A NEW METAMORPHOSIS

OF

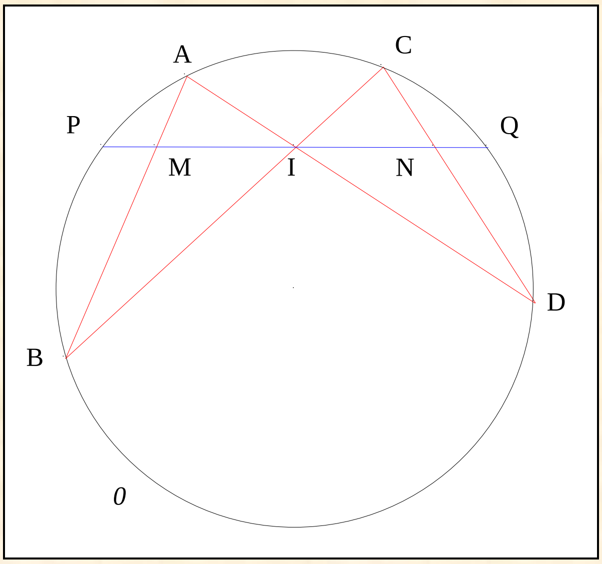
THE BUTTERFLY PROBLEM

AND

A LOT OF NEW PROOFS

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article se place dans la continuation des deux articles fondateurs à savoir ceux de Léo Sauvé et de Léon Bankoff, et présente le problème du papillon dans son développement historique avec de nouvelles preuves élégantes et originales concernant aussi bien le théorème du papillon que de ses différentes métamorphoses connues de l'auteur.
Ce thème attractif pour les amoureux de la géométrie propose de nombreux exemples concernant des papillons dégénérés, aptères, à trois ailes, gémellaires, désaxés, dédoublés, dans un filet éventuellement troué, en liberté, brisés qui conduit à un nouveau thème…
L'article se termine par une note sur la généralisation aux coniques, suivie d'un appendice, d'une liste de références non exhaustives et d'une archive.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

[1] St.-Denis, Île de la Réunion (France) 2011.

Abstract. The article is in the continuation of the two founding articles namely Léo Sauvé and Leon Bankoff, and presents the problem of the Butterfly in its historical development with new elegant and original proofs concerning the theorem of the butterfly and its various metamorphoses, known to the author as well.
This attractive theme for lovers of geometry provides numerous examples concerning butterflies degenerate, wingless, three wings, twins, deviant, duplicate, in possibly holes mesh, in freedom, broken which lead to new theme… The article ends with a note on the generalization to the conical, followed by an appendix, a non-exhaustive references and an archive.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

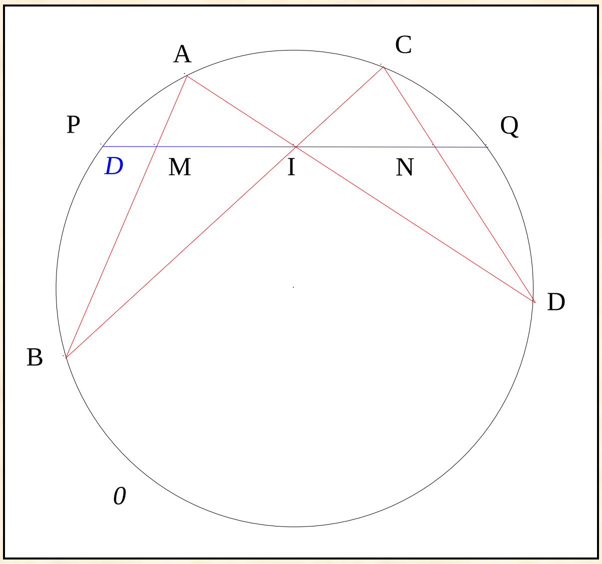
Sommaire

A. UN PAPILLON DANS LE CHAMP D'UNE LONGUE-VUE

1. Le problème de ? – Wallace

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,
D une **sécante** à *0*,
P, Q les points d'intersection de *D* avec *0*,

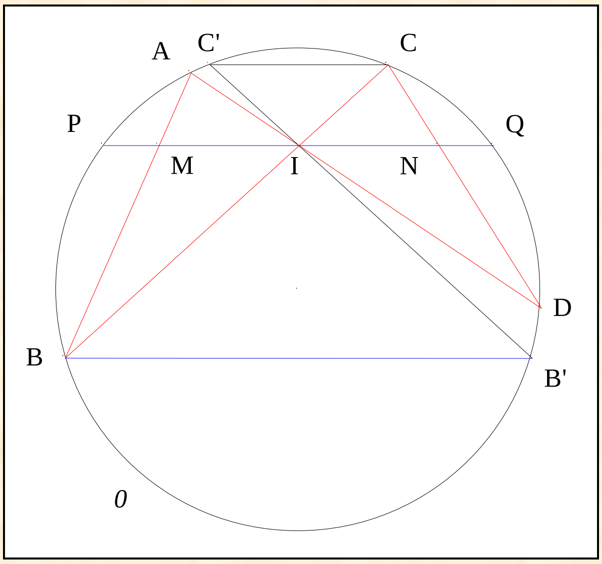
	I	le milieu de la corde [PQ],
	ABCD	un quadrilatère croisé inscrit dans *0* tel que les côtés [AD] et [BC] se coupent en I
et	M, N	les points d'intersection de (AB), (CD) avec *D*.

Donné : I est le milieu de [MN]. [2]

LA NOUVELLE VISUALISATION

DE

L'AUTEUR

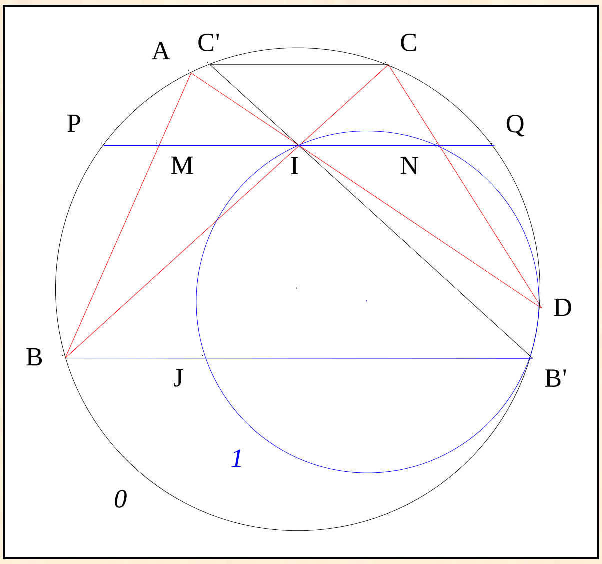


- Notons B' le second point d'intersection de la parallèle à (PQ) passant par B avec *0*
  et C' le second point d'intersection de (B'I) avec *0*.

- Par hypothèse, (PQ) // (BB') ;
  nous avons : (BB') // (C'C) ;
  par transitivité de la relation //, (PQ) // (C'C) i.e. (IN) // (C'C).

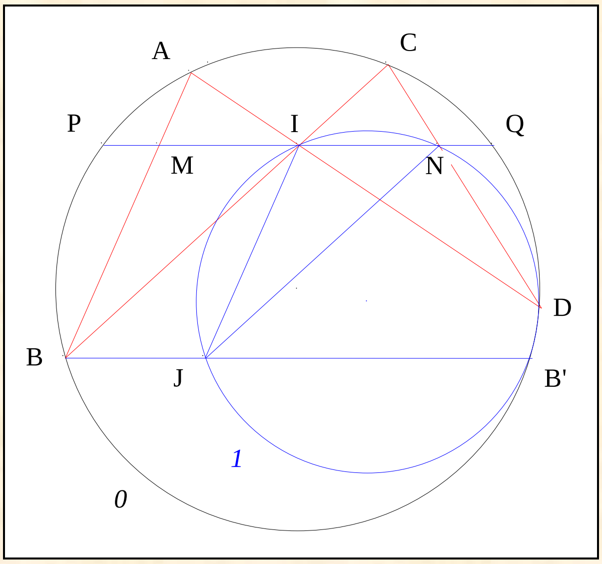
---

[2] ? (voir **B.** Note historique).
??, Question **1029**, *The Gentleman's Diary* (1815) 39-40.



- Le cercle *0*, les points de base B' et D, les moniennes naissantes (C'B'I) et (CDN), les parallèles (C'C) et (IN), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, B', D, N et I sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de (BB') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et B', les moniennes (ADI) et (BB'J), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AB) // (IJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B' et D, les moniennes (BB'J) et (CDN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BC) // (JN).

- Les quadrilatères MBJI et IBJN étant des parallélogrammes, IM = BJ et BJ = IN ;
  par transitivité de la relation =, IM = IN.

- **Conclusion :** I est le milieu du segment [MN].

Scolies : **(1)** I est le milieu des segments [PQ] et [MN].

(2) Le quadrilatère croisé ABCD évoquant les ailes d'un papillon,
le problème devient "Le théorème du papillon".

Contexte : la preuve de l'auteur s'articule autour de celles

* de Richard Taylor avec un cercle auxiliaire mais placé différemment

et * de Léon Bankoff dont les parallélogrammes se retrouvent chez l'auteur.

Les références sont proposées dans la note historique ci-après.

Commentaires : en 1920, le Frère Gabriel-Marie[3] signale

qu'il est possible de démontrer le théorème
en se bornant à recourir aux Éléments de Géométrie,
mais la marche à suivre est lente et pénible.

Plus loin, dans une note, il redit que la démonstration est extrêmement laborieuse.
En 1929, Roger Arthur Johnson[4] dans *Advanced Euclidean Geometry*, écrit

This simple appearing theorem is surprisingly difficult to prove

et ajoute

It is a special case of a rather more general theorem

que nous identifierons par la suite au papillon de John Sturgeon MacKay.
En 1964, Howard Whitley Eves[5] dans *Fondamentals of Geometry* dit

It is a real stickler if one is limited to the use of only high school geometry.

Note : ce problème a été proposé de nombreuses fois sur le site *Mathlinks*.[6]

2. L'équivalence du papillon

VISION

Figure :

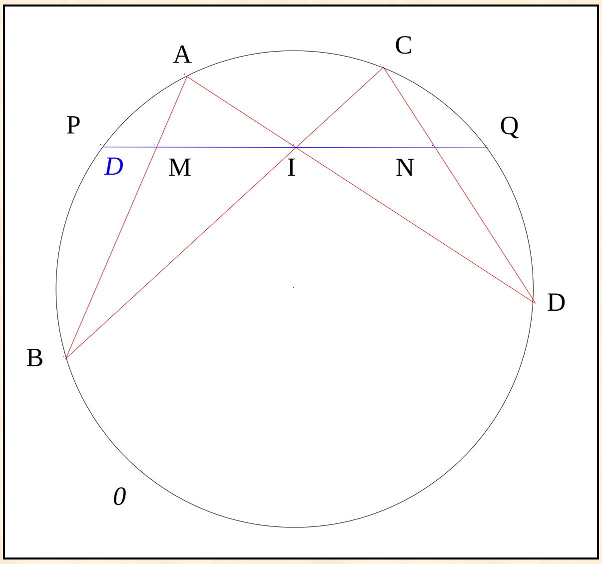
---

[3] F.G.M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed., (1920) ; Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 540.

[4] Johnson R. A, *Modern Geometry*, Houghton Mifflin, Boston (1929) 78 ;
reprinted as *Advanced Euclidean Geometry* by Dover, New York (1960) 78.

[5] Eves H. W., *Fundamentals of Geometry*, Allyn and Bacon, Boston (1964) 136-137.

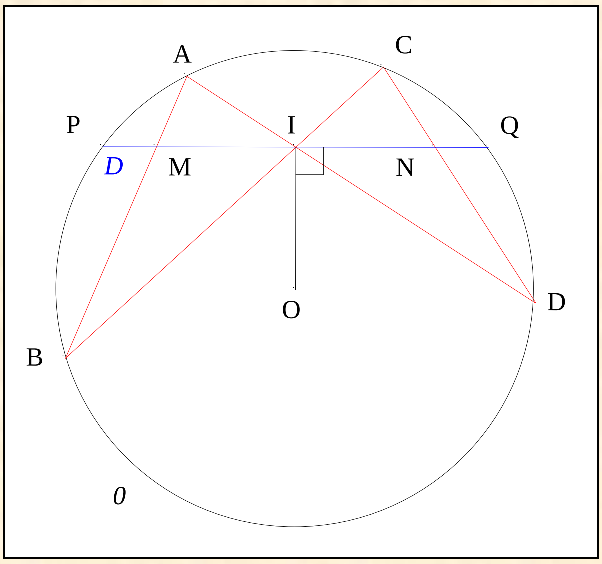
[6] Butterfly, *Mathlinks* du 28/09/2003 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=1091
EM = MF with projective geometry, *Mathlinks* du 23/01/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=24459
Orthocentre (Saint Petersbourg Math Olympiad 1995-1996), *Mathlinks* du 12/02/2008
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=188163
EASY:Cyclic quadrilateral and diagonals, *Mathlinks* du 27/08/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=49908
A nice problem for you, *Mathlinks* du 23/01/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=184861
prove I is midpoint of JK ?, *Mathlinks* du 08/09/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=225170
Isosceles triangle with height HM, Moldova TST 2010, day 2, problem 3, *Mathlinks* du 04/05/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=335815
A simple proof for Butterfly Theorem, *Mathlinks* du 11/07/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=356604
Butterfly theorem, *Mathlinks* du 17/07/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=357559
Pc=qc, *Mathlinks* du 26/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=363786



Traits : *0* un cercle,
D une **sécante** à *0*,
P, Q les points d'intersection de *D* avec *0*,
I un point de la corde [PQ],
ABCD un quadrilatère croisé inscrit dans *0* tel que les côtés [AD] et [BC] se coupent en I
et M, N les points d'intersection des côtés [AB], [CD] avec *D*.

Donné : I est le milieu de [PQ] *si, et seulement si,*[7] I est le milieu de [MN].

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons O le centre de *0*.

- **Scolie :** I est le pied de la perpendiculaire à (PQ) issue de O.

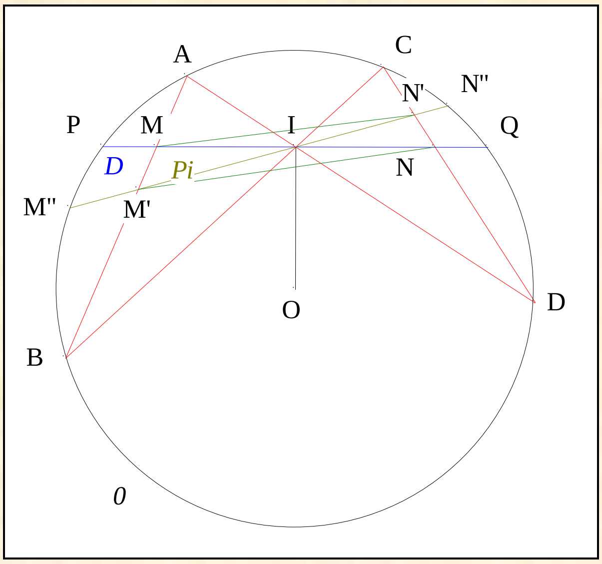
Commentaire : c'est le problème du papillon (Cf. **A. 1.** Le problème de **?**-Wallace) qui devient "Le théorème du papillon".

---

7 Nicula V., *P.B.* **1**, Proving an angle, *Mathlinks* du 09/09/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=110196

Darij Grinberg le considère comme "The strong butterfly theorem".[8]

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que (OI) n'est pas perpendiculaire à (MN).

- Notons O le centre de *0*,
  Pi la perpendiculaire à (OI) en I,
  M', N' les points d'intersection de *Pi* resp. avec (AB), (CD),
  et M", N" les points d'intersection de *Pi* avec *0*.

- **Scolie :** I est le milieu de [M"N"].

- D'après **A. 1.** Le problème de **?**-Wallace, I est le milieu de [M'N'].

- Le quadrilatère MM'NN' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme ;
  en conséquence, (MM') // (NN') ou encore (AB) // (CD).

- ABDC étant un trapèze cyclique, est isocèle ;
  en conséquence, (OI) est, par exemple, la médiatrice de (AB) ;
  nous avons : (AB) ⊥ (OI) ;
  par hypothèse, (OI) ⊥ (M"N") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AB) // (M"N") **ce qui est contradictoire** ;
  en conséquence, (OI) est perpendiculaire à (MN).

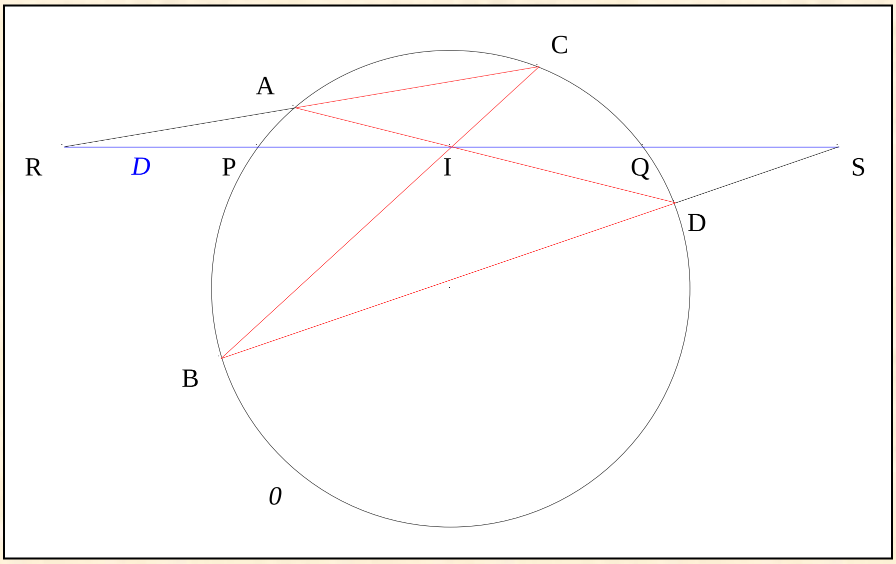
- **Conclusion :** I est le milieu de [PQ]

3. Le problème complémentaire de Howard W. Eves

VISION

Figure :

[8] Grinberg D, On cyclic quadrilaterals and the butterfly theorem (10/02/2007) ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/

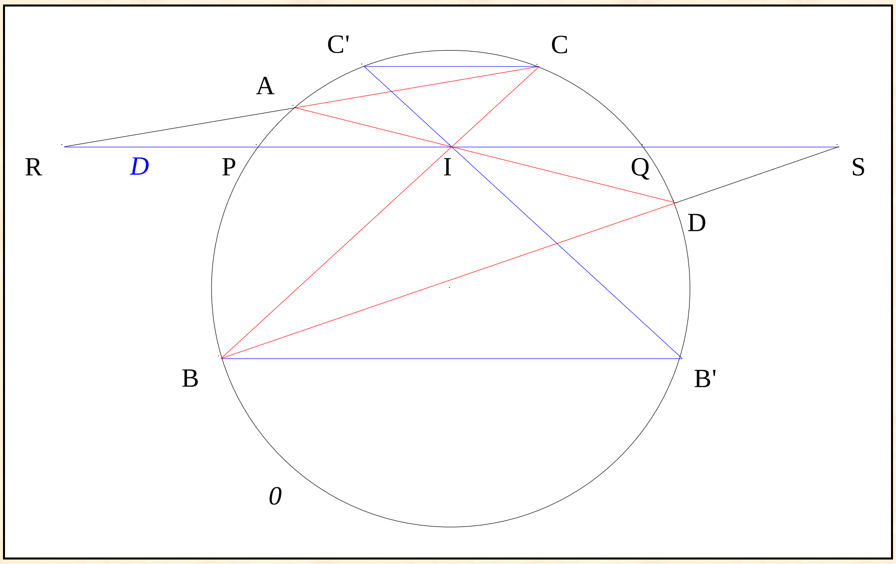


Traits :

	0	un cercle,
	D	une **sécante** à *0*,
	P, Q	les points d'intersection de *D* avec *0*,
	I	le milieu de la corde [PQ],
	ADBC	un quadrilatère croisé inscrit dans *0* tel que les côtés [AD] et [BC] se coupent en I
et	R, S	les points d'intersection de (AC), (BD) avec *D*.

Donné : I est le milieu de [RS]. [9]

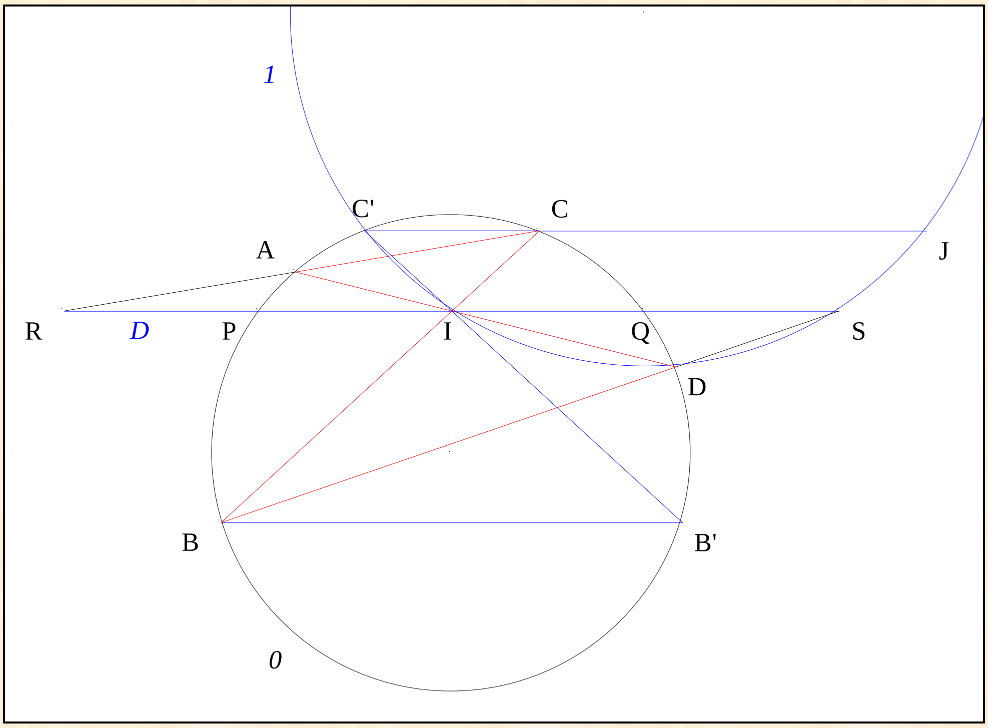
VISUALISATION



- Notons B' le second point d'intersection de la parallèle à *D* passant par B avec *0*
  et C' le second point d'intersection de (B'I) avec *0*.

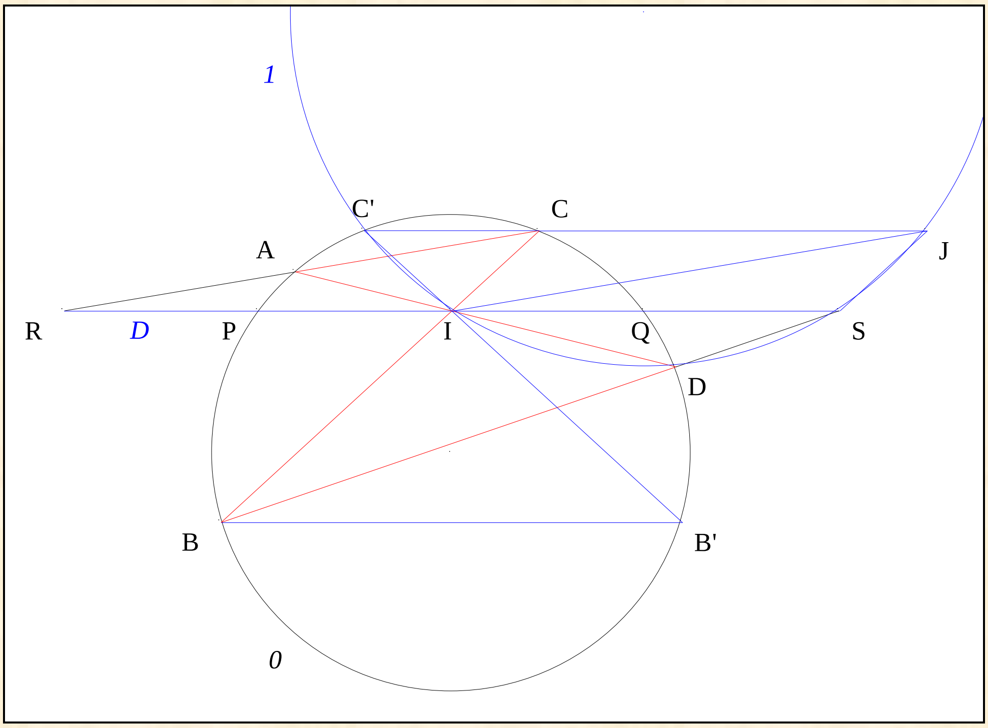
- **Scolie :** *D* // (CC')

[9] Eves H. W., *A survey of geometry*, Allyn and Bacon, Boston (1963) 171.



- Le cercle *0*, les points de base C' et D, les moniennes naissantes (B'C'I) et (BDS), les parallèles (B'B) et (IS), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, C', D, S et I sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de (CC') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et C', les moniennes (BDS) et (CC'J), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BC) // (SJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base C' et D, les moniennes (CC'J) et (ADI), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (CA) // (JI).

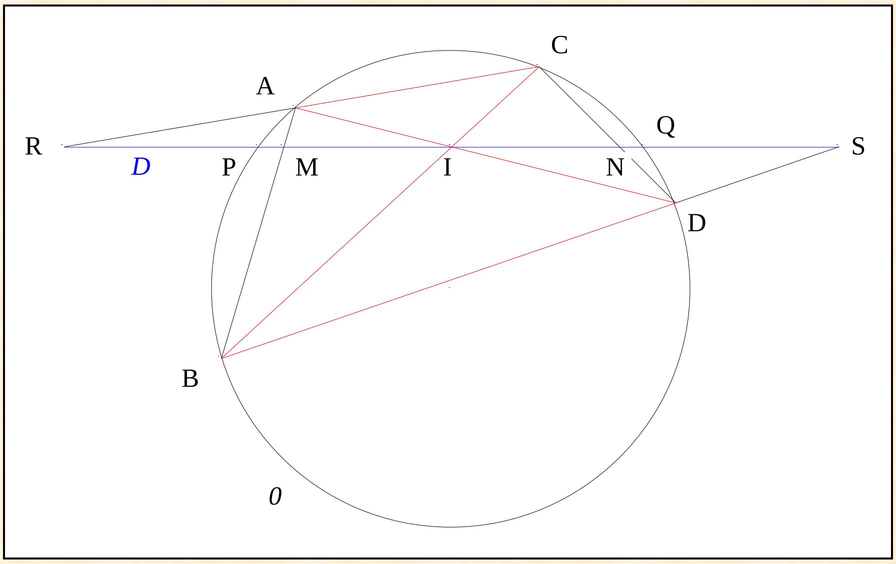
- Les quadrilatères IRCJ et ISJC étant des parallélogrammes, IR = CJ et CJ = IS ;
  par transitivité de la relation =, IR = IS.

- **Conclusion :** I est le milieu de [RS].

Note historique : la solution d'Howard Withley Eves utilise les concepts de pôle et polaire.

Scolies : **(1)** relativement au quadrilatère croisé i.e. au papillon ABCD,
ADBC en est "le papillon complémentaire".

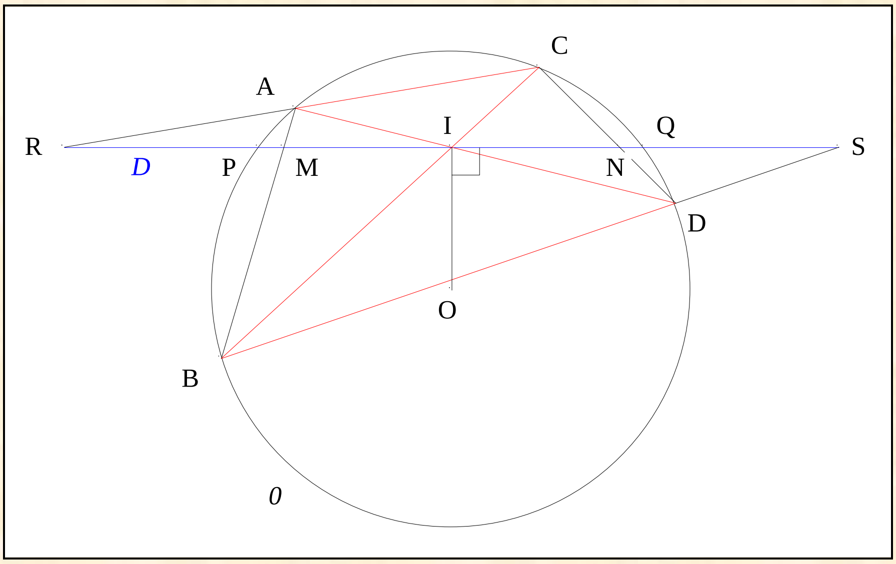
(2) Miliosité de I



- Notons M, N les points d'intersection resp. de [AB], [CD] avec *D*.

- **Conclusion :** I est le milieu des segments [PQ], [MN] et [RS].

(2) Une suite d'équivalence



- Notons O le centre de *0*.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous prouverions que

I est le milieu de [PQ] i.e. (OI) ⊥ [PQ]

si, et seulement si,

I est le milieu de [MN]

si, et seulement si [10]

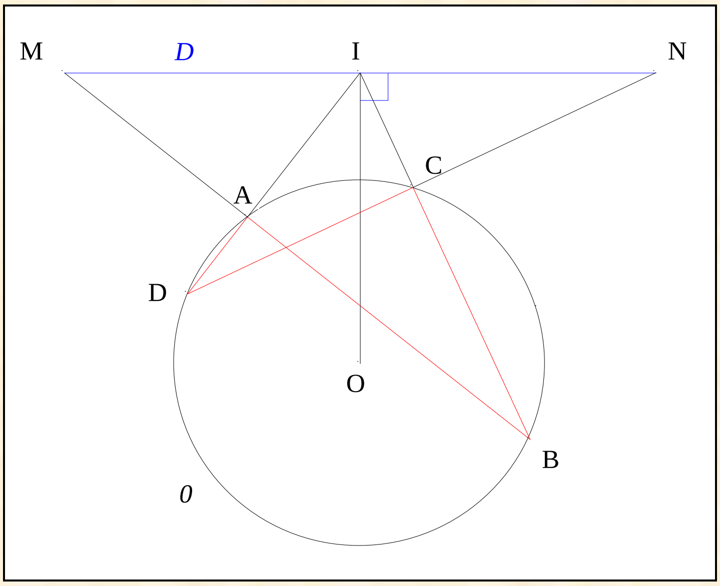
I est le milieu de [RS].

Commentaire : jusqu'ici, la droite *D* est sécante à *0*.

4. Le problème de H. S. M. Coxeter

VISION

Figure :



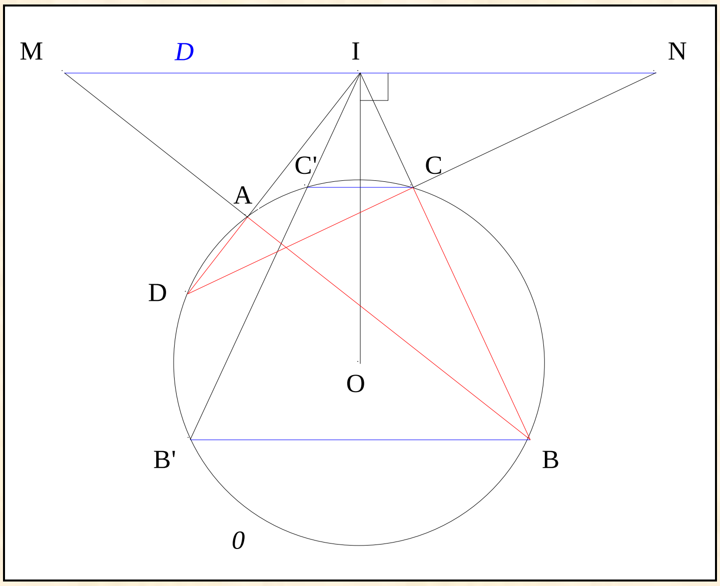
Traits :

	0	un cercle,
	O	le centre de *0*,
	D	une droite **strictement extérieure** à *0*,
	I	le pied de la perpendiculaire à *D* passant par O,
	ABCD	un quadrilatère croisé inscrit dans *0* tel que (AD) et (BC) se coupent en I,
et	M, N	les points d'intersection resp. de (AB), (CD) avec *D*.

Donné : I est le milieu de [MN]. [11]

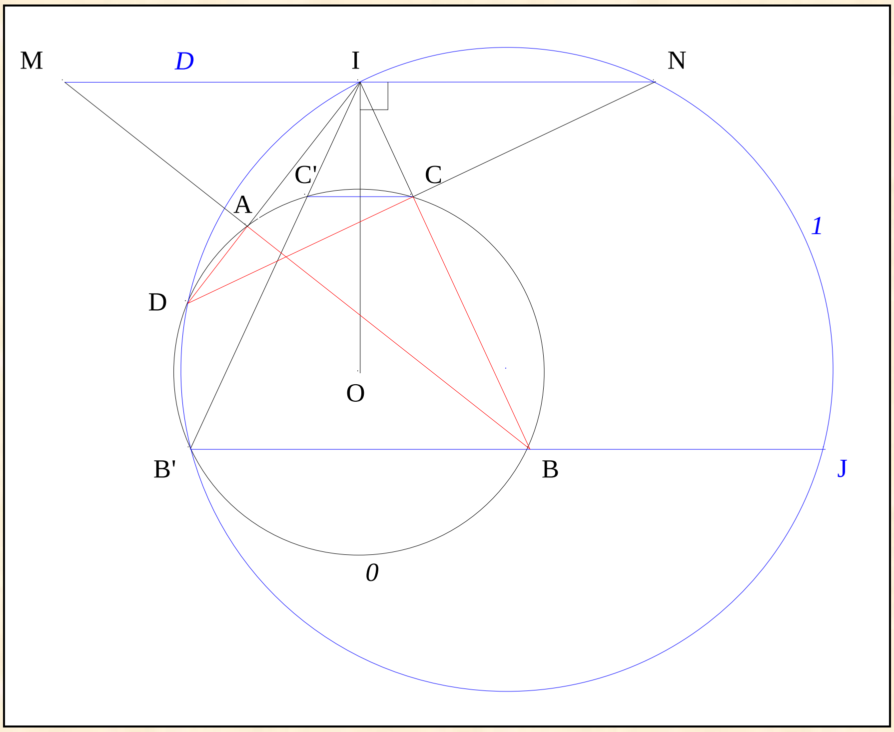
[10] Pour la réciproque, Cf. **A. 2.** L'équivalence du papillon.
[11] Coxeter H. S. M., référence perdue.

VISUALISATION



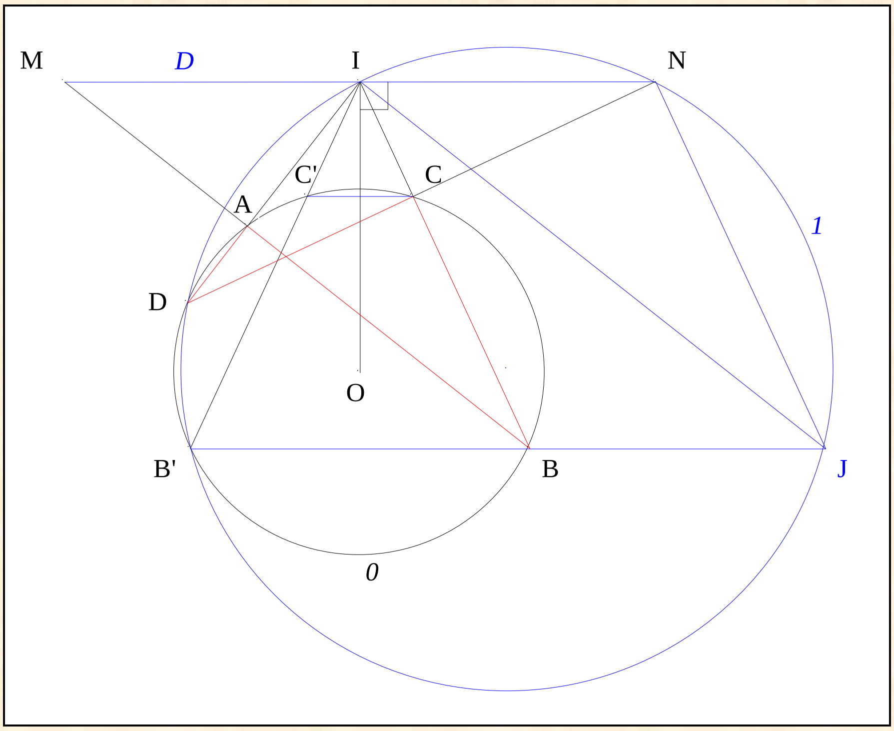
- Notons B' le second point d'intersection de la parallèle à *D* passant par B avec *0*
  et C' le second point d'intersection de (B'I) avec *0*.

- **Scolie :** *D* // (CC')



- Le cercle *0*, les points de base B' et D, les moniennes naissantes (C'B'I) et (CDN), les parallèles (C'C) et (IN), conduisent au théorème **0''** de Reim ;
  en conséquence, B', D, N et I sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de (BB') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et B', les moniennes (ADI) et (BB'J), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AB) // (IJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B' et D, les moniennes (BB'J) et (CDN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BC) // (JN).

- Les quadrilatères MBJI et IBJN étant des parallélogrammes, IM = BJ et BJ = IN ; par transitivité de la relation =, IM = IN.

- **Conclusion :** I est le milieu de [MN].

Commentaire : ce problème de Coxeter est une généralisation de **A. 1.** Le problème de **?-**Wallace en considérant la droite *D* **strictement extérieure** au cercle.

Scolies : **(1)** l'équivalence de Coexeter

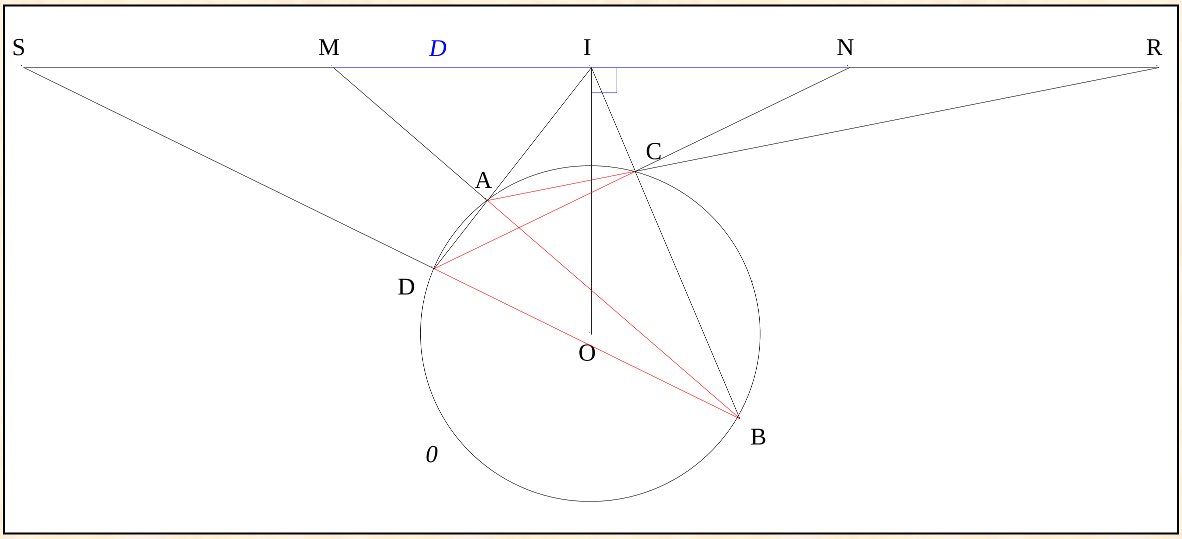
(OI) $\perp$ (MN)

si, et seulement si, [12]

I est le milieu de [MN]

(2) Le problème complémentaire de H. S. M. Coxeter

[12] Pour la réciproque, Cf. **A. 2.** L'équivalence du papillon.



- Notons R, S les points d'intersection de (AC), (BD) avec *D*.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que I est le milieu du segment [RS].

(2) Miliosité de I

- **Conclusion :** I est le milieu des segments [MN] et [RS].

Note : ce problème a été proposé de nombreuses fois sur le site *Mathlinks.*[13]

(3) Une suite d'équivalence

(OI) ⊥ (MN)

si, et seulement si,

I est le milieu de [MN]

si, et seulement si,

I est le milieu de [MN].

[13] A Variation of The Butterfly Problem, *Mathlinks* du 31/05/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=13061
cyclic quadrilateral and line [extended butterfly theorem], *Mathlinks* du 27/09/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=18781
A Circle and Chord Property, *Mathlinks* du 24/02/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=346411

B. NOTE HISTORIQUE

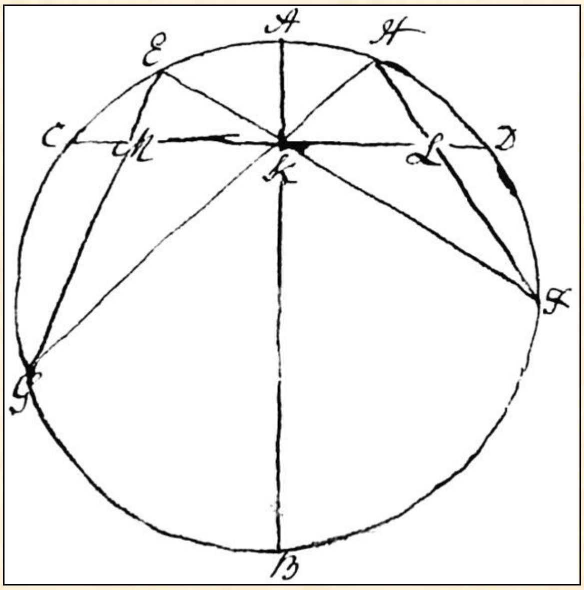
1. Sur l'origine du problème

Dans une lettre envoyée à William Wallace en date du 7 Avril 1805, sir William Herschel le découvreur d'Uranus et de ses lunes majeures Titania et Oberon, écrit

I have kept a little problem for you which a friend of mine has sent me who says he cannot find a solution of it. I mentioned to him that I had a friend who would probably help him to one.

The problem is this.

Given AB the diameter of a circle.
CD a chord cutting it at right angles in K.
EF, and HG two other chords drawn any how through the point K;
and HF, EG chords joining the extremes of EF, HG.
Required to prove that MK is equal to LK.

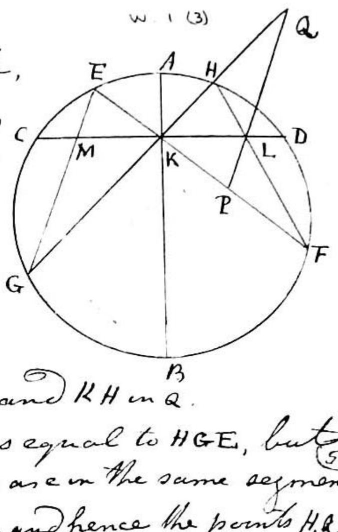


Ce qui suit est la photocopie de la solution originale de William Wallace qui a été mise en ligne sur le site de l'Université de St. Andrew suite à l'article d'Alex Craik et de John O'Connor publié en Mars 2011 dans le *Journal of British for the History of Mathematics* [14]

[14] Craik Alex D. D. and O'Connor John J., Some unknown documents associated with William Wallace (1768-1843), BSHM Bulletin: *Journal of British for the History of Mathematics*, vol. **26**, Issue **1** (March 2011) 17-28.

W. 1 (3)

Problem. AB is the diameter of a Circle, CD a chord cutting it at right angles in K, EF and HG two other chords drawn anyhow through the point K, and HF, EG chords joining the extremes of EF, HG.
It is required to prove that MK is equal to KL.



Demonstration

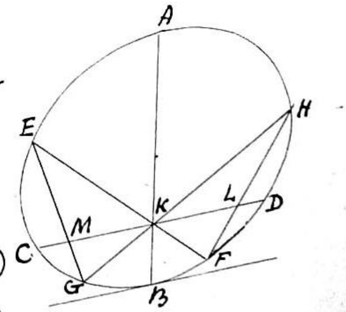
Through L draw PQ parallel to GE, meeting KF in P and KH in Q.
Because of the parallels the angle HQP is equal to HGE, but HGE is equal to HFE, or to HFP, for they are in the same segment, (59)
therefore the angles HQP, HFP are equal, and hence the points H, Q, F, P are in the circumference of a circle, wherefore $PL \times LQ = FL \times LH$.
The triangles KEG, KPQ are similar and ~~similarly divided at~~ their sides EG, PQ are similarly divided by the lines KM, KL, which lines are to each other as EM to PL, and as MG to LQ, therefore

$$KM^2 : EM \times MG :: KL^2 : PL \times LQ, \text{ or } FL \times LH;$$

that is $KM^2 : CM \times MD :: KL^2 : CL \times LD$
and by composition, &c. $KM^2 : KM^2 + CM \times MD :: KL^2 : KL^2 + CL \times LD$
But $KM^2 + CM \times MD = CK^2$ & $KL^2 + CL \times LD = KD^2$
therefore $KM^2 : CK^2 :: KL^2 : KD^2$, and $KM : CK :: KL : KD$.
But CD being perpendicular to the diameter, KC is equal to KD, therefore KM must also be equal to KL as was to be demonstrated.

Remark

The above proposition is a particular case of a more general one extending to all the Conic Sections, which may be expressed thus.



If AB is any diameter of a Conic Section, and CD any right line cutting it in K, and parallel to a tangent at its vertices; also EF and HG two other lines drawn any how through K, to meet the conic section, the one in the points E, F, and the other in the points G, H, the straight lines EG, FH which join the extremities of these lines shall ~~cut off~~ intercept upon CD the segments KM, KL which are equal to each other.

[W. Wallace]

15

Ce qui suit est la transcription de la preuve

15 The MacTutor History of Mathematics archive ; http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Wallace/index.html

Through L draw PQ parallel to GE, meeting KF in P and KH in Q.
Because of the parallels the angle HQP is equal to HGE, but HGE is equal to HFE, or to HFP, for they are in the same segment, therefore the angles HQP, HFP are equal, and hence the points H, Q, F, P are in the circumference of a circle, wherefore $PL \times LQ = FL \times LH$.

The triangles KEG, KPQ are similar and their sides EG, PQ are similarly divided by the lines KM, KL, which lines are to each other as EM to PL, and as MG to LQ, therefore

$KM^2 : EM \times MG :: KL^2 : PL \times LQ$, or $FL \times LH$;

that is

$KM^2 : CM \times MD :: KL^2 : CL \times LD$

and by composition, &c.

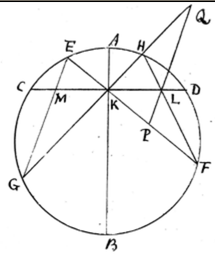
$KM^2 : KM^2 + CM \times MD :: KL^2 : KL^2 + CL \times LD$

But $KM^2 + CM \times MD = CK^2$ & $KL^2 + CL \times LD = KD^2$

Therefore $KM^2 : CK^2 :: KL^2 : KD^2$, and $KM : CK :: KL : KD$.

But CD being perpendicular to the diameter, KC is equal to KD,

therefore KM must also be equal to KL as was to be demonstrated.



[16]

*

Pour plus de précision, rappelons qu'un ensemble de manuscrit et publication a été mis à jour récemment par un descendant de William Wallace et publié sur le web avec son accord, après avoir consulté la volumineuse correspondance d'Herschel à la bibliothèque de la Royal Astronomical Society. Le catalogue concernant les papiers d'Herschel répertorie une seule lettre envoyée à Wallace en 1803 ; à cette lettre est annexée une unique feuille non datée et signée par Wallace : elle donne la preuve du problème en question et doit datée de 1805. En outre, Wallace y note avec perspicacité, mais sans preuve, que

la proposition ci-dessus
est un cas particulier
d'une plus générale s'étendant à toutes les Sections coniques.

La lettre de 1803 montre que le problème était connu au moins dix ans avant que la preuve d'Horner soit publiée en 1815. L'identité de l'ami d'Herschel qui lui envoya ce problème n'est pas connu à ce jour.

2. Une courte biographie de William Wallace

[17]

dit *Scoticus*

---

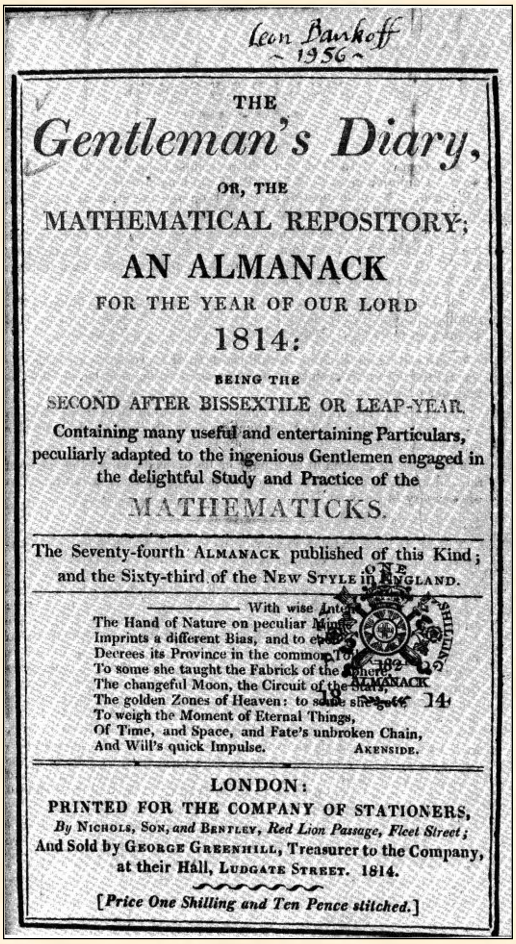
16 The MacTutor History of Mathematics archive ; http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Wallace/index.html
17 The MacTutor History of Mathematics archive ; http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

William Wallace est né le 23 septembre 1768 à Dysart (Écosse).
Fils de Janet Simson and d'Alexander Wallace qui était un fabricant de cuir et qui lui enseigna les bases de l'arithmétique, William Wallace reste sans formation scolaire après l'âge de 11 ans.
En 1784, il suit sa famille à Edinburgh. Autodidacte, il gagne sa vie comme ouvrier chez un relieur et comme tuteur en mathématiques. Bien qu'il ne fût pas un étudiant, Wallace participe à des cours de mathématiques à l'Université d'Édimbourg où Playfair encourage le jeune homme pour ses remarquables talents en mathématiques.
En 1794, il enseigne les mathématiques à l'Académie de Perth et se marie la même année. De cette union naîtrons trois filles et un fils. Recommandé par Playfair, il obtient en 1803, le poste de professeur au Collège Militaire Royal de Great Marlow, la future Sandhurst, où James Ivory le rejoint. Rappelons que le *Mathematical Repository* de Thomas Leybourn était produit par le personnel du Collège Militaire Royal.
De 1819 à 1838, il professe à l'Université d'Edinburgh.

Passionné géomètre, il invente le pantographe et écrit en 1839, *Geometrical theorems and Analytical Formulae*.
En 1798, dans le *Leybourne's mathematical repository*, Wallace introduit une droite que l'on appellera plus tard "La droite de Simson".
En 1804, dans le même journal, il introduit "Le point de Miquel", suite à une série de questions portant sur le quadrilatère complet que Jakob Steiner avait posées dans les *Annales* **18** de Gergonne (1827-1828).
En 1838, il prend sa retraite suite à des problèmes de santé.
Il décède à Edinburgh (Écosse), le 28 avril 1843.

C'est l'historien John Sturgeon Mackay de l'université d'Edinburg qui attira, en 1890, l'attention des mathématiciens sur les découvertes détournées de Wallace.

3. Les différentes preuves


Leon Bankoff
~ 1956 ~

THE
Gentleman's Diary,
OR, THE
MATHEMATICAL REPOSITORY;
AN ALMANACK
FOR THE YEAR OF OUR LORD
1814:
BEING THE
SECOND AFTER BISSEXTILE OR LEAP-YEAR.
Containing many useful and entertaining Particulars, peculiarly adapted to the ingenious Gentlemen engaged in the delightful Study and Practice of the
MATHEMATICKS.

The Seventy-fourth ALMANACK published of this Kind; and the Sixty-third of the NEW STYLE in [illegible]GLAND.

——— With wise Inte[illegible]
The Hand of Nature on peculiar [illegible]
Imprints a different Bias, and to e[illegible]
Decrees its Province in the common To[illegible]
To some she taught the Fabrick of the [illegible]here,
The changeful Moon, the Circuit of the [illegible],
The golden Zones of Heaven: to s[illegible]
To weigh the Moment of Eternal Things,
Of Time, and Space, and Fate's unbroken Chain,
And Will's quick Impulse. AKENSIDE.

ONE SHILLING ALMANACK 18 14

LONDON:
PRINTED FOR THE COMPANY OF STATIONERS,
By NICHOLS, SON, *and* BENTLEY, *Red Lion Passage, Fleet Street;*
And Sold by GEORGE GREENHILL, Treasurer to the Company, at their Hall, LUDGATE STREET. 1814.

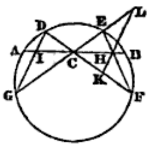
[Price One Shilling and Ten Pence stitched.]

Comme l'a écrit le regretté Léon Bankoff[18], cet épineux et intriguant problème géométrique réapparaît en 1815 comme Question **1029** dans le *The Gentleman's Diary*, une revue britannique qui avait entre autre pour mission de populariser les mathématiques durant le XVIII et XIXème siècle.
Présentons les différentes preuves par nature.

Les preuves élémentaires

Suite à la Question 1029, le Dr. Edward J. Zoll du Newark State College (New Jersey, États-Unis) a reçu la même année trois preuves dont celle de William Horner l'auteur de "la méthode d'Horner", et de Richard Taylor qui ont été publiées dans *The Gentleman's Diary*[19] .
Dans sa preuve, Taylor introduit un cercle auxiliaire analogue à celui de l'auteur mais placé différemment et remarque que sa démonstration est encore opérante lorsque les points M et N sont à l'extérieur du cercle.

(68.) ***If through the middle point of any chord of a circle two chords be drawn; the lines joining their extremities will intersect the first chord at equal distances from the middle point.***



Let ACB be a chord of the circle ABD, bisected in C; and let DCF, ECG be any chords drawn through C. Join DG, EF cutting AB in I and H; then will $CI = CH$.

Through H draw KHL parallel to DG, meeting DF in K, and GE produced in L. Because LH is parallel to GI, the angle $HLE = CGI = HFK$, and the vertical angles at H are equal, $\therefore$ the triangles LEH, HKF are equiangular,

$$\therefore LH : HE :: HF : HK,$$

and the rectangle LH, HK is equal to the rectangle HE, HF, *i.e.* to the rectangle AH, HB or the difference of the squares of AC and CH. The triangles CID, CHK may in like manner be proved to be equiangular, as also the triangles CHL, CIG; hence

$$KH : HC :: DI : IC,$$

$$\text{and } LH : HC :: GI : IC,$$

$$\therefore KH \times LH : HC^2 :: DI \times IG : IC^2.$$

$$\text{But } KH \times LH = AC^2 - HC^2, \text{ and } DI \times IG = AC^2 - IC^2,$$

$$\therefore AC^2 - HC^2 : HC^2 :: AC^2 - IC^2 : IC^2$$

$$comp.\ AC^2 : HC^2 :: AC^2 : IC^2,$$

$$\therefore HC^2 = IC^2, \text{ and } HC = IC.$$

En 1819, Miles Bland[20] publie une solution identique à celle de William Wallace dans *Geometrical Problems.*
Ce problème refait surface en 1941, dans la revue *School Science and Mathematics* où Mannis Charosh[21] introduit dans sa solution un axe radical. Il récidive en 1945 avec l'intersection de trois axes radicaux dans sa nouvelle preuve que publie l'*Association of Teachers of Mathematics*.
Ce problème est à nouveau proposé en 1943 dans l'*American Mathematical Monthly*[22] et l'année suivante apparaissent les preuves de Joseph Rosenbaum, W. E. Buker, Robert Steinberg, E. P. Starke et J. H. Butchert[23].
Précisons que celle de Rosenbaum introduit le symétrique d'un sommet comme celle de Taylor et celle de Buker ressemble, étrangement à une notation près, à celle de Miles Bland.
En 1967, Harold Scott MacDonald Coxeter[24] propose une approche basée sur les triangles semblables.

[18] (13/12/1908-16/02/1997).
[19] ?, Question **1029**, *The Gentleman's Diary* (1815) 9-40.
[20] Bland M. (1786-1867), *Geometrical Problems deducible from the first six books of Euclid*, Cambridge (1819) 228-229 ; also 3rd ed. (1827) 228.
[21] Charosh M., Solution of problem **1713**, *School Science and Mathematics* **41** (Oct. 1941) 684-685 ; *Association of Teachers of Mathematics*, N.Y.C. **1** (1945) 11.
[22] E 571, *American Mathematical Monthly* (May 1943) 326
[23] Buker W. E., Solution II of problem **E 571**, *American Mathematical Monthly* **51** (February 1944) 91.
[24] Coxeter H. S. M. and Greitzer S. L., *Geometry revisited*, MAA (1967) 45-47.

En 1952, D. O. Shklyarsky, N. N. Chentsov, I. M. Yaglom [25] proposent une approche angulaire.
En Janvier 1955, Arthur Eilberg[26] dans la revue *School Science and Mathematics* reconsidère le symétrique d'un sommet.
Rappelons qu'un dentiste de Beverly Hills (Californie, États-Unis), le célèbre dentiste-géomètre Léon Bankoff a découvert en 1955 ce problème dans la revue *School Science and Mathematics*, en a donné en Février de la même année une solution[27] dont les parallélogrammes se retrouvent chez l'auteur.
En 2006, Virgil Nicula[28] redécouvre la preuve de Richard Taylor.

Au schéma classique consistant

à symétriser un sommet du quadrilatère croisé ABCD,
à considérer un quadrilatère cyclique
et à rechercher deux triangles égaux ayant pour côtés [IM] et [IN],

répondent les preuves de Ross Honsberger[29], Charles F. Pinzka[30], Jack Coles[31], Riko Winterle[32] , Paul Erdös[33], M. F. MacGregor[34], Isadore Chertoff[35], Greg Markowsky[36]

Autres preuves

par

les puissances :	D. O. Shklyarsky, N. N. Chentsov, I. M. Yaglom[37], Ivan Guo[38] médaille d'or aux IMO 2004 (avec axes radicaux), Dan Sokolowsky[39] (Yellow Spring, Ohio, Etats-Unis)
le théorème d'Haruki :	Ross Honsberger[40],
la trigonométrie :	L. H. Miller[41]
l'analytique :	Kesiraju Satyanarayana[42], Edsgar Dykstra[43], B. Elsner[44] alias *MathOMan*
les transversales :	Philomathe[45] (Montréal, Canada) dont la solution est identique à F. G.-M.[46], Albert Luther Candy[47]

25 Shklyarsky D. O., Chentsov N. N., Yaglom I. M., Problem 104, Solution 1, *Selected problem and Theorems of Elementary Mathematics*, vol. **2** Moscou (1952)
26 Eilberg A., Solution of Problem 2419, *School Science and Mathematics* **55** (1955) 70-71.
27 Bankoff L., Solution of Problem **2426**, *School Science and Mathematics* **55** (Feb. 1955) 156.
28 Nicula V., About the butterfly theorem, *Mathlinks* du 06/02/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=73560
29 Honsberger R., The butterfly problem and other delicacies, Part **I,** *The Two-Year College Math. J.* **14** (1983) 2-5 ;
Two Gems from Euclidean Geometry, *The Two-Year College Math. J.*, MAA (January 1983) 135-140.
30 Pinzka C. F., Problem Solving and Some Problems, Enrichment Mathematics for High School, 28th Yearbook, NCTM (1963) 179-184, problem **14**. (NCTM : National Council of Teachers of Mathematics)
31 Coles J., Solution of problem **82-3**, Ontario Secondary School Math. Bull. **3** (1982) 15-16.
32 Winterle R., Solution of problem **#2**. Ontario Secondary School Math. Bull. **1** (1968) 33 ; also solution by Lovsin W. p. 34, 17.
33 Erdös P., Solution of problem **75-5**, Ontario Secondary School Math. Bull. **2** (1975) 23-24 ;
34 MacGregor M. F., Solution of problem **1455**, School Science and mathematics **33** (1933) 902.
35 Chertoff I., Solution of problem **1455**, School Science and mathematics **36** (1936) 1027-1028
36 Bogomolny A., The Butterfly theorem, sol. **16** ; http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml
37 Shklyarsky D. O., Chentsov N. N., Yaglom I. M., Problem 104, Solution 2, *Selected problem and Theorems of Elementary Mathematics*, vol. **2** Moscou (1952)
38 Bogomolny A**.,** The Butterfly theorem, sol. **17** ; http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml
39 Sokolowsky D., Another proof of the butterfly theorem, *Eureka* (Canada) **2** (1976) 188-190.
40 Honsberger R., Two Gems from Euclidean Geometry, *The Two-Year College Maths J.*, MAA (January 1983) 135-140.
41 Miller L. H., College Geometry, Appleton-Century-Crofts, New York (1957) 124-125.
42 Satyanarayana K., A simple proof of the butterfly problem, *Crux Mathematicorum* **7** (1981) 292.
43 Dystra E., An Analytical Proof of the Butterfly Theorem (November 1983) ; http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd08xx/EWD866.PDF
44 Bogomolny A**.,** The Butterfly theorem, sol. **18 ;** http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml
45 Philomathe, Solution of problem **590**, *School Science and Mathematics* **19** (March1919) 279.
46 F. G.-M., Exercices de Géométrie, 4th ed., Maison A. Mame & Fils, Tours (1907) 535.
47 Candy L. A., A general theorem relating to transversals, and its consequences, *Annals of Mathematics*, New-York, **10**, (1895-1896) 175-190.

les pôles et polaires :	Georges Papelier[48] , F. G.-M.[49], Howard W. Eves[50], Paris Pamfilos[51]
l'involution :	F. G.-M.[52]
les faisceaux harmoniques **:**	F. G.-M.[53] , John Casey [54]
les aires :	Steven R. Conrad[55] (Bayside, New York, États-Unis), Weininjieda[56] (Yingkou, Chine)
les coniques :	Viktor Vasil'evich Prasolov[57]
les transformations :	V. V. Prasolov[58]
animation :	Antonio Gutierez [59]

4. A propos du nom donné à ce problème

Un petit problème,
insaisissable et séduisant en géométrie élémentaire
connus comme le problème de "papillon".

