LA DROITE D'HERMES - SODDY

OU

L'ALIGNEMENT Ge - I - L

†

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une approche purement synthétique montrant que la droite de Soddy (GeI) d'un triangle passe par le point de de Longchamps L de celui-ci. Une revisite des principaux centres concernés est proposée.
Cet article est le premier d'une série de trois qui ont pour objet un résultat majeur concernant les PC-droites qui seront définies dans le dernier article.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

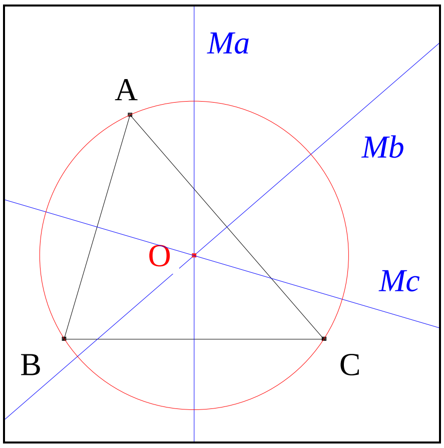
Avertissement : les références indiquées sont celles trouvées par l'auteur et peuvent donc être modifiées.

I. LA DROITE D'EULER

OU

L'ALIGNEMENT H-G-O (1765)

1. Euclide d'Alexandrie (vers 325 - vers 265 av J.-C.)

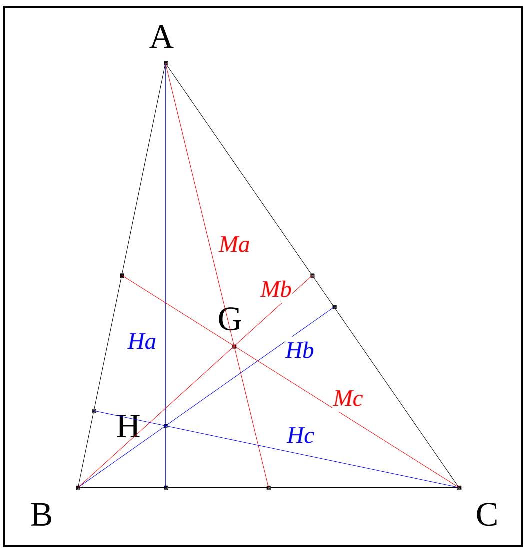


Traits : ABC un triangle
et *M*a, *M*b, *M*c les A, B, C-médiatrices de ABC.

Donnés : *M*a, *M*b et *M*c sont concourantes[1].

Scolie : ce point de concours, noté O et répertorié sous X_3 chez ETC, est "le centre du cercle circonscrit à ABC".

2. Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.)



Traits : ABC un triangle,
*H*a, *H*b, *H*c les A, B, C-hauteurs de ABC

[1] Euclide, *Éléments* Livre IV, proposition 5.

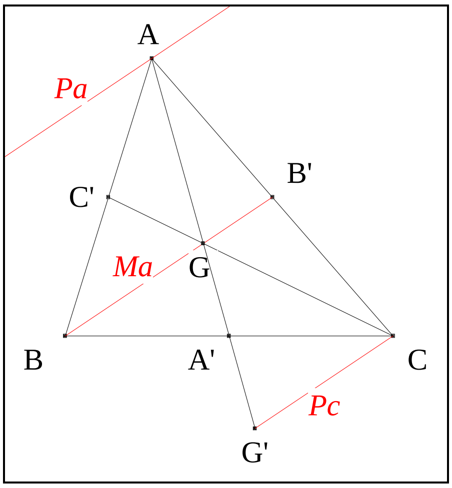
et *M*a, *M*b, *M*c les A, B, C-médianes de ABC.

Donnés : **(1)** *H*a, *H*b et *H*c sont concourantes
(2) *M*a, *M*b et *M*c sont concourantes.

Scolies : **(1)** le point de concours de *H*a, *H*b et *H*c, noté H et répertorié sous X_4 chez ETC, est "l'orthocentre de ABC"[2].

(2) Le point de concours de *M*a, *M*b et *M*c, noté G et répertorié sous X_2 chez ETC, est "le point médian de ABC"[3].

(3) Position de G



- Notons A', B', C' les milieux resp. de [BC], [CA], [AB],
  *P*a la parallèle à (BGB') passant par A,
  *P*c la parallèle à (BGB') passant par C
  et G' le point d'intersection de *P*c et (AGA').

- D'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontière *P*c et (BGB'),
  A' est le milieu de [GG'] i.e. 2.GA' = GG'.

- D'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontière *P*a et *P*c,
  G est le milieu de [AG'] i.e. GG' = AG ;
  par transitivité de la relation, 2.GA' = AG.

- **Conclusion :** G est le second tiers-point de [AA'] à partir de A.

Note historique :
rappelons qu'Euclide ignorait le concept d'orthocentre dans ses *Éléments*, alors qu'Archimède en parle sous un autre nom dans le lemme 5. Dick Tahta affirme que le lemme 12 d'Archimède est une source plus appropriée de l'orthocentre. Autrefois, il était appelé "point d'Archimède". John Satterly[4] attribue la création du mot "orthocentre" à Besant et Ferrers en 1865. Sa désignation par la lettre H, vient de la première lettre du mot allemand "Höhenschnittpunkt" qui signifie "point de concours des hauteurs".

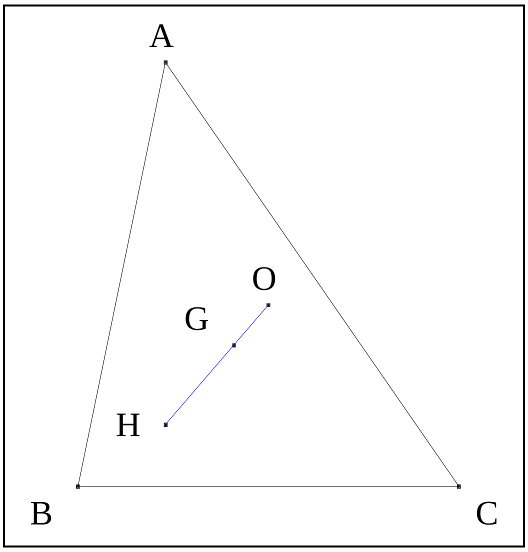
---

2 Archimède, *Scolies*, lemme 5.
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas 5.
3 Archimède, proposition 13, Sobre el equilibrio de los platos, Livre I (vers 225 a. J.-C.).
4 Satterly J., *Mathematical Gazette* 45 (1962) 51.

G a été appellé "χεντρον βαρϖν" par Archimède, "centre des moyennes distances" ou "barycentre" des trois sommets de ABC par Bobillier, suivi par Carnot[5], "centre de gravité ou d'inertie[6]" de la surface ABC par les physiciens, "centroïde" par Davies[7], "Schwerpunkt" en Allemagne, "Balance point" par John H. Conway.
Au théâtre, Molière évoque le point G en 1672 dans *Les femmes savantes*[8] en mettant dans la bouche deBélise, voire de Bêtise, la réplique suivante :

De ta chute, ignorant, ne vois-tu pas les causes,
Et qu'elle vient d'avoir du point fixe écarté
Ce que nous appelons centre de gravité ?

3. Leonhard Euler (1707 - 1783)



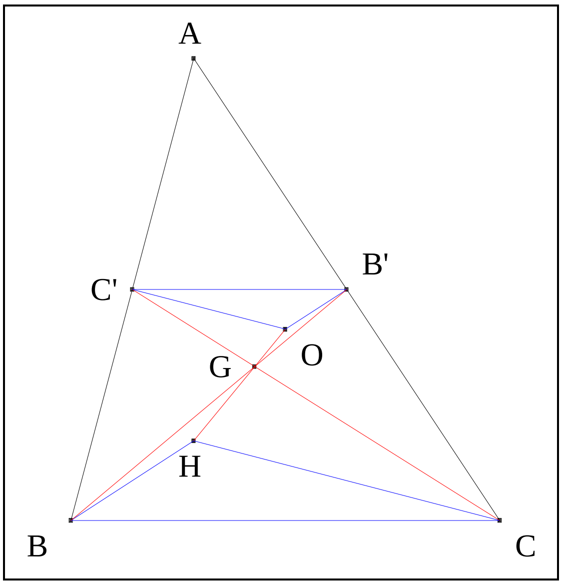
Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	G	le point médian de ABC
et	H	l'orthocentre de ABC.

Donné : H, G et O sont alignés[9].

VISUALISATION

---

[5] Carnot, *Géométrie de position* (1803).
[6] Ces deux concepts sont équivalents; rappelons qu'en physique, il y a identité en masse d'inertie et masse grave d'après le principe de relativité et qu'en mathématique, l'isobarycentre des sommets d'un triangle coïncide avec le centre de gravité de la plaque homogène triangulaire délimitée par ses sommets.
[7] Davies T. S., *Mathematicien* 1.
[8] Acte III, Scène II.
[9] Euler L., Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* 11 (1765) 114.
Euler L., *Opera Omnia* XXVI, éd. Andr. Speiser, Zürich (1953) 139-157 et surtout 149 ; ce traité fut présenté à l'Académie de St-Petersbourg le 21 décembre 1763 en style ancien.



- Notons B', C' les milieux resp. de [AC], [AB].

- D'après Thalès "La droite des milieux", (BC) // (B'C').

- Par définition d'une hauteur, (BH) ⊥ (CA) et (CH) ⊥ (AB) ;
  par définition d'une médiatrice, (CA) ⊥ (OB') et (AB) ⊥ (OC') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BH) // (OB') et (CH) // (OC') .

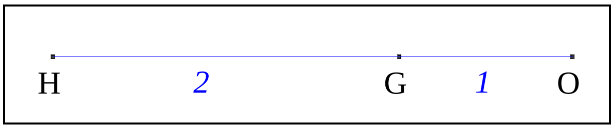
- **Conclusion partielle :** par définition, les triangles HBC et OB'C' sont homothétiques.

- D'après Archimède "Le point médian", (BB') et (CC') de ABC, passent par G.

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à HBC et OB'C', H, G et O sont alignés.

Scolies : **(1)** suite à l'initiative de Joseph Neuberg, (HGO) est "la droite d'Euler de ABC".

(2) Disposition[10]



G est le premier tiers-point du segment [OH] à partir de O.

Note historique : la preuve d'Euler dans son article "Easy Solution to some Very Difficult Geometrical Problems" publié à St. Petersburg en 1765, est analytique ; la première démonstration géométrique sera de Lazare Carnot.
David Wells[11] qualifiera ce résultat de "fameux théorème".

