GÉOMÉTRIE ALCHIMIQUE II

ALBÉDO [1]

Jean-Louis AYME [2]

Plus blanc que le blanc le plus pur,
plus lumineux que la neige en plein Soleil

Résumé. L'auteur présente un problème de la Géométrie du Triangle provenant du Team selection Test d'Argentine 2009. Ce problème est résolu alchimiquement par l'auteur qui en donne aussi une preuve académique en s'appuyant sur une culture géométrique.
Les commentaires qui alimentent l'article, n'engagent que l'auteur.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils s'adressent tout particulièrement au professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) qui a relu et corrigé cet article.

Abstract. The author presents a problem of the geometry of the Triangle from the Team selection Test of Argentina 2009. This problem is solved in an alchemical way by the author who also gives an academic proof in relying on a geometric culture.
Comments that feed the article are solely those of the author.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Acknowledgements. They go particularly to the Professor Ercole Suppa of Teramo (Italy) who read and corrected this article.

---

1 L'œuvre double ou au blanc

2 Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 04/08/2013 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

Commentaire : l'auteur invite le lecteur à prendre connaissance sur ce site de l'article intitulé "Géométrie alchimique **I**, Nigrédo".

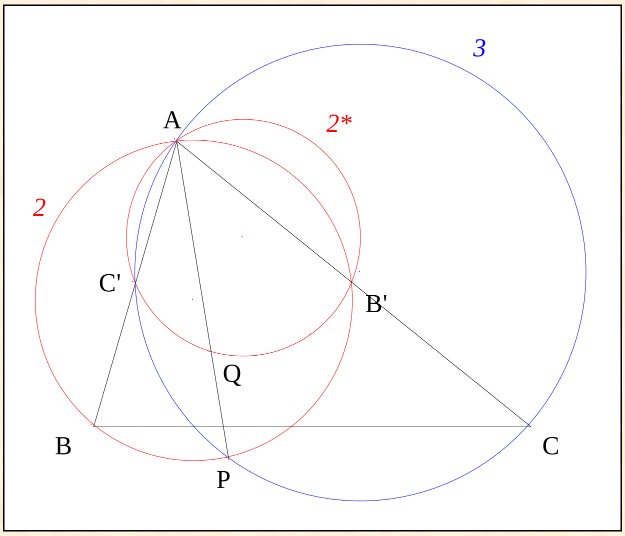
A. LE PROBLÈME 3

DU

TST ARGENTINE 2009

VISION ALCHIMIQUE

Figure :



Traits : ABC un triangle,
B' le milieu de [CA],
2 le cercle passant par B', B, A,
C' le milieu de [BA],
3 le cercle passant par C', C, A,
P le second point d'intersection de *3* et *2*,
*2** le cercle passant par C', B', A
et Q le second point d'intersection de *2** avec (PA).

Donné : 3.QA = 2.PA. [3]

[3] Argentina Team Selection Test, 14 mai 2009, Argentine (Amérique du sud) ;
http://www.cienciamatematica.com/olimpiadas/argentina-team_selection2009.pdf
Prove AP/AQ = 3/2, *Art of Problem Solving* du 14/05/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=276858

B. VISUALISATION IMAGÉE

ET

NON IMAGINÉE

Commentaire :

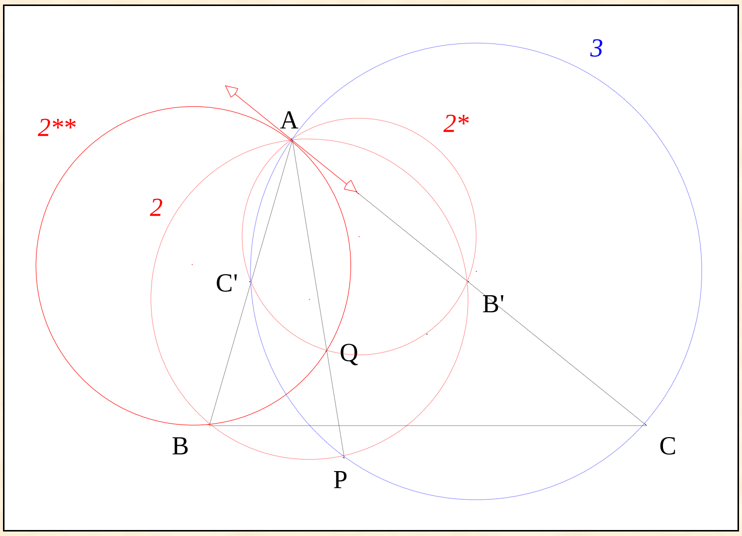
l'auteur, pour rester dans son style i.e. celui de la forme qu'abrite la Géométrie pure, a besoin de connaître la nature géométrique des formes qui s'offrent à son regard. Ces formes le renvoient invariablement à sa culture géométrique où il cueille sans couper les racines ce qui lui est nécessaire.

