REKURZIJE

Rekurzija u matematici i računarstvu predstavlja metodu definisanja funkcija u kojima se definirajuća funkcija primjenjuje unutar same definicije.
Svaka rekurzija je definisana sa dva elementa:

- bazni slučaj (početni uslov!)
- korak rekurzije (rekurentna relacija!)

U matematici tj. računarstvu rekurzije se uglavnom odnose na nizove definiranih brojeva $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ili samo (a_n) ili $\{a_n\}$.
Tada rekurzijom (rekurzivnom relacijom ili rekurentnom! ili rekurzivnom jednačinom ili rekurzivnom formulom) zovemo svaku relaciju pomoću koje se n-ti član niza izražava preko prethodnih $k \leq n$ članova tog niza $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$.
U slučaju da se rekurzijom, element niza definiva preko fiksnog broja prethodnika govorimo o rekurziji konačne prošlosti, dok u slučaju da se rekurzijom, element niza definiva preko svih njegovih prethodnika govorimo o rekurziji beskonačne prošlosti.
Za dobru definiciju rekurzije je potrebno imati definisane početne uvjete. Za rekurzije konačne prošlosti dužine k to su prvih k vrijednosti niza dok je za rekurzije beskonačne prošlosti to prvi element niza!

Matematički, rekurzija je definisana na sljedeći način:
Neka je S skup, $a \in S$ i neka je za svako $n \in \mathbb{N}$ dato preslikavanje $f_n : \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n\text{-puta}} \to S$.

Tada postoji jedinstveni niz (a_n) u S takav da je:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_{n+1} &= f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ za svako } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}\right\} (*)$$

Specijalno, ako f_n zavisi samo o varijabli a_n tada je $\boxed{a_{n+1} = f_n(a_n)}$, onda imamo preslikavanje $f_n : S \to S$ tj. jedinstveni niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = f_n(a_n)$.
Formula $(*)$ se zove rekurzivna relacija (jednačina).

Napomena:
Nekada se piše:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(n+1) &= 2f(n) + 3 \end{aligned}\right\} \text{itd.}$$ tj. preko f-je f

---

Primjer:

Neka je niz (a_n) definisan rekurzivno kao:

$$a_0 = 100$$
$$a_n = 2a_{n-1}$$

Potrebno je odrediti opšti član niza $a_n = f(n)$.

$a_0 = 100$

$a_1 = 2 \cdot a_0 = 200 = 100 \cdot 2$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 400 = 100 \cdot 2^2$

$a_3 = 2a_2 = 800 = 100 \cdot 2^3$

$a_4 = 2 \cdot a_3 = 1600 = 100 \cdot 2^4$

$a_5 = 2 \cdot a_4 = 3200 = 100 \cdot 2^5$

itd.

Naslućujemo da vrijedi $a_n = 100 \cdot 2^n$.

Dokaz indukcijom:

$n = 0$:

$a_0 = \underbrace{100}_{} = 100 \cdot 2^0 = 100 \cdot 1 = 100$ (T)

pp. za n:

$\underline{a_n = 100 \cdot 2^n}$

dokaz za $n+1$:

? $a_{n+1} = 100 \cdot 2^{n+1}$

Rekurzivna relacija:

$a_{n+1} = 2a_n \overset{(\text{ind. pp.})}{=} 2 \cdot 100 \cdot 2^n = 100 \cdot 2^{n+1}$ (T)

Dakle, vrijedi $\underline{a_n = 100 \cdot 2^n}$.

