



ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি (৯ম - ১০ম শ্রেণী)

Category: Secondary (9th grade - 10th grade)

সময়: ৪ ঘণ্টা

Time: 4 hours

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রতিটি সমস্যার পার্শ্ববর্তী ব্রাকেটে তার পূর্ণমান দেয়া রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

সমস্যা ১: কোন এক গণিত উৎসবে ৭২-টি মেডাল দেওয়া হয়েছিল। কিন্তু পরে হিসাব দেওয়ার সময় দেখা গেল, সুমন রিসিটটি হারিয়ে ফেলেছে। তার মনে আছে, মেডালগুলোর মোট দামটা ছিল একটি ৫ অঙ্কের সংখ্যা, এবং মাঝে তিনটি অঙ্কই ছিল ৯। যদি সবগুলো মেডালের দাম একই এবং পূর্ণসংখ্যা হয়ে থাকে, তাহলে প্রতিটি মেডালের পিছনে কত টাকা খরচ হয়েছে? (৬ মার্ক)

Problem 1: At some math olympiad, 72 medals were handed out. Afterwards, it was found that Sumon had lost the receipt! He only remembers that the total price of the medals was a 5 digit number, and the three middle digits were all 9. If the price of all the medals were the same integer, what was the amount spent for each medal? (6 marks)

সমস্যা ২: প্রমাণ কর, a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে,

(৬ মার্ক)

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

Problem 2: Prove that, if a, b, c are positive real numbers,

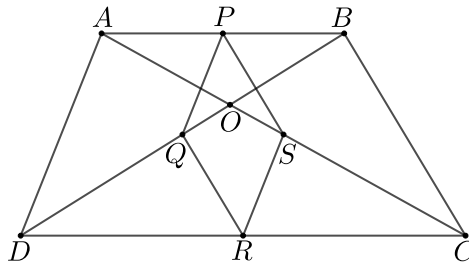
(6 marks)

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

সমস্যা ৩: এমন সব মৌলিক সংখ্যা বের কর যাদের বর্গকে দু'টি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘনের যোগফল হিসেবে লেখা যাবে। (৬ মার্ক)

Problem 3: Find all prime numbers such that the square of the prime number can be written as the sum of cubes of two positive integers. (6 marks)

সমস্যা ৪: চিত্রে $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম যাতে $AB \parallel CD$. P, Q, R, S যথাক্রমে AB, BD, DC, CA এর মধ্যবিন্দু। AC এবং BD O বিন্দুতে ছেদ করে। $\triangle AOB$ এর ক্ষেত্রফল ২০১৯ এবং $\triangle COD$ এর ক্ষেত্রফল ২০২০। চতুর্ভুজ $PQRS$ এর ক্ষেত্রফল কত? (৮ মার্ক)



সমস্যা ৪ এর চিত্র / Figure of Problem 4



ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



Problem 4: In this figure $ABCD$ is a trapezium where $AB \parallel CD$. P, Q, R, S are the midpoint of AB, BD, DC, CA respectively. AC and BD intersect at point O . Area of $\triangle AOB = 2019$ and area of $\triangle COD = 2020$. What is the area of quadrilateral $PQRS$? (8 marks)

সমস্যা ৫: α এবং ω দু'টি বৃত্ত যাতে ω , α এর কেন্দ্র দিয়ে যায়। বৃত্ত দুইটি A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। P , ω এর পরিধির ওপরে কোন বিন্দু। PA এবং PB , α কে আবার যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB = EF$. (৮ মার্ক)

Problem 5: Let α and ω be 2 circles such that ω goes through the center of α . ω intersects α at A and B . Let P be any point on the circumference ω . The lines PA and PB intersects α again at E and F respectively. Prove that $AB = EF$. (8 marks)

সমস্যা ৬: একটা 9×9 সাদা বর্গের বোর্ড নাও। এমন সর্বোচ্চ $n \in \mathbb{N}$ বের কর যাতে কেউ যেকোনভাবে n টি বর্গ কে কালো করে দিলেও সবসময় একটি 1×4 সাদা বর্গের অংশ থাকে (খাঁড়া অথবা শোয়ানোভাবে)। (১০ মার্ক)