Le mot "papillon" apparaît en Février 1944 comme le titre des solutions de ce problème E571 dans l'*American Mathematical Monthly* [60]. Ce nom a certainement contribué à populariser ce problème et à le généraliser.
Rappelons qu'à cette époque, Howard Withley Eves était à le rédacteur en chef du mensuel de la rubrique "problèmes" et il est raisonnable de supposer qu'il a été le premier à noter dans les différents quadrilatères croisés l'apparence omniprésente des ailes d'un "papillon".

5. Les articles et sites

Nous citerons les deux premiers classiques à savoir ceux de Léo Sauvé[61] du Collège d'Algonquin à Ottawa (Ontario, Canada) en 1976 et du Léon Bankoff[62] en 1987. D'autres comme celui de Tom Ryke[63], Darij Grinberg[64] sont apparus par la suite avec moins de retentissement.

---

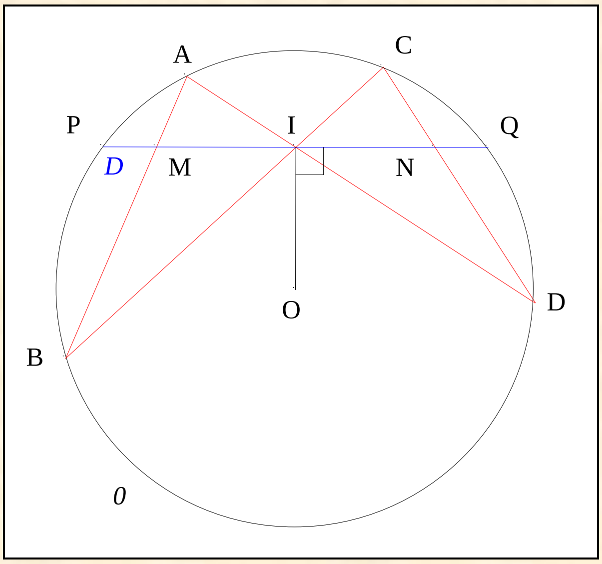
48 Papelier G., Livre **IV** Pôles et Polaires, p. 38 n° 56.
49 F. G.-M., Exercices de Géométrie, 4th ed., Maison A. Mame & Fils, Tours (1907) théorème 366 p.540.
50 Eves H. W., *A survey of Geometry*, Allyn and Bacon, Revised Edition 1972.
51 Bogomolny A**.,** The Butterfly theorem, sol. **12 ;** http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml
52 F. G.-M., Exercices de Géométrie, 4th ed., Maison A. Mame & Fils, Tours (1907) théorème 366 p.540.
53 F. G.-M., Exercices de Géométrie, 4th ed., Maison A. Mame & Fils, Tours (1907) théorème 366 p.540.
54 Casey J., A Sequel to Euclid, 6th ed. Revisited (1892) cor. 5, p. 129.
55 Conrad S. R., Another Simple Solution of the Butterfly Problem, vol. **46** *Mathematics Magazine* MAA (Nov. 1973) 278-280 ; vol. **5** chap. **2**, *Arbelos* (1991) 38-39.
56 Bogomolny A**.,** The Butterfly theorem, sol. **15 ;** http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml
57 Prasolov V. V., Essays on Numbers and Figures, vol. **16**, *AMS* (2000) 59.
58 Prasolov V. V., Problems in Planimetry, vol. **2** Nauka, Moscou (1986) 59.
59 http://agutie.homestead.com/files/butterflytheorem1.html
http://wn.com/Butterfly_theorem
60 Rosenbaum J., Buker W. E., Steinberg R., Starke E. P., Butchert J. H., Solution of Problem E 571, *Amer. Math. Monthly* **51** (1944) 91.
61 Sauvé L., The celebrated Butterfly problem, Eureka (Canada) vol**. 1**, issue **2** (1976) 2-5 ;
Eureka was latter called *Crux Mathematicorum*.
62 Bankoff L., The Metamorphosis of the Butterfly Theorem, *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America, vol. **60** n°**4** (October 1987) 195-210 ; http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/imo-geometry-4-11-04/butterfly/bankoff.pdf
63 Rike T., Perennial Problem for Geometry de Tom Ryke (12/01/2003), Berkeley Math Circle ;
http://mathcircle.berkeley.edu/BMC5/docpspdf/PerennialGeom.BMC.pdf
64 Grinberg D, On cyclic quadrilaterals and the butterfly theorem (10/02/2007) ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/

Pour les sites électroniques, notons en particulier celui d'Alexander Bogomolny[65] intitulé "Cut-the-Knot" où 18 preuves sont présentées.

6. Une rumeur

On dit que cet exercice a été utilisé, il y a déjà longtemps, lors des examens d'entrée à l'université de Moscou, pour éliminer des candidats indésirables... pour d'autres raisons que mathématiques. On peut lire que cette question avait été posée à des candidats juifs dans le livre *You failed your math test, Comrade Einstein*, de M. Shifman — mais il ne sait pas si elle était posée à d'autres candidats. Ceci nous rappelle que les mathématiques ne sont ni neutres, ni objectives, elles font partie de la culture et de la société. Elles sont ce que nous en faisons.

C. PREMIÈRES VARIÉTÉS



Commentaire : jusqu'ici, le point d'intersection I de (AD) et (BC) du papillon ABCD vérifiait l'hypothèse

$$(OI) \perp \mathcal{D}$$

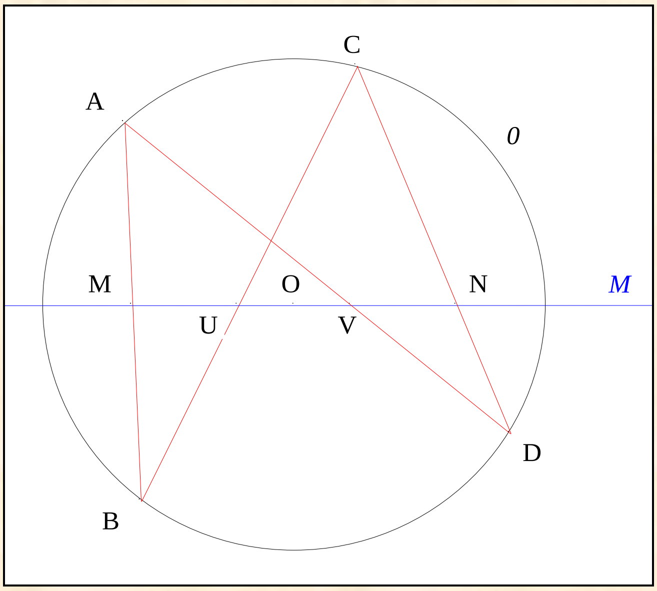
qui, maintenant, sera abandonnée au profit d'une autre où la droite *D* devient la droite *M*.

1. Le papillon de Cantab

VISION

Figure :

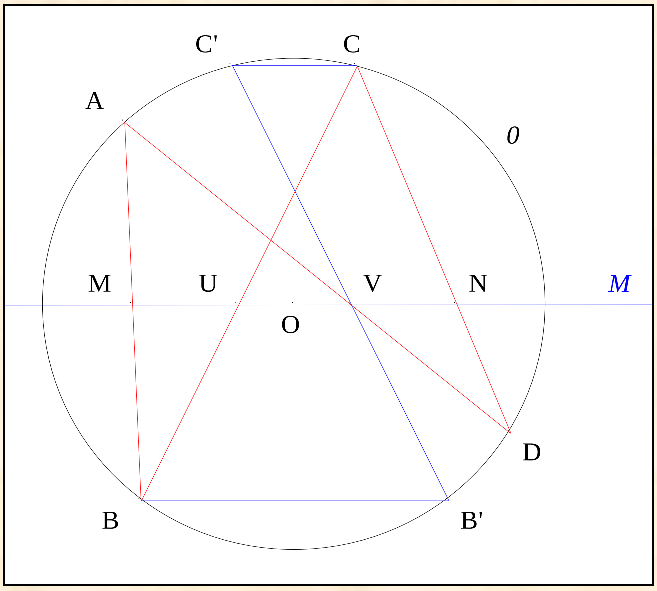
[65] Bogomolny A., The Butterfly theorem ; http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml



Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
M une **droite diamétrale** de *0*,
U, V deux points de *M* tels que O soit le milieu de [UV],
ABCD un papillon inscrit dans *0* tel que les côtés [AD], [BC] passent par V, U
et M, N les points d'intersection des côtés [AB], [CD] avec *M*.

Donné : O est le milieu de [MN].[66]

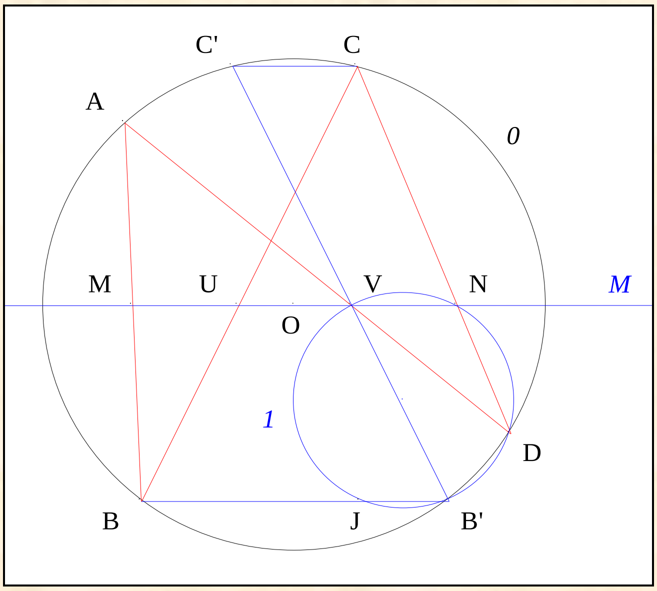
VISUALISATION



- Notons B' le second point d'intersection de la parallèle à *M* passant par B avec *0*
  et C' le second point d'intersection de la droite (B'V) avec *0*.

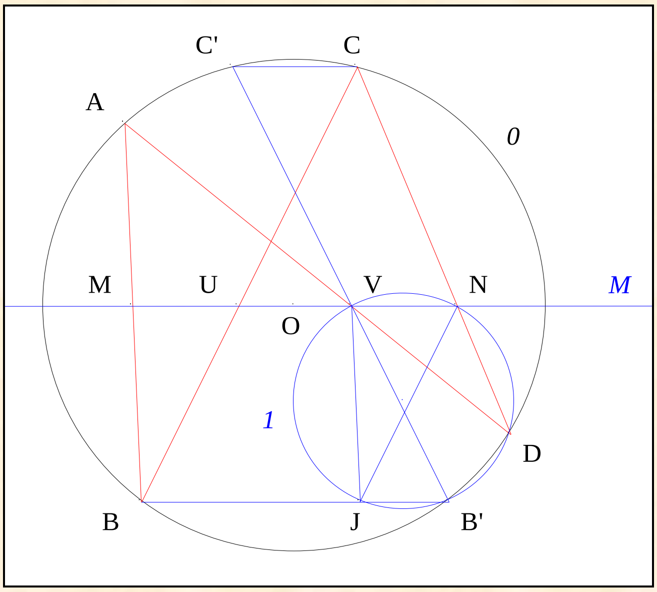
- **Scolie :** *M* // (CC').

[66] Cantab, problem **1549**, Mathematical Questions from *The Educational Times*, **2** (1863) 67.



- Le cercle *0*, les points de base D et B', les moniennes naissantes (CDN) et (C'B'V), les parallèles (CC') et (NV), conduisent au théorème **0** de Reim ; en conséquence, B', D, N et V sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de la droite (BB') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et B', les moniennes (ADV) et (BB'J), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AB) // (VJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B' et D, les moniennes (BB'J) et (CDN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BC) // (JN).

- Les quadrilatères MBJV et UBJN étant des parallélogrammes, MV = BJ et BJ = UN ;
  par transitivité de la relation =, MV = UN ;
  par hypothèse, OV = OU ;
  par soustraction membre à membre de ces deux dernières égalités, OM = ON.

- **Conclusion :** O est le milieu de [MN].

Note Historique : c'est Murray S. Klamkin[67] qui rappelle dans son article que ce résultat est de Cantab.

Scolies : **(1)** la réciproque de Cantab

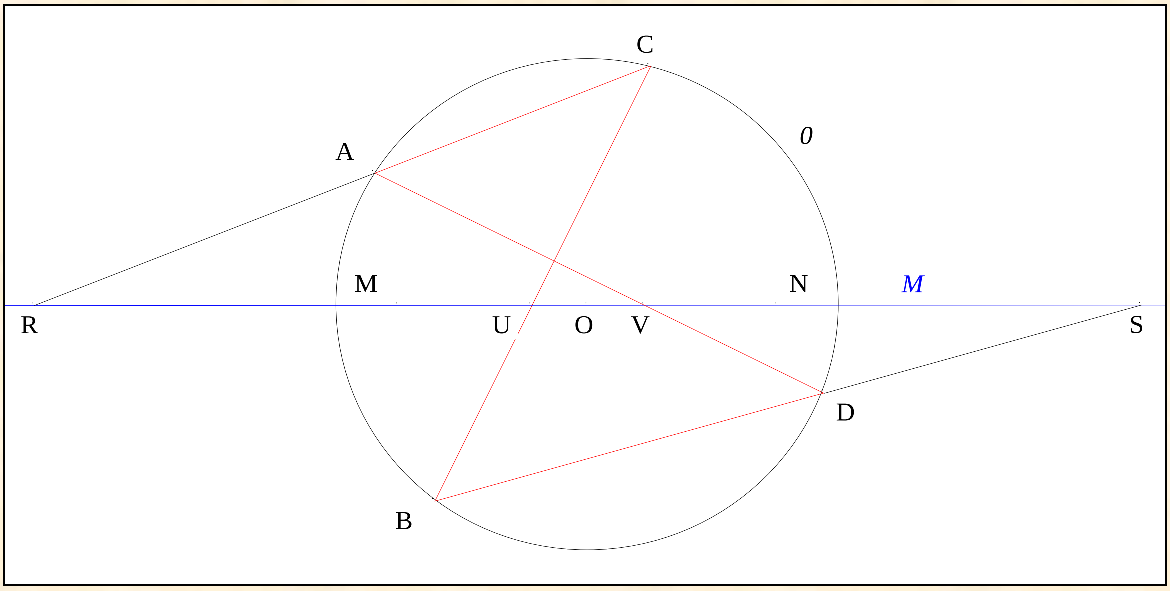
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

si, O est le milieu de [MN] *alors*, O est le milieu de [UV].

(2) L'équivalence de Cantab

- **Conclusion :** O est le milieu de [UV] *si, et seulement si*, O est le milieu de [MN]

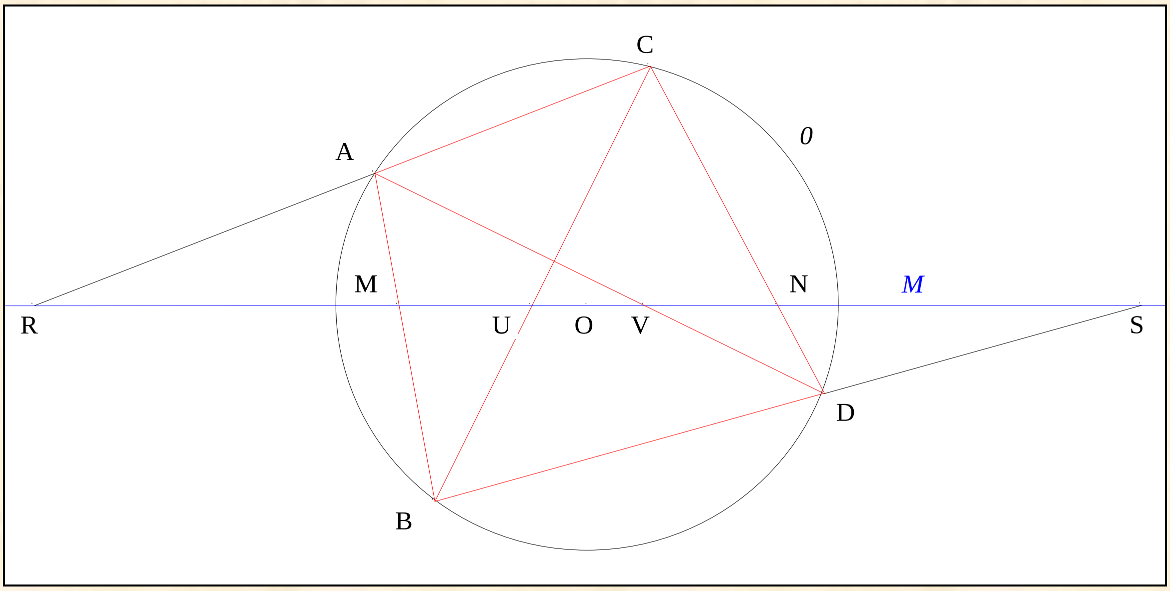
(3) Le papillon complémentaire de Cantab



- Notons R, S les points d'intersection de (AC), (BD) avec *M*.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que O est le milieu de [RS].

(4) Miliosité de I

[67] Klamkin M. S., An Extension of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* vol. **38** (1965) 206-208.



- **Conclusion :** O est le milieu de [UV], [MN] et [RS].

(5) Une suite d'équivalence

O est le milieu de [UV]

si, et seulement si,

O est le milieu de [MN]

si, et seulement si,

O est le milieu de [RS]. [68]

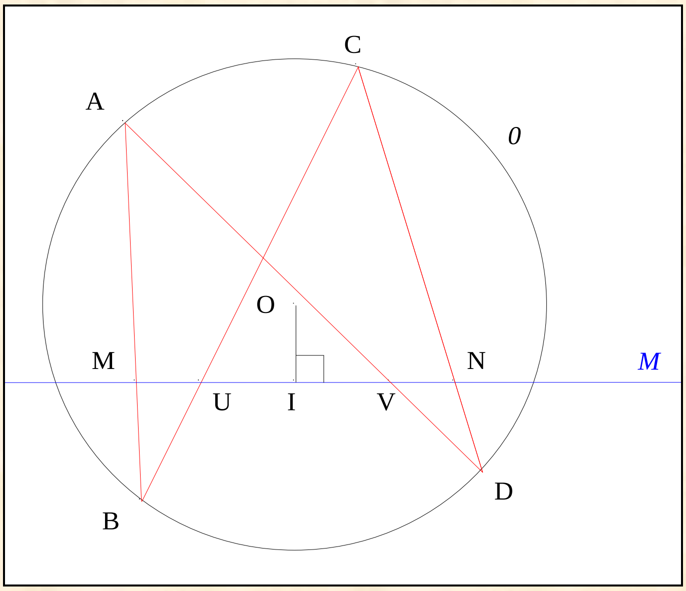
Commentaire : *M* va devenir une **sécante** à *0*.

2. Le papillon de Mackay

VISION

Figure :

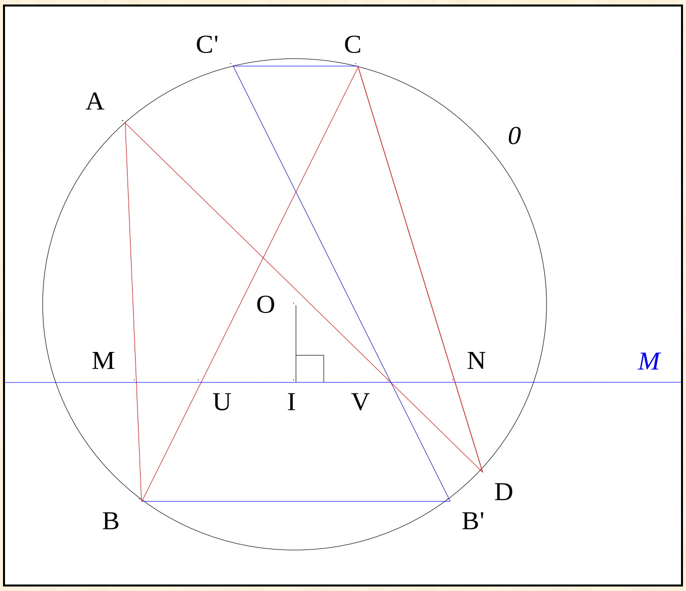
[68] Nicula V., *P.B.* **2**, Proving an angle, *Mathlinks* du 09/09/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=110196
circle and equal segments, *Mathlinks* du 20/04/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=144845



Traits : | |
---|---|---
| $\mathit{0}$ | un cercle,
| O | le centre de $\mathit{0}$,
| $\mathcal{M}$ | une **sécante** à $\mathit{0}$,
| I | le pied de la perpendiculaire à $\mathcal{M}$ issue O,
| U, V | deux points de $\mathcal{M}$ tels que I soit le milieu de [UV],
| ABCD | un papillon inscrit dans $\mathit{0}$ tel que les côtés [AD], [BC] passent resp. par V, U
et | M, N | les points d'intersection des côtés [AB], [CD] avec $\mathcal{M}$.

Donné : I est le milieu de [MN]. [69]

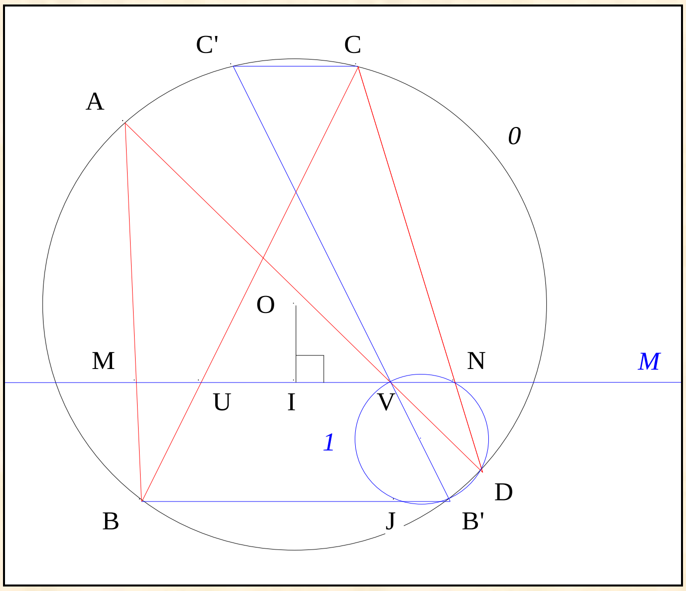
VISUALISATION



- Notons B' le second point d'intersection de la parallèle à $\mathcal{M}$ passant par B avec $\mathit{0}$
  et C' le second point d'intersection de la droite (B'V) avec $\mathit{0}$.

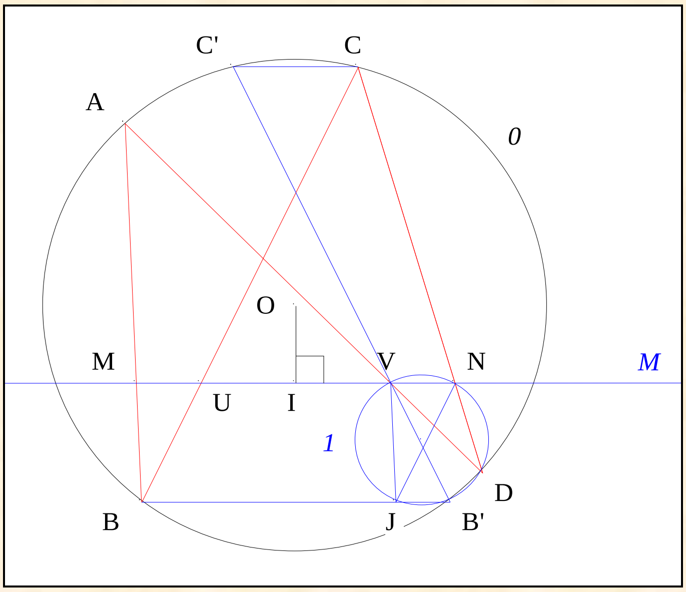
- **Scolie :** $\mathcal{M}$ // (CC').

[69] Mackay J. S., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **III** (1884-1885) 38.



- Le cercle *0*, les points de base D et B', les moniennes naissantes (CDN) et (C'B'V), les parallèles (CC') et (NV), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, B', D, N et V sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de la droite (BB') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et B', les moniennes (ADV) et (BB'J), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AB) // (VJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B' et D, les moniennes (BB'J) et (CDN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BC) // (JN).

- Les quadrilatères MBJV et UBJN étant des parallélogrammes, MV = BJ et BJ = UN ;
  par transitivité de la relation =, MV = UN ;
  par hypothèse, IV = IU ;
  par soustraction membre à membre de ces deux dernières égalités, IM = IN.

- **Conclusion :** I est le milieu de [MN].

Scolies : **(1)** la réciproque

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

si, I est le milieu de [MN] *alors*, I est le milieu de [UV].

(2) L'équivalence de MacKay

- **Conclusion :** I est le milieu de [UV] *si, et seulement si*, I est le milieu de [MN].

Note historique : la solution de ce papillon de John Sturgeon Mackay dans sera reprise par Roger Arthur Johnson[70] en 1929 dans *Modern Geometry*, et représentée par Murray S. Klamkin[71] en 1965.

(3) Nous avons

si, (OI) $\perp$ *M*

alors, { I est le milieu de [UV] *si, et seulement si*, I est le milieu de [MN] }.

(4) Une suite d'équivalence

(OI) $\perp$ *M*

si, et seulement si,

I est le milieu de [UV]

si, et seulement si,

I est le milieu de [MN].

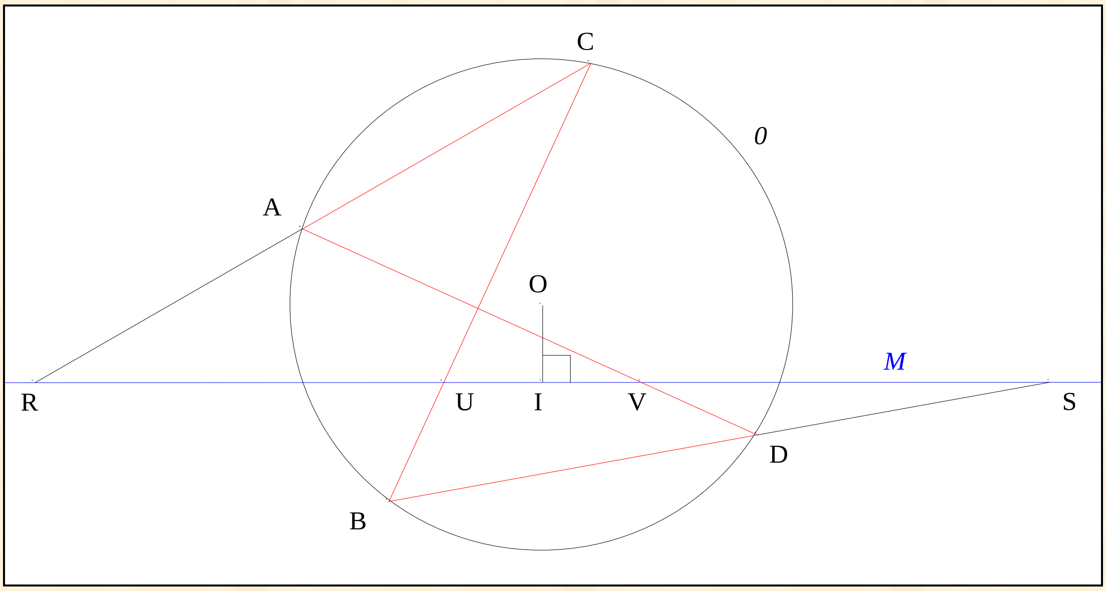
3. Le papillon complémentaire de Mackay

VISION

Figure :

[70] Johnson R. A, *Modern Geometry*, Houghton Mifflin, Boston (1929) 78 ;
reprinted as *Advanced Euclidean Geometry* by Dover, New York (1960) 78.

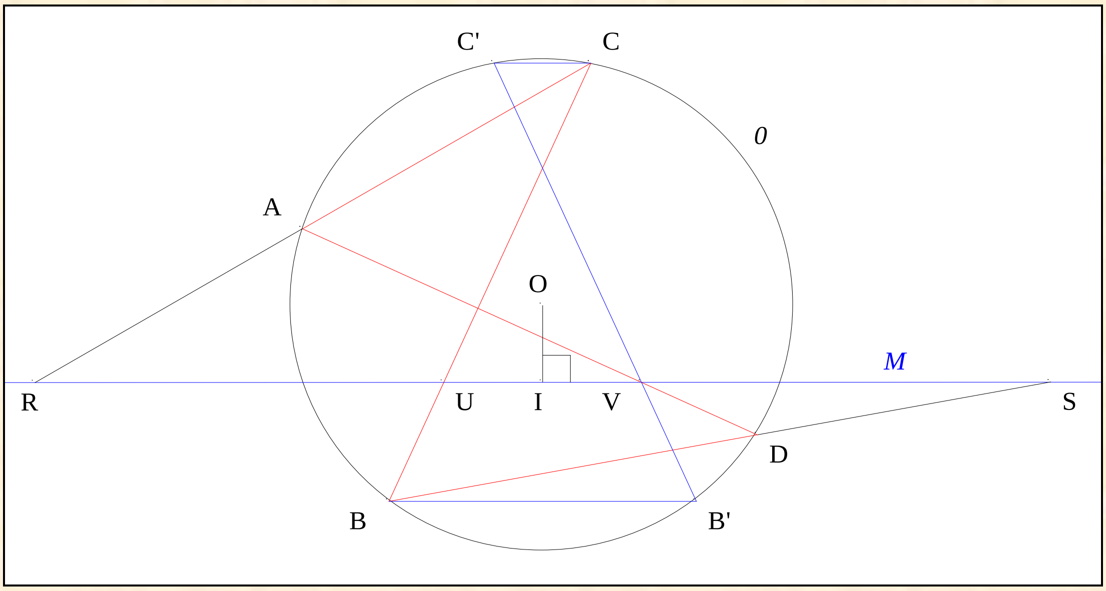
[71] Klamkin M. S., An Extension of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* vol. **38** (1965) 206-208.



Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
M une sécante à *0*,
I le pied de la perpendiculaire à *M* issue O,
U, V deux points de *M* tels que I soit le milieu de [UV],
ADBC un papillon inscrit dans *0* tel que les côtés [BC], [AD] passent par V, U
et R, S les points d'intersection de *M* resp. avec (AC), (BD).

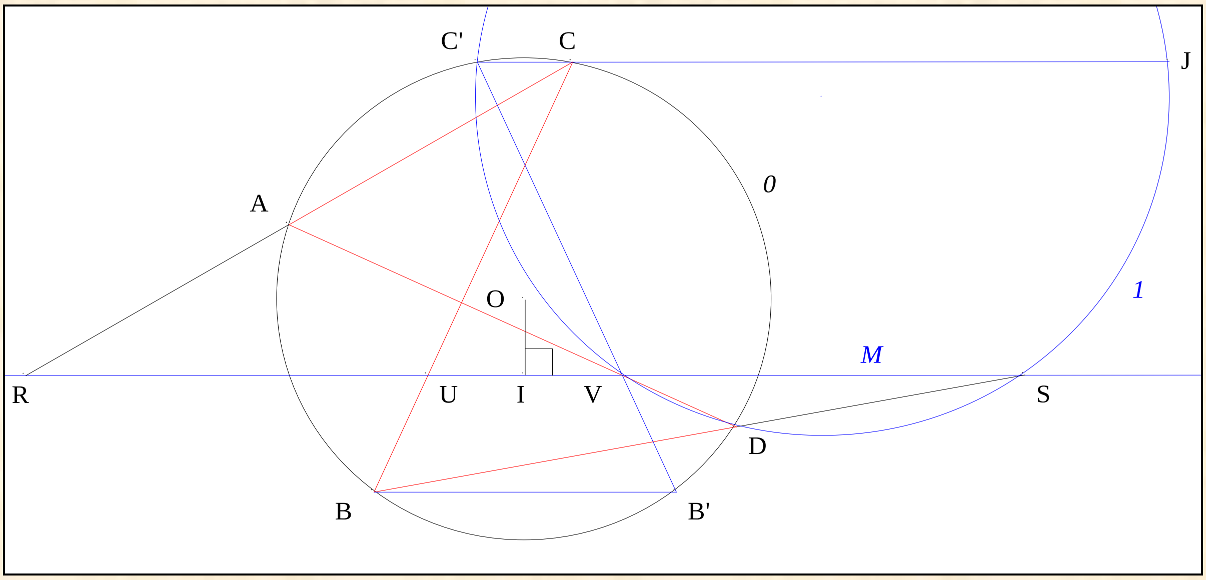
Donné : I est le milieu de [RS].

VISUALISATION



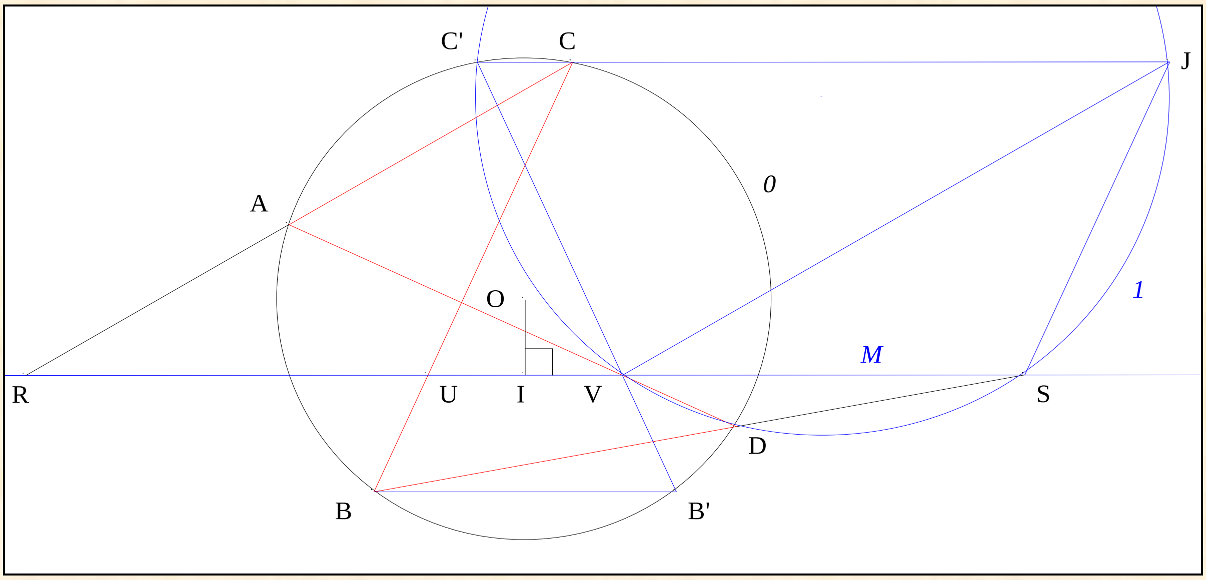
- Notons B' le second point d'intersection de la parallèle à *M* passant par B avec *0*
  et C' le second point d'intersection de la droite (B'V) avec *0*.

- **Scolie :** *M* // (CC').



- Le cercle *0*, les points de base C' et D, les moniennes naissantes (B'C'V) et (BDS), les parallèles (B'B) et (VS), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, C', D, S et V sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de la droite (BB') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et C', les moniennes (BDS) et (CC'J), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BC) // (SJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base C' et D, les moniennes (CC'J) et (ADI), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (CA) // (JI).

- Les quadrilatères VRCJ et USJC étant des parallélogrammes, VR = CJ et CJ = US ;
  par transitivité de la relation =, VR = US ;
  par hypothèse, VI = UI ;
  par soustraction membre à membre de ces deux dernières égalités, IR = IS.

- **Conclusion :** I est le milieu [RS].

Scolies : **(1)** la réciproque

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

si, I est le milieu [RS] *alors*, I est le milieu [UV].

(2) L'équivalence de Mackay

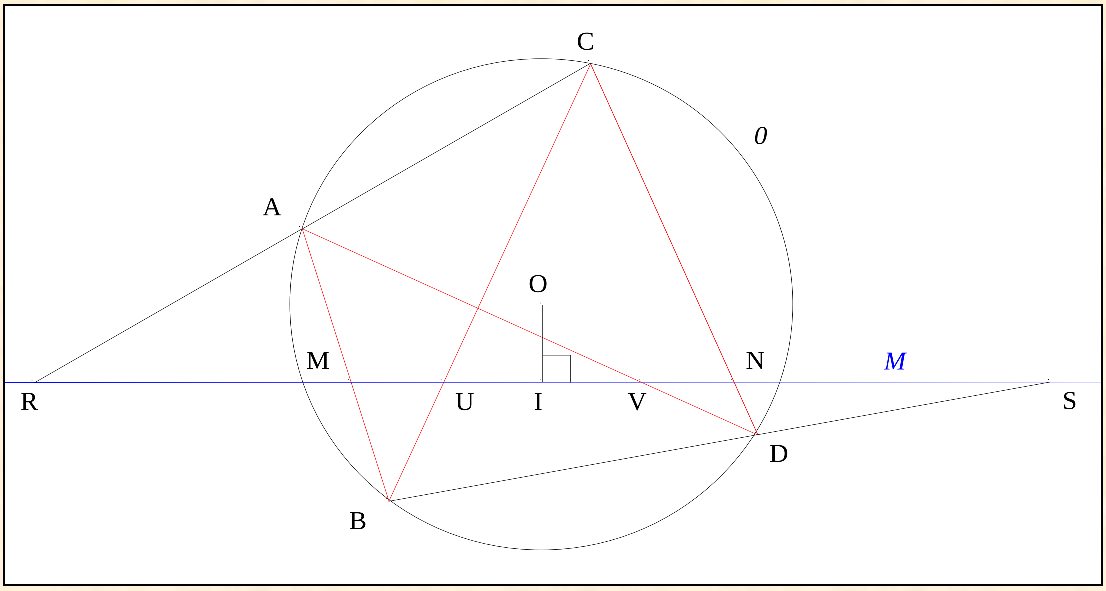
I est le milieu [UV] *si, et seulement si*, I est le milieu [RS].

(3) Nous avons

si, (OI) ⊥ *M*

alors, { I est le milieu de [UV] *si, et seulement si*, I est le milieu de [RS] }.

(4) Une suite d'équivalence



(OI) ⊥ *M*

si, et seulement si,

I est le milieu [UV]

si, et seulement si,

I est le milieu [MN]

si, et seulement si,

I est le milieu [RS].

Énoncé traditionnel :

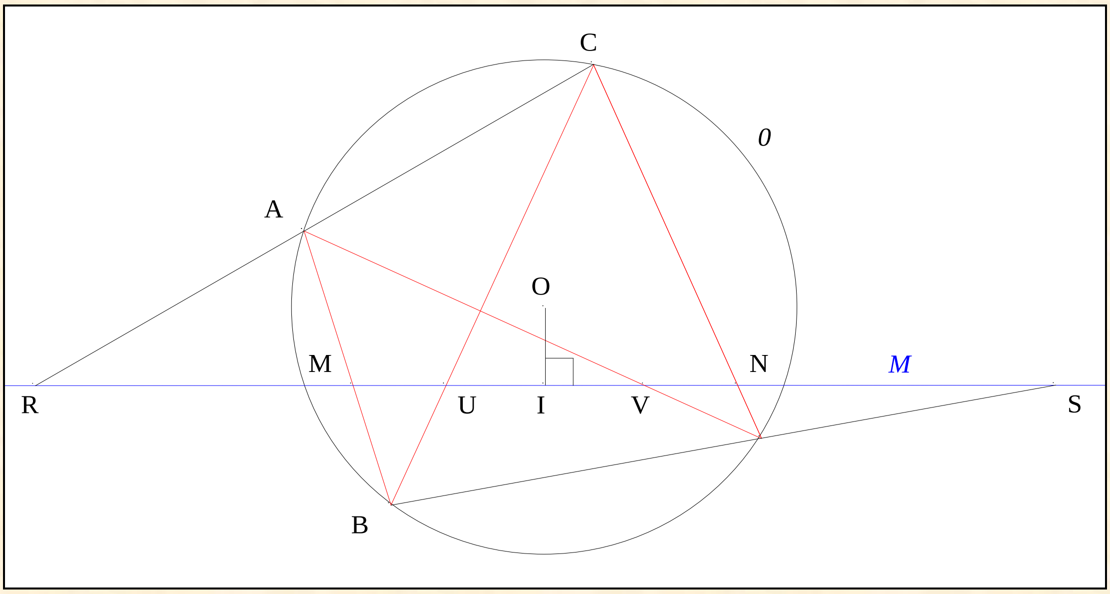
les angles opposés d'un quadrilatère inscrit
interceptent
des segments égaux sur la perpendiculaire menée du point de concours des diagonales,
sur la droite qui joint ce point au centre du cercle.

Commentaire : *M* va devenir une **droite extérieure** à *0*.

4. Une réciproque remarquable

VISION

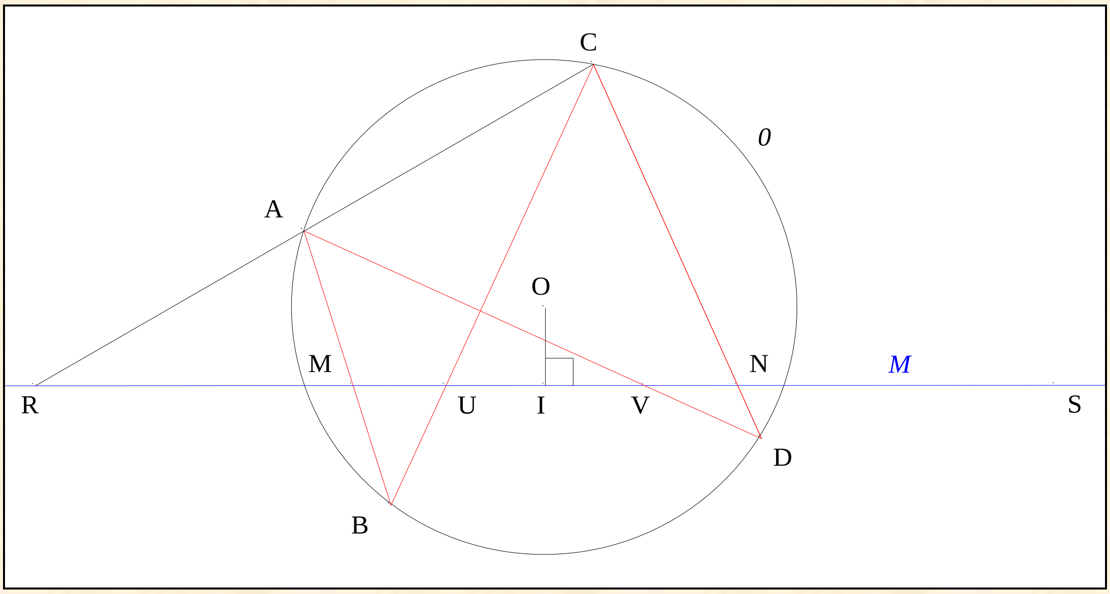
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
M une sécante à *0*,
I le pied de la perpendiculaire à *M* issue O,
U, R, M les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), AB),
et V, S, N les symétriques resp. de U, R, M par rapport à I.

Donné : (AV), (BS), (CN) concourent sur *0*.

VISUALISATION



- Notons D le second point d'intersection de (AV) avec *0*.
- D'après **C. 2.** Le papillon de MacKay, appliqué au papillon ABCD, (DC) passe par N.
- D'après **C. 3.** Le papillon complémentaire de MacKay, appliqué au papillon ABCD, (BD) passe par S.
- **Conclusion :** (AV), (BS), (CN) concourent sur *0*.

Commentaire : ce résultat est un cas particulier du théorème de Blaikie (Cf. Appendice **J. IV.3.**).

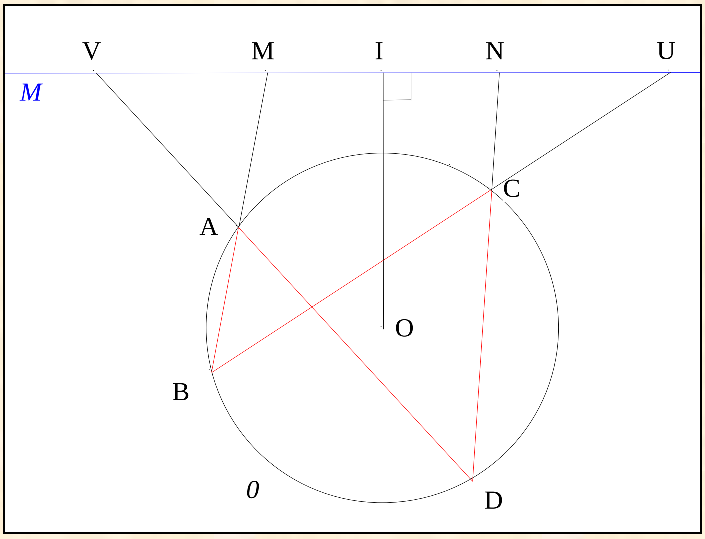
Note historique : une situation particulière a été présentée sur le site *Mathlinks*.[72]

5. Le papillon d'Igor Federovitch Sharygin

VISION

Figure :

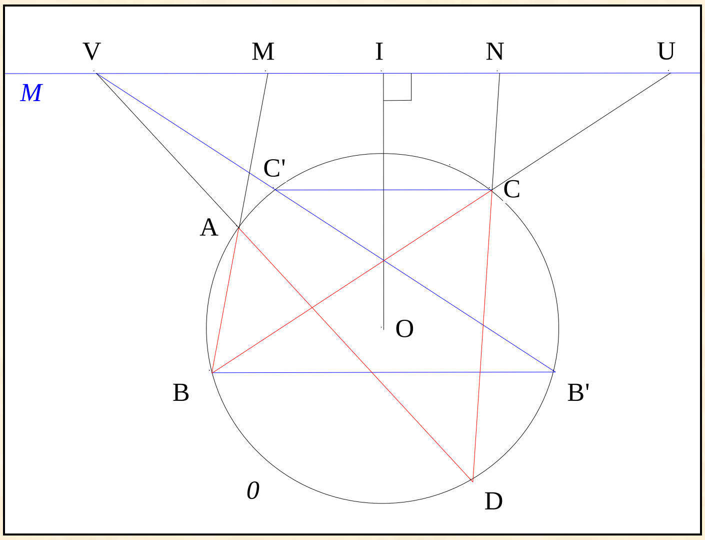
[72] OI and concurrency, *Mathlinks* du 22/12/2009 ; http ://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=320065



Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
M une **droite extérieure** à *0*,
I le pied de la perpendiculaire à *M* issue O,
U, V deux points de *M* tels que I soit le milieu de [UV],
ABCD un papillon inscrit dans *0* tel que les côtés [AD], [BC] passent resp. par V, U
et M, N les points d'intersection de [AB], [CD] avec *M*.

Donné : I est le milieu de [MN].[73]

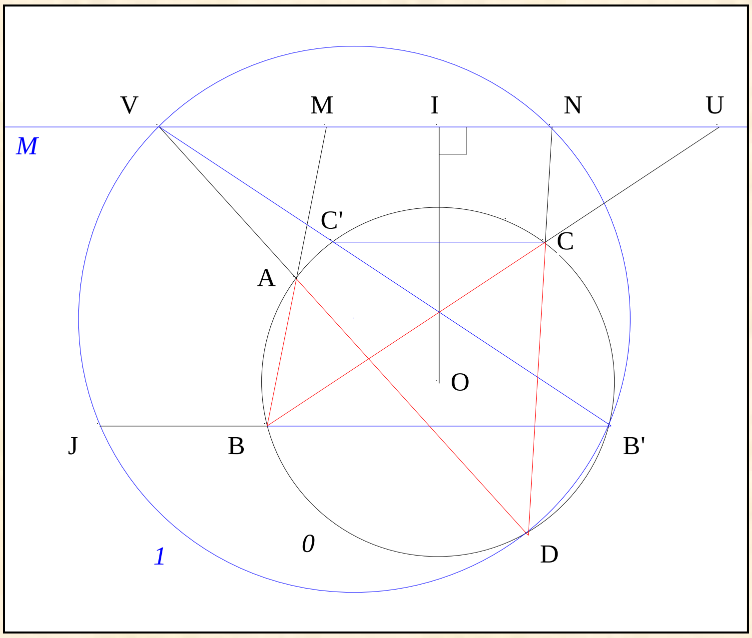
VISUALISATION



- Notons B' le second point d'intersection de la parallèle à *M* passant par B avec *0*
  et C' le second point d'intersection de (B'V) avec *0*.

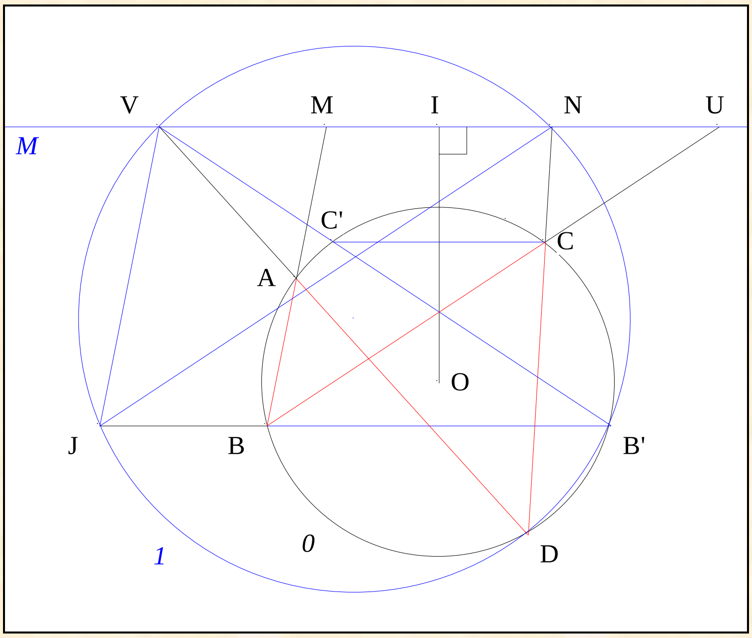
- **Scolie :** *M* // (CC').

[73] Sharygin I. F., *Problemas de geometria*, Éditions Mir, Moscou (1986) exercice **II** 186 p. 106.



- Le cercle *0*, les points de base D et B', les moniennes naissantes (CDN) et (C'B'V), les parallèles (CC') et (NV), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, B', D, N et V sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de (BB') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et B', les moniennes (ADV) et (BB'J), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AB) // (VJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B' et D, les moniennes (BB'J) et (CDN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BC) // (JN).

- Les quadrilatères MBJV et UBJN étant des parallélogrammes, MV = BJ et BJ = UN ;
  par transitivité de la relation =, MV = UN ;
  par hypothèse, IV = IU ;
  par soustraction membre à membre de ces deux dernières égalités, IM = IN.

- **Conclusion :** I est le milieu de [MN].

Scolies : **(1)** la réciproque

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

si, I est le milieu [MN] *alors*, I est le milieu [UV].

(2) L'équivalence de Mackay

I est le milieu [UV] *si, et seulement si*, I est le milieu [MN].

(3) Nous avons

si, (OI) $\perp$ *M*

alors, { I est le milieu de [UV] *si, et seulement si*, I est le milieu de [MN] }.

(4) Une suite d'équivalence

(OI) $\perp$ *M*

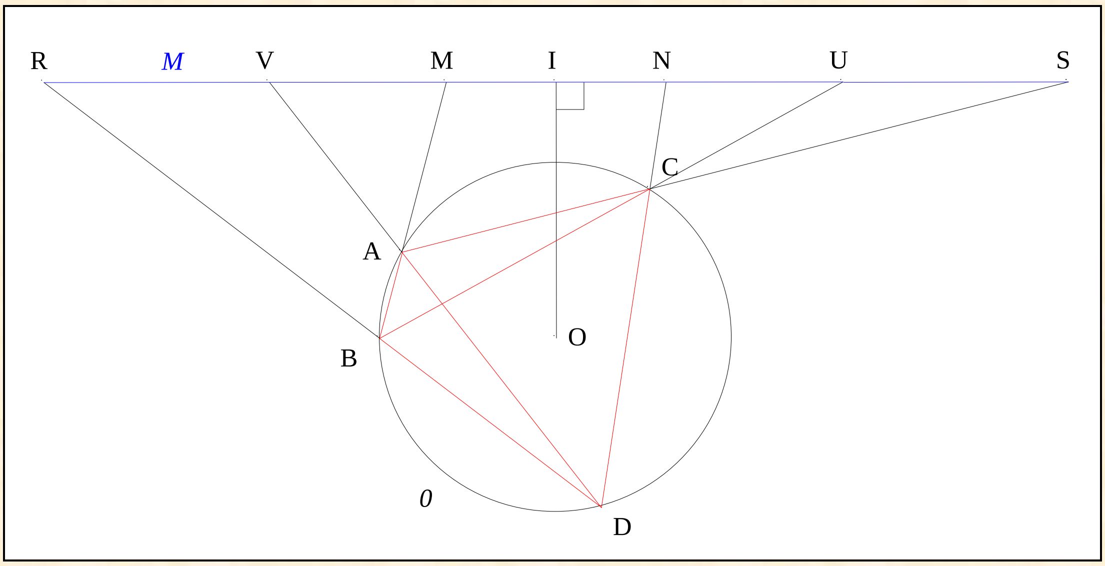
si, et seulement si,

I est le milieu de [UV]

si, et seulement si,

I est le milieu de [MN].

(5) Le papillon complémentaire d'Igor F. Sharygin



- Notons R, S les points d'intersection de (AC), (BD) avec *M*.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que I est le milieu de [RS].

(4) Une suite d'équivalence

(OI) ⊥ *M*

si, et seulement si,

I est le milieu de [UV]

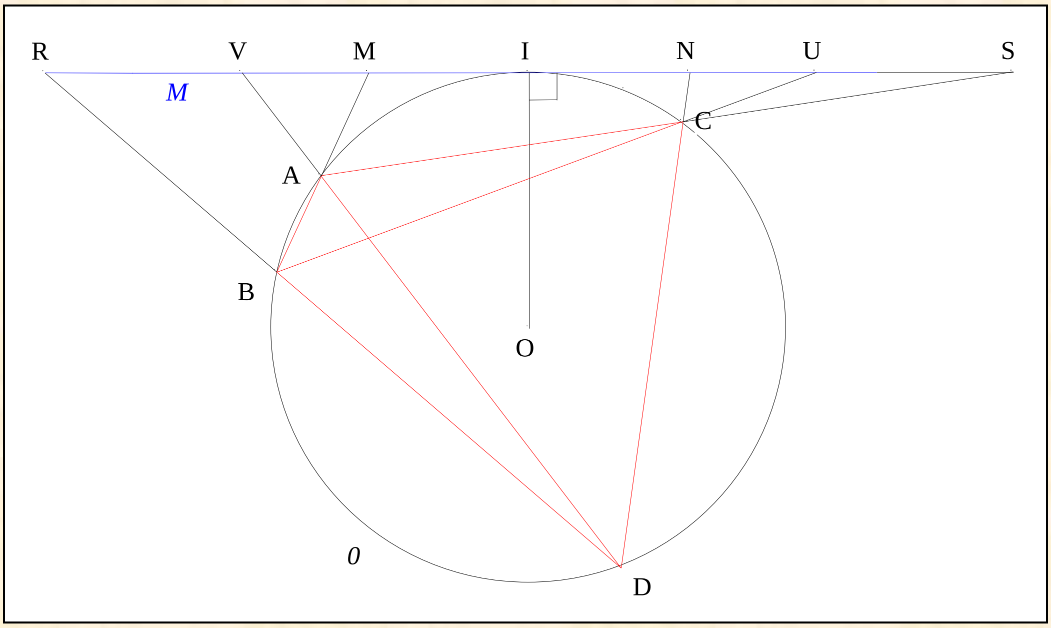
si, et seulement si,

I est le milieu de [MN]

si, et seulement si,

I est le milieu de [RS].

(5) Lorsque *M* est **tangente** au cercle *0* [74]



La démarche et les résultats précédents restent inchangés.
Lorsque deux sommets du papillon sont confondus, nous considérons la tangente en ce point et nous dirons que le papillon est "dégénéré". (voir **D. I. 3.)**

Note : le papillon d'Igor F. Sharygin a été proposé de nombreuses fois sur le site *Mathlinks.*[75]

---

[74] Equal segment, *Mathlinks* du 31/12/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=181191
Interesting property, *Mathlinks* du 18/04/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=200706
Like butterfly theorem, *Mathlinks* du 23/07/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=358474

[75] Generalization of Butterfly, *Mathlinks* du 03/01/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=181632
Butterfly's problem for exterior P wrt circle w (own ?!). , *Mathlinks* du 27/05/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=350742

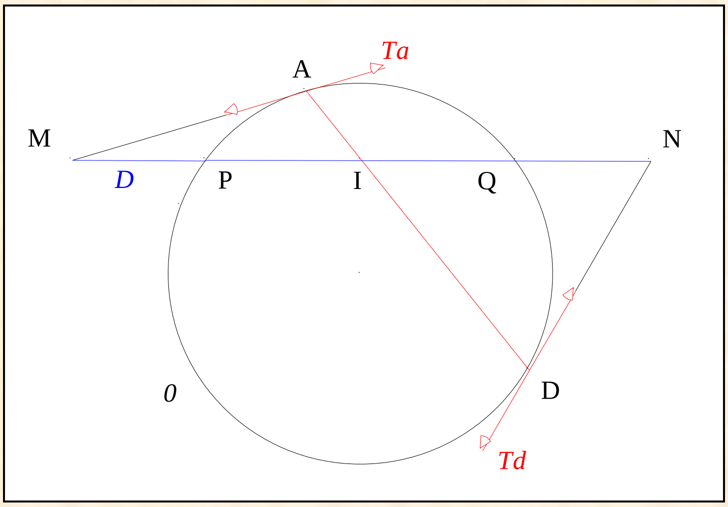
D. CURIOSITÉS

I. PAPILLONS DÉGÉNÉRÉS

1. Le papillon dégénéré de ?-Wallace

VISION

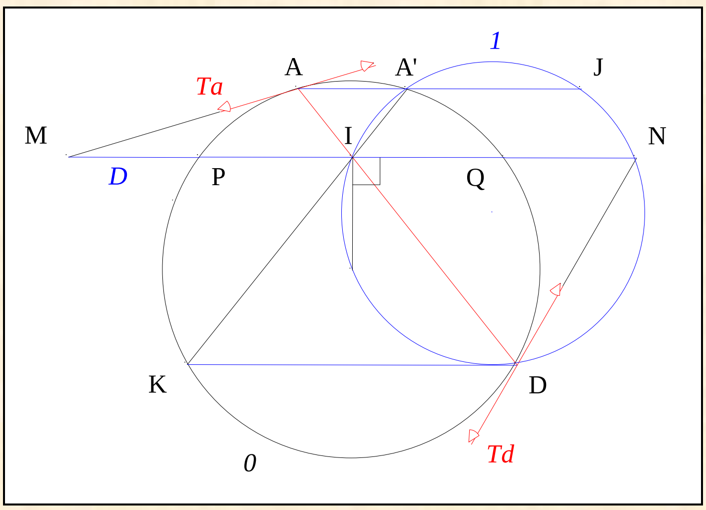
Figure :



Traits : *0* un cercle,
D une sécante à *0*,
P, Q les points d'intersection de *D* avec *0*,
I le milieu de [PQ],
AADD un papillon dégénéré inscrit dans *0* tel que le double côté [AD] passe par I,
Ta, *Td* les tangentes à *0* resp. en A, D,
et M, N les points d'intersection resp. de *Ta*, *Td* avec *D*.