Prendre

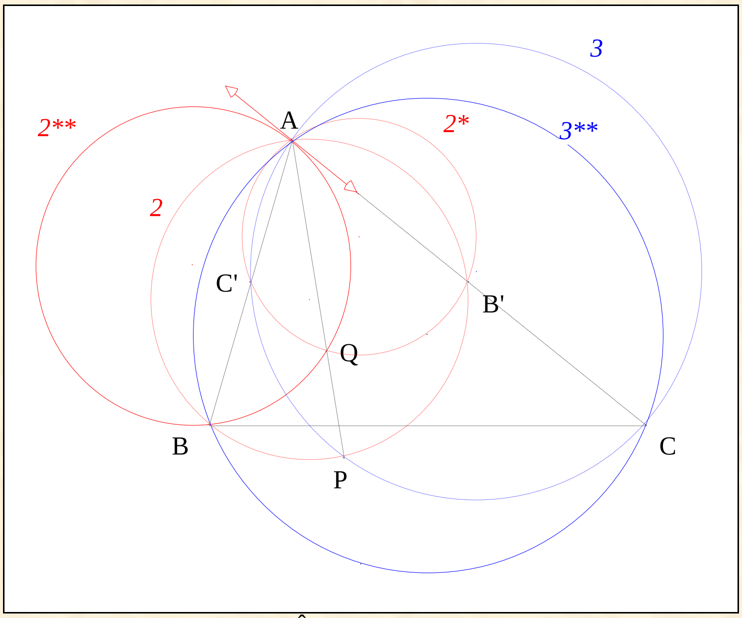
Alors, la recherche académique d'une preuve laisse place à une quête plus discrète qui le pousse non plus à travailler, mais à œuvrer et à transmettre.
Il choisit un mode de raisonnement et une méthode géométrique qui lui permettent de visualiser sa propre démarche. Avec l'aide de techniques particulières qui aplanissent son chemin, il progresse vers le résultat qu'il désire atteindre. Cette démarche raisonnée prend alors l'allure d'une **visualisation** lorsque seuls les points principaux et leurs relations sont retenus. Ce schéma logico-déductif permet alors de comprendre le cheminement de l'auteur et celui-ci "**comprend**" que l'épreuve qu'il vient de vivre ne peut en aucun cas s'identifier à une expérience.

