REKURZIVNE JEDNAČINE

• LINEARNA HOMOGENA REKURZIJA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Rekurzivna relacija oblika:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} \ ; \ n \geq r \qquad \dots (1)$$

gdje su $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, r$ date konstante i $c_r \neq 0$ naziva se linearna homogena rekurzivna jednačina s konstantnim koeficijentima reda r.

Primjer:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow$ homogena rekurzija

$a_n = 2a_{n-1} + 4 \rightarrow$ nije homogena

$a_n = (n+1)a_{n-1} + a_{n-2}a_{n-3} \rightarrow$ nije linearna.

Rješenje jednačine (1) se dobija u obliku linearne kombinacije partikularnih rješenja oblika:

$a_n = x^n$ (Eulerova smjena!) ; $x \neq 0$ (inače je $a_n = x = 0 \rightarrow$ trivijalno rješenje!)

Dakle,
$$a_{n-1} = x^{n-1}$$
$$a_{n-2} = x^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$a_{n-r} = x^{n-r}$$

$$(1) \Rightarrow \quad x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_r x^{n-r} \quad /: x^{n-r}$$
$$x^r - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \dots - c_{r-1} x - c_r = 0 \qquad \dots (2)$$

Jednačina (2) se zove karakteristična jednačina rekurzivne relacije (1). Rješenja jednačine (2) se zovu karakteristični korjeni rekurzivne relacije (1).

Razlikuju se dva slučaja:

- slučaj r različitih korjena karakt. jednačine
- slučaj kada postoje višestruki korjeni karakt. jednačine.

ⓐ Različiti korjeni: $x_1, x_2, \dots x_r$

Pp. da su svi korjeni karakt. jednačine ~~$x_1, x_2, \dots, x_n$~~ (2) međusobno različiti.

Tada je opšte rješenje (1) dato sa:

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \dots + \lambda_r x_r^n$$

Primjer:

Potrebno je naći opšti član rekurzije u funkciji n:

$a_0 = 0$; $a_1 = 1$; $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $n \geq 2$.

$a_n = 5a_n - 6a_{n-2}$

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$

$a_n = x^n \Rightarrow$

$x^n - 5x^{n-1} + 6x^{n-2} = 0 \; / : x^{n-2}$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$

Opšte rješenje: $a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n$

$\lambda_1, \lambda_2 = ?$ iz početnih uslova!

$n = 0$: $a_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$n = 1$: $a_1 = 1 \Rightarrow 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1$

$\lambda_2 = -\lambda_1$

$2\lambda_1 + 3(-\lambda_1) = 1$

$2\lambda_1 - 3\lambda_1 = 1$

$-\lambda_1 = 1$

$\underline{\lambda_1 = -1}$

$\lambda_2 = -(-1) = 1$

$\underline{\lambda_2 = 1}$

$\Rightarrow$ traženo rješenje rekurzije:

$a_n = (-1) \cdot 2^n + 1 \cdot 3^n$

$\Rightarrow \underline{a_n = 3^n - 2^n.}$

Primjer:

Za Fibonaccijevu rekurziju je potrebno pronaći opšti član rekurzije u funkciji n:

$a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$ sada objasniti rečeno !!!

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_n = x^n \Rightarrow$$

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \quad / : x^{n-2}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Opšte rješenje:

$$a_n = \lambda_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$\lambda_1, \lambda_2 = ?$ iz početnih uslova !

$$n = 0:\ a_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$n = 1:\ a_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \lambda_2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \lambda_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \quad / \cdot 2$$

$$\lambda_1 (1-\sqrt{5}) - \lambda_1 (1+\sqrt{5}) = 2$$

$$\lambda_1 (\cancel{1} - \sqrt{5} - \cancel{1} - \sqrt{5}) = 2$$

$$-\cancel{2}\sqrt{5}\lambda_1 = \overset{1}{\cancel{2}} \quad / : (-2)$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

b) Višestruki korijeni:

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_t$ korijeni karakteristične jednačine i neka svakom korijenu x_i odgovara višestrukost v_i, $i = 1, 2, \ldots, t$. (Nap. v_i može biti i 1).

Tada je partikularno rješenje rekurzije koje odgovara korijenu x_i dato sa:

$$a_n^{(i)} = \lambda_1^{(i)} x_i^n + \lambda_2^{(i)} n x_i^n + \ldots + \lambda_{v_i}^{(i)} n^{v_i - 1} x_i^n$$

za sve $i = 1, 2, \ldots, t$.