Donné : I est le milieu de [MN].

VISUALISATION

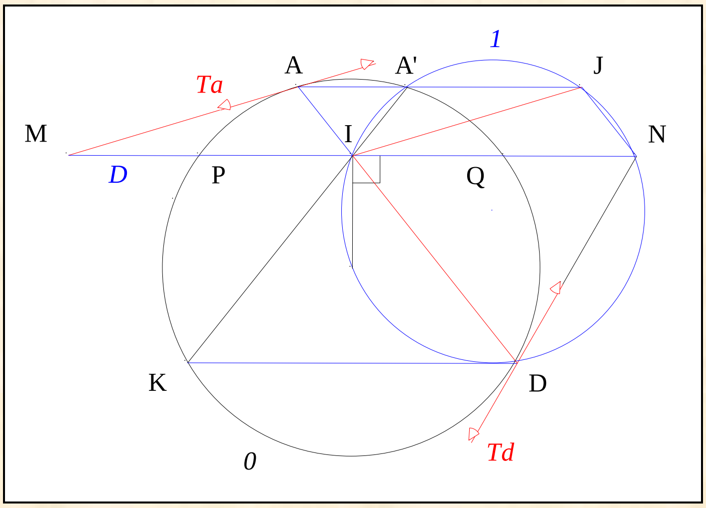


- Notons A' le second point d'intersection de la parallèle à (PQ) passant par A avec *0*
  et K le second point d'intersection de (A'I) avec *0*.

- **Scolie :** (PINQ) // (DK).

- Le cercle *0*, les points de base A' et D, les moniennes naissantes (IA'K) et *Td* = (NDD), les parallèles (KD) et (IN), conduisent au théorème **3** de Reim ; en conséquence, A', D, N et I sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle
  et J le second point d'intersection de la droite (AA') avec *1*.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et A', les moniennes (ADI) et (AA'J), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que *Ta* // (IJ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base A' et D, les moniennes (AA'J) et (DDN), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (AD) // (JN).

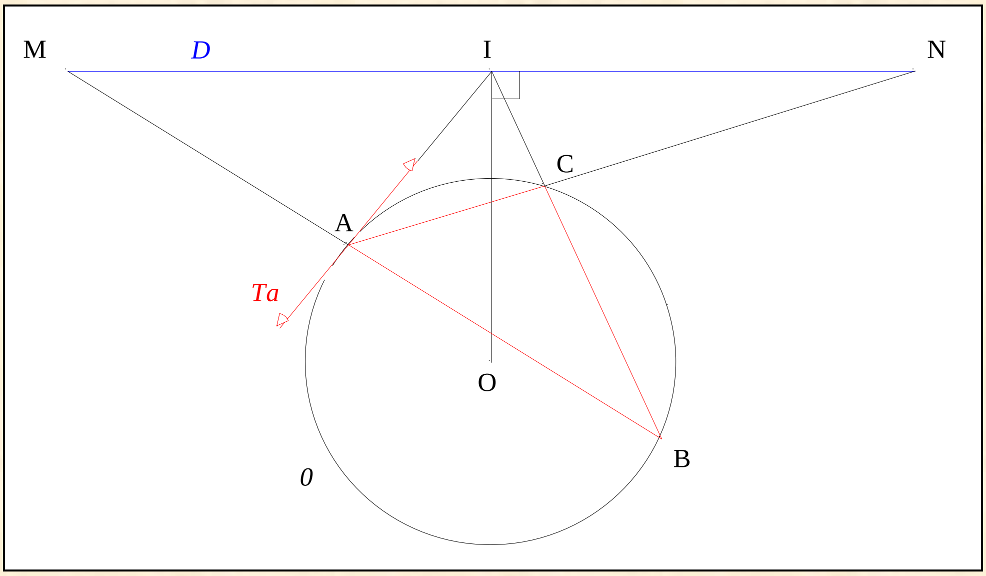
- Les quadrilatères MAJI et IAJN étant des parallélogrammes, MI = AJ et AJ = IN ; par transitivité de la relation = , MI = IN

- **Conclusion :** I est le milieu de [MN].

2. Le papillon dégénéré de H. S. M. Coxeter

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
Ta la tangente à *0* en A,
I le point d'intersection de *Ta* avec (BC),
D la perpendiculaire à (OI) en I,
et M, N les points d'intersection resp. de (AB), (AC) avec *D*.

Donné : I est le milieu de [MN].

VISUALISATION

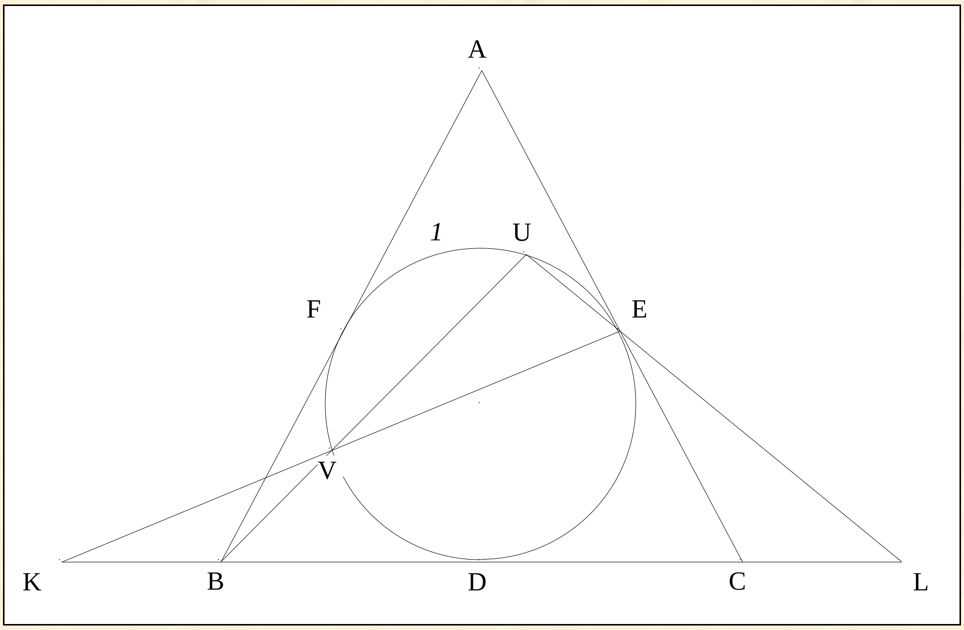
- **Scolie :** nous reconnaissons la situation **A. 4.** Le papillon de H. S. M. Coxeter dans le cas où A et D sont confondus.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que I est le milieu de [MN].

3. MEMO 2008, Single, Problem 3

VISION

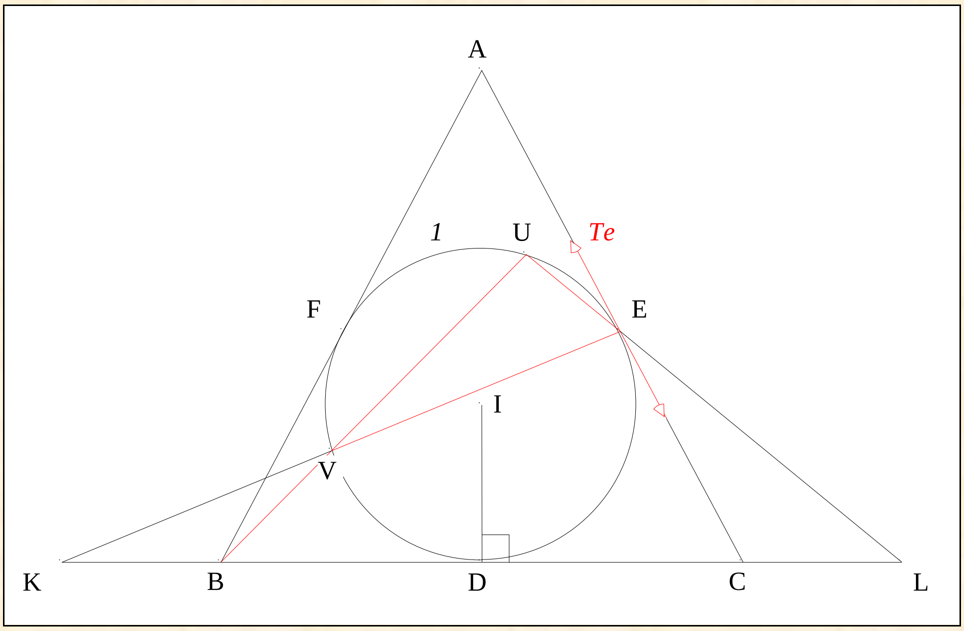
Figure :



Traits : ABC un triangle A-isocèle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
U un point de *1*,
V le second point d'intersection de (BU) avec *1*
et K, L les points d'intersection de (BC) resp. avec (EV), (UE).

Donné : DK = DL.[76]

VISUALISATION



- Notons I le centre de *1*
  et *Te* la tangente à *1* en E.

[76] Prove that DK = DL, MEMO 2008, Single, Problem 3, *Mathlinks* du 10/09/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=225453

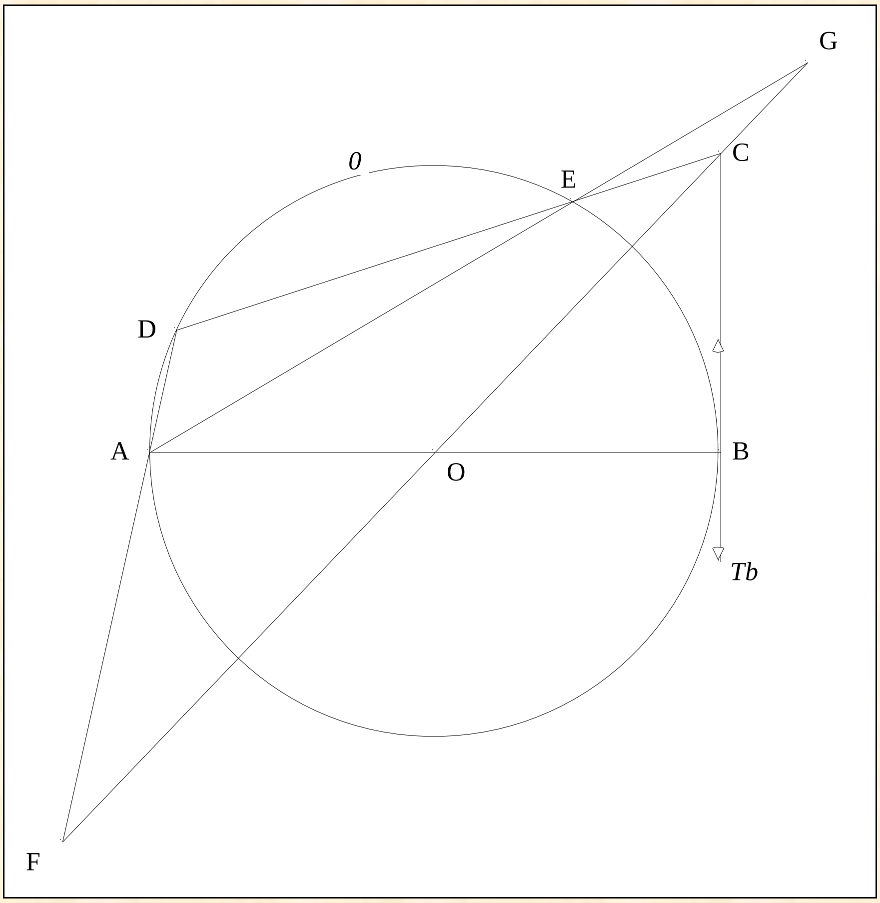
- **Scolies :** **(1)** (OI) ⊥ (BC)
  (2) DB = DC
  (3) *Te* = (AC).

- **Conclusion :** d'après **C. 4.** Le papillon dégénéré d'Igor Federovitch Sharygin, appliqué au papillon dégénéré EEUV, DK = DL.

4. Deux segments égaux

VISION

Figure :

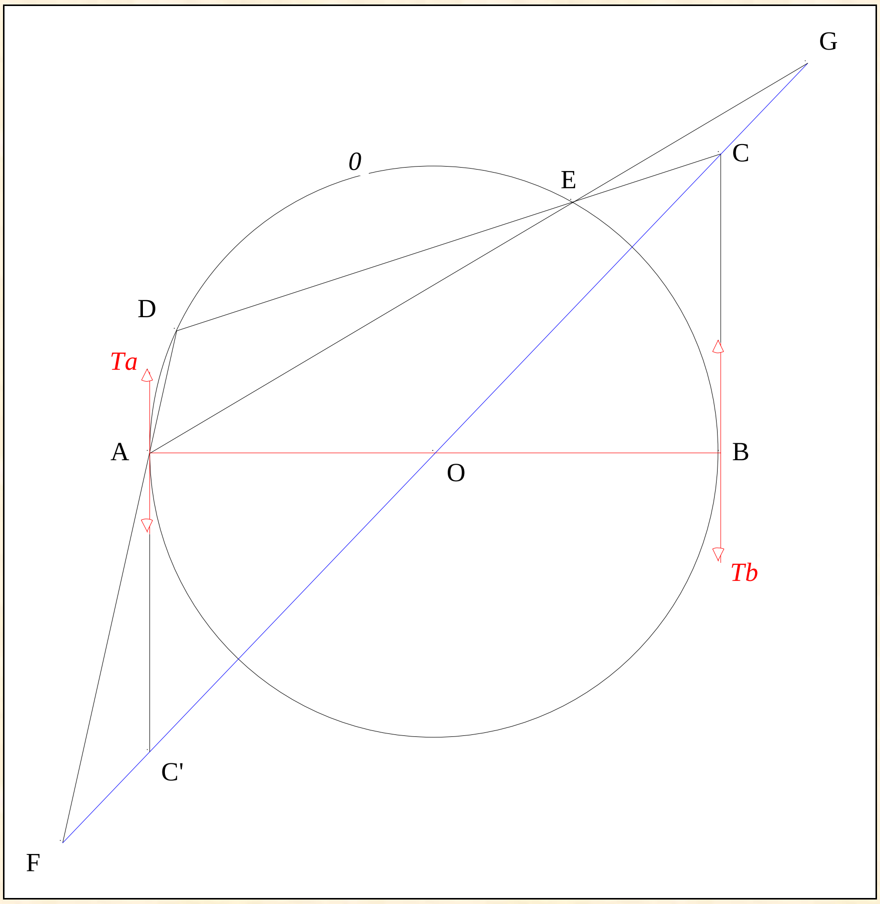


Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
[AB] un diamètre de *0*,
Tb la tangente à *0* en B,
D, E deux points de *0*,
C le point d'intersection de (DE) et *Tb*,
et F, G les points d'intersection de (OC) resp. avec (AD), (AE).

Donné : OF = OG.[77]

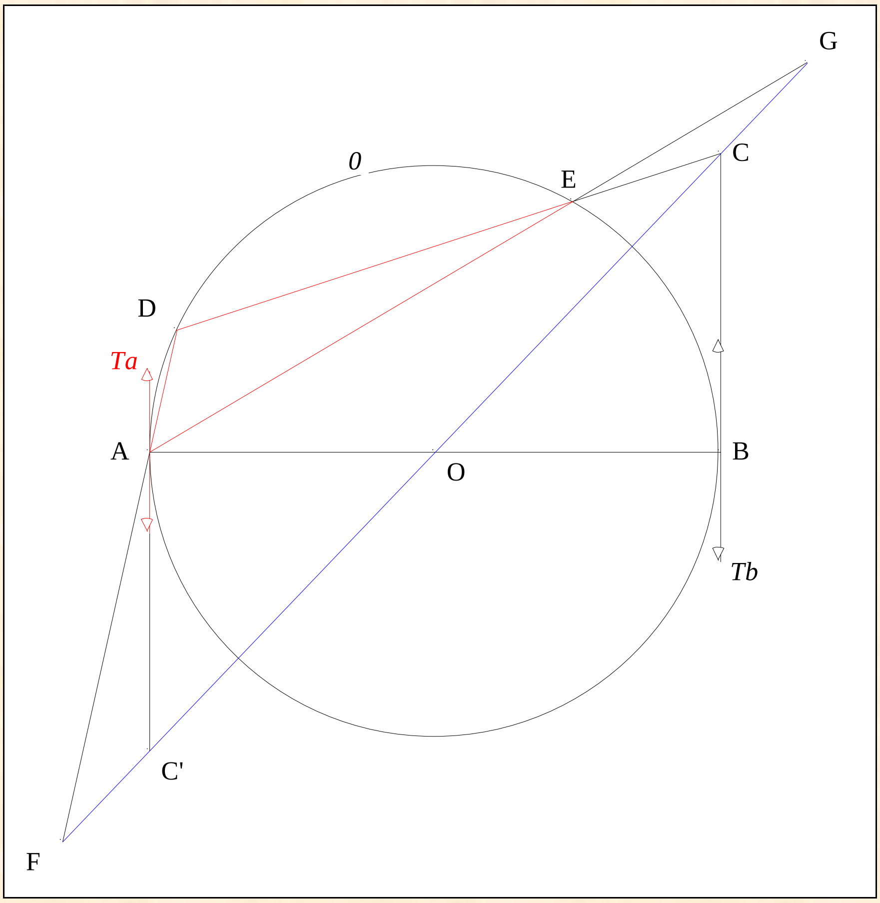
[77] Equal segments?, *Mathlinks* du 16/09/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=110996

VISUALISATION



- Notons *Ta* la tangente à *0* en A,
  et C' le point d'intersection de (AB) et *Tb*.

- D'après **D. I. 1.** Le papillon dégénéré de ?-Wallace, OC = OC'.

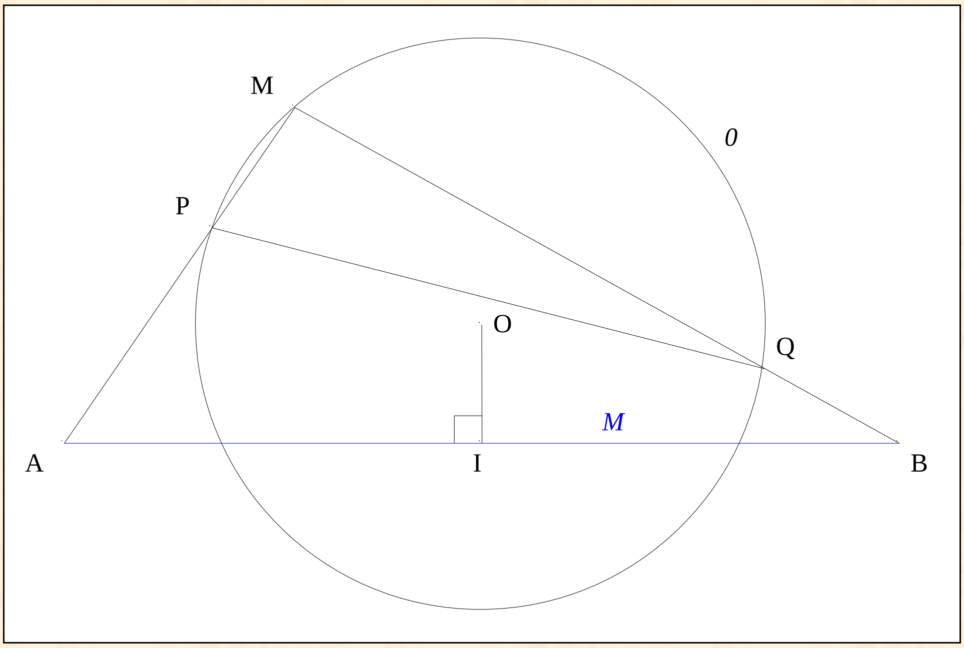


- **Conclusion :** d'après **D. I. 2.** Le papillon dégénéré de H. S. M. Coxeter, appliqué au papillon AAED, OF = OG.

5. Point fixe

VISION

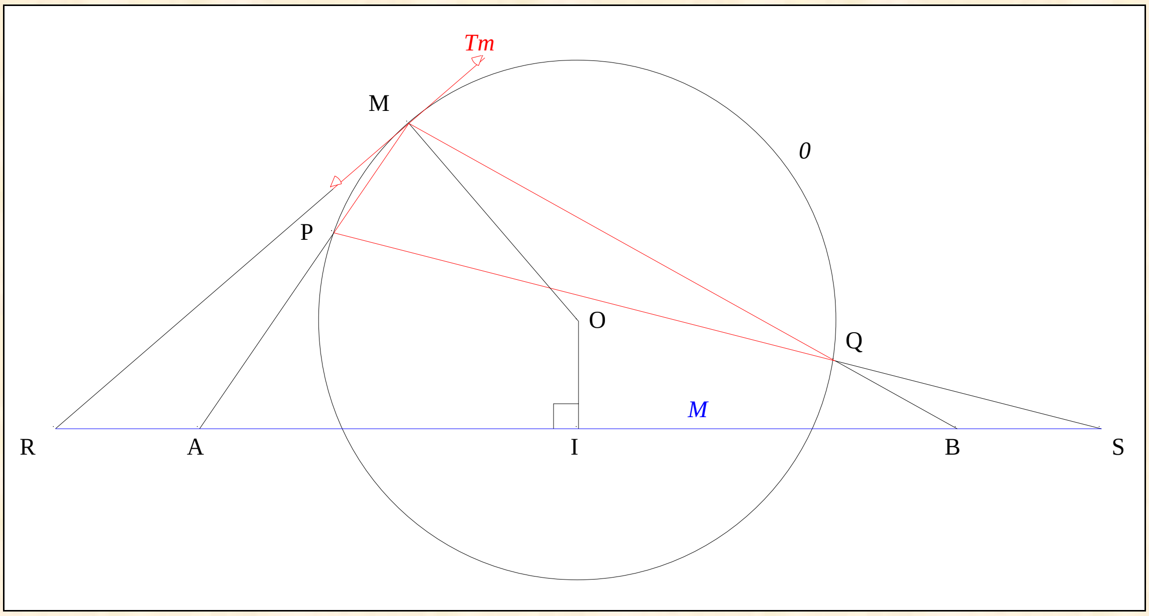
Figure :



Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
M une sécante à *0*,
I le pied de la perpendiculaire à *M* passant par O,
A un point variable de *M*
B le symétrique de A par rapport à I,
M un point fixe de *0*,
et P, Q les points d'intersection resp. de (MA), (MB) avec *0*.

Donné : (PQ) passe par un point fixe.[78]

VISUALISATION



- Notons *Tm* la tangente à *0* en M,

[78] fix point, *Mathlinks* du 06/09/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=109772

et R, S les points d'intersection de (BC) resp. avec *Tm*, (PQ).

- D'après **D. I. 2.** Le papillon dégénéré de H. S. M. Coxeter,
  appliqué au papillon MMPQ, IR = IS.

- R étant un point fixe, S est un point fixe.

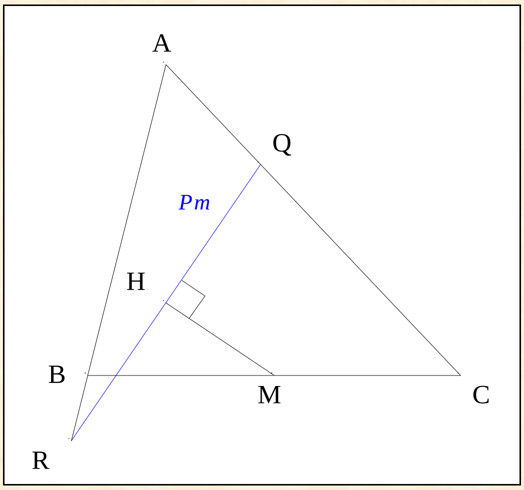
- **Conclusion :** (PQ) passe par un point fixe.

II. PAPILLONS APTÈRES

1. Un exercice d'Oleg Faynsteyn

VISION

Figure :

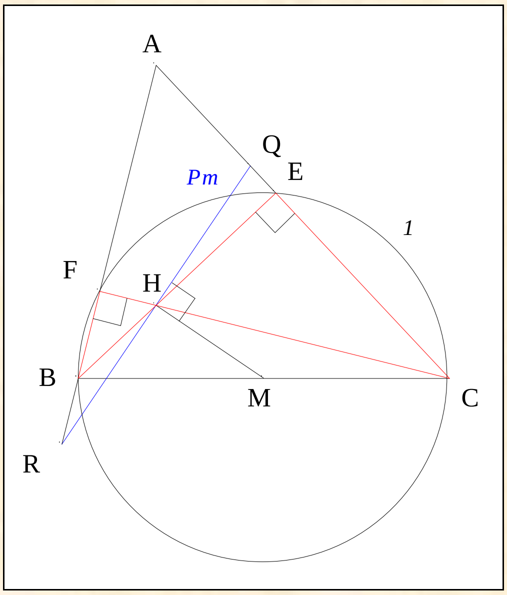


Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
M le milieu de [BC],
Pm la perpendiculaire à (MH) en H
et Q, R les intersection de *Pm* resp. avec (AC), (AB).

Donné : H est le milieu de [QR]. [79]

VISUALISATION

[79] Faynsteyn O., *Elemente der Mathematik*, problème **1180** ; solution, *Elemente der Mathematik*, **1**/**58** (2003).



- Notons E, F les pieds des B, C-hauteurs de ABC
  et *1* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par E et F.

- **Conclusion :** d'après **A. 3.** Le problème complémentaire de Howard W. Eves appliqué au quadrilatère cyclique BECF, croisé en H, H est le milieu de [QR].

Commentaire : la solution[80] proposée dans la revue suisse *Elemente der Mathematik* est trigonométrique.

Note historique : Oleg Faynsteyn est originaire de Leipzig (Allemagne).
Rappelons que cette question avait déjà été posée aux Olympiades Mathématiques de St-Petersbourg (Russie) en 1995-96.

Note : ce problème a été proposé de nombreuses fois sur le site *Mathlinks*.[81]

2. Une variante de l'exercice d'Oleg Faynsteyn

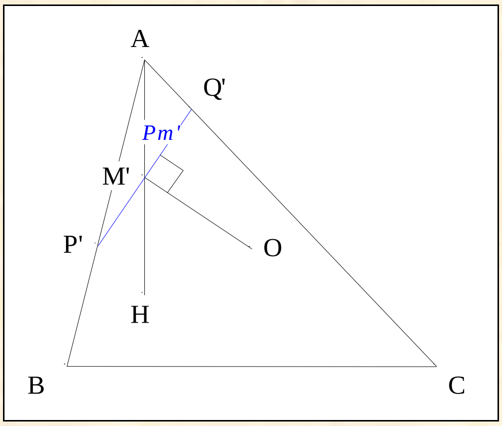
VISION

Figure :

---

80 *Elemente der Mathematik* **1** (2003) 58.

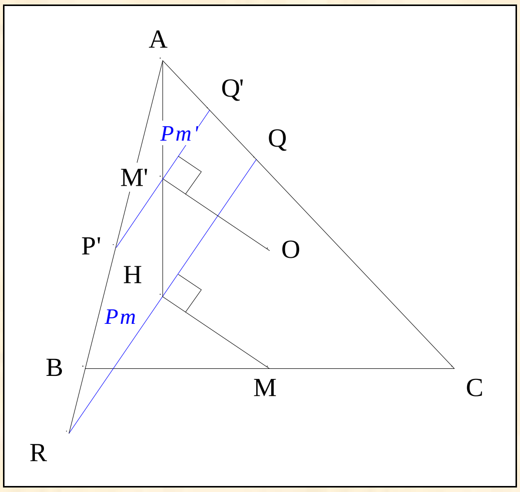
81 may be difficult.....help me ...... as quickly as possible, *Mathlinks* du 05/08/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=192515
Prove HE = HF, *Mathlinks* du 23/02/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=260415



Traits : ABC un triangle acutangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
H l'orthocentre de ABC,
M' le milieu de [AH],
Pm' la perpendiculaire à (OM') en M'
et Q', R' les intersection de *Pm'* resp. avec (AC), (AB).

Donné : M' est le milieu de [Q'R'].[82]

VISUALISATION



- Notons M le milieu de [BC],
  Pm la perpendiculaire à (MH) en H
  et Q, R les intersection de *Pm* resp. avec (AC), (AB).

- D'après **II. 1.** Un exercice d'Oleg Faynsteyn**,** H est le milieu de [QR].

- Nous avons : (OM) ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (AH) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OM) // (AH).

- D'après Carnot "Une relation" (Cf. Annexe **1**), OM = M'H ;
  en conséquence, le quadrilatère OMHM' est un parallélogramme.

- Par hypothèse, *Pm'* ⊥ (OM')

[82] Circle and equal segments - tst for JBMO , Romany - 2010, *Mathlinks* du 11/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=377228
Mp=mq, *Mathlinks* du 25/01/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=388320

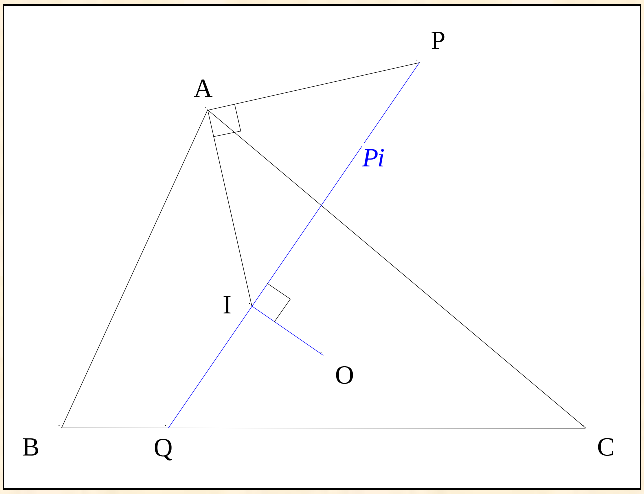
OMHM' étant un parallélogramme,	(OM') // (HM) ;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,	*Pm'* $\perp$ (HM) ;
par construction,	(HM) $\perp$ *Pm* ;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,	*Pm'* // *Pm* ;
en conséquence,	le quadrilatère QRR'Q' est un trapèze.

- **Conclusion :** d'après le trapèze complet (Cf. Annexe **2**), M' est le milieu de [Q'R'].

3. Une perpendiculaire à (OI)

VISION

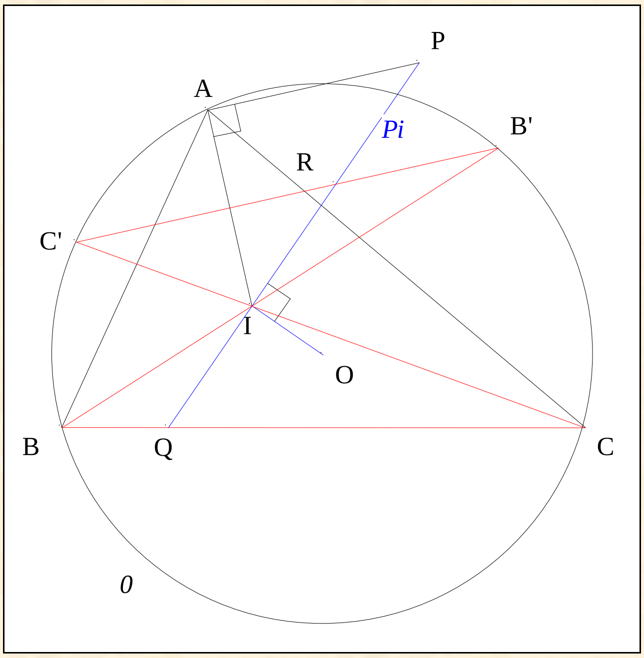
Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
I le centre de ABC,
Pi la perpendiculaire à (OI) en I,
P le point d'intersection de *Pi* avec la perpendiculaire à (AI) en A
et Q le point d'intersection de *Pi* avec (BC).

Donné : IP = 2.IQ.

VISUALISATION



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC,
  B', C' les seconds points d'intersection resp. de (BI), (CI) avec *0*
  et R le point d'intersection de (B'C') et (PQ).

- D'après **A. 1.** Le problème de **?**-Wallace, appliqué au papillon BCC'B', IR = IQ.

- **Scolie :** la A-bissectrice extérieure.

- Nous savons que (B'C') ⊥ (AI) ;
  (AI) étant la A-bissectrice intérieure de ABC, (AI) ⊥ (AP) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (B'C') // (AP).

- D'après "Un cercle de Mention" (Cf. Annexe **3**), (B'C') est la médiatrice de [AI].

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AIP, IP = 2.IR.

- **Conclusion :** par substitution, IP = 2.IQ.

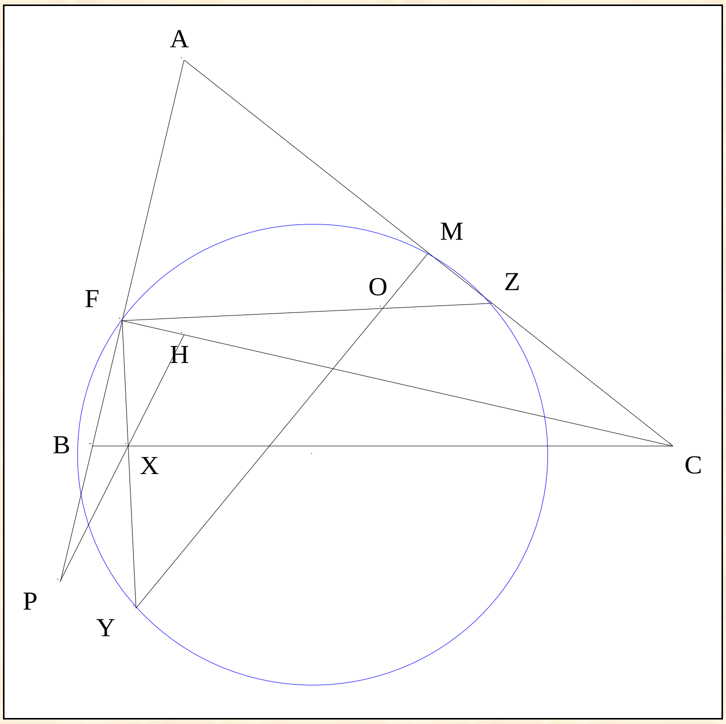
Note : ce problème a été proposé de nombreuses fois sur le site *Mathlinks*.[83]

4. Balkan Mathematical Olympiad 2008 Problem 1

VISION

Figure :

[83] 2 :1, *Mathlinks* du 01/08/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=160902

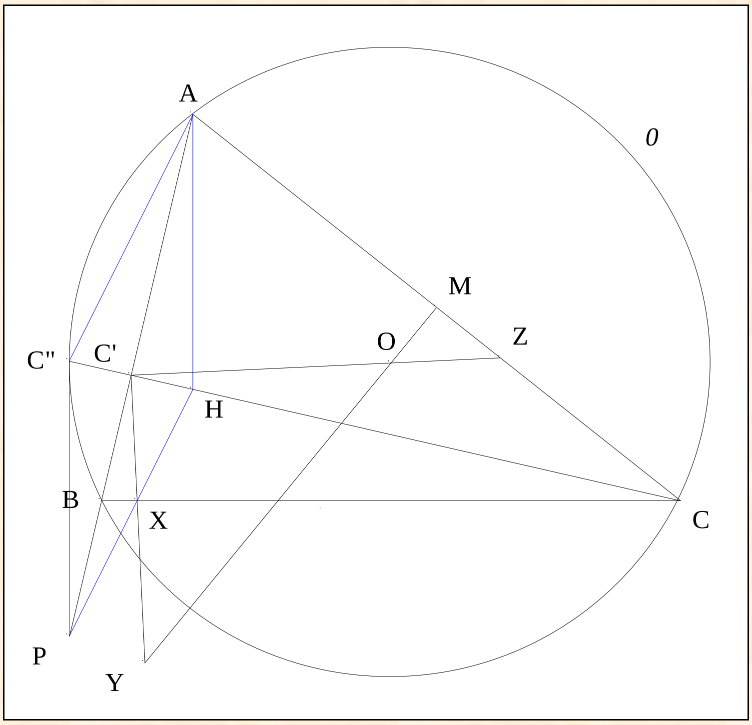


Traits :	ABC	un triangle acutangle tel que BC < AC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	C'	le pied de la C-hauteur de ABC,
	P	le symétrique de A par rapport à C',
	X	le point d'intersection de (C'X) et (OM),
	Y	le point d'intersection de (HP) et (BC),
et	Z	le point d'intersection de (OC') et (BC).

Donné : C', M, Y et Z sont cocycliques. [84]

VISUALISATION

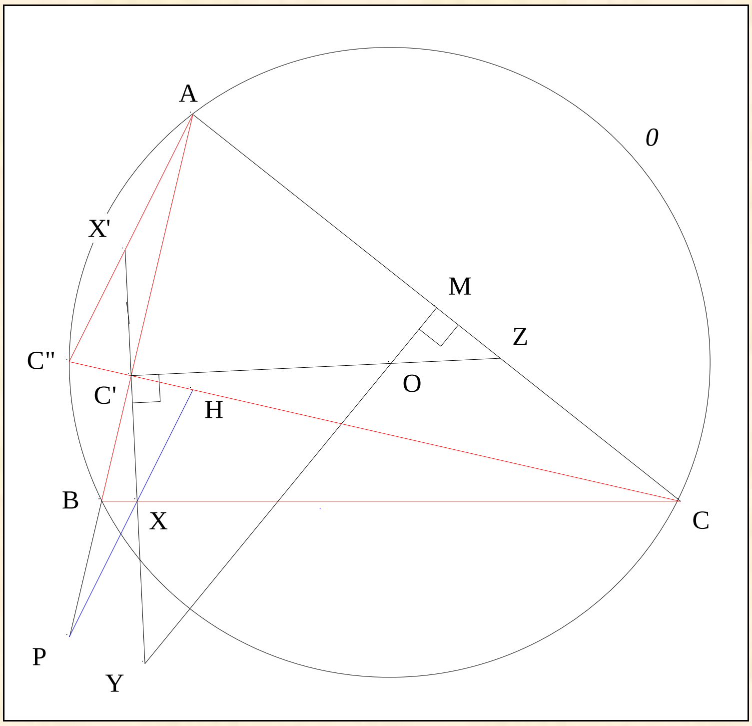
[84] non-trivial first problem :) 4 concyclic points, Balkan Mathematical Olympiad 2008 Problem 1, *Mathlinks* du 06/05/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=203653



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  et C'' le second point d'intersection de (CH) avec *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", C' est le milieu de [C"H].

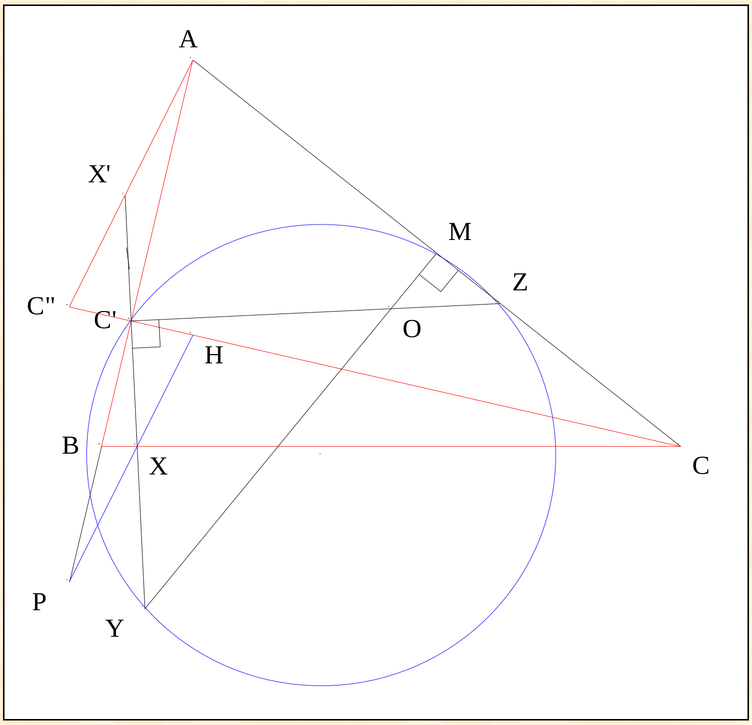
- C' étant le milieu de [AP], le quadrilatère AC"PH est un parallélogramme.



- Notons X' le symétrique de X par rapport à C'.

- **Scolies :** **(1)** X' est sur (AC")
  (2) (OM) ⊥ (AC).

- D'après **A. 2.** L'équivalence du papillon, appliqué au papillon ABCC", (OC') ⊥ (XC').

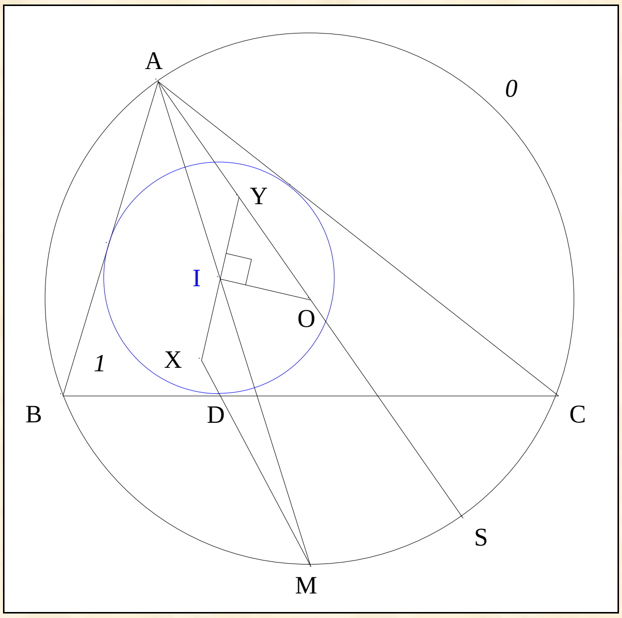


- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", C', M, Y et Z sont cocycliques.

5. An application of the butterfly property

VISION

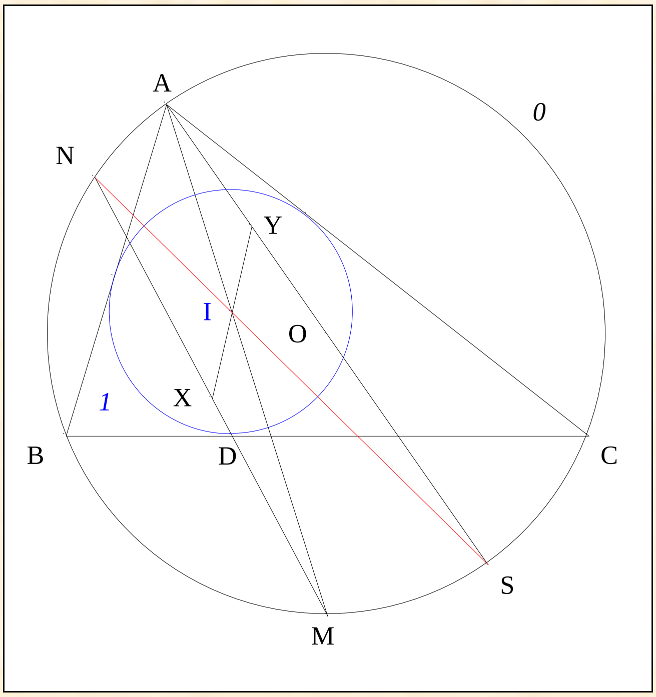
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
D le point de contact de *1* avec (BC),
M, S les seconds points d'intersection de (AI), (AO) avec *0*
et X, Y deux points resp. de (DM), (AS) tels que I soit sur (XY)

Donné : I est le milieu de [XY] *si, et seulement si,* (OI) est perpendiculaire à (XY).[85]

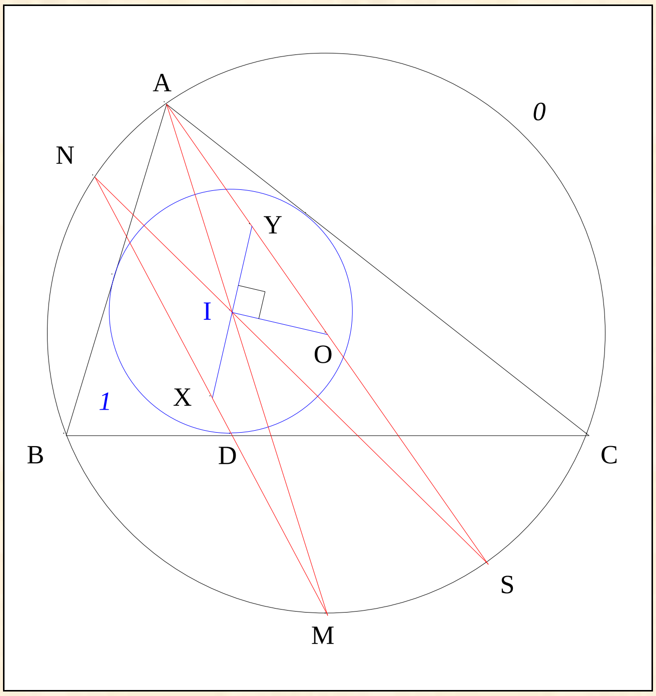
VISUALISATION



- Notons A* le premier A-perpoint de ABC
  et N le second point d'intersection de (MD) avec *0*.

- D'après "Intersection sur le cercle circonscrit" (Cf. Appendice **J. III.**), S, I et N sont alignés.

[85] An application of the butterfly property, *Mathlinks* du 29/04/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=347299

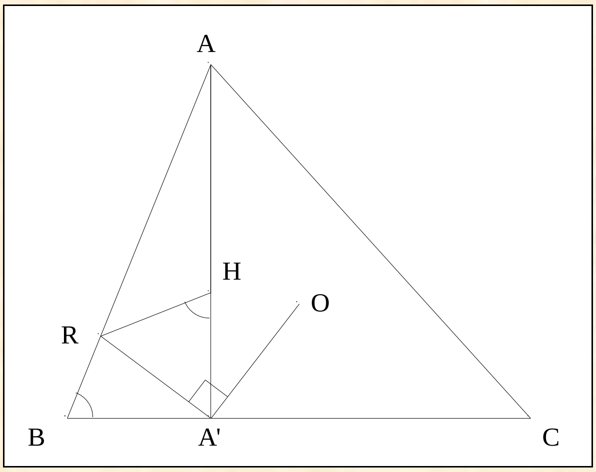


- **Conclusion :** d'après **A. 2.** L'équivalence du papillon, appliqué au papillon ASNM
  I est le milieu de [XY] *si, et seulement si*, (OI) est perpendiculaire à (XY).

6. IMO Shortlist 1996 problem G3

VISION

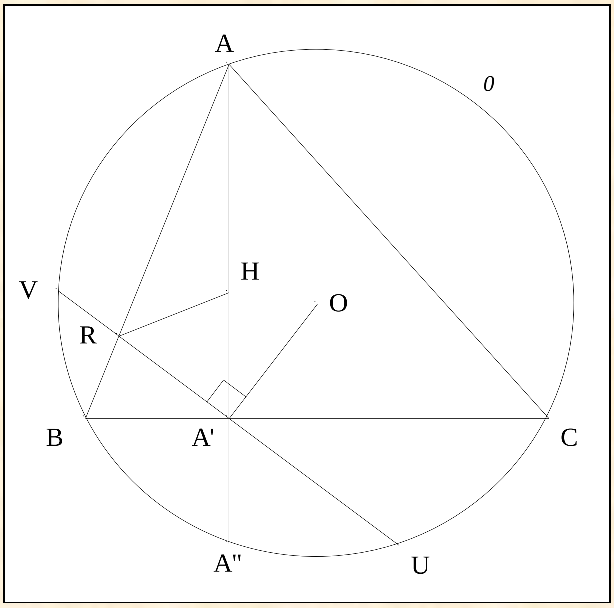
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle tel que AB < AC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
H l'orthocentre de ABC,
A' le pied de la A-hauteur de ABC,
Pa' la perpendiculaire à (OA') en A'
et R le point d'intersection de *Pm* et (AB).

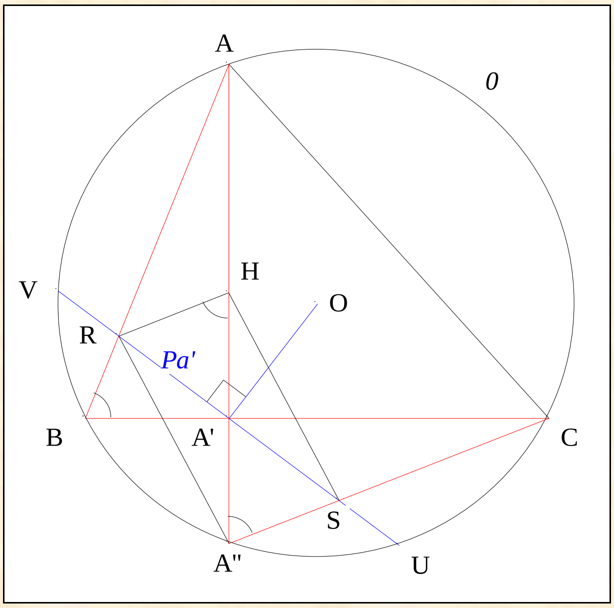
Donné : <RHA' = <CBA.[86]

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  U, V les points d'intersection de *Pa'* avec *0*
  et A" le second point d'intersection de (AH) avec *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", A' est le milieu de [A"H].



- Notons S le point d'intersection de (A"C) et (UV).

86 I need some pure geometry :)), *Mathlinks* du 03/09/2003 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=1133
Mongolian TST 2008, Day1 Problem 1, *Mathlinks* du 12/05/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=204495
Prove that <BAC = <EHD, *Mathlinks* du 23/11/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=313866

- D'après **A. 1.** Le problème de **?**-Wallace,
  appliqué au papillon AA"CBA, A' est le milieu de [RS] ;
  en conséquence, le quadrilatère A"SHR est un parallélogramme et (A"SC) // (HR).

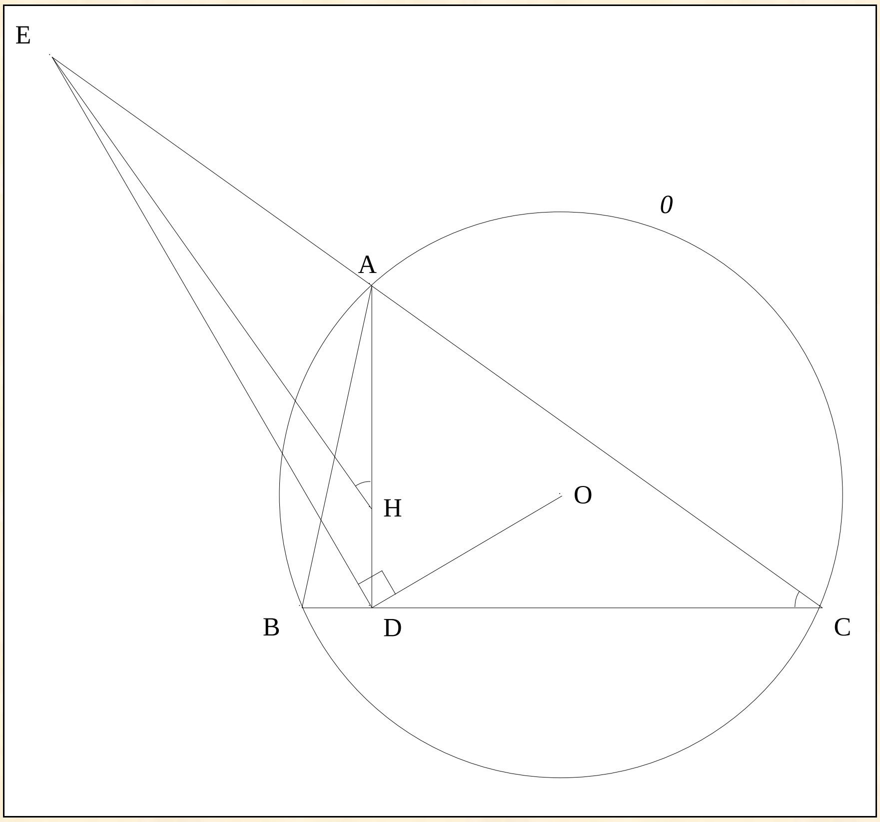
- Une chasse angulaire à Π près :
  nous avons <RHA' = <RHA" ;
  par le théorème "Angles alternes-internes", <RHA" = <SA"H ;
  par extension, <SA"H = <CA"A ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <CA"A = <CBA.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <RHA' = <CBA.

7. Une variante de IMO Shortlist 1996 problem G3

VISION

Figure :



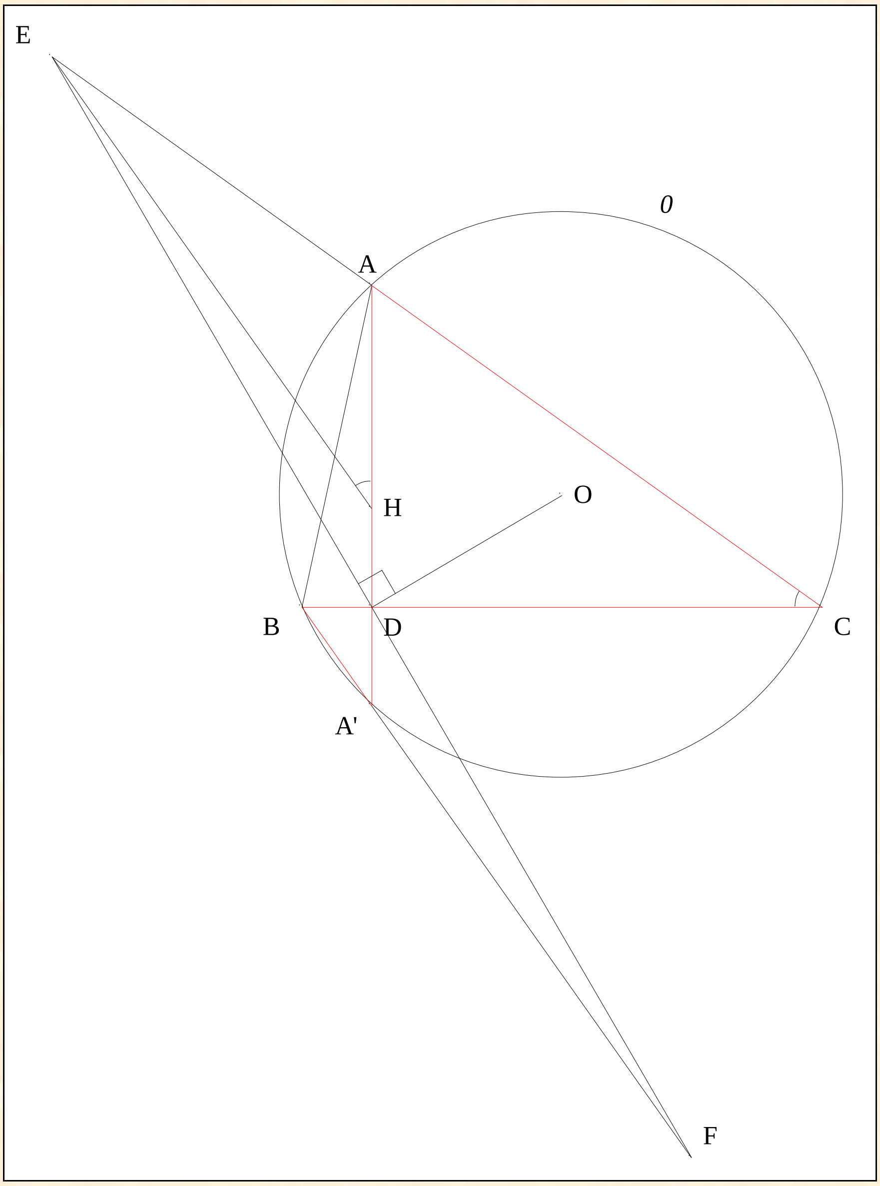
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
H l'orthocentre de ABC,
et E le point de (AC) tel que (DE) ⊥ (DO).

Donné : <DHE = <ACB.[87]

---

87 nice, *Mathlinks* du 11/05/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=204334

VISUALISATION



- Notons F le point d'intersection de (DE) et (BA').
- D'après **A. 3.** Le papillon complémentaire de Eves, appliqué au papillon ACBA', DE = DF.
- Le quadrilatère EHFA' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (HE) // (BA'F).
- Une chasse angulaire à Π près
  par parallélisme, <DHE = <AA'B ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <AA'B = <ACB.
- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <DHE = <ACB.

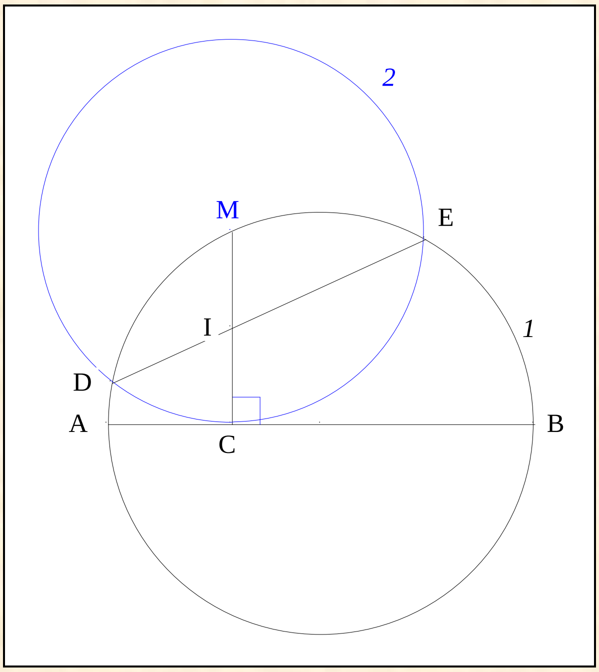
Commentaire : l'énoncé du problème **G3** [88] est une réciproque du précédent.

[88] Perpendicular lines, IMO ShortList 1996 Problem **G3**, *Mathlinks* du 03/06/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=409745

8. Milieu d'un segment

VISION

Figure :

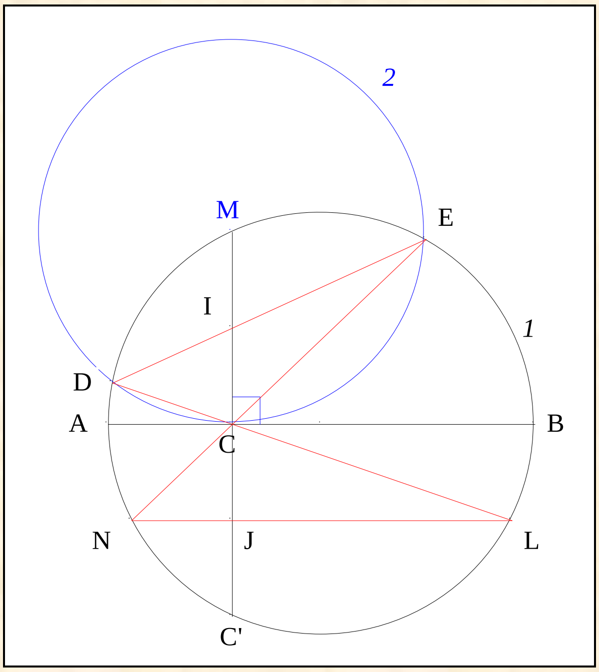


Traits :	*1*	un cercle,
	A, B	deux points diamétraux de *1*,
	M	un point de *1*,
	C	le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur (AB),
	2	le cercle de centre M passant par C,
	D, E	les points d'intersection de *1* et *2*
et	I	le point d'intersection de (DE) et (CM).

