

প্রতি সমস্যার মান ১০। সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। রায় করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পেছন অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

(1) হরতালে একটা অপরাধ হল যার চারজন সাক্ষী পাওয়া গেল। সাক্ষীরা সবাই যুক্তিবিদ। তাদের বক্তব্য নিম্নরূপঃ

- প্রথম সাক্ষী বলল যে চারজনের মধ্যে ঠিক একজন মিথ্যাবাদী।
- দ্বিতীয় সাক্ষী বলল যে চারজনের মধ্যে ঠিক দুইজন মিথ্যাবাদী।
- তৃতীয় সাক্ষী বলল যে চারজনের মধ্যে ঠিক তিনজন মিথ্যাবাদী।
- চতুর্থ সাক্ষী বলল যে চারজনের মধ্যে চারজনই মিথ্যাবাদী।

ধরে নাও যে এই প্রত্যেকটি কথা হয় সত্যি অথবা মিথ্যা। কতজন সাক্ষী মিথ্যাবাদী?

A crime is committed during the hartal. There are four witnesses. The witnesses are logicians and make the following statements:

- Witness One says exactly one of the four witnesses is a liar.
- Witness Two says exactly two of the four witnesses are liars.
- Witness Three says exactly three of the four witnesses are liars.
- Witness Four says exactly four of the four witnesses are liars.

Assume that each of these statements is either true or false. How many of the witnesses are liars?

(2) ধরা যাক, $m^2 + n^2 = m^3$ সমীকরণের যত জোড়া পূর্ণসাংখ্যিক সমাধান (m, n) আছে তার সংখ্যা N . N কি সসীম না অসীম? N সসীম হলে এর মান কত?

Let N be the number of pairs of integers (m, n) that satisfy the equation $m^2 + n^2 = m^3$. Is N finite or infinite? If N is finite, what is its value?

(3) ধরি, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $p(x) = x^2 + x + 1$ একটি বহুপদী। $x^3 \pmod{p(x)}$ কত? অর্থাৎ x^3 -কে $x^2 + x + 1$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত? n -এর কোন কোন ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক মানের জন্য $p(x)$ দিয়ে $x^{2n} + x^n + 1$ বিভাজ্য হবে?

Let n be a positive integer. Consider the polynomial $p(x) = x^2 + x + 1$. What is $x^3 \pmod{p(x)}$, meaning what is the remainder of x^3 divided by $x^2 + x + 1$? For what positive integer values of n is $x^{2n} + x^n + 1$ divisible by $p(x)$?

(4) বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াডের কোন অনুষ্ঠানে ৩৬ জন অংশ নিল। এদের কেউ কেউ অন্যদের সাথে হাত মিলালো। তবে কোন দুইজনই একবারের বেশি একে অন্যের সাথে হাত মিলালো না। প্রত্যেকে তারা কতবার হাত মিলিয়েছে তা মনে রাখল। দেখা গেল, যাদের হাত মিলানোর সংখ্যা সমান, তারা নিজেদের মধ্যে হাত মিলায়নি। সর্বোচ্চ হাত মিলানোর সংখ্যা বের কর। (দুইজন হাত মিলালে একবার হাত মিলানো ধরা হবে।)

There were 36 participants at a BdMO event. Some of the participants shook hands with each other. But no two participants shook hands with each other more than once. Each participant recorded the number of handshakes they made. It was found that no two participants with the same number of handshakes made, had shaken hands with each other. Find the maximum number of handshakes at the party. (When two participants shake hands with each other, this will be counted as one handshake.)

ডাচ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৫
 জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড
 আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরিঃ হায়ার সেকেন্ডারি

সময়ঃ ২ ঘণ্টা

- (5) একটি চতুস্তলক হল চারটি ত্রিভুজাকার তল দিয়ে গঠিত একটি পিরামিডীয় ঘনবস্তু। চতুস্তলক $ABCD$ এর ABC ও BCD পৃষ্ঠদ্বয় $\pi/6$ কোণে মিলিত হয়। ত্রিভুজ $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল 120. ত্রিভুজ $\triangle BCD$ এর ক্ষেত্রফল 80 ও $BC = 10$. চতুস্তলকটির আয়তন কত? কোন চতুস্তলকের আয়তন হল এর ভূমির ক্ষেত্রফল ও উচ্চতার গুণফলের এক-তৃতীয়াংশ।

A tetrahedron is a polyhedron composed of four triangular faces. Faces ABC and BCD of tetrahedron $ABCD$ meet at an angle of $\pi/6$. The area of triangle $\triangle ABC$ is 120. The area of triangle $\triangle BCD$ is 80, and $BC = 10$. What is the volume of the tetrahedron? We call the volume of a tetrahedron as one-third the area of its base times its height.

- (6) ট্র্যাপিজয়েড $ABCD$ এর বাহুগুলো $AB = 92, BC = 50, CD = 19, AD = 70$. AB ও CD সমান্তরাল। AB এর উপর অবস্থিত P -কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকা হল যা BC ও AD -কে স্পর্শ করে। $AP = m/n$, যেখানে m, n পূর্ণসংখ্যা দ্বয়ের কোন সাধারণ উৎপাদক নেই (এরা সহমৌলিক)। $m + n$ সমান কত?

Trapezoid $ABCD$ has sides $AB = 92, BC = 50, CD = 19, AD = 70$. The side AB is parallel to CD . A circle with center P on AB is drawn tangent to BC and AD . Given that $AP = m/n$ where m, n are integers that have no common factors (they are relatively prime), what is $m + n$?

- (7) ABC ত্রিভুজে A', B', C' বিন্দুগুলো যথাক্রমে BC, AC, AB বাহুর উপর অবস্থিত। AA', BB', CC' রেখাগুলো O বিন্দুতে ছেদ করে (এরা O বিন্দুতে সমবিন্দু)। $\frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} = 92$. $\frac{AO}{OA'} \times \frac{BO}{OB'} \times \frac{CO}{OC'}$ এর মান বের কর।

In triangle ABC , the points A', B', C' are on sides BC, AC, AB respectively. Also, AA', BB', CC' intersect at the point O (they are concurrent at O). Also, $\frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} = 92$. Find the value of $\frac{AO}{OA'} \times \frac{BO}{OB'} \times \frac{CO}{OC'}$.