À PROPOS

DE

L'ANTICENTRE D'UN QUADRILATÈRE

Jean-Louis AYME

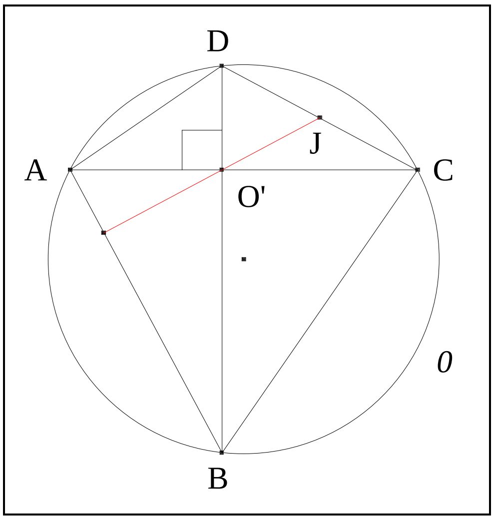
Résumé. Nous présentons une petite histoire de l'anticentre d'un quadrilatère cyclique allant de l'indou Brahmagupta à Émile Lemoine en passant par Carl Anton Bretschneider et Jules Mathot. Ce point de vue historique est largement référencé et commenté.
Tous les résultats cités en annexe peuvent être prouvés synthétiquement.

I. L'INDOU BRAHMAGUPTA [1]

1. Le théorème de Brahmagupta

VISION

Figure :

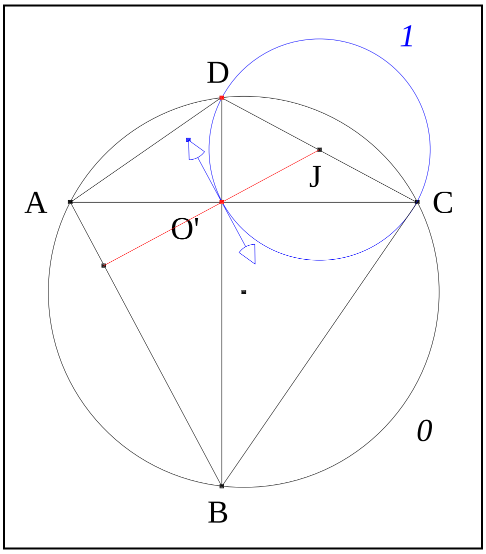


Traits : *0* un cercle
ABCD un quadrilatère orthodiagonal, inscrit dans *0*,
O' le point d'intersection de (AC) et (BD)
et J un point du côté [CD].

[1] (598-vers 650).

Donné : J est le milieu de [CD] *si, et seulement si*, (JO') est perpendiculaire à (AB).

VISUALISATION NÉCESSAIRE [2]



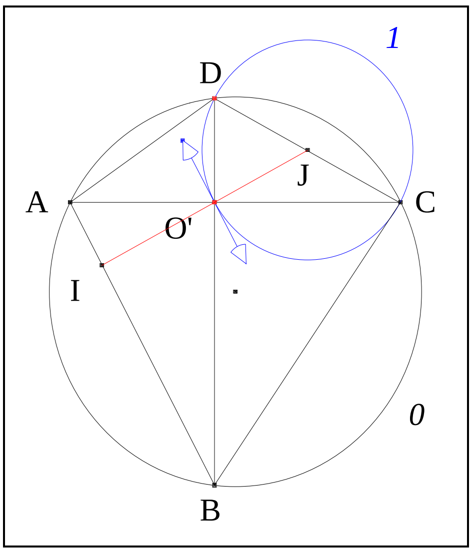
- Notons *1* le cercle diamètre [CD] ; il passe par O'.
  et To' la tangente à *1* en O'.

- Par définition d'une tangente, (JO') $\perp$ To'.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base C et D, les moniennes (O'CA) et (O'DB), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que To' // (AB) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (JO') $\perp$ (AB).

- **Conclusion :** (JO') est perpendiculaire à (AB).

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons *1* le cercle de diamètre [CD] ; il passe par O' ;

[2] C'est le théorème de Brahmagupta.

To' la tangente à *1* en O'
et I le pied de la perpendiculaire abaissée de O' sur (AB).

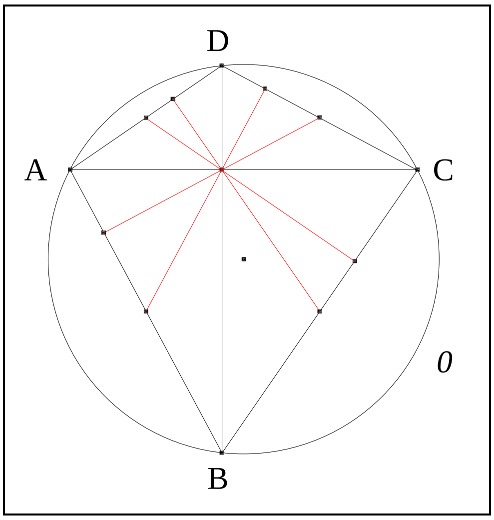
- Par définition, (O'I) ⊥ (AB).

- Les cercles *1* et *0*, les points de base C et D, les moniennes (O'CA) et (O'DB), conduisent au théorème **1** de Reim; il s'en suit que (AB) // To' ;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (O'I) ⊥ To' ;
par définition d'une tangente, (OI) passe par le centre de *1* i.e. par le milieu J de [CD].

- **Conclusion :** J est le milieu de [CD].

Scolies : **(1)** une droite passant par le milieu d'un côté et perpendiculaire au côté opposé d'un quadrilatère, est une maltitude.
Nous dirons que (JO') est la (AB)-maltitude de ABCD.

(2) Vision circulaire



2. Énoncé traditionnel : dans tout quadrilatère ortho diagonal cyclique,
les maltitudes concourent au point d'intersection des deux diagonales.