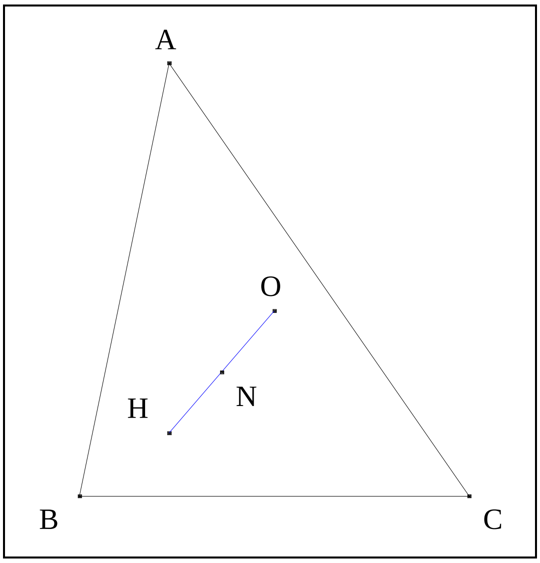
Commentaire : Leonhard Euler a été le premier géomètre à avoir l'intuition de regrouper ces trois

---

10 Euler L., *Solutio facilis* ,(1765).
11 Wells D., *The Penguin Book of Curios and Interesting Geometry*, Penguin, New York (1991) 69.

points remarquables du triangle sur une droite ; cette démarche allait donner à la future "géométrie du triangle", le premier moule d'une synthèse d'un ordre plus élevé dont la nature allait être expliquée par ses successeurs.
L'alignement de O, G et H peut être obtenu à partir du théorème de Sondat[12] en considérant ABC et son triangle médian A'B'C'.

4. **Karl Feuerbach** (1800 -1834)

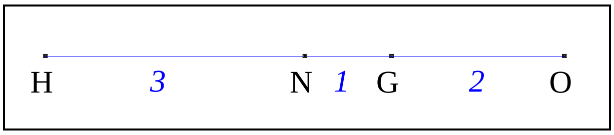


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
et N le centre du cercle d'Euler-Bevan de ABC.

Donné : N est le milieu de [HO] [13].

Scolies : **(1)** ce point est répertorié sous X_9 chez ETC.

(2) Disposition

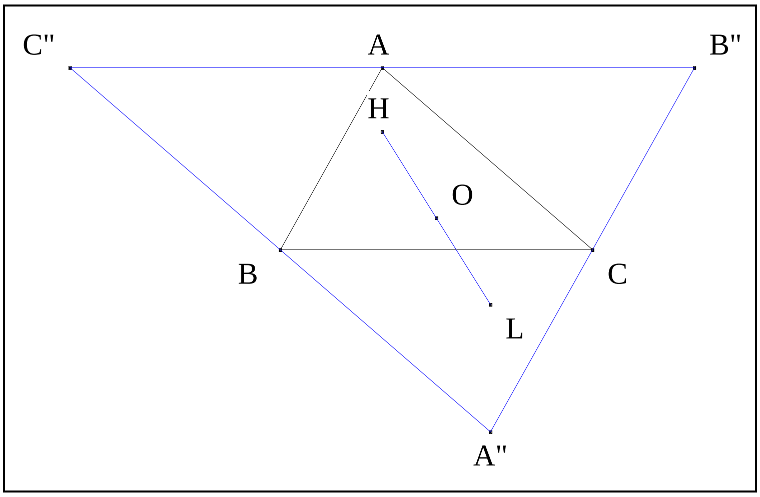


5. **Gaston Gohierre de Longchamps** (1842-1906)

VISION

Figure :

[12] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1.
[13] Feuerbach K.., *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822) 38.



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A"B"C" le triangle antimédian de ABC
et L l'orthocentre de A"B"C".

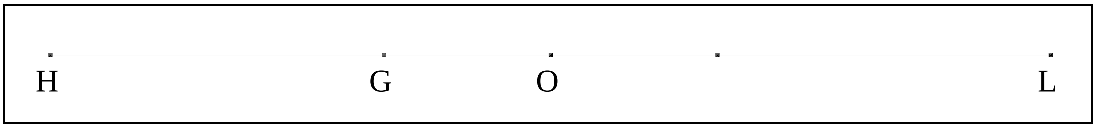
Donné : O est le milieu du segment [HL] [14].

VISUALISATION

- Partons du triangle A"B"C".
- **Scolie :** H est le centre du cercle circonscrit de A"B"C";
- D'après Euler-Bevan "Le cercle des six points", O est le centre du cercle d'Euler de A"B"C".
- **Conclusion :** d'après I. 4, O est le milieu du segment [HL].

Scolies : **(1)** L est "le point de de Longchamps de ABC" ;
il est noté L et est répertorié sous X_{20} chez ETC.

(2) Situation de L



- **Conclusion :** G est le premier tiers-point de [OL] à partir de H
ou encore
L est le point anticomplémentaire de H.

Énoncé traditionnel : le point de de Longchamps d'un triangle est

(1) sur la droite d'Euler de ce triangle

[14] de Longchamps G..

(2) le symétrique de l'orthocentre de ce triangle par rapport au centre de son cercle circonscrit

(3) l'orthocentre du triangle antimédian de ce triangle.

II. LA DROITE DE HOUSEL-NAGEL

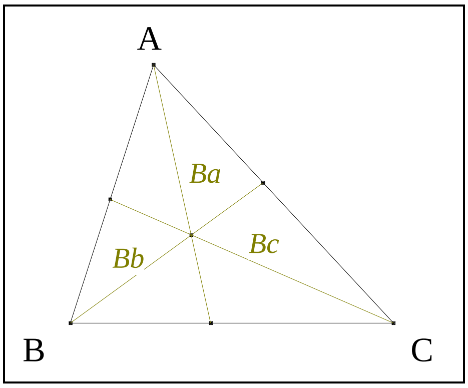
OU

L'ALIGNEMENT I-G-Sp (1865)

1. Pythagore de Samos (VI-V-ième siècle av. J.-C.)

VISION

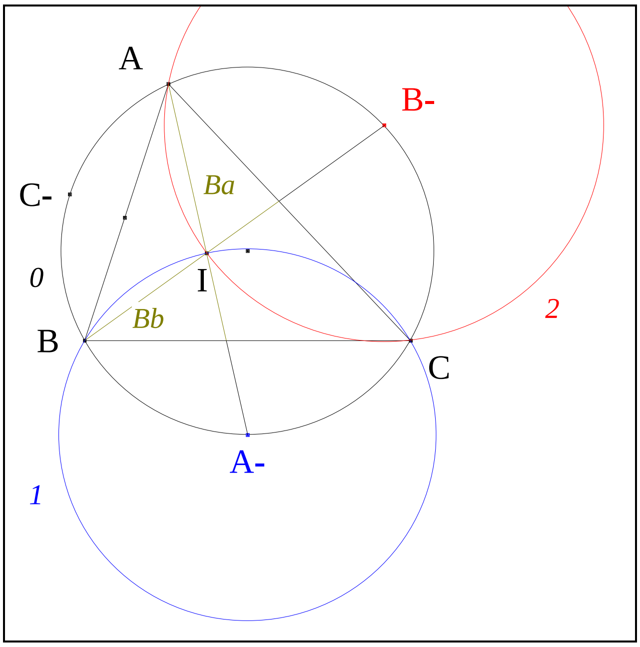
Figure :



Traits : ABC un triangle
et *B*a, *B*b, *B*c les A, B, C-bissectrices intérieures de ABC.

Donné : *B*a, *B*b et *B*c sont concourantes.

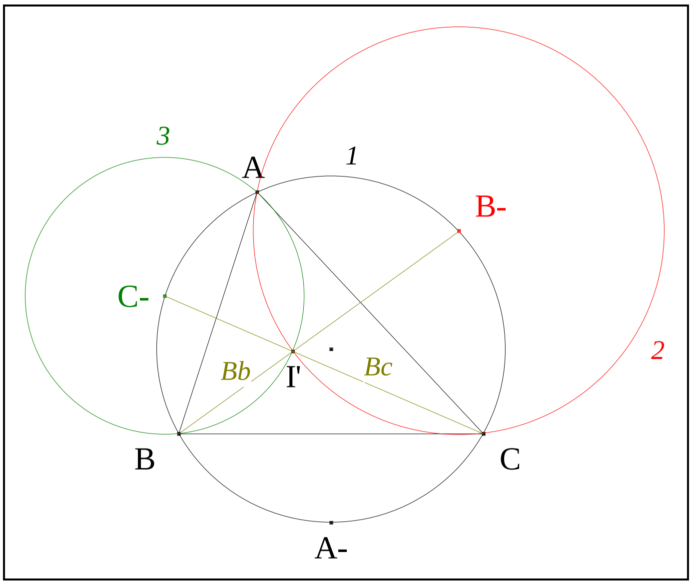
VISUALISATION



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC,
  A-, B-, C- les seconds A, B, C-perpoints de ABC,
  1, 2 les cercles de centre resp. A-, B- passant par C
  et I le second point d'intersection de *1* et *2*.

- **Scolies :** *B*a = (AA-) et *B*b = (BB-).

- D'après "Le cercle de Morley"[15] appliqué à *1* et *2*, *B*a et *B*b passent par I.



- Notons *3* le cercle de centre C- passant par A
  et I' le second point d'intersection de *2* et *3*.

- **Scolie :** *B*c = (CC-).

- D'après "Le cercle de Morley " appliqué à *2* et *3*, *B*b et *B*c passent par I'.

- I et I' étant à la fois sur *2* et sur *B*b, sont confondus.

[15] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2.

- **Conclusion :** *B*a, *B*b et *B*c sont concourantes.

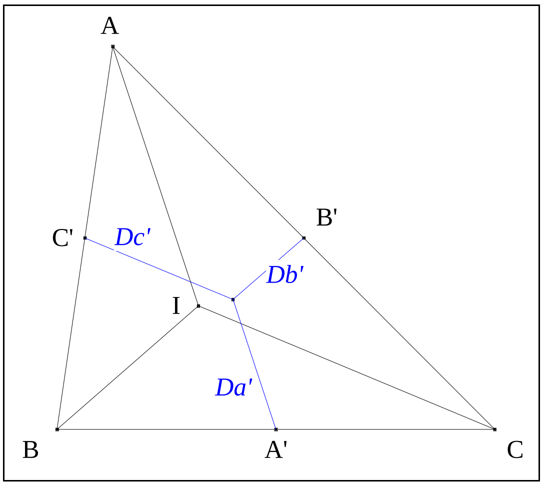
Scolie : I est "le centre de ABC" et est répertorié sous X_1 chez ETC.

Note historique : ce premier centre connu de l'École pythagoricienne fera l'objet de la proposition 4 du Livre IV des Éléments d'Euclide.

2. Theodor Spieker (1824-1913)

VISION

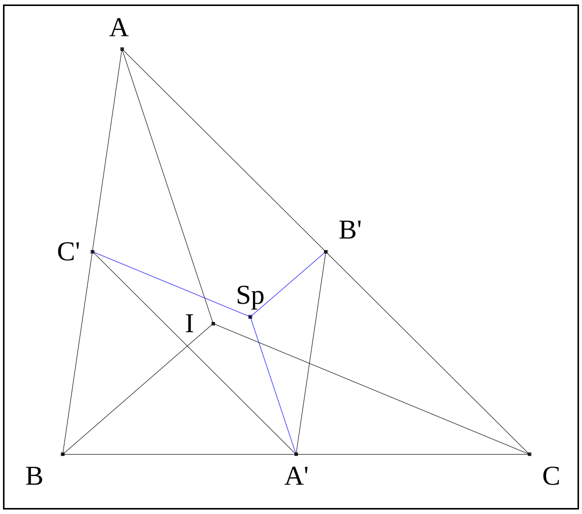
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et *D*a', *D*b', *D*c' les parallèles à (AI), (BI), (CI) passant resp. par A', B', C'.

