

ডাচ-বাংলা ব্যাংক লিমিটেড - প্রথম আলো গণিত উৎসব
গণিত অলিম্পিয়াড - ২০০৮

২৩ - ২৪ জুন, ২০০৮

আয়োজনে: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

প্রশ্নপত্র ক্যাটেগরি গ: ৯ম - ১০ম শ্রেণীর পরীক্ষা

সময়: তিন ঘণ্টা

মোট নম্বর: 100

সব প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে; প্রতিটি প্রশ্নের মান সমান।

Q1.

(a) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

Resolve into factors:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 + abc\{2(a+b)(b+c)(c+a) + abc\}$$

(a) নিচের ধারাটির

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + n \text{ তম পদ পর্যন্ত}$$

যোগফল বের কর এবং আরোহ পদ্ধতিতে উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

Find the sum of the above series up to n terms and verify the result using the method of induction.

Q2.

(a) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ ফাংশনের ডোমেইন এবং রেঞ্জ বের কর। Find the domain and range of the given function.

(b) নিচের সমীকরণটির সমাধান কর: solve the following equation:

$$2 \left[1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^5} + \dots \right] = 1$$

Q3. 2 মি দীর্ঘ এবং 2 মি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি তেলের ড্রাম ভূমির সমান্তরালে শায়িত আছে। উক্ত ড্রামের নিম্ন পৃষ্ঠ থেকে তেলের উচ্চতা 1.5 মি হলে ঐ ড্রামে কী পরিমাণ তেল আছে? (তেলের ঘনত্ব = 0.8 কেজি/মি³)

An oil cylinder having base radius 2 m and height 2 m is lying parallel to the ground. If the level of oil is at a height of 1.5 m from the lower surface of the cylinder, how much oil is there in the cylinder?

Q4. একটি সমবৃত্তভূমিক (শীর্ষবিন্দুর দিকে) খণ্ডিত কোণক এবং একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিণ্ডারের সমন্বয়ে একটি ফানেল আকারের চিমনি তৈরী করা হল যার পরিমাপ নিম্নরূপ:

খণ্ডিত কোণকের বৃত্তাকার ভূমিদ্বয়ের ব্যাসার্ধ 10মি এবং 3মি এবং হেলানো পৃষ্ঠের দৈর্ঘ্য 10মি;

সিলিণ্ডারের বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ 3মি এবং উচ্চতা 10মি;

ঐ চিমনিটি তৈরী করতে কত ক্ষেত্রফলের আয়রণ শীটের প্রয়োজন? চিমনিটির আয়তন কত?

A funnel shape chimni is built using a partial right circular cone (removing the part containing vertex) and a right circular cylinder, the measurement of which is as follows:

radii of the parallel circular bases of the partial cone are 10 m and 3 m;

the base radius and height of the cylinder are 3 m and 10 m respectively;

How much area of iron sheet is required to built this chimni? What is the volume of the chimni?

Q5. a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি ফাঁফা ঘনকের অভ্যন্তরে একটি ফাঁফা গোলক এমন ভাবে স্থাপন করা হল যাতে গোলকটি ঘনকের চারটি তলকে স্পর্শ করে। গোলকের ব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট সর্বোচ্চ কত দৈর্ঘ্যের একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিণ্ডার ঐ গোলকের মাঝে স্থাপন করা যাবে? ঘনক ও গোলকের মধ্যবর্তী ফাঁফা স্থানের আয়তন এবং গোলক ও সিলিণ্ডারের মধ্যবর্তী ফাঁফা স্থানের আয়তনের অনুপাত কত?

A hollow sphere is placed inside a cube, of side length a , so that the sphere touches every plane of the cube. What is the maximum height of the right circular cylinder of base radius half that of the sphere, which can be accommodated inside the sphere? Find the ratio of the volume of the open space between the cube and the sphere to that between the sphere and the cylinder.

Q6. 1.5 মি \times 1.2 মি \times 0.9 মি একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর একটি কর্ণের উপর একটি বিন্দু নেয়া হল যাতে ঐ বিন্দু কর্ণটিকে 1:3 অনুপাতে ভাগ করে। ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র ধরে 0.1 মি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক স্থাপন করা হল। উক্ত গোলকের পৃষ্ঠদেশ থেকে ঘনবস্তুর তলগুলোর মাঝে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন দূরত্ব বের কর। যদি গোলকটিকে এমন ভাবে স্লাইড করতে দেয়া হয় যাতে কেন্দ্র কর্ণের উপর থাকে তাহলে স্থির অবস্থায় গোলকের কেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।

A point on a diagonal of a rectangular parallelopiped of dimension 1.5 m \times 1.2 m \times 0.9 m is taken so that the point divides the diagonal in the ratio 1:3. A sphere of radius 0.1 m is placed so that its centre is at the point identified on the diagonal. Find the maximum and minimum distances between the surface of the sphere and the faces of the parallelopiped. If the sphere is allowed to slide with centre on the diagonal find the position of the centre of the sphere at rest.

Q7. স্কেল এবং কম্পাস ব্যবহার করে 3 সে মি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এমন তিনটি বৃত্ত আঁক যারা একে অন্যকে স্পর্শ করে। এখন তিনটি বৃত্তের মধ্যবর্তী ফাঁকাস্থানে এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা প্রতিটি বৃত্তকে স্পর্শ করে। অঙ্কিত চারটি বৃত্তের যে তিনটি ফাঁকা স্থান আছে এদের মোট ক্ষেত্রফল কত হবে তা বের কর।

Use scale and compass to draw three circles each of radius 3 cm so that each circle touches other. Now draw the circle in the open space surrounded by three circles so that, it touches each of three circles. Find the total area of the three spaces surrounded by the four circles drawn.

Q8. নিচের সমীকরণ এবং অসমতার সমাধান সেট বের কর: find the solution set of the following equation and inequality:

(a) $x^2 - 3x + 4 = x(x - 1) - 2(x - 2)$

(b) $\frac{x^2 - 1}{x} \leq 0$

Q9. নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান সেট, যদি থাকে, বের কর: find the solution, if any, of the following equations:

(a) $2x - 1 + 3(x + 1) = 5(x - 1)$

(b) $\sqrt{x^2 + 1} = x - 1$

(c) $|x - 1| + |x| = 2$

Q10. একটি প্লেন একটি নির্দিষ্ট উচ্চতায় থেকে 200 কি মি/ঘন্টা বেগে আনুভূমিক ভাবে চলছে। প্লেনটি যে আনুভূমিক রেখায় চলছে ঐ রেখা বরাবর খাড়া সমতলে ভূপৃষ্ঠে একটি গ্রাউন্ড স্টেশন রয়েছে। প্লেনটি একটি নির্দিষ্ট অবস্থানে পৌঁছার পর আনুভূমিক রেখার সাথে গ্রাউন্ড স্টেশনের (নিচের দিকে) আনতি হল 15°। এক মিনিট পর ঐ আনতি হল 20°। আর কত সময় পর ঐ আনতি হবে 30°? কখন প্লেনটি গ্রাউন্ড স্টেশনের ঠিক উপরে আসবে? প্লেনটি ভূপৃষ্ঠ থেকে কত উচ্চতায় আছে?

A plane is moving horizontally with a speed of 200 km/hr. There is a ground station on the vertical plane through the horizontal line along which the plane is moving. When the plane reaches a definite location, the inclination of the ground station with the horizontal line is found to be 15°. After one minute that inclination is found to be 20°. After how much time the inclination will be 30°? When the plane will come just above the ground station? At what height the plane is moving?