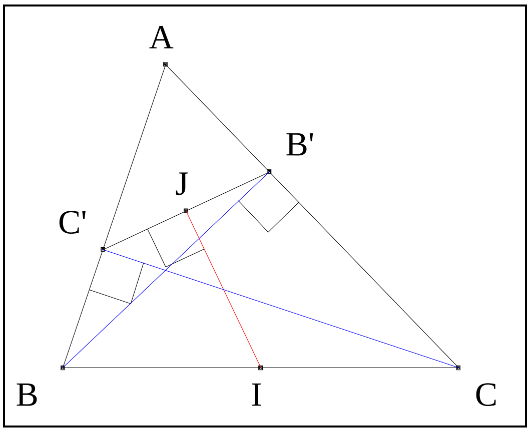
3. Note historique : établi vers 628, le théorème de Brahmagupta était connu d'Archimède qui s'en est servi pour montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

II. CARL ANTON BRETSCHNEIDER

1. Une bimédiane

VISION

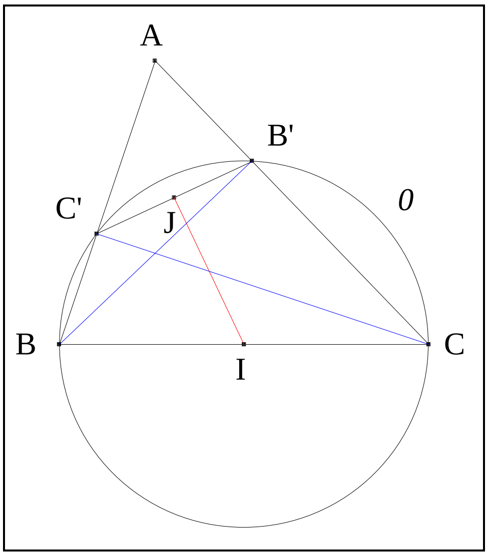
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le milieu de [BC],
B', C' les pieds des B, C-hauteurs de ABC
et J le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (B'C').

Donné : J est le milieu de [B'C'].

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C'.
- (IJ) est une diamétrale de *0*, perpendiculaire à la corde [B'C'].
- **Conclusion :** J est le milieu de [B'C'].

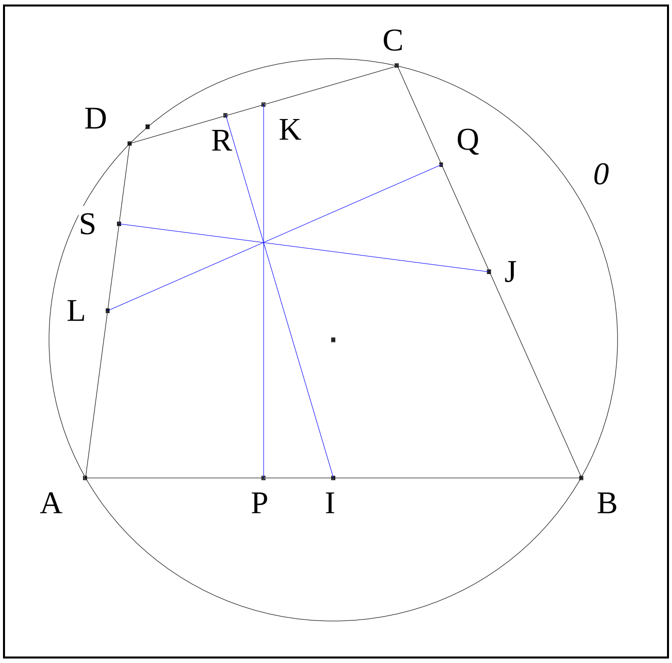
Scolie : la (B'C')-maltitude du quadrilatère BCB'C', est la médiatrice de [B'C'].

2. Le théorème de Bretschneider[3]

[3] Bretschneider C. A., *Grunert* 3 (1843) 85.
Drury H. D., Question 13127, *Educational Times* 65 (1896) 107.

VISION

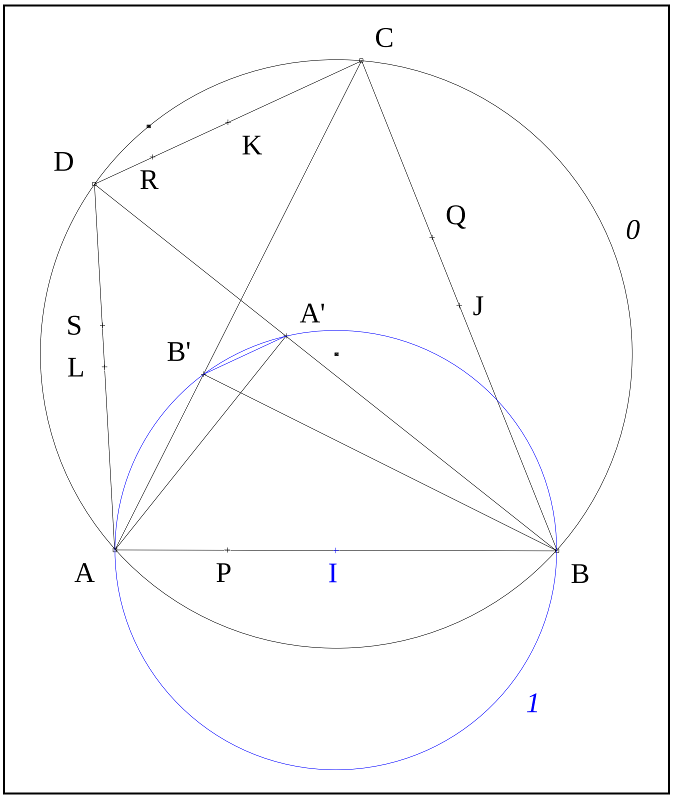
Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	I, J, K, L	les milieux de [AB], [BC], [CD], [DA]
et	P, Q, R, S	les pieds des perpendiculaires abaissées de I, J, K, L resp. sur [CD], [DA], [AB] et [BC].

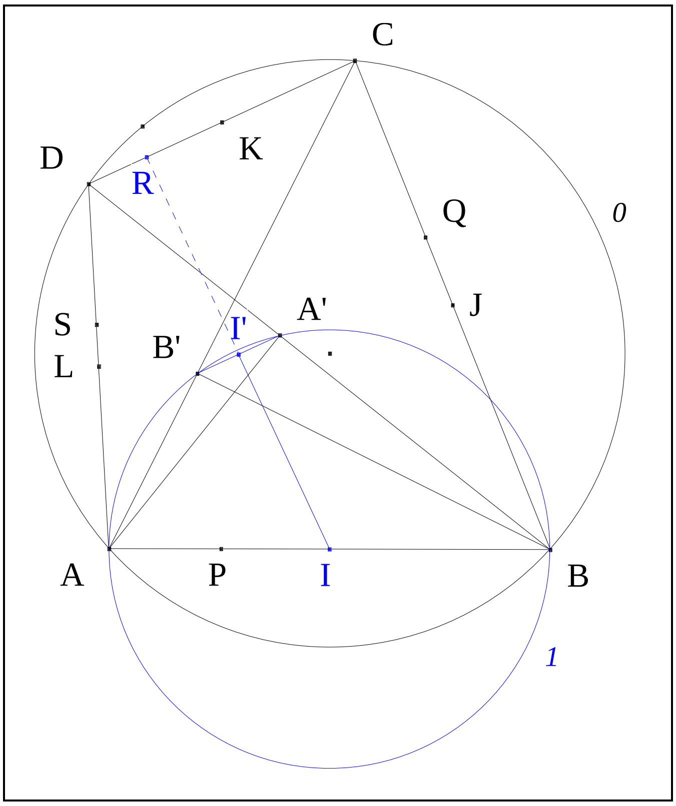
Donné : ABCD est cyclique
si, et seulement si,
(IP), (JQ), (KR) et (LS) sont concourantes.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABCD,
  A', B' les pieds des perpendiculaires abaissées de A, B resp. sur (BD), (AC)
  et *1* le cercle de diamètre [AB] ; il passe par A' et B'.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (CAB') et (DBA'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (CD) // (B'A').

