno skladište od n kutija, uz ovu strategiju igre, finalan rezultat jednak $\frac{n(n-1)}{2}$ zarađenih bodova.

Neka je $n = 5$:

Korak					Bodovi:
	$\boxed{5} = n$				
1	3	2			$3 \cdot 2 = 6$
2	2	2	1		$2 \cdot 1 = 2$
3	1	2	1	1	$1 \cdot 1 = 1$
4	1	1	1	1 1	$1 \cdot 1 = 1$

$$\Sigma = 6+2+1+1 = 10 = \frac{5\cdot(5-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

- Dokaz se izvodi upotrebom potpune (stroge) mat. indukcije!

- Dokaz za startnu vrijednost $n = 1$

$n = 1 \rightarrow$ imamo skladište od samo jedne kutije.
Jasno je da se ovo skladište ne može dijeliti na dva neprazna skladišta tj. nikakvi koraci nisu mogući tako da je finalni rezultat $\frac{1\cdot(1-1)}{2} = 0$ što je tačno tj. $P(1)$ je T.

- Pp. će se da su svi $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ tačni i da oni impliciraju tačnost $P(n+1)$ za sve $n \geq 1$.

Dakle, neka imamo skladište od $(n+1)$ kutija.
Ovo skladište u prvom koraku podijelimo na dva skladišta koje sadrže redom a i b kutija.
Vrijedi:

$$\underbrace{a + b = n+1}_{1 \leq a,\, b < n+1} \quad \text{tj.} \quad 1 \leq a, b \leq n$$

Bodovi:

(12)

korak $\underline{n+1}$

1 $\quad a \quad\quad b \quad \longrightarrow \quad ab$

$a \xrightarrow{\text{ind. pp.}} \frac{a(a-1)}{2}$

$b \xrightarrow{\text{ind. pp.}} \frac{b(b-1)}{2}$

$$\Sigma = ab + \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}$$

$$a+b=n+1$$

Dakle, ukupan broj bodova je:

Σ = Bodovi u 1. koraku + Bodovi razlaganja skladišta od a kutija + Bodovi razlaganja skladišta od b kutija

Prema ind. pp. stroge indukcije budući da su:
$a \leq n$ i $b \leq n \Rightarrow$

$$\Sigma = ab + \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} =$$

$$= \frac{2ab + a^2 - a + b^2 - b}{2} =$$

$$= \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - (a+b)}{2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 - (a+b)}{2} =$$

$$= \frac{(a+b)[(a+b)-1]}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)[n+\cancel{1}-\cancel{1}]}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} \rightarrow \text{što je trebalo dokazati!}$$

Dakle, tvrdnja o ukupnom broju zarađenih bodova $(n(n-1)/2)$ vrijedi za svako skladište koje sadrži bilo koji broj $n \in \mathbb{N}$ kutija!

(DZ) Stroga indukcija : MIT, str. 104. Pr. 6.2.2.

U nekoj državi od novčanica postoje samo kovanice od 3 D (dinara) i 5 D (dinara). Dokazati da se svi iznosi dinara, veći ili jednaki od 8 D mogu izraziti od kovanica 3D i 5D.

(DZ) Binarna prezentacija broja!

Svaki prirodni broj n se može izraziti kao:

$$n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \dots + c_1 2 + c_0$$

gdje su: $c_r = 1$; $c_i = 1$ ili 0 za $i = 0, 1, 2, \dots, r-1$.

(r – neki nenegativan broj!)

Dokaz: $n = 1$

$n = 1 = c_0$

Pp. da svi brojevi $\leq n$ imaju binarnu prezentaciju.

Dokaz da je ima i broj $n+1$:

- ako je $n+1$ paran $\Rightarrow$ $\frac{n+1}{2}$ je cio broj i $\frac{n+1}{2} \leq n$ tj. ovaj broj ima binarnu prezent.:

$$\frac{n+1}{2} = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \dots + c_1 2 + c_0 \quad / \cdot 2$$

$$n+1 = c_r 2^{r+1} + c_{r-1} 2^r + \dots + c_1 2^2 + c_0 \cdot 2$$

$$n+1 = c_{r+1} 2^{r+1} + c_r 2^r + \dots + c_2 2^2 + c_1 2 + c_0, \quad c_0 = 0$$

