



ডাচ্-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০০৬  
৪র্থ বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড  
আয়োজনে : বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি - হায়ার সেকেন্ডারী Category : Higher Secondary

সময় - ৩ ঘন্টা Time- 3 Hours

(সকল প্রশ্নের মান সমান All questions are of equal value)

Q1. সমাধান কর :

Solve:

$$\frac{3x(x^2 - 5x + 6)}{(x - 2)(x + 3)} \geq 0.$$

Q2. i) 'যদি  $n$  একটি যৌগিক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে  $\sqrt{n}$  এর চেয়ে ছোট অথবা সমান একটি মৌলিক সংখ্যা পাওয়া যাবে যা দ্বারা  $n$ -কে ভাগ করা যায়' -এ তত্ত্ব ব্যবহার করে দেখাও যে 2087 একটি মৌলিক সংখ্যা।

ii)  $xy + 9(x + y) = 2006$  সমীকরণের কতোগুলো সমাধান আছে যেগুলো পূর্ণসংখ্যা?

i) If  $n$  is a composite integer, then  $n$  has a prime divisor less than or equal to  $\sqrt{n}$ ; using this statement prove that 2087 is prime.

ii) How many integer solutions does

$$xy + 9(x + y) = 2006 \text{ have?}$$

Q3.  $n \geq 2$  হলে  $a$  এবং  $b$  ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার মধ্যে কোনটি বড় যেখানে  $a^n = a + 1$ ,  $b^{2^n} = b + 3a$ ? প্রমাণ সহকারে বের কর।

For each integer  $n \geq 2$  determine with proof which of the two positive real numbers  $a$ ,  $b$  satisfying  $a^n = a + 1$ ,  $b^{2^n} = b + 3a$  is larger.

Q4.  $S = \frac{F_0}{6^0} + \frac{F_1}{6^1} + \frac{F_2}{6^2} + \frac{F_3}{6^3} + \frac{F_4}{6^4} + \dots$  -এর মান বের কর যেখানে

$$F_0 = 1, F_1 = 1, \text{ and } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ যখন } n \geq 2.$$

$$\text{Find the sum } S = \frac{F_0}{6^0} + \frac{F_1}{6^1} + \frac{F_2}{6^2} + \frac{F_3}{6^3} + \frac{F_4}{6^4} + \dots$$

$$\text{where } F_0 = 1, F_1 = 1, \text{ and } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ for } n \geq 2.$$

Q5. ধরি আমরা একটি পাথরের বল দ্বারা একটি বর্গাকৃতি ভিত্তির পিরামিড তৈরী করতে চাই। যদি ভিত্তি রেখার জন্য  $n$  টি সমান পাথরের বলের প্রয়োজন হয়, তবে পিরামিডের জন্য একই মাপের মোট কতগুলো বলের প্রয়োজন হবে?

Suppose we want to make a pyramid of square base with stone balls. If we need  $n$  stone balls for a base line, then how many stone balls of same size do we need to make the pyramid?

Q6. তিনটি সরলরেখা  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=a$  [যেখানে  $0 \leq a \leq 8$ .] এবং ফাংশন

$$f(x) = 3 \text{ if } 0 \leq x \leq 3$$

$$e^x \text{ if } x > 3$$

দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ফর্মুলা  $A(a)$  বের করো। ঐ ফর্মুলা ব্যবহার করে  $A(3)$  ও  $A(8)$  -এর মান বের করো।



ডাচ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০০৬  
**৪র্থ বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড**  
 আয়োজনে : বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

Find the formula  $A(a)$  for obtaining the area of the region bounded by lines  $x=0, y=0, x=a$  [where  $0 \leq a \leq 8$ .]

and the function

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{if } 0 \leq x \leq 3 \\ e^x & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

$$e^x \text{ if } x > 3$$

Hence find  $A(3)$  and  $A(8)$ .

Q7. i)  $\frac{dy}{dx}$  বের কর যেখানে  $y = \frac{x^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{7x-14}}{(1-x^3)^3}$

ii)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos^2 2x dx$  -এর মান বের করো।

i) Find  $\frac{dy}{dx}$  where  $y = \frac{x^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{7x-14}}{(1-x^3)^3}$

ii) Evaluate  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos^2 2x dx$

Q8.  $3^{999}$  সংখ্যাটির শেষ দু'টি (সর্বডানে) অংক কী কী?

Find the last two digits (rightmost) of  $3^{999}$ .

Q9. 40 টাকা দামের A জাতীয় খাদ্যে 8 একক প্রোটিন এবং 10 একক শ্বেতসার এবং 50 টাকা দামের B জাতীয় খাদ্যে 12 একক প্রোটিন এবং 6 একক শ্বেতসার আছে। যদি প্রতিদিন কমপক্ষে 40 একক প্রোটিন এবং 28 একক শ্বেতসার প্রয়োজন হয় তবে খাদ্যের জন্য প্রতিদিন কমপক্ষে কতটাকা খরচ করতে হবে?

Suppose A type of food of price 40 Tk. has protein 8 units and starch 10 units. Another B type food of price 50 Tk. has protein 12 units and starch 6 units. If we need a minimum 40 units of Protein and 28 unit of starch per day, what will be the minimum expenditure for food everyday?

Q10. একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 70, 90, 130 এবং 110 এবং চতুর্ভুজের ভিতরেও একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত আছে। চতুর্ভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্তকে 130 দৈর্ঘ্যের বাহু যে বিন্দুতে স্পর্শ করে সেই বিন্দুটি বাহুটিকে  $x$  ও  $y$  দৈর্ঘ্যে বিভক্ত করে যেখানে  $y \geq x$ , তাহলে  $y-x$  -এর মান বের কর।

A quadrilateral that has consecutive sides of lengths 70, 90, 130 and 110 is inscribed in a circle and also has a circle inscribed in it. The point of tangency of the inscribed circle to the side of length 130 divides that side into segments of length  $x$  and  $y$ . If  $y \geq x$ , then find  $y-x$ .

Q11. একটি নিরেট বস্তুর বর্গাকার ভিত্তির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য  $s$  এবং বস্তুটির উপরের বাহুর দৈর্ঘ্য  $2s$  যা ভিত্তির সাথে সমান্তরাল। অন্য সকল বাহুর দৈর্ঘ্য  $s$ । বস্তুর আয়তন কত? [জানা আছে  $l$  দৈর্ঘ্য

বিশিষ্ট চতুস্তলকের আয়তন  $V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$ ]

A solid has a square base of side  $s$ . The upper edge is parallel to the base and has length  $2s$ . All other edges have length  $s$ . What is the volume of the solid? [Note: the

volume of the tetrahedron with all sides' length  $l$  is  $V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$ ].

Q12. 3 ও 6 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অভ্যন্তরীণভাবে স্পর্শ করে। 3 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের বাহিরে এবং 6 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ভিতরে অংকিত সর্বাপেক্ষা বড় আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

Two circle of radii 3 and 6 touches inside. Find the area of the maximum rectangle outside the circle of radius 3 and inside the circle of radius 6.