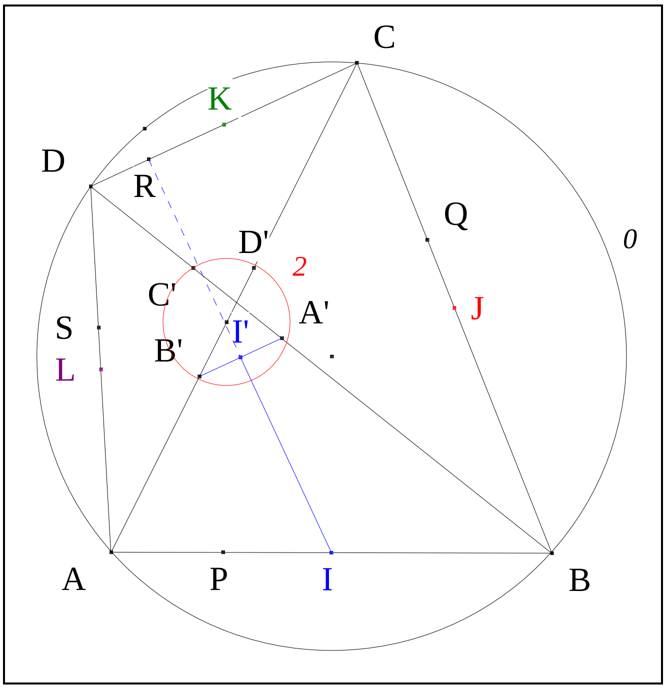


- Notons I' le milieu de [A'B'].

- D'après II 1. Une bimédiane, (II') est la médiatrice de [A'B'] i.e. (A'B') ⊥ (II') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (CD) ⊥ (II').

- Sachant qu'à partir d'un point, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite, (II') = (IR).

- **Conclusion partielle :** I, I' et R sont alignés.



- Notons C', D' les pieds des perpendiculaires abaissées de C, D resp. sur (BD), (AC).

- D'après "Le cercle de Morel" (Cf. Annexe 1), A', B', C' et D' sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle
  et O' le centre de *2*.

- **Conclusion partielle :** la médiatrice (II') de la corde [A'B'] passe par O'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que la médiatrice (JJ') de la corde [B'C'] passe par O'
  la médiatrice (KK') de la corde [C'D'] passe par O'
  la médiatrice (LL') de la corde [D'A'] passe par O'.

- **Conclusion :** (IP), (JQ), (KR) et (LS) sont concourantes en O'.

Note historique : ce résultat attribué à Carl Anton Bretschneider avait été déjà proposé en 1896 par H. D. Drury[4].
Selon John Wentworth Clawson[5] qui se réfère à S. Kantor[6], Johann Friedrich Pfaff[7] en serait l'auteur.
Cependant Clawson cite aussi Nager[8] qui attribue ce résultat à Leonhard

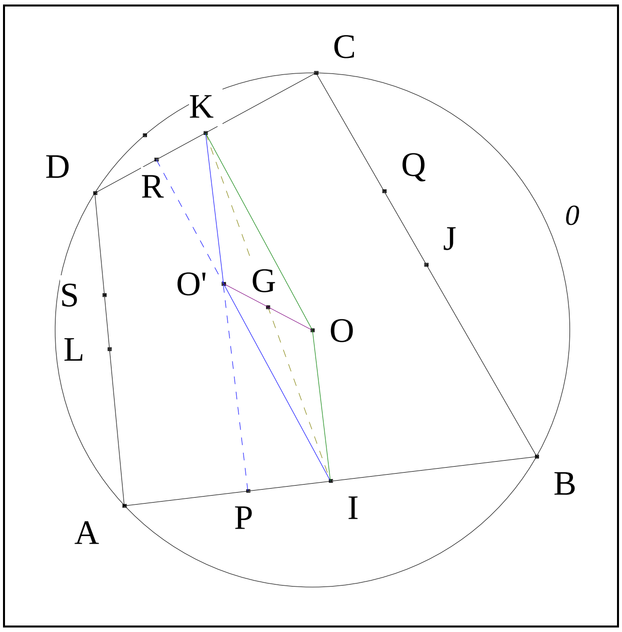
---

[4] Drury H.D., Question 13127, *Educational Times* 65 (1896) 107.
[5] Clawson J. W., The Complete Quadrilateral, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., vol. 20, N°4 (Jul., 1919) 232-261.
[6] Kantor S., *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften*, Wien, vol. 76, part 2 (1878) 207, 275.
[7] Pfaff J. F. (1765-1825).

Euler[9].

Scolies : **(1)** O' est appelé "anticentre de ABCD" par Joseph Neuberg[10] ;
en anglais, O' est le "retrocenter of ABCD".

(2) Position de O'



- Notons O le centre de *0*
  et G le point médian de ABCD.

- Rappelons que G est le milieu de la bimédiane [IK] de ABCD. (Cf. Annexe 2)

- Le quadrilatère IOKO' ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence, G est le milieu de [OO'].

- **Conclusion :** O' est le symétrique de O par rapport à G.

Note historique : ce dernier résultat de Breitschneider a aussi été attribué à Franz Schiffner par J. A. Grunert[11].