Problem 6: Consider a 9×9 array of white squares. Find the largest $n \in \mathbb{N}$ with the property: No matter how one chooses n out of 81 white squares and color in black, there always remains a 1×4 array of white squares (either vertical or horizontal). (10 marks)

সমস্যা ৭: M এবং N দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যাতে M এবং N অসমান। M এবং N এর লসাগু হল $M^2 - N^2 + MN$. দেখাও যে MN একটি ঘন সংখ্যা। (১২ মার্ক)

Problem 7: M and N are two positive integers where M is not equal to N . LCM of $(M$ and $N) = M^2 - N^2 + MN$. Show that MN is a perfect cubic number. (12 marks)

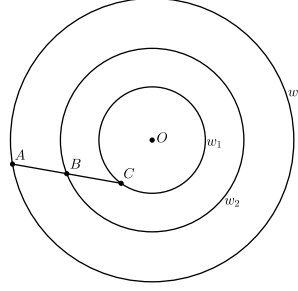
সমস্যা ৮: প্রমাণ কর, সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্যে আমরা $\{1, 2, \dots, n\}$ এর এমন একটি বিন্যাস খুঁজে পাব যাতে দু'টি সংখ্যার গড় তাদের মধ্যকার কোন সংখ্যার মধ্যে না থাকে। যেমন, $\{1, 3, 2, 4\}$ কাজ করে, কিন্তু $\{1, 4, 2, 3\}$ করেনা কারণ ২ সেখানে ১ ও ৩ এর মাঝখানে। (১২ মার্ক)

Problem 8: Prove that for all positive integers n we can find a permutation of $\{1, 2, \dots, n\}$ such that the average of two numbers doesn't appear in-between them. For example, $\{1, 3, 2, 4\}$ works, but $\{1, 4, 2, 3\}$ doesn't because 2 is between 1 and 3. (12 marks)

সমস্যা ৯: তিনটি একই কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ দেয়া আছে যাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 যাতে $r_1 + r_3 \geq 2r_2$. এমন একটি রেখা অঙ্কন কর যেটা $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ কে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে যাতে $AB = BC$. (১৪ মার্ক)



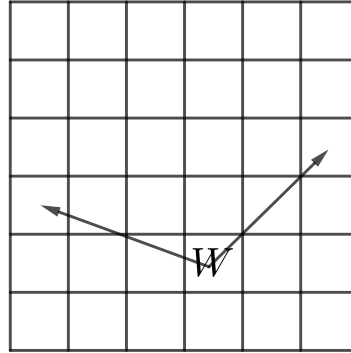
ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



Problem 9: Given three concentric circles $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ with radius r_1, r_2, r_3 such that $r_1 + r_3 \geq 2r_2$, construct a line that intersects $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ at A, B, C respectively such that $AB = BC$. (14 marks)

সমস্যা ১০: দাবায় একটি সাধারণ ঘোড়া দুই ঘর সামনে এগিয়ে এক ঘর পাশে যায় যেকোন একদিকে। তাহ্নিকের মনে হলো যে খেলাটাকে একটু জম্পেশ বানানো দরকার, তাই সে ঘোদ্ধা নামে একটি নতুন ঘুঁটি বানাল। ঘোদ্ধা হয় তিন ঘর এগিয়ে এক ঘর পাশে যায় অথবা দুই ঘর এগিয়ে দুই ঘর পাশে যায় যেকোন দিকে।

প্রমাণ কর যে, একটি 2020×2020 দাবাবোর্ডে সর্বোচ্চ যে সংখ্যক ঘোদ্ধা রাখা যায় যাতে তারা একে অপরকে আক্রমণ না করে তা ঘরের সংখ্যার $2/5$ অংশের সমান বা কম। (১৮ মার্ক)



ঘোদ্ধার চাল / Moves of a warrior

Problem 10: In chess, a normal knight goes two steps forward and one step to the side, in some orientation. Thanic thought that he should spice the game up a bit, so he introduced a new kind of piece called a warrior. A warrior can either go three steps forward and one step to the side, or two steps forward and two steps to the side in some orientation.

In a 2020×2020 chessboard, prove that the maximum number of warriors so that none of them attack each other is less than or equal to $2/5$ of the number of cells. (18 marks)