Poznati primjeri rekurzivnih relacija:

- Izvačunavanje sume:

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = a_n + f(n+1)$$

Primjer: Suma prvih $n+1$ pr. brojeva; $f(n+1) = n+1$ tj. $f(n) = n$

$$a_0 \overset{\text{def.}}{=} 0$$
$$a_1 = 0 + 1$$
$$a_2 = 0 + 1 + 2$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n$$
$$a_{n+1} = \underbrace{0 + 1 + 2 + \ldots + n}_{a_n} + \underbrace{(n+1)}_{f(n+1)} = a_n + (n+1)$$
$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

- Izvačunavanje proizvoda:

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot f(n+1)$$

Primjer: Faktorijel: $f(n) = n$ tj. $f(n+1) = n+1$

$$a_0 \overset{\text{def.}}{=} 1 = 0!$$
$$a_1 = 1 \cdot 1 = 1!$$
$$a_2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2!$$
$$\vdots$$
$$a_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$$
$$a_{n+1} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}_{a_n} \cdot \underbrace{(n+1)}_{f(n+1)} = a_n \cdot (n+1)$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot (n+1)$$

• Fibonaccijevi brojevi: (već više od 800 god. se izučavaju, primjena u modeliranju rasta populacija!)

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; \quad n \geq 2$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 3$

