Primjer: (7.)

Data je rekurzivna relacija:

$$a_0 = 2;\ a_1 = 3;$$
$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

Dvostruka indukcija!

Potrebno je odrediti opštu relaciju a_n preko n.

$a_0 = 2 \quad = 1+1 = 2^0+1$

$a_1 = 3 \quad = 2+1 = 2^1+1$

$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3\cdot 3 - 2\cdot 2 = 9 - 4 = 5 \quad = 4+1 = 2^2+1$

$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3\cdot 5 - 2\cdot 3 = 15 - 6 = 9 \quad = 8+1 = 2^3+1$

$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3\cdot 9 - 2\cdot 5 = 27 - 10 = 17 \quad = 16+1 = 2^4+1$

$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3\cdot 17 - 2\cdot 9 = 51 - 18 = 33 \quad = 32+1 = 2^5+1$

$\vdots$

Dakle, hipoteza je $a_n = 2^n + 1$

$\underline{n=0}$:

$a_0 = 2 = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ (T)

$\underline{n=1}$:

$a_1 = 3 = 2^1 + 1 = 3$ (T)

pp. za $(n-1)$ i pp. za n tzv. dvostruka ind. pp.:

$$a_{n-1} = 2^{n-1} + 1$$
$$a_n = 2^n + 1$$

dokaz za $(n+1)$:

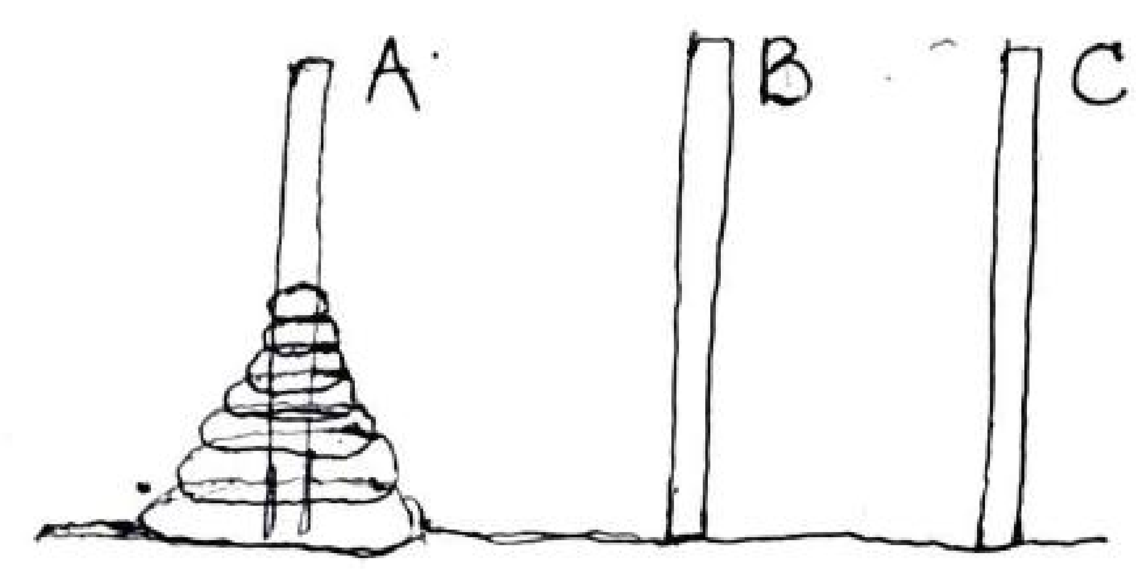
$$a_{n+1} = 2^{n+1} + 1 \quad (?)$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} = 3\cdot(2^n+1) - 2\cdot(2^{n-1}+1) =$$
$$= 3\cdot 2^n + 3 - 2^1\cdot 2^{n-1} - 2 =$$
$$= 3\cdot 2^n - 1 2^n + 1 =$$
$$= 2^1\cdot 2^n + 1 =$$
$$= 2^{n+1} + 1 \quad (T)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 2^n + 1}$$

Primjer. [Hanojske kule → najpoznatiji rekurzivni problem u računarstvu!] (8.)

