# INDUKCIJA – UVOD!

Posmatranjem ili eksperimentisanjem u prirodnim naukama dobijaju se podaci koji se odnose na neku pojavu. Iz ovih – posebnih slučajeva (posmatranja ili eksperiment.) izvodi se stav – tvrdnja – iskaz u obliku radne hipoteze ili zakona koji opisuje ovu pojavu u svim slučajevima. Ovaj način zaključivanja naziva se INDUKCIJA.

**def.**

Indukcija je **zaključivanje**, kojim se **iz** stavova, koji se odnose na ograničeni broj pojedinačnih slučajeva iste vrste **izvodi** jedan **opšti stav** tj stav koji se odnosi na **sve slučajeve** te vrste.

Indukcija – empirijska indukcija – fizička indukcija

Indukcija : → od pojedinačnog ka opštem

Dedukcija : od opšteg ka pojedinačnom

Indukcijom se dolazi do < **tačnih**, istinitih stavova / **netačnih**, neistinitih stavova

Primjeri **neistinitih** stavova dobijeni empirijskom indukcijom:

1. **LEIBNIZ** je dokazao relacije:

$$3 \mid n^3 - n \quad ; \quad 5 \mid n^5 - n \quad ; \quad 7 \mid n^7 - n \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \ldots$$

i na osnovu njih pp da generalno vrijedi

$$k \mid n^k - n \quad (k - \text{neparno},\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Međutim sam LEIBNIZ je ustvari primijetio $9 \mid n^9 - n$ nije tačno jer za $n = 2 \Rightarrow 2^9 - 2 = 510$ nije djeljiv sa 9.

2. **FERMAT** je posmatrao brojeve oblika:

$$f(n) = 2^{2^n} + 1 \; ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$f(0) = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \rightarrow$ **prost**; $f(1) = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \rightarrow$ **prost**;

$f(2) = 17$; $f(3) = 257$; $f(4) = 65\,537 \rightarrow$ **svi prosti** $\Rightarrow$

FERMAT je pp da su svi $f(n)$ prosti.

Međutim, **EULER** $\Rightarrow f(5) = 4294967297$ je djeljiv sa 641.

# MATEMATIČKA INDUKCIJA

Matematička indukcija je **najmoćniji i najčešće** korištena tehnika dokazivanja u diskretnoj matematici i kompjuterskim naukama!

OBIČNA INDUKCIJA:

Princip indukcije:

Neka je dat $P(n)$ iskaz (tvrdnja!)

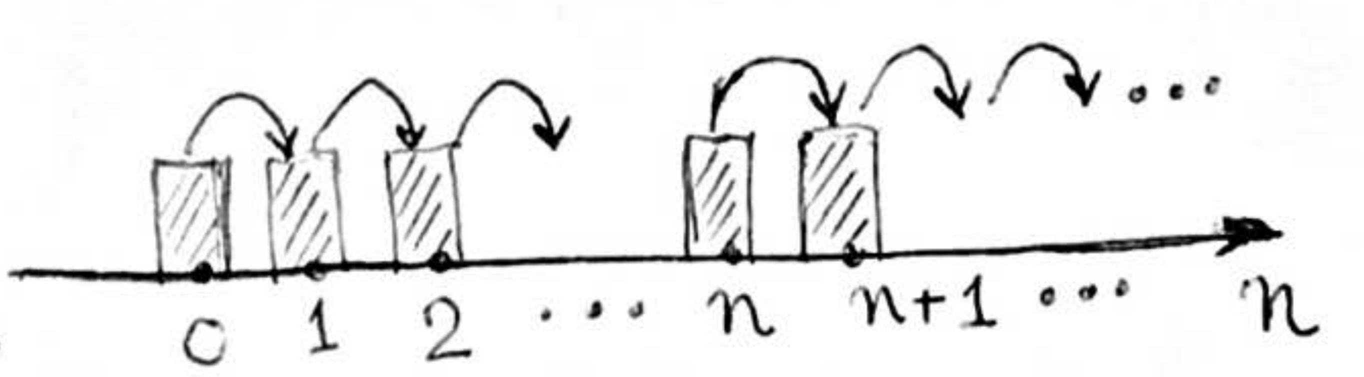
Ako je: • $P(0)$ tačno ($P(n_0)$ tačno!) → $n_0 > 0$

• $P(n)$ implicira $P(n+1)$ za sve nenegativne cijele $n$ → $\forall n \geq 0 \ (n_0)$

Tada je: • $P(m)$ tačno za sve nenegativne cijele $m$ → $\forall m \geq 0 \ (n_0)$

Indukciono pravilo:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(0),\ \forall n \in N \ \ P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ \forall m \in N \ \ P(m) \end{array}}$$




Obična matematička indukcija se često koristi u dokazima tačnosti nekih iskaza u kojima direktno učestvuje neki nenegativni cijeli broj. Odnosno to su najčešće dokazi:

- jednakosti
- nejednakosti
- djeljivosti
- geometrija
- logičko-kombinatorni problemi itd.

Primjer: Potrebno je dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost (Gauss):

MIT Algorithm!

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ili} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dakle, potrebno je prema principu indukcije:

- **dokazati** da je $P(1)$ tačno
- **pp.** da je $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ **tačno**
- **dokazati** da iz tačnosti $P(n) \Rightarrow$ tačnost $P(n+1)$

- dokaz za $n = 1$:

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

$1 = 1$ (T) $\Rightarrow$ dokaz završen!