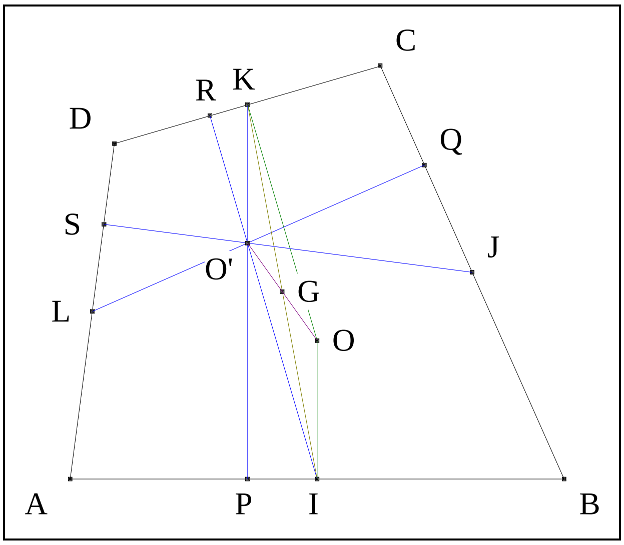
Énoncé traditionnel : *si,* un quadrilatère est cyclique
alors, les maltitudes concourent à l'anticentre de ce quadrilatère.

Commentaire : Michael de Villiers, actuellement professeur à l'université de Durban-Westville (Afrique du sud) considère l'anticentre O' comme étant l'orthocentre de ABCD. De ce point de vue, la droite (O'GO) peut être considéré comme la droite d'Euler de ABCD. Cependant la distribution des points O', G et O ne correspond pas à celle de la droite d'Euler d'un triangle !

---

8 Nager, *Monatshelte für Mathematik und Physik*, Wien, vol. 7 (1896) 325.
9 Euler L. (1707-1783).
10 Neuberg J., *Mathesis* (1924).
11 Grunert J. A., *Lehrbuch der Mathematik* (1832).

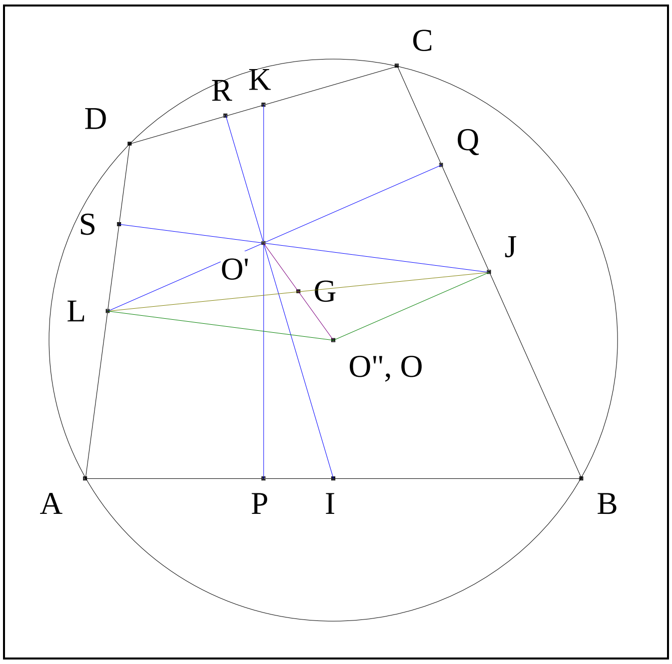
VISUALISATION SUFFISANTE [12]



- Notons O' le point de concours de (IP), (JQ), (KR), (LS)
  O le point d'intersection des médiatrices resp. de [AB], [CD]
  et G le point médian de ABCD.

- Rappelons que G est le milieu de la bimédiane [IK] de ABCD. (Cf. Annexe 2)

- Le quadrilatère IOKO' ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence, G est le milieu de [OO'].



- Notons O" le point d'intersection des médiatrices resp. de [BC], [DA].

12 Kishinev's Olympiad (2001).

- Rappelons que G est le milieu de la bimédiane [JL] de ABCD. (Cf. Annexe 2)

- Le quadrilatère JO"LO' ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence, G est le milieu de [O'O"] ;

  il s'en suit que O" et O sont confondus.

- **Conclusion :** d'après le théorème de la médiatrice, ABCD est cyclique

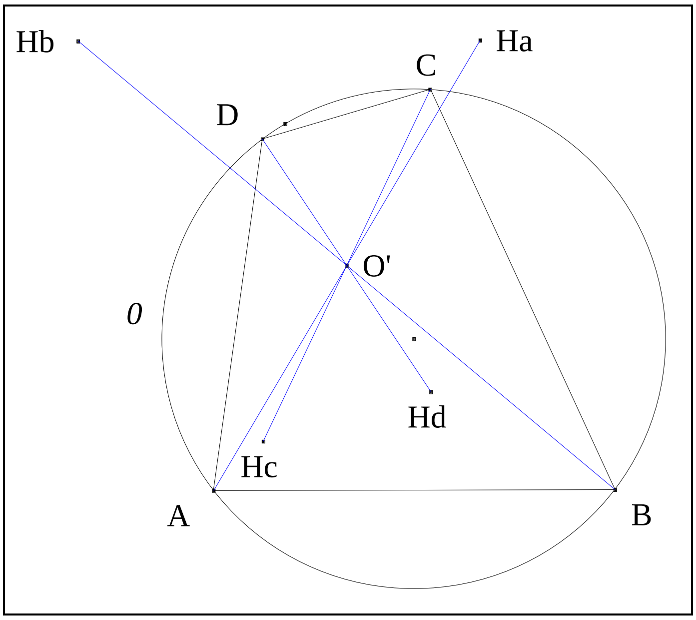
Énoncé traditionnel : *si*, les maltitudes d'un quadrilatère concourent
alors, ce quadrilatère est cyclique.

III. JULES MATHOT

1. Le point de Mathot [13]

VISION

Figure :

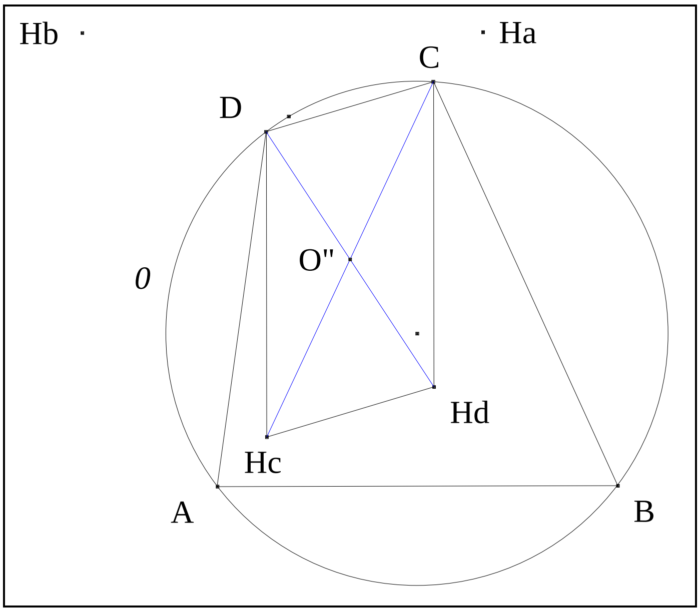


Traits : *0* un cercle,
ABCD un quadrilatère inscrit dans *0*,
O' l'anticentre de ABCD
et Ha, Hb, Hc, Hd les orthocentres resp. des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Donné : (AHa), (BHb), (CHc) et (DHd) sont concourantes en O'.