Donné : *D*a', *D*b' et *D*c' sont concourantes.

VISUALISATION



- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ABC, (A'B') // (AB) et (A'C') // (AC).

- Par définition, le quadrilatère AC'A'B' est un parallélogramme ;
  en conséquence, *D*a' est la A'-bissectrice de A'B'C'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *D*b' est la B'-bissectrice de A'B'C'
  *D*c' est la C'-bissectrice de A'B'C'.

- **Conclusion :** d'après II. 1., *D*a', *D*b' et *D*c' sont concourantes au centre de A'B'C'.

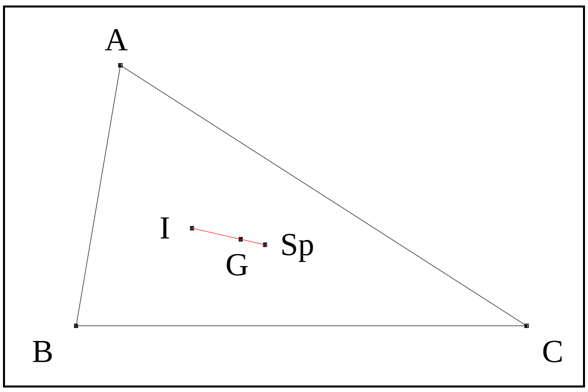
Scolie : ce point de concours est "le point de Spieker de ABC" ;
il est noté Sp et est répertorié sous X_{10} chez ETC.

Énoncé traditionnel : le point de Spieker d'un triangle est le centre de son triangle médian.

3. Charles Pierre Housel (vers 1865)

VISION

Figure :

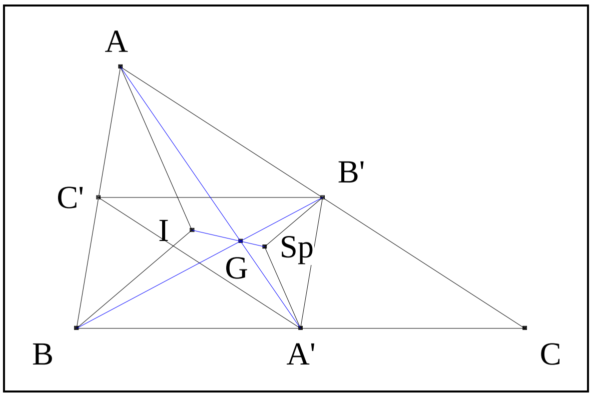


Traits : ABC un triangle,

	I	le centre de ABC,
	G	le point médian de ABC,
et	Sp	le point de Spieker de ABC.

Donné : I, G et Sp sont alignés[16].

VISUALISATION



- Notons A'B'C' le triangle médian de ABC.

- Par hypothèses, (AI) est la A-bissectrice de ABC
  et (A'Sp) la A'-bissectrice de A'B'C'.

- Le quadrilatère AC'A'B' étant un parallélogramme, (AI) // (A'Sp).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BI) // (B'Sp).

- D'après Thalès "La droite des milieux", (AB) // (A'B').

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 1), appliqué aux triangles homothétiques IAB et SpA'B', (ISp) passe par le point G, intersection des médianes (AA') et (BB').

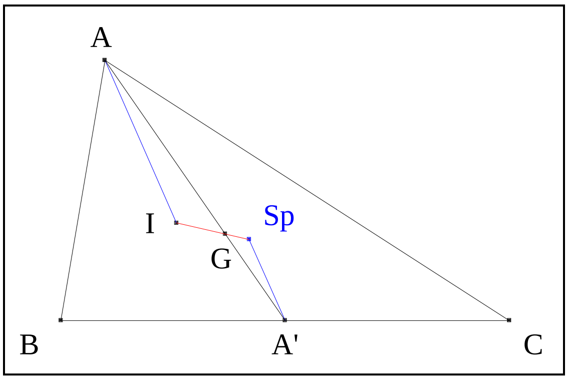
- **Conclusion :** I, G et Sp sont alignés.

Énoncé traditionnel : dans tout triangle, le centre du cercle inscrit, le point de concours des médianes et le centre du cercle inscrit au triangle médian, sont trois points alignés.

Scolies : **(1)** (IGSp) est "la droite de Housel de ABC".

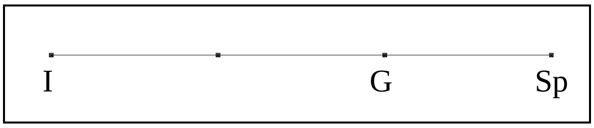
(2) Une relation

16 Housel C. P., *Introduction à la géométrie supérieure* (1865) 123.



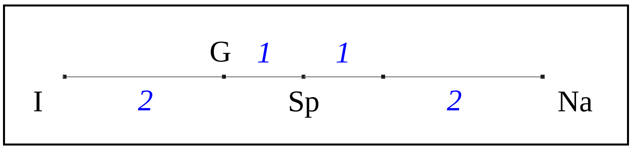
- **Conclusion :** d'après I. 2. scolie 3, et Thalès, GI = 2.GSp.

(3) Situation de Sp



- **Conclusion :** G est le premier tiers-point de [SpI] à partir de Sp
  ou encore
  I est le point anticomplémentaire de Sp.

(4) La droite de Housel-Nagel



- Notons Na le point de Nagel de ABC.
- D'après "Le deuxième théorème de Nagel"[17], la droite de Housel est identique à celle de Nagel.
- **Conclusion :** Sp est le milieu de [INa].

Note historique : F. G.-M.[18] signale que le résultat d'Housel qui date de 1865, est donné par Olry Terquem[19] en 1842 dans un article remarquable de cet auteur signé Tm.
En fait, Housel a montré que Sp est sur la droite de Nagel[20] qui constitue le théorème I de cet auteur.
Cet alignement a été redécouvert par Gaston Gohierre de Longchamps[21] en 1866.

III. LE DEUXIÈME THÉORÈME DE NAGEL

OU

17 Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 12-14.
18 F. G.-M, *Exercices de Géométrie*, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris, 1991, p.463-464.
19 Terquem O., Considération sur le triangle rectiligne d'après Euler, *Nouvelles Annales*, tome I (1842) 79, n° 2.
20 Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836) ;
Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3.
21 Longchamps (de) G. G., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1866) 124, proposition 4.

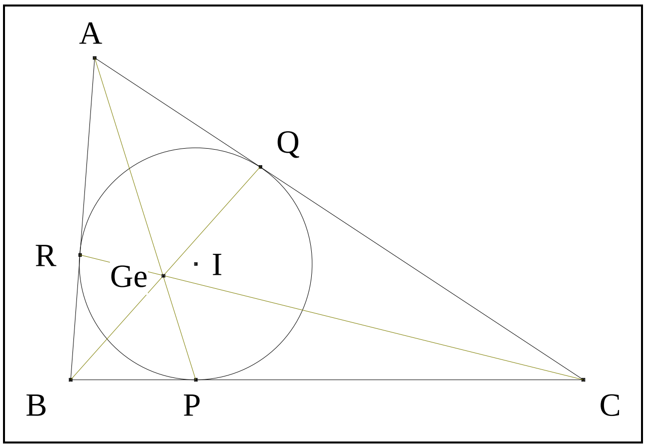
L'ALIGNEMENT Mt-G-Ge (1836)

Commentaire : les preuves des énoncés de cette partie sont donnés dans un article de l'auteur[22].

1. Le point de Gergonne (1771-1859)

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*
et	P, Q, R	les points de contact de *1* avec (BC), (CA), (AB).

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes[23].

Scolie : ce point de concours est "le point de Gergonne" de ABC ;
il est noté Ge et est répertorié sous X_7 chez ETC.

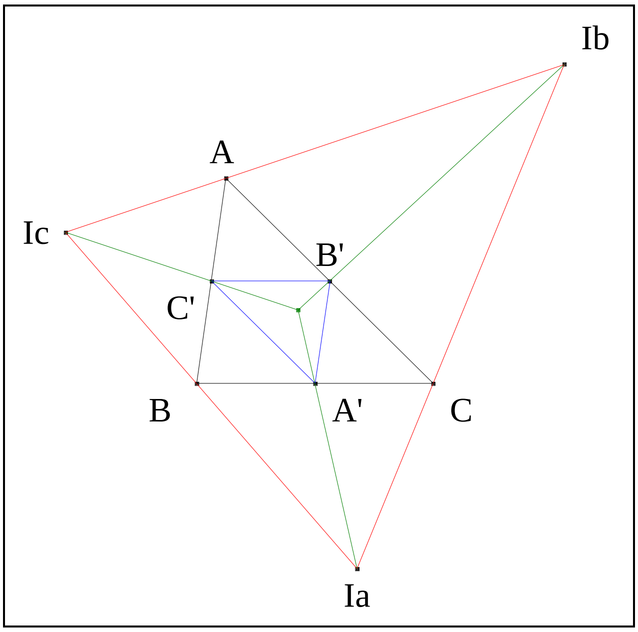
Note historique : dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* datant de 1837, Michel Chasles signale que le "point de Gergonne" avait déjà été signalé par le marquis Jean de Céva[24] dans la seconde partie de son livre qui ne dépassait pas 84 pages.

2. Le Mittenpunckt

VISION

[22] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 12-14.
[23] Gergonne, *Annales de Gergonne* IX (1818-19).
[24] Ceva (de) J., *De lineis rectic se invicem secantibus, statica constructio* (1678).

Figure :



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et IaIbIc le triangle excentral de ABC.

Donné : IaIbIc et A'B'C' sont en perspective[25].

Scolies : **(1)** le centre de cette perspective, noté Mt, est "le Mittenpunkt de ABC" et est répertorié sous X_9 chez ETC

(2) (IaA'), (IbB'), (IcC') sont concourantes en Mt.

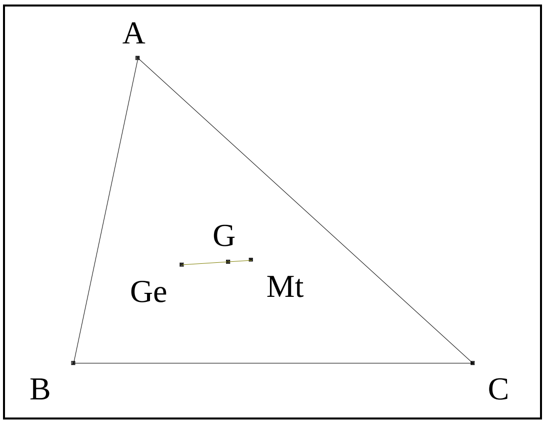
Note historique : ce résultat de Nagel, sera redécouvert par Karl Feuerbach et démontré synthétiquement par Joseph Neuberg[26].