Donné : I est le milieu de [CM].[89]

VISUALISATION

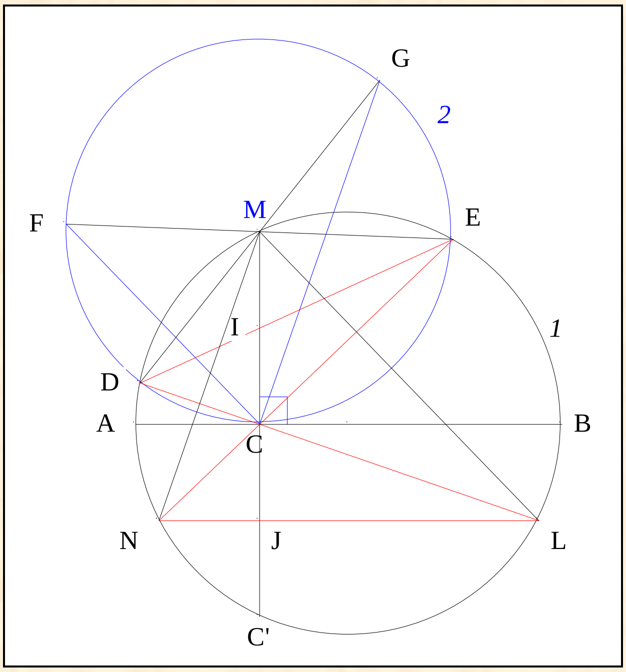
[89] Olympiades chinoises (1990).



- Notons L, N, C' les seconds points d'intersection resp. de (DC), (EC) et (MC) avec *1*
  et J le point d'intersection de (MC) et (LN).

- **Scolies :** **(1)** (AB) est la médiatrice de [MC'] ; en conséquence, CM = CC' ;
  (2) le quadrilatère croisé ENLD est un papillon cyclique.

- D'après **A. 1.** Le problème de **?**-Wallace, CI = CJ
  d'où par soustraction, membre à membre de ces deux égalités, IM = JC'.



- Notons F, G les seconds points d'intersection resp. de (EM), (DM) avec *2*.

- G et D étant deux points diamétraux de *2*, (CD) ⊥ (CG) ;
  F et E étant deux points diamétraux de *2*, (CE) ⊥ (CF).

- Les cercles *2* et *0*, les points de base D et E, les moniennes (GDM) et (CEN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (GC) // (MN).

- Les cercles *2* et *0*, les points de base E et D, les moniennes (FEM) et (CDL),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (FC) // (ML) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (CD) ⊥ (MN) , (CE) ⊥ (ML).

- **Conclusion partielle :** C est l'orthocentre du triangle MNL inscrit dans *1*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", JC = JC' ;
  en conséquence, IM = IC.

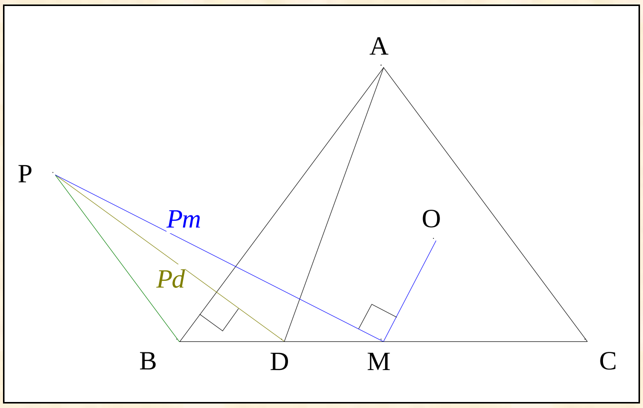
- **Conclusion :** I est le milieu de [CM].

Commentaire : cette situation ressemble à l'un des problèmes de la 23-ème OIM de 1984.

9. Bulgarie 2000

VISION

Figure :

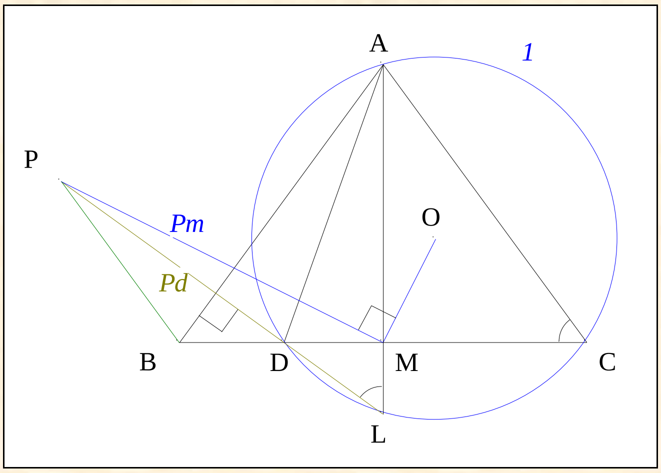


Traits :	ABC	un triangle A-isocèle,
	M	le milieu du côté [BC],
	D	un point de [BC],
	O	le centre du cercle circonscrit du triangle ADC,
	Pd	la perpendiculaire à (AB) en D,
	Pm	la perpendiculaire à (OM) en M
et	P	le point d'intersection de *Pm* et *Pd.*

Donné : (BP) est parallèle à (AC).[90]

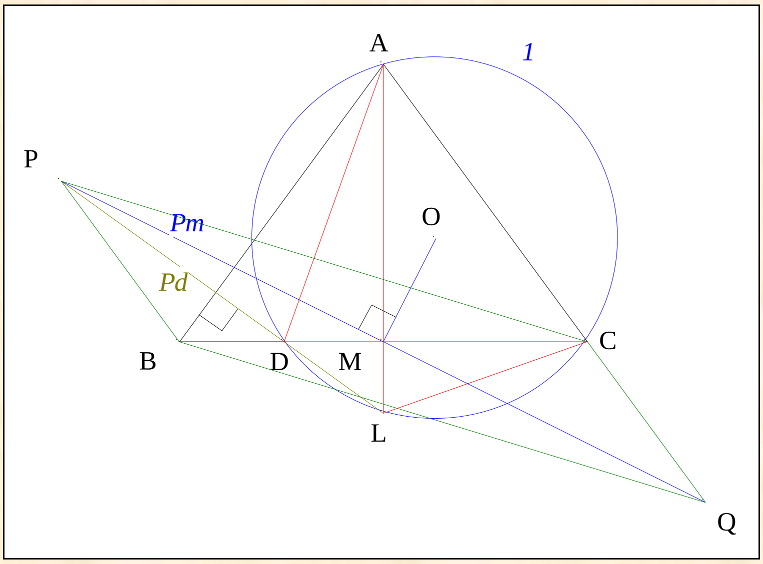
VISUALISATION

[90] Bulgarie (2000).
A nice concurrency, *Mathlinks* du 15/08/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=162993



- Notons 1 le cercle circonscrit à ADC
  et L le point d'intersection de *Pd* et (AM).

- Les angles <ALD et <ACD ayant des compléments égaux (<MAB et <MAC) sont égaux ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", L est sur *1*.



- Notons Q le point d'intersection de *Pm* et (AC).

- D'après **A. 3.** Le problème complémentaire de Eves, appliqué au papillon ADCL, M est le milieu de [PQ].

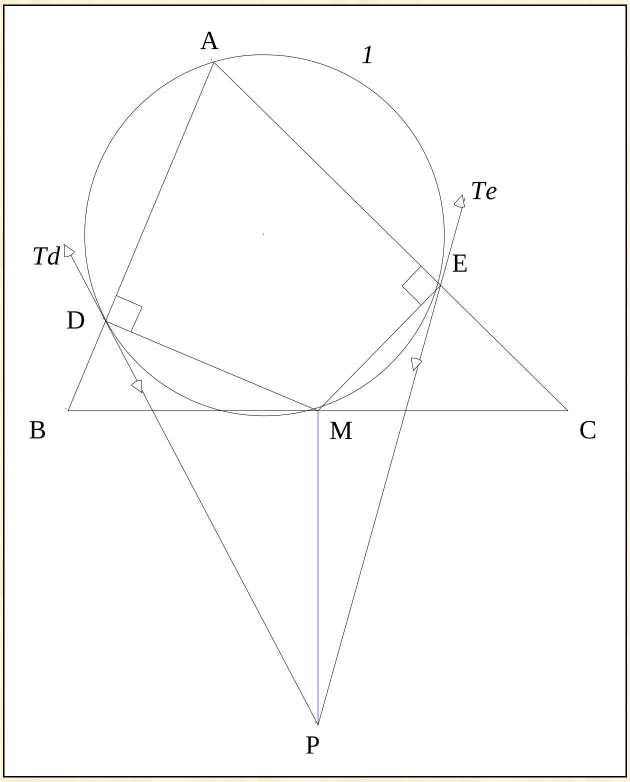
- La quadrilatère PBQC ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme ;
  en conséquence, (BP) // (CQ).

- **Conclusion :** (BP) est parallèle à (AC).

10. Une médiatrice

VISION

Figure :



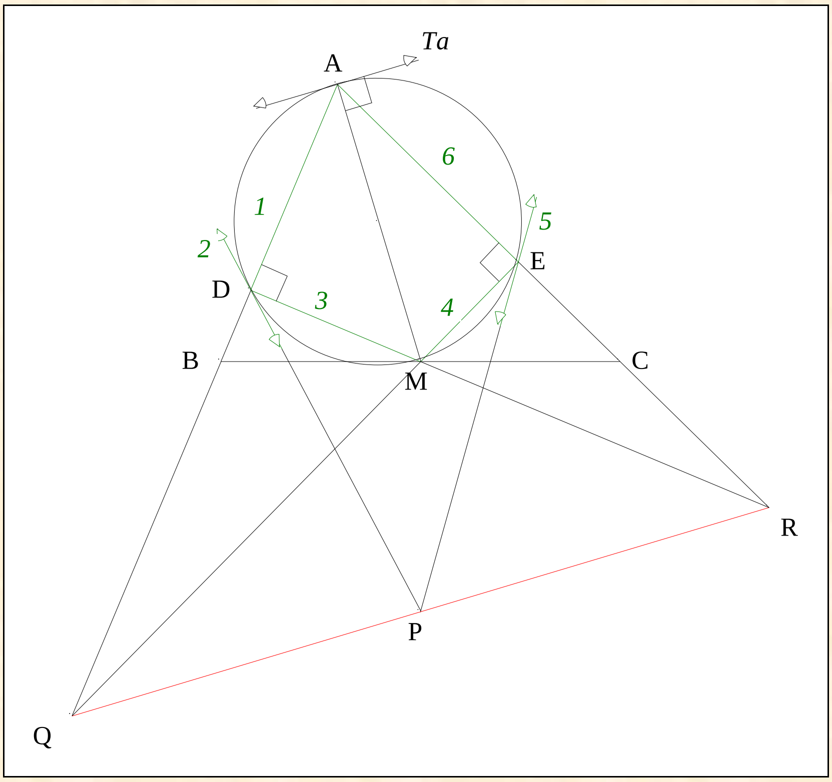
Traits : ABC un triangle,
M le milieu de [BC],
D, E les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (AB), (AC),
1 le cercle de diamètre [AM],
Td, *Te* les tangentes à *1* en D, E
et P le point d'intersection de *Td* et *Te*.

Donné : (PM) est la médiatrice de [BC].[91]

VISUALISATION

---

[91] Another easy problem [midpoint M of BC projected], *Mathlinks* du 16/09/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=16779
Two equal segments in a triangle, *Mathlinks* du 13/12/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=244984



- Notons Q, R les points d'intersection de (AB) et (ME), de (AC) et (MD).

- **Scolies :** **(1)** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *1* passe par D et E.
  (2) M est l'orthocentre du triangle AQR.

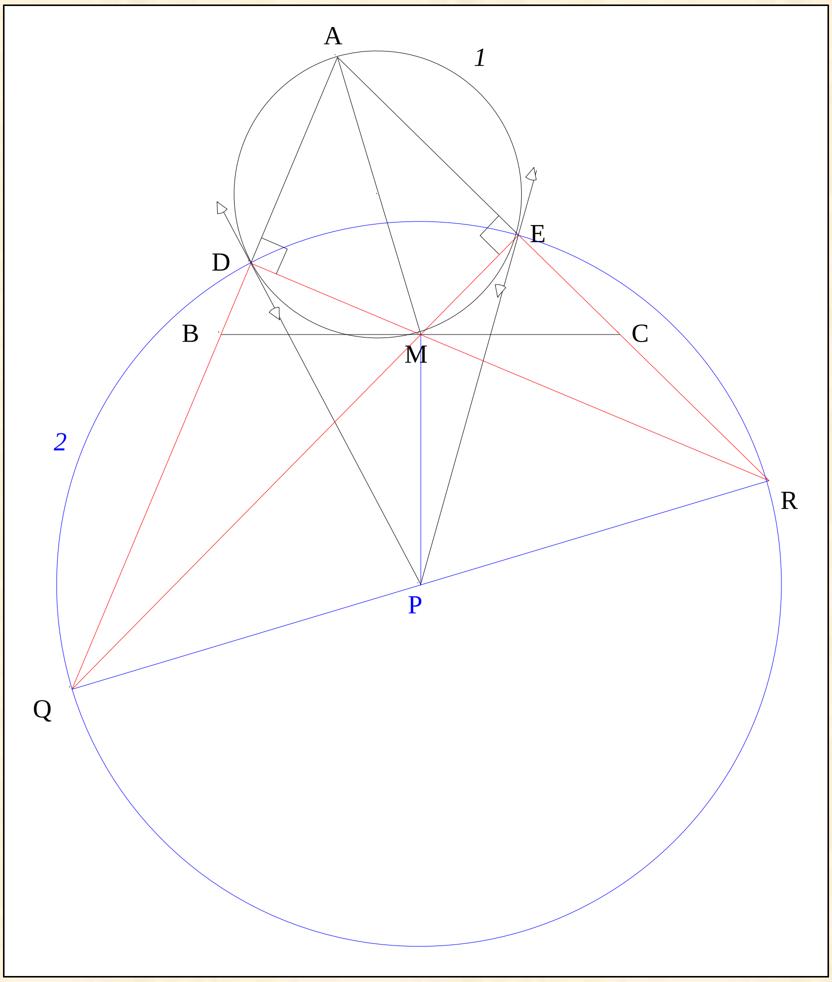
- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum", (QPR) est la pascale de l'hexagone AD *Td* ME *Te* A.

- Notons *Ta* la tangente à *1* en A.

- Par définition d'une tangente, *Ta* ⊥ (AM) ;
  par définition d'une hauteur, (AM) ⊥ (QR) ;
  d'après l'axiome VIa des perpendiculaires, *Ta* // (QR) .

- D'après Boutin "Boutin-tangentiel"[92], P est le milieu de [QR].

[92] Ayme J.-L., A propos du théorème de Boutin, G.G.G. vol. **1** p. 2-3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons 2 le cercle de diamètre [QR] ; il passe par D et E.

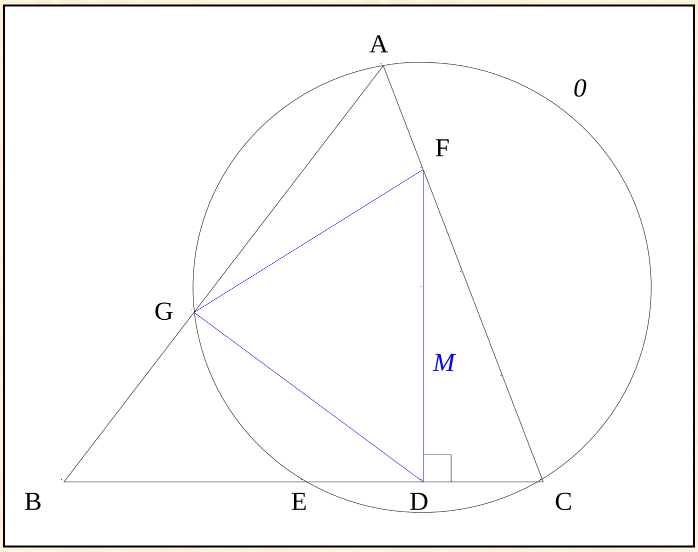
- M étant le milieu de [BC],
  D'après **A. 2.** L'équivalence du papillon, appliqué au papillon DREQ, (PM) ⊥ (BC).

- **Conclusion :** (PM) est la médiatrice de [BC].

11. L'invisible papillon de Duman

VISION

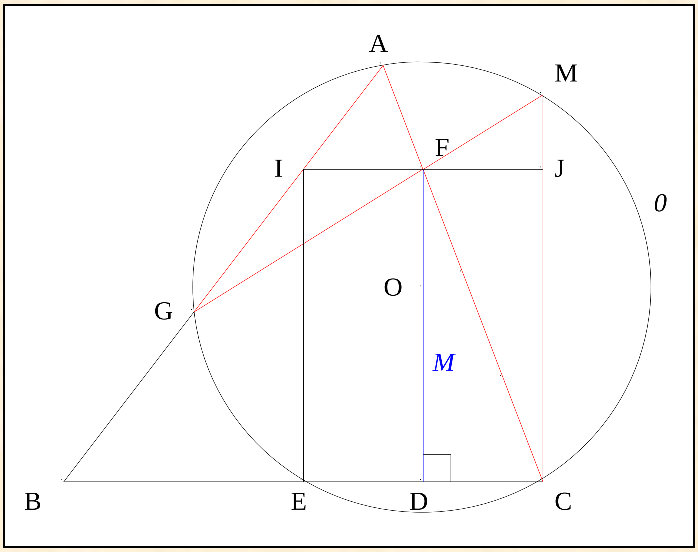
Figure :



Traits : [BC] un segment,
E le milieu de [BC],
D le milieu de [EC],
M la médiatrice de [EC],
F un point de *M*,
A le point de (FC) tel que A soit extérieur à [FC] et que FC = 3.AF,
0 le cercle circonscrit au triangle AEC
et G le second point d'intersection de *0* avec (AB).

Donné : les triangles DFG et ABC sont inversement semblables.[93]

VISUALISATION



- Notons O le centre de *0*,
  M le second point d'intersection de (FG) avec *0*,
  et I, J les points d'intersection de la parallèle à (BC) resp. avec (AG), (CM).

- **Scolies : (1)** Nous venons de faire apparaître "Le problème de ?-Wallace" i.e. le papillon ACMG.

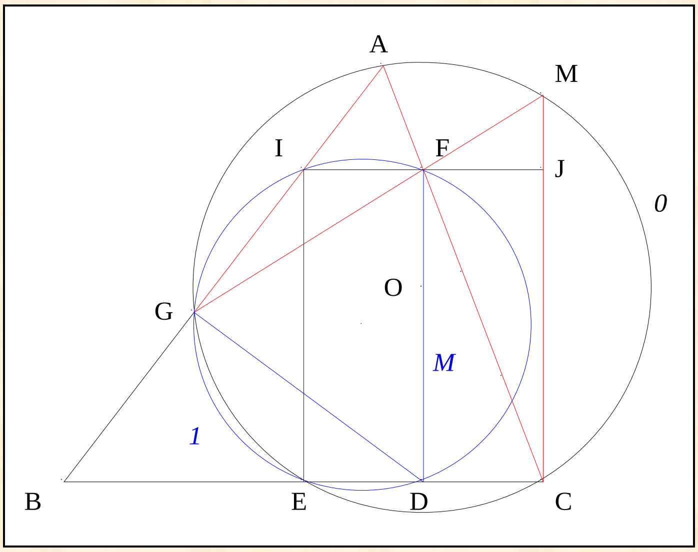
[93] Duman A. N., Problem **1669**, *Mathematics Magazine* vol. **76**, **2** (2003) 151.
A perpendicularity in a cyclic quadrilateral, *Mathlinks* du 10/05/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=204275

(2) (OF) ⊥ (IJ).

- D'après **A. 1.** Le problème de ?-Wallace, appliqué au papillon ACMG, FJ = IF.

- D'après Thalès, 4.IF = BC ;
  par hypothèse, BC = 4.CD ;
  en conséquence, IF = CD ;
  par transitivité de la relation =, FJ = CD.

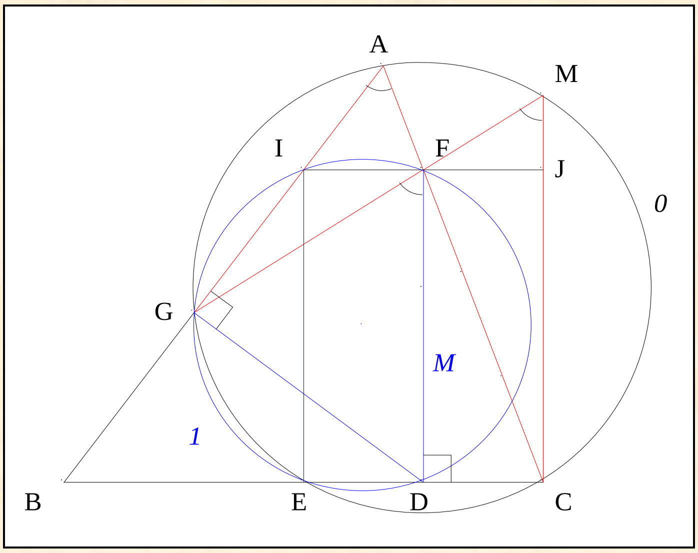
- **Conclusion partielle :** le quadrilatère FDCJ étant un rectangle, (CJM) // (DF).



- **Scolie :** le quadrilatère IEDF est un rectangle.

- Notons *2* le cercle circonscrit à IEDF i.e. le cercle de diamètre [DI].

- Les cercles *1* et *2*, le point de base E, la monienne (CED), les parallèles (CM) et (DE), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, *2* passe par G.



- Une chasse angulaire à Π près :
  <GFD = <GMC (angles à côtés parallèles) ;
  <GMC = <GAC (angles inscrits) ;

par transitivité de la relation =, <GFD = <BAC.

- Nous avons : <GDF = <ABC (angles à côtés perpendiculaires).
- D'après "Le théorème 180", <FGD = <BCA.

- **Conclusion :** les triangles DFG et ABC sont inversement semblables.

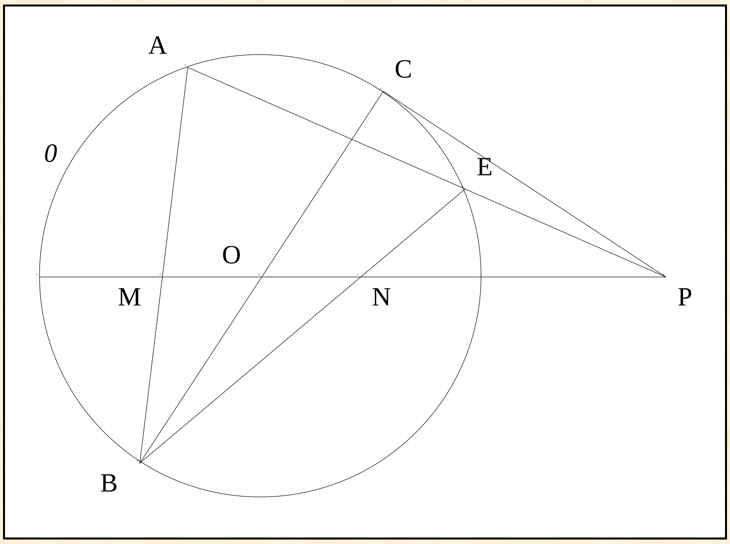
Note historique : Ali Nabi Duman a étudié à l'université de Bilkent (Turquie).

Commentaire : la solution proposée dans le *Monthly* n'évoque pas de "papillon".

12. *Journal de Mathématiques* de Vuibert (1878)

VISION

Figure :



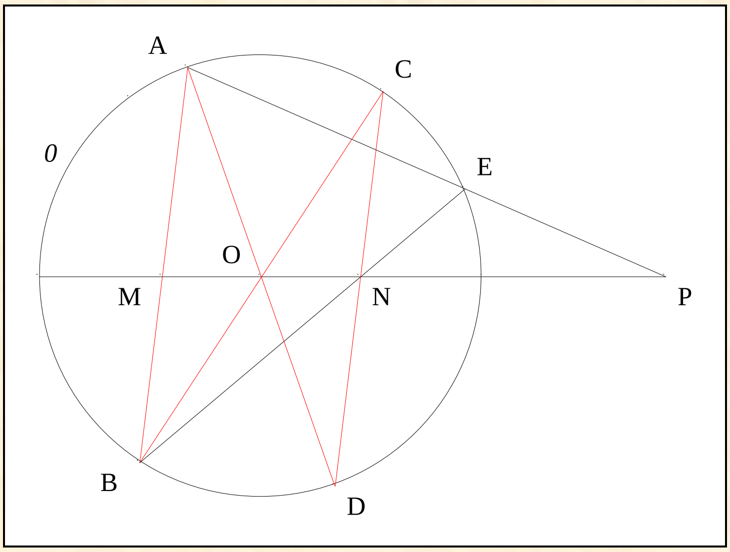
Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
M, N deux points d'un diamètre de *0*,
B un point de *0*,
A, C, E les seconds points d'intersection resp. de (BM), (BO), (BN) avec *0*
et P le point d'intersection de (MON) et (AE).

Donné : O est le milieu de [MN] *si, et seulement si,* (PC) est tangente à *0* en C.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [94]

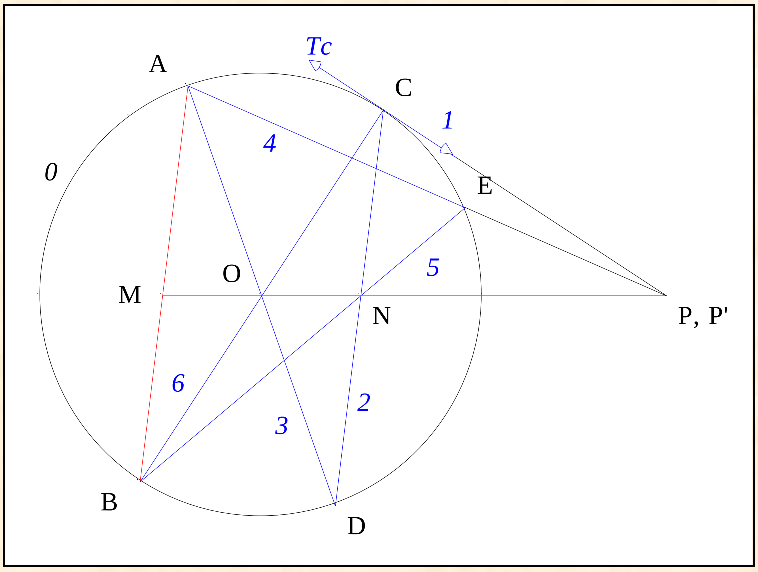
---

[94] *Journal de Mathématiques* de Vuibert (1878) 108.



- Notons D le second point d'intersection de (OA) avec *0*.

- D'après **A. 1.** Le problème de ?-Wallace,
  appliqué au papillon ABCD, (CD) passe par N.



- Notons *Tc* la tangente à *0* en C
  et P' le point d'intersection de *Tc* et (AE).

- D'après Carnot "Pentagramme mysticum", (P'NO) est la pascale de l'hexagone dégénéré *Tc* DAEBC ;
  en conséquences, P et P' sont confondus et *Tc* = (PC).

- **Conclusion :** (PC) est tangente à *0* en C.

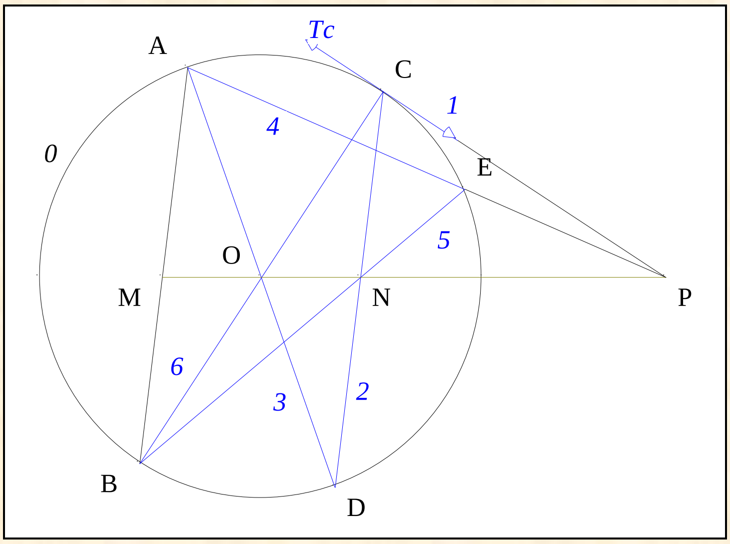
Note historique : ce problème dissimulant un papillon aptère i.e. sans aile que l'auteur a identifié, se trouve aussi dans le livre de géométrie de Wilhelm Fuhrmann[95].

Note : ce problème a été proposé de nombreuses fois sur le site *Mathlinks*.[96]

---

95 Fuhrmann W., *Synthetische Beweise Planimetrischer,Sätze*, Berlin (1890).

VISUALISATION SUFFISANTE [97]



- Notons *Tc* la tangente à *0* en C
  et D le point d'intersection de (AO) et (CN).

- D'après Carnot "Pentagramma mysticum", (ZYO) est la pascale de l'hexagone *Tc* DAEBC ;
  en conséquence, ce pentagone est cyclique i. e. D est sur *0*.

- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Le problème de ?-Wallace,
  appliqué au papillon ABCD, O est le milieu de [MN].

Note : ce problème a été proposé de nombreuses fois sur le site *Mathlinks*.[98]

13. Une Généralisation *Journal de Mathématiques* de Vuibert (1878)

VISION

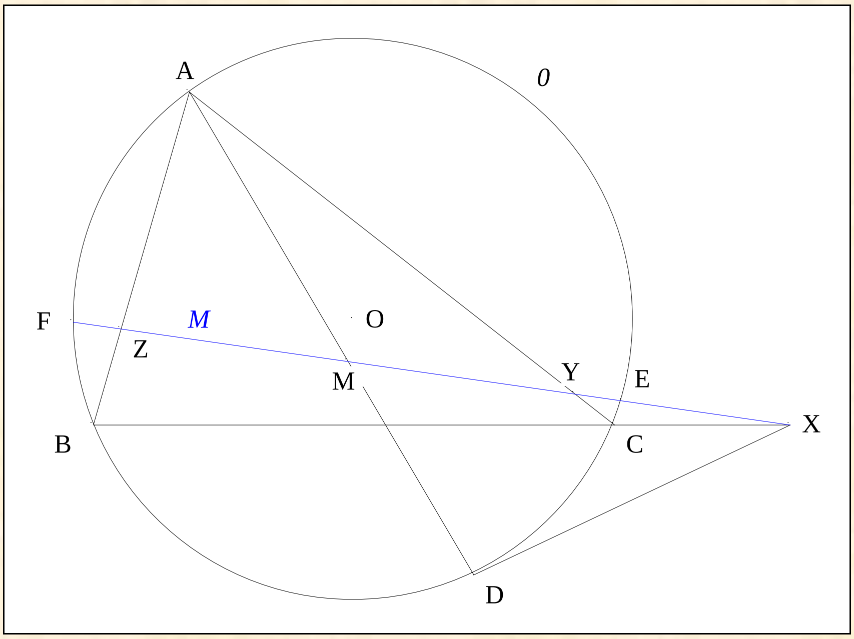
Figure :

---

[96] Nice geometry:), *Mathlinks* du 31/01/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=254679

[97] St. Petersburg Mathematics Olympiad (2002) Elimination Round, Problem 10/6 ; also SPbMo (9th grade) ;
Two equal segments, *Mathlinks* du 17/07/2009
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=289278

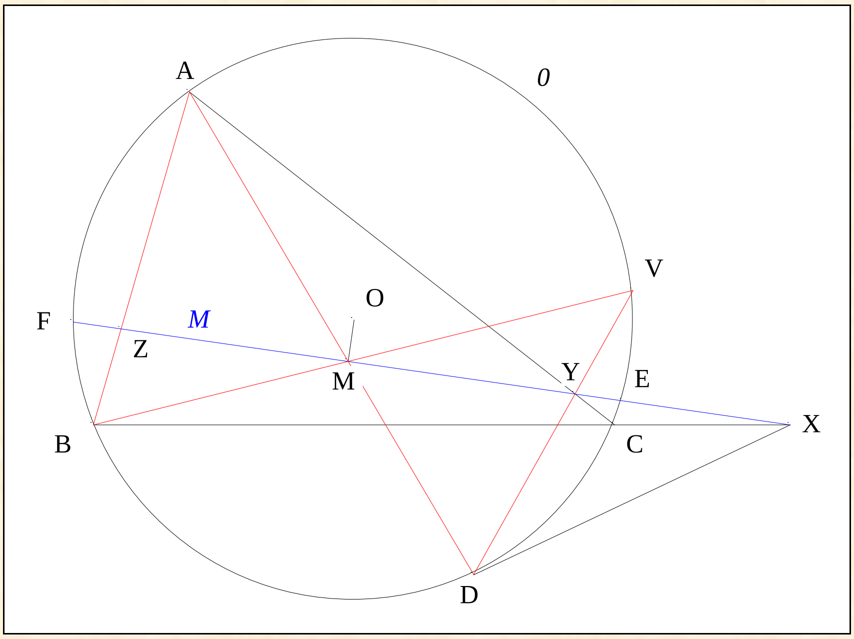
[98] Tangent to circumcircle at antipode meets sideline, *Mathlinks* du 26/08/2006 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=110996



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
M une ménélienne de ABC,
X, Y, Z les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
E, F les points d'intersection de *M* avec *0*,
M le milieu de [XY]
et D le second point d'intersection de (AM) avec *0*.

Donné : *si,* EY = FZ *alors,* (DX) est tangente à *0* en D.[99]

VISUALISATION

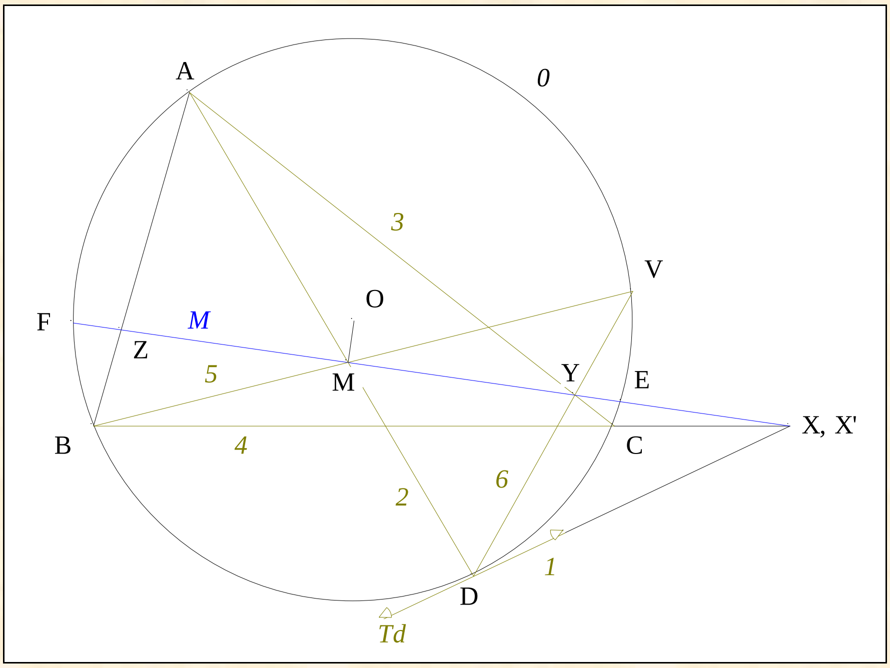


- **Scolies :** **(1)** M est le milieu de [EF]
  (2) (OM) ⊥ *M*.

[99] very very good problem, *Mathlinks* du 03/03/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=192177

- Notons V le second point d'intersection de (BM) avec *0*.

- D'après **A. 1.** Le problème de ?-Wallace, appliqué au papillon ABVD, (DV) passe par Y.



- Notons *Td* la tangente à *0* en D
  et X' le point d'intersection de *Td* et (BC).

- D'après Carnot "Pentagramme mysticum", (X'MY) est la pascale de l'hexagone dégénéré *Td* ACBVD ;
  en conséquences, X et X' sont confondus et *Td* = (DX).

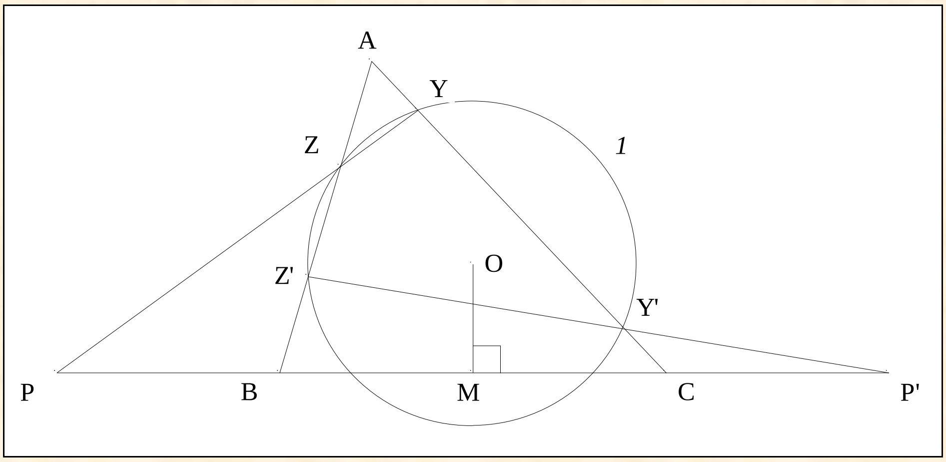
- **Conclusion :** (DX) est tangente à *0* en D.

Commentaire : la réciproque est laissée aux soins du lecteur.

14. Deux segments égaux

VISION

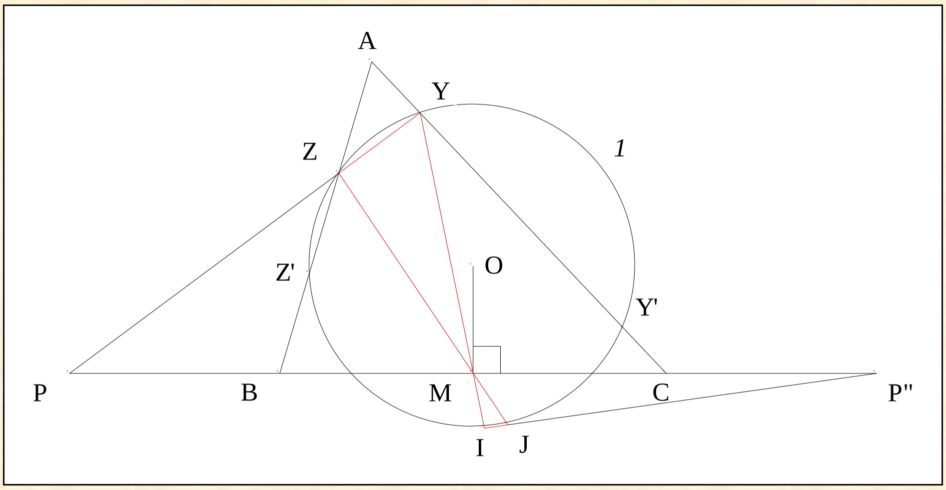
Figure :



Traits : ABC un triangle,
M le milieu de [BC],
O un point de la médiatrice de [BC],
1 un cercle sécant à ABC,
Y, Y' les points d'intersection de *1* avec (AC),
Z, Z' les points d'intersection de *1* avec (AB)
et P, P' les points d'intersection resp. de (XY) et (BC), (X'Y') et (BC).

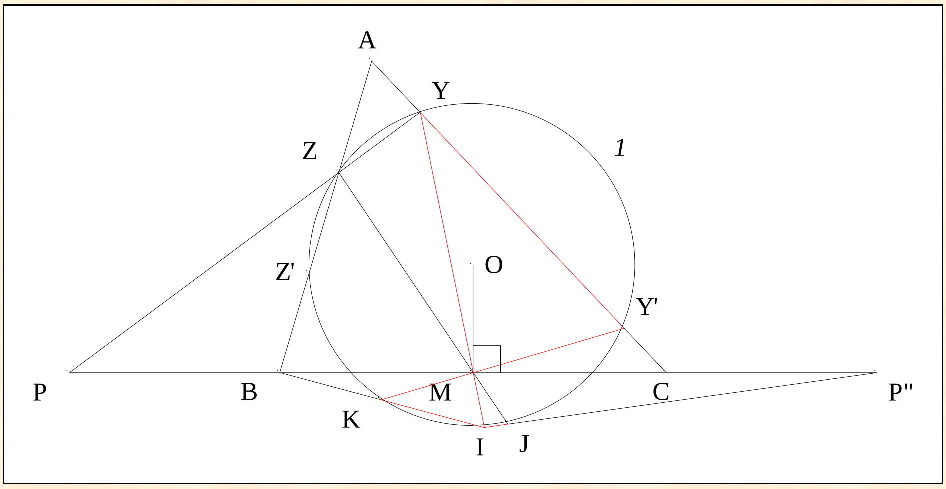
Donné : MP = MP'.

VISUALISATION



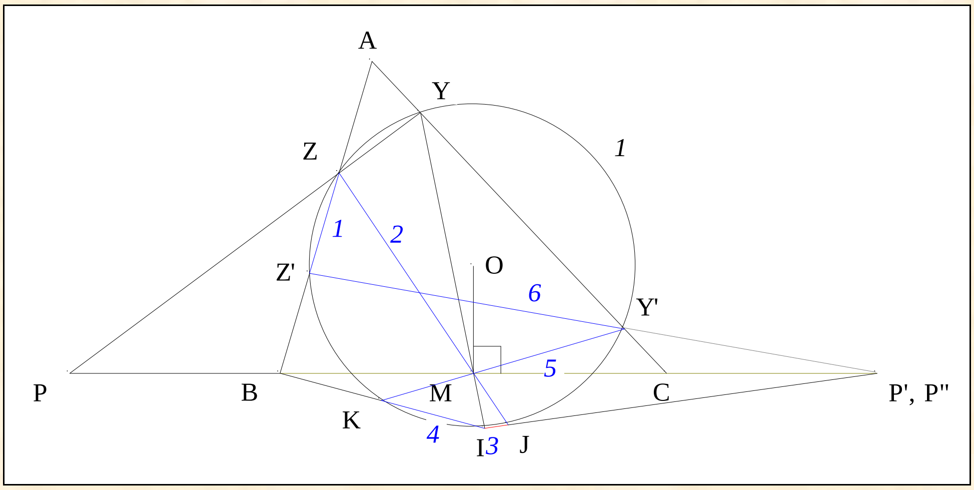
- Notons I, J les seconds points d'intersection resp. de (MY), (MZ) avec *1*
  et P" le point d'intersection de (IJ) et (BC).

- D'après **A. 3.** Le papillon complémentaire de H. W. Eves,
  appliqué au papillon IJZY, MP = MP".



- Notons K le second point d'intersection de (MY') avec *1*.

- D'après **A. 3.** Le papillon complémentaire de H. W. Eves,
  appliqué au papillon IKY'Y, (IK) passe par B.



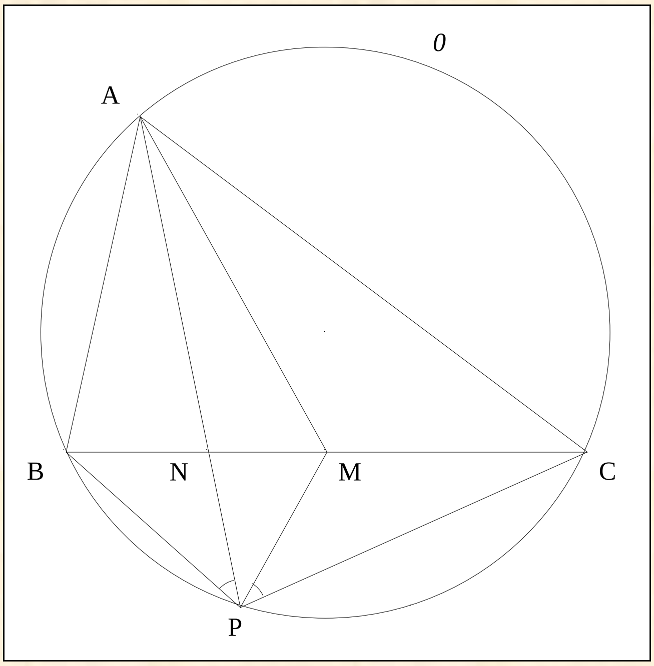
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **4**),
  (BC) est la pascale de l'hexagone cyclique Z'ZJIKY'Z' ;
  en conséquences, **(1)** (BC), (IJ) et (Y'Z') sont concourantes
  (2) P' et P" sont confondus.

- **Conclusion :** MP = MP".

15. Deux angles égaux

VISION

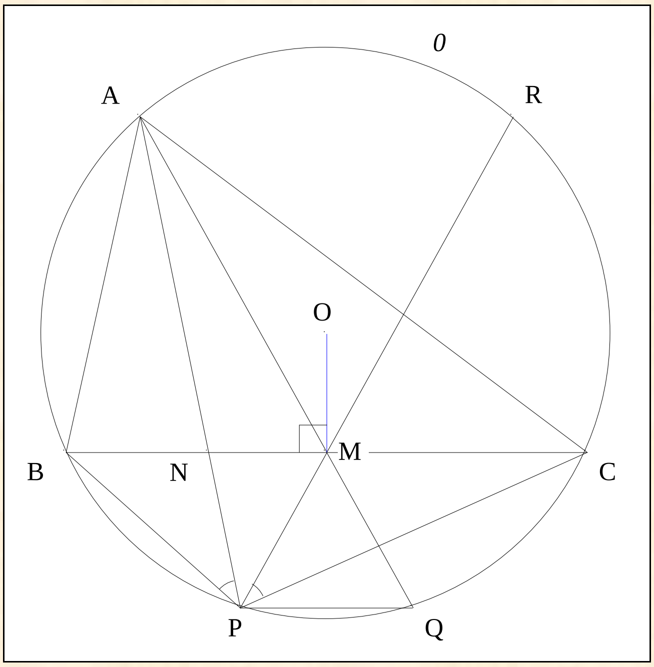
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M le milieu de [BC],
N le pied de la A-symédiane de ABC,
et P le second points d'intersection de (AN) avec *0*.

Donné : <BPA = <CPM.[100]

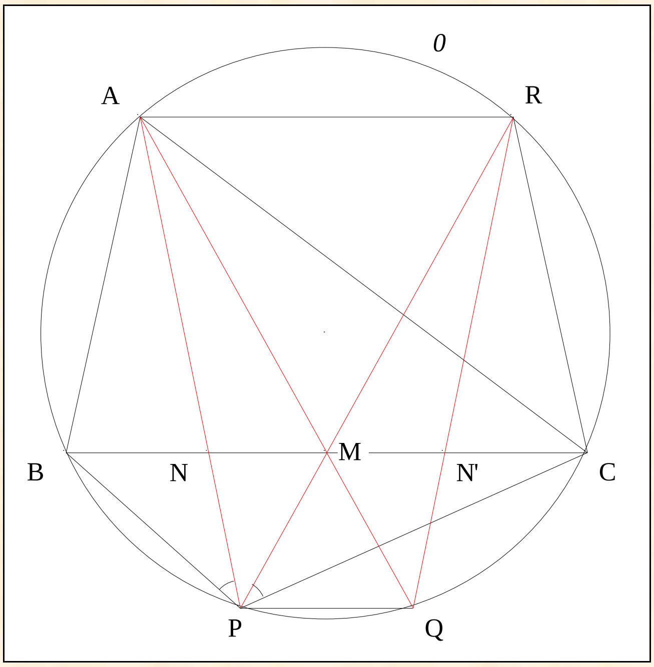
VISUALISATION



- Notons O le centre de *0*
et Q, R les seconds points d'intersection resp. de (AM), (PM) avec *0*.

100 Equal angles, *Mathlinks* du 13/07/2008 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=214711

- **Scolies :** **(1)** (PQ) // (BC)
  (2) (OM) est la médiatrice de [PQ].



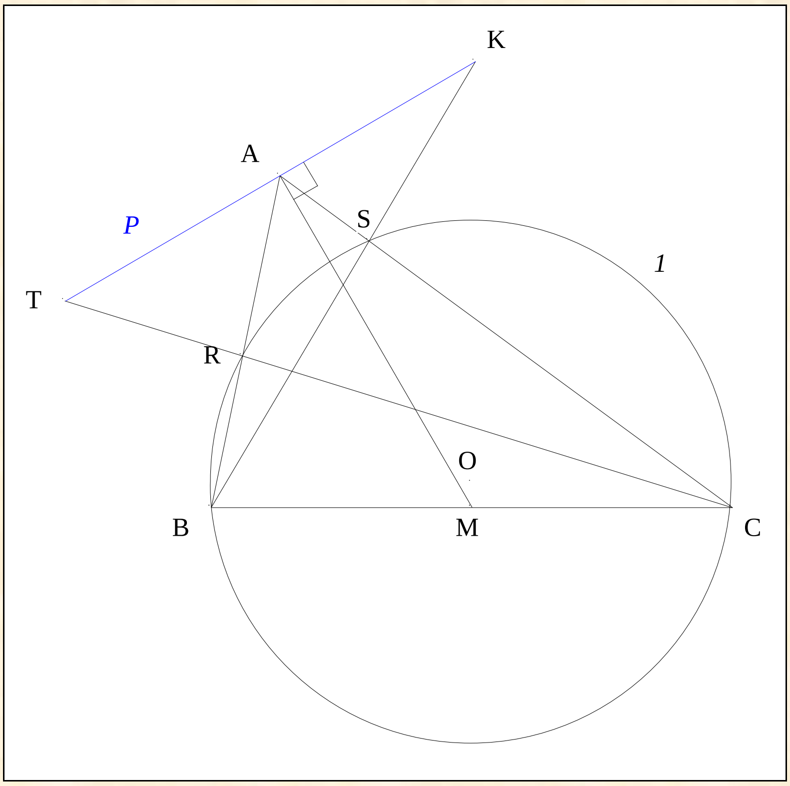
- D'après **A. 3.** Le papillon complémentaire de H. W. Eves,
  appliqué au papillon AQRP, (AR) // (PQ) ;
  en conséquence, **(1)** le trapèze cyclique ABCR est isocèle
  (2) <BPA et <CPM interceptant des cordes égales, sont égaux.

- **Conclusion :** <BPA = <CPM.

16. ***Ukraine Journal***

VISION

Figure :

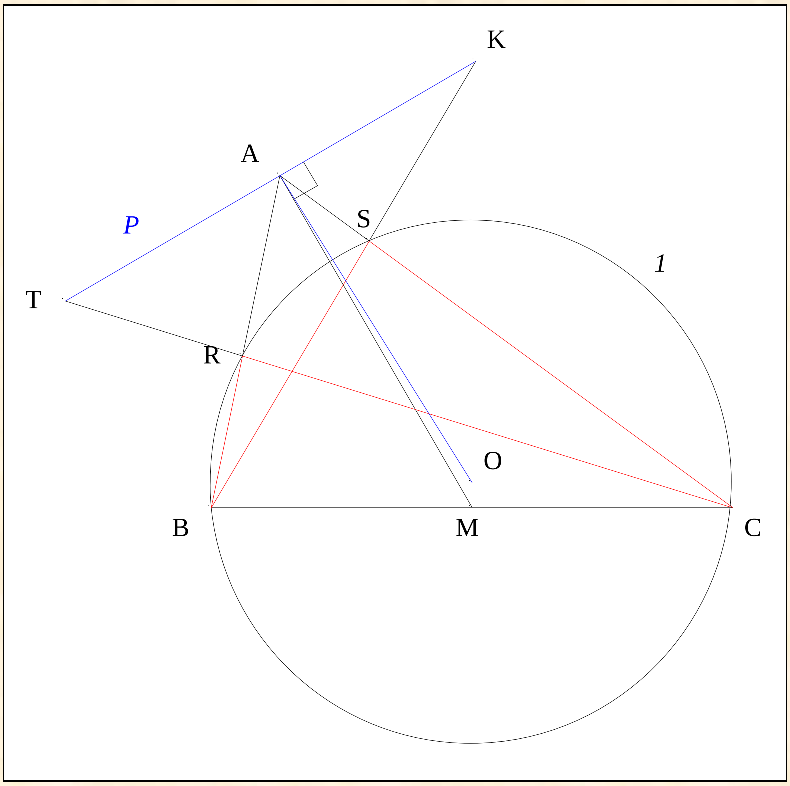


Traits : ABC un triangle non A-isocèle,
1 un cercle passant par B et C,
O le centre de *1*,
R, S les points d'intersection de *1* resp. avec (AB), (AC).
M le milieu de [BC],
P la perpendiculaire à (AM) en A,
et K, T les points d'intersection de *P* resp. avec (BS), (CR).

Donné : *si,* AT = AK *alors,* MS = MR. [101]

VISUALISATION

[101] triangle and some equal segments,Ukraine journal, *Mathlinks* du 10/07/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=214275



- **Scolie :** (AM) n'est pas perpendiculaire à (BC).

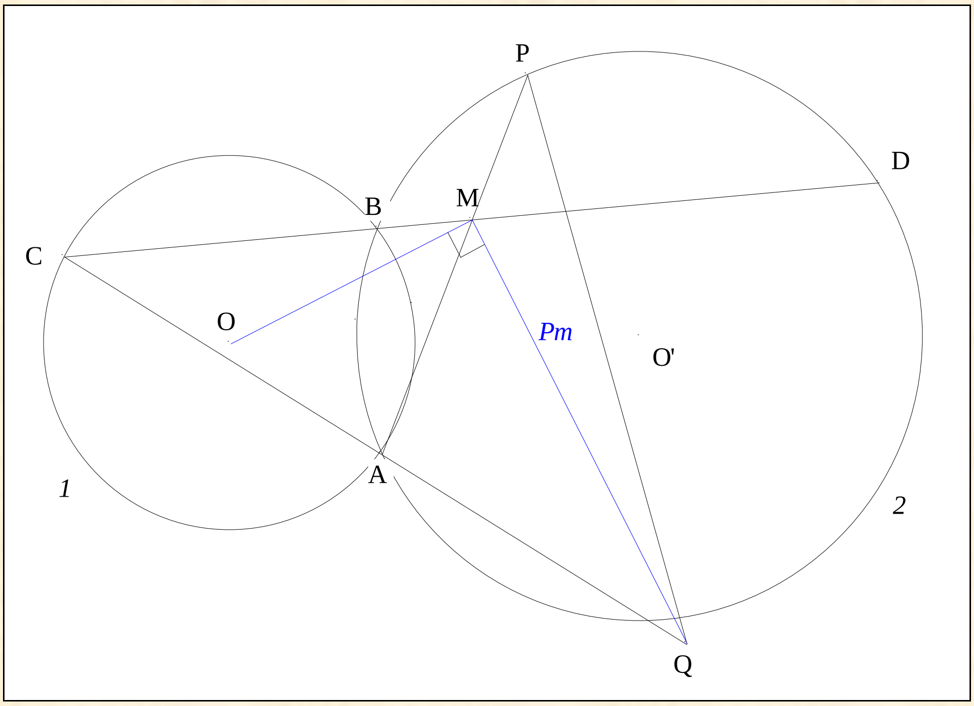
- D'après **A. 3.** Le problème complémentaire de Eves,
  appliqué au papillon BSCR, (OA) ⊥ *P* ;
  par hypothèse, *P* ⊥ (AM) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OA) // (AM) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (OA) = (AM) ;
  ou encore, A, M et O sont alignés
  ce qui revient à dire que O et M sont confondus.

- **Conclusion :** R et S étant sur *1*, MS = MR

17. TST Hanoi University of Education

VISION

Figure :

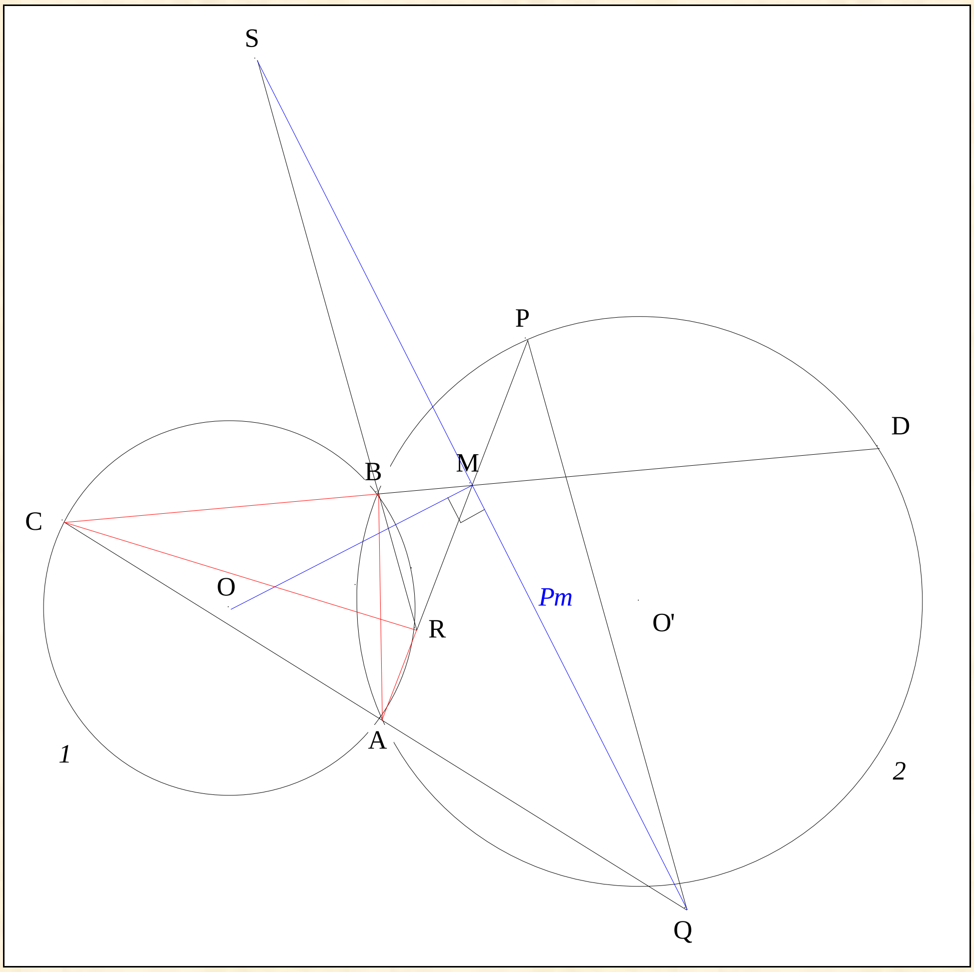


Traits :	*1, 2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	Mb	une monienne passant par B,
	C, D	les seconds points d'intersection de *Mb* resp. avec *1*, *2*,
	M	le milieu de [CD],
	P	le second point d'intersection de (AM) avec *2*,
	Pm	la perpendiculaire à (OM) en M
et	Q	le point d'intersection de (AC) et *Pm*.

Donné : (PQ) passe par un point fixe.[102]

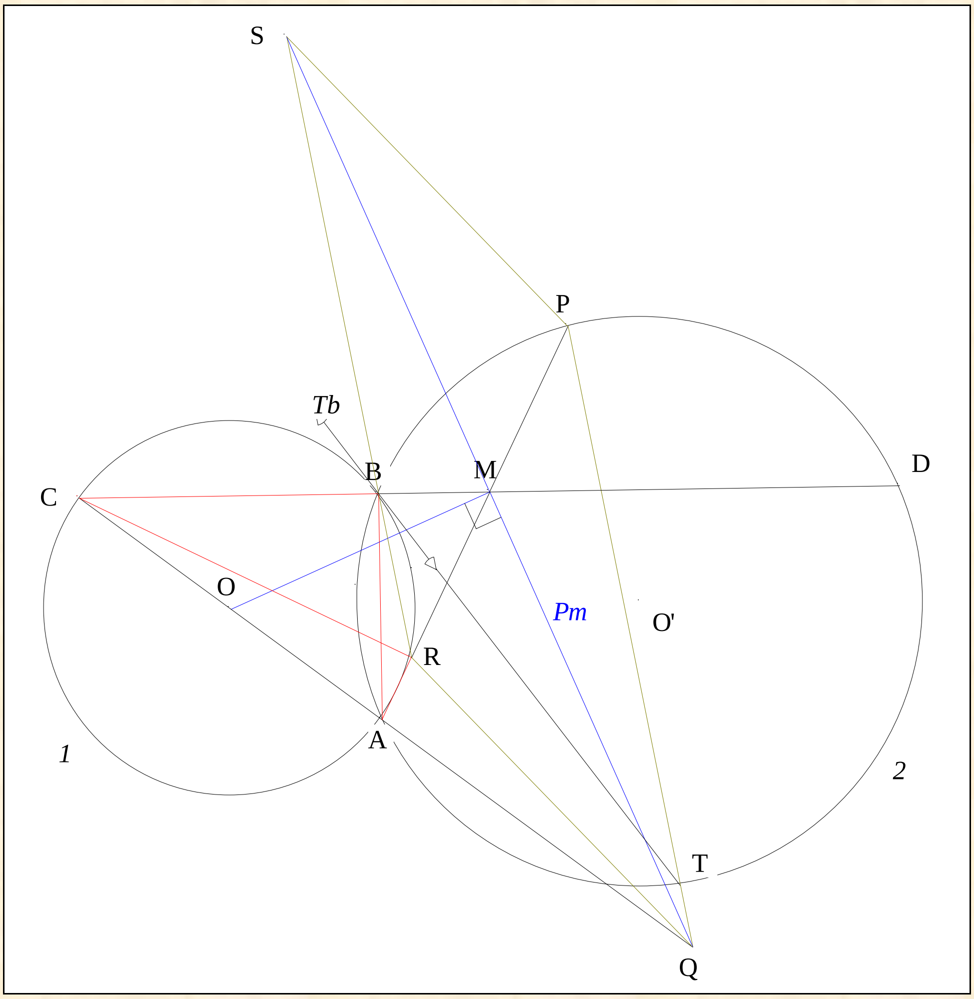
VISUALISATION

[102] Very hard for me, *Mathlinks* du 13/01/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=69997



- Notons R le second point d'intersection de (AM) avec *1*
  et S le point d'intersection de (BR) et *Pm*.