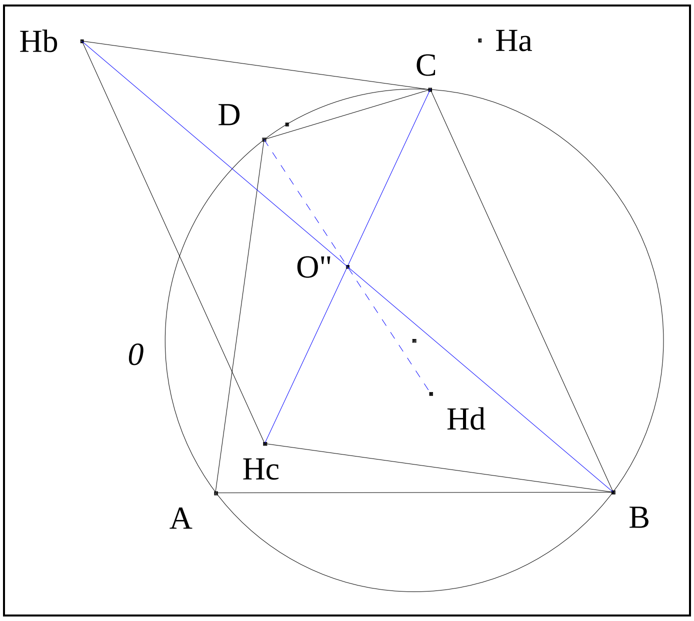
[13] Mathot J., *Mathesis* (1901) 25-25.

VISUALISATION



- D'après Carnot "Un parallélogramme" (Cf. Annexe 3), HcHdCD est un parallélogramme ;
  en conséquence, [HcC], [HdD] se coupent en leur milieu.

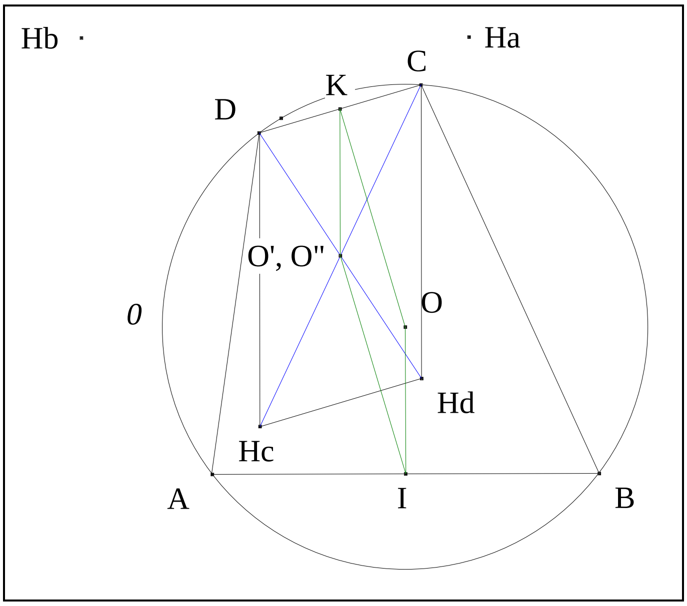
- Notons O" ce point.



- D'après Carnot "Un parallélogramme" (Cf. Annexe 3) HbHcBC est un parallélogramme;
  en conséquence, [HbB], [HcC] se coupent en O".

- Mutatis mutandis, nous montrerions que [HcC], [HdD] se coupent en O".

- **Conclusion partielle :** (AHa), (BHb), (CHc) et (DHd) sont concourantes en O".



- Notons I, K les milieux de [AB], [CD]
  et O le centre de *0*.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle CDHc, 2.O"K = HcD ;
  d'après Carnot"Une relation" (Cf. Annexe 4), HcD = 2.OI ;
  par transitivité de la relation =, 2.O"K = 2.HcD i.e. O"K = HcD.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle CDHc, (O"K) // (HcD) ;
  par hypothèse, (HcD) ⊥ (AB) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (O"K) ⊥ (AB).

- Par construction, (AB) ⊥ (OI) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (O"K) // (OI).

- Le quadrilatère O"IOK ayant deux côtés opposés parallèles et égaux est un parallélogramme ;
  d'après II 2. Le théorème de Bretschneider, O" est l'anticentre de ABCD ;
  en conséquence, O" et O' sont confondus.

- **Conclusion :** (AHa), (BHb), (CHc) et (DHd) sont concourantes en O'.

Scolie : sous ce point de vue, l'anticentre O' est "le point de Mathot du quadrilatère cyclique ABCD".

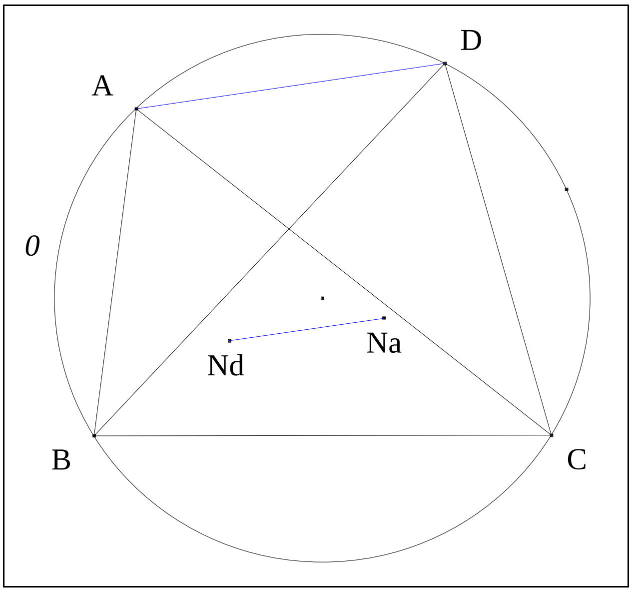
2. Énoncé traditionnel : les droites qui joignent chaque sommet d'un quadrilatère cyclique à l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres sommets, concourent à l'anticentre i.e. au point de Mathot de ce quadrilatère.