Comprendre

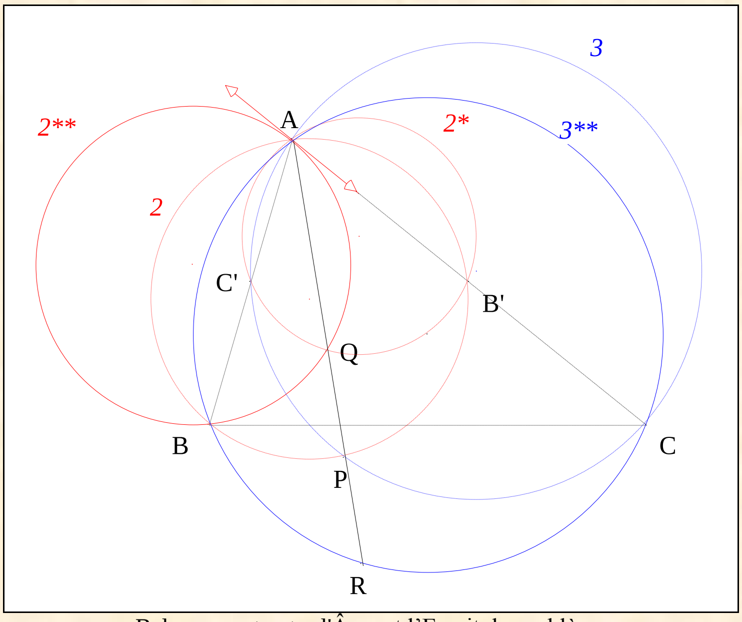
Visualisation



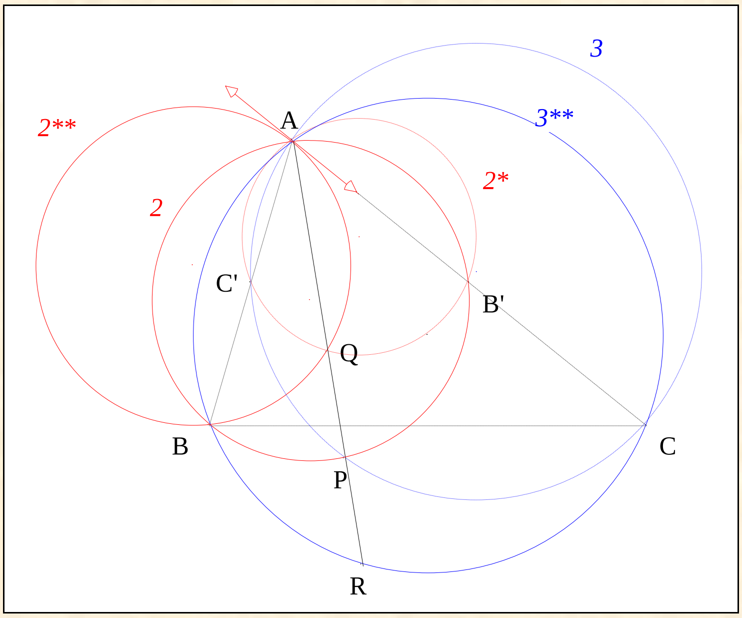
L'Esprit du problème



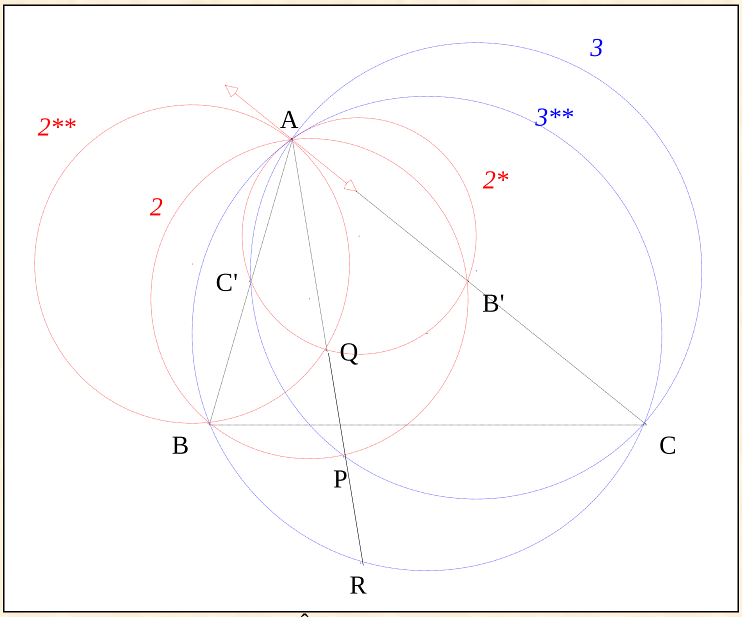
L'Âme du problème



Balancement entre l'Âme et l'Esprit du problème



La solution est ailleurs



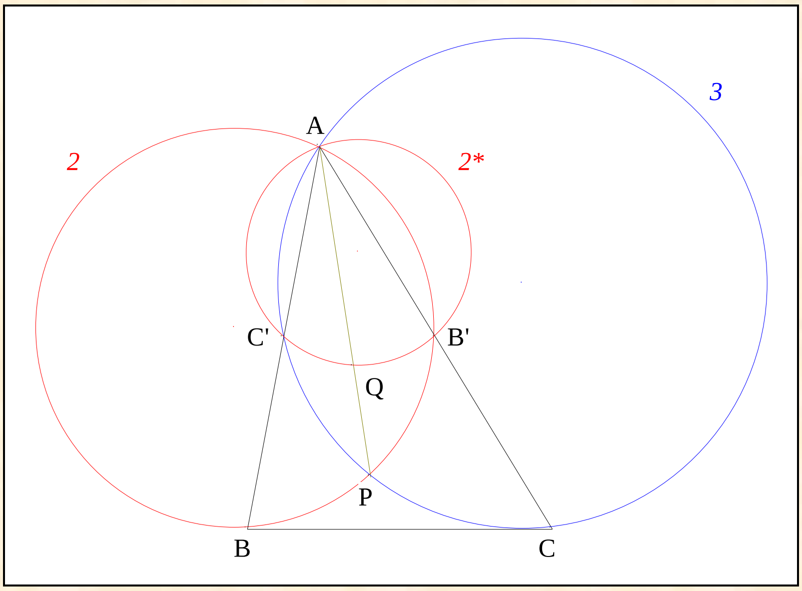
Naissance de l'Être géométrique ou le Resbis

C. ACADEMIC PRESENTATION

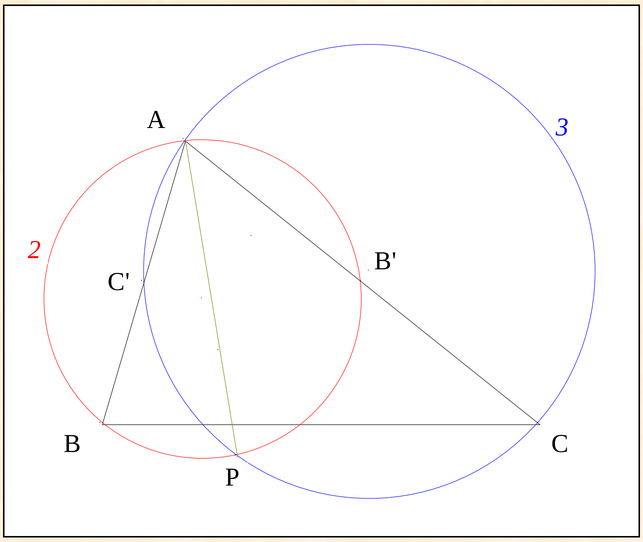
Hypothesis : ABC a triangle,
B', C' the midpoints of CA, AB,
2 the circle passing through A, B, B',
3 the circle passing through A, C, C',
P the second point of intersection *2* and *3*,
*2** the circle passing through A, B', C'
and Q the second point of intersection of (PA) with *2**.

Conclusion : 3.QA = 2.PA.