2. L'alignement Mt-G-Ge

VISION

Figure :

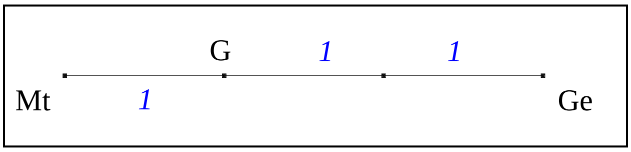
25 Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836).
26 Neuberg J., *Nouvelle correspondance* 1 (1874).



Traits : ABC un triangle,
G le point médian de ABC,
Ge le point de Gergonne de ABC
et Mt le Mittenpunkt de ABC.

Donné : Mt, G et Ge sont alignés[27].

Scolie : la disposition



- **Conclusion :** G est le premier tiers-point de [MtGe] à partir de Mt
ou encore
Ge est le point anticomplémentaire de Mt.

IV. LA DROITE DE KHOA LU NGUYEN

OU

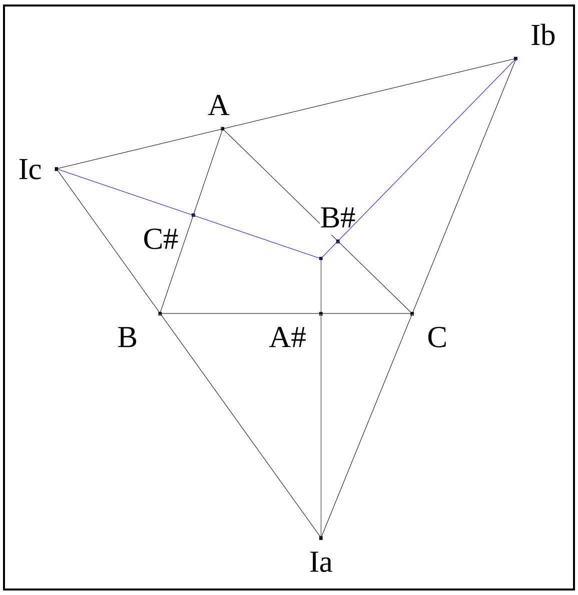
L'ALIGNEMENT Mt, H, Sp (2004)

1. L'ingénieur civil Benjamin Bevan

VISION

Figure :

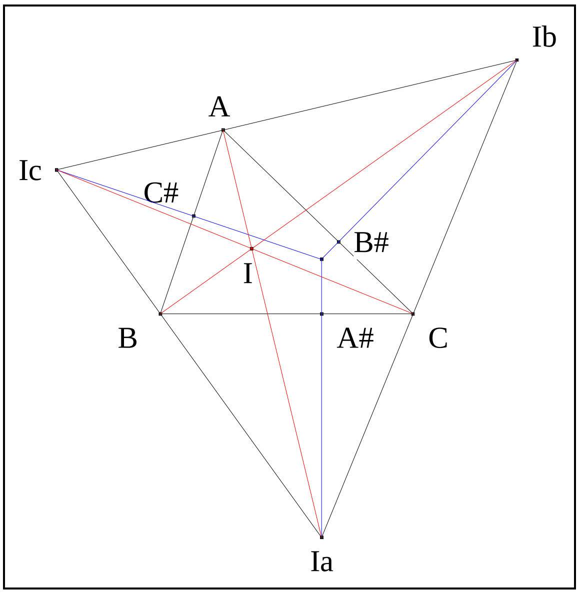
[27] Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836) ;
Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3.



Traits :	ABC	un triangle,
	IaIbIc	le triangle excentral de ABC,
et	A#, B#, C#	les pieds des perpendiculaires abaissées de Ia, Ib, Ic sur (BC), (CA), (AB).

Donné : IaIbIc et A#B#C# sont en perspective[28].

VISUALISATION



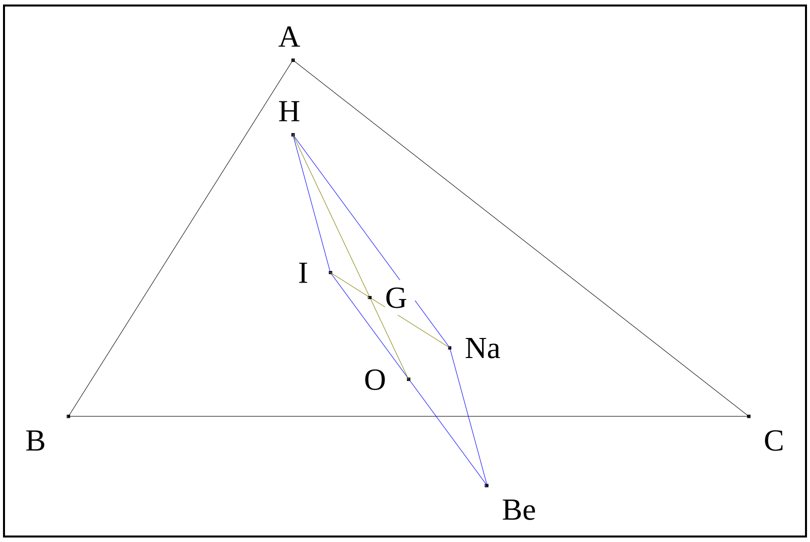
- Notons I le centre de ABC.
- D'après "Le théorème de Mention", I est l'orthocentre de IaIbIc ;
  en conséquence, ABC est le triangle orthique de IaIbIc.
- D'après Nagel "Une tangente et un rayon" (Cf. Annexe 2) appliqué à IaIbIc,
  (IaA#), (IbB#) et (IcC#) passent par le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.
- **Conclusion :** IaIbIc et A#B#C# sont en perspective.

[28] Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 18.

Scolies : **(1)** le centre de cette perspective, noté Be, est "le point de Bevan de ABC" et est répertorié sous X_{40} chez ETC.

(2) Be est le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.

(3) Un parallélogramme[29]



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC.

- D'après I. 3. scolie 2, G est le premier tiers-points de [OH] à partir de O ;
  d'après "Le troisième théorème de Nagel"[30], G est le premier tiers-points de [INa] à partir de I ;
  d'après Thalès, (OI) // (HNa) et 2.OI = HNa.

- D'après "Le troisième théorème de Nagel"[31], O est le milieu de [IBe] ;
  en conséquence, (BeOI) // (HNa) et BeI = HNa.

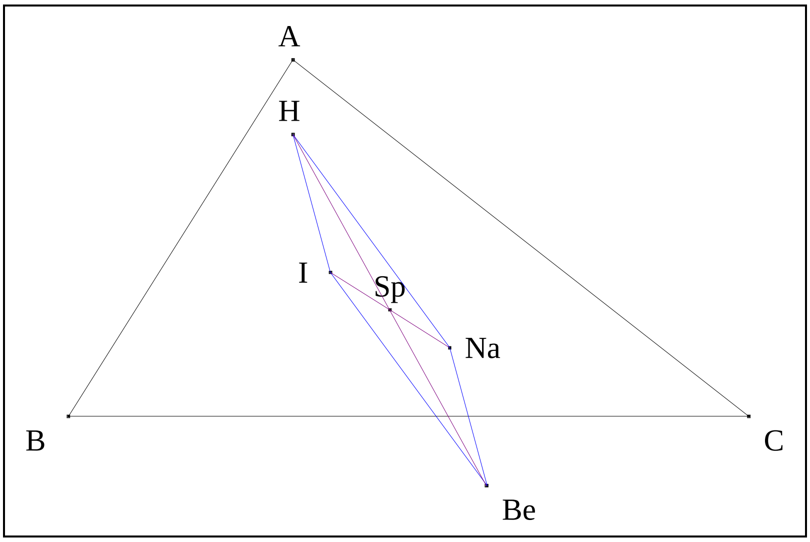
- **Conclusion :** le quadrilatère HIBeNa est un parallélogramme.

(4) Trois points alignés

[29] Thomas P. D., Problems and Questions [150, 1952], A parallelogram associated with a triangle, *Mathematics Magazine* 26 (1953) 283.

[30] Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836) ;
Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3.

[31] Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836) ;
Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3.



- Le quadrilatère HIBeNa étant un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu ;
  d'après II. 3. scolie 4, Sp est le milieu de [INa] ;
  en conséquence, Sp est le milieu de [HBe].

- **Conclusion :** H, Sp et Be sont alignés.

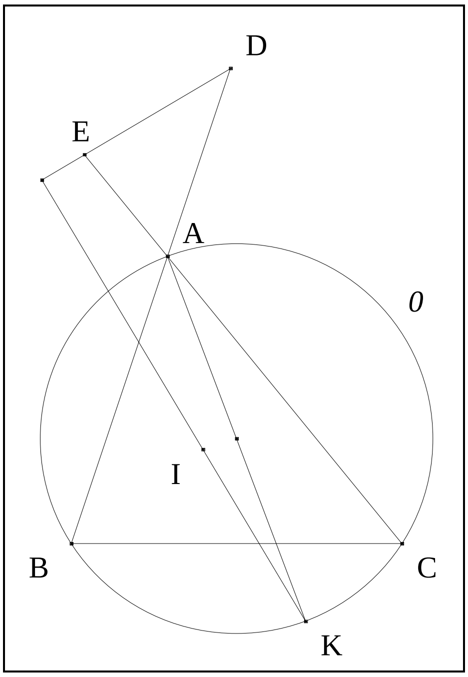
Énoncé traditionnel : le point de Bevan d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle excentral de ce triangle.

Commentaire : la "concourance" de (IaA#), (IbB#) et (IcC#) peut être rapidement mise en évidence en observant que IaIbIc et ABC sont orthologiques ; cependant, cette procédure ne donne pas la nature de ce point de concours.

2. Igor Federovitch Sharygin (?-2004)

VISION

Figure :

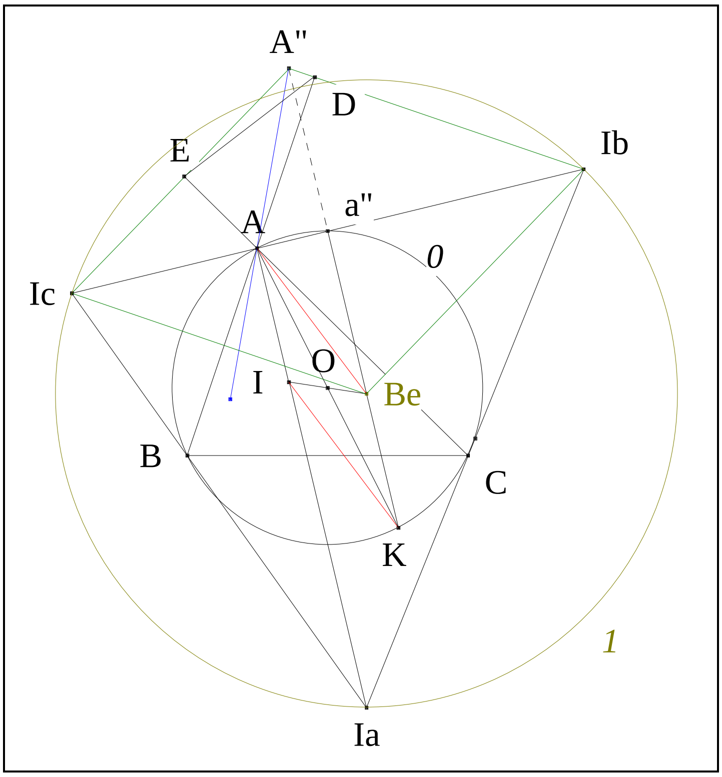


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
I le centre de ABC,
K l'antipôle de A relativement à *0*,
D le point de contact du B-excercle de ABC avec (AB)
et E le point de contact du C-excercle de ABC avec (CA).

