



ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



ক্যাটাগরি: হায়ার সেকেন্ডারি (১১শ - ১২শ শ্রেণী)

Category: Higher Secondary (11th grade - 12th grade)

সময়: ৪ ঘণ্টা

Time: 4 hours

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রতিটি সমস্যার পার্শ্ববর্তী ব্রাকেটে তার পূর্ণমান দেয়া রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

সমস্যা ১: এমন সব মৌলিক সংখ্যা বের কর যাদের বর্গকে দু'টি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘনের যোগফল হিসেবে লেখা যাবে। (৪ মার্ক)

Problem 1: Find all prime numbers such that the square of the prime number can be written as the sum of cubes of two positive integers. (4 marks)

সমস্যা ২: প্রমাণ কর, a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে, (৪ মার্ক)

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

Problem 2: Prove that, if a, b, c are positive real numbers, (4 marks)

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

সমস্যা ৩: α এবং ω দু'টি বৃত্ত যাতে ω , α এর কেন্দ্র দিয়ে যায়। বৃত্ত দুইটি A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। P , ω এর পরিধির ওপরে কোন বিন্দু। PA এবং PB , α কে আবার যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB = EF$ । (৬ মার্ক)

Problem 3: Let α and ω be 2 circles such that ω goes through the center of α . ω intersects α at A and B . Let P be any point on the circumference ω . The lines PA and PB intersects α again at E and F respectively. Prove that $AB = EF$. (6 marks)

সমস্যা ৪: A একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। $x_0^n + x_1^n + x_2^n + \dots$ অসীম ধারাটির সমষ্টির সম্ভাব্য মানগুলোর সেট বের করো যেখানে x_0, x_1, x_2, \dots সবাই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ অসীম ধারাটির সমষ্টি A । (১০ মার্ক)

Problem 4: A is a positive real number. Find the set of possible values of the infinite sum $x_0^n + x_1^n + x_2^n + \dots$ where x_0, x_1, x_2, \dots are all positive real numbers so that the infinite series $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ has sum A . (10 marks)

সমস্যা ৫: প্রমাণ কর, সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্যে আমরা $\{1, 2, \dots, n\}$ এর এমন একটি বিন্যাস খুঁজে পাব যাতে দু'টি সংখ্যার গড় তাদের মধ্যকার কোন সংখ্যার মধ্যে না থাকে। যেমন, $\{1, 3, 2, 4\}$ কাজ করে, কিন্তু $\{1, 4, 2, 3\}$ করেনা কারণ ২ সেখানে ১ ও ৩ এর মাঝখানে। (১০ মার্ক)

Problem 5: Prove that for all positive integers n we can find a permutation of $\{1, 2, \dots, n\}$ such that the average of two numbers doesn't appear in-between them. For example, $\{1, 3, 2, 4\}$ works, but $\{1, 4, 2, 3\}$ doesn't because 2 is between 1 and 3. (10 marks)



ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



সমস্যা ৬: একটি ফাংশন $f(x)$ কে n বার ডিফারেন্সিয়েট করে যে ফাংশন পাওয়া যায় তাকে লেখা হয় $f^{(n)}(x)$ হিসাবে। $f(x) = \frac{e^x}{x}$ হলে,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

এর মান বের করো।

(১২ মার্ক)

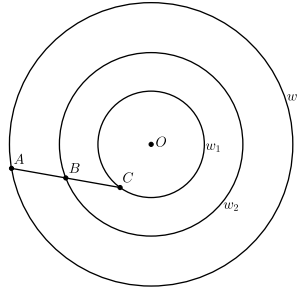
Problem 6: When a function $f(x)$ is differentiated n times, the function we get is denoted by $f^{(n)}(x)$. If $f(x) = \frac{e^x}{x}$, Find the value of

(12 marks)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

সমস্যা ৭: তিনটি একই কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ দেয়া আছে যাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 যাতে $r_1 + r_3 \geq 2r_2$. এমন একটি রেখা অঙ্কন কর যেটা $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ কে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে যাতে $AB = BC$.

(১২ মার্ক)



Problem 7: Given three concentric circles $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ with radius r_1, r_2, r_3 such that $r_1 + r_3 \geq 2r_2$, construct a line that intersects $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ at A, B, C respectively such that $AB = BC$.

(12 marks)

সমস্যা ৮: সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট \mathbb{N} কে সসীমসংখ্যক সাবসেটে ভাগ করা হয়েছে। প্রমাণ কর, এমন একটি সাবসেট S আছে যাতে যেকোন স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য S এর মধ্যে n এর অসীমসংখ্যক গুণিতক রয়েছে।

(১২ মার্ক)

Problem 8: The set of natural numbers \mathbb{N} are partitioned into a finite number of subsets. Prove that there exists a subset S so that for any natural number n , there are infinitely many multiples of n in S .

(12 marks)

সমস্যা ৯: $ABCD$ একটি উত্তল চতুর্ভুজ। $\angle BAC$ আর $\angle BDC$ এর অন্তঃস্থ সমদ্বিখন্ডক P বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle APB = \angle CPD$. প্রমাণ করো, $AB + BD = AC + CD$.

(১৫ মার্ক)

Problem 9: Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. The internal angle bisectors of $\angle BAC$ and $\angle BDC$ meets at P . $\angle APB = \angle CPD$. Prove that, $AB + BD = AC + CD$.

(15 marks)

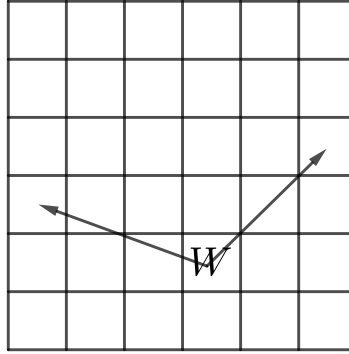


ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



সমস্যা ১০: দাবায় একটি সাধারণ ঘোড়া দুই ঘর সামনে এগিয়ে এক ঘর পাশে যায় যেকোন একদিকে। তাহ্নিকের মনে হলো যে খেলাটাকে একটু জম্পেশ বানানো দরকার, তাই সে যোদ্ধা নামে একটি নতুন ঘুঁটি বানাল। যোদ্ধা হয় তিন ঘর এগিয়ে এক ঘর পাশে যায় অথবা দুই ঘর এগিয়ে দুই ঘর পাশে যায় যেকোন দিকে।

প্রমাণ কর যে, একটি 2020×2020 দাবাবোর্ডে সর্বোচ্চ যে সংখ্যক যোদ্ধা রাখা যায় যাতে তারা একে অপরকে আক্রমণ না করে তা ঘরের সংখ্যার $2/5$ অংশের সমান বা কম। (১৫ মার্ক)



যোদ্ধার চাল / Moves of a warrior

Problem 10: In chess, a normal knight goes two steps forward and one step to the side, in some orientation. Thanic thought that he should spice the game up a bit, so he introduced a new kind of piece called a warrior. A warrior can either go three steps forward and one step to the side, or two steps forward and two steps to the side in some orientation.

In a 2020×2020 chessboard, prove that the maximum number of warriors so that none of them attack each other is less than or equal to $2/5$ of the number of cells. (15 marks)