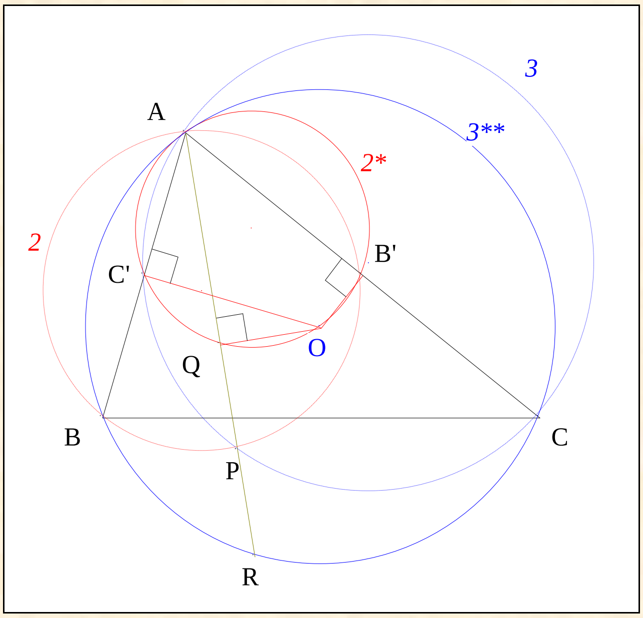
Configuration :



Proof :



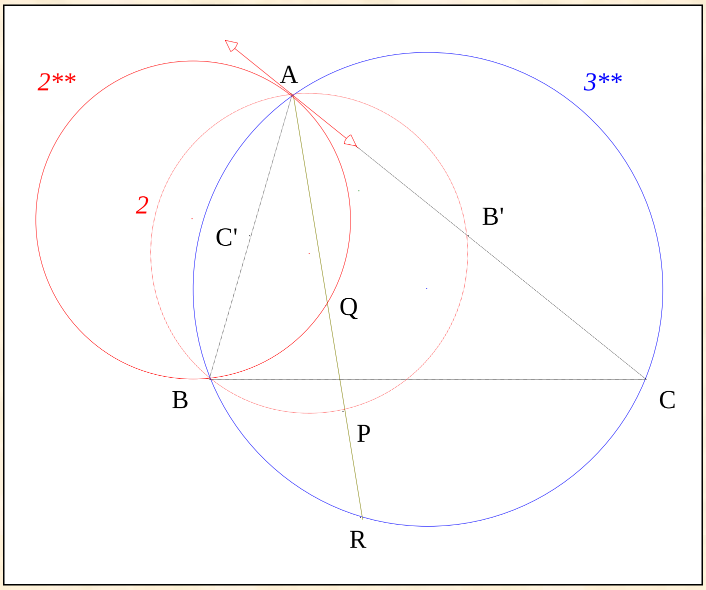
- According to **E. 1.** A Stevanovic's result, (AP) is the A-symmedian of ABC.



- Note 3^{**} the circumcircle of ABC,
  O the center of 3^{**}
  and R the second point of intersection of AP with 3^{**}.

- **Scolies :** **(1)** 2^* goes through O
  (2) OQ ⊥ AR ;

  consequently, Q is the midpoint of the segment AR.



- Note 2^{**} the circle tangent to AC at A and passing through B.

- According to **E. 2.** Midpoint of a circumsymmedian, 2** goes through Q.

- According to **E. 3.** Midcircle,
  the circle *2* being the midcircle wrt 2^{**} and 3^{**}, P is the midpoint of the segment QR.

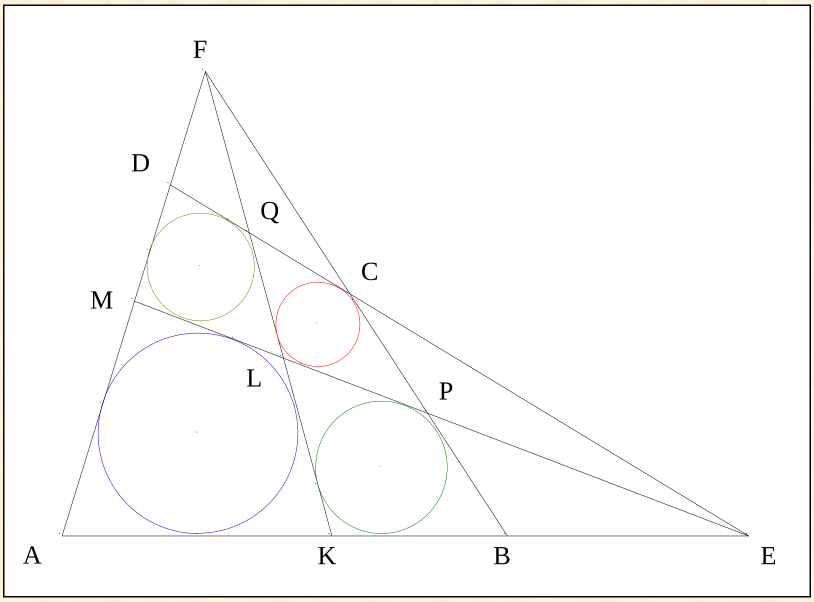
- **Conclusion :** 3.QA = 2.PA.

D. APPLICATIONS ACADÉMIQUES

1. Le quatrième cercle de Demir

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	E, F	les points d'intersection resp. de (AB) et (CD), de (BC) et (AD),
	De, *Df*	deux droites passant resp. par E, F,
	P, M	les points d'intersection de *De* resp. avec (BC), (AD),
	K, Q	les points d'intersection de *Df* resp. avec (AB), (CD)
et	L	le point d'intersection de *De* et *Df*.

Donné : *si,* AKLM, KBPL et PCQL sont circonscriptibles
alors, QDML est circonscriptible. [4]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [5].

