

ডাচ-বাংলা ব্যাংক লিমিটেড - প্রথম আলো গণিত উৎসব

গণিত অলিম্পিয়াড - ২০০৮

২৩ - ২৪ জুন, ২০০৮

আয়োজনে: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

প্রশ্নপত্র ক্যাটেগরি ঘ: ১১শ - ১২ শ শ্রেণীর পরীক্ষা

সময়: তিন ঘণ্টা

মোট নম্বর: 100

সব প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে; প্রতিটি প্রশ্নের মান সমান।

Q1.

(a) $f(x) = |x^3 + 1|$ এর ডোমেইন এবং রেঞ্জ বের কর এবং এর লেখচিত্র আঁক। x এর কোন মানের জন্য এই ফাংশনের অন্তরক সহগ অসংজ্ঞায়িত? এই ফাংশনের বিপরীত ফাংশন থাকলে তা বের কর; এই ফাংশনের বিপরীত ফাংশন না থাকলে কেন নেই তা ব্যাখ্যা কর।

Find the domain and range of the function $f(x) = |x^3 + 1|$ and sketch the graph. For which value of x the derivative of the function is undefined? Find the inverse, if any, of the given function; if there is no inverse explain why not.

(b) $y = x(x^2 - 1)$ এর ডোমেইন এবং রেঞ্জ বের কর। ঐ ফাংশনের লেখচিত্রে স্থানীয় সর্বোচ্চ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক বের কর। লেখচিত্র যদি অক্ষদ্বকে ছেদ করে তবে ছেদবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের কর। তারপর লেখচিত্রটি আঁক। এই ফাংশনের চরম (absolute) সর্বোচ্চ এবং চরম সর্বনিম্ন বিন্দু থাকলে তা বের কর।

Find the domain and range of the function $y = x(x^2 - 1)$. Find local maximum point and local minimum point of the function. Find the coordinates of the points of intersection of the curve with the axes, if any. Then sketch the curve. If there are any absolute maximum and absolute minimum points, find them.

Q2. নিচের সমীকরণ এবং অসমতার সমাধান সেট থাকলে ঐগুলো বের কর (Find the solution sets, if any, of the following equation and inequality):

(a) $|x - 1| - |x| = 2$

(b) $\left| \frac{3}{x} - 2 \right| \leq 3$

Q3. $x = 6$, $x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} = 0$, $x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$ রেখাত্রয় দেয়া আছে;

(a) প্রমাণ কর যে, রেখাত্রয় একটি ত্রিভুজ গঠন করে;

(b) ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বের কর;

(c) ত্রিভুজটির অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ বের কর।

Given three lines $x = 6$, $x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} = 0$, $x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$

(a) show that the lines constitute a triangle;

(b) find the area of this triangle;

(c) find the equation of the circle inscribed by the triangle (in circle).

Q4.

(a) $1 + 1^2 \cdot 2 + 2^2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 6 + 6^2 + \dots$

ধারাটির $(2n + 1)$ তম পদ পর্যন্ত যোগ কর।

Find the sum of the series

$1 + 1^2 \cdot 2 + 2^2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 6 + 6^2 + \dots$

up to $(2n + 1)$ terms.

(b) সমাধান কর $1 + x + \frac{1.3}{2!}x^2 + \frac{1.3.5}{3!}x^3 + \dots = \sqrt{2}$

যেখানে বামপক্ষের অসীম ধারাটি একটি নির্দিষ্ট ইন্টারভেলে অভিসারী (convergent); ঐ ইন্টারভেলটি বের কর। $x = 10$ এর জন্য ধারাটি অভিসারী কিনা বল।

solve $1 + x + \frac{1.3}{2!}x^2 + \frac{1.3.5}{3!}x^3 + \dots = \sqrt{2}$

where the series on the left is convergent in a definite interval; find this interval. Write whether the series is convergent for $x = 10$.

Q5. $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ প্যারাবোলাটির:

(a) শীর্ষবিন্দু, ফোকাস এবং প্যারাবোলাটি x -অক্ষকে যে দুটো বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক বের কর।

(b) প্যারাবোলাটি আঁক এবং এটি x -অক্ষকে যে দুটো বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুদ্বয়ে স্পর্শক আঁক এবং এরা যে বিন্দুতে ছেদ তা বের কর।

(c) স্পর্শকদ্বয় এবং প্যারাবোলা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর।

For the parabola $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$

- (a) find coordinates of vertex, focus, and two points at which the parabola intersects x -axis;
- (b) sketch the parabola and draw the tangents at two points where the curve meets x -axis and find the point of intersection of the tangents;
- (c) find the area under the two tangents and the parabola

Q6. 1মি সমব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে আছে। বৃত্ত তিনটির মধ্যবর্তী শূন্যস্থানে একটি বৃত্ত আঁকা হল যাতে তা তিনটি বৃত্তকেই স্পর্শ করে;