Donné : (KI) est perpendiculaire à (DE)[32].

VISUALISATION

[32] Sharygin I., Problème II 137, *Problemas de geometria*, Editions Mir (1986).



- Notons IaIbIc le triangle excentral de ABC,
  A" le point d'intersection de (B'D) et (C'E),
  1 le cercle circonscrit à IaIbIc,
  Be le point de Bevan de ABC i.e. le centre de *1*,
  O le centre de *0*
  et a" le milieu de [B'C'].

- D'après IV. 1. (BeIb) ⊥ (AC) , (BeIc) ⊥ (AB) , BeIb = BeIc ;
  par hypothèses, (AC) ⊥ (A"C") , (AB) ⊥ (A"Ib) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BeIb) // (A"C") , (BeIc) // (A"Ib) ;
  en conséquence, le quadrilatère A"IcBeIb est un losange.

- **Scolies :** **(1)** les points A", a" et Be sont alignés
  (2) (A"a"Be) ⊥ (IbIc)
  (3) a"A" = a"Be.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A"a"Be) passe par K.

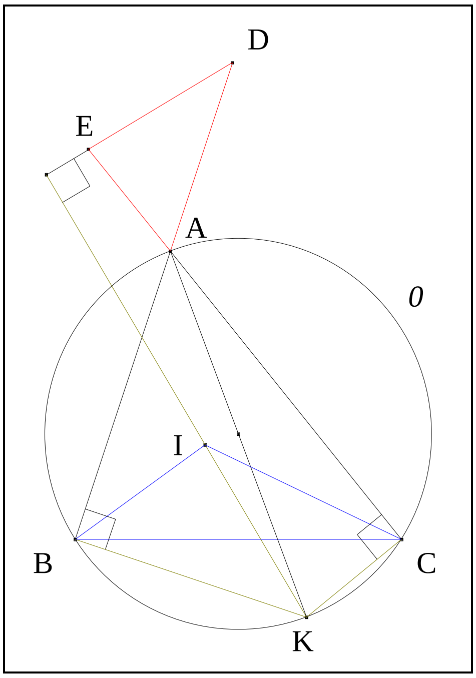
- Nous savons que I est l'orthocentre de IaIbIc ;
  par hypothèse, Be est le centre de *1* ;
  d'après I. 4. appliqué à IaIbIc, O est le milieu [BeI].

- Le quadrilatère AIKBe ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme;
  en conséquences, **(1)** (AIIa) // (A"a"BeK)
  (2) (KI) // (ABe).

- Nous savons que, (AIIa) est la A-bissectrice de ABC ;
  le triangle ABeA" étant isocèle, (ABe) et (AA") sont deux A-isogonales de ABC ;
  d'après "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 3), (ABe) ⊥ (DE).

- **Conclusion :** d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IK) ⊥ (DE).

Scolie : nature géométrique de K



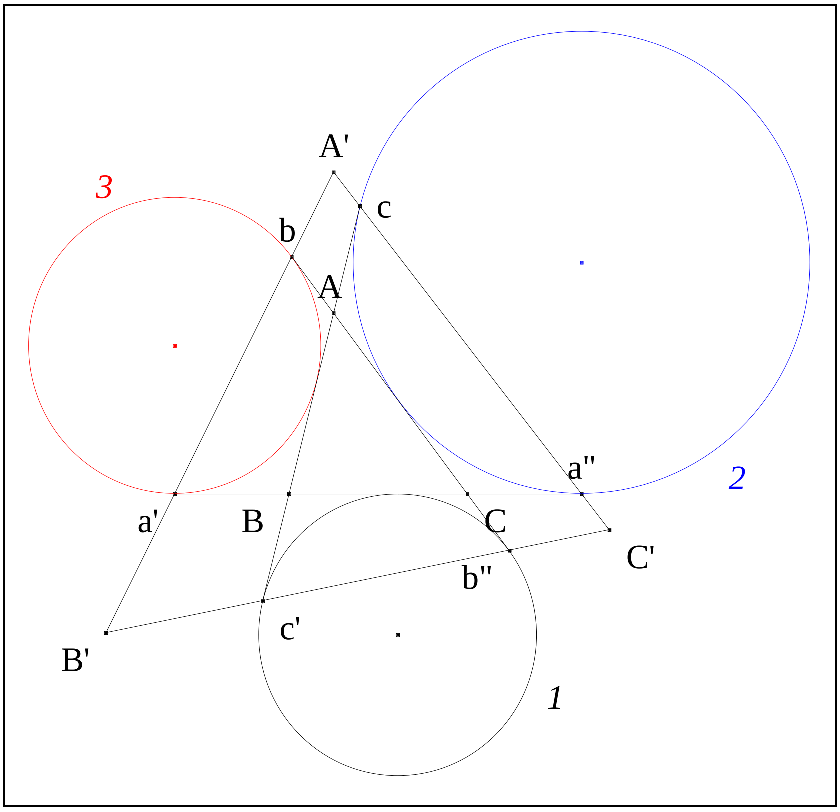
- **Conclusion :** par définition, K est l'orthopôle du triangle IBC relativement au triangle AED.

Commentaire : la figure de Sharygin apparaît comme le squelette de celle d'Hadamard qui suit.

3. Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

VISION

Figure :

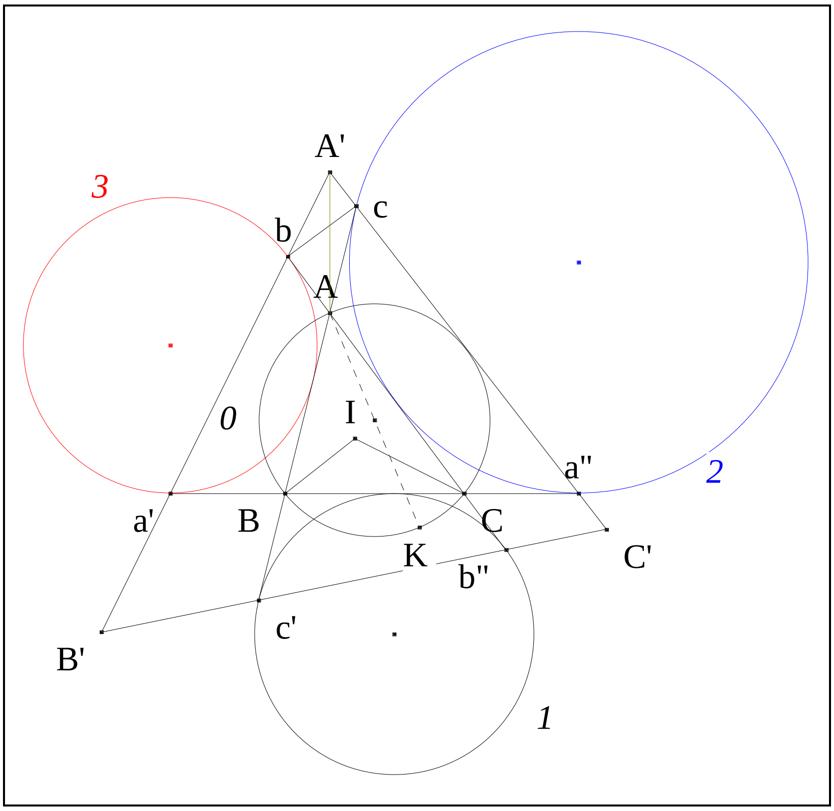


Traits :	ABC	un triangle,
	1, *2*, *3*	les A, B, C-excercles de ABC,
	b, c, b', c', b'', c''	les points de contact de *1*, *2*, *3* avec les "côtés" de ABC
et	A', B', C'	les points d'intersection de (a'b) et (a''c), (a'b) et (b''c'), (b''c') et (a''c).

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes[33].

VISUALISATION

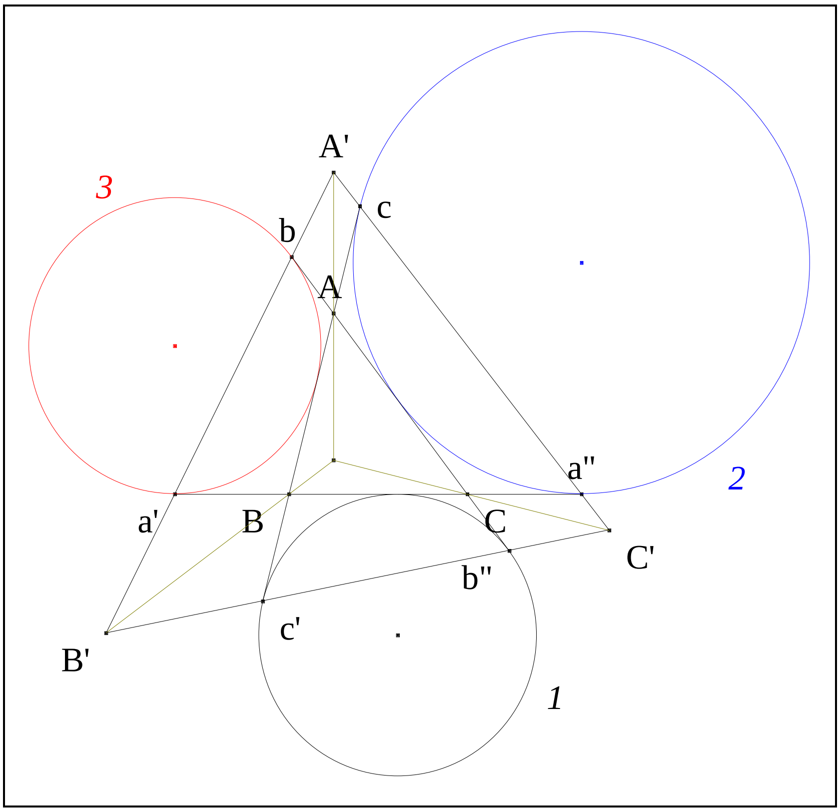
[33] Hadamard J., *Leçons de Géométrie Elémentaire* 1(1898) exercice 379.



- Notons I le centre de ABC,
  0 le cercle circonscrit à ABC
  et K l'antipôle de A relativement à *0*.

- D'après IV. 2. scolie, K est l'orthopôle de IBC relativement à Abc.