IV. ÉMILE LEMOINE

1. Une parallèle à (NaNd)

VISION

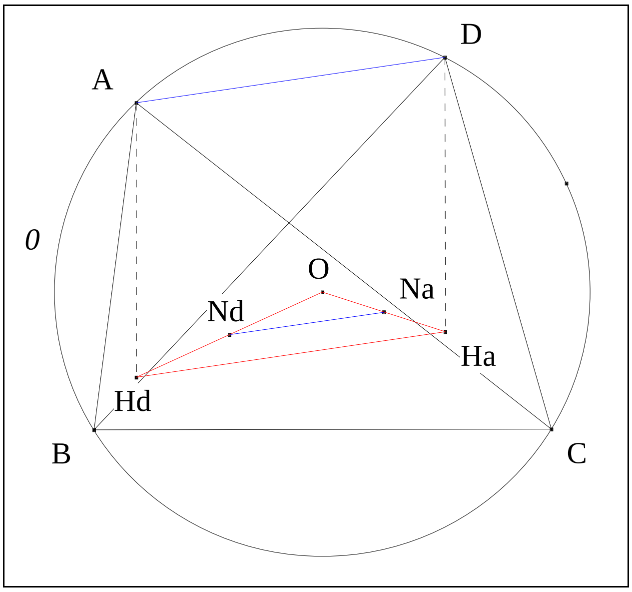
Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD
et	Nd, Na	les centres des cercles d'Euler des triangles ABC et BCD.

Donné : (AD) et (NaNd) sont parallèles.

VISUALISATION



- Notons O le centre de *0*
  et Hd, Ha les orthocentres des triangles ABC et BCD.

- D'après Carnot "Un parallélogramme" (Cf. Annexe 3), (AD) // (HdHa).

- D'après Feuerbach "Le centre du cercle de Bevan-Euler" (Cf. Annexe 5), Nd est le milieu de [OHd]

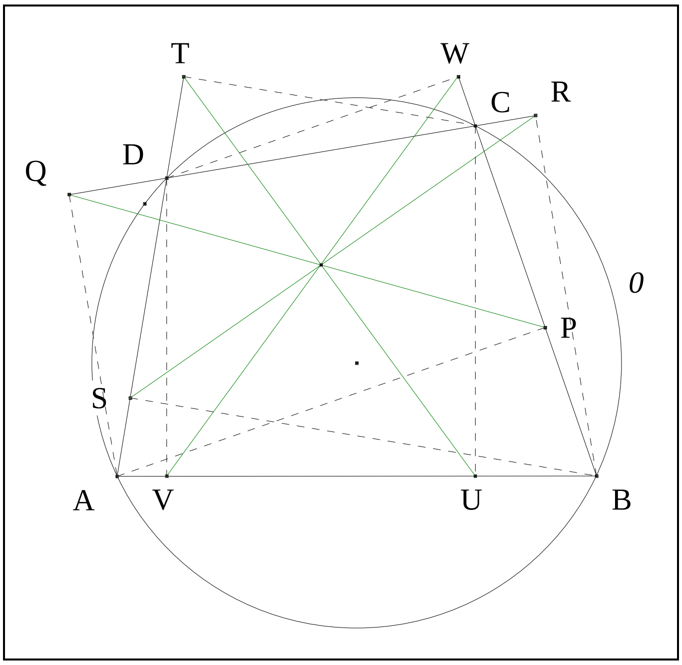
Na est le milieu de [OHa].

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliquée au triangle OHaHd, (HaHd) // (NaNd).
- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, (AD) et (NaNd) sont parallèles.

2. Le point d'Euler d'un quadrilatère cyclique[14] sous le point de vue des droites de Simson

VISION

Figure :

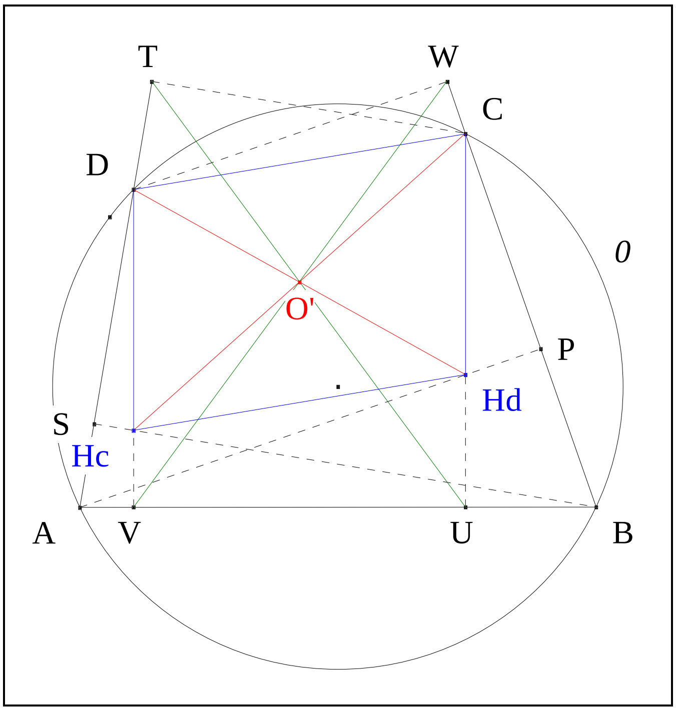


Traits : ABCD un quadrilatère cyclique,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BC), (CD),
R, S les pieds des perpendiculaires abaissées de B resp. sur (CD), (DA),
T, U les pieds des perpendiculaires abaissées de C resp. sur (DA), (AB)
et V, W les pieds des perpendiculaires abaissées de D resp. sur (AB), (BC).

Donné : (PQ), (RS), (TU) et (VW) sont concourantes.

VISUALISATION

[14] Lemoine E., Question, *Nouvelles Annales* (2) 8 (1867) 47.



- Notons Hc, Hd les orthocentres resp. des triangles DAB, ABC
  et O' le point d'intersection de (DHd) et (CHc).

- Remarquons que (UT) est la droite de Simson de pôle C relativement à DAB
  (VW) est la droite de Simson de pôle D relativement à ABC.

- **Scolie :** DHcHdC est un parallélogramme.