$a_4 = 5$

$a_6 = 8$

$a_7 = 13$

$a_8 = 21$

$\vdots$

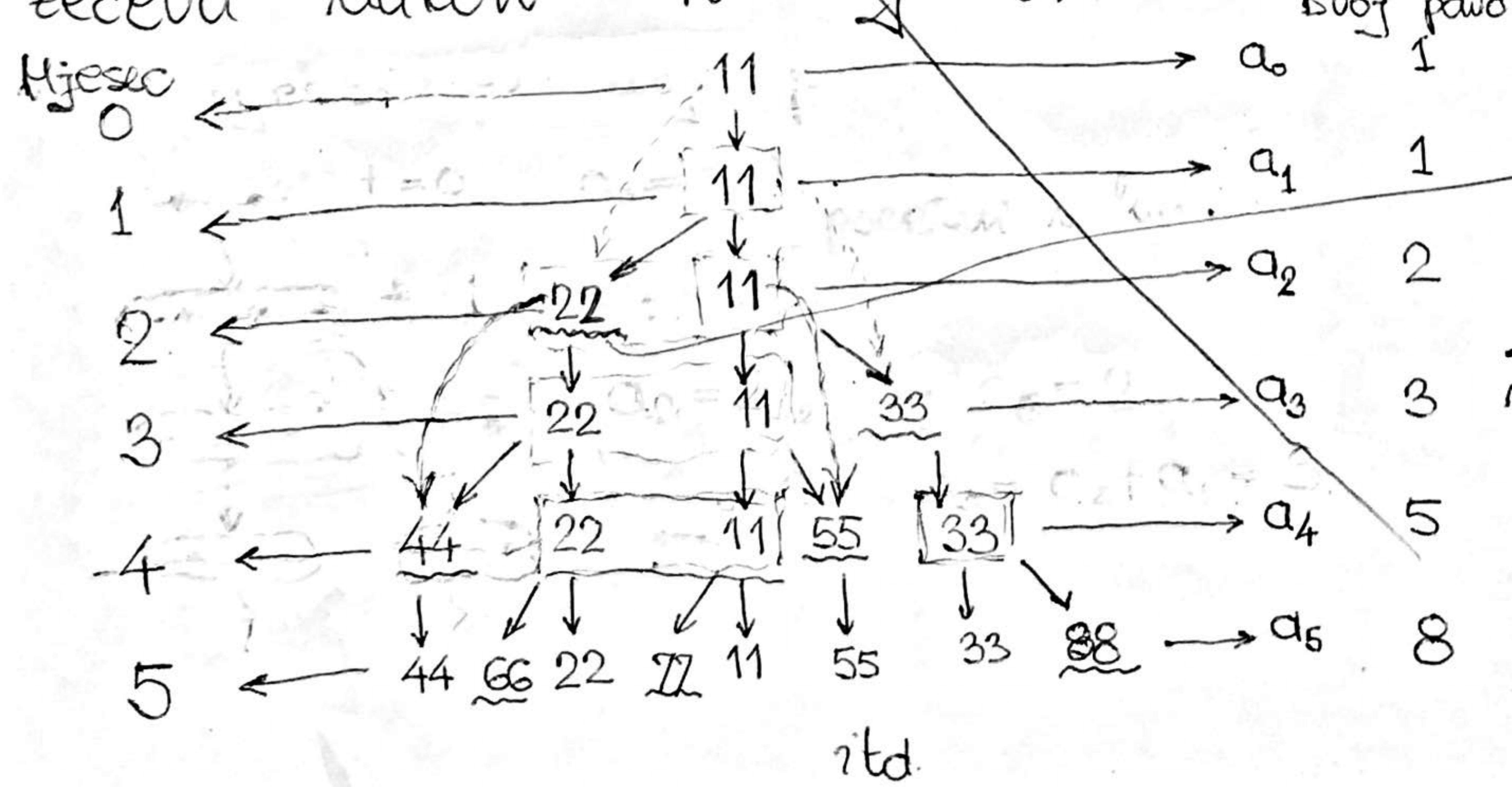
Šta je $a_n = ?$

$$\underbrace{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}_{} ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

svi članovi ovog niza su strogo cijeli brojevi!!

Zaključak je:
Neka je a_n broj parova nakon n mjeseci.
Taj broj se dobije kao broj parova koji su živjeli prije 1 mjesec (a_{n-1}) plus broj novorođenih parova koji mogu doći samo od parova koji su živjeli prije dva mjeseca (a_{n-2})

Leonardo od Pise - Fibonacci je 1202 g. u svom radu "Liber abaci" - problem zečeva postavio:
Svaki zreo par zec - zečica tokom svakog sljedećeg mjeseca dobije par mladih (zeca i zečicu). Uz pp da zečevi nikad ne umiru, i da zrelost tj. prve mlade dobijemo nakon dva mjeseca potrebno je odrediti ukupan broj parova zečeva nakon n mjeseci!



nezreo par!

podvučeno znači tek rođeni par tj. idući mjesec ne može imati mlade!

itd.

- Slabo formirane (definisane) rekurzije:

Primjer: $a_n = 2 + a_{n-1}$ (nema početnog uslova tj. baznog slučaja!)

$a_0 = ?$

Dakle, relacijom $a_n = 2 + a_{n-1}$ nije jedinstveno određen niz a_n.

Primjer:
$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 0 \\ a_{n+1}, & \text{za ostale } n \end{cases}$$

U ovom slučaju postoji početni uslov ali još uvijek niz a_n nije jedinstveno određen. (npr. bilo koji konstantni niz $a_n = const$ uz $a_0 = 0$ zadovolj. ova ograničenja!)

Primjer:
$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ djeljiv sa } 2 \\ 1, & \text{ako je } n \text{ djeljiv sa } 3 \\ 2, & \text{za ostale } n \end{cases}$$

Ovako definisana rekurzija nije konzistentna. Naime, za $n = 6 \Rightarrow a_6 = 0$ jer je $6 : 2$ i
$a_6 = 1$ jer je $6 : 3$

? pa šta je onda a_6! COLLATZ-ova konjektura!

Primjer: [Mysterious Function MIT, 11.3.2. str. 214]

2019. $\sim 10^{18}$

zaključiti!

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n \leq 1 \\ a_{n/2}, & \text{za } n > 1, n\text{-parno} \\ a_{3n+1}, & \text{za } n > 1, n\text{-neparno} \end{cases}$$

Ova rekurzija povezuje vrijednost člana sa većim argumentom od n tako da se indukcija ne može.

Npr. za $n = 3$:

$a_3 = a_{3\cdot3+1} = a_{10} = a_{10/2} = a_5 = a_{3\cdot5+1} = a_{16} = a_{16/2} = a_8 = a_{8/2} = a_4 =$
$= a_{4/2} = a_2 = a_{2/2} = a_1 = 1$. Pokazalo se da je $a_n = 1$ za n preko 10^9
2014.