Data su tri štapa A, B i C koja su zabodena na ravnoj podlozi. Na štapu A je naslagano n kolutova različitih prečnika poredanih po veličini tako da se najveći kolut nalazi na dnu a najmanji na vrhu. Zadatak je prenijeti sve kolutove (i to jedan po jedan) sa prvog na drugi štap B, pri čemu se pri prebacivanju kolutova poštuju sljedeća pravila:



- u jednom koraku je dozvoljeno premjestiti samo jedan kolut,
- nije dozvoljeno staviti veći kolut preko manjeg
- svaki od štapova, uz prethodna pravila, se može koristiti za privremeni smještaj kolutova.

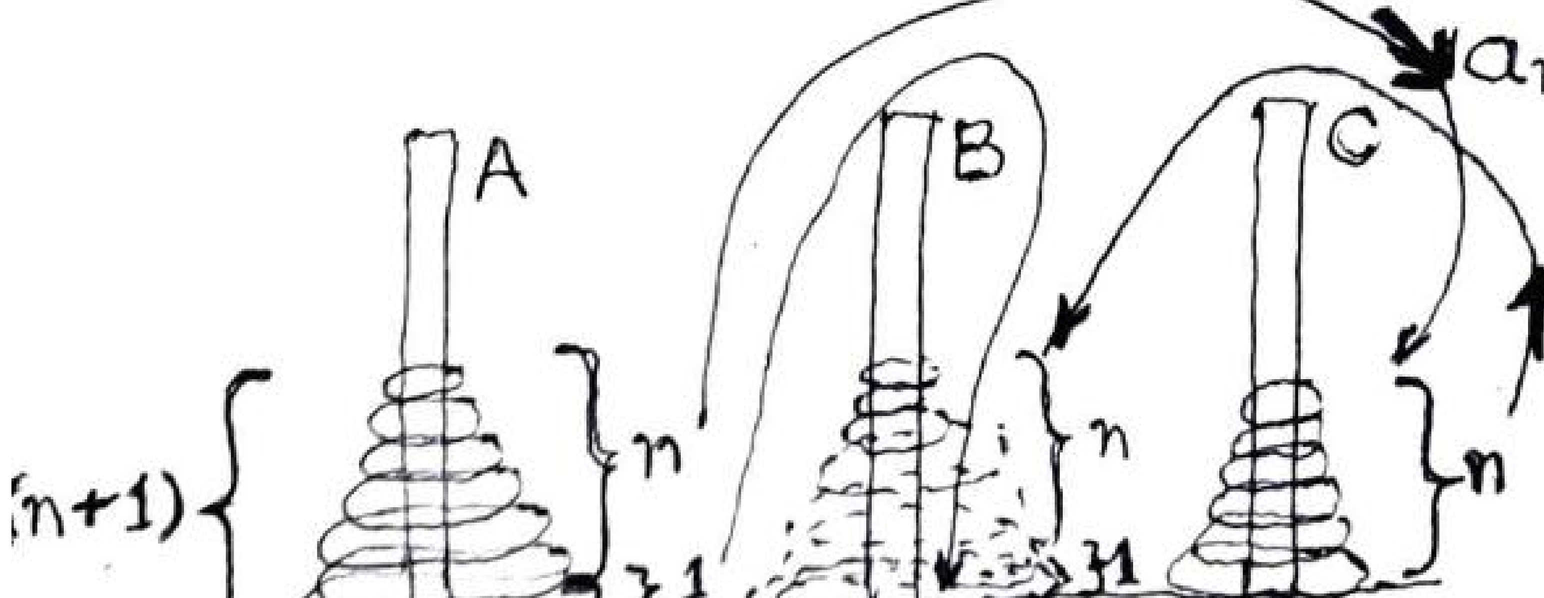
Koliki je najmanji broj koraka (prebacivanja) (prenosa) a_n potreban da se svih n kolutova prenese sa prvog na drugi štap?

Rješenje:

za $n=1$ tj. samo 1 kolut $\Rightarrow$ samo 1 prenos sa A na B $\Rightarrow$ $a_1 = 1$

Pp. da za n kolutova imamo a_n prenosa (tj. da znamo prenijeti n kolutova!)