- D'après Lemoine "Deux triangles orthologiques", A' est l'orthopôle de Abc relativement à IBC ;
  ce qui revient à dire que (AA') est la A-hauteur de ABC.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB') est la B-hauteur de ABC
  (CC') est la C-hauteur de ABC.

- **Conclusion :** (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Scolies : **(1)** ce point de concours est l'orthocentre de ABC

(2) ABC et A'B'C' sont en perspective

(3) A'B'C' est "le triangle d'Hadamard de ABC".

Note historique :
ce résultat d'Hadamard certainement connu avant lui, a été redécouvert en 2000 par l'américain Paul Yiu[34] de l'université Florid Atlantic et proposé comme problème dans la revue *Crux Mathematicorum*. La solution métrique du danois Niels Bejlegaard[35] de Copenhague publiée dans la même revue diffère de celle de Yiu[36] qui est analytique. Rappelons que ce point de concours avait été signalé en 1999 par Steve Sigur[37]. L'allemand Darij Grinberg s'est penché sur ce problème et l'a résolu métriquement en utilisant le théorème de Carnot (somme alternée de carrés).

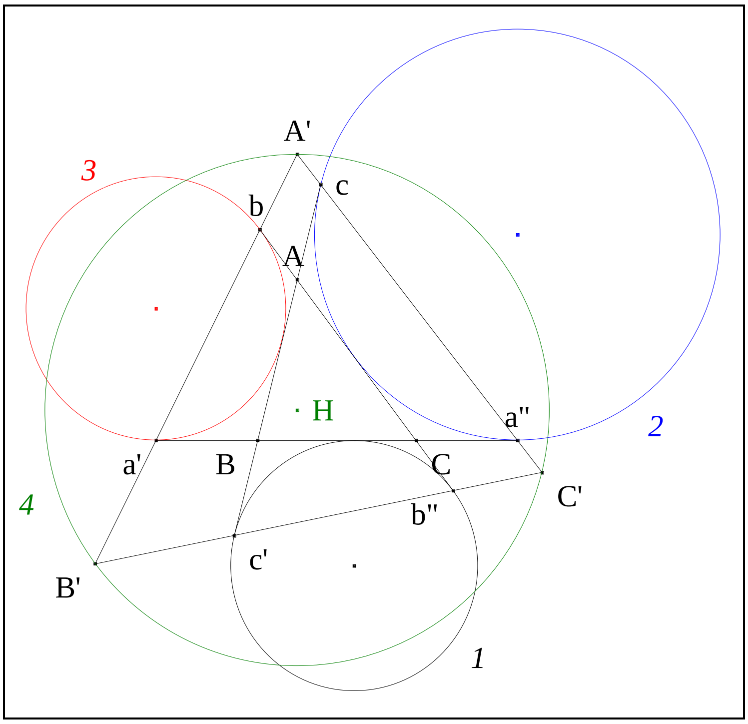
4. Gilles Boutte

VISION

---

34 Yiu P., problème 2579, *Crux mathematicorum* (2000) 430.
35 Bejlegaard N., Solution du problème 2579, *Crux mathematicorum* vol. 27, 8 (2001) 539-540.
36 Yiu P., *The Clawson Point and Excircles*.
37 Sigur S., H in the Gergonne-Nagel system, *Geometry-college Mathematical group* (23-08-1999).

Figure :

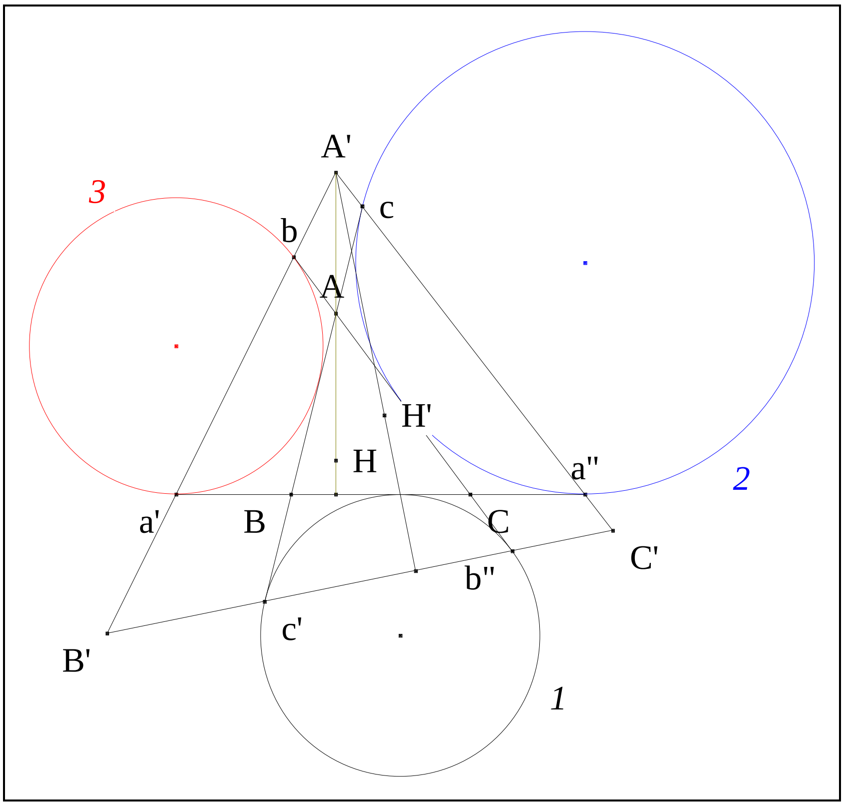


Traits :	ABC	un triangle,
	1, *2*, *3*	les A, B, C-excercles de ABC,
	b, c, b', c', b'', c''	les points de contact de *1*, *2*, *3* resp. avec les "côtés" de ABC,
	A', B', C'	les points d'intersection de (a'b) et (a''c), de (a'b) et (b''c'), de (b''c') et (a''c),
	H	l'orthocentre de ABC
et	*4*	le cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

Donné : H est le centre de *4*. [38]

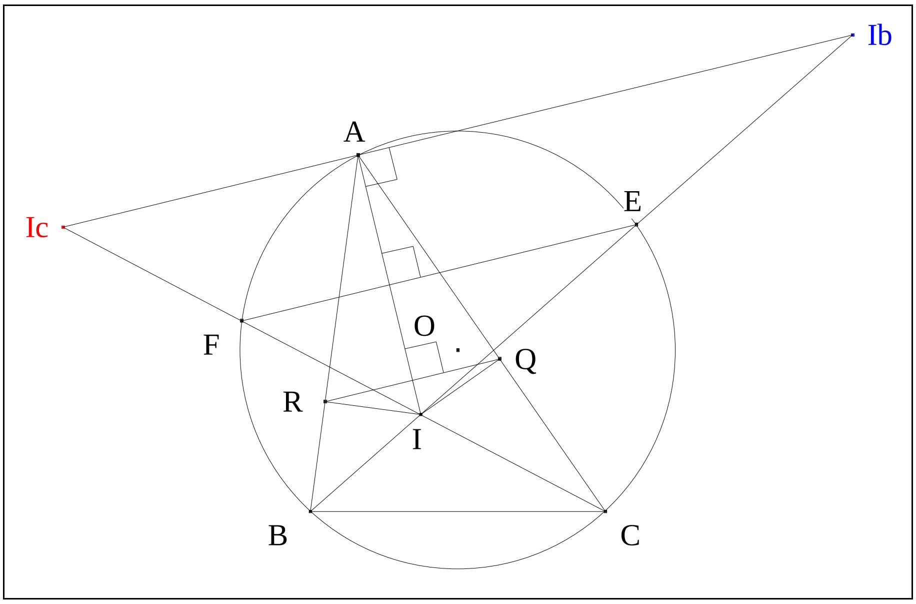
VISUALISATION

[38] Boutte G., http://g.boutte.free.fr/maths.htm. : *Sur quelques propriétés des triangles podaires des centres des cercles exinscrits* (2002).



- D'après IV. 3, (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en H ;
  en conséquence, (AA'), (BB') et (CC') sont les hauteurs de ABC.

- Notons H' l'orthocentre de A'B'C'.



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC,
  I le centre de ABC,
  0 le cercle circonscrit à ABC,
  E, F les seconds points d'intersection de (BI), de (CI) avec *0*,
  Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées de I sur (AC), (AB)
  et Ib, Ic les centres des B, C-excercles de ABC.

- **Scolies :** **(1)** (B'C'), (QR), (EF) et (IbIc) sont parallèles

(2) (AI) est une perpendiculaire commune à ces trois droites.

- D'après le théorème des angles à côtés perpendiculaires, <B'A'A = <FCB et <H'A'C' = <FEB ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <B'A'A = <H'A'C' .

- **Conclusion partielle :** d'après Nagel "Une tangente et un rayon" (Cf. Annexe 2),
  (A'A) passe par le centre de *4*.

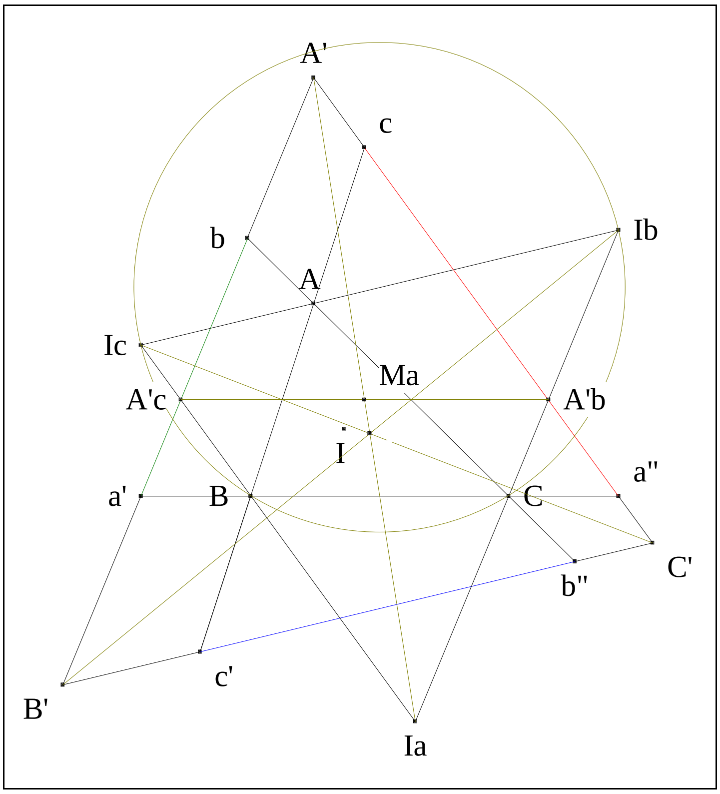
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B) passe par le centre de *4*
  (C'C) passe par le centre de *4*.

- **Conclusion :** H est le centre de *4*.

Commentaire : ce résultat signalé en 2002 par Gilles Boutte, a été démontré métriquement par Khao Lu Nguyen[39]. Selon l'auteur, ce résultat était déjà connu.