---

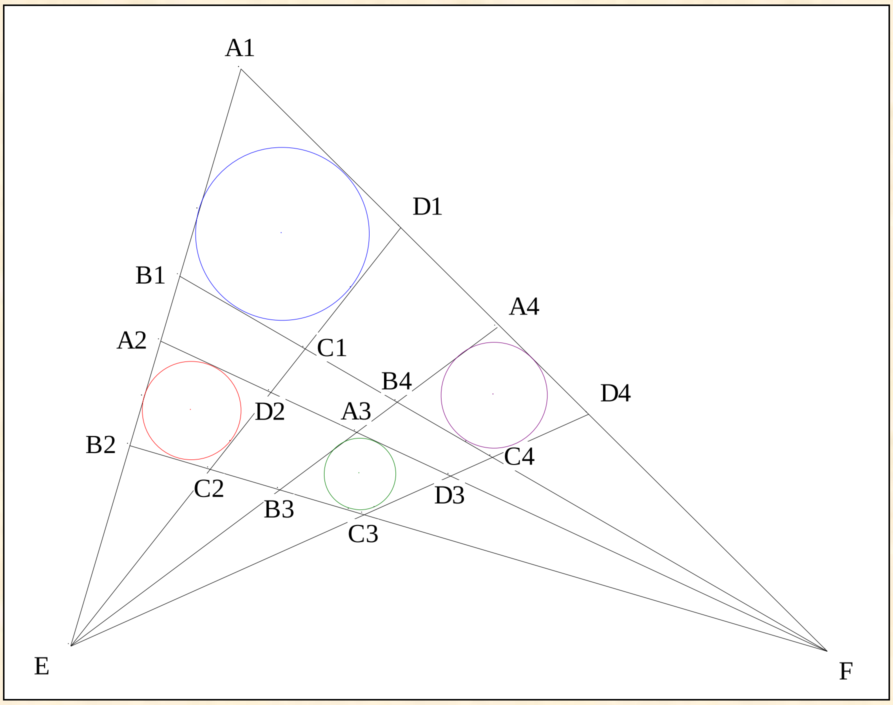
4 Demir H., More on incircles, *Mathematics Magazine* **62** (1989) 107-114

5 Ayme J.-L., Equal incircles theorem, G.G.G. vol. **20**, p. 28-30 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

2. Une généralisation du quatrième cercle de Demir

VISION

Figure :



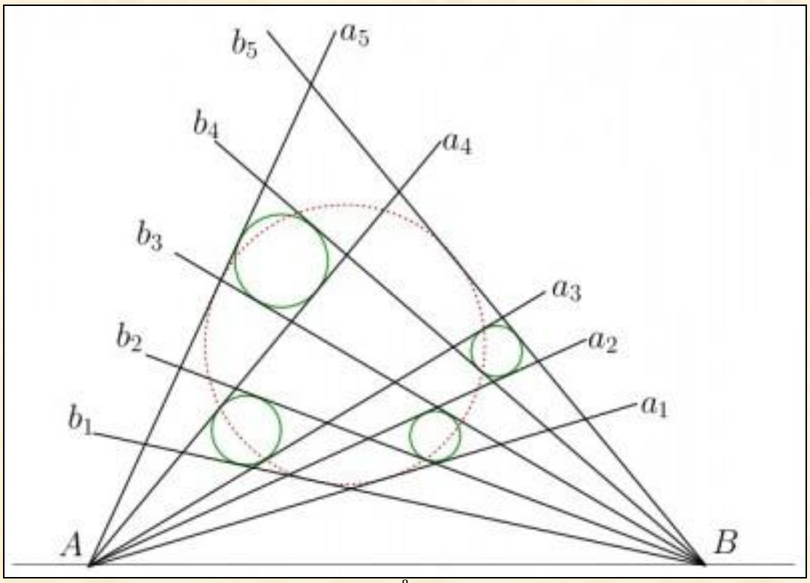
Traits :	A1EF	un triangle,
	B1, A2, B2	trois points sur [A1E] comme indiqué sur la figure,
	D1, A4, B4	trois points sur [A1F] comme indiqué sur la figure,
	C1, D2, C2	les points d'intersection de (ED1) resp. avec (FB1), (FA2), (FB2),
	B4, A3, B3	les points d'intersection de (EA4) resp. avec (FB1), (FA2), (FB2)
et	C4, D3, C3	les points d'intersection de (ED4) resp. avec (FB1), (FA2), (FB2).

Donné : *si,* les quadrilatères A1B1C1D1, A2B2C2D2, A3B3C3D3 sont circonscriptibles
alors, le quadrilatère A4B4C4D4 est circonscriptible.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [6].