Za $(n+1)$ kolut postupamo ovako:



- prenesemo n kolutova sa prvog štapa A na treći štap C (možda koristimo i štap B kao pomoć!) te imamo a_n prenosa,
- najveći kolut sa štapa A prebacimo na štap B tj. imamo 1 prenos,
- prenesemo n kolutova sa trećeg štapa C na ciljani drugi štap B te i ovdje imamo a_n prenosa.

Dakle za $(n+1)$ imamo a_{n+1} prenosa i vrijedi:

$$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n \Rightarrow$$

$a_{n+1} = 2a_n + 1 \; ; \; a_1 = 1$ (9.)

$a_1 = 1 \quad (= 2 - 1 = 2^1 - 1)$
$a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (= 4 - 1 = 2^2 - 1)$
$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \quad (= 8 - 1 = 2^3 - 1)$
$a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \quad (= 16 - 1 = 2^4 - 1)$
$a_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \quad (= 32 - 1 = 2^5 - 1)$
$\vdots$

$\Rightarrow$ Induktivno se zaključuje $a_n = 2^n - 1$

Dokaz:

$n = 1$

$a_1 = 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (T)$

pp. za n:

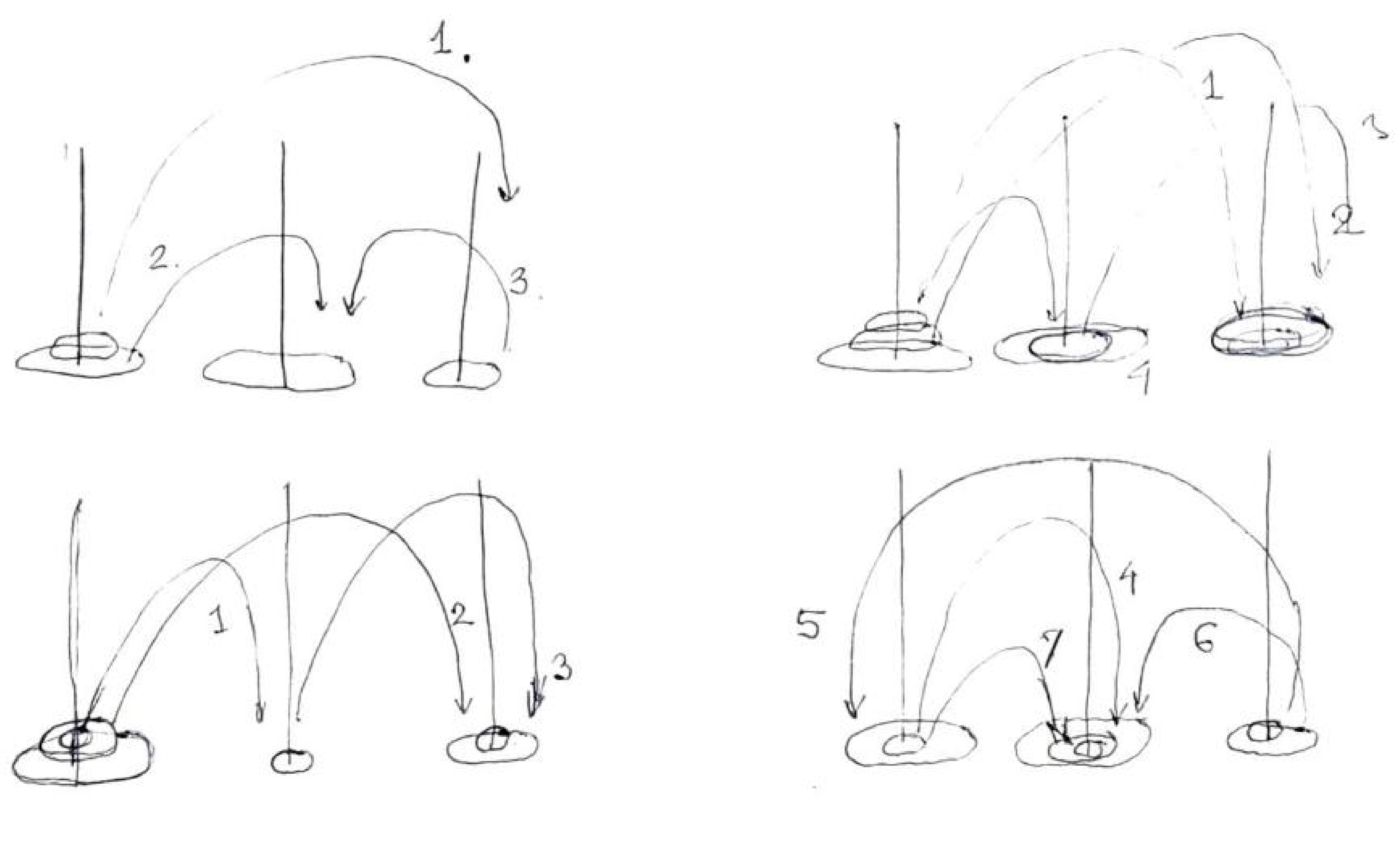
$a_n = 2^n - 1$

dokaz za $(n+1)$:

$a_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \; ; \; (?)$

$a_{n+1} = 2a_n + 1 \overset{pp.}{=} 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 =$
$= 2^{n+1} - 1 \quad (T)$

Dakle, najmanji broj prebacivanja je $2^n - 1$.



Primjer: → Nisam mogao $\sqrt{}$ 10.03.2014.!

Niz brojeva je dat rekurzivnom relacijom:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2+1}, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Pokazati da su svi članovi ovog niza cijeli brojevi!

(10)

$$a_{n+1} - 2a_n = \sqrt{3a_n^2+1} \quad /()^2$$

$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n \overset{+4a_n^2}{=} 3a_n^2 + 1$$

$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 - 1 = 0$$

$$a_n^2 - 4a_{n+1}\cdot a_n + (a_{n+1}^2 - 1) = 0$$

$$a_n = \frac{4a_{n+1} \pm \sqrt{16a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}^2 + 4}}{2}$$