Scolies : **(1)** A'B'C' et ABC sont homothétiques

(2) nature du centre d'homothétie



- Notons Ia le centre du A-excercles de ABC,
  Mt le Mittenpunkt de ABC
  et A'b, A'c les points d'intersection de (IbIa) et (CbAb), de (IaIc) et (CaBc).

- Nous savons que, **(1)** I est l'orthocentre de IaIbIc
  (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", Ib, Ic, B et C sont cocycliques.

[39] Nguyen K. L., On the Complement of the Schiffler point, *Forum Geometricorum* vol. 5 (2005) 149-164.

- D'après IV. 4. scolie 1, (A'C') // (IaIc) et (A'B') // (IaIb) ;
  en conséquence, le quadrilatère A'A'cIaA'b est un parallélogramme.

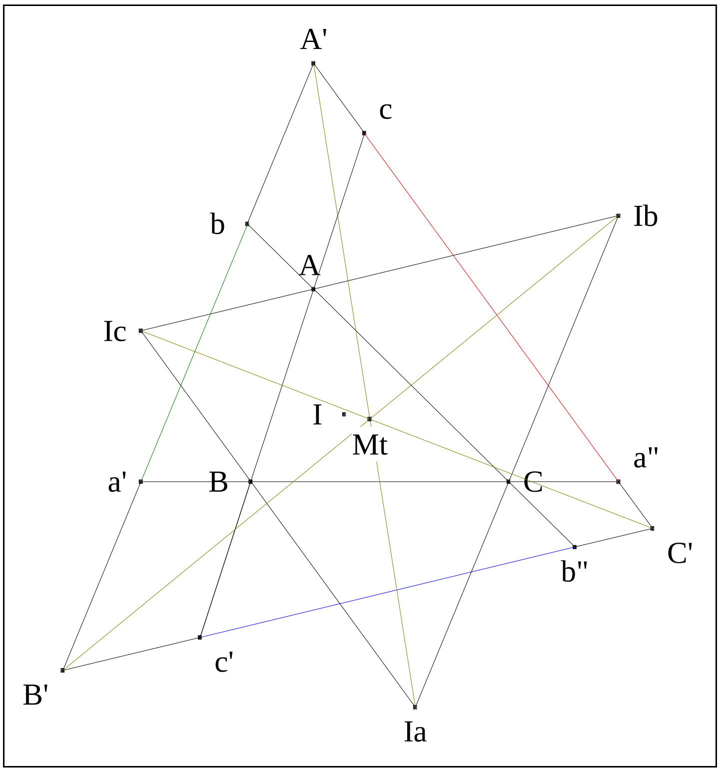
- Notons Ma le point d'intersection de (IaA') et (A'cA'b).

- D'après Lascases "Six points alignés" (Cf. Annexe 4), (A'bA'c) passe par les milieux de [AB], [AC] ;
  en conséquence, (A'cA'b) // (BC).

- D"après "Le trapèze complet" (Cf. Annexe 5), (IaMaA') passe par le milieu de [BC].

- **Conclusion partielle :** (IaA') passe par le milieu de [BC].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IbB') passe par le milieu de [BC]
  (IcC') passe par le milieu de [BC].

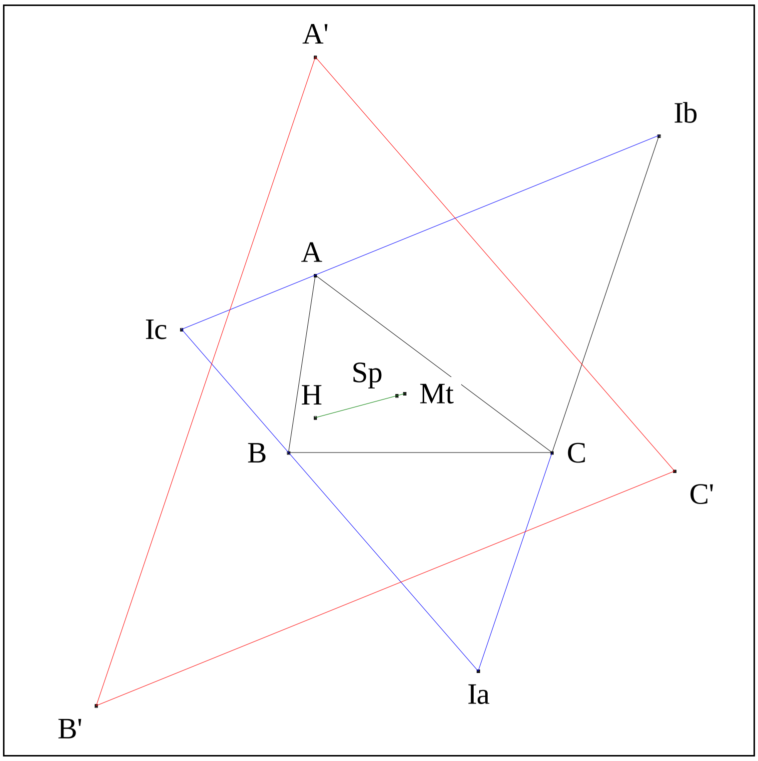


- D'après III. 2., (IaA'), (IbB') et (IcC') sont concourantes en Mt.

5. Khoa Lu Nguyen

VISION

Figure :

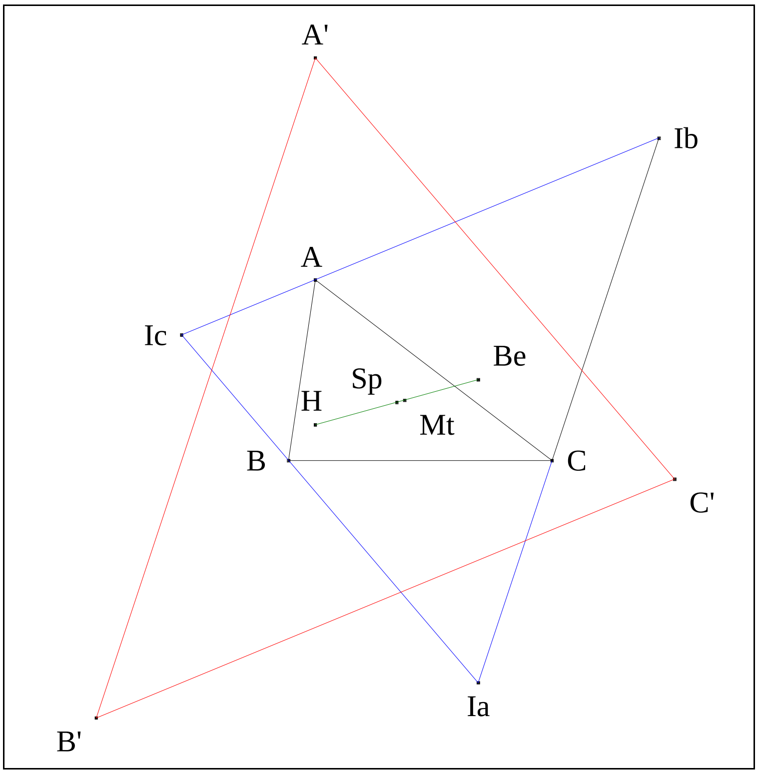


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	Sp	le point de Spieker de ABC,
	Mt	le Mittenpunkt de ABC,
	IaIbIc	le triangle excentral de ABC,
et	A'B'C'	le triangle d'Hadamard de ABC.

Donné : Mt, H et Sp sont alignés[40]

VISUALISATION

[40] Nguyen K. L., Message *Hyacinthos* # 10384 (2004).
Nguyen K. L., On the Complement of the Schiffler point, *Forum Geometricorum* vol. 5 (2005) 149-164.



- D'après IV. 4., H est le centre du cercle circonscrit à A'B'C'.
- Notons Be le point de Bevan de ABC.
- D'après IV. 1., Be est le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.
- D'après IV. 4. scolie 2, A'B'C' et IaIbIc sont homothétiques de centre Mt.
- **Conclusion partielle :** Be, Mt et H sont alignés.
- D'après IV. 1. scolie 4, H, Sp et Be sont alignés.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, Mt, H et Sp sont alignés.

Note historique : ce résultat avait déjà été signalé en 2002 par Gilbert Boutte dans son article intitulé *Sur quelques propriétés des triangles podaires des centres des cercles exinscrits*. Selon l'auteur, ce résultat était déjà connu.

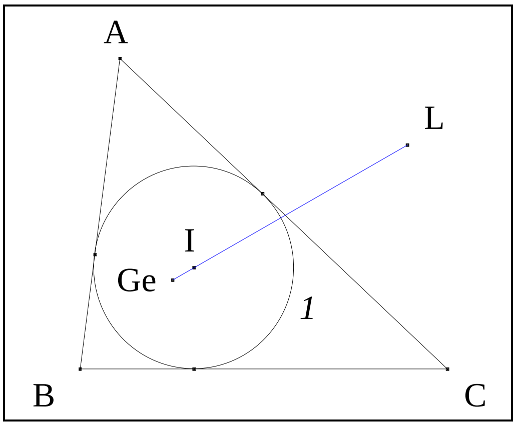
V. LA DROITE D'HERMES-SODDY

OU

L'ALIGNEMENT Ge-I-L (1888)

VISION

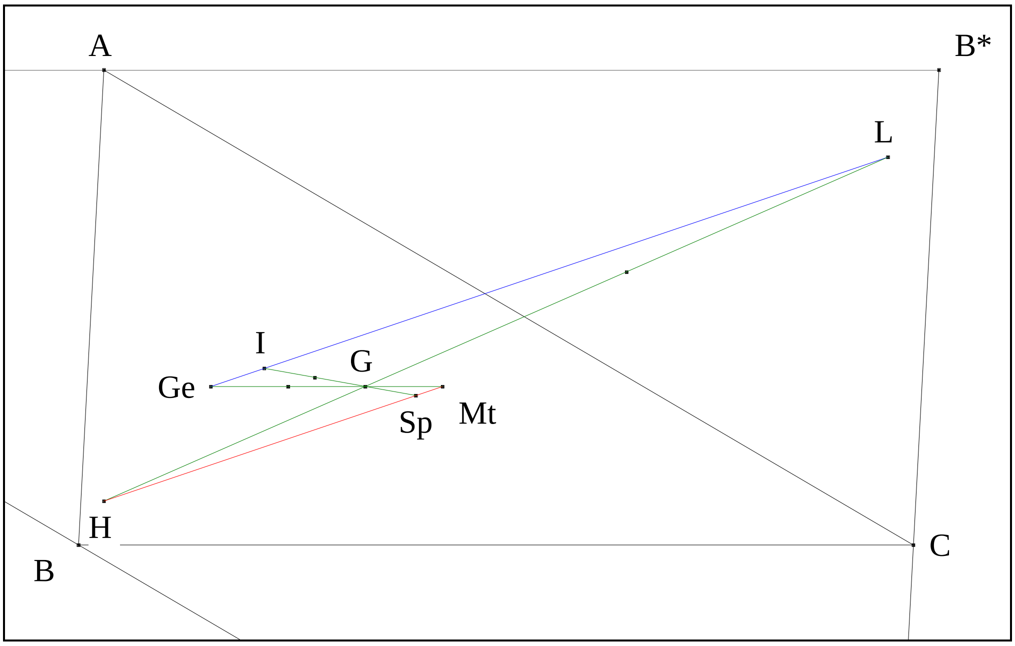
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	I	le centre de *1*,
	Ge	le point de Gergonne de ABC,
et	L	le point de de Longchamps de ABC.