3. Exercice : une figure de Géza Kós [7]

6 Ayme J.-L., Equal incircles theorem, G.G.G. vol. **20**, p. 30-33 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
7 Kós G. (1967-), mathématicien hongrois



8

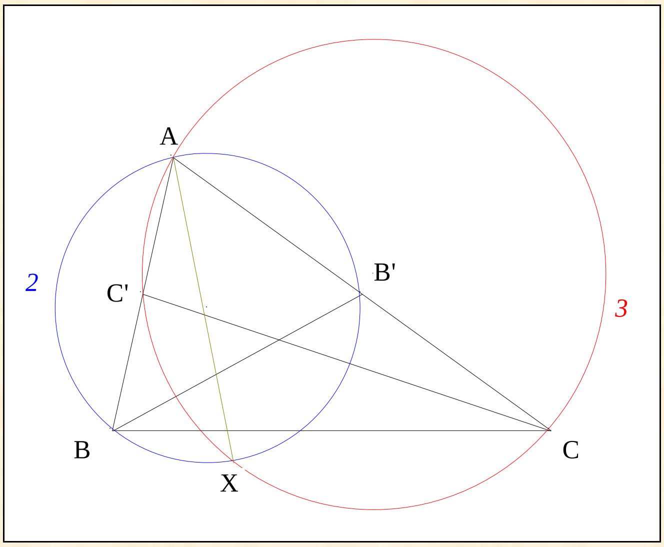
Commentaire : l'énoncé ainsi qu'une preuve sont laissés aux bons soins du lecteur.

E. CULTURE GÉOMÉTRIQUE

1. Une symédiane comme axe radical

VISION

Figure :



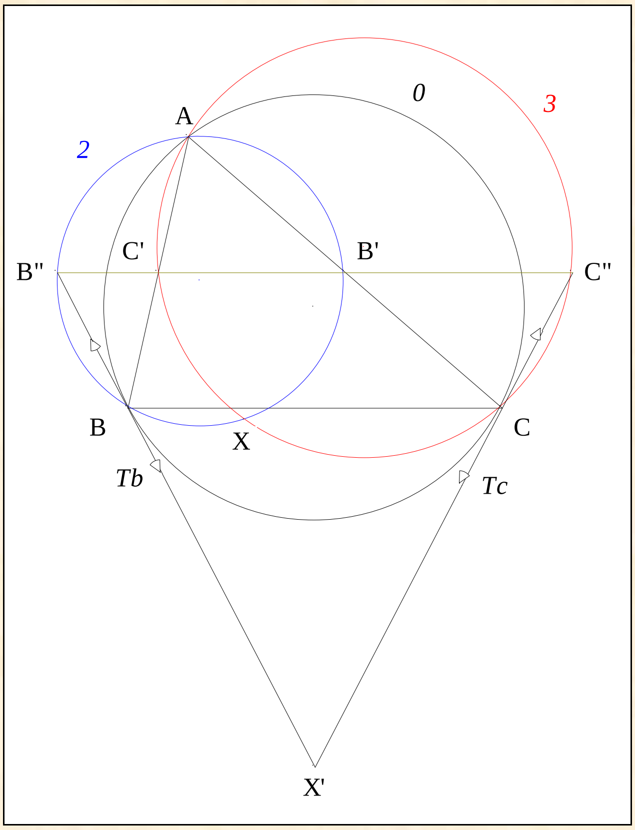
Traits : ABC un triangle,
B', C' les milieux resp. de [CA], [AB],

[8] Ayme J.-L, A conjecture, true or false, inspired by Géza Kos, AoPS du 18/07/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=544366

	2, *3*	les cercles circonscrits resp. des triangles ABB', ACC'
et	X	le second points d'intersection de *2* et *3*.

Donné : (AX) est la A-symédiane de ABC. [9]

VISUALISATION [10]



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  Tb, *Tc* les tangentes à *0* resp. en B, C,
  X' le point d'intersection de *Ta* et *Tc*,
  et B", C" les seconds points d'intersection resp. de (BX') avec *2*, de (CX') avec *3*.

- Les cercles *0* et *2*, les points de base B et A, les moniennes (BBB") et (CAB'),
  conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (B'B") // (CB) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à ABC, (CB) // (B'C') ;
  par transitivité de la relation //, (B'B") // (B'C') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (B'B") = (B'C') ;
  en conséquence, B', C' et B" sont alignés.

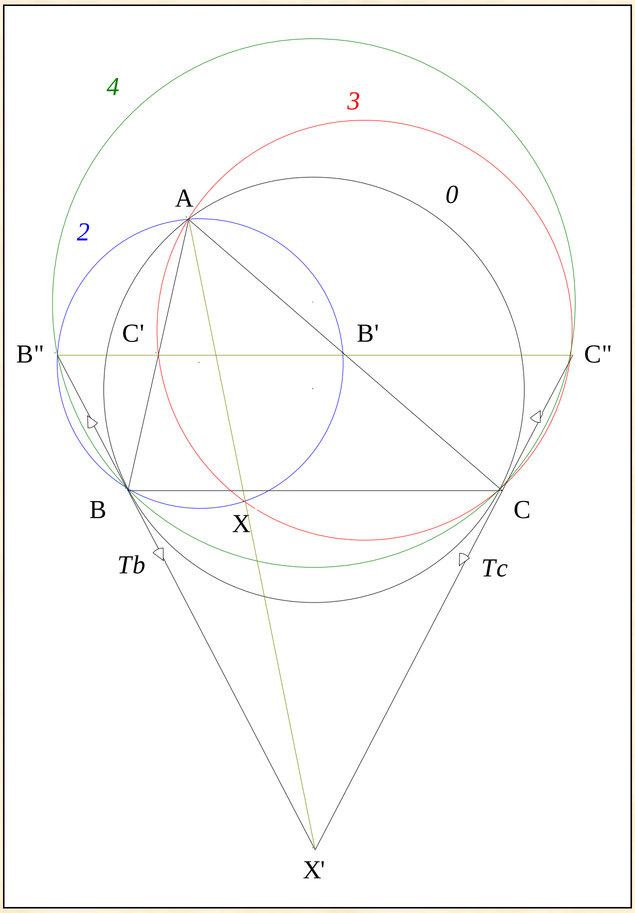
- Mutatis mutandis, nous montrerions que B', C' et C" sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, B', C', B" et C" sont alignés.