$$a_n = \frac{4a_{n+1} \pm \sqrt{12a_{n+1}^2 + 4}}{2}$$

$$a_n = \frac{4a_{n+1} \pm \sqrt{4}\sqrt{3a_{n+1}^2+1}}{2}$$

$$a_n = \frac{\cancel{4}^{2}a_{n+1} \pm \cancel{2}^{1}\sqrt{3a_{n+1}^2+1}}{\cancel{2}}$$

$$a_n = 2a_{n+1} \pm \sqrt{3a_{n+1}^2+1}$$

Iz rekurzije: $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2+1} > a_n \Rightarrow$ super!

$$a_n = 2a_{n+1} - \sqrt{3a_{n+1}^2+1} \quad \ldots (1)$$

Iz rekurzije $\Rightarrow$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2+1} \quad \ldots (2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow$

$$a_n + a_{n+2} = 4a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n}$$

$a_1 = 1;$

$a_2 = 2\cdot 1 + \sqrt{3\cdot 1^2+1} = 2+2 = 4$

$\Rightarrow$ svi ostali su očito cijeli brojevi!

mogla bi i mat. indukc.!!

(DZ.)

Z.) Za datu rekurzivnu relaciju je potrebno opšti član niza izraziti preko n :

ⓐ $a_0 = 1$; $a_{n+1} = 2a_n$; $n \geq 0$

ⓑ $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n - 1$; $n \geq 0$

ⓒ $a_0 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + 2a_0$; $n \geq 0$

ⓓ $a_0 = 1$; $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$; $n \geq 1$

ⓔ $a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $a_2 = 4$;

$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$; $n \geq 0$

ⓕ $a_0 = 1$; $a_1 = 4$;

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$; $n \geq 0$

Z.) Ako za niz (a_n) vrijedi rekurzija za $n \geq 1$:

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1} \quad i \quad a_0 = a_1 = 1$$

potrebno je pronaći eksplicitni izraz za a_n.

Z.) Niz (a_n) je definisan rekurzijom:

$$a_0 = 0; \quad a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}, \quad n \geq 0.$$

Pokazati da su svi članovi niza prirodni brojevi.

NE!

Z.) Ako za niz (a_n) vrijedi relacija:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}, \quad n \geq 1.$$

Dokazati da su svi članovi niza prirodni brojevi.