Donné : Ge, I et L sont alignés[41].

VISUALISATION



- Notons A*B*C* le triangle antimédian de ABC.
- **Scolie :** L est l'orthocentre de A*B*C*.
- Notons Mt, Sp, H le Mittenpunkt, le point de Spieker, l'orthocentre de ABC.
- D'après IV. 5., Mt, Sp et H sont alignés.
- D'après III. 2. scolie, Ge est le point anticomplémentaire de Mt ;

41 Hermes J. G., Neuer Punkt und Gerade in der Dreiecksebene, *Hoppe Arch.* (2) VI (1888) 437-442.

d'après II. 3. scolie 3, I est le point anticomplémentaire de Sp ;
d'après I. 5. scolie 2, L est le point anticomplémentaire de H.

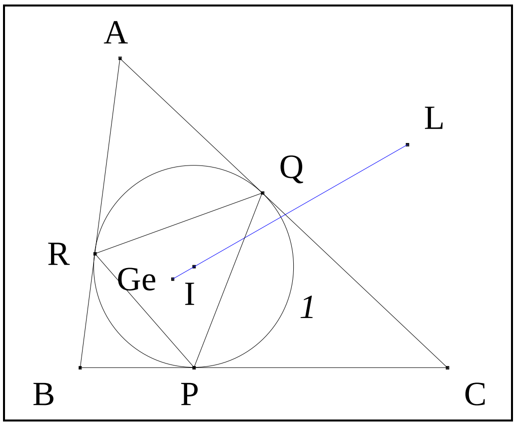
- **Conclusion :** d'après Thalès, Ge, I et L sont alignés.

Scolies : **(1)** (GeI) est "la droite de Soddy de ABC".

(2) Sous le point de vue précédent,
(GeIL) est "la droite d'Hermes-Soddy de ABC".

Énoncé traditionnel : la droite de Soddy (GeI) de ABC passe par l'orthocentre de son triangle antimédian ou encore
la droite d'Euler coupe la droite de Soddy au point de Longchamps.

Formulation réciproque



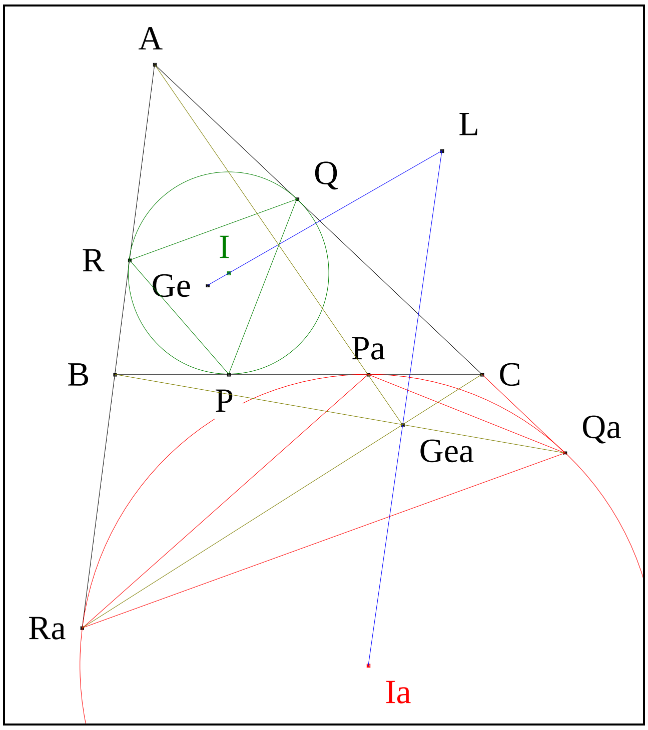
- Notons PQR le triangle de contact de ABC.

- Partons de PQR : Ge est le point de Lemoine de PQR
I est le centre du cercle circonscrit de PQR
L est le point de de Longchamps du triangle tangentiel ABC de PQR.

- (GeI) est l'axe de Brocard de PQR.

- **Conclusion :** l'axe de Brocard d'un triangle passe par le point de de Longchamps de son triangle tangentiel.

Une extraversion :



Hermes a extraverti son résultat en remplaçant I par l'excentre Ia et Ge par le A-point adjoint de Gergonne (Gea) et ainsi de suite par permutation circulaire.

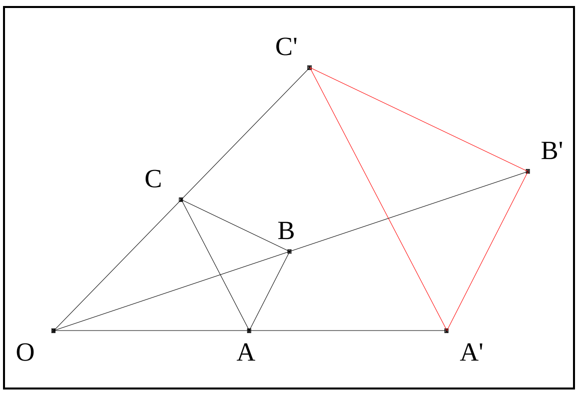
Nous dirons que (Gea) est "la A-droite adjointe d'Hermes-Soddy de ABC"

et que les trois droites adjointes d'Hermes-Soddy concourent au point de de Longchamps.

Note historique : le résultat d'Hermes a été redécouvert par Adrian Oldknow[42] en 1996 et par Michael S. Longuet-Higgins[43] en 2000 et proposé sur le site *Mathlinks* [44] en 2004.

V. ANNEXE

1. Le théorème faible de Desargues



42 Oldknow Adrian, The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle, *American Mathematical Monthly* vol. 103, 4 (1996) 319-329.

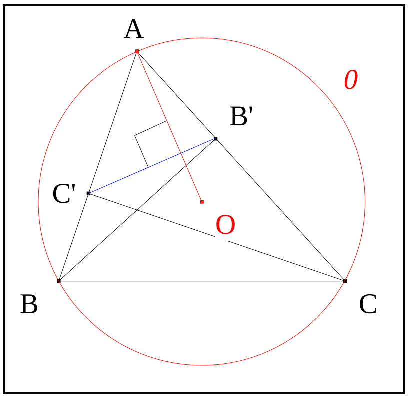
43 Longuet-Higgins M. S., A Fourfold Point of concurrence Lying on the Euler Line of a Triangle, *Mathematical Intilligencer* 22 (2000) n° 1 p. 54-59.

soddy line&delongchamps point, *Mathlinks* du 07/03/2004 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=4520.

Hypothèses :	ABC	un triangle,		
et	A'B'C'	un triangle tel que	(1)	(AA') et (BB') soient concourantes en O
			(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
			(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

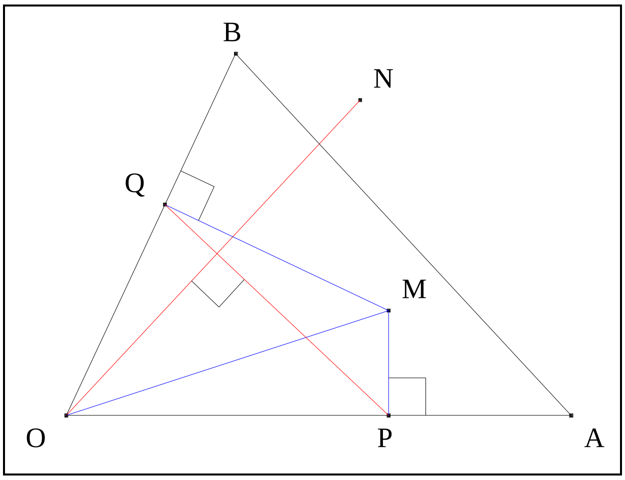
2. Une tangente et un rayon[45]



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*
et	B', C'	les pieds des hauteurs de ABC resp. en B, C.

Donné : le rayon (AO) est perpendiculaire à (B'C').

3. Isogonale et perpendiculaire[46]



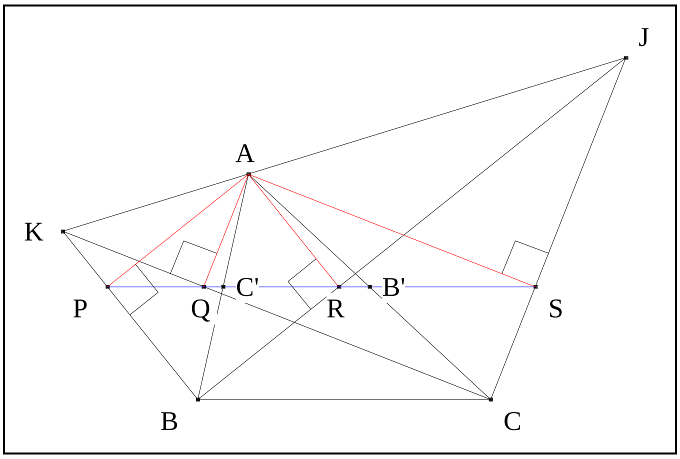
Traits :	OAB	un triangle,
	M	un point,
	P, Q	les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA) et (OB),
et	N	un point.

Donné : (ON) est l'isogonale de (OM) par rapport à (OA) et (OB)

45 Nagel, *Nouvelles Annales* **14** (1860) 440.
46 Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.

si, et seulement si,
(ON) est perpendiculaire à (PQ).

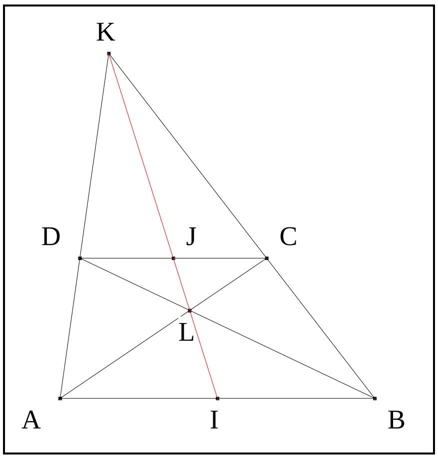
4. Six points alignés[47]



Traits : ABC un triangle,
B', C' les milieux de [CA], [AB],
J, K les points B, C-excentraux de ABC
et P, Q, R, S les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BK), (CK), (BK), (CK).

Donné : P, Q, R, S, B' et C' sont alignés.

5. Le trapèze complet



Traits : ABCD un quadrilatère,
I le milieu de [AB],
J le milieu de [CD],
K le point d'intersection de (AD) et (BC)
et L le point d'intersection de (AC) et (BD).

Donné : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD)
si, et seulement si,
I, J, K et L sont alignés.

47 Lascases Arth., Question 477, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171.