- D'après **A. 4.** Le problème de H. S. M. Coxeter,
  appliqué au papillon ABCR, MS = MQ.



- Notons T le second point d'intersection de (PQ) avec *2*.

- D'après "Milieu d'une monienne" (Cf. Appendice **J. II.**), MR = MP.

- Le quadrilatère PQRS ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ; en conséquence, (RBS) // (PTQ).

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, la monienne (RAP), les parallèles (RB) et (PT), conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, (BT) est tangente à *1* en B.

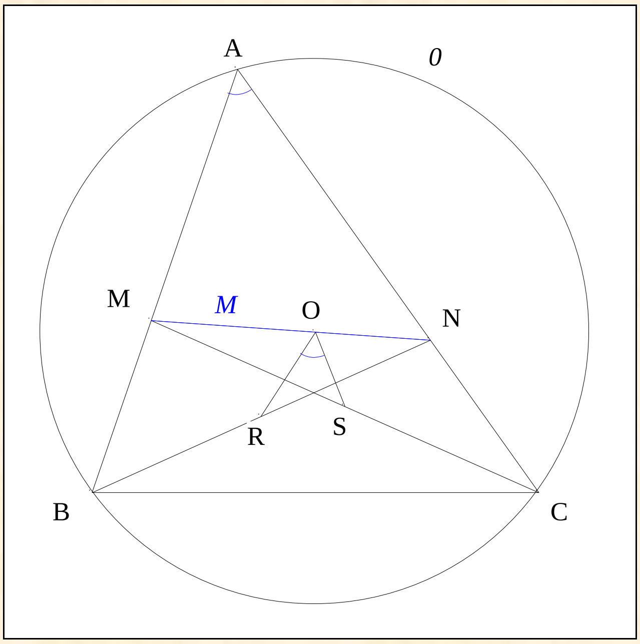
- **Scolie :** *1* et *2* étant fixes et se coupant en A et B (fixes), T est fixe.

- **Conclusion :** (PQ) passe par un point fixe T.

18. Iran (2004)

VISION

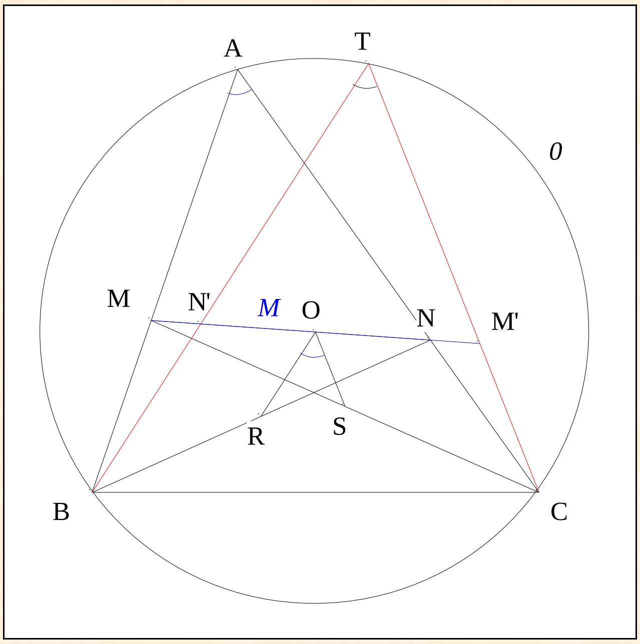
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
M une ménélienne de ABC passant par O,
M, N les points d'intersection de *M* resp. avec (AB), (AC)
et S, R les milieux resp. de [BN], [CM].

Donné : <BAC et <ROS sont égaux. [103]

VISUALISATION



- Notons M', N' les symétriques resp. de M, N par rapport à O.

[103] almost easy [prove < ROS = < BAC], *Mathlinks* du 10/09/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=16567
Very difficult problem, *Mathlinks* du 02/08/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=218486

- D'après **C. 4**. Une réciproque remarquable, (BN') et (CM') se coupent sur *0*.

- Notons T ce point d'intersection.

- D'après "Le théorème de la droite des milieux"
  appliqué **(1)** au triangle BNN', (RO) // (BN'T)
  (2) au triangle CMN, (SO) // (CM'T).

- D'après "Le théorème angle à côtés parallèles", <ROS = <BTC ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BTC = <BAC ;
  par transitivité de la relation =, <ROS = <BAC.

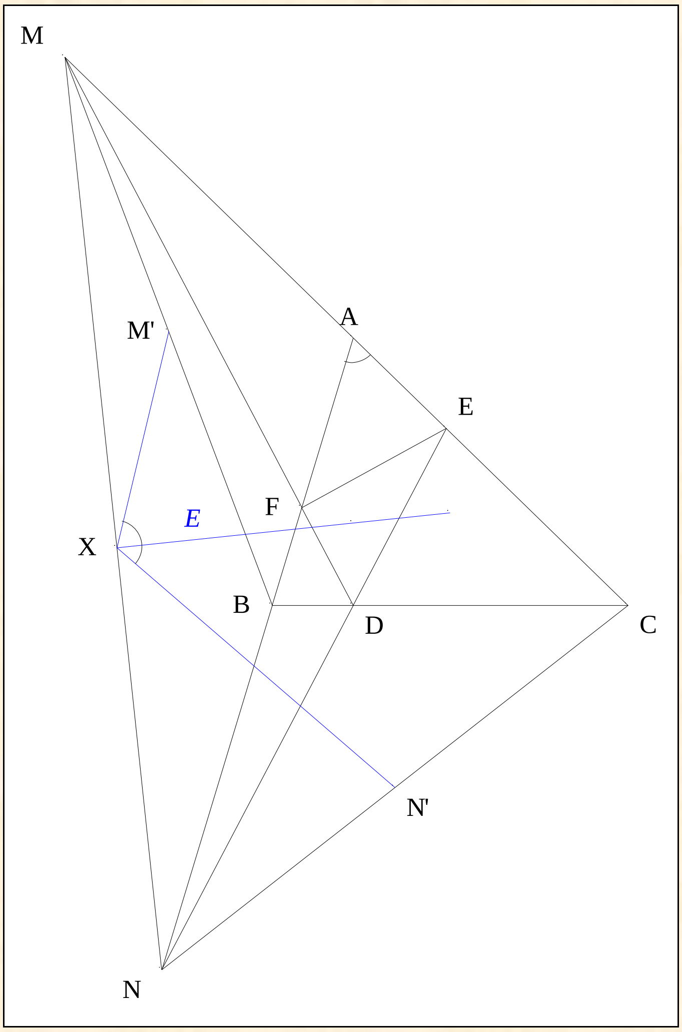
- **Conclusion :** <BAC et <ROS sont égaux.

Note historique : c'est le sud coréen Han-sol Shin plus connu sous le pseudonyme "Leonhard Euler" qui a eu l'idée de cette preuve.

19. Un problème de l'auteur

VISION

Figure :

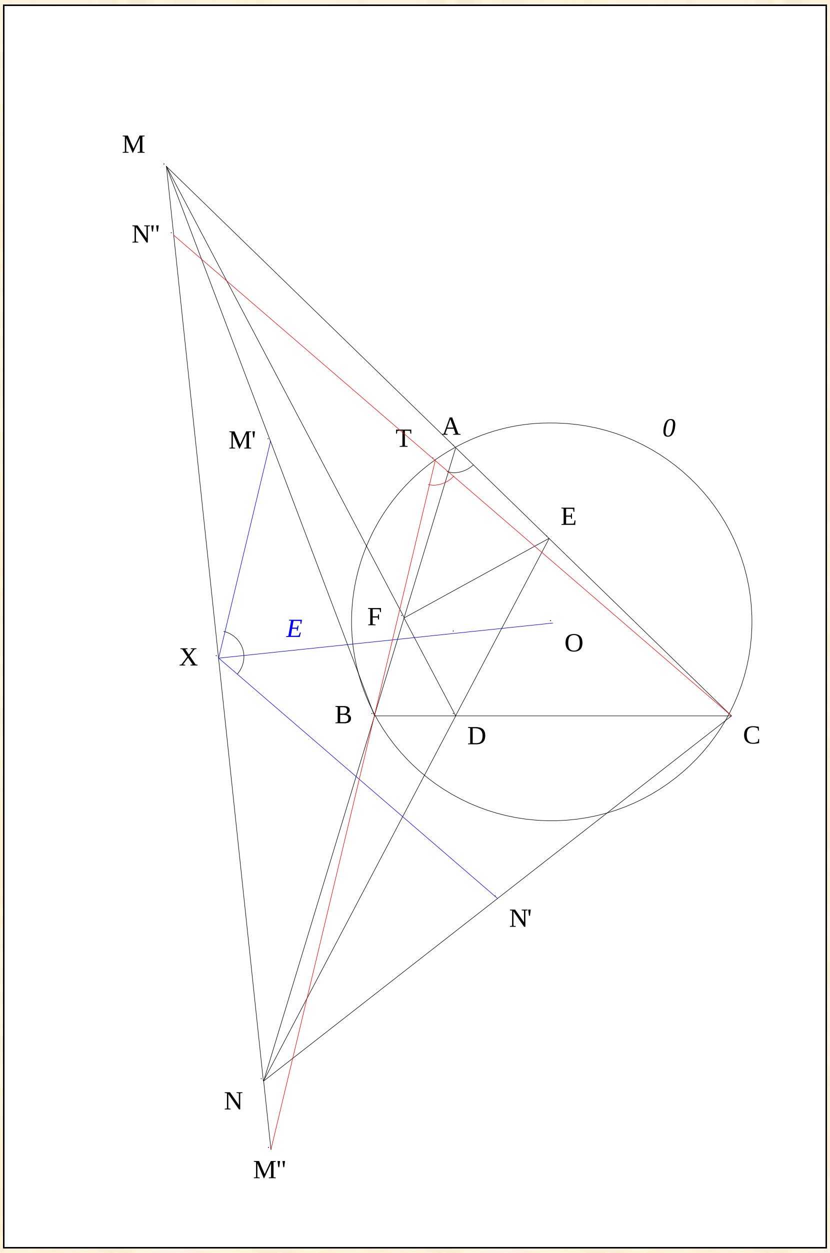


Traits : ABC un triangle,
DEF le triangle orthique de ABC,
M le point d'intersection de (DF) et (AC),
N le point d'intersection de (DE) et (AB),
M', N' les milieux resp. de [BM], [CN],
E la droite d'Euler de ABC
et X le point d'intersection de *E* et (MN).

Donné : <M'XN' et <BAC sont égaux à Π près.[104]

VISUALISATION

[104] Ayme J.-L., For an Olympiad, *Mathlinks* du 25/04/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=403778



- Notons $\mathcal{0}$ le cercle circonscrit à ABC,
  O le centre de $\mathcal{0}$
  et M'', N'' les symétriques resp. de M, N par rapport à X.

- **Scolies :** **(1)** *E* passe par O
  (2) (MN) est l'axe orthique de ABC

- D'après "Droite d'Euler et axe orthique"[105], *E* ⊥ (MN).

- D'après **C. 4.** Une réciproque remarquable ou **J. I. 3.** Un cas particulier
  (M''B) et (N''C) se coupent sur *0*.

- Notons T ce point d'intersection.

- **Conclusion :** mutatis mutandis (Cf. **C. II. 18.** Iran 2004), <M'XN' et <BAC sont égaux à Π près.

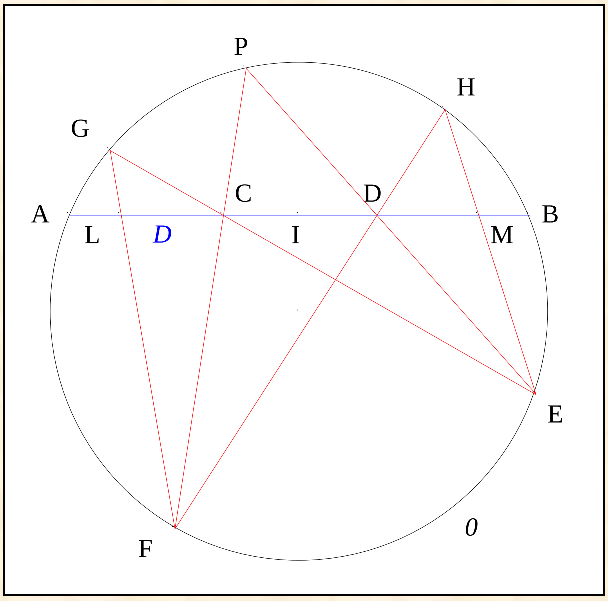
[105] Ayme J.-L., Droite d'Euler et axe orthique, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

III. PAPILLON À TROIS AILES

1. Le papillon de R. S. Luthar

VISION

Figure :

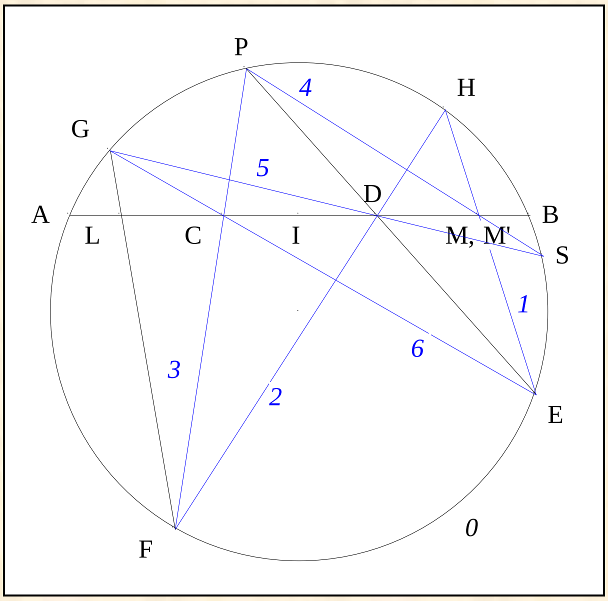


Traits : *0* un cercle,
D une sécante à *0*,
A, B les points d'intersection de *D* avec *0*,
C, D les deuxième et troisième tiers-point de la corde [AB] à partir de A,
P un point de *0* distinct de A, B,
E, F les seconds points d'intersection resp. de (PD), (PC) avec *0*,
G, H les seconds points d'intersection resp. de (EC), (FD) avec *0*,
L, M les points d'intersection resp. de (FG), (EH) avec la corde [AB]
et I le milieu de [AB].

Donné : I est le milieu de [LM]. [106]

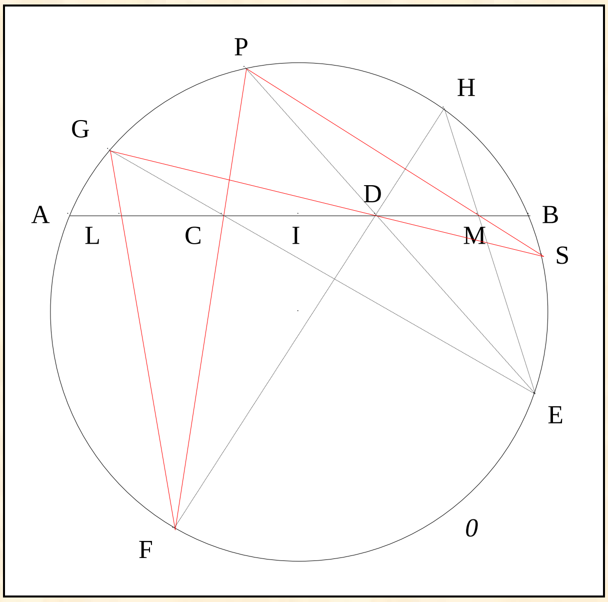
VISUALISATION

[106] Luthar R. S., A Three-Winged Butterfly Problem , Problème **1187**, *Mathematics Magazine*, vol. **58**, **2** (1984) 115.
The cord of a circle, *Mathlinks* du 11/04/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=36530



- Notons S le second point d'intersection de (GD) avec *0*
  et M' le point d'intersection de (EH) et (SP).

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **4**),
  (M'DC) est la pascale de l'hexagone cyclique EHFPSGE ;
  en conséquences, **(1)** M' est sur [AB]
  (2) M et M' sont confondus.



- **Conclusion :** d'après **C. 2.** Le papillon de MacKay**,**
  appliqué au papillon FPSG, I est le milieu de [LM].

Commentaire : la solution **1** de Ronald S. Tiberio[107] utilise le lemme d'Haruki et la solution **2** de Jordi Dou utilise les birapports.

---

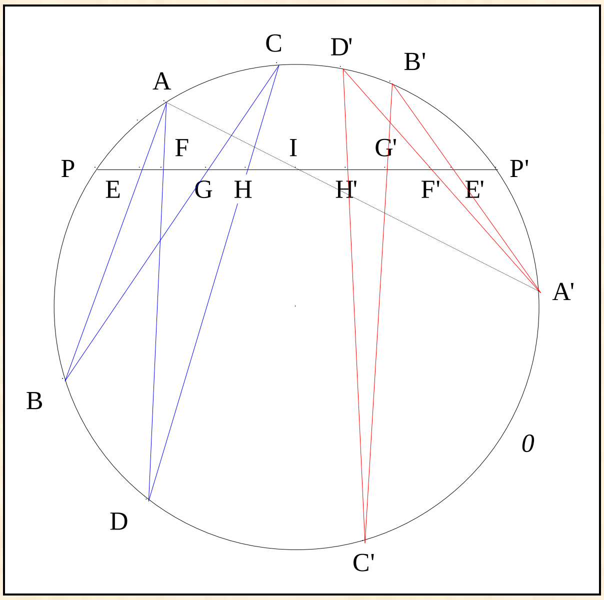
[107] Problème **1187**, *Mathematics Magazine*, vol. **58, 2** (1984) 115.

IV. PAPILLONS GÉMELLAIRES

1. Le papillon jumeau

VISION

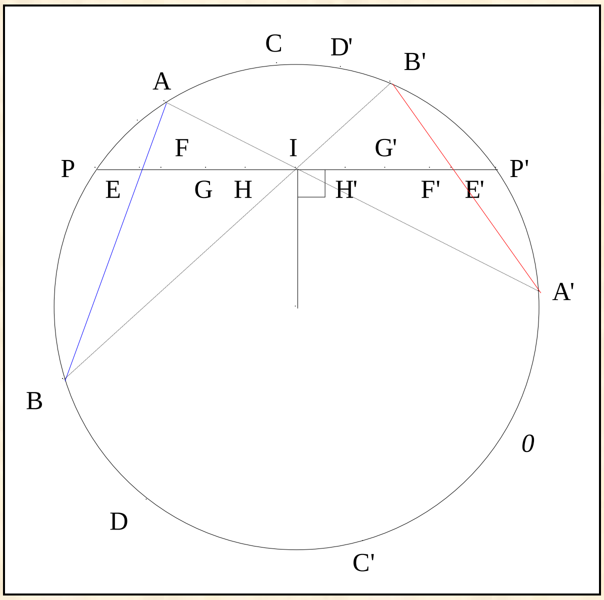
Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	D	une **sécante** à *0*,
	P, Q	les points d'intersection de *D* avec *0*,
	I	le milieu de [PQ],
	E, F, G, H	quatre points dans cet ordre de [PI],
	ABCD	un papillon inscrit dans *0* tel que [AB], [DA], [BC], [CD] passent resp. par E, G, H, F,
	A'B'C'D'	le papillon inscrit dans *0* tel que A', B', C', D' soient les seconds points d'intersection de (AI), (BI), (CI), (DI) avec *0*
et	E', F', G', H'	les points d'intersection de *D* resp. avec [A'B'], [D'A'], [B'C'], [C'D'].

Donné : I est le milieu des segments [EE'], [FF'], [GG'] et [HH'].

VISUALISATION



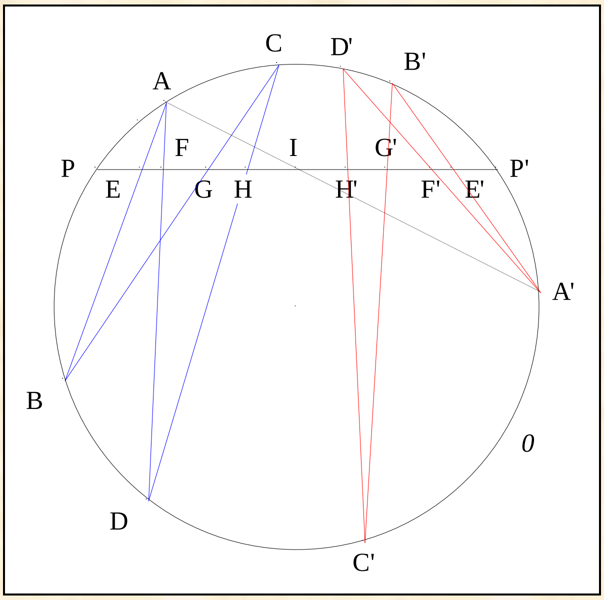
- D'après **A. 1.** Le problème de ?-Wallace, appliqué au papillon AA'B'B, I est le milieu de [EE'].
- Mutatis mutandis, nous montrerions que I est le milieu de [FF'], [GG'] et [HH'].
- **Conclusion :** I est le milieu de [EE'], [FF'], [GG'] et [HH'].

Scolie : nous dirons que A'B'C'D' est "le papillon jumeau de ABCD".

2. Le papillon jumeau de Dixon Jones

VISION

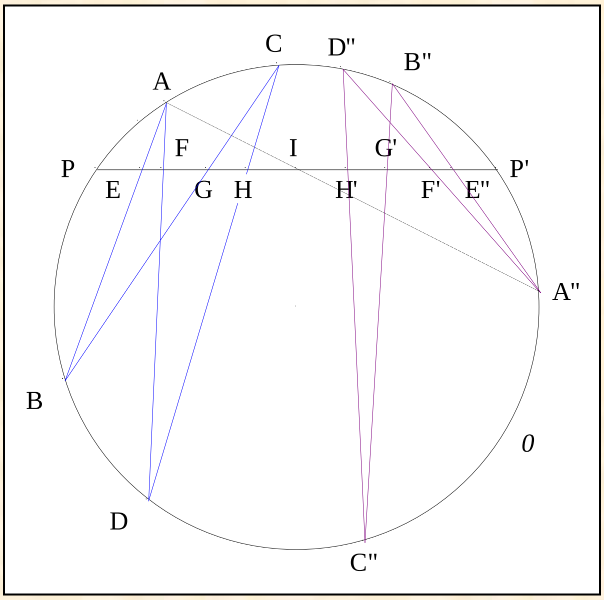
Figure :



Traits : *0* un cercle,
D une **sécante** à *0*,
P, Q les points d'intersection de *D* avec *0*,
I le milieu de la corde [PQ],
E, F, G, H quatre points dans cet ordre de [PI],
ABCD un papillon inscrit dans *0* tel que
[AB], [DA], [BC], [CD] passent resp. par E, G, H, F,
F', G', H' trois points de *D* tels que I soit le milieu de [FF'], [GG'], [HH'],
A'B'C'D' un papillon inscrit dans *0* tel que
[B'C'], [C'D'], [D'A'] passent resp. par G', H', F'
et E' le point d'intersection de [A'B'] et *D*.

Donné : I est le milieu de [EE'].[108]

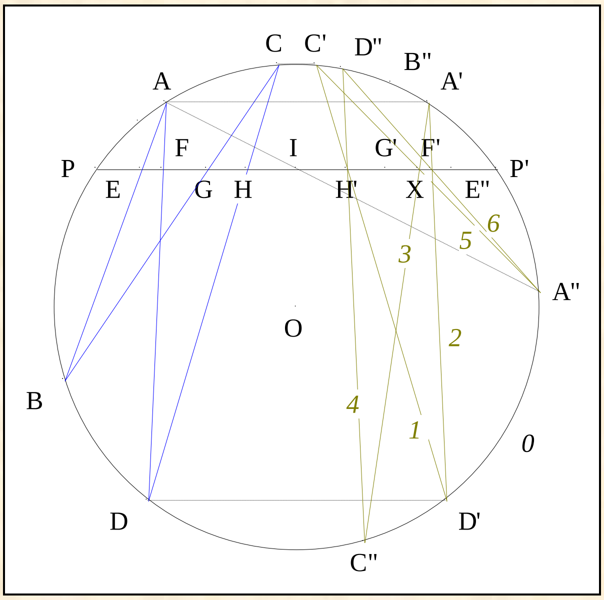
VISUALISATION



- Notons A"B"C"D" le papillon jumeau de ABCD
  et E" le point de *D* tels que I soit le milieu de [EE"].

- D'après **D. IV. 1.** Le papillon jumeau, **(1)** les côtés du papillon A"B"C"D" passent par E", F', G', H'
  (2) I est le milieu de [EE"], [FF'], [GG'] et [HH'].

[108] Jones D., A double butterfly theorem, *Mathematics Magazine* **49** (1976) 86-87.



- Notons O le centre de *0*.

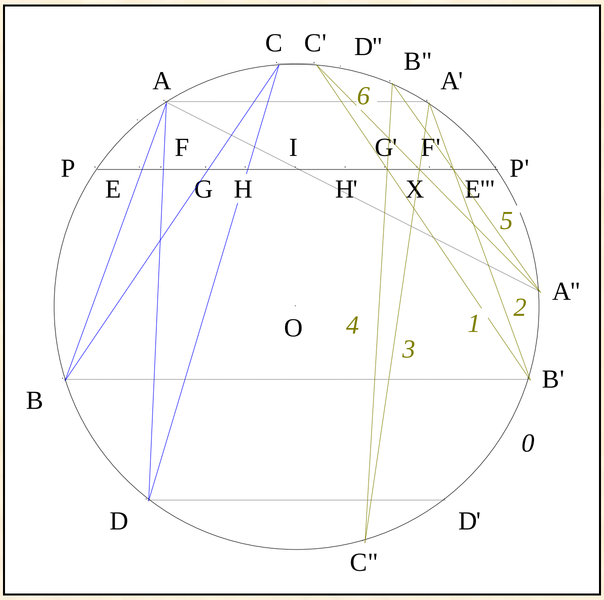
- **Scolies :** **(1)** (OI) est la médiatrice de [PQ]
  (2) (OI) est un axe de symétrie de *0*.

- Notons A', C', D' les symétriques resp. de A, C, D par rapport à (OI)
  et X le point d'intersection de [C'A''] et [A'C''].

- **Scolies :** **(1)** H' est le point d'intersection de (C'D') et (C''D'')
  (2) F' est le point d'intersection de (A'D') et (A''D'').

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **4**),
  (H'F'X) est la pascale de l'hexagone cyclique C'D'A'C''D''A''C'.

- **Conclusion partielle :** X est sur *D*.



- Notons B' le symétrique de B par rapport à (OI)
  et E''' le point d'intersection de [A'B'] et [A''B''].

- **Scolie :** I est le milieu du segment [EE'''].

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **4**),
  (G'E'''X) est la pascale de l'hexagone C'B'A'C"B"A"C'.

- **Conclusion partielle :** E''' est sur *D*.

- Par hypothèse, E' est le point d'intersection de [A'B'] et *D* ;
  en conséquence, E' et E''' sont confondus.

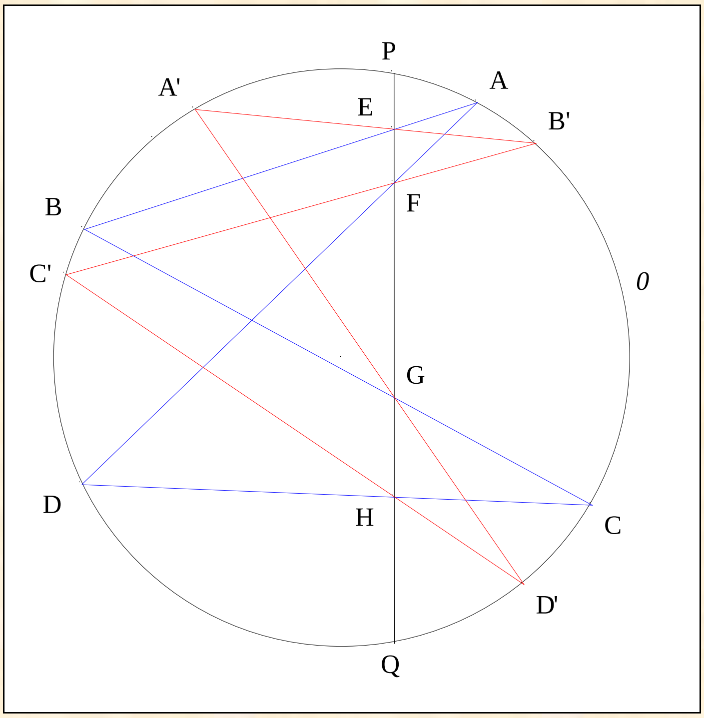
- **Conclusion :** I est le milieu de [EE'].

Note historique : la démonstration de Dixon Jones est trigonométrique. En 1990, Larry Hoehn[109] propose une preuve métrique basée sur le théorème d'Haruki.

3. Le papillon siamois de Dixon Jones

VISION

Figure:

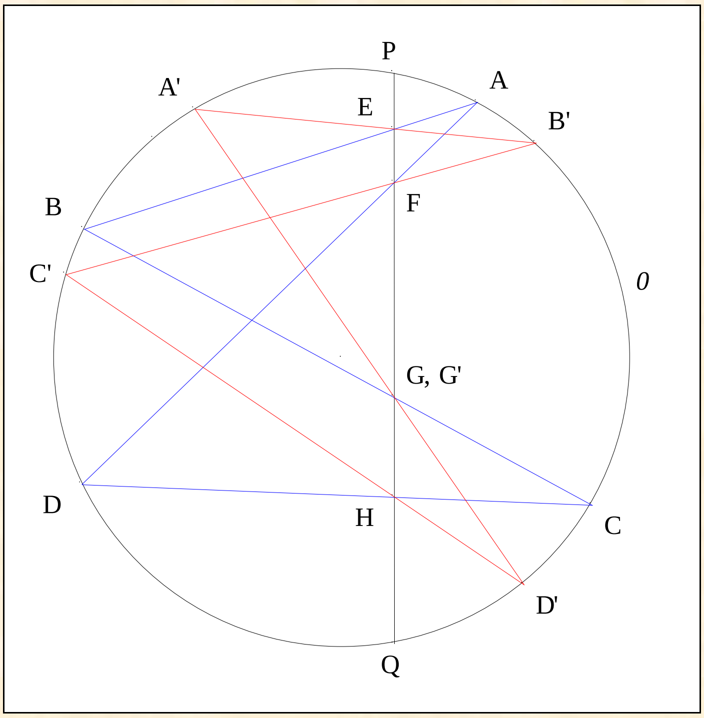


Traits:	*0*	un cercle,
	ABCD	un papillon inscrit dans *0*,
	[PQ]	une corde de *0*,
	E, G, H, F	les points d'intersection de [PQ] resp. avec [AB], [BC], [CD], [DA],
et	A'B'C'D'	un papillon inscrit dans *0* tel que
		[A'B'], [B'C'], [C'D'] passent resp. par E, F, H.

Donné: [A'D'] passe par G.[110]

109 Hoehn L., A new proof of the Double Butterfly Theorem, *Mathematical Magazin*, **63** (1990) 256-257.

VISUALISATION



- Notons G' le point d'intersection de [A'D'] et [PQ].

- D'après "Le lemme d'Haruki" (Cf. Appendice **J. V. 1.**), $\frac{GP.HQ}{GH} = \frac{G'P.HQ}{G'H}$;

  par simplification : $\frac{GP}{GH} = \frac{G'P}{G'H}$;

  en conséquence, G' et G sont confondus.

- **Conclusion :** [A'D'] passe par G.

Énoncé traditionnel : *given a cyclic quadrilateral inscribed in a circle, a line (not necessarily crossing the circle) and four points on the line in which the sides of the quadrilateral cross the line.*
For any other quadrilateral inscribed in the circle, if three of its sides pass through any three (of the above four) points on the line, then the fourth side passes through the fourth point.
Number 4 in the statement can be replaced with any even number.

Scolies : **(1)** une autre formulation

Traits:

0	un cercle,
E, F, G, H	quatre points alignés,
A	un point de *0*,
B	le second point d'intersection de (AE) avec *0*,

[110] Jones D, Quadrangles, Butterflies, Pascal's Hexagon and Projective Fixed Points, *Amer Math Monthly* **87**, **3** (Mar., 1980) 197-200

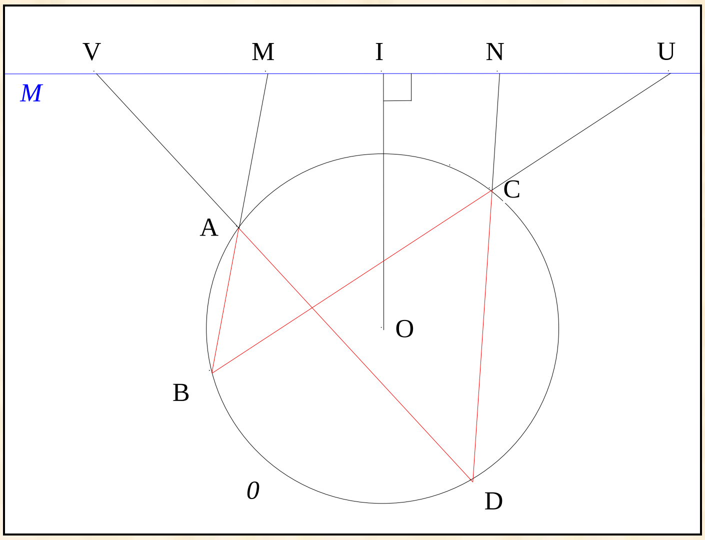
C le second point d'intersection de (BG) avec *0*,
D le second point d'intersection de (CH) avec *0*
et A' le second point d'intersection de (DF) avec *0*.

Donné: s'il existe A de *0* tel que A' et A soient confondus
alors, ce résultat est vrai pour tout point de *0*.

(2) Tigran Sloyan a généralisé ce résultat au cas de 2n points, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. [111]

V. PAPILLONS DÉSAXÉS

I. Rappel



Tous les papillons et exercices étudiés ont en commun

la perpendicularité de (OI) relativement à *M* et la miliosité de I.

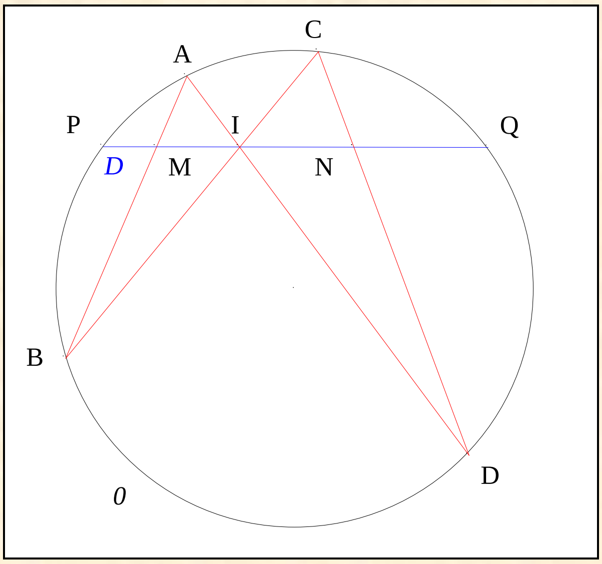
Pour aller vers une plus grande généralisation, abandonnons la perpendicularité et la miliosité.

2. Le papillon désaxé de ?-Wallace

VISION

Figure :

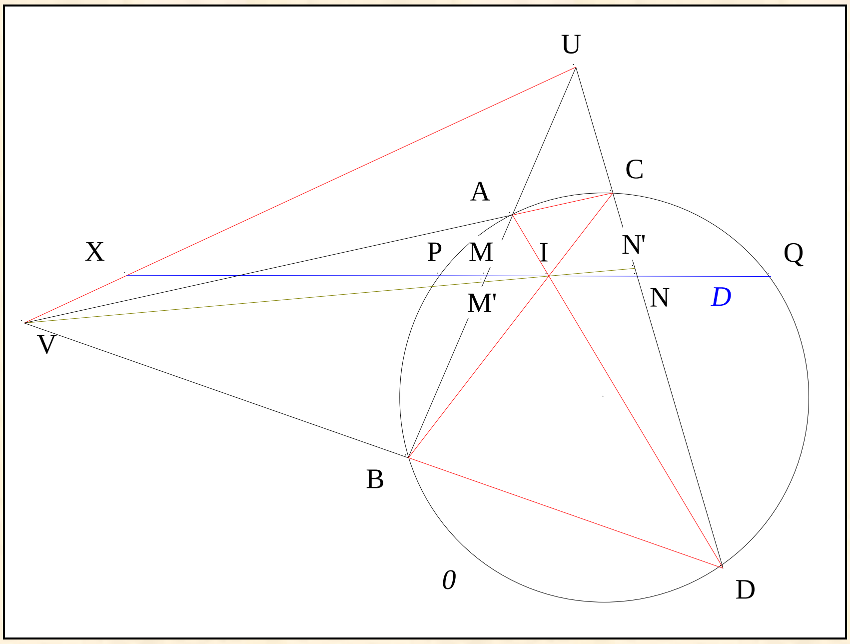
[111] Tigran Sloyan (Tiks), A wonderful and probably new Theorem!, *Mathlinks* du 13/02/2007



Traits : 0 un cercle,
D une **sécante** à *0*,
P, Q les points d'intersection de *D* avec *0*,
I un point de la corde [PQ],
ABCD un quadrilatère croisé inscrit dans *0* tel que les côtés [AD] et [BC] se coupent en I
et M, N les points d'intersection de (AB), (CD) avec *D*.

Donné : $\frac{1}{IM} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IP} + \frac{1}{IQ}$.[112]

VISUALISATION

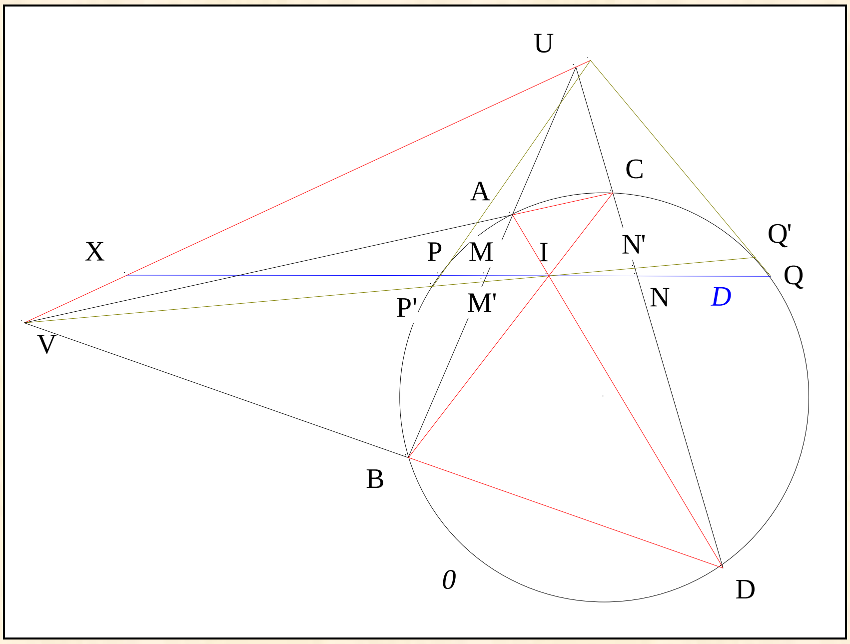


[112] Extended butterfly, *Mathlinks* du 27/01/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=24896
Butterfly 's theorem, *Mathlinks* du 25/02/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=28062
Challenging Geometry Proof, *Mathlinks* du 11/04/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=344604

- Notons U, V les points d'intersection resp. de (AB) et (CD), (AC) et (BD),
  X le point d'intersection de *D* et (UV),
  et M', N' les points d'intersection resp. de (IV) avec (AB), (CD).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" (Cf. Annexe **6**),
  appliqué à ADCB, la quaterne (M', N', I, V) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (U ; M', N', I, V) est harmonique ;
  il s'en suit que la quaterne (M, N, I, X) est harmonique.

- **Conclusion partielle :** d'après "La relation de Descartes" (Cf. Annexe **7**), $\frac{1}{\overline{IM}} + \frac{1}{\overline{IN}} = \frac{2}{\overline{IX}}$.



- Notons P', Q' les seconds points d'intersection de (IV) avec *0*.

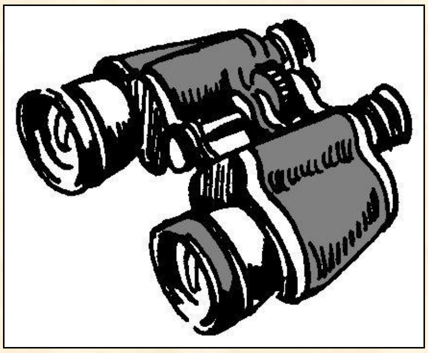
- **Scolie :** (PP') et (QQ') se coupent sur (UV).

- Nous savons que la quaterne (P', Q', I, V) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (U ; P', Q', I, V) est harmonique ;
  il s'en suit que la quaterne (P, Q, I, X) est harmonique.

- **Conclusion partielle :** d'après "La relation de Descartes" (Cf. Annexe **7**), $\frac{1}{\overline{IP}} + \frac{1}{\overline{IQ}} = \frac{2}{\overline{IX}}$.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, $\frac{1}{\overline{IM}} + \frac{1}{\overline{IN}} = \frac{1}{\overline{IP}} + \frac{1}{\overline{IQ}}$.

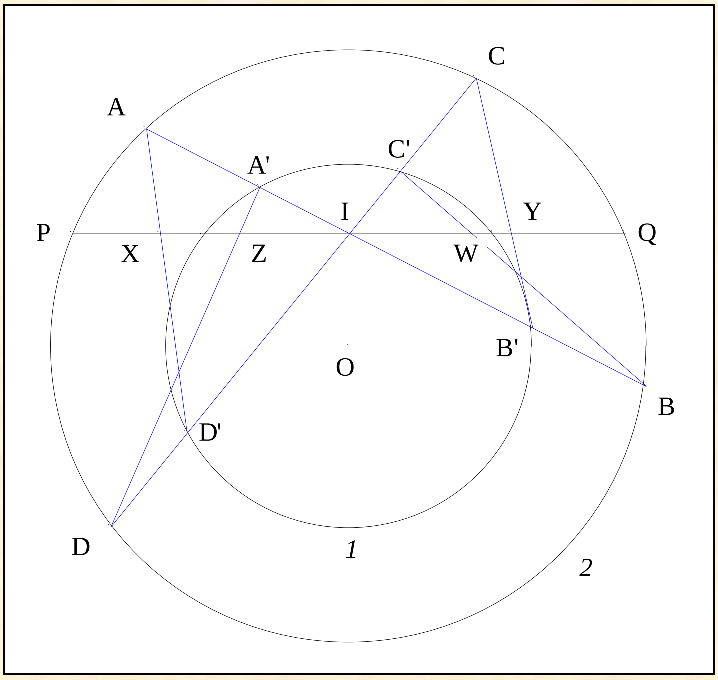
V. UN PAPILLON DANS LE CHAMP D'UNE JUMELLE



1. Le papillon de Qui Fawen ou "A Better Butterfly Theorem"

VISION

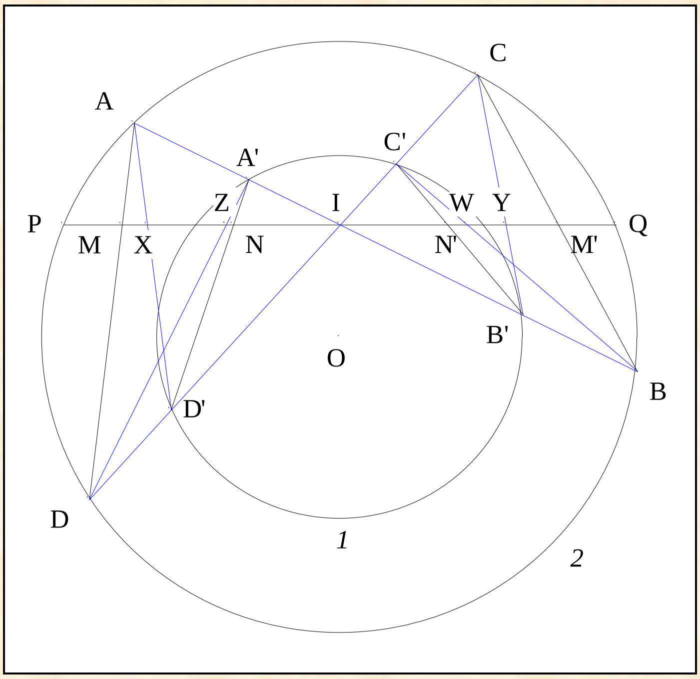
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles concentriques, *1* étant intérieur à *2*,
	O	le centre de *1*,
	[PQ]	une corde de *2*,
	I	le milieu de [PQ],
	P, *Q*	deux droites passant par I,
	A, B	les points d'intersection de *P* avec *2*,
	C, D	les points d'intersection de *Q* avec *2*,
	A', B'	les points d'intersection de (AB) avec *1* comme indiqués sur la figure,
	C', D'	les points d'intersection de (CD) avec *1* comme indiqués sur la figure
et	X, Y, Z, W	les points d'intersection de [PQ] resp. avec (AD'), (B'C), (A'D), (BC').

Donné : $\frac{1}{IX} + \frac{1}{IZ} = \frac{1}{IY} + \frac{1}{IW}$. [113]

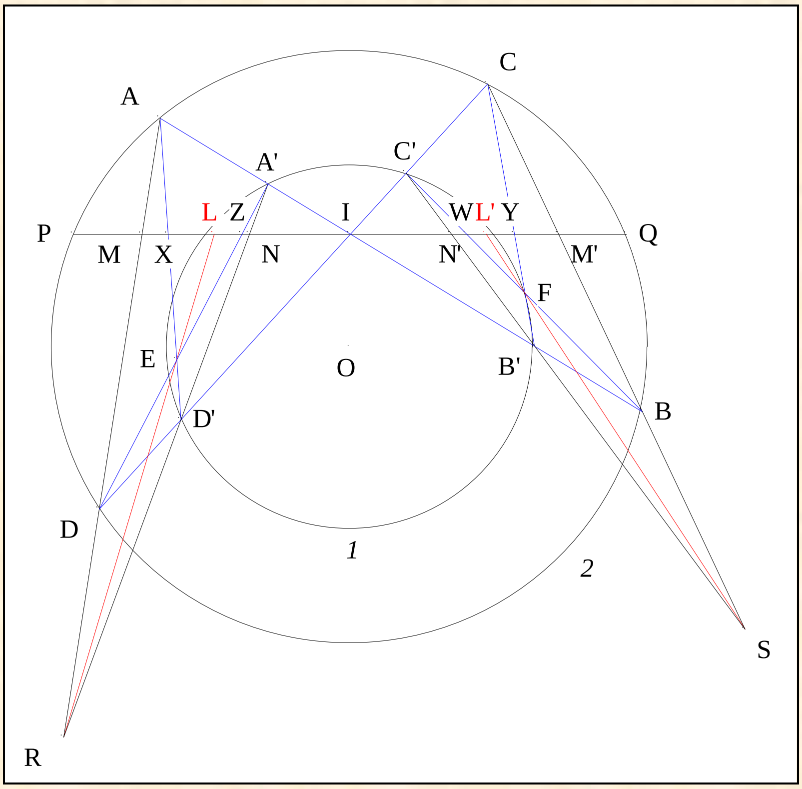
VISUALISATION



- Notons M, M' les points d'intersection de [PQ] resp. avec (AD), (BC)
  et N, N' les points d'intersection de [PQ] resp. avec (A'D'), (B'C').

- D'après **A. 1.** Le problème de **?**-Wallace
  appliqué **(1)** au papillon ABCD, I est le milieu de [MN]
  (2) au papillon A'B'C'D', I est le milieu de [M'N'].

[113] Bogomolny A., A Better Butterfly Theorem ; http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/BetterButterfly.shtml



- Notons R, S les points d'intersection resp. de (AD) et (A'D'), (BC) et (B'C'),
  E, F les points d'intersection resp. de (AD') et (DA'), (BC') et (CB'),
  et L, L' les points d'intersection de [PQ] resp. avec (ER), (FS)

- **Scolies :** **(1)** la quaterne (M, N, L, I) est harmonique
  (2) la quaterne (M', N', L', I) est harmonique.

- **Conclusion partielle :** par symétrie par rapport à I, nous en déduisons que I est le milieu de [LL'].

- **D'après ???** **(1)** la quaterne (X, Z, L, I) est harmonique
  (2) la quaterne (Y, W, L', I) est harmonique.

- D'après "La relation de Descartes" (Cf. Annexe **7**)

(1) $$\frac{1}{\overline{IX}}+\frac{1}{\overline{IZ}}=\frac{2}{\overline{IL}}$$

(2) $$\frac{1}{\overline{IY}}+\frac{1}{\overline{IW}}=\frac{2}{\overline{IL'}}\ .$$

- **Conclusion :** en passant au longueur et par transitivité de la relation = , $\frac{1}{IX}+\frac{1}{IZ}=\frac{1}{IY}+\frac{1}{IW}$.

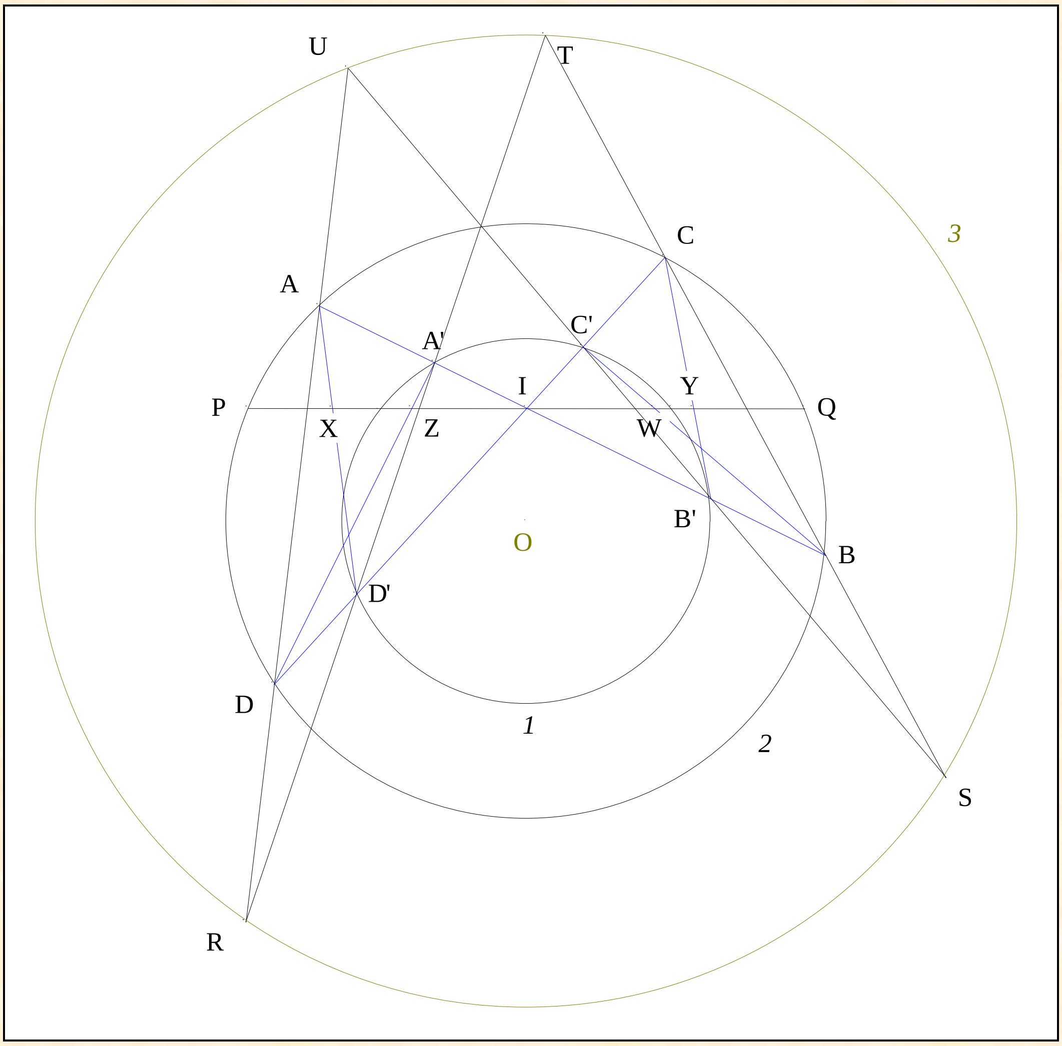
Note historique : ce papillon a été découvert en 1997 par Qiu Fawen, un professeur chinois en compagnie de ses étudiants.
Le nom de "A Better Butterfly Theorem" a été donné par Alexander Bogomolny car la figure de Qiu Fawen lui a suggéré une présentation plus réaliste d'un papillon.

Scolie : ce papillon n'est pas désaxé.

2. L'auteur et le papillon de Qui Fawen

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

R, S, T, U les points d'intersection resp. de (AD) et (A'D'), (BC) et (B'C'), (BC) et (A'D'), (AD) et (B'C').

Donné : R, S, T et U sont cocycliques.

VISUALISATION

- Une chasse angulaire à Π près :

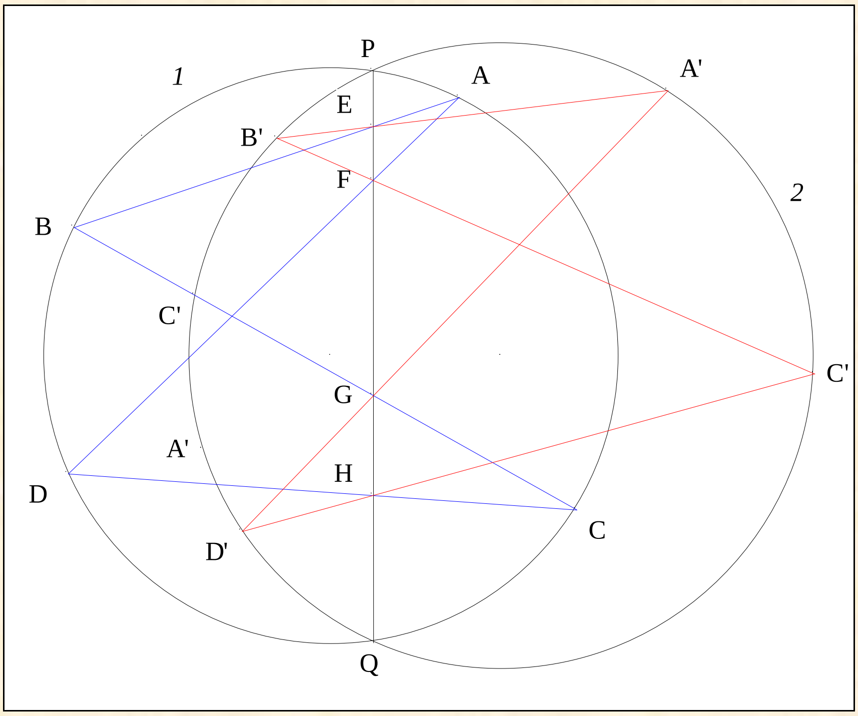
nous avons	<TRU	= <D'RD ;
en considérant le triangle D'RD,	<D'RD	= <D'DA - <DD'R ;
par une autre écriture,	<D'DA - <DD'R	= <CDA - <C'D'A' ;
d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<CDA - <C'D'A'	= <CBA - <C'B'A' ;
en considérant le triangle B'SB,	<CBA - <C'B'A'	= <BSB' ;
par une autre écriture,	<BSB'	= <TSU ;
par transitivité de la relation =,	<TRU	= <TSU.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de l'angle inscrit", R, S, T et U sont cocycliques.

3. Le papillon de Nathan Bowler

VISION

Figure :

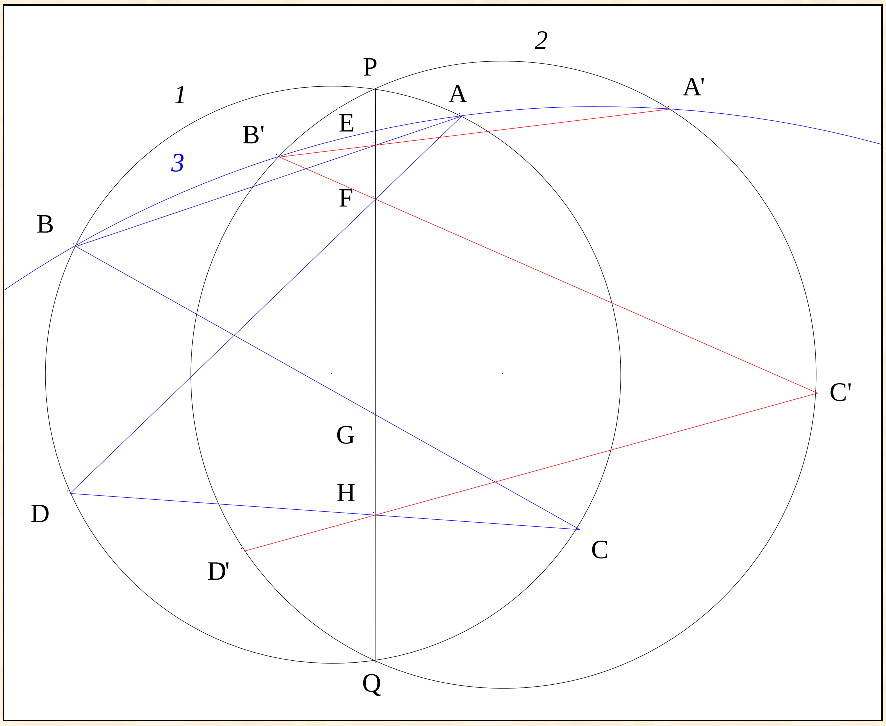


Traits : *1, 2* deux cercles sécants,
P, Q les points d'intersection de *1* et *2*,
E, F, G, H quatre points dans cet ordre de [PQ],
ABCD un papillon inscrit dans *1* tel que
[AB], [DA], [BC], [CD] passent resp. par E, G, H, F,
A'B'C'D' un papillon inscrit dans *2* tel que
[A'B'], [B'C'], [C'D'] passent resp. par E, F, H,

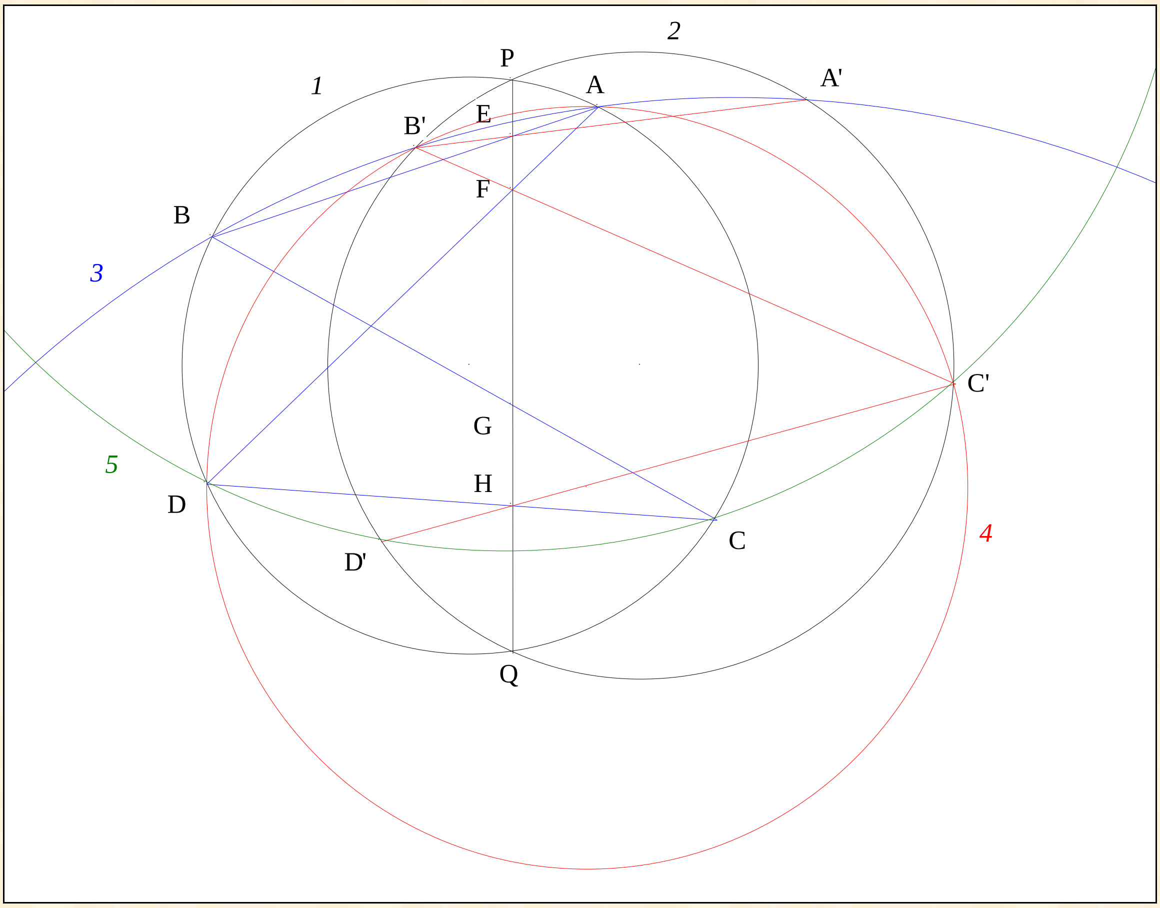
Donné : [A'D'] passe par G.[114]

VISUALISATION

114 Bowler N.
Bogomolny A., TwoButterflies Theorem II ; http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/TwoButterflies2.shtml



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"[115], A, A', B et B' sont cocycliques.
- Notons 3 ce cercle.