Opšte rješenje rekurzije je dato sa:

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots + a_n^{(t)}$$

Iz opšteg rješenja se na osnovu početnih uslova određuju konstante λ_j.

Primjer: Potrebno je riješiti rekurziju:

$$a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3};$$
$$a_0 = 1;\ a_1 = 2;\ a_2 = 3.$$

$$a_n = x^n \Rightarrow \quad x^n = 7x^{n-1} - 15x^{n-2} + 9x^{n-3} \quad /: x^{n-3}$$
$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$$
$$x_1 = 1;$$
$$x_2 = x_3 = 3 \quad (v = 2)$$

Opšte rješenje rekurzije:

$$a_n = \lambda_1 \cdot 1^n + \lambda_2 \cdot 3^n + \lambda_3 \cdot n \cdot 3^n$$

$$n = 0 \Rightarrow a_0 = 1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$
$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 + 9\lambda_2 + 18\lambda_3 = 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Opšte rješ. $\quad a_n = 3^n - \frac{1}{3} n 3^n$

$$a_n = \left(1 - \frac{n}{3}\right) 3^n$$

Scanned by TapScanner

LINEARNE NEHOMOGENE REKURZIJE S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA:

Ova rekurzija r-tog reda ima oblik:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n), \quad n \geq r$$

$c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$; $c_r \neq 0$; $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (funkcija).

Postupak rješavanja:

1° odredi se opšte rješenje a_n^h pripadne homogene rekurzije tj. $f(n) = 0$ (ali se ne izračunavaju neodređeni koeficijenti!)

2° odredi se partikularno rješenje a_n^p nehomogene rekurzije (tj. prema obliku $f(n)$ se odredi oblik i koeficijenti u a_n^p)

3° opšte rješenje rekurzije je:

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

(na osnovu početnih uslova se odrede neodređeni koeficijenti ostali u a_n^h).

Nalaženje partikularnog rješenja se pronalazi iz tabele:

$f(n)$	partikularno rješenje a_n^p
$f(n) = c \cdot d^n$	(a) d nije korjen karakt. jednačine: $a_n^p = A \cdot d^n$ (b) d je korjen karakt. jednačine višestrukosti k: $a_n^p = A \cdot n^k \cdot d^n$
$f(n)$ polinom stepena m	(a) 1 nije korjen karakt. jednačine: $a_n^p = \sum_{i=0}^{m} A_i n^i$ (polinom stepena m) (b) 1 je korjen karakt. jedn. višestrukosti k: $a_n^p = n^k \cdot \sum_{i=0}^{m} A_i n^i$ → polinom stepena m
$f(n) = c \cdot n^m \cdot d^n$	(a) d nije korjen karakt. jedn.: $a_n^p = \left(\sum_{i=1}^{m} A_i n^i\right) \cdot d^n$ (b) d je korjen karakt. jedn. višestrukosti k: $a_n^p = n^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} A_i n^i\right) \cdot d^n$

Nap. c, d, A, A_i su const!

Primjer.

Potrebno je odrediti rješenje rekurzije:

$$a_0 = 0;\ a_{n+1} = a_n + n + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0+1 \\ a_2 = 0+1+2 \\ \vdots \\ a_n = 0+1+2+\ldots+n \end{array}\right\} = ?$$

(I) $a_{n+1} = a_n$

$a_{n+1} - a_n = 0$

$a_n = x^n \Rightarrow$

$x^{n+1} - x^n = 0 \quad / : x^n$

$x - 1 = 0$

$x_1 = 1$

$\Rightarrow a_n = \lambda \cdot 1^n$

(II) $f(n) = n+1$

$x = 1$ je rješenje karakt. jednačine $\Rightarrow$

$a_n^f = n \cdot (an + b) \Rightarrow$

$a_{n+1}^f = (n+1) \cdot [a(n+1) + b]$

$a_{n+1}^f = a_n^f + n + 1$

$(n+1)[a(n+1)+b] = n(an+b) + n + 1$

$(n+1)^2 a + (n+1)b - an^2 - bn = n+1$

$\cancel{an^2} + 2an + a + \cancel{bn} + b - \cancel{an^2} - \cancel{bn} = n+1$

$2a \cdot n + a + b = 1 \cdot n + 1$

$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$a + b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n^f = n\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$

Opšte rješ. rekurzije:

$a_n = \lambda \cdot 1^n + \frac{n(n+1)}{2}$

$n = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow \lambda + \frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Scanned by TapScanner