---

[9] Stevanovic M., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **19404** du 20/11/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[10] Khoa Lu Nguyen. Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **19405** du 22/11/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- D'après Euclide "Deux tangentes égales" (Cf. **F. 1.**), le triangle X'CB est X'-isocèle;
  (B"C") étant parallèle à (BC), le quadrilatère BCC"B" est un trapèze isocèle;
  en conséquence, B, C, C" et B" sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [11]
  appliqué à *2*, *3* et *4*, (AX) passe par X'.

- **Conclusion :** d'après "La figure de Chasles" [12], (AX) est la A-symédiane de ABC.

2. Milieu d'une circum-symédiane

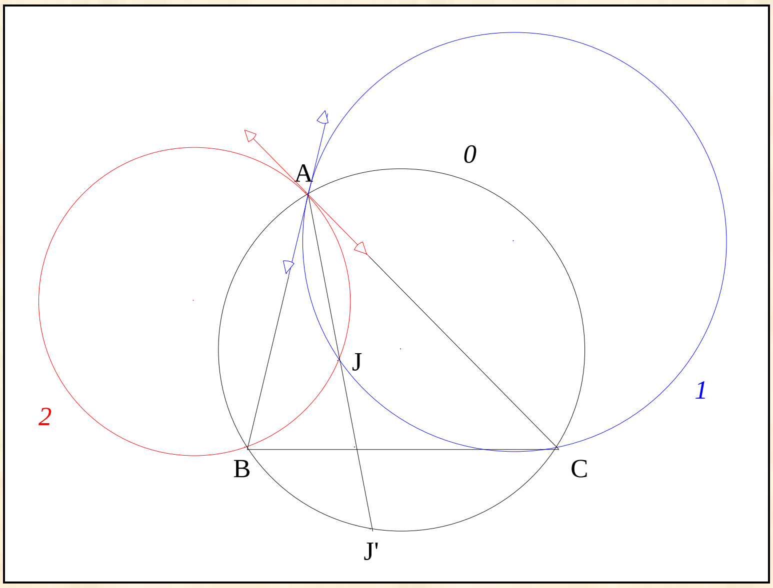
VISION

Figure :

---

[11] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

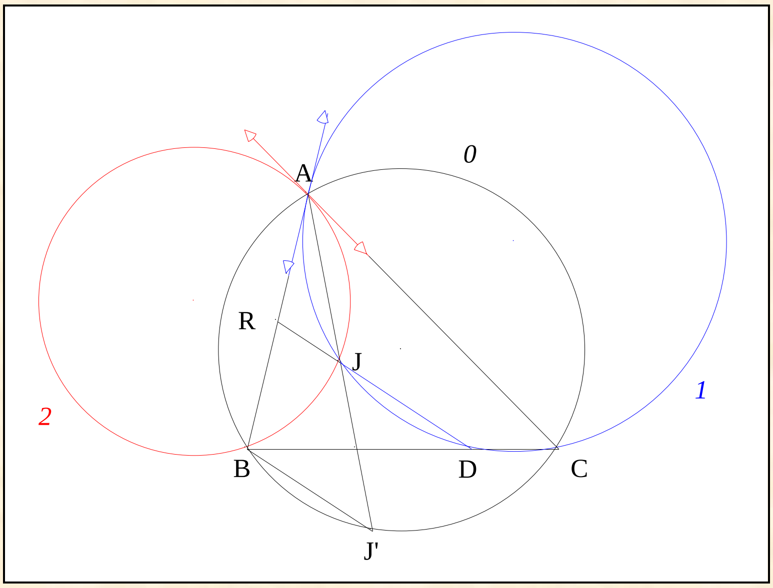
[12] Ayme J.-L., Le point de l'Académie Philips Exeter, G.G.G. vol. **7**, p. 21-24 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	1, *2*	les B, C-cercles adjoint en A,
	J	le second point d'intersection de *1* et *2*
et	J'	le second point d'intersection de (AJ) avec *0*.

Donné : J est le milieu de [AJ'].

VISUALISATION



- Notons D le second point d'intersection de (BC) avec *1*
  et R le point d'intersection de (DJ) et (AB).

- D'après "Milieu d'une corde" (Cf. **F. 2.**), R est le milieu de [AB].

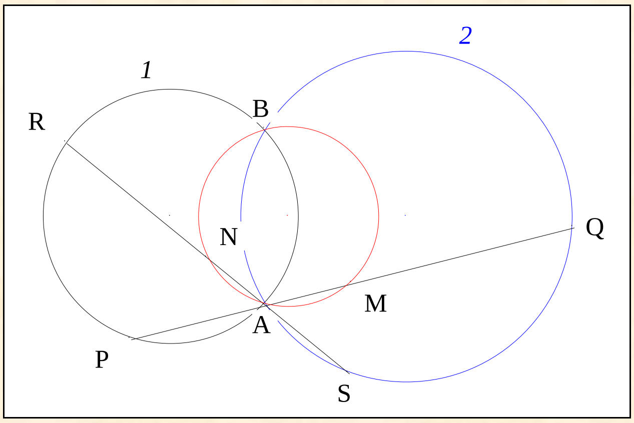
- Les cercles *1* et *0*, les points de base C et A, les moniennes (DCB) et (JAJ'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (DJ) // (BJ').

- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage **IIIb**, J est le milieu de [AJ'].

3. Le cercle des milieux

VISION

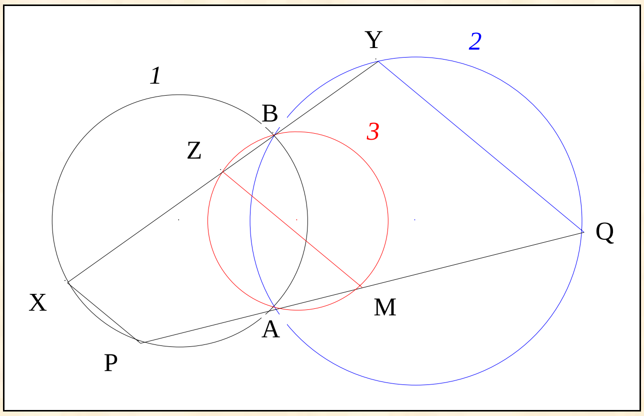
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	P, R	deux points de *1*,
	Q, S	les seconds points d'intersection resp. de (AP) avec *2*, de (AR) avec *2*
et	M, N	les milieux resp. de [PQ], [RS].

Donné : M, N, A et B sont cocycliques.

VISUALISATION

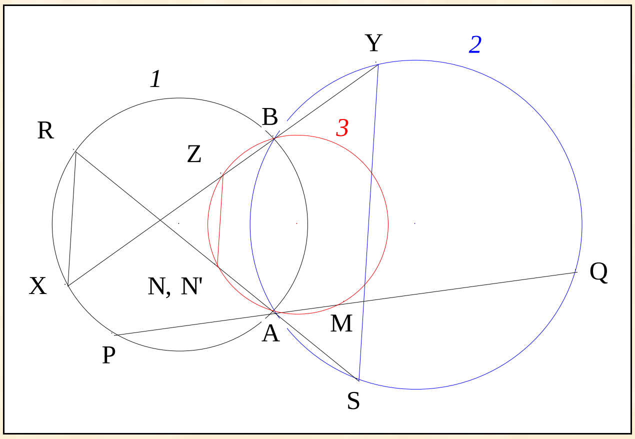


- Notons *3* le cercle passant par A, B, M,
  X un point de *1*
  et Y, Z les seconds points d'intersection de (BX) resp. avec *2*, *3*.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (PAQ) et (XBY), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PX) // (QY).

- Les cercles *2* et *3*, les points de base A et B, les moniennes (QAM) et (YBZ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (QY) // (MZ) ;
  par transitivité de la relation //, (PX) // (MZ).

- D'après "La droite des milieux d'un trapèze" appliqué au trapèze PQYX, Z est le milieu de [XY].



- Notons N' le second point d'intersection de (AR) avec *3*.

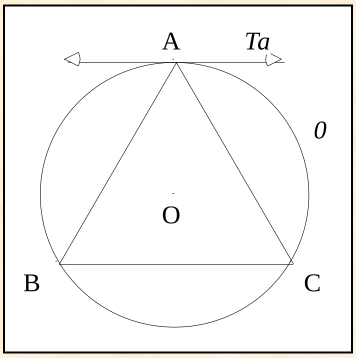
- Mutatis mutandis, nous montrerions que N' est le milieu de [RS] ;
  en conséquence, N et N' sont confondus.

- **Conclusion :** M, N, A et B sont cocycliques.

Scolie : le cercle passant par A, B, M et N est "le cercle des milieux de *1* et *2*".

F. ANNEXE

1. La tangente au sommet



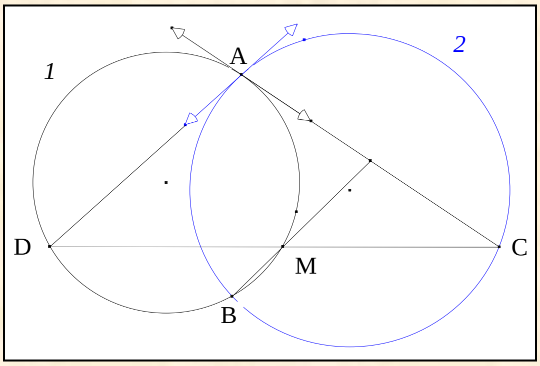
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et *Ta* la tangente à *0* en A.

Donné : ABC est isocèle en A *si, et seulement si,* *Ta* est parallèle à (BC).

2. Milieu d'une corde [13]

---

[13] Scarponi D., *Problemi matematici* (1951)



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	Ta	la tangente à *1* en A,
	C	le second point d'intersection de *Ta* avec *2*,
	T'a	la tangente à *2* en A,
	D	le point d'intersection de *T'a* avec *1*
et	M	le second point d'intersection de (CD) avec *1*.

Donné : (MB) passe par le milieu de [AC].