- pp. da je $P(n)$ tačan za $n$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- dokaz za $P(n+1)$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

$$L = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$L = \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n}_{} + (n+1) \stackrel{\text{ind. pp.}}{=}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

što je i trebalo dokazati!

Postoji **pet** osnovnih formalnih **koraka** u dokazima gdje se koristi matematička indukcija:

1° **Deklaracija** (izjava) o **upotrebi** indukcije u dokazu.

2° **Definisanje** odgovarajuće **tvrdnje (iskaza) $P(n)$**
($P(n)$ se zove **induktivna hipoteza**)

3° **Dokaz** za stalnu vrijednost $n=0$ $(n_0)$ tj. $P(0)$ $(P(n_0))$
(ovaj korak se zove **bazni korak** indukcije!)

4° **Dokaz** da $P(n)$ **implicira** $P(n+1)$ za svaki nenegativni cio broj $\forall n$.
Dakle, pp. se da je $P(n)$ tačan i na osnovu ove pp. se dolazi do dokaza da je $P(n+1)$ tačno.
(Ovaj korak se zove **induktivni korak**!)
Dakle **dokazuje se serija** implikacija:

$$P(0) \to P(1); \quad P(1) \to P(2), \quad P(2) \to P(3), \ldots$$

5° **Poziv na indukciju**: Na osnovu prethodno provedenih koraka indukcije **zaključuje se** da je **$P(n)$ tačno za sve** nenegativne **$n$**.

Primjer:

Potrebno je dokazati jednakost:

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \xrightarrow{\text{iskaz, tvrdnja!}} [P(n)]$$

za sve prirodne brojeve $n\in\mathbb{N}$.

Dokaz:

1° Ova jednakost će se dokazati upotrebom mat. indukcije

2° Potrebno je dokazati polaznu jednakost – induktivna hipoteza $P(n)$

3° dokažimo valjanost za početni $n=1$:

$$1^3=\left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2$$

$$1=1 \quad (T)$$

4° Pp. da je $P(n)$ tačno i dokažimo za $n+1$ tj. $P(n+1)$

Pp. $1^3+2^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Dokaz za $n+1$:

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}\right]^2$$

$$L=1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3=\underbrace{\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2}$$

$$L=\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}+(n+1)^3=$$

$$\overset{\text{(ind. pp.)}}{=}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=$$

$$=\underbrace{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}$$ što je i trebalo dokazati

5° Dakle, polazni iskaz $P(n)$ je tačan $\forall n\in\mathbb{N}$!

Primjer* Potrebno je dokazati jednakost: (6.)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \qquad P(n)$$

za svaki prirodni broj $n \in N$.

1° Pomenuta jednakost će se dokazati upotrebom mat. ind.

2° Induktivna hipoteza je polazna jednakost $\rightarrow P(n)$

3° dokaz za startnu vrijednost za $n$:

$n=1$: $$\frac{1}{1\cdot(1)2}+\frac{1}{3\cdot 2\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot n\cdot 2}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

sa lijeve strane je n sabiraka! sa desne strane je n sabiraka!

uzme jedan sabirak sa lijeve i jedan sa desne strane!

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad (T)$$

4° pp. da je $P(n)$ tačno i dokažimo tačnost $P(n+1)$:

Ind. pp. $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

Dokaz za $n+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}+\frac{1}{[2(n+1)-1]\,2(n+1)}=\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2(n+1)}$$

$$L=\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\boxed{\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

Prema ind. pp. $\Rightarrow$

$$L=\frac{1}{n+1}+\boxed{\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=$$

?

$$=\underbrace{\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

što je OK!

$$\frac{2}{2(n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$\frac{2(2n+1)+1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{2n+2+2n+1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \quad (T)$$

5° Dakle, polazna jednakost tj. iskaz $P(n)$ je tačna za $\forall n \in N$!

Primjer: Dokazati nejednakost za $n \geq 1$:

7.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$$

$n = 1$: $\quad 1 \leq 2\sqrt{1}$

$1 \leq 2 \quad (T)$

$n$: $$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$$

$n+1$: $$L = \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$L \leq 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\leq} 2\sqrt{n+1} \quad (?)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2\left(\cancel{\sqrt{n+1}^2} - \cancel{\sqrt{n}^2}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\leq} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad /\cdot 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (T)$$

DZ.

1. Dokazati jednakosti:

a) $$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

c) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

2. Dokazati jednakosti:

a) $$\prod_{j=1}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^j} = \frac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

b) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^j}}{2^j} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}}{2^n} - \operatorname{ctg}\alpha$$

c) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^j\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2^n\alpha$$

3. Ako je niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definisan sa:

$$a_0 = 2; \quad a_1 = 3; \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

dokazati da tada vrijedi:

$$a_n = 2^n + 1.$$

4. Dat je FIBONACCI-jev niz koji poštuje relacije:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 1;$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad ; n = 1, 2, \dots$$

Dokazati da vrijedi:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

5. Dokazati jednakost: $$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{-korijena!}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

6. Niz polinoma $P_i(x)$ je definisan kao:

$P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ za $n \geq 1$.

Dokazati da vrijedi: $$P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

7. Dokazati nejednakost: $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)! \geq ((n+1)!)^n$, $n \in \mathbb{N}$.