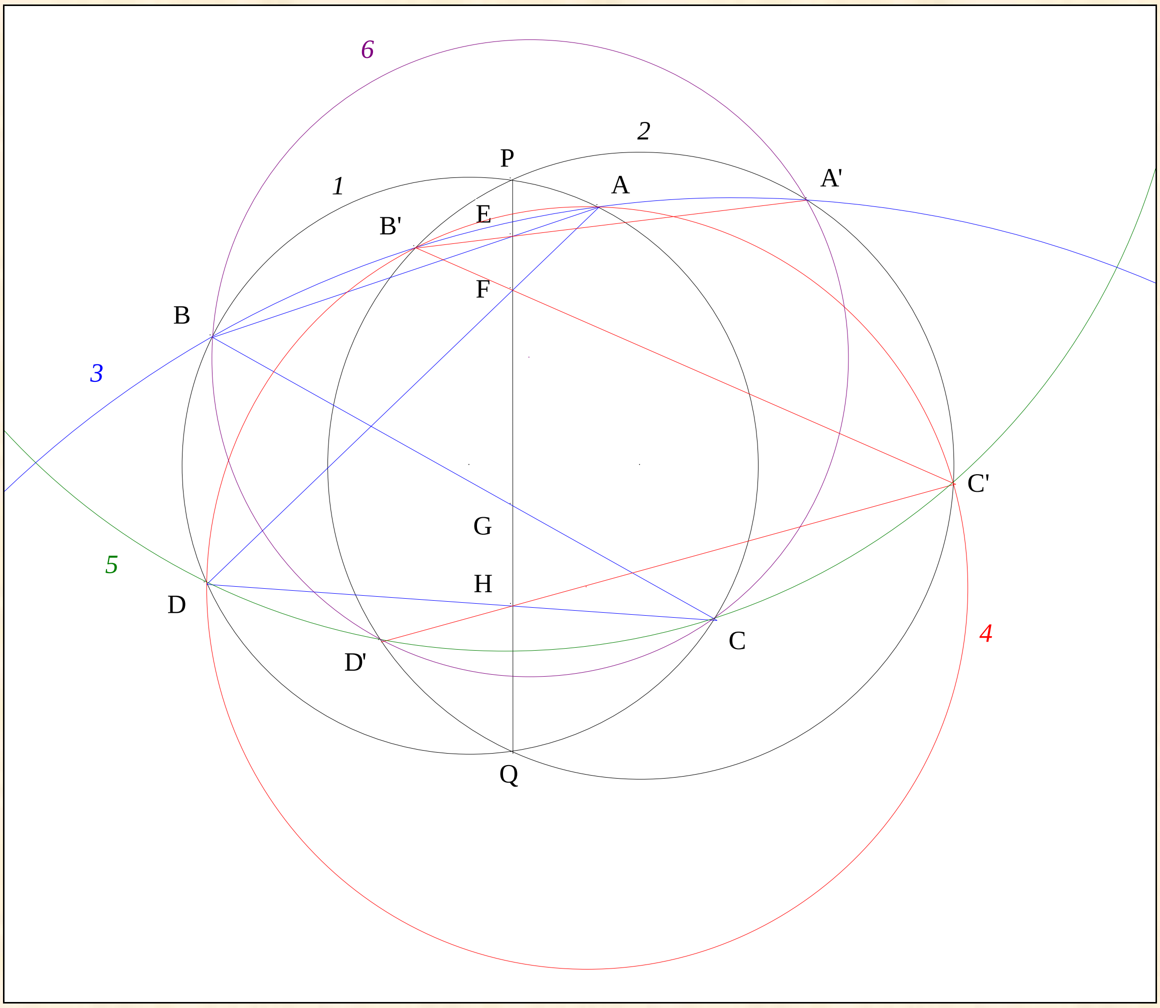
[115] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"[116], A, D, B' et C' sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"[117], C, D, C' et D' sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.



- D'après Miquel "Le théorème des six cercles"[118] appliqué à *4* avec A, D, C', B'

  1 passe par A et D
  5 passe par A et C'
  2 passe par C' et B'
  3 passe par B' et A ;

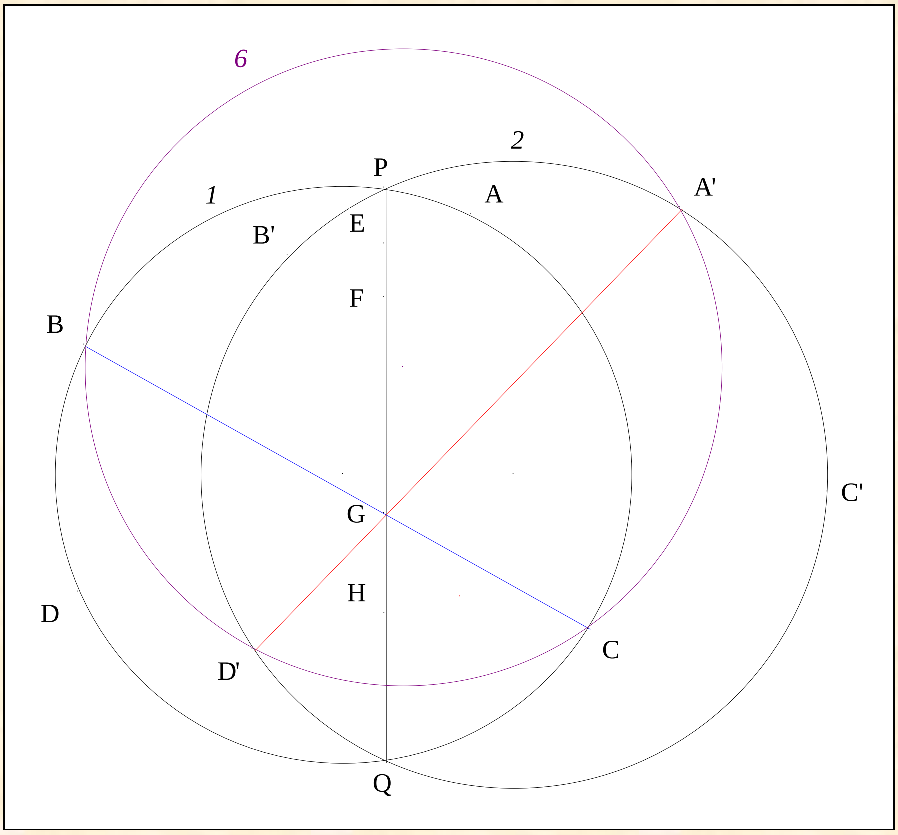
  1 et *5* se recoupent en C
  5 et *2* se recoupent en D'
  2 et *3* se recoupent en A'
  3 et *1* se recoupent en B ;

en conséquence, C, D', A' et B sont cocycliques.

- Notons *6* ce cercle.

---

116 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
117 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
118 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

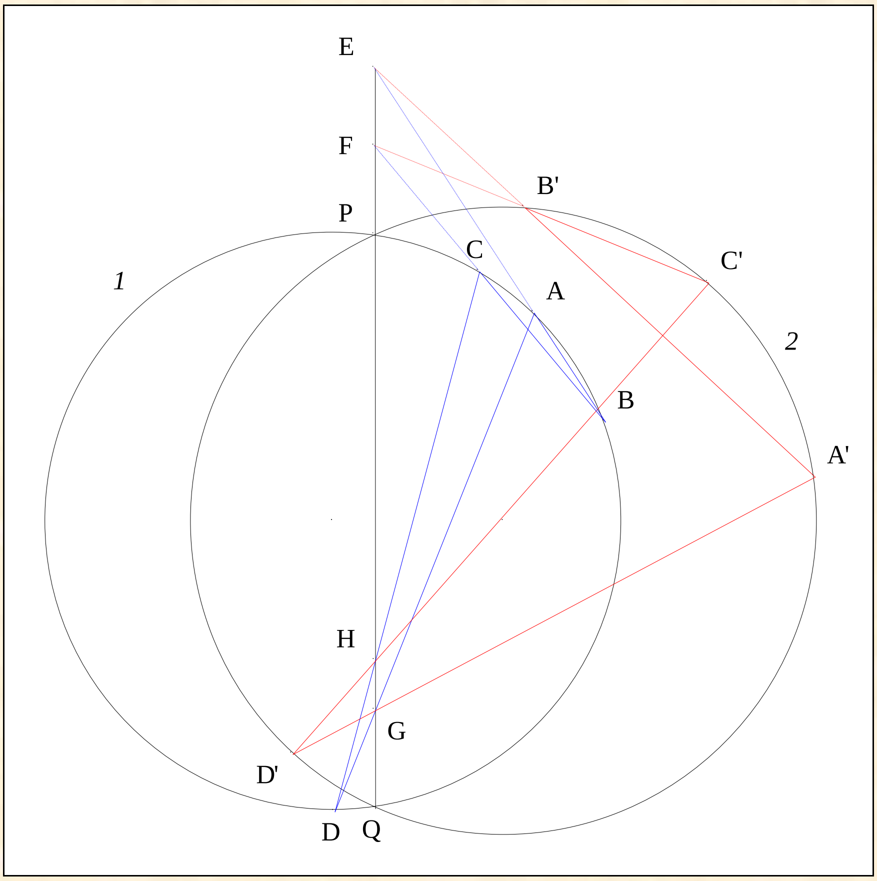


- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes"[119]
  appliqué à *1*, *2* et *6*, [A'D'] passe par G.

Note historique : Nathan Bowler a observé que les deux papillons peuvent vivre indépendamment dans deux cercles pourvu qu'ils soient sécants.

Scolie : parmi les points E, F, G et H, des points peuvent être sur (PQ) mais en dehors de [PQ].

[119] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



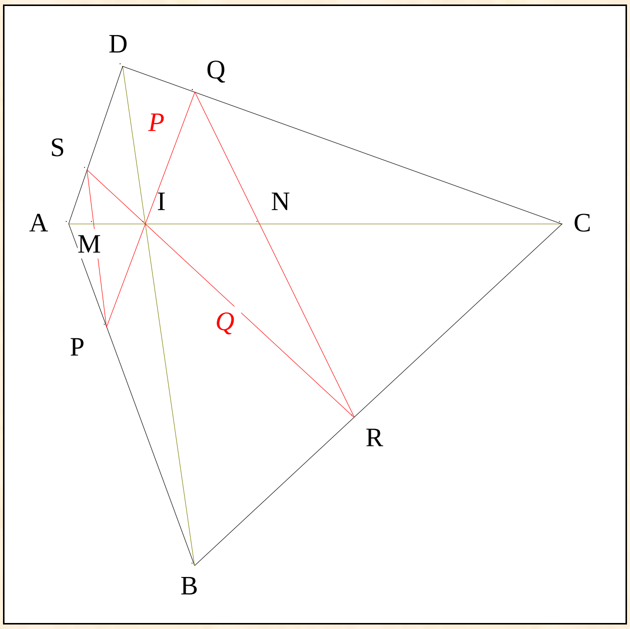
E
F
P
B'
C
C'
A
1
2
B
A'
H
G
D'
D
Q

E. DANS UN FILET À PAPILLONS

1. Le papillon centré de Sidney H. Kung

VISION

Figure :

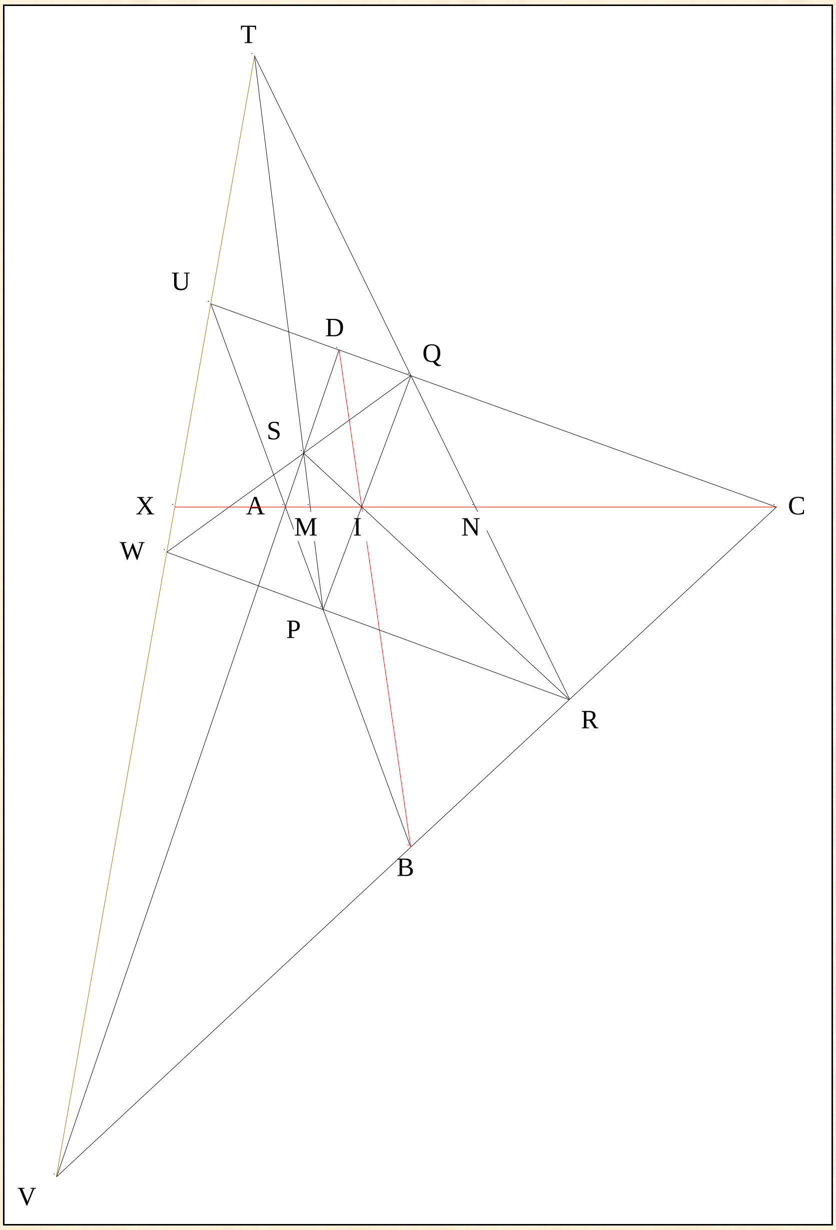


Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
I le point d'intersection de (AC) et (BD),
P, *Q* deux droites passant par I,
P, Q les points d'intersection de *P* resp. avec [AB], [CD],
R, S les points d'intersection de *Q* resp. avec [BC], [DA],
et M, N les points d'intersection de [AC] resp. avec [PS], [QR].

Donné : $\frac{1}{\overline{IA}} + \frac{1}{\overline{IC}} = \frac{1}{\overline{IM}} + \frac{1}{\overline{IN}}$. [120]

VISUALISATION

[120] Kung S., A Butterfly Theorem for Quadrilaterals, *Math. Mag.*, **78** (October 2005) 314–316.



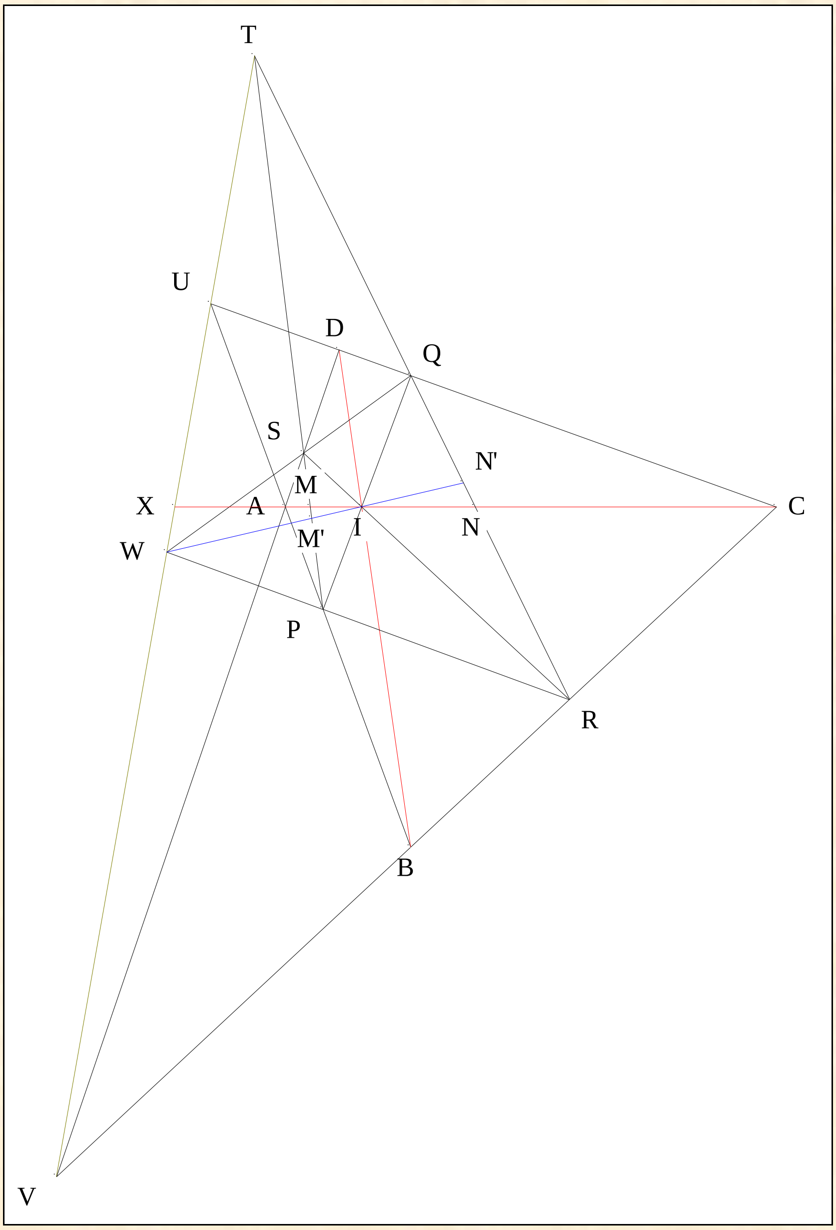
- Notons U, V les points d'intersection resp. de (AB) et (CD), (AC) et (BD),
  et W, T les points d'intersection resp. de (PR) et (QS), (PS) et (RQ).

- **Scolie :** U, V, W et T sont alignés (Cf. Appendice **IV**).

- Notons X le point d'intersection de (AC) et (UV).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" (Cf. Annexe **5**),
  appliqué à ABCD, la quaterne (A, C, I, X) est harmonique.

- **Conclusion partielle :** d'après "La relation de Descartes" (Cf. Annexe **6**), $\frac{1}{\overline{IA}} + \frac{1}{\overline{IC}} = \frac{2}{\overline{IX}}$.



- Notons M', N' les points d'intersection de (IW) resp. avec (PS), (RQ).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" (Cf. Annexe 5),
  appliqué à PRSQ, la quaterne (M', N', I, W) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (T ; M', N', I, W) est harmonique ;
  il s'en suit que la quaterne (M, N, I, X) est harmonique.

- **Conclusion partielle :** d'après "La relation de Descartes" (Cf. Annexe **6**), $\frac{2}{\overline{IX}} = \frac{1}{\overline{IM}} + \frac{1}{\overline{IN}}$.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, $\frac{1}{\overline{IA}} + \frac{1}{\overline{IC}} = \frac{1}{\overline{IM}} + \frac{1}{\overline{IN}}$.

Note historique : cette situation a été envisagée dans le cas particulier où (BD) est la médiatrice de [AC].[121]

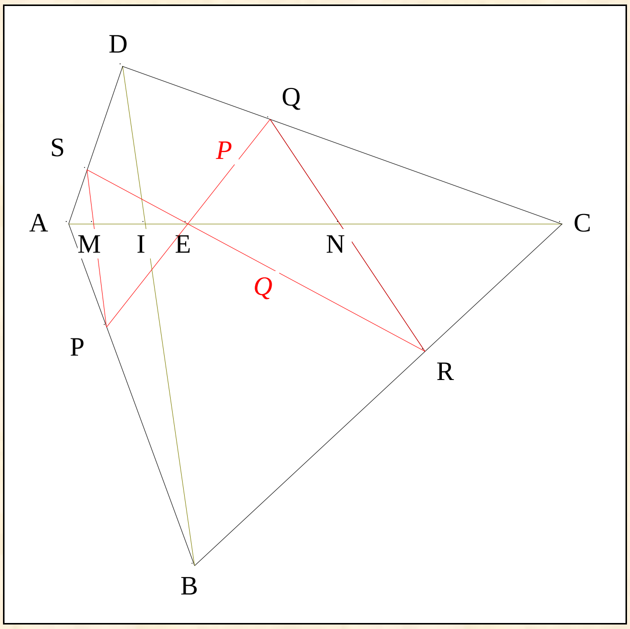
[121] New adventure of the beautiful butterfly, *Mathlinks* du 31/07/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=46358

La preuve de Sidney H. Kung a recours au théorème de Ménélaüs.

2. Le papillon décentré mais axé de Zvonko Cerin

VISION

Figure :

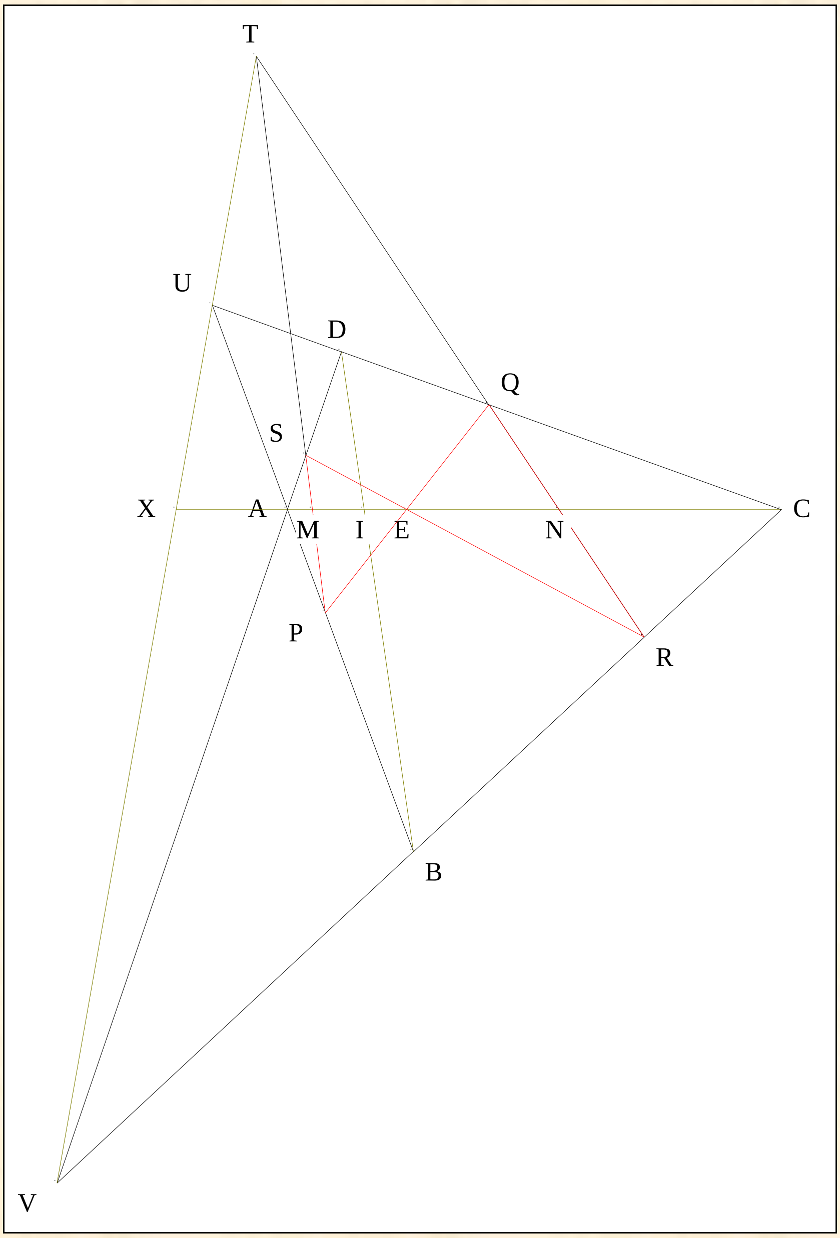


Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	I	le point d'intersection de [AC] et [BD],
	E	un point de [AC],
	P, *Q*	deux droites passant par E,
	P, Q	les points d'intersection de *P* resp. avec [AB], [CD],
	R, S	les points d'intersection de *Q* resp. avec [BC], [DA],
et	M, N	les points d'intersection de [AC] resp. avec [PS], [QR].

Donné : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \cdot \dfrac{\overline{NE}}{\overline{NC}} = -\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IC}}$.[122]

VISUALISATION

[122] Zvonko Cerin, On butterflies inscribed in a quadrilateral, *Forum Geometricorum* **6** (2006) 241—246 ; http://forumgeom.fau.edu/



- Notons U, V les points d'intersection resp. de (AB) et (CD), (AC) et (BD),
  et T les points d'intersection de (PS) et (RQ).

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**),
  appliqué au triangles APS et CQR perspectifs de centre I, U, T et V sont alignés.

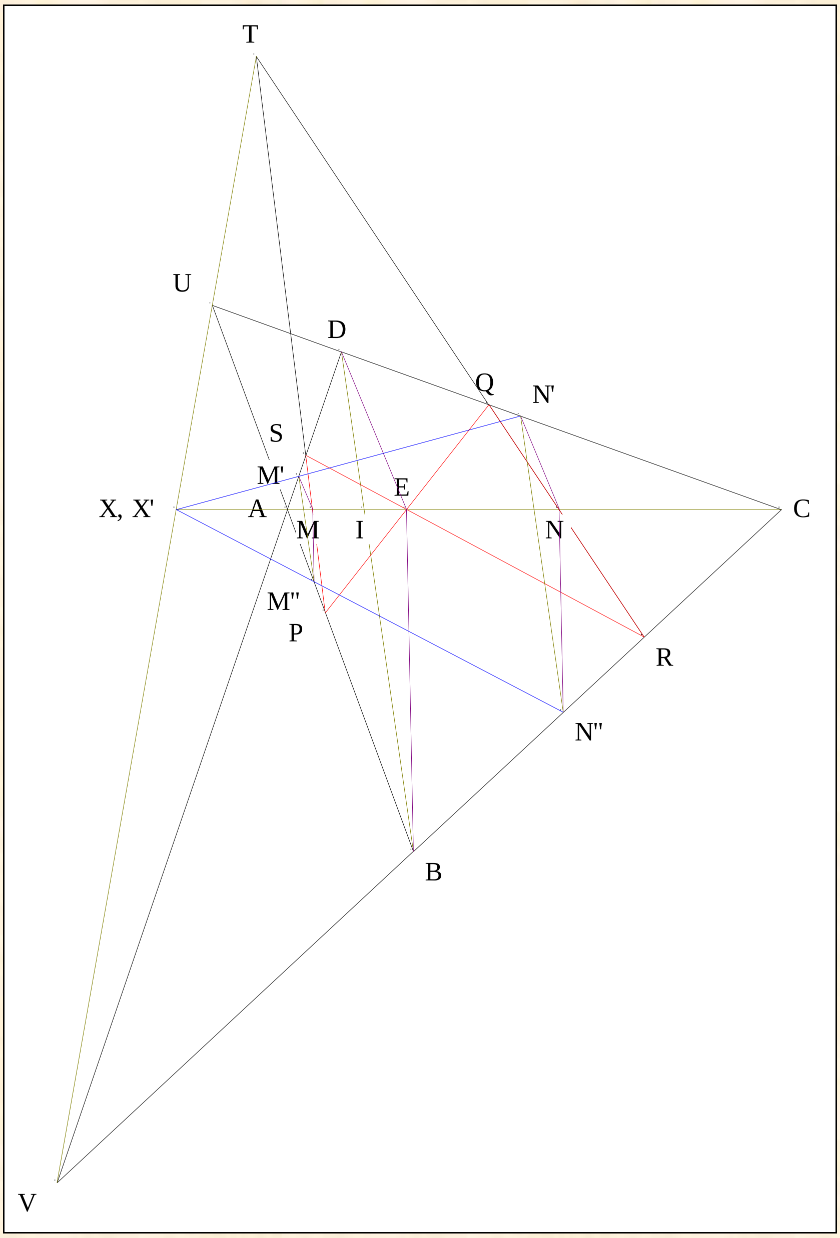
- Notons X le point d'intersection de (AC) et (UV).

- **Conclusion partielle :** d'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" (Cf. Annexe **5**),
  appliqué à ABCD, la quaterne (A, C, I, X) est harmonique

  i.e. $$\frac{\overline{XA}}{\overline{XC}} = -\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}}$$

Commentaire : ce qui change par rapport à **E. 1.** Le papillon centré de Sidney H. Kung,
c'est que nous n'utilisons pas

"La relation de Descartes", $\frac{2}{\overline{IX}} = \frac{1}{\overline{IA}} + \frac{1}{\overline{IC}}$.



- Notons M' le point d'intersection de la parallèle à (ED) passant par M avec [DA],
  N' le point d'intersection de la parallèle à (ED) passant par N avec [DC],
  M" le point d'intersection de la parallèle à (EB) passant par M avec [BA]
  et N" le point d'intersection de la parallèle à (EB) passant par N avec [BC].

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**)
  appliqué aux triangles MM'M" et EDB en perspective de centre A, (M'M") // (DB).

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**)
  appliqué aux triangles EDB et NN'N" en perspective de centre C, (DB) // (N'N") ;
  par transitivité de la relation //, (M'M") // (N'N").

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**)
  appliqué aux triangles homothétiques MM'M" et NN'N", (M'N'), (M"N") se coupent sur (BC).

- Notons X' ce point de concours.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**)
  appliqué aux triangles perspectifs DM'N' et BM''N'', (M'N'), (M''N'') se coupent sur (UV) ;
  en conséquence, X' et X sont confondus.[123]

- D'après "Le théorème de Ménélaüs"
  appliqué au triangle DAC et à la ménélienne (M'N'X), $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'D}} \cdot \frac{\overline{N'D}}{\overline{N'C}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XC}}$.

- Une chasse de rapport :
  d'après Thalès, $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'D}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}}$, $\frac{\overline{N'D}}{\overline{N'C}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{NC}}$;
  rappelons que $\frac{\overline{XA}}{\overline{XC}} = -\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}}$.

- **Conclusion :** par substitution, $\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{NE}}{\overline{NC}} = -\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}}$.

Scolie : le papillon de Zvonko Cerin est dit "axé" car son centre E est sur une diagonale de ABCD.

Commentaire : la preuve de Zvonko Cerin a recours à l'analytique et à Mapple.

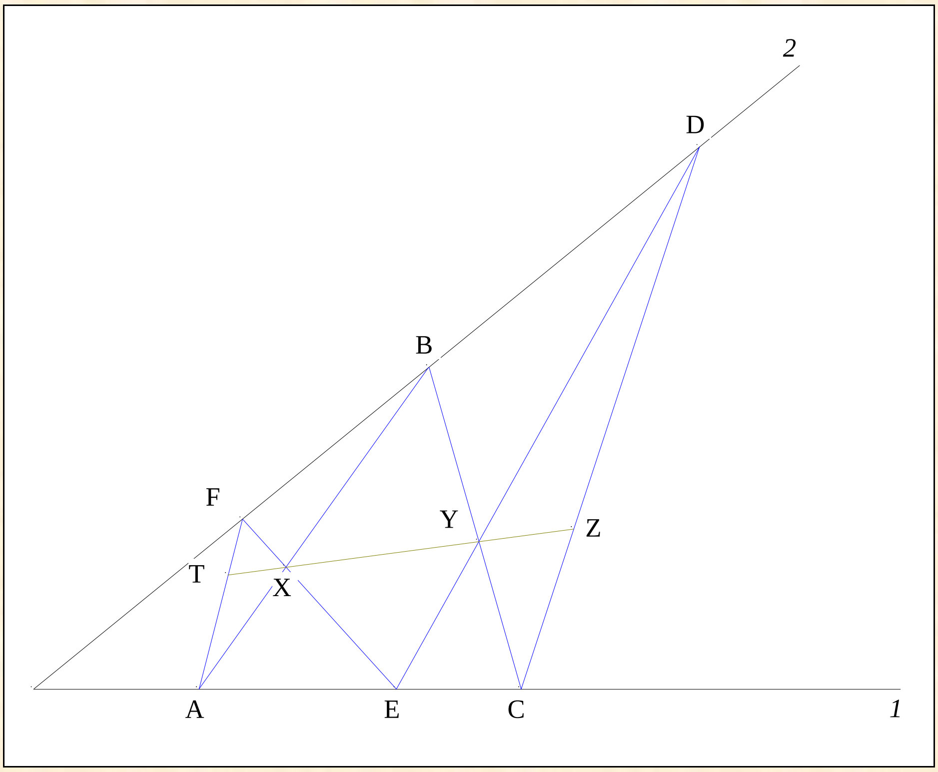
F. DANS UN FILET TROUÉ

1. Un hexagone de Pappus ou un papillon à trois ailes

VISION

[123] Ayme J.-L., Pour amateur de division harmonique, Les mathématiques.net ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,666250
Ayme J.-L., For an Olympiad again (own), *Mathlinks* du 28/04/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=404299

Figure :



Finition: *1*, *2* deux droites,
ABCDEF un hexagone ayant alternativement ses sommets sur *1*, *2*
X, Y les points d'intersection resp. de (AB) et (EF), (BC) et (DE),
et Z, T les points d'intersection de (XY) resp. avec (CD), (AF).

Définitions: **(1)** ABCDEF est "un hexagone de Pappus relativement à *1* et *2*"

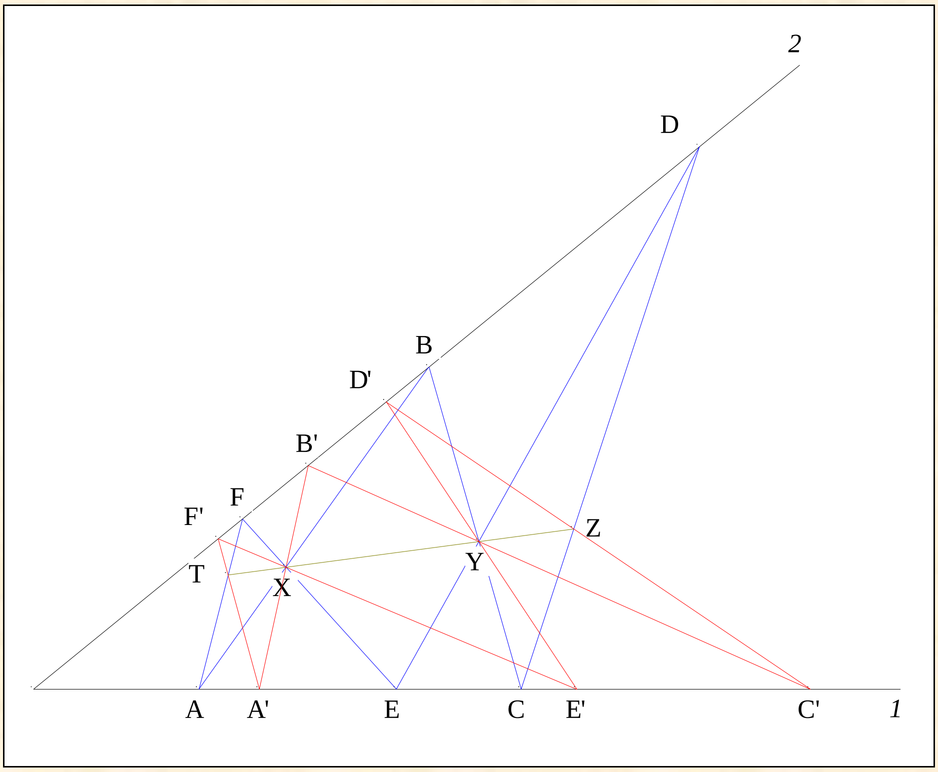
(2) (XY) est "la pappusienne de ABCD".

Scolie : pour l'auteur ABCD est "un papillon à trois ailes dans le filet troué (*1*, *2*) et (XYZT)".

2. Un papillon siamois à trois ailes

VISION

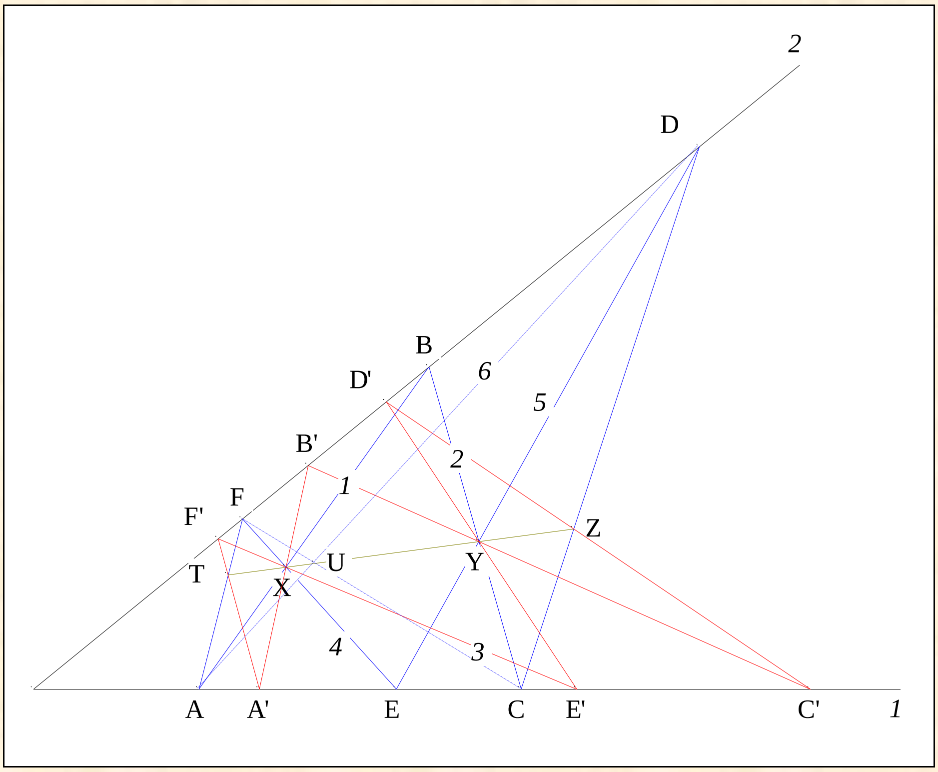
Figure :



Traits:	*1*, *2*	deux droites,
	ABCDEF	un papillon à trois ailes dans le filet troué (*1*, *2*) et (XYZT),
	A'	un point de *1*,
	B'	le point d'intersection de (A'X) avec *2*,
	C'	le point d'intersection de (B'Y) avec *1*,
	D'	le point d'intersection de (C'Z) avec *2*,
	E'	le point d'intersection de (D'Y) avec *1*,
et	F'	le point d'intersection de (E'X) avec *2*.

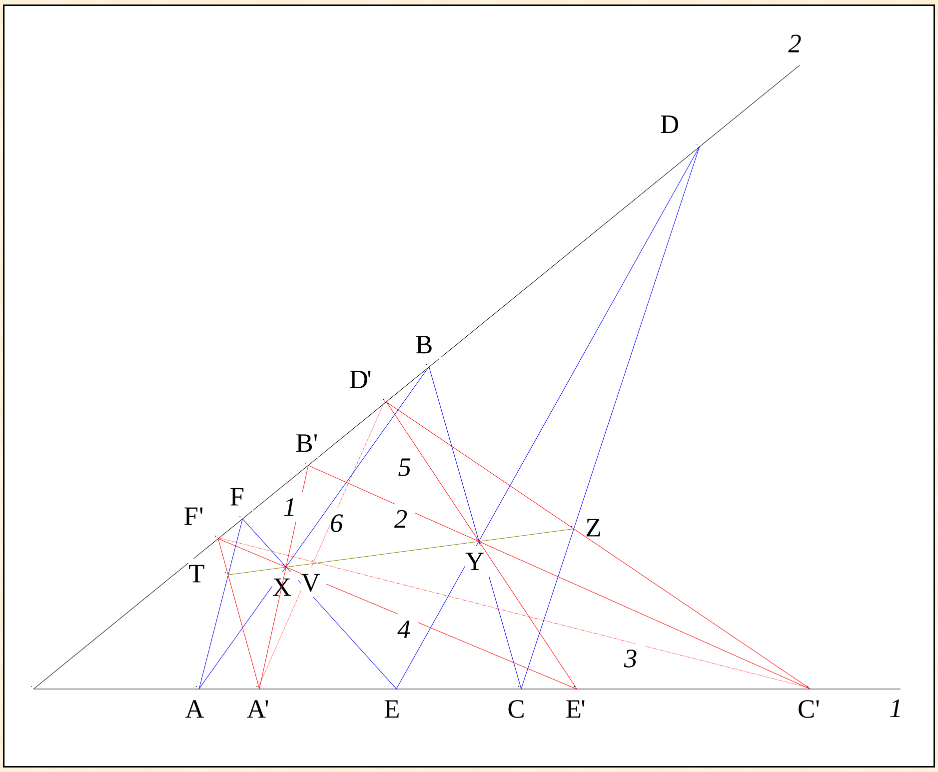
Donné: (A'F') passe par T.

VISUALISATION



- Notons U le point d'intersection de (AD) et (CF).

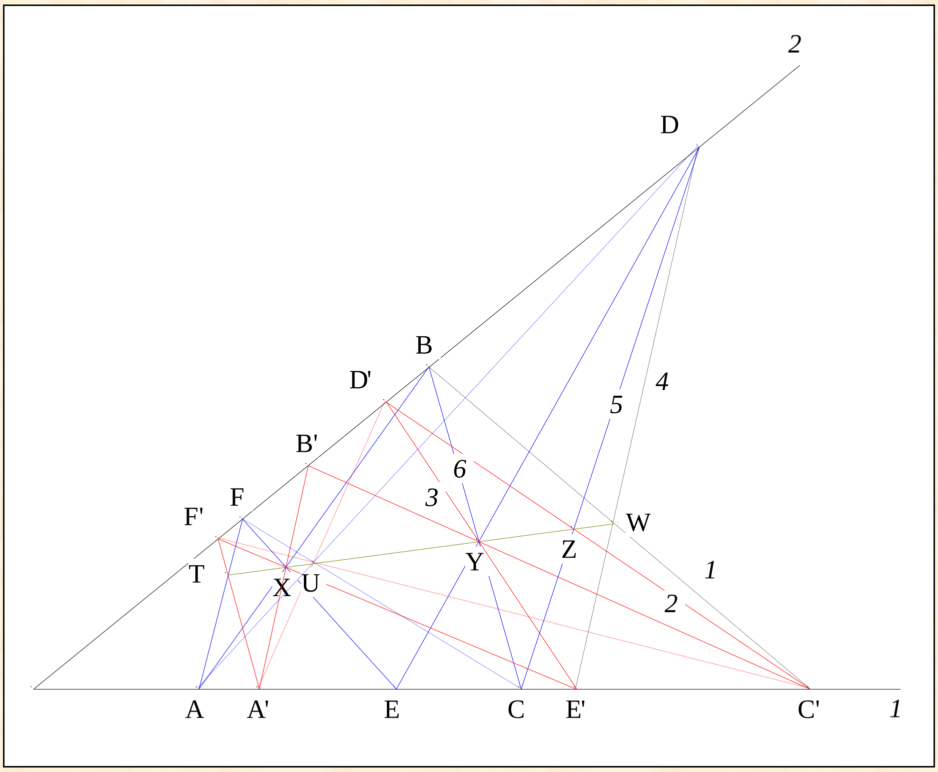
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)
  (XYU) est la pappusienne de l'hexagone ABCFEDA.



- Notons V le point d'intersection de (A'D') et (C'F').

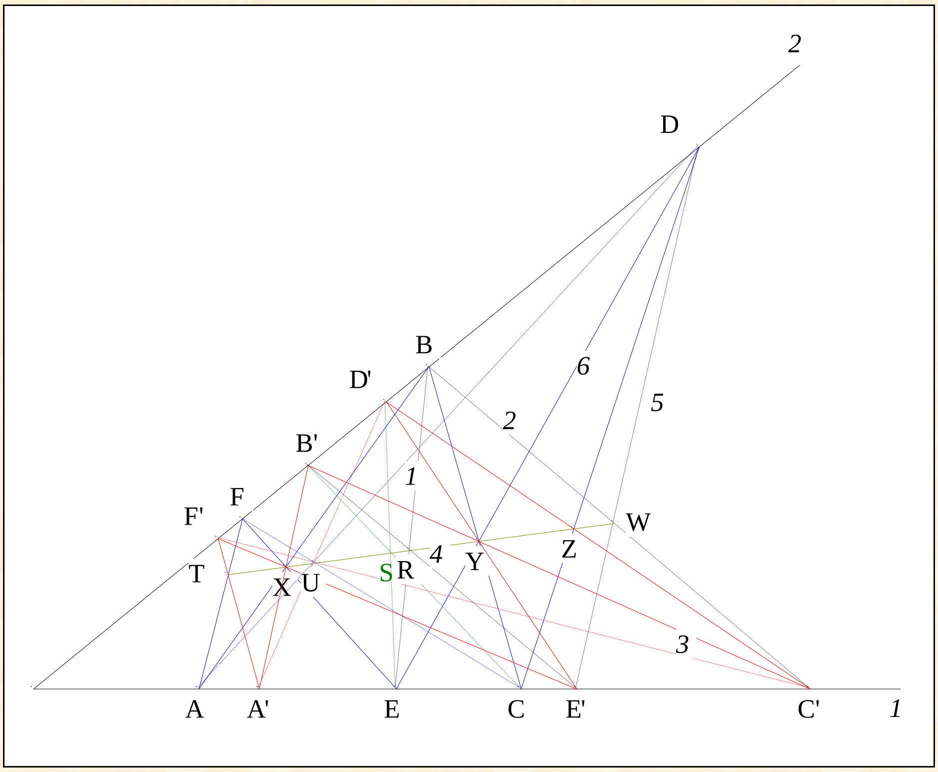
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)

(XYV) est la pappusienne de l'hexagone A'B'C'F'E'D'A'.



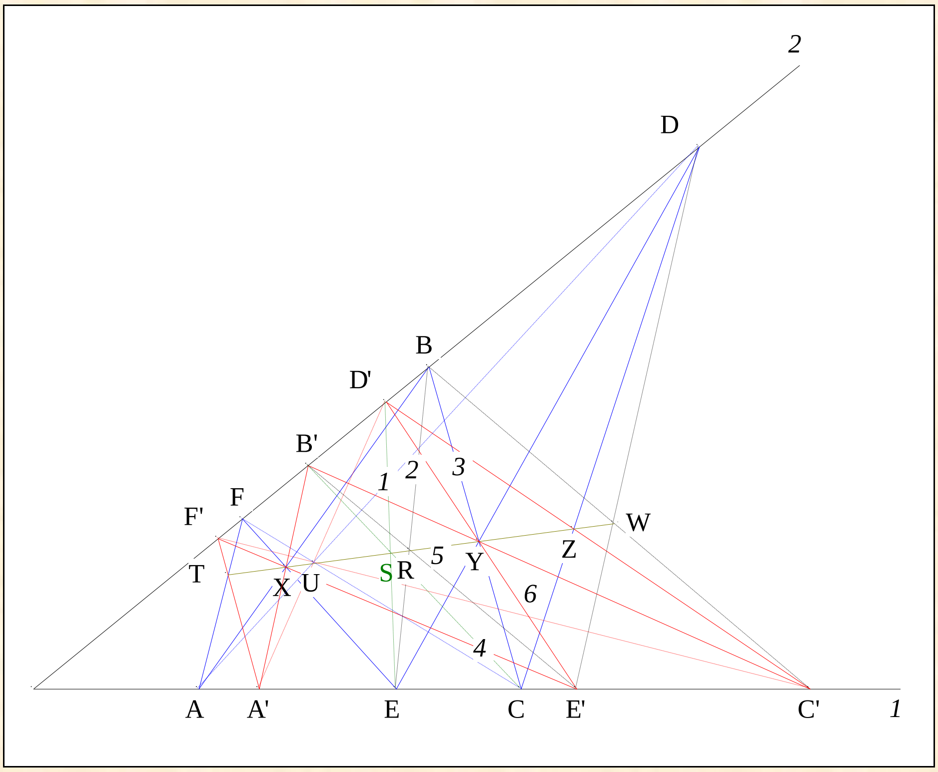
- Notons W le point d'intersection de (DE') et (BC').

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)
  (WZY) est la pappusienne de l'hexagone BC'D'E'DCB.



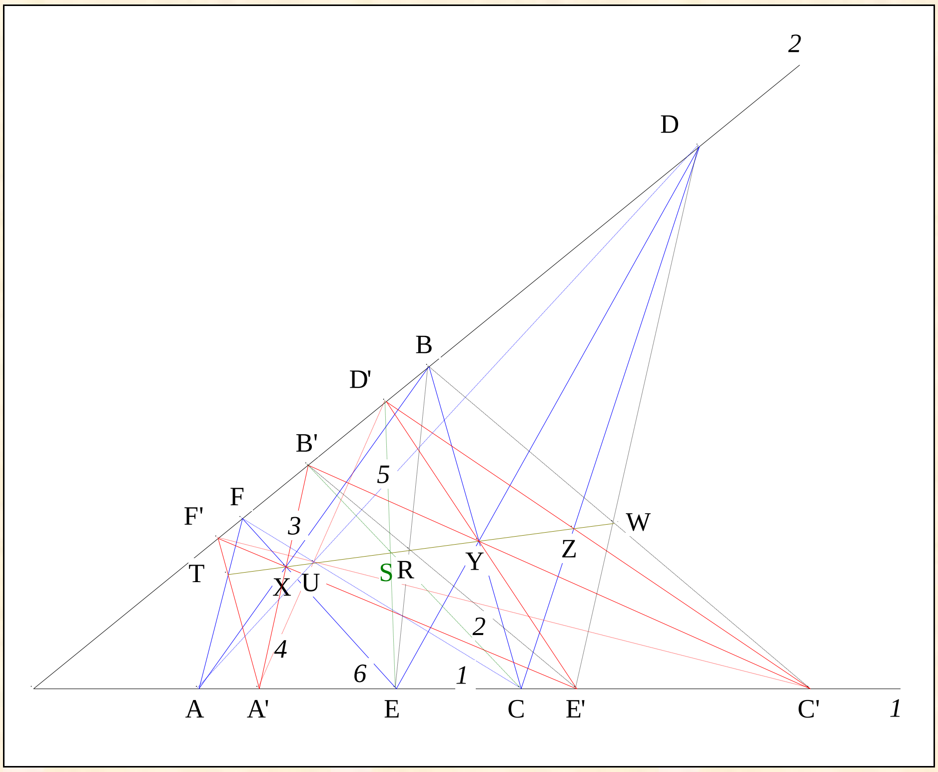
- Notons R le point d'intersection de (EB) et (E'B').

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)
  (RWY) est la pappusienne de l'hexagone EBC'B'E'DE.



- Notons S le point d'intersection de (ED') et (B'C').

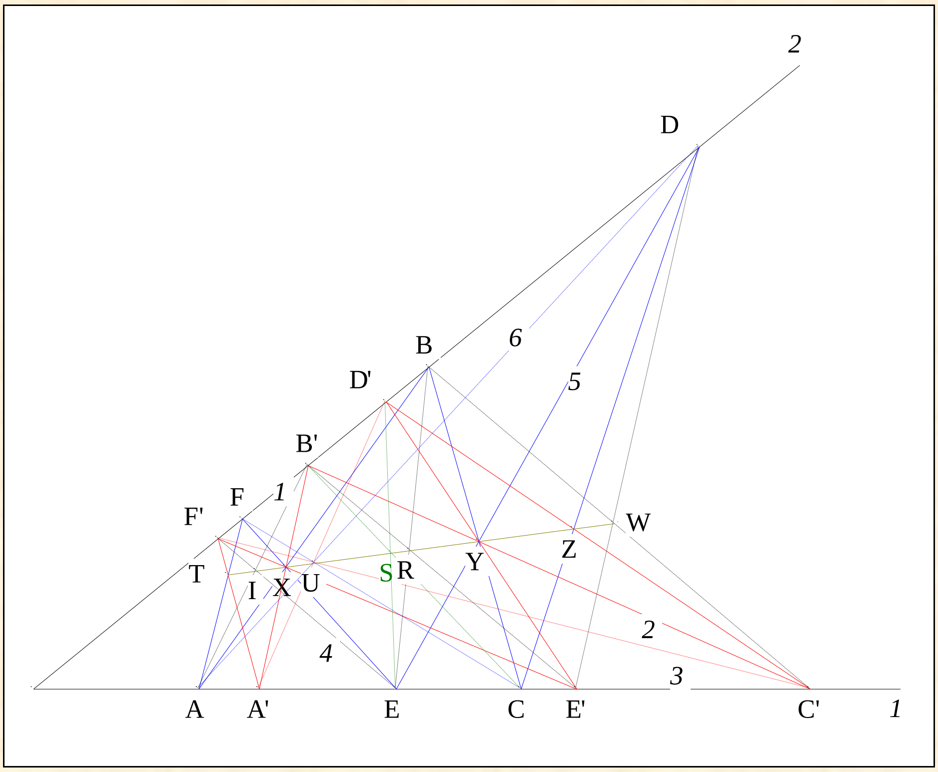
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)
  (SRY) est la pappusienne de l'hexagone D'EBCE'D'.



- Notons U' le point d'intersection de (A'D') et (CF).

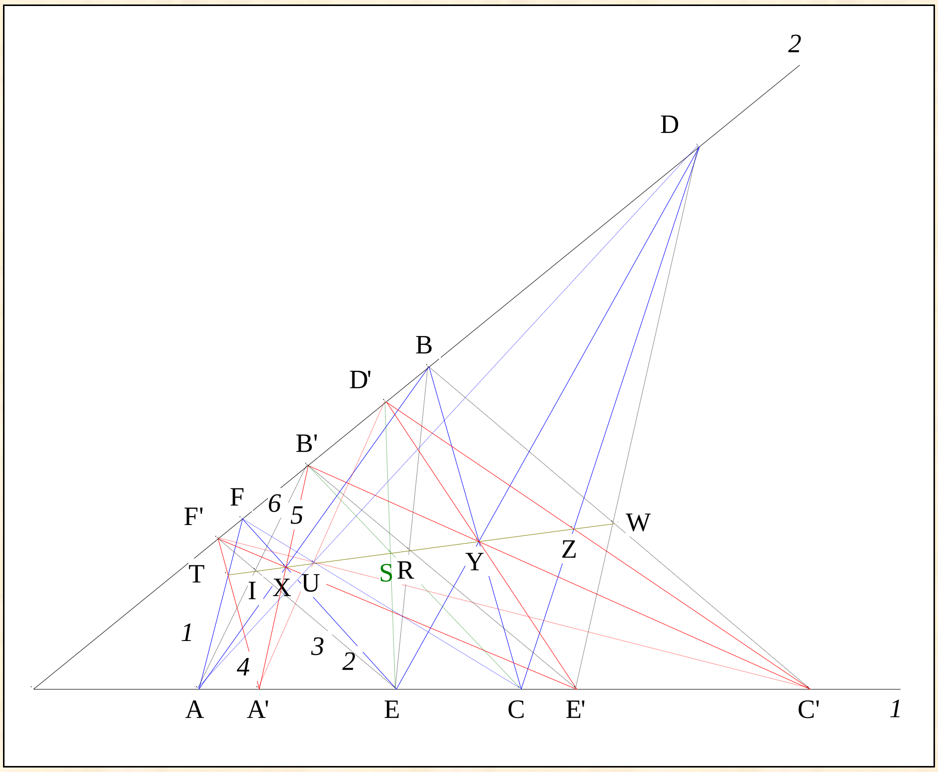
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)
  (U'SX) est la pappusienne de l'hexagone FCB'A'D'EF.

- **Conclusion partielle :** U, V et U' sont confondus.



- Notons I le point d'intersection de (AB') et (EF').

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)
  (IYU) est la pappusienne de l'hexagone AB'C'F'EDA.



- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**)
  (TXI) est la pappusienne de l'hexagone AFEF'A'B'A.

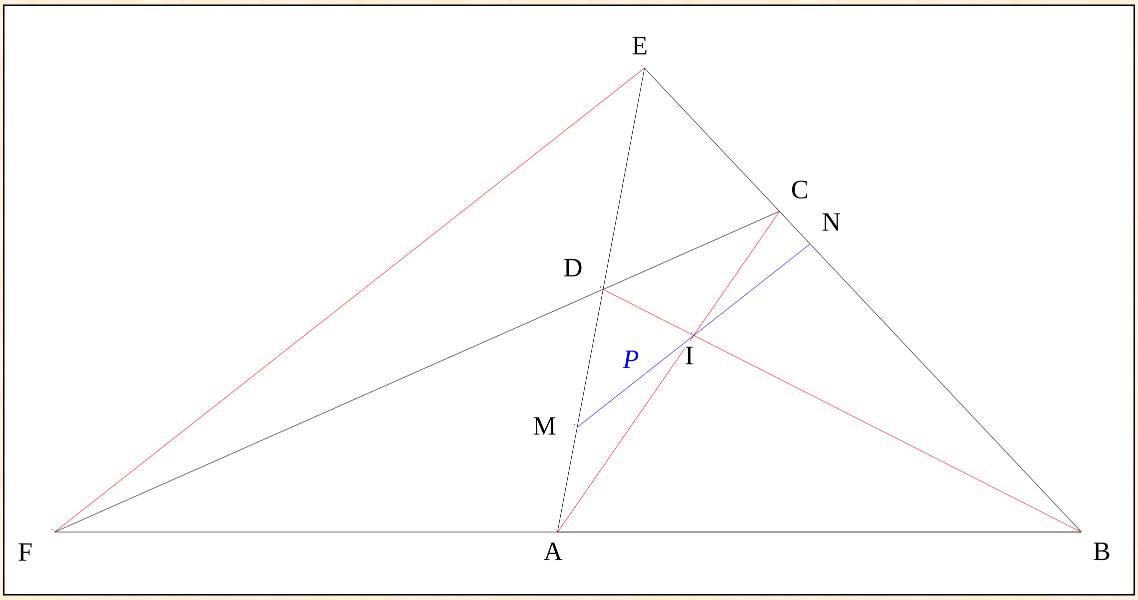
Commentaire : ce papillon est analogue à **D. IV. 3.** Le papillon siamois de Dixon Jones.
L'auteur pense que la recherche d'une solution synthétique plus élégante s'impose.