- (a) মধ্যবর্তী শূন্যস্থানে অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?
- (b) মধ্যবর্তী শূন্যস্থানে অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্রে মূলবিন্দু এবং মূলবিন্দু থেকে প্রদত্ত বৃত্তত্রয়ের যেকোন একটির কেন্দ্র সংযোগকারী রেখাকে x -অক্ষ হিসাবে বিবেচনা করে যে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি পওয়া গেল ঐ পদ্ধতির সাপেক্ষে সবগুলো বৃত্তের সমীকরণ বের কর।

Three circles each of radius 1 m are such that they touch each other. In the space inside the circles a circle is drawn so that it touches three circles:

- (a) what is the radius of the circle drawn?
- (b) considering the centre of the drawn circle as the origin and the line joining origin to the centre of any of the three circles as the x -axis of the Cartesian coordinate system, find the equations of all the circles.

Q7. একটি উপবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে, বৃহৎ অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ যথাক্রমে x - এবং y -অক্ষ বরাবর; বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{5}/3$;

- (a) উপবৃত্তটির সমীকরণ বের কর;
- (b) উপকেন্দ্রিক জ্যাদ্বয় উপবৃত্তকে যে তিনটি অংশে ভাগ করে ঐ অংশত্রয়ের ক্ষেত্রফল বের কর।
- (c) উপবৃত্তের উপর $(2, 2\sqrt{5}/3)$ বিন্দুতে স্পর্শক, প্রথম চতুর্ভাগে উপবৃত্তের অংশ, x -অক্ষ এবং y -অক্ষ এ চারটি রেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Centre of an ellipse is at origin, major axis along x -axis and minor axis along y -axis; the major axis is of length 6 and the eccentricity is $\sqrt{5}/3$;

- (a) write the equation of the ellipse;
- (b) find the areas of three parts of the ellipse divided by two latera recta.
- (c) find the area enclosed by the tangent to the ellipse at $(2, 2\sqrt{5}/3)$, the segment of the ellipse on the first quadrant, the x -axis and the y -axis.

Q8. 2 মি এবং 1 মি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটো বৃত্ত পরস্পরকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে যেখানে $AB = 0.4$ মি। ছোট বৃত্তের পরিধির উপর A এবং B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী একটি P বিন্দু এমন ভাবে নেয়া হল যাতে PA এবং PB এর বর্ধিতাংশ বড় বৃত্তকে যথাক্রমে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে। CD জ্যায়ের দৈর্ঘ্য বের কর।

Two circles of radii 2 m and 1 m intersect at A and B where $AB = 0.4$ m. A point P is considered on the smaller circle equidistant from A and B so that the extension of PA and PB intersect the bigger circle at C and D respectively. Find the length of the chord CD .

Q9. 40মি দৈর্ঘ্যের একটি অত্যন্ত মসৃণ তল আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে আনত রয়েছে। ঐ তলের পাদদেশ থেকে একটি বস্তুকে স্থির অবস্থা থেকে 10মি/সে^2 ত্বরণে চলতে দেয়া হল। বস্তুটি ঐ তলে 30মি অতিক্রম করার পর ত্বরণ বন্ধ করে দেয়া হল। যদি ধরে নেয়া হয় যে, বস্তুর উপর মাধ্যাকর্ষণের প্রভাব সবসময় রয়েছে, আনত তলের ঘর্ষণ জনিত বাঁধা শূন্য এবং বাতাসের কোন বাঁধা নেই তবে বস্তুটি চলা শুরু থেকে আনুভূমিক দিকে কত দূরে ভূমিতে আঘাত করবে?

A very smooth plane of length 40 m is inclined to horizon at an angle 30° . From the foot of this plain a body starts from rest and moves with an acceleration 10 m/s^2 . After moving a distance of 30 m on the plane the acceleration is stopped. If it is supposed that, the effect of gravity is always there, the resistance of the plane is zero and there is no resistance of air, then from the beginning of the journey at how much horizontal distance the body will strike the ground?

Q10. একটি খাড়া দেয়ালে A বিন্দুতে একটি রশির এক প্রান্ত বাঁধা আছে; A বিন্দুর খাড়া নিচে আর একটি B বিন্দুতে আর একটি রশির এক প্রান্ত বাঁধা আছে। ঐ রশিদ্বয়ের অন্য প্রান্ত C বিন্দুতে গিট দেয়া হল। এখন C বিন্দুতে BC বরাবর 75 N বল এবং C বিন্দুতে খাড়া নিচের দিকে 60 N বল প্রয়োগ করা হল। যদি খাড়া দেয়ালের সাথে AC এবং BC যথাক্রমে 30° এবং 60° কোণ তৈরী করে তবে সূতাদ্বয়ের উপর টান নির্ণয় কর।

On a vertical wall there is a point A at which one end of a rope is attached; at another point B , which is vertically below A , one end of another rope is attached. The other ends of the ropes are knotted together at C . Now 75 N force is applied at C along BC and 60 N force applied at C in the vertically downward direction. If AC and BC are inclined to the vertical plane at angles 30° and 60° respectively, find the magnitudes of tensions on the ropes.