

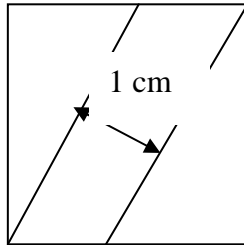
ডাচ বাংলা ব্যাংক-প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০০৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজনে : বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি - জুনিয়র
Category – Junior

সময় - 3.5 ঘন্টা
Total Time- 3.5 Hours

সকল প্রশ্নের মান সমান। All problems are of equal value.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{x} = 1$ হলে x এর মান বের করো।
Given that $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{x} = 1$, what is the value of x .
2. 3-অঙ্ক বিশিষ্ট বেজোড় সংখ্যাগুলোর মধ্যে যে সংখ্যাগুলোর অঙ্কের গুণফল 140 সেসংখ্যাগুলোর যোগফল কতো?
Determine the sum of all odd 3-digit numbers whose product of digits is equal to 140?
3. একটি 3×3 চেকারবোর্ডের নয়টি বর্গকে এমনভাবে রং করতে হবে যাতে প্রত্যেক সারি, প্রত্যেক কলাম ও দুটি কর্ণের মধ্যকার দুইটি বর্গের রং একই না হয়। কমপক্ষে কতো রকমের রঙের দরকার?
The nine squares of a 3×3 checkerboard must be painted so that each row, each column, and each of the two diagonals have no two squares of the same colour. What is the least number of colours needed?
4. $x^2 - 8xy + 9y^2 - 16y + 10$ রাশিমালার সম্ভাব্য সর্বনিম্ন মান কতো? (x ও y বাস্তব সংখ্যা)
Find the least possible value of the expression, $x^2 - 8xy + 9y^2 - 16y + 10$. (x and y both real number)
5. একটি $N \times N$ গ্রিড থেকে আবির তিনটি বিন্দু বেছে নিয়ে ত্রিভুজ আঁকছে। মজার বিষয় হলো, আবির প্রতিবারই (,) এই বিন্দুটি বাছাই করে। এভাবে আবিরের আঁকা সবচেয়ে বড় ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও)
In a $N \times N$ grid, Abir picks three lattice points as vertexes of a triangle. Surprisingly, he always chooses the (0,0) point. What is the largest area of the triangle Abir can draw? (Justify your answer.)
6. একটি বর্গক্ষেত্রকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট তিনটি ক্ষেত্রে ভাগ করা হল (নিচের ছবি দেখো)। সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 সে.মি. হলে বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কতো?
A square is divided into three pieces of equal area as shown. The distance between the parallel lines is 1 cm. What is the area of the square?



7. $\frac{7}{26}$ কে $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ আকারে প্রকাশ করো যেখানে a ও b ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
Express $\frac{7}{26}$ as $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (a and b , both are positive integers)
8. একই সমতলে তিনটি বিন্দু আছে। এই তিনটি বিন্দু দিয়ে যে কয়টি সামান্তরিক (সামান্তরিকের চারটি শীর্ষবিন্দুর তিনটি অবশ্যই এই তিনটি বিন্দু হবে) আঁকা সম্ভব তাদের মধ্যে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন পরিসীমা বিশিষ্ট সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফলের পার্থক্য বের করো।
There are three points in a plane. One can draw as many parallelograms as possible keeping those three points as the three vertices of the parallelogram.

Find the difference between the area of parallelogram having the largest perimeter possible and the parallelogram having the minimum perimeter possible.

9. তিনবাহু বিশিষ্ট এবং ধনাত্মক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বহুভুজ হলো ত্রিভুজ। একটি ত্রিভুজের একটি কোণ একই ত্রিভুজের অপর একটি কোণের দ্বিগুন। এই দুইটি কোণের একটির মান 120 ডিগ্রী। দ্বিতীয় বৃহত্তম কোণের সমদ্বিখন্ডক এর বিপরীত বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। বৃহত্তম কোণের শীর্ষ থেকে D বিন্দুর দূরত্ব 10 সেমি. যদি ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য $2x$ হয়, তবে নিচের সম্পর্ক সিদ্ধ হয়।

$$x^4 - C_3x^3 - C_2x^2 - C_1x + 1875 = 0$$

C_1 , C_2 ও C_3 -এর মান বিশ্লেষণ করে বের করো। (সাহায্য : দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত কেমন?)

A triangle is a polygon with three sides and a strictly positive area. One angle of a triangle is twice of another angle of the same triangle. An angle of this triangle is 120 degree. The bisector of the second largest triangle intersects its opposite side at point D. The distance of D from the vertex containing the largest angle is 10 cm. If the length of the largest side of this triangle is $2x$, then a relationship like the following is true:

$$x^4 - C_3x^3 - C_2x^2 - C_1x + 1875 = 0$$

Find the value of C_1 , C_2 and C_3 analytically. (Hints –What is the relation between the sides of two similar triangles.)

10. একটি অদ্ভুত ভাষায় মাত্র দুটি বর্ণ আছে, a আর b। আবার মেনে নেওয়া হয়েছে যে, বর্ণ a একটি শব্দও বটে। নিচের নিয়ম মেনে সেখানে নতুন শব্দ তৈরি করা যায় -

- যেকোন শব্দের ডানপাশে একটি b বসালে নতুন শব্দ তৈরি হয়,
- যদি কোন শব্দে aaa থাকে তবে সেটিকে b দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলে নতুন শব্দ হয়,
- যদি কোন শব্দে bbb থাকে তবে তা একেবারে ফেলে দিলেও শব্দ হয়,
- কোন শব্দে বর্ণগুলি যেভাবে থাকে সেগুলোকে ক্রম ঠিক রেখে পরপর দুইবার লিখলেও নতুন শব্দ হবে।

উদাহরণ হিসাবে বলা যায়, (iv) নিয়ম অনুসারে aa শব্দ (কারণ, a একটি শব্দ যা মেনে নেওয়া হয়েছে শুরুতেই), আবার (iv) অনুসারে aaaa-ও একটি শব্দ। সুতরাং, (ii) নং নিয়ম অনুসারে ba একটি শব্দ, যাতে (i) নং নিয়ম প্রয়োগ করলে bab-ও একটি শব্দ। আবার যদি (i) নং নিয়ম প্রয়োগ করি তাহলে babb শব্দ পাবো। এখন আবার (iv) নং নিয়মে babbbabb হচ্ছে একটি নতুন শব্দ। সবশেষ (iii) নিয়মে baabb একটি শব্দ।

প্রমাণ করো যে, এই ভাষায়, *baabaabaa* কোন শব্দ নয়।

In a strange language there are only two letters, a and b, and **it is postulated that the letter a is a word**. Furthermore, all additional words are formed according to the following rules:

- Given any word, a new word can be formed from it by adding one b at the right hand end.
- If in any word a sequence aaa appears, a new word can be formed by replacing aaa by the letter b.
- If in any word a sequence bbb appears, a new word can be formed by omitting bbb.
- Given any word, a new word can be formed by writing down the sequence that constitutes the given word twice.

For example, by (iv), aa is a word, and by (iv) again, aaaa is a word. Hence by (ii) ba is a word, and by (i), bab ia also a word. Again, by (i), babb is a word, and so by (iv), babbbabb is also a word. Finally, by (iii) we find that baabb is a word.

Prove that in this language *baabaabaa* is not a word.