G. UN PAPILLON DANS LE CIEL

1. Un papillon en toute liberté

VISION

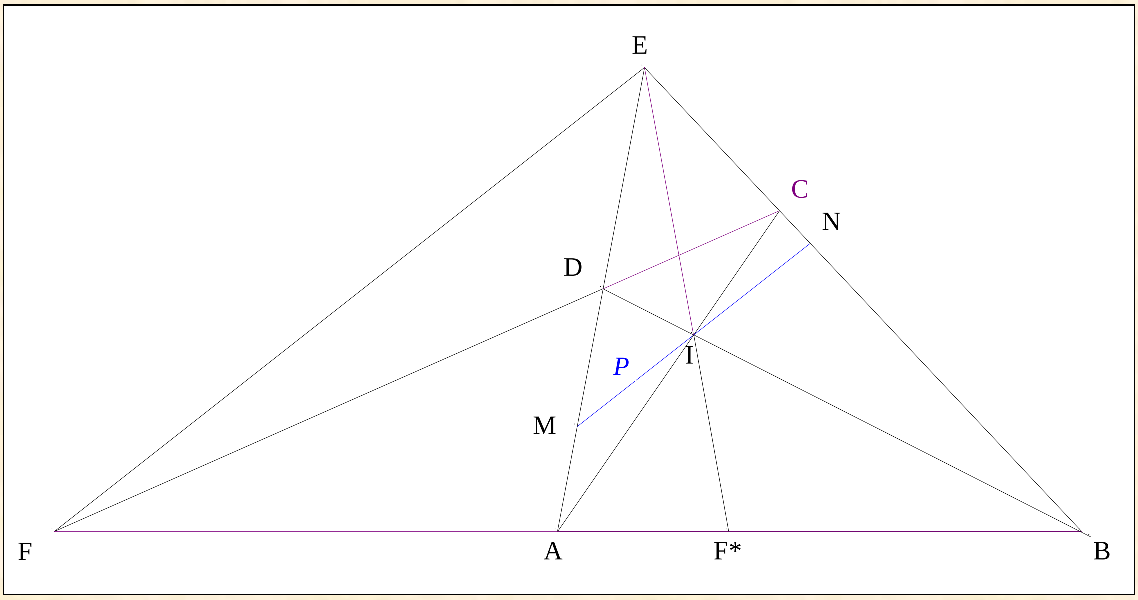
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), (AB) et (CD),
I le point d'intersection de (AC) et (BD),
P la droite parallèle à (EF) passant par I
et M, N les points d'intersection de *P* resp. avec (AD), (BC).

Donné : I est le milieu de [MN]. [124]

VISUALISATION



- Notons F* le point d'intersection de (EI) et (AB).

[124] Quadrilateral [quadrilateral bisectssegment on a parallel], *Mathlinks* du 13/01/2005 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=69971
An application of the butterfly property, *Mathlinks* du 29/04/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=347299

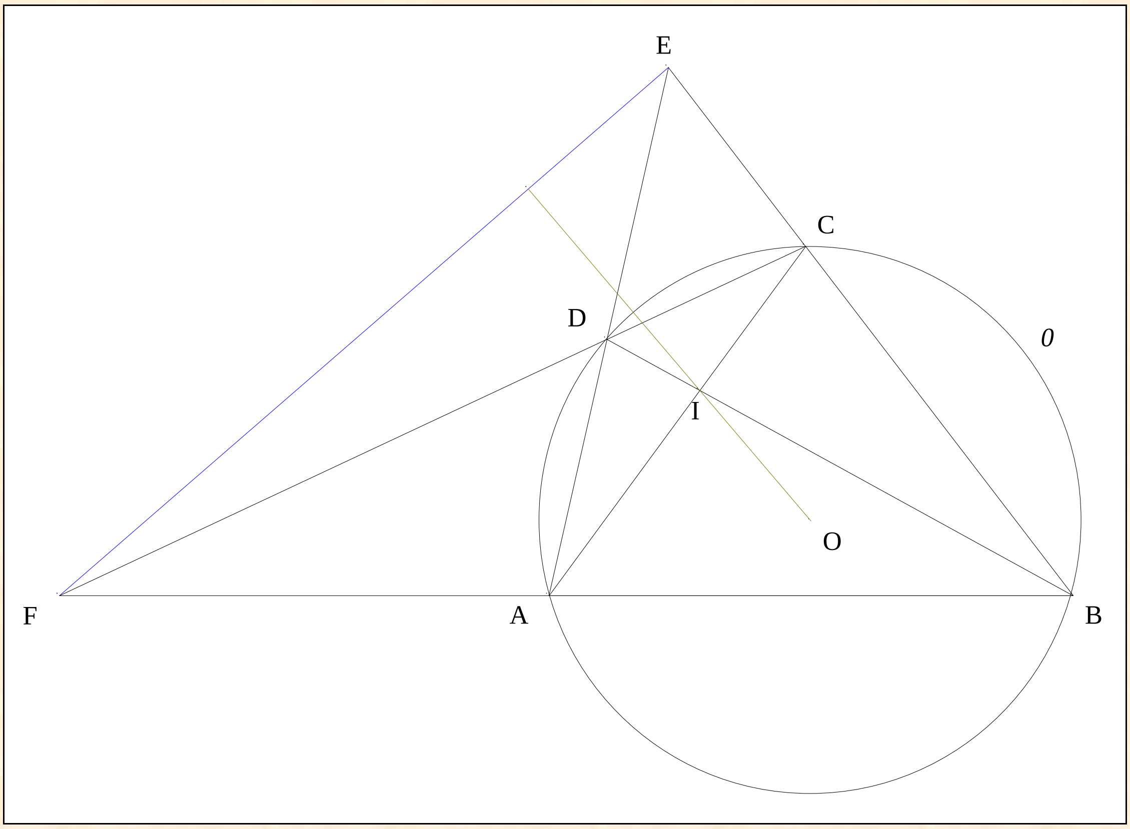
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe **5**)
  appliqué au quadrilatère EDIC, la quaterne (A, B, F*, F) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (E ; A, B, F*, F) est harmonique.

- **Conclusion :** d'après Pappus, *P* étant parallèle à (EF), I est le milieu de [MN].

2. Une perpendiculaire

VISION

Figure :

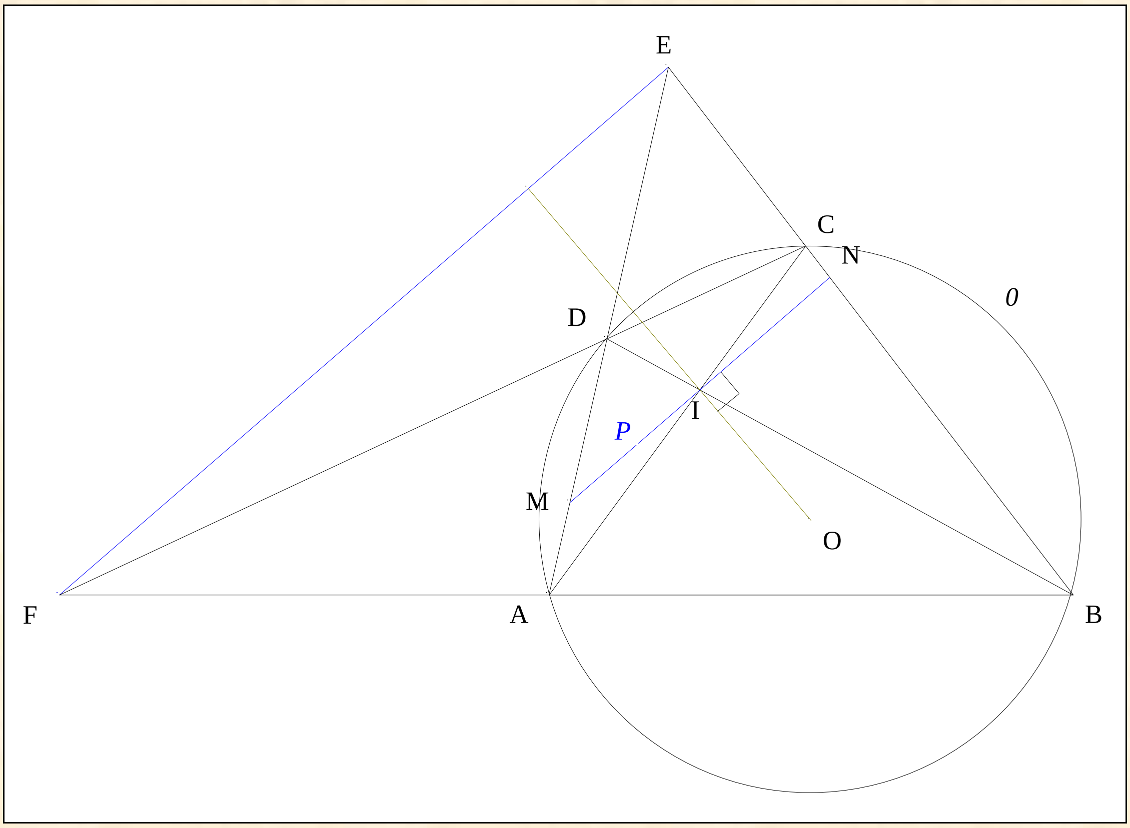


Traits : ABCD un quadrilatère convexe cyclique,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0* ,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), (AB) et (CD),
et I le point d'intersection de (AC) et (BD).

Donné : (OI) est perpendiculaire à (EF).[125]

VISUALISATION

[125] Brocard H., *Nouvelle Correspondance* **3** (1877) 173 ;
a quadrangle inscribed in a circle, *Mathlinks* du 25/04/2004 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=5326



- Notons P la droite parallèle à (EF) passant par I
  et M, N les points d'intersection de P resp. avec (AD), (BC).

- D'après **G. 1.** Un papillon en toute liberté,
  appliqué au quadrilatère ABCD, I est le milieu de [MN].

- D'après **A. 2.** L'équivalence du papillon, (OI) $\perp$ (MN) ;
  par construction, (MN) // (EF) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OI) $\perp$ (EF).

- **Conclusion :** (OI) est perpendiculaire à (EF).

Note historique : la question d'Henri Brocard consistait à montrer que

O *est l'orthocentre du triangle diagonal* IEF. [126]

[126] Look over the plane, *Mathlinks* du 15/09/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=110900

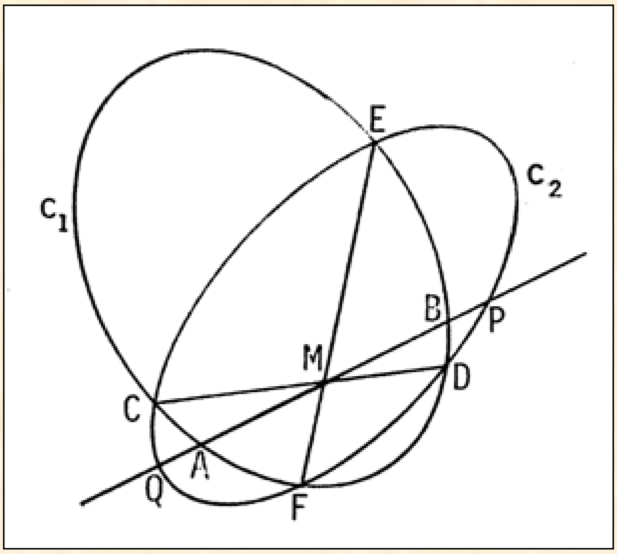
H. EXTENSION À UNE CONIQUE

1. Un petit résumé

Le cercle étant une conique particulière, Murray Klamkin[127] conjecture en 1965 que le papillon peut s'étendre à une ellipse. La preuve en est apportée en 1969 par G. D. Chakerian, G. T. Sallee, M. S. Klamkin[128]

Let S a closed, bounded, plane convex set with the following property :
whenever M *is the midpoint of a chord* AB,
and CD *and* AF *are two any chords containing* M, *so that* PM=MQ,
then S is an ellipse.

En 1972, Howard Withley Eves[129] généralise ce résultat à toute conique.

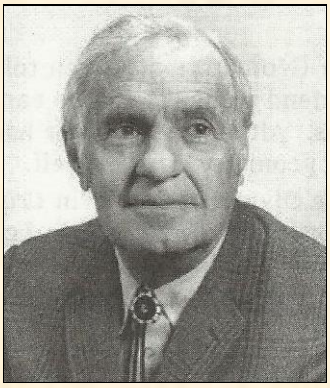


Let M *be the midpoint of a chord* AB *of a proper conic C1,*
let two other chords CD *and* EF *be drawn through* M
and let a conic C2 through C, E, D, F *cut the given chord in* P *and* Q,
then M *is the midpoint of* PQ.

Des problèmes sur ce sujet ont été proposés sur le site *Mathlinks.*[130]

2. Une courte biographie de Murray S. Klamkin

[127] Klamkin M. S., An Extension of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* vol. **38** (1965) 206-208.
[128] Chakerian G. D., Sallee G. T., Klamkin M. S., On the Butterfly Property, *Mathematics Magazine* vol. **42** (January 1969) 21-23.
[129] Eves H. W., A survey of Geometry, Revised Edition, Allyn and Bacon, Boston (1972) 144-145, 255-256.
[130] butterfly theorem again, Putnam 1963/**A6**, *Mathlinks* du 11/05/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=5661
butterfly-like property of chords of an ellipse, *Crux,* problem **180**, *Mathlinks* du 24/04/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=34740
Relate butterfly theorem, *Mathlinks* du 01/03/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=136318



Murray Seymour Klamkin est né le 5 Mars 1921 à Brooklyn (New York, États Unis).
Fils d'un boulanger, il obtient son diplôme d'ingénieur chimiste en 1942.
Continuant ses études, il obtient en 1947 un Master of Science à l'institut polytechnique de New York où il y enseignera jusqu'en 1957 avant de rejoindre AVCO's Research and Advanced Development Division.
En 1962, il retourne brièvement à l'enseignement comme professeur à SUNYat Buffalo (New York), puis devient "visiting professor" à l'Université du Minnesota.
En 1965, il rejoint à nouveau le secteur industriel à La Ford Motor Company et ce jusqu'en 1976.
Comme nous venons de le constater, sa vie se partage entre son activité industrielle et l'Académie.
En 1972, The Mathematical Association of America décide de participer aux prochaines IMO qui se tiendront en Allemagne de l'est en 1974. Pour cela, elle organise les premières Olympiades américaines.
N'ayant pu obtenir de la firme Ford le temps nécessaire à la préparation de l'équipe américaine pour les Olympiades, il rejoint comme professeur l'université de Waterloo (Ontario, Canada) où il inaugure la rubrique "Olympiad Corner" dans la revue *Crux mathematicorum.*

Marié à Irène, n'ayant pas d'enfant, Murray Seymour Klamkin s'intéresse à la musique, à la danse de salon, au kung-fu et aussi au basket.
Docteur honoraire de l'université de Waterloo (Ontario, Canada), il est aussi membre de la société royale de Belgique.
De bonne constitution tout au long de sa vie, sa santé se détériore en Septembre 2000 suite à une opération. En Novembre de la même année, un problème cardiaque le plonge dans un coma partiel.
Il décède le 6 Août 2004 suite à une tumeur intestinale.

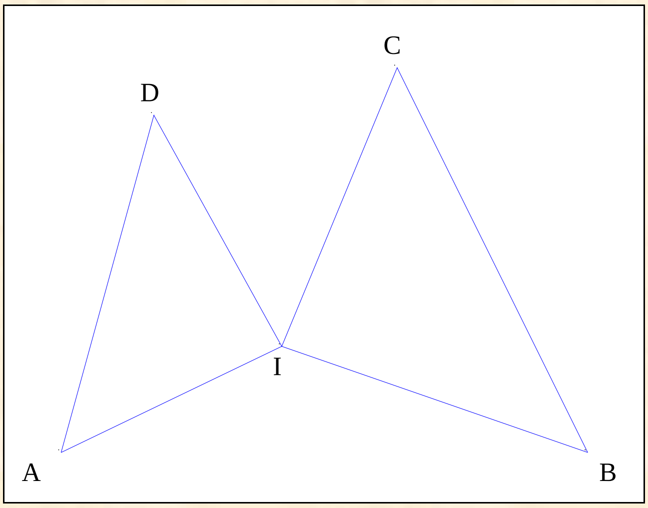
I. OUVERTURE

UN NOUVEAU THÈME

1. Un papillon brisé

VISION

Figure :



Finition : IAD, IBC deux triangles.

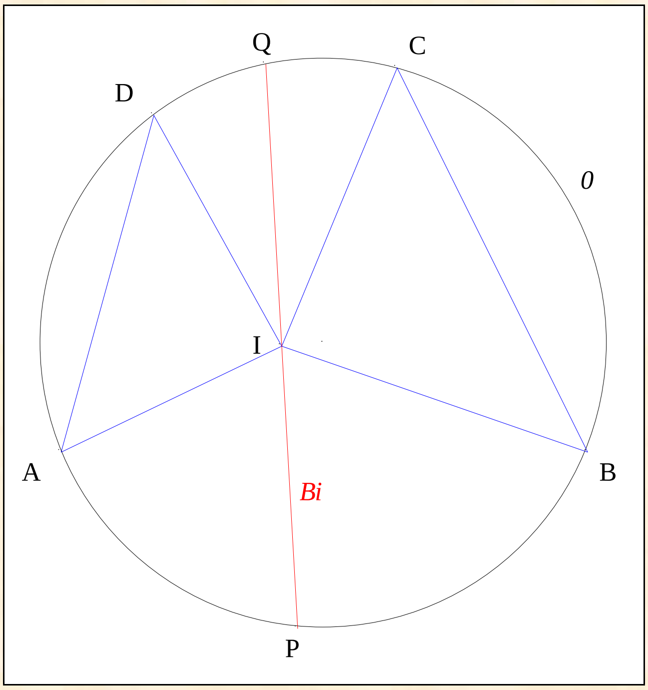
Définitions : **(1)** la figure déterminée par IAD et IBC adjacent par le sommet I est "un papillon brisé"
(2) IAD et IBC sont les ailes de ce papillon.

Commentaire : l'auteur a choisi le terme "brisé" en accord avec la terminologie d'Euclide du fait que la ligne AIC est "brisée en I".

2. Un papillon brisé aux ailes semblables

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,

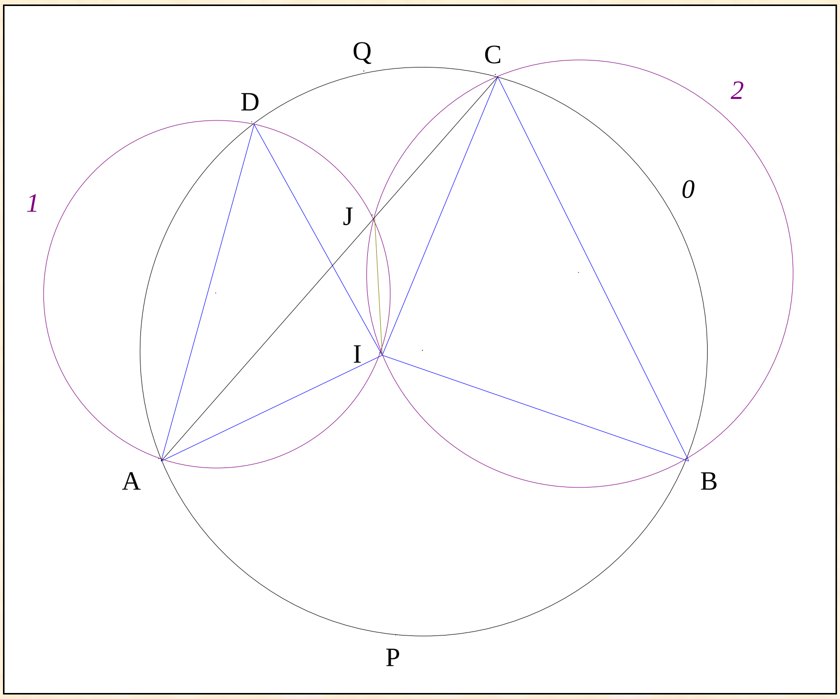
	A, B, C, D	quatre points dans cet ordre de *0*,
	I	un point intérieur à *0* tel que <IAD = <ICB et <ADI =<CBI
	Bi	la bissectrice intérieure de <CID
et	P, Q	les points d'intersection de *Bi* avec *0*.

Donné : I est le milieu de [PQ].[131]

VISUALISATION

- **Commentaire :** nous observons un papillon cyclique et brisé dont les ailes sont directement semblables.

- **Scolie :** DIA = <BIC.

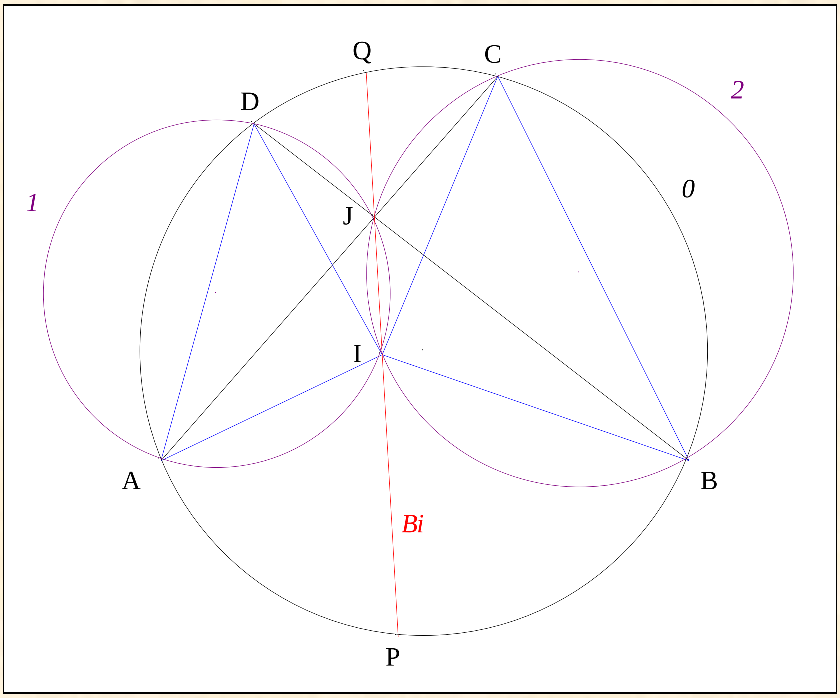


- Notons *1*, *2* les cercles circonscrits à IAD, IBC
  et J le second point d'intersection de *1* et *2*.

- Une chasse angulaire à Π près :

d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<AJI = <ADI ;
par hypothèse,	<ADI = <CBI ;
par transitivité de la relation =,	<AJI = <CBI ;
en conséquence,	A, J et C sont alignés.

[131] China 1992.
Circle and equality of segments, Problem 2, Polish NO 2005, *Mathlinks* du 30/09/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php ?t=54036

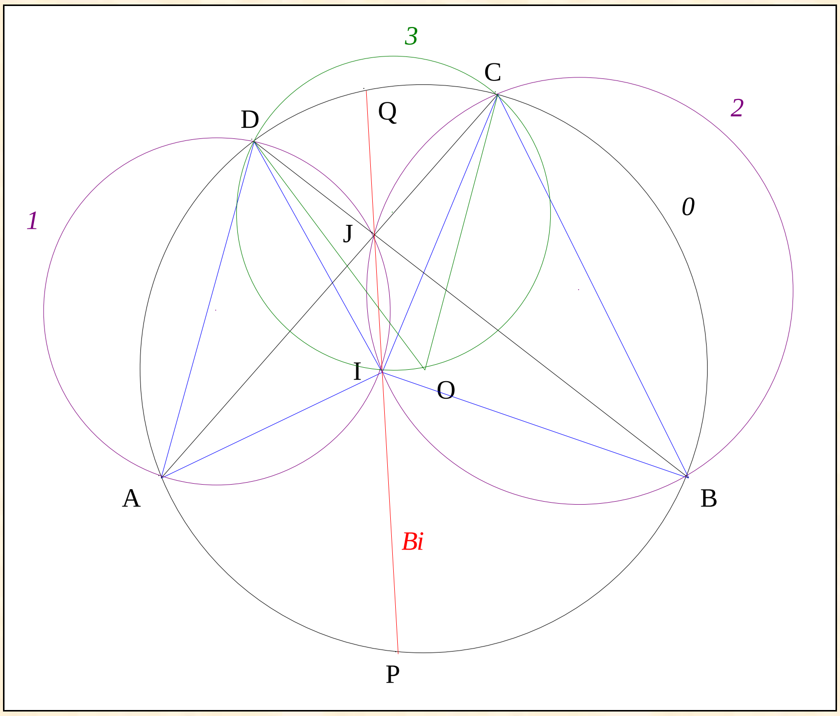


- Mutatis mutandis, nous montrerions que B, J et D sont alignés.

- Une chasse angulaire à Π près :

d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<JID = <JAD ;
autre écriture,	<JAD = <CAD ;
d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<CAD = <CBD ;
autre écriture,	<CBD = <CBJ ;
d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<CBJ = <CIJ ;
par transitivité de la relation =,	<JID = <CIJ ;
en conséquence,	(IJ) et *Bi* sont confondues.

- **Conclusion partielle :** I, J, P et Q sont alignés.

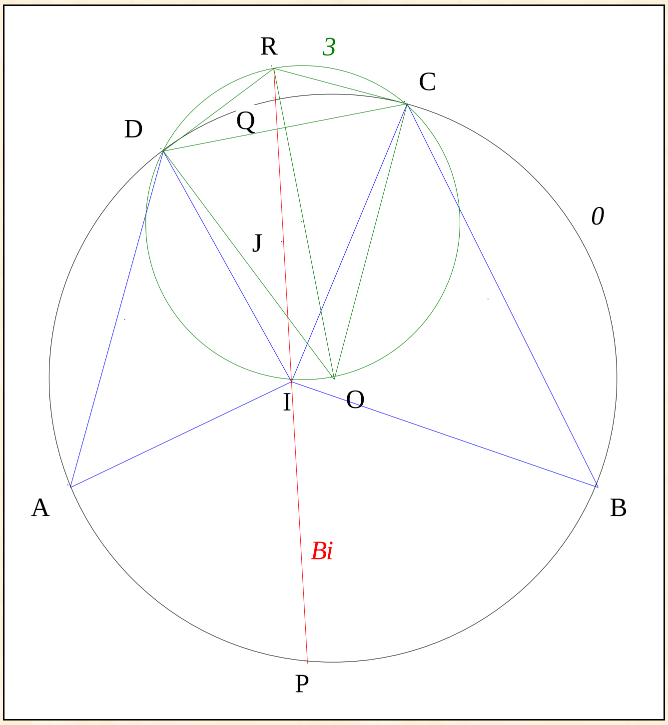


- Notons O le centre de *0*.

- Une chasse angulaire à Π près :
  Bi étant la bissectrice intérieure de <CID, <CID = 2.<CIJ ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", 2.<CIJ = 2. <CBJ ;
  autre écriture, 2.<CBJ = 2.<CBD ;
  d'après "Le théorème de l'angle au centre", 2.<CBD = <COD ;
  par transitivité de la relation =, <CID = <COD.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de l'angle inscrit", I, O, C et D sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



- Notons R le second point d'intersection de (IJ) avec *3*.

- **Scolie :** RC = RD.

- D'après le théorème de la médiatrice, (OR) est la médiatrice de [CD] ;
  en conséquence, (OR) est une droite diamétrale de *3* ;
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (OI) ⊥ (IR). [132]

- **Conclusion :** (OI) étant perpendiculaire à la corde [PQ], I est le milieu de [PQ].

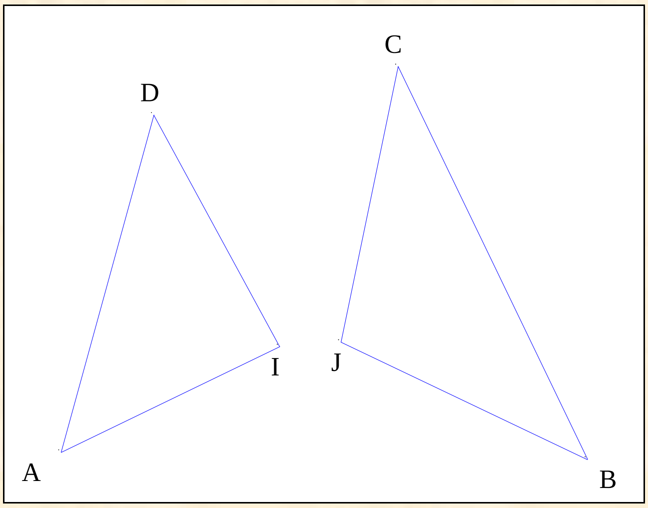
3. Un papillon aux ailes disloquées

VISION

Figure :

---

132 cyclic quadrilateral and diagonals: OY perp. XY, *Mathlinks* du 28/10/2004 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=18801
Nice circles intersection, *Mathlinks* du 22/02/2005 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=27608



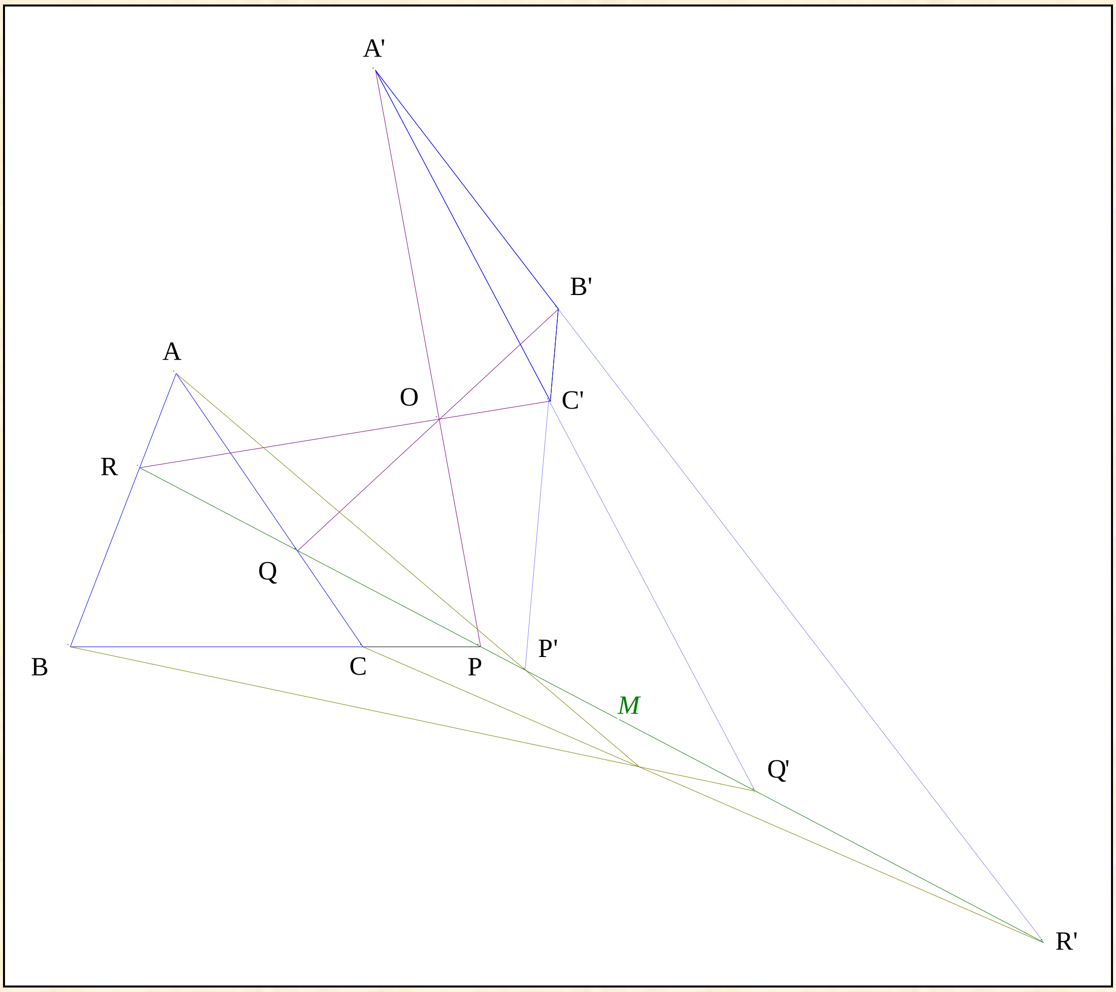
Finition : IAD, JBC deux triangles.

Définitions : la figure déterminée par IAD et JBC est "un papillon aux ailes disloquées".

4. Un papillon aux ailes disloquées d'Alexey A. Zaslavsky

VISION

Figure :

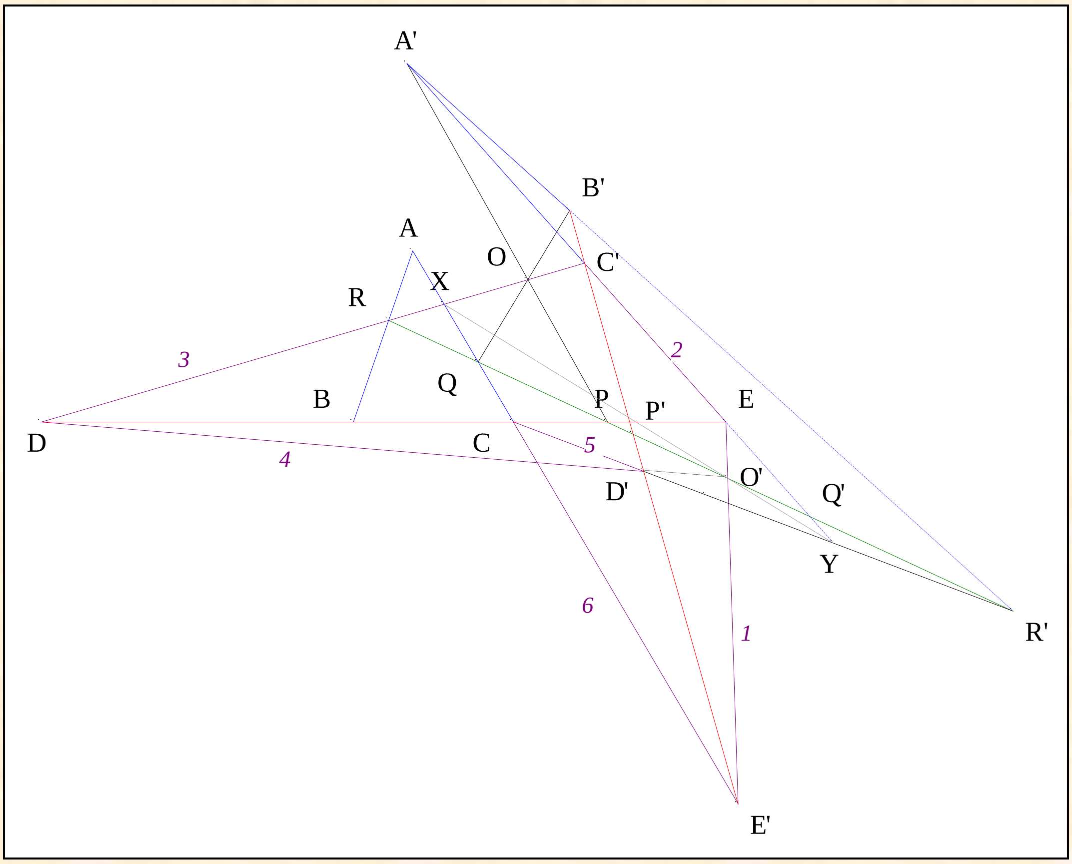


Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne de ABC,
	P, Q, R	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	O	un point,
	A', B', C'	trois points non alignés situés resp. sur (OX), (OY), (OZ)
et	P', Q', R'	les points d'intersection de *M* resp. avec (B'C'), (C'A'), (A'B').

Donné : (P'A), (Q'B) et (R'C) sont concourantes. [133]

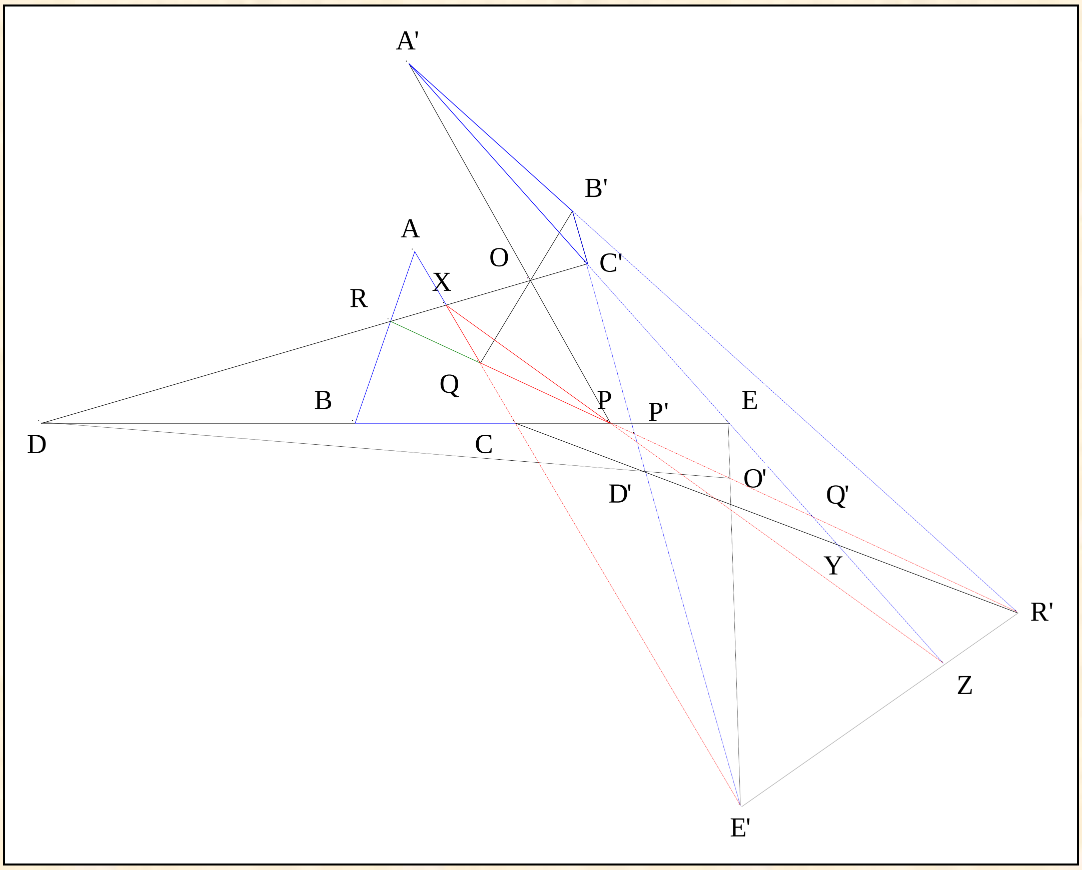
VISUALISATION

[133] Zaslavsky A. A., Double Desargues, Message *Hyacinthos* du 23-09-03 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



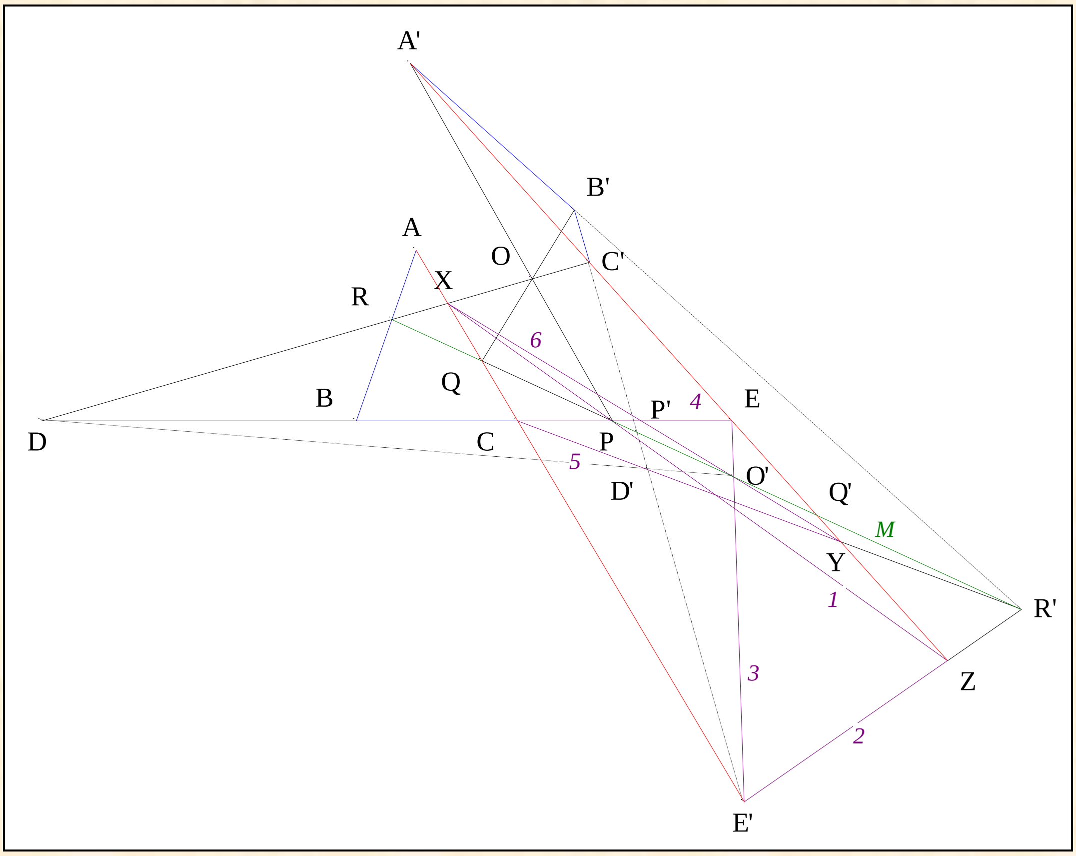
- Notons D le point d'intersection des droites (BC) et (C'R),
  D' le point d'intersection des droites (B'C') et (CR'),
  E le point d'intersection des droites (BC) et (C'Q'),
  E' le point d'intersection des droites (B'C') et (CQ),
  O' le point d'intersection des droites (EE') et (DD'),
  X le point d'intersection des droites (AC) et (C'R),
  et Y le point d'intersection des droites (A'C') et (CR').

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**),
  (O'YX) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel E'EC'DD'CE'.



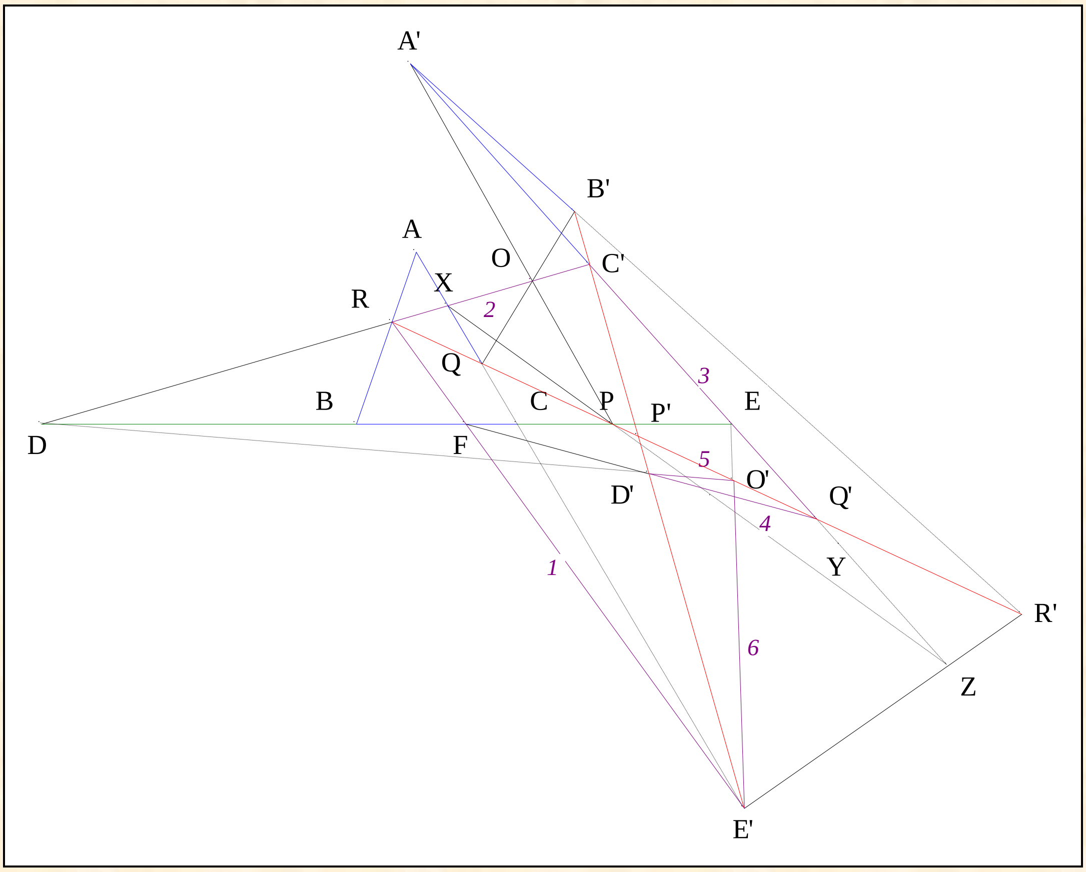
- Notons Z le point s'intersection de (PX) et (A'C').

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**), appliqué aux triangles perspectifs A'B'C' et PQX de centre O, E', R' et Z sont alignés.



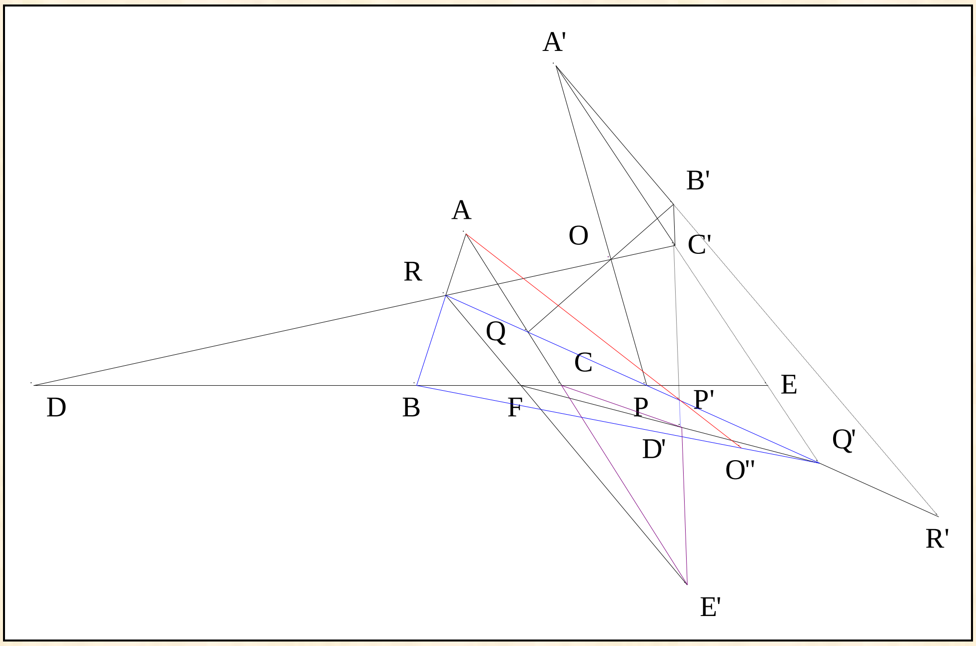
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**),
  (PR'O') est la pappusienne de l'hexagone sectoriel XZE'ECYX.

- **Conclusion partielle :** O' est sur la ménélienne *M* de ABC.



- Notons F le point d'intersection de (D'Q') et (E'R).

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**),
(FDE) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel E'RC'Q'D'oE'.



- Notons O'' le point s'intersection de (BQ') et (CD').

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**),
appliqué aux triangles perspectifs BQ'R et CD'E' de centre F, O'', P' et A sont alignés.

- **Conclusion partielle :** (P'A), (Q'B) et (D'C) passent par O".

- **Scolies :** **(1)** par construction, (D'C) passent par R'
  (2) en conséquence, (R'C) passe par O".

- **Conclusion :** (P'A), (Q'B) et (R'C) sont concourantes en O".

Commentaire : ce résultat est une généralisation de celui de Blaikie.

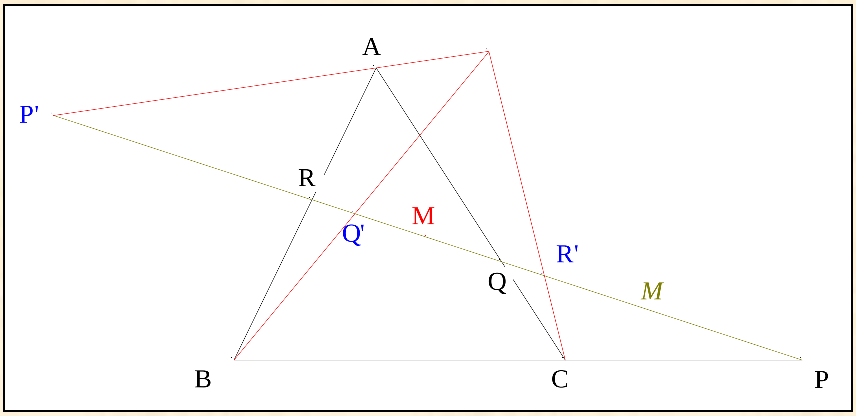
J. APPENDICE

I. JAMES BLAIKIE

1. Le point de Blaikie

VISION

Figure :

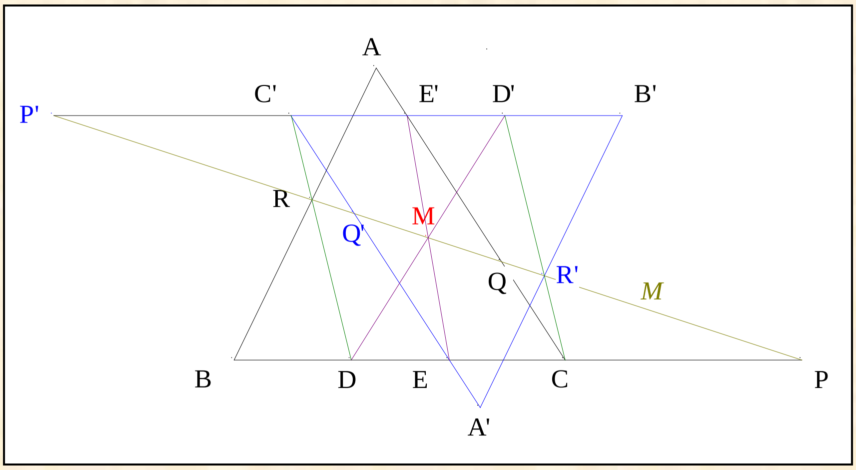


Traits :	ABC	un triangle,
	M	un point,
	M	une ménélienne de ABC,
	P, Q, R	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	P', Q', R'	les symétriques resp. de P, Q, R par rapport à M.

Donné : (P'A), (Q'B) et (R'C) sont concourantes.[134]

VISUALISATION

[134] Papelier G., Excercices de Géométrie Moderne, Paris (1927), Rééditions Gabay (1996), Transversales n°53 p. 42.
Blaikie theorem (for all friends of involutions), *Mathlinks* du 20/05/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=38178

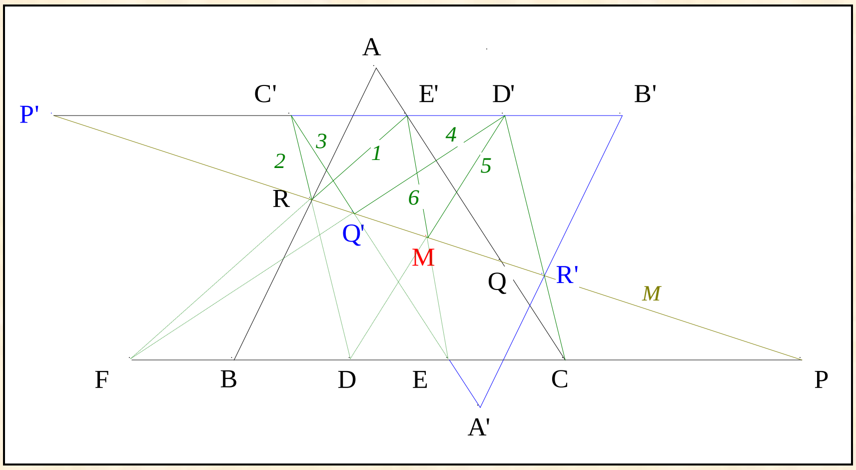


- Notons A'B'C' le triangle symétrique de ABC par rapport à M.

- **Scolie :** P', Q', R' sont resp. sur (B'C'), (C'A'), (A'B').

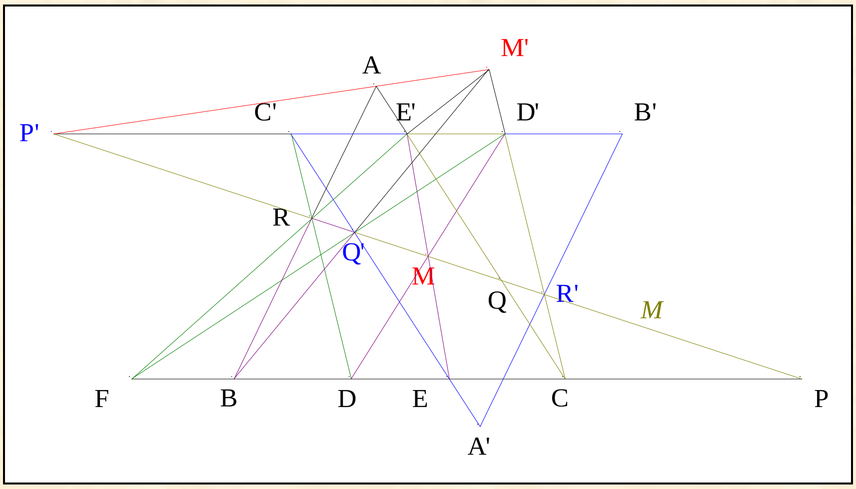
- Notons D le point d'intersection de (BC) et (C'R),
  D' le point d'intersection de (B'C') et (CR'),
  E le point d'intersection de (BC) et (C'Q'),
  et E' le point d'intersection de (B'C') et (CQ).

- **Scolies :** **(1)** le quadrilatère DCD'C' étant un parallélogramme, D, M et D' sont alignés
  (2) le quadrilatère ECE'C' étant un parallélogramme, E, M et E' sont alignés.



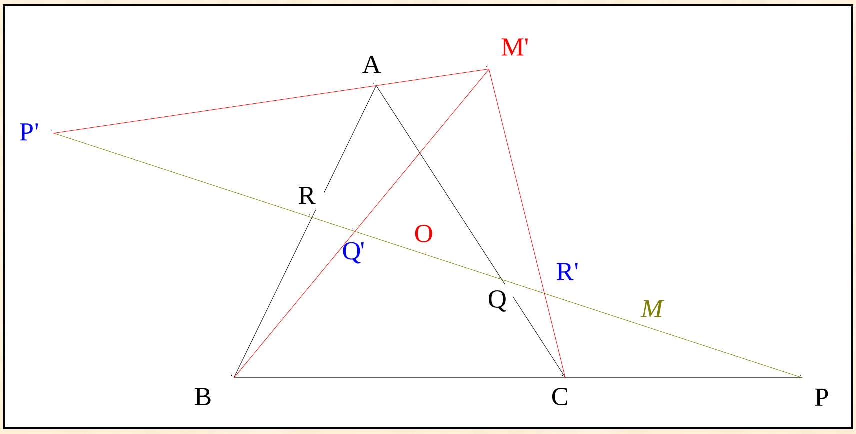
- Notons F le point d'intersection de (D'Q') et (E'R).

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe **7**),
  (FDE) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel E'RC'Q'D'ME'.



- Notons M' le point s'intersection de (BQ') et (CD').

- D'après Desargues "Deux triangles en perspective" (Cf. Annexe **8**),
  F étant le centre de perspective des triangles BQ'R et CD'E',
  les points d'intersection de (BQ') et (CD'), de (Q'R) et (D'E'), de (BR) et (CE') sont alignés
  i.e. M', P' et A sont alignés.



- **Conclusion :** (P'A), (Q'B) et (R'C) sont concourantes.

Scolie : ce point de concours est
"le point de Blaikie relativement à *M* et M par rapport à ABC".

Note historique : ce résultat, cité par Georges Papelier[135] et démontré à l'aide du théorème de Ménélaüs,
a été découvert par James Blaikie (1847-1929).
Une généralisation a été proposée par Alexey Zaslavsky.[136] (Cf. **I. 4.**)

2. Une courte note biographique de James Blaikie

James Andrew Blaikie est né en 1847 à Edinburgh (Écosse, Grande-Bretagne).
Il obtient son B.A. et M.A. en mathématiques à l'université de Cambridge. Il enseigne au lycée Fettes d'Edinburgh de 1870-76, puis devient Inspecteur des écoles de cette ville de 1877-86, puis examinateur au

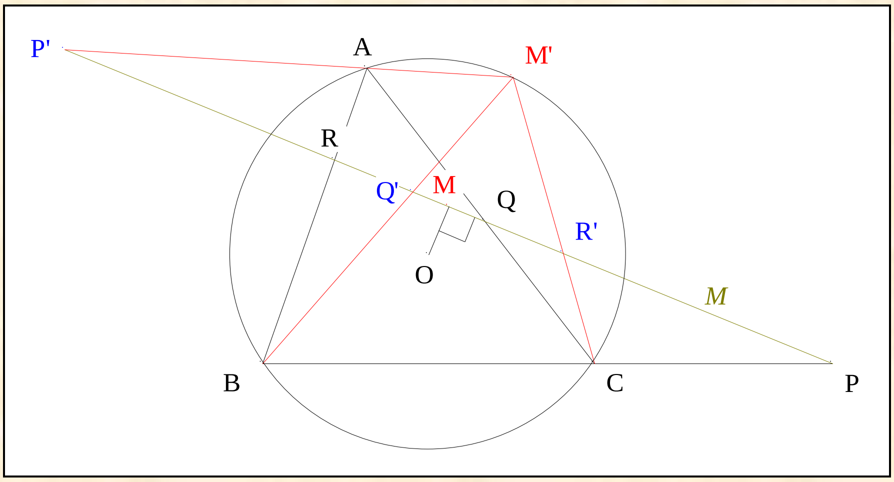
135 Papelier G., Transversales n° **53** p. 42-43, *Exercices de Géométrie Moderne*, Paris (1927), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1996)
136 Zaslavsky A. A., Double Desargues, Message *Hyacinthos* # **7983** du 23-09-03 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Scottish Education Department de 1886-1889. Il écrit des articles sur la dynamique et sur les déductions géométriques.
Membre de l'association Esperanto, il s'intéresse aussi à la botanique, aux timbres et à l'alpinisme.
Il décède en 1929.

3. Un cas particulier du résultat de Blaikie

VISION

Figure :



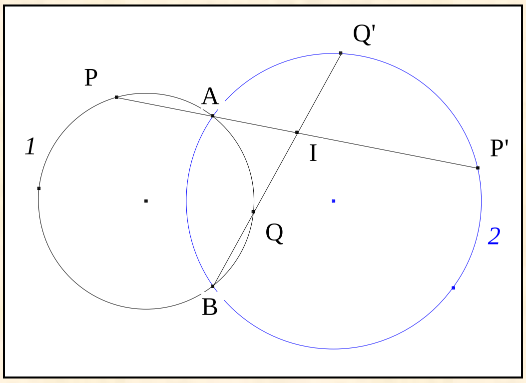
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	M	une ménélienne de ABC,
	M	le pied de la perpendiculaire à *M* passant par O,
	P, Q, R	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	P', Q', R'	les symétriques resp. de P, Q, R par rapport à M.

Donné : (P'A), (Q'B) et (R'C) concourent sur *0*. (Cf. **C. 4.** Une réciproque remarquable)

II. MILIEU D'UNE MONIENNE

VISION

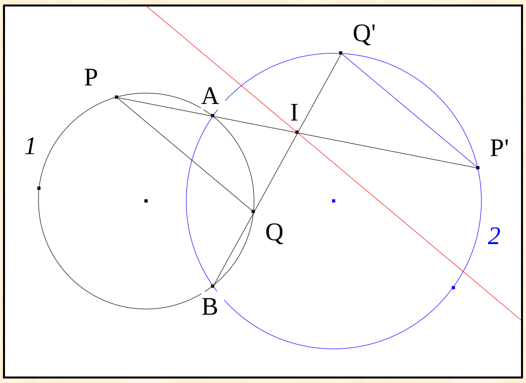
Figure :



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
Ma une monienne passant par A,
P, P' les seconds points d'intersection de *Ma* resp. avec *1*, *2*,
I le milieu de [PP'],
Mb la monienne (BI)
et Q, Q' les seconds points d'intersection de *Mb* resp. avec *1*, *2*.