- D"après III 1. Le point de Mathot, O' est le point de Mathot de ABCD.

- D'après Steiner "Le milieu de [SH]" (Cf. Annexe 6), (UT) passe par O'
  (VW) passe par O'.

- **Conclusion partielle :** (UT) et (VW) passe par O'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (VW) et (SR) passe par O'
  (SR) et (QP) passe par O'
  (PQ) et (UT) passe par O'.

- **Conclusion :** (PQ), (RS), (TU) et (VW) sont concourantes en O'.

Scolie : O' est l'anticentre, le point d'Euler du quadrilatère cyclique ABCD.

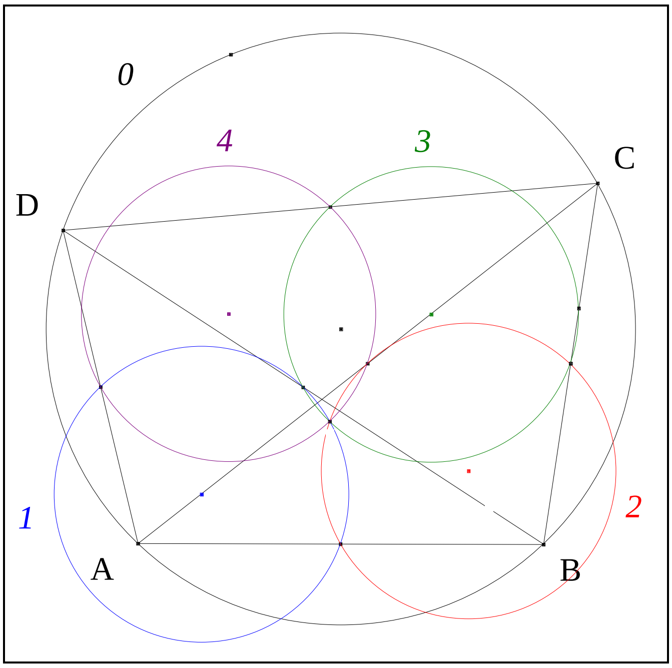
Énoncé traditionnel : les quatre droites de Simson des quatre sommets d'un quadrilatère cyclique relativement au triangle déterminé par les trois autres sommets, concourent à l'anticentre i.e. au point d'Euler de ce quadrilatère.

3. Le point d'Euler d'un quadrilatère cyclique[15] sous le point de vue des cercles d'Euler

[15] Lemoine E., Question, *Nouvelles Annales* (2) 8 (1869) 47, 174, 317.

VISION

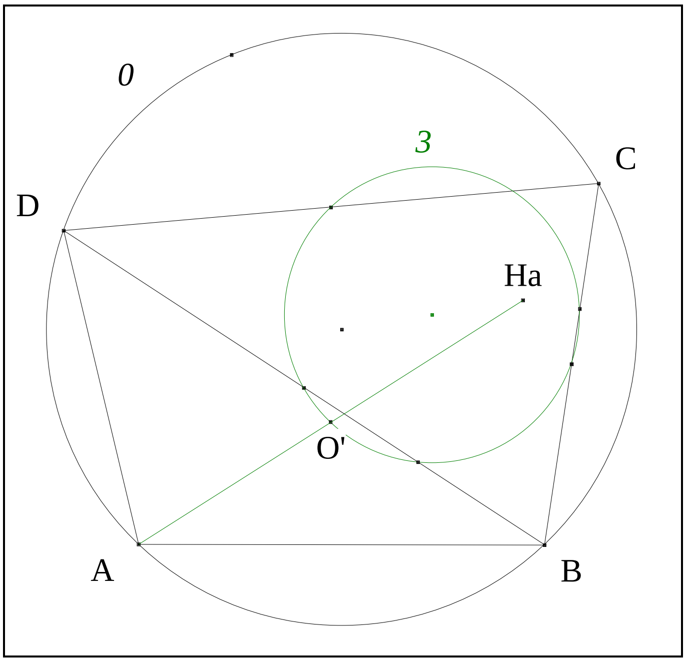
Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	ABCD	un quadrilatère inscrit dans *0*
et	*1*, *2*, *3*, *4*	les cercles d'Euler des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Donné : *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants.

VISUALISATION



- Notons Ha l'orthocentre de BCD
  et O' le milieu de [AHa].

- D'après Steiner "Le milieu de [SH]" (Cf. Annexe 6), *3* passe par M.

- D'après III. 1. Le point de Mathot, O' est l'anticentre de ABCD.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1*, *2*, *4* passe par O'.

- **Conclusion :** *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants en O'.

Scolie : sous ce point de vue, l'anticentre O' est "le point d'Euler du quadrilatère cyclique ABCD".

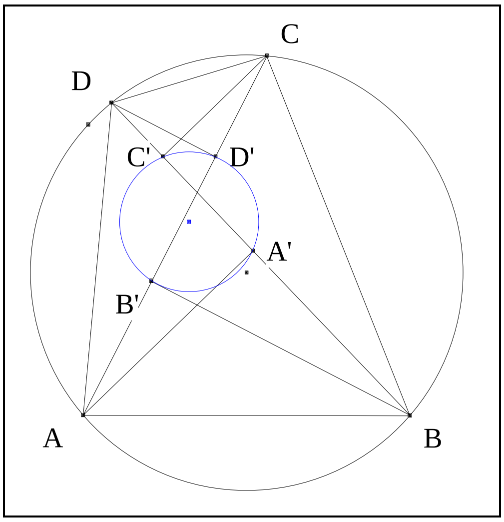
Énoncé traditionnel : les quatre cercles d'Euler des triangles déterminés par les sommets d'un quadrilatère cyclique pris trois à trois, concourent à l'anticentre i.e. au point d'Euler de ce quadrilatère.

Note historique : le nom de ce point a été attribué à Leonhard Euler car celui-ci s'est approché de ce résultat. Émile Lemoine[16] qui en est à l'origine en 1869 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en a reparlé dans une "Note de Géométrie"[17] publié en 1904. Dans la même revue et dans le même numéro, les solutions de Figa Bartolomeo de Turin, de Ludwig Kiepert de Berlin et d'Amédée Morel ont été présentées. Henri Brocard, dans les *Nouvelles Annales* de 1909, rappellera ce résultat.
Nous retrouvons ce résultat en 1877 dans un article de Max Greiner[18] et au comme problème au *Tripos* de Cambridge de 1886.
Ce résultat se re trouve aussi en 1885 chez Alison[19] qui se réfère à *the Ladies' and Gentlemeen's Diary* de 1864 (page 55) et au *Reprint from Educational Times* (vol. 1, Question 1431).