- ako je $n+1$ neparan toda je $\frac{(n+1)-1}{2} = \frac{n}{2}$ cio broj i $\frac{n}{2} \leq n$ tj. i ovaj broj ima binarnu prezent.:

$$\frac{(n+1)-1}{2} = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \dots + c_1 2 + c_0$$

$$n+1 = 2c_r 2^r + 2c_{r-1} 2^{r-1} + \dots + 2c_1 2 + 2c_0 + 1$$

$$n+1 = c_r 2^{r+1} + c_{r-1} 2^r + \dots + c_1 2^2 + c_0 2 + 1$$

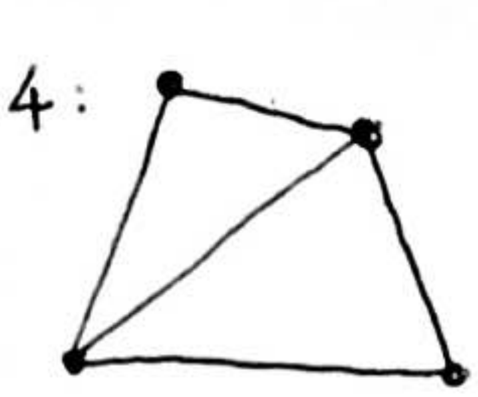
$$n+1 = c_{r+1} 2^{r+1} + c_r 2^r + \dots + c_2 2^2 + c_1 2 + c_0$$

Ⓩ. Dokazati da se svaki konveksan poligonom sa $n \geq 3$ vrhova, proizvoljno odabranim dijagonalama koje se ne sijeku, dijeli na tačno $n-2$ trouglova.

$n=3$:

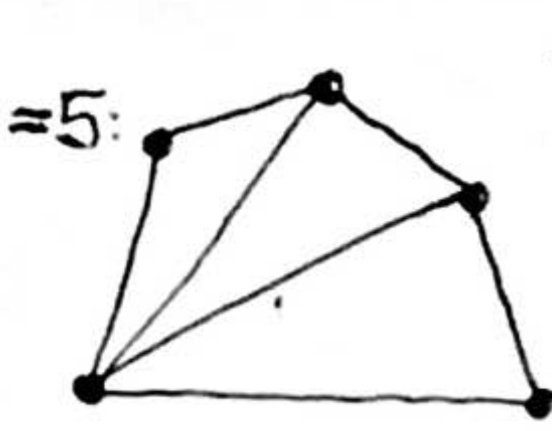
nema podjele $\Rightarrow n-2=3-2=1$ trougao!

$n=4$:



$n-2=4-2=2$ trougla!

$n=5$:



$n-2=5-2=3$ trougla

$P(n)$ je iskaz $\rightarrow$ zadatak!

Dokaz se provodi strogom indukcijom!

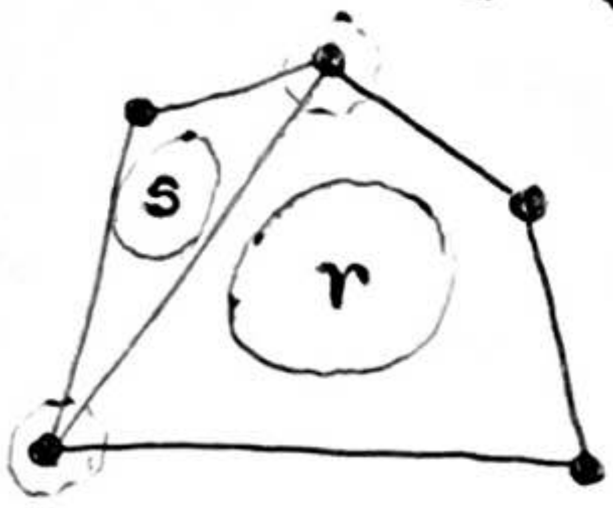
Za početnu vrijednost je $P(3)$ T ($n=3 \Rightarrow$ nema podjele $\Rightarrow n-2=3-2=1$ trougao)

Pp. da je $P(3), P(4), \ldots, P(n)$ T i da $\Rightarrow P(n+1)$ T

• $P(n+1)$ znači da se poligon od $(n+1)$ vrhova dijagonalama koje se ne sijeku uvijek dijeli na:

$(n+1)-2 = n-1$ trouglova.

Dokaz : Neka se poligon od $(n+1)$ vrhova jednom proizvoljnom dijagonalom dijeli na 2 poligona sa r i s vrhova:



Vrijedi: $3 \leq r,s < n+1$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} 3 \leq r \leq n \\ 3 \leq s \leq n \\ \hline r+s-2 = n+1 \end{array}$$

$\downarrow$ dva su zajednička vrha, pa se duplo broje i u r i u s

Prema ind. pp. tvrdnja vrijedi za $P(r)$ i $P(s)$ tj. poligoni sa r i s vrhova se dijele na tačno $(r-2)$ i $(s-2)$ trouglova!

Dakle, ukupan broj trouglova za poligon od $(n+1)$ vrhova je:

$$\begin{aligned} \text{Broj } \Delta_{n+1} &= \text{Broj } \Delta_r + \text{Broj } \Delta_s = \\ &= (r-2)+(s-2) = \\ &= \underbrace{(r+s-2)}_{n+1} - 2 = (n+1)-2 = n-1 \quad (T) \end{aligned}$$

Dakle, polazna tvrdnja je tačna za sve $n \geq 3$.