Donné : I est le milieu de [QQ']. [137]

VISUALISATION



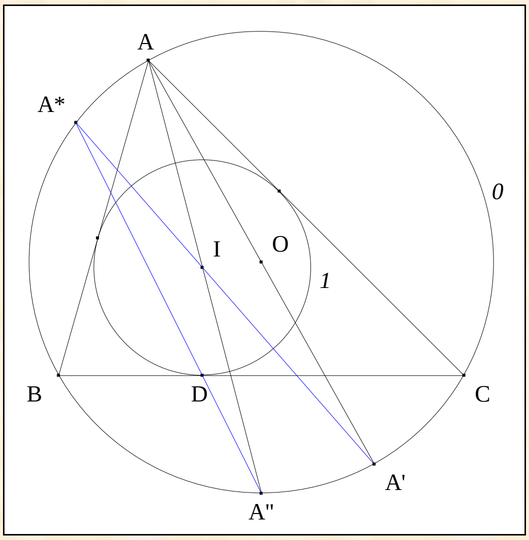
- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (PAP') et (QBQ'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PQ) // (P'Q').
- D'après l'axiome de passage IIIb, la parallèle à (PQ) passant par I, rencontre [QQ'] en son milieu.
- **Conclusion :** I est le milieu de [QQ'].

III. INTERSECTION SUR LE CERCLE CIRCONSCRIT

VISION

Figure :

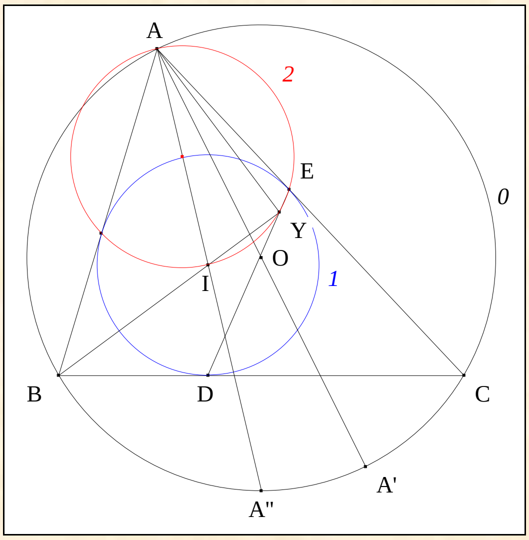
[137] *A Collection of Problems in High School Mathematics*, Peking (1981).



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
O le centre de *0*,
1 le centre du cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
D le point de contact de *1* avec (BC),
A' le second point d'intersection de (AO) avec *0*,
A" le second point d'intersection de (AI) avec *0*
et A* le point d'intersection de (A'I) et (A"D).

Donné : A* est sur *0*.

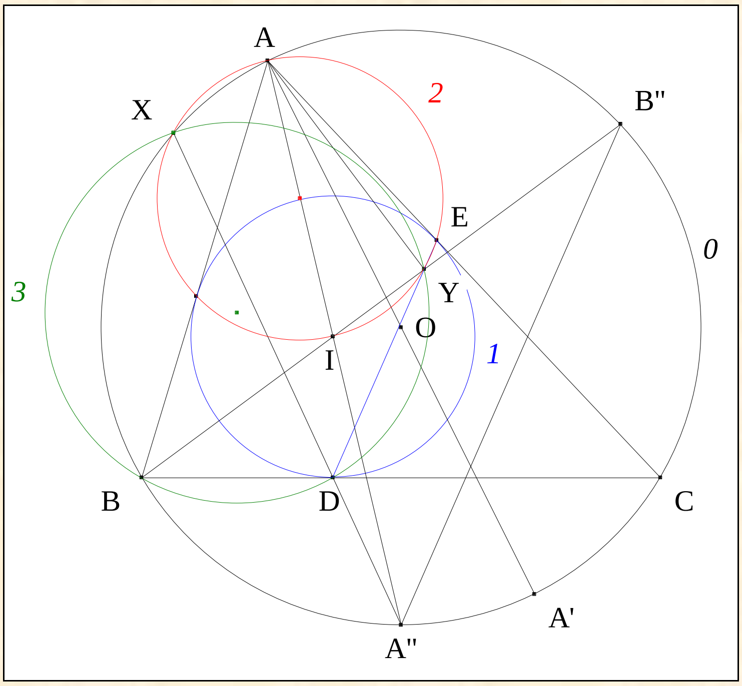
VISUALISATION



- Notons X le second point d'intersection de (A"D) avec *0*,
  E le point de contact de *1* avec (CA),
  Y le point d'intersection de (DE) et (BI),
  et *2* le cercle de diamètre [AI].

- D'après Lascases "An unlikely concurrence", (AY) ⊥ (BI).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *2* passe par Y et E.



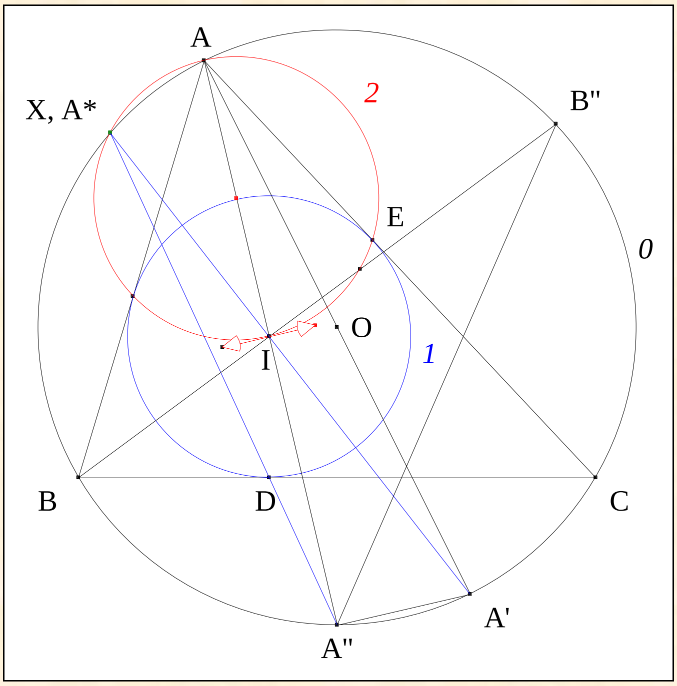
- Notons X le second point d'intersection de (A"D) avec *0*,
  et B" le second point d'intersection de (BI) avec *0*.

- Nous savons que (A"B") // (DYE).

- Le cercle *0*, les points de base X et B, les moniennes naissantes (A"XD) et (B"BY),
  les parallèles (A"B") et (DY), conduisent au théorème **0** de Reim ;
  en conséquence, X, B, D et Y sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

- D'après Miquel "le théorème du pivot"
  appliqué au triangle DCE avec les points B sur (DC), A sur (CE) et Y sur (ED),
  3, *0* et *2* sont concourants en X ; en conséquence, *2* passe par X.

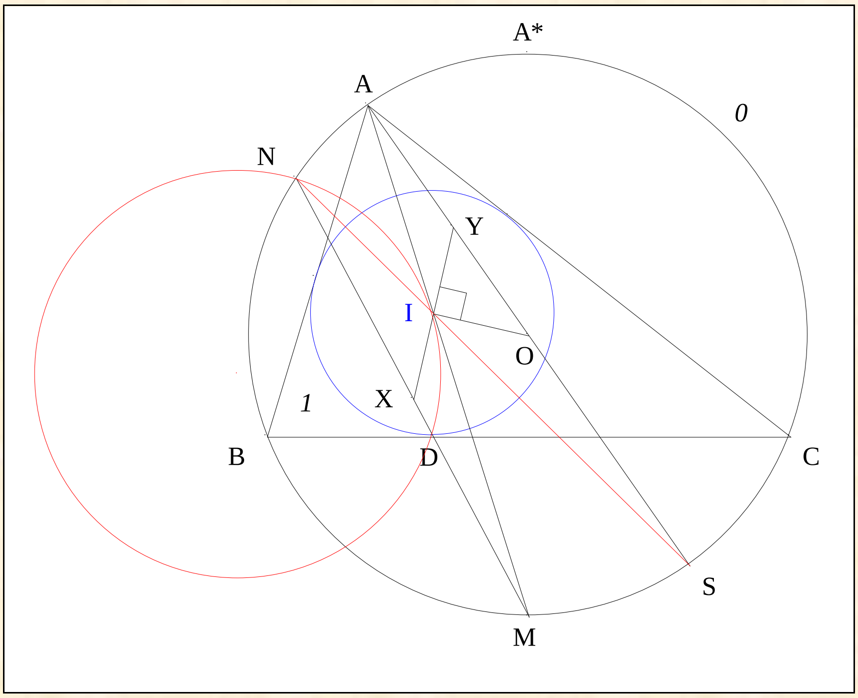


- Notons *Ti* la tangente à *2* en I.

- Par définition d'une tangente, *Ti* ⊥ (AIA") ;
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AA") ⊥ (A"A') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, *Ti* // (A"A').

- Les cercles *2* et *0*, les points de base A et X, la monienne (IAA"), les parallèles *Ti* et (A"A'), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, I, X et A' sont alignés ;
  il s'en suit que X et A* sont confondus.

- **Conclusion :** A* est sur *0*.

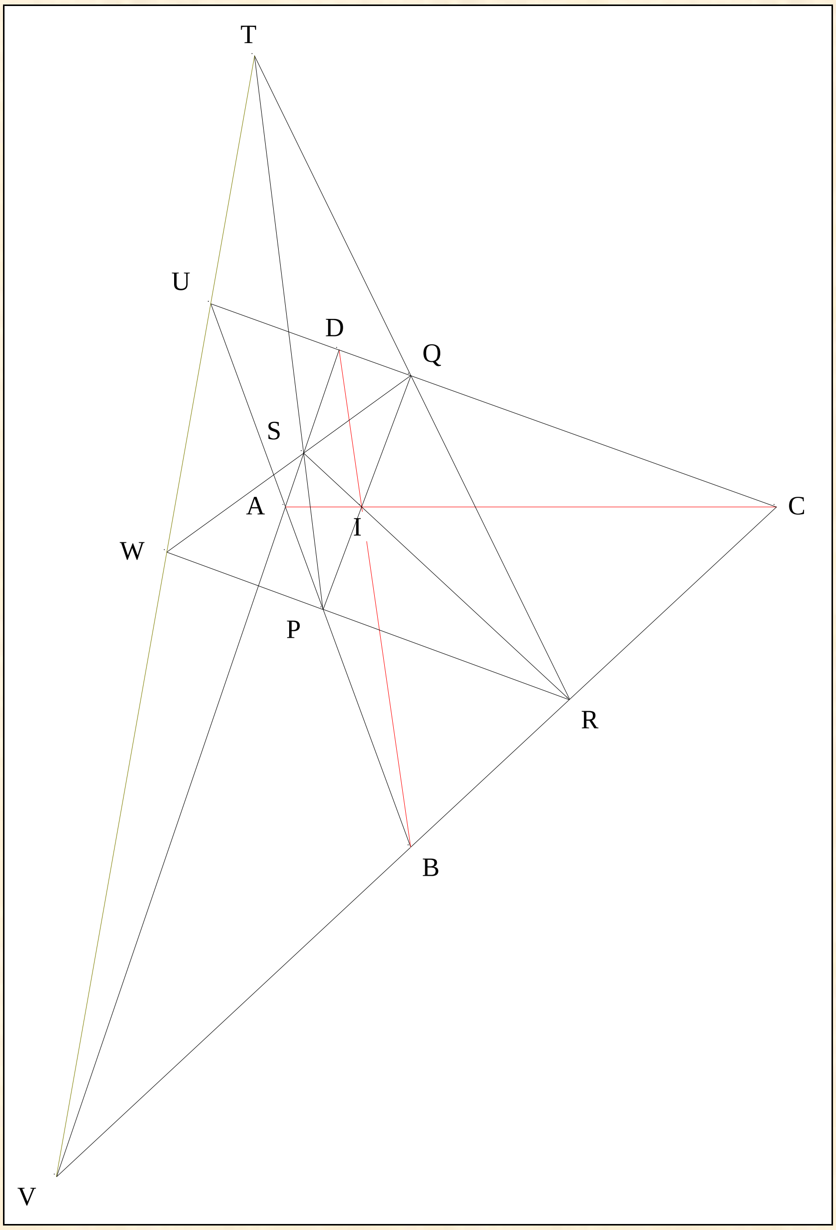


Lascases 452
2Appli8 **Intersection sur le cercle circonscrit** avec (AI) et (AO) mis en jeu X56 lier à Nixon antipôle de A il y a plus court voir nouveaux problèmes envoyé à Mathlinks "hard or easy"
vision triangulaire les A*D se coupent en X56 A'D passe par X56 Steiner 4Exo Nixon 1Appli8

IV. UNE ARGUÉSIENNE

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
U, V les points d'intersection resp. de (AB) et (CD), (AC) et (BD),
I le point d'intersection de (AC) et (BD),
P, *Q* deux droites passant par I,
P, Q les points d'intersection de *P* resp. avec [AB], [CD],
R, S les points d'intersection resp. de *Q* avec [BC], [DA]
et W, T les points d'intersection resp. de (PR) et (QS), (PS) et (RQ).

Donné : U, V, W et T sont alignés.

VISUALISATION

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**), appliqué aux triangles perspectifs de centre I

(1) APS et CQR, U, T et V sont alignés

(2) BPR et DQS, U, W et V sont alignés.

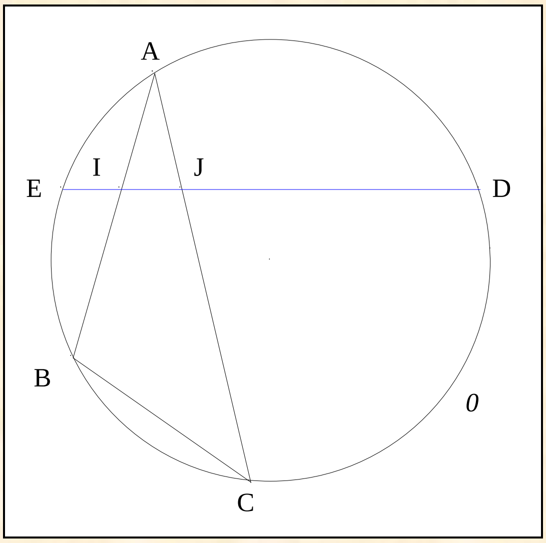
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, U, V, W et T sont alignés.

V. HIROSHI HARUKI

1. Le lemme d'Haruki

VISION

Figure :

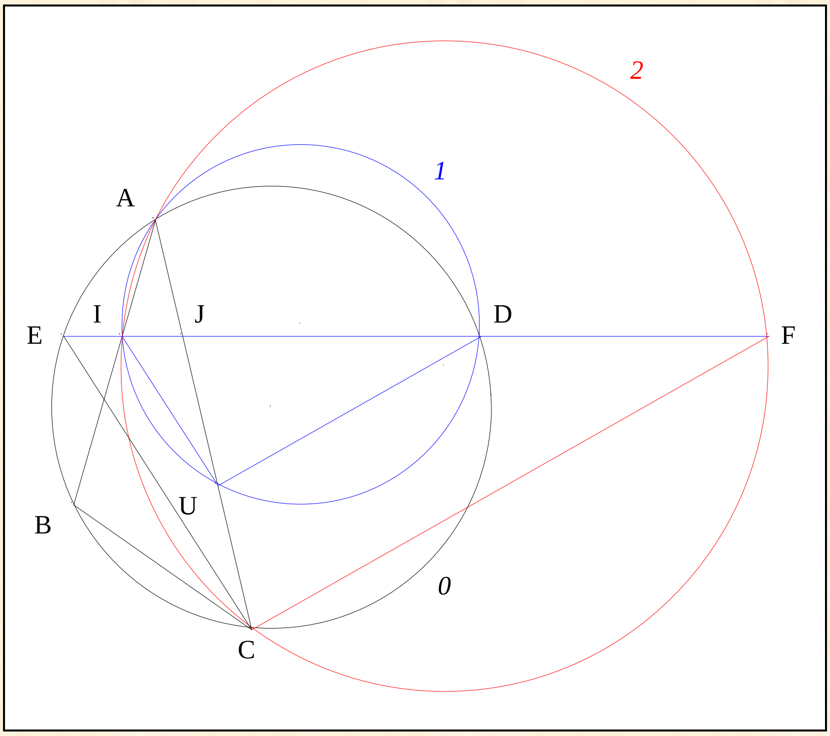


Traits : *0* un cercle,
E, D deux points de *0*,
A un point de *0*,
B, C deux points de l'arc ED ne contenant pas A
et I, J les points d'intersection resp. de (AB), (AC) avec [DE].

Donné : lorsque A varie sur l'arc ED ne contenant pas B et C,
le rapport $\frac{IE.JD}{IJ}$ est constant.[138]

VISUALISATION

[138] Haruki H..

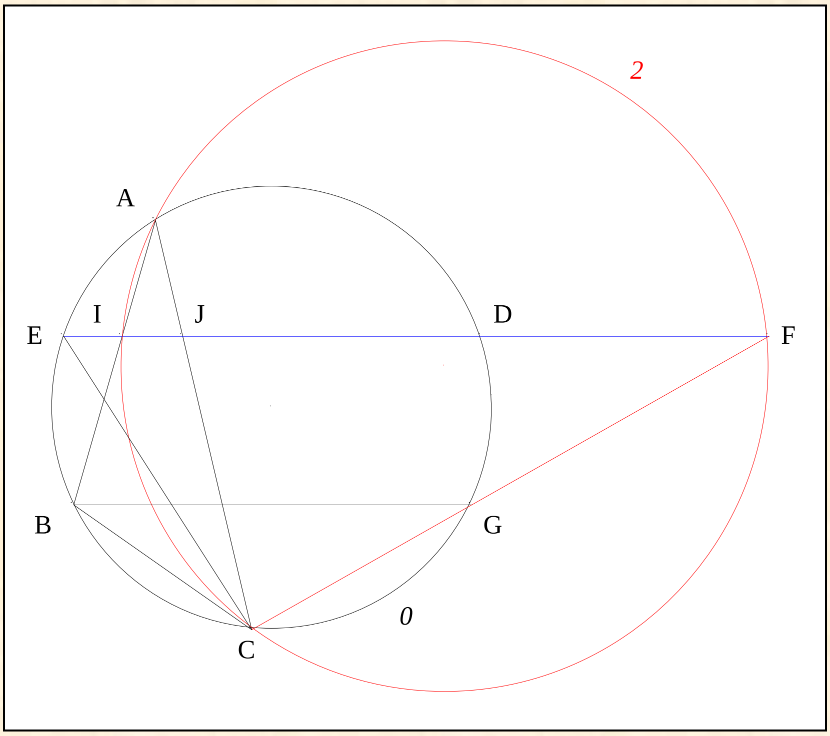


- Notons $\mathit{1}$ le cercle passant par A, I, D,
  U le second point d'intersection de (AC) avec $\mathit{1}$,
  $\mathit{2}$ le cercle passant par A, I, C,
  et F le second point d'intersection de (ED) avec $\mathit{2}$.

- Les cercles $\mathit{1}$ et $\mathit{2}$, les points de base A et I, les moniennes (UAC) et (DIF), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (UD) // (CF).

- Les cercles $\mathit{1}$ et $\mathit{0}$, les points de base A et D, les moniennes (UAC) et (IDE), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (UI) // (CE).

- D'après Thalès, $\frac{IE}{IJ} = \frac{UC}{UJ} = \frac{DF}{DJ}$; d'où $\frac{IE.JD}{IJ} = DF$.



- Notons G le second point d'intersection de (AC) avec *1*.

- Les cercles *0* et *2*, les points de base A et C, les moniennes (BAI) et (GCF), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BG) // (ED).

- **Scolie :** lorsque A varie sur l'arc ED ne contenant pas B et C, G est fixe ;
  il s'en suit que F est fixe ;
  en conséquence, DF est fixe.

- **Conclusion :** lorsque A varie sur l'arc ED ne contenant pas B et C,
  le rapport $\frac{IE.JD}{IJ}$ est constant et égal à DF.

Note historique : ce résultat, cité en 1983 par Ross Honsberger[139] avait déjà été relaté et utilisé en 1987 par Léon Bankoff[140] pour démontrer métriquement "Le théorème du papillon".
De plus, il ajoutait

the Haruki's proof is crisp and concise.

La preuve de l'ukrainien Yaroslav Bezverkhnyev[141] a recours au concept de puissance.
Pour terminer, rappelons ses commentaires

The beauty and mystery of Haruki's lemma is in its apparent simplicity.

A very intriguing statement indeed.

---

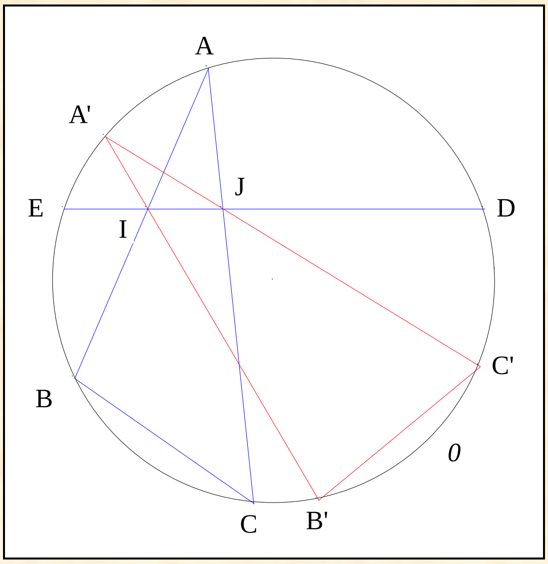
139 Honsberger R., The Butterfly problem and other delicacies from the noble art of Euclidean geometry,
Part I, *The Two-Year College Math. J.*, **14**, (1983) 2-8 ;
Part I, *The Two-Year College Math. J.*, **14**, (1983) 154-158 ;
Mathematical Diamonds, Dolciani Math. Expositions No. **26**, Math. Assoc.Amer. (2003) 135-140.

140 Bankoff L., The Metamorphosis of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* **4** (Oct. 1987) 195-210 ;
http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/imo-geometry-4-11-04/butterfly/bankoff.pdf

141 Bezverkhnyev Y., Haruki's Lemma and a Related Locus Problem, *Forum Geometricorum* vol. **8** (2008) 63-72 ;
http://forumgeom.fau.edu/

The nature of the constant, however, remains unclear.
By looking at it in more detail we shall discover some interesting results.

Scolie : une autre variante

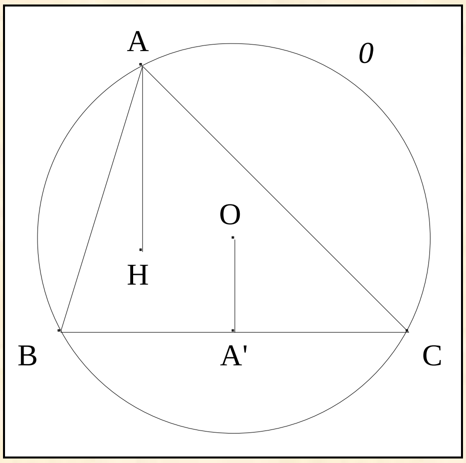


2. Une courte biographie d'Hiroshi Haruki

Hiroschi Haruki est né au Japon.
Il obtient son Master of science, puis son Phd à l'université d'Osaka où il en deviendra l'un des professeurs. De 1986 jusqu'à sa retraite en 1986, il enseigne à l'université de Waterloo (Ontario, Canada).
Il décède le 13 septembre 1997.

K. ANNEXE

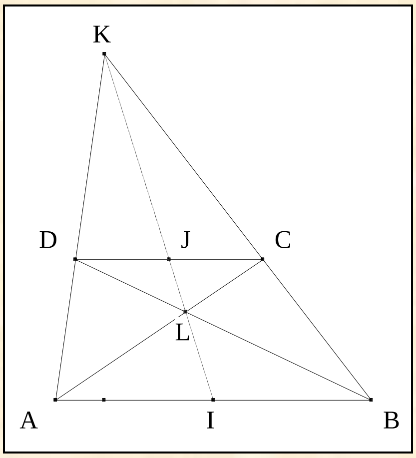
1. Une relation de Carnot[142]



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et A' le milieu de [BC],

Donné : AH = 2.OA'.

2. Le trapèze complet

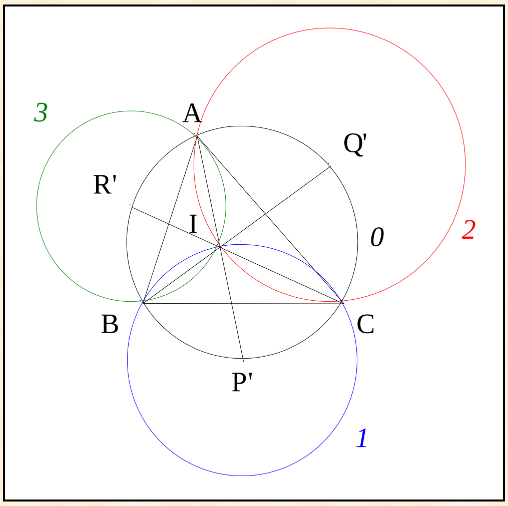


Traits : ABCD un quadrilatère,
I le milieu de [AB],
J le milieu de [CD],
K le point d'intersection de (AD) et (BC)
et L le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

Donné : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD) *si, et seulement si,* I, J, K et L sont alignés.

3. Un cercle de Mention

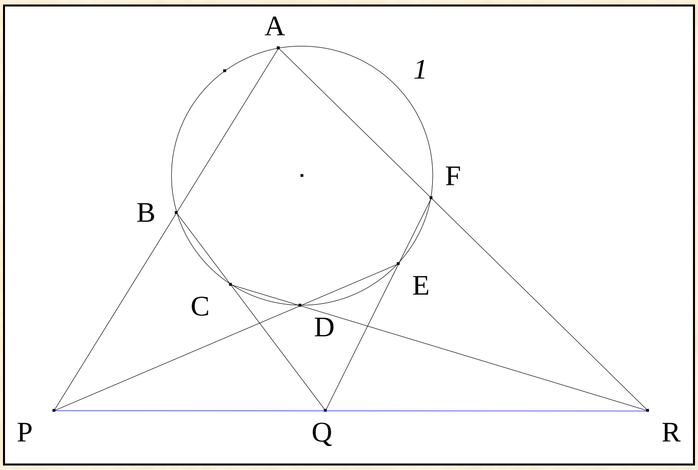
[142] Carnot L., *Géométrie de position* (1803).



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	I	le centre de ABC,
	P', Q', R'	le point d'intersection resp. de (IA), (IB), (IC) avec *0*
et	*1, 2, 3*	les cercles de centres resp. P', Q', R' passant resp. par B et C, C et A, A et B.

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants en I.

4. Hexagramma mysticum[143]

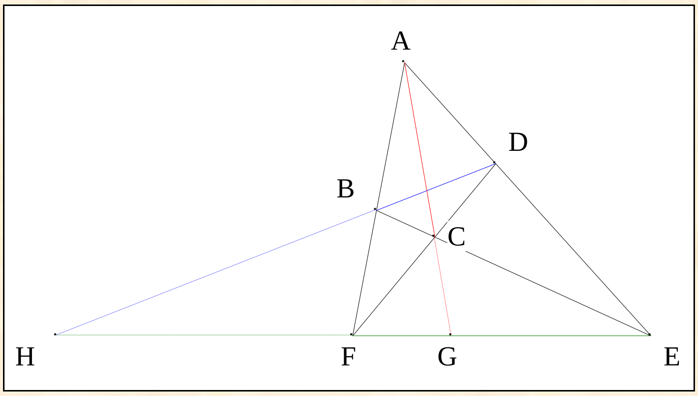


Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEF	un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

5. Diagonales d'un quadrilatère complet[144]

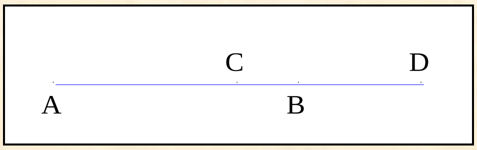
143 Pascal B. (1640)
144 Pappus, *Collections*, Livre **7**, proposition **131**.



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	E, F	les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
et	G, H	le point d'intersection resp. de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

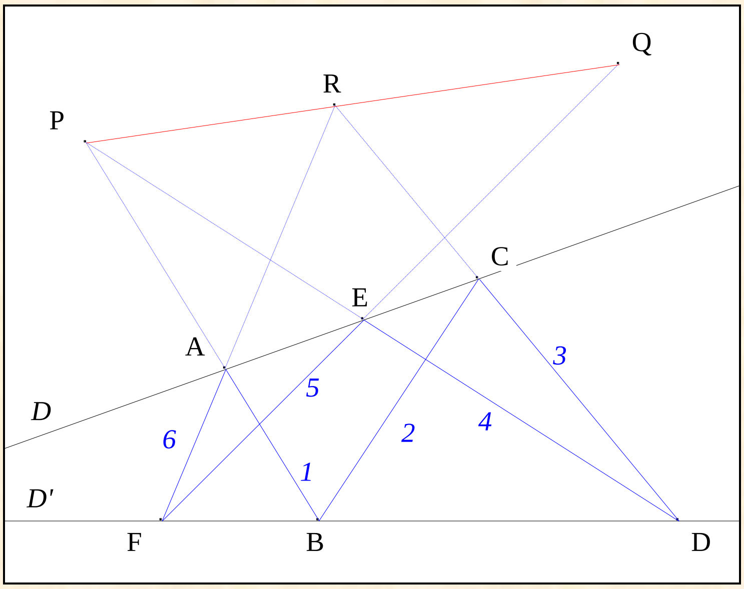
6. La relation de Descartes



Traits : la quaterne (A, B, C, D) est harmonique.

Donné : $\dfrac{2}{\overline{CD}} = \dfrac{1}{\overline{CA}} + \dfrac{1}{\overline{CB}}$.

7. La proposition 139 de Pappus[145]



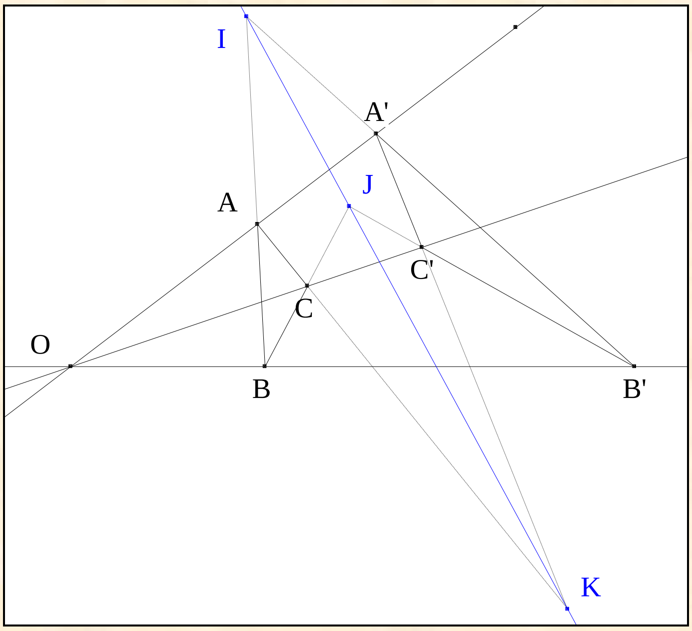
Traits :	D, D'	deux droites,
	ABCDEFA	un hexagone de Pappus

[145] Pappus, *Collections*, Livre **VII**.

et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : E est sur (AC) *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

8. Le théorème des deux triangles[146]



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
O le point de concours de (AA') et (BB'),
I le point d'intersection de (AB) et (A'B'),
J le point d'intersection de (BC) et (B'C')
et K le point d'intersection de (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.

[146] Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.

L. RÉFÉRENCES

Avertissement : les références sont classées par année et
une référence écrite en gras signifie que l'auteur n'y a pas eu accès.

1805

Craik Alex D. D. and O'Connor John J., Some unknown documents associated with William Wallace (1768-1843), BSHM Bulletin: *Journal of British for the History of Mathematics*, vol. **26**, Issue **1** (March 2011) 17-28.

1815

?, Question **1029**, *The Gentleman's Diary* (1815) 39-40

1819

Bland M. (1786-1867), *Geometrical Problems deducible from the first six books of Euclid*, Cambridge (1819) 228-229 ; 3rd ed. (1827) 228
Philomathe, Solution of problem **590**, *School Science and Mathematics* **19** (March1919) 279

1863

Cantab, problem **1549**, Mathematical Questions from *The Educational Times*, **2** (1863) 67

1865

?, Mathematical Questions and Solutions, Educational Times 11 (1865) 67-68

1878

?, *Journal de Mathématiques* de Vuibert (1878) 108

1884

Mackay J. S., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **III** (1884-1885) 38

1890

Fuhrmann W., *Synthetische Beweise Planimetrischer,Sätze,* Berlin (1890)

1892

Casey J., A Sequel to Euclid, 6th ed. Revisited (1892) cor. **5**, p. 129

1896

Candy L. A., A general theorem relating to transversals, and its consequences, *Annals of Mathematics*, New-York, **10**, (1895-1896) 175-190

1905

Russel J. W., An Elementary Treatise on Pure Geometry, Oxford University Press, London (1905) 226-229

1919

?, Problem 590, School Science and Mathematics (March 1919)

1922

?, Problem 366, F. G.-M., Cours de Géométrie, J. de Gigord, Paris (1922) 238

1929

Johnson R. A, *Modern Geometry*, Houghton Mifflin, Boston (1929) 78 ; *Advanced Euclidean Geometry* by Dover, New York (1960) 78

1933

MacGregor M. F., Solution of problem **1455**, School Science and mathematics **33** (1933) 902
?, Problem 1265, School Science and mathematics (November 1933)

1936

Chertoff I., Solution of problem **1455**, School Science and mathematics **36** (1936) 1027-1028

1941

Charosh M., Solution of problem **1713**, *School Science and Mathematics* **41** (Oct. 1941) 684-685

1943

?, Problem E 571, *American Mathematical Monthly* (May 1943) 326

1944

Rosenbaum J., Buker W. E., Steinberg R., Starke E. P., Butchert J. H., Solution of Problem E **571**, *Amer. Math. Monthly* **51** (Feb. 1944) 91

1945

Charosh M., *Association of Teachers of Mathematics*, N.Y.C. **1** (1945) 11

1952

Durell C. V., Projective Geometry, Macmillan, London (1952) 184
Shklyarsky, Chentsov, Yaglom, Problem **104**, Solution 1, *Selected problem and Theorems of Elementary Mathematics*, vol. **2** Moscou (1952)

1955

Bankoff L., Solution of Problem **2426**, *School Science and Mathematics* **55** (Feb. 1955) 156
Eilberg A., Solution of Problem 2419, *School Science and Mathematics* **55** (1955) 70-71

1957

Miller L. H., College Geometry, Appleton-Century-Crofts, New York (1957) 124-125

1960

Johnson R. A, *Modern Geometry*, Houghton Mifflin, Boston (1929) 78 ; *Advanced Euclidean Geometry* by Dover, New York (1960) 78

1962

Winger R. M., Projective Geometry, Dover (1962) 169-171

1963

Eves H. W., *A survey of geometry*, Allyn and Bacon, Boston (1963) 171
Morgan F., Zartman, Geometry, Houghton Mifflin, Boston (1963) 415
Pinzka C. F., Problem Solving and Some Problems, Enrichment Mathematics for High School, 28th Yearbook, NCTM (1963) 179-184, problem **14**. (NCTM : National Council of Teachers of Mathematics)

1964

Coxeter H.S.M., Projective geometry, Blaisdell, New York (1964) 78, 144
Eves H. W., *Fundamentals of Geometry*, Allyn and Bacon, Boston (1964) 136-137

1965

Dorrie H., 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover (1965) 265-272
Klamkin M. S., An Extension of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* vol. **38** (1965) 206-208
Perfect H., Topics in Geometry, Macmillan, N.Y. (1965) 113

1967

Coxeter H. S. M. and Greitzer S. L., *Geometry revisited*, MAA (1967) 45-47, 162

1968

Winterle R., Solution of problem **#2**. Ontario Secondary School Math. Bull. **1** (1968) 33 ; also solution by Lovsin W. p. 34, 17

1969

Bankoff, unpublished (as of 1969) manuscript on the history of the Butterfly Problem
Chakerian G. D., Salle G. T., Klamkin M. S., on the butterfly property, School Sci. and Math., 42 (1969) 21-23
Jacobson W. I., The butterfly problem-extensions, generalizations, School Sci. and Math., 42 (1969) 17-21

1972

Eves H. W., *A survey of Geometry*, Allyn and Bacon, Revised Edition (1972) 144-145, 255-256

1973

Conrad S. R., Another Simple Solution of the Butterfly Problem, vol. **46** *Mathematics Magazine* MAA (Nov. 1973) 278-280
Sledge J., A generalization of the butter_y theorem, J. of Undergraduate Math., 5 (1973), 3-4

1975

Erdös P., Solution of problem **75-5**, Ontario Secondary School Math. Bull. **2** (1975) 23-24

1976

Bateman D., Solution of problem 949, School Sci. and Math., 49 (1976) 217-218
Jones D., A double butterfly theorem, *Mathematics Magazine* **49** (1976) 86-87
Sauvé L., The celebrated Butterfly problem, Eureka (Canada) vol**. 1**, issue **2** (1976) 2-5 ; Eureka was latter called *Crux Mathematicorum*
Sokolowsky D., Another proof of the butterfly theorem, *Eureka* (Canada) **2** (1976) 188-190

1980

Gleason A. M., Greenwood R. E., and Kelly L. M, Putnam Competition, Problems and Solutions : 1938-1964, MAA (1980) 575-577
Jones D, Quadrangles, Butterflies, Pascal's Hexagon and Projective Fixed Points, *Amer Math Monthly* **87**, **3** (March 1980) 197-200

1982

Coles J., Solution of problem **82-3**, Ontario Secondary School Math. Bull. **3** (1982) 15-16

1981

Satyanarayana K., A simple proof of the butterfly problem, *Crux Mathematicorum* **7** (1981) 292

1983

Dystra E., An Analytical Proof of the Butterfly Theorem (November 1983) ; http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd08xx/EWD866.PDF
Honsberger R., Two Gems from Euclidean Geometry, *The Two-Year College Math. J.*, MAA (January 1983) 135-140
Honsberger R., The butterfly problem and other delicacies, Part **I,** *The Two-Year College Math. J.* **14** (1983) 2-5
Part II, *The Two-Year College Math. J.* 14 (1983) 154-158 ;

1984

Luthar R. S., A Three-Winged Butterfly Problem , Problème **1187**, *Mathematics Magazine*, vol. **58**, **2** (1984) 115
?, Problème **1187**, *Mathematics Magazine*, vol. **58, 2** (1984) 115

1985

Tiberio R. S., Sol. I, and Dou J., Sol. II of problem 1187, A Three-Winged Butterfly Problem, School Sci. and Math., 58 (1985) 115

1986

Prasolov V. V., Problems in Planimetry, vol. **2** Nauka, Moscou (1986) 59.
Sharygin I. F., *Problemas de geometria*, Éditions Mir, Moscou (1986) exercice **II** 186 p. 106

1987

Bankoff L., The Metamorphosis of the Butterfly Theorem, *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America, vol. **60** n°**4** (October 1987) 195-210 ; http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/imo-geometry-4-11-04/butterfly/bankoff.pdf

1988

Pickert G., Zum projektiven Beweis des Schmetterlingssatz, Praxis Math., 30 (1988), 174-175
Schaal H., Bemerkungen zum Schmetterlingssatz, Praxis Math., 30 (1988), 297_303

1989

Geise G., Eine weitere Bemerkung zum Schmetterlingssatz, Praxis Math., 31 (1989), 367-368
Siemon E., Noch eine Bemerkung zum Schmetterlingssatz, Praxis Math., 31 (1989), 42-43

1990

Hoehn L., A new proof of the Double Butterfly Theorem, *Mathematical Magazin*, **63** (1990) 256-257
Olympiades chinoises (1990)

1991

Cerin Z. and Gianella G. M., On inprovements of the Butterfly theorem (1991) ; http://web.math.hr/~cerin/c144.pdf
Conrad S. R., Another Simple Solution of the Butterfly Problem, vol. **5** chap. **2**, *Arbelos* (1991) 38-39

1997

Qiu Fawen, A Better Butterfly Theorem ; http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/BetterButterfly.shtml

2000

Olympiades Bulgarie (2000)
Prasolov V. V., Essays on Numbers and Figures, vol. **16**, *AMS* (2000) 59

2001

Volenec V., A generalization of the butter_y theorem, Mathematical Communications (Osijek), 6 (2001), No. 2, 157_160
Cerin Z., A generalization of the butterfly theorem from circles to conics, Mathematical Communications (Osijek), 6 (2001), 161-164

2002

Sliep£evi¢ A., A new generalization of the butter_y theorem, J. for Geometry and Graphics, 6 (2002), No. 1, 61-68
St. Petersburg Mathematics Olympiad (2002) Elimination Round, Problem 10/6 ; also SPbMo (9th grade)
Volenec V., The butterfly theorem for conics, Mathematical Communications (Osijek), 7 (2002), No. 1, 35_38

2003

Cerin Z., Lines with the butter_y property, Mathematical Communications (Osijek), 8 (2003), No. 1, 35-41
Duman A. N., Problem **1669**, *Mathematics Magazine* vol. **76**, **2** (2003) 151
Faynsteyn O., *Elemente der Mathematik*, problème 1180 ; solution, *Elemente der Mathematik*, 1/58 (2003)
Rike T., Perennial Problem for Geometry de Tom Ryke (12/01/2003), Berkeley Math Circle ;
http://mathcircle.berkeley.edu/BMC5/docpspdf/PerennialGeom.BMC.pdf
Zaslavsky A. A., Double Desargues, Message *Hyacinthos* # **7983** du 23-09-03 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

I need some pure geometry :)), *Mathlinks* du 03/09/2003 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=1133
Butterfly, *Mathlinks* du 28/09/2003 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=1091

2004

butterfly theorem again, Putnam 1963/**A6**, *Mathlinks* (11/05/2004) ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=5661
A Variation of The Butterfly Problem, *Mathlinks* du 31/05/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=13061
almost easy [prove < ROS = < BAC], *Mathlinks* du 10/09/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=16567
Another easy problem [midpoint M of BC projected], *Mathlinks* du 16/09/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=16779
cyclic quadrilateral and line [extended butterfly theorem], *Mathlinks* du 27/09/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=18781

2005

Quadrilateral [quadrilateral bisect segment on a parallel], *Mathlinks* du 13/01/2005 ;

http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=69971
EM = MF with projective geometry, *Mathlinks* du 23/01/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=24459
Extended butterfly, *Mathlinks* du 27/01/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=24896
Butterfly 's theorem, *Mathlinks* du 25/02/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=28062
The cord of a circle, *Mathlinks* du 11/04/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=36530
butterfly-like property of chords of an ellipse, *Crux*, problem **180**, *Mathlinks* du 24/04/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=34740
Blaikie theorem (for all friends of involutions), *Mathlinks* du 20/05/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=38178
New adventure of the beautiful butterfly, *Mathlinks* du 31/07/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=46358
may be difficult.....help me ...... as quickly as possible , *Mathlinks* du 05/08/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=192515
EASY:Cyclic quadrilateral and diagonals, *Mathlinks* du 27/08/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=49908

2006

Zvonko Cerin, On butterflies inscribed in a quadrilateral, *Forum Geometricorum* **6** (2006) 241—246 ;
http://forumgeom.fau.edu/

Relate butterfly theorem, *Mathlinks* du 01/03/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=136318
Very hard for me, *Mathlinks* du 13/01/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=69997
Nicula V., About the butterfly theorem, *Mathlinks* du 06/02/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=73560
Tangent to circumcircle at antipode meets sideline, *Mathlinks* du 26/08/2006 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=110996
fix point, *Mathlinks* du 06/09/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=109772
Nicula V., *P.B.* **1**, Proving an angle, *Mathlinks* du 09/09/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=110196
Nicula V., *P.B.* **2**, Proving an angle, *Mathlinks* du 09/09/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=110196
Look over the plane, *Mathlinks* du 15/09/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=110900
Equal segments?, *Mathlinks* du 16/09/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=110996
Circle and equality of segments, Problem 2, Polish NO 2005, *Mathlinks* du 30/09/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php ?t=54036

2007

Grinberg D, On cyclic quadrilaterals and the butterfly theorem (10/02/2007) ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/
Kung S., A Butterfly Theorem for Quadrilaterals, *Math. Mag.*, **78** (October 2005) 314–316

Relate butterfly theorem, *Mathlinks* du 01/03/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=136318
circle and equal segments, *Mathlinks* du 20/04/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=144845
2 :1, *Mathlinks* du 01/08/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=160902
A nice concurrency, *Mathlinks* du 15/08/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=162993
Equal segment, *Mathlinks* du 31/12/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=181191

2008

Bezverkhnyev Y., Haruki's Lemma and a Related Locus Problem, *Forum Geometricorum* vol. **8** (2008) 63-72 ; http://forumgeom.fau.edu/

Generalization of Butterfly, *Mathlinks* du 03/01/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=181632
A nice problem for you, *Mathlinks* du 23/01/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=184861
Orthocentre (Saint Petersbourg Math Olympiad 1995-1996), *Mathlinks* du 12/02/2008
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=188163
very very good problem, *Mathlinks* du 03/03/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=192177
Interesting property, *Mathlinks* du 18/04/2008 ;

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=200706
non-trivial first problem :) 4 concyclic points, Balkan Mathematical Olympiad 2008 Problem 1, *Mathlinks* du 06/05/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=203653
A perpendicularity in a cyclic quadrilateral, *Mathlinks* du 10/05/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=204275
nice, *Mathlinks* du 11/05/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=204334
Mongolian TST 2008, Day1 Problem 1, *Mathlinks* du 12/05/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=204495
triangle and some equal segments,Ukraine journal, *Mathlinks* du 10/07/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=214275
Equal angles, *Mathlinks* du 13/07/2008 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=214711
Very difficult problem, *Mathlinks* du 02/08/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=218486
prove I is midpoint of JK ?, *Mathlinks* du 08/09/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=225170
Prove that DK = DL, MEMO 2008, Single, Problem 3, *Mathlinks* du 10/09/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=225453
Two equal segments in a triangle, *Mathlinks* du 13/12/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=244984

2009

Nice geometry:), *Mathlinks* du 31/01/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=254679
Prove HE = HF, *Mathlinks* du 23/02/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=260415
Two equal segments, *Mathlinks* du 17/07/2009
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=289278
Prove that <BAC = <EHD, *Mathlinks* du 23/11/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=313866
OI and concurrency, *Mathlinks* du 22/12/2009 ;
http ://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=320065

2010

A Circle and Chord Property, *Mathlinks* du 24/02/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=346411
Challenging Geometry Proof, *Mathlinks* du 11/04/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=344604
An application of the butterfly property, *Mathlinks* du 29/04/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=347299
Isosceles triangle with height HM, Moldova TST 2010, day 2, problem 3, *Mathlinks* du 04/05/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=335815
Butterfly's problem for exterior P wrt circle w (own ?!). , *Mathlinks* du 27/05/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=350742
A simple proof for Butterfly Theorem, *Mathlinks* du 11/07/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=356604
Butterfly theorem, *Mathlinks* du 17/07/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=357559
Like butterfly theorem, *Mathlinks* du 23/07/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=358474
Pc=qc, *Mathlinks* du 26/08/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=363786
Circle and equal segments - tst for JBMO , Romany - 2010, *Mathlinks* du 11/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=377228

2011

Ayme J.-L., A new metamorphosis of the butterfly theorem and a lot of new proofs, G.G.G. vol. **7** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Ayme J.-L., For an Olympiad, *Mathlinks* du 25/04/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=403778
Craik Alex D. D. and O'Connor John J., Some unknown documents associated with William Wallace (1768-1843),
BSHM Bulletin: *Journal of British for the History of Mathematics*, vol. **26**, Issue **1** (March 2011) 17-28.

Mp=mq, *Mathlinks* du 25/01/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=388320

M. ARCHIVES

LES DEUX ARTICLES FONDATEURS

- 2 -

THE CELEBRATED BUTTERFLY PROBLEM

LÉO SAUVÉ, Algonquin College

1. *Introduction.*

The Butterfly Problem has a history that goes back at least to 1815 [1], and the interest it arouses is such that it keeps on reappearing in the literature [1 - 24]. In its simplest form it may be stated as follows:

Through the midpoint M *of chord* AB *of a circle (see Figure* 1*), two chords,* CD *and* EF*, are drawn.* ED *and* CF *intersect* AB *in* P *and* Q*, respectively. Prove that* PM = MQ.

The resemblance of the figure to the wings of a butterfly explains the name under which the problem has become known. The problem looks simple, but its proof turns out to be unexpectedly elusive. Coxeter and Greitzer [19] mention that one of the earliest solvers (1815) was W.G. Horner, discoverer of Horner's Method for approximating the roots of a polynomial equation. Many of the short proofs found over the years have been projective in nature, and most of the elementary proofs have been fairly long and complicated, involving in most cases the use of auxiliary lines. Indeed, Eves [23] says: "It is a real stickler if one is limited to the use of only high school geometry."

2. *A simple proof of the Butterfly Theorem.*

The elegant proof I give below appears to me to be the simplest of those that I have seen, in that it is fairly short, involves only high school geometry, and requires no auxiliary lines whatever. It was discovered by Steven R. Conrad, B.N. Cardozo High School, Bayside, N.Y. [24].

In Figure 1, four pairs of equal angles are denoted by α, β, γ, δ, and $MQ = x$, $PM = y$, $AM = MB = a$, so that $AQ = a - x$ and $PB = a - y$. The notation K(RST) will be used to denote the area of ΔRST.

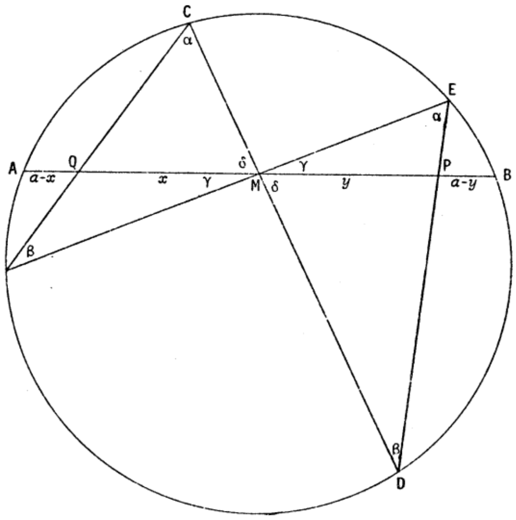


Figure 1

From Figure 1, we see that

$$\frac{K(QCM)}{K(PEM)}\cdot\frac{K(PEM)}{K(QFM)}\cdot\frac{K(QFM)}{K(PDM)}\cdot\frac{K(PDM)}{K(QCM)} = 1.$$

Hence

$$\frac{CM\cdot CQ\cdot\sin\alpha}{EM\cdot EP\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{EM\cdot MP\cdot\sin\gamma}{FM\cdot MQ\cdot\sin\gamma}\cdot\frac{FM\cdot FQ\cdot\sin\beta}{MD\cdot DP\cdot\sin\beta}\cdot\frac{MD\cdot MP\cdot\sin\delta}{CM\cdot MQ\cdot\sin\delta} = 1.$$

- 3 -

Upon cancellation, multiplication, and rearrangement, it follows that

$$CQ \cdot FQ \cdot (MP)^2 = EP \cdot DP \cdot (MQ)^2.$$

However, since $CQ \cdot FQ = AQ \cdot QB$ and $EP \cdot DP = BP \cdot AP$, it is true that

$$AQ \cdot QB \cdot (MP)^2 = BP \cdot AP \cdot (MQ)^2$$

or

$$(a^2 - x^2)y^2 = (a^2 - y^2)x^2.$$

Since x and y are positive, this equation implies $x = y$, from which it follows that $PM = MQ$.

3. *Extensions and Generalizations.*

(a) It has long been known that if CE and DF meet AB produced in R and S, then RM = MS (Figure 2). This can be shown by a slight modification of existing proofs of the original Butterfly Problem.

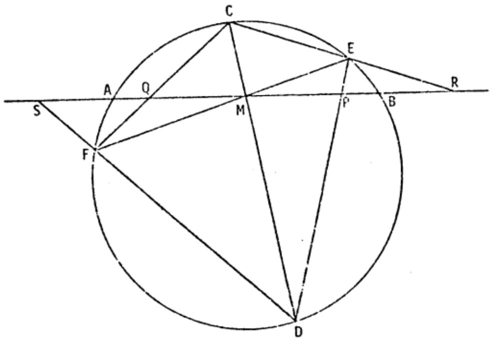


Figure 2

(b) Klamkin [18] credits Cantab [3] for the following extension. If AOB is a diameter of the circle, OM = ON, and CD, EF are arbitrary chords through M and N (Figure 3), then PO = OQ and RO = OS.

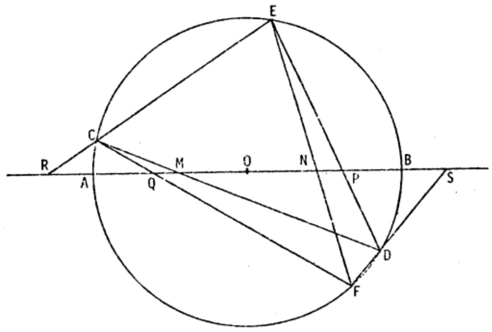


Figure 3

(c) Klamkin [18] extends (b) still further by showing that the diameter AOB can be replaced by an arbitrary chord. Thus, in Figure 4, if OM = ON, then PO = OQ and RO = OS. Klamkin adds that since midpoints are invariant under an affine transformation, this result also holds for ellipses.

(d) Chakerian, Sallee, and Klamkin [21] showed that the Butterfly Property characterizes ellipses among ovals by proving the following theorem, which had already been conjectured by Klamkin alone in [18].

THEOREM. Let S be a closed, bounded, plane convex set with the following property: whenever M *is the midpoint of a chord* AB*, and* CD *and* EF *are any two chords containing* M*, then* PM = MQ *(as in Figure 1). Then S is an ellipse.*

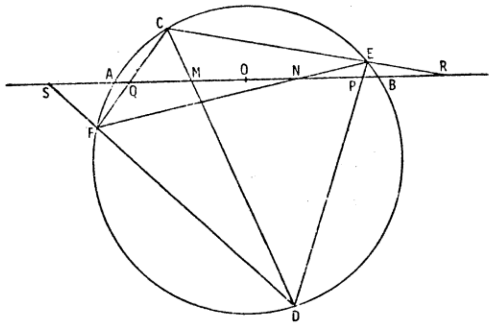


Figure 4

(e) Finally, Eves [23] extends the Butterfly Property to all proper conics by means of

- 4 -

the following theorem:

THE GENERALIZED BUTTERFLY THEOREM. Let M *(see Figure* 5*) be the midpoint of a chord* AB *of a proper conic* c_1*, let two other chords* CD *and* EF *be drawn through* M*, and let a conic* c_2 *through* C, E, D, F *cut the given chord in* P *and* Q*. Then* M *is the midpoint of* PQ.

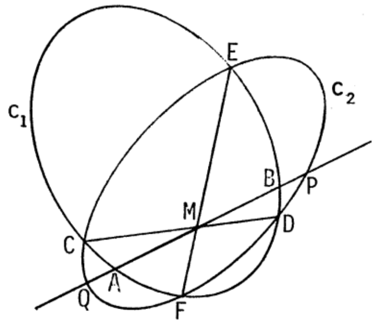


Figure 5

4. *Acknowledgments.*

I obtained reference 3 from [18]; references 14 and 17 from [19]; reference 20 from [21]; references 6, 19, 23, 24 are my own; all the remaining references are from [24].

REFERENCES

1. Question 1029, *The Gentlemen's Diary*, 1815, pp. 39 - 40.

2. M. Bland, *Geometrical Problems*, Cambridge, New York, 1819, p. 228.

3. Problem 1549, *Mathematical Questions from the Educational Times*, Vol.2, 1863, p. 67.

4. Mackay, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Vol.III, 1884, p. 38.

5. Problem 590, *School Science and Mathematics*, March 1919.

6. Problem 366, F.G.-M., *Cours de Géométrie*, J. de Gigord, Paris, 1922, p. 238.

7. R. A. Johnson, *Modern Geometry*, Houghton Mifflin, Boston, 1929, p. 78.

8. Problem 1265, *School Science and Mathematics*, November 1933.

9. Problem 1455, *ibid.*, 1936.

10. Problem 1713, *ibid.*, October 1941.

11. Problem E571, *American Mathematical Monthly*, 1943, p. 326; 1944, p. 91.

12. Problem 2426, *School Science and Mathematics*, February 1955.

13. L. H. Miller, *College Geometry*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1957, pp. 124 - 125.

14. R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960, p. 78.

15. F. Morgan, J. Zartman, *Geometry*, Houghton Mifflin, Boston, 1963, p. 415.

16. C. F. Pinzka, Problem Solving and Some Problems, *28th Yearbook*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963, p. 179.

17. H. S. M. Coxeter, *Projective Geometry*, Blaisdell, 1964, pp. 78, 144.

18. M. S. Klamkin, An Extension of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine*, Vol. 38, 1965, pp. 206 - 208.

19. H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Random House of Canada,

- 5 -

Toronto, 1967, pp. 45 - 46, 162.

20. Leon Bankoff, unpublished (as of 1969) manuscript on the history of the Butterfly Problem.

21. G. D. Chakerian, G. T. Sallee, M. S. Klamkin, On the Butterfly Property, *Mathematics Magazine*, Vol. 42, 1969, pp. 21 - 23.

22. W. Jacobson, The Butterfly Problem—Extensions, Generalizations, *ibid.*, Vol. 42, 1969, pp. 17 - 21.

23. H. Eves, *A Survey of Geometry*, Revised Edition, Allyn and Bacon, Boston, 1972, pp. 144 - 145, 255 - 256.

24. S. R. Conrad, Another Simple Solution of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine*, Vol. 46, 1973, pp. 278 - 280.

* * *

Bankoff L., The Metamorphosis of the Butterfly Theorem, *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America, vol. **60** n°**4** (October 1987) 195-210 ; http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/imo-geometry-4-11-04/butterfly/bankoff.pdf

ARTICLES

The Metamorphosis of the Butterfly Problem

Leon Bankoff
Los Angeles, CA 90048

Editor's note. This article illustrates the diversity of geometric techniques that can be brought to bear on a single problem. The author was prompted to examine his ample collection of historical material when a compilation of varied proofs of the Butterfly problem was offered by Kaidy Tan of Fukien Teacher's University, Foochow, Fukien, China. All of these proofs had appeared in print, and this article outlines many of them, providing their historical roots.

One of the hardiest of the hardy perennials in the realm of Euclidean geometry is the problem that was dubbed The Butterfly by some as yet unidentified poetic mathematician who fancied the image of a lepidopterous creature in the configuration of the problem. This appellation made its first appearance as the title of solutions published in the *American Mathematical Monthly* in February 1944 [**1**]. The name took hold and has probably contributed to some extent to the recent popularity of the problem. My love affair with The Butterfly began thirty years ago with the publication of the following proposal in *School Science and Mathematics*:

> *In a circle* (O), P *is the midpoint of chord* AB. *Chords* RS *and* TV *pass through the point* P. RV *cuts* AP *at a point* M, *and* ST *cuts* PB *at point* N. *Prove by high school geometry that* MP *equals* PN.

I was fascinated by the problem, intrigued by the unexpected symmetry arising from an obviously random construction. Searching through my well-stocked library, I came across two solutions to the problem in the *Gentleman's Diary* of 1815 [**2**], a British publication that was instrumental in popularizing mathematics during the eighteenth and nineteenth centuries. I was pleasantly surprised to find that one of the solutions was by W.G. Horner (of Horner's method fame) who thought enough of the problem to submit a solution. I condensed his result and sent it along with mine for publication in SSM [**3**]. In a discussion of the problem with my good friend, guide, and mentor, Charles W. Trigg, I was fortunate enough to obtain several additional SSM references, plus the AMM reference mentioned above, as well as one in Johnson's *Modern Geometry* [**4**]. I was amazed to find a fantastic variety of solutions in these sources—some by Desargues' theorem on involution, some by the use of cross ratios, others stemming from Menelaus, analytic geometry, trigonometry, advanced Euclidean geometry, and various other modalities, all to be treated later on.

I wish to offer here samples of the different modes of attack on the Butterfly problem and to retrace my adventure in tracking down its history, its extensions and variations to date. It is my hope to enlarge upon the extensive treatment of the subject by Léo Sauvé, editor of *Crux Mathematicorum*, in his survey published in what was formerly called *Eureka*, in 1976 [**5**]. My investigations, though sporadic, were made all the more difficult by the namelessness of the problem before 1944. Rather than attempt a more systematic compilation, I shall cover these topics in more or less chronological order of discovery. Such loose, anecdotal treatment will enable the reader to join me along the path from idle curiosity to gratified revelation.