ANNEXE

1. Le cercle de Morel[20]

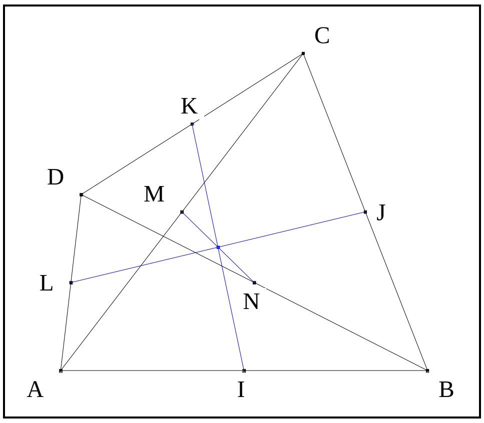
16 Lemoine E., *Nouvelles Annales de Mathématiques*.
17 Lemoine E., Note de Géométrie, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 4 (1904) 402-402.
18 Greiner M., Ueber das Kreisviereck, *Archives* de Grunert (1877).
19 Alison J., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 3 (1885) 79-93.
20 Lemoine, Question 908, *Nouvelles Annales* (2) 8 (1867) 47.
Morel A., Réponse à la Question 908, *Nouvelles Annales* (1867) 317.



Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD
et	A', B', C', D'	les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A, C, B, D sur (BD), (CA), (DB), (AC).

Donné : A', B', C' et D' sont cocycliques.

2. Le point médian d'un quadrilatère[21]

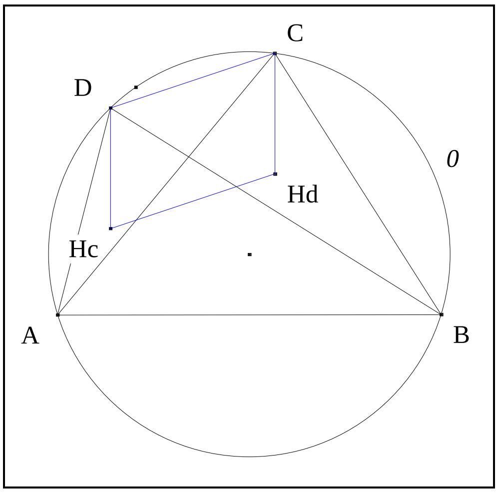


Traits :	ABCD	un quadrilatère,
et	I, J, K, L, M, N	les milieux resp. de [AB],[BC],[CD],[DA],[AC], [BD].

Donné : les bimédianes [IK], [JL] et [MN] concourent en leur milieu i.e au point médian de ABCD.

3. Un parallélogramme de Carnot

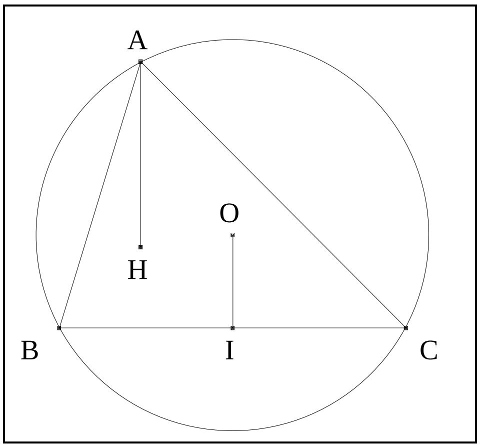
[21] Gergonne, Lavernède, Thomas J. E., *Annales de Gergonne* 1 (1810-1811) 177.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
A' un point de *0*,
et Hc, Hd les orthocentres resp. des triangles ABD et ABC.

Donné : le quadrilatère CDHcHd est un parallélogramme.

4. Une relation de Carnot[22]

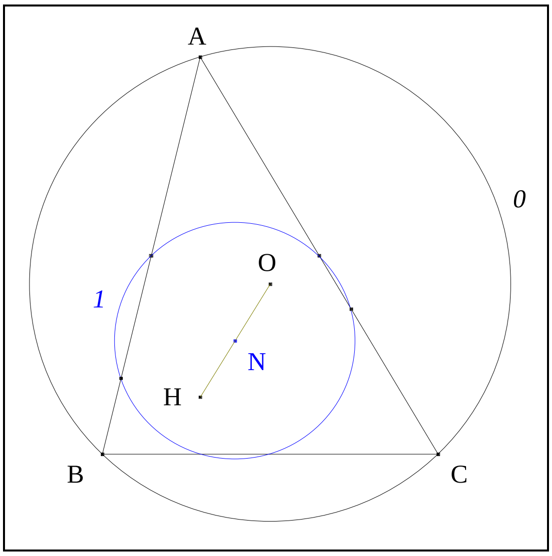


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et I le milieu de [BC].

Donné : AH = 2.IO.

5. Le centre du cercle de Bevan-Euler[23]

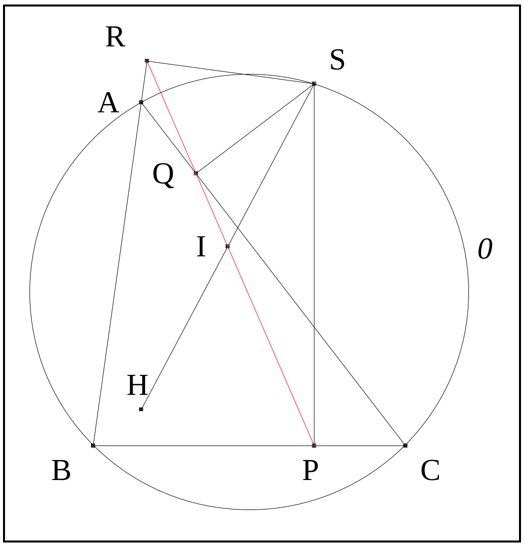
22 Carnot L., *Géométrie de position* (1803).
23 Feuerbach K...



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
1 le cercle d'Euler de ABC
et N le centre de *1*.

Donné : N est sur la droite d'Euler (HO).

6. Le milieu de [SH][24]



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
S un point de *0*,
*S*s la droite de Simson de pôle S relativement à ABC,
P, Q, R les points d'intersection de *S*s resp. avec (BC), (CA), (AB)
et I le point d'intersection de *S*s et (SH).

Donné : I est le milieu du segment [SH].

[24] Cette question a été proposée en 1827-28 par Steiner dans les *Annales Mathématiques* 18 de Gergonne.