# MÉNÉLAÜS D'ALEXANDRIE

# ET

# LE MARQUIS GIOVANI CEVA

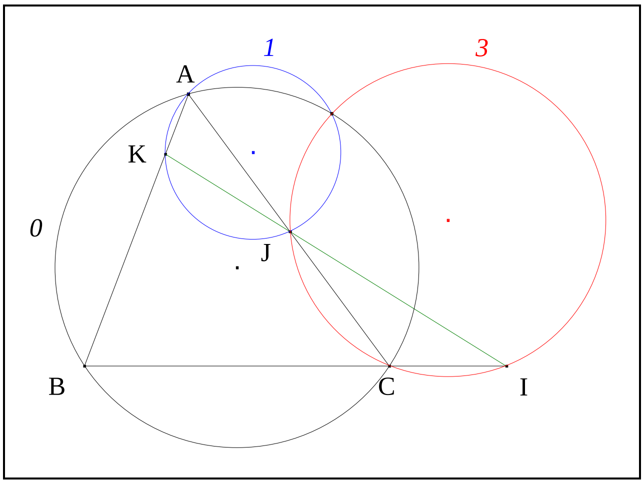
## APPROFONDISSEMENT

## D'UN

## PROBLÈME DU *MONTHLY* DE 1917

†

Jean - Louis AYME




**Résumé.** Deux versions "circulaires" des théorèmes de Ménélaüs et de Ceva sont présentées chacune par une équivalence. L'auteur a lié ces deux théorèmes classiques à un problème du *Monthly* de 1917 présentant un alignement conditionné à une "concourance" et en a donné une solution originale et purement synthétique.
Une étude approfondie de ce problème se poursuit pour aboutir à un "joli résultat" concernant l'alignement d'un PC-point avec l'isogonal de son point de Ceva et du centre du triangle du cercle circonscrit au triangle de départ, puis à un "très joli résultat" concernant l'isogonal de l'isotomcomplément du point de Ceva.
Cet article est le second d'une série de trois qui ont pour objet un résultat majeur concernant les PC-droites qui seront définies dans le dernier article.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire



**Avertissement :** les références indiquées sont celles trouvées par l'auteur et peuvent donc être modifiées.

## A. MÉNÉLAÜS D'ALEXANDRIE

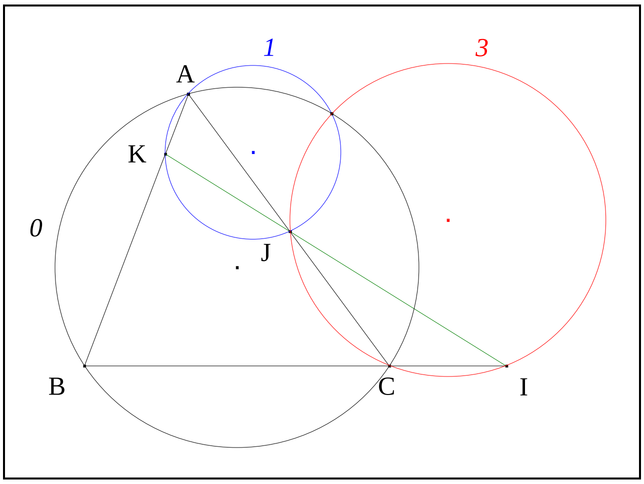
## ET

## AUGUSTE MIQUEL - WILLIAM WALLACE

### 1. L'équivalence circulaire, condition suffisante

**VISION**

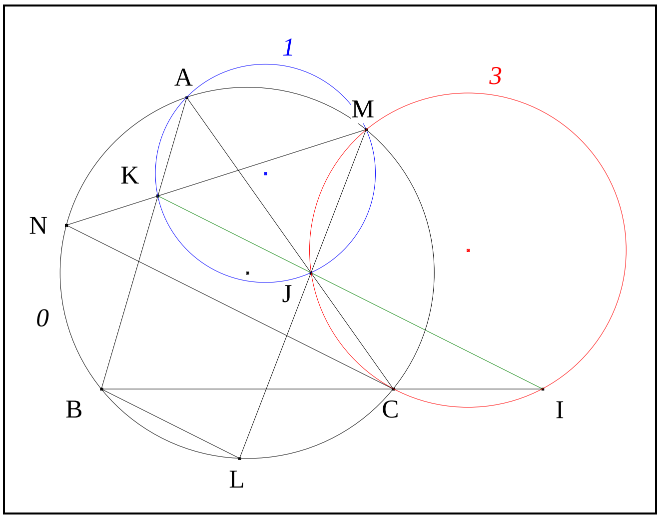
**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | *0* | le cercle circonscrit à ABC, |
| | I, J, K | trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB) |
| et | *1*, *3* | les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, CJI. |

**Donné :** *0*, *1* et *3* sont concourants *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.

### VISUALISATION NÉCESSAIRE




- Notons M le point de concours de ces trois cercles,
  et L, N les seconds points d'intersection resp. de (MJ), (MK) avec *0*.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base A et M, les moniennes (KAB) et (JML), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (KJ) // (BL).

- Les cercles *0* et *3*, les points de base C et M, les moniennes (BCI) et (LMJ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BL) // (IJ).

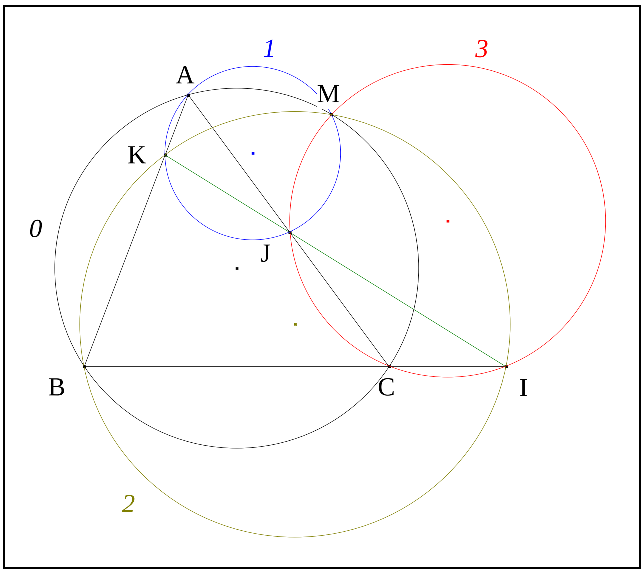
- Par transitivité de la relation //, (KJ) // (IJ) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (KJ) = (IJ).

- **Conclusion :** I, J et K sont alignés.

**Commentaire :** pour l'auteur,
cette condition nécessaire conduit à une vision circulaire du théorème de Ménélaüs.

**Scolies :** **(1)** une "ménélienne ou transversale" d'un triangle est une droite qui rencontre les trois droites latérales d'un triangle en dehors des sommets de ce triangle ;
en conséquence, (IJK) est "une ménélienne de ABC".

**(2)** Le cercle circonscrit au triangle BIK




- Notons *2* ce cercle.

- Le cercle *0*, les points de base B et M, les moniennes naissantes (CBI) et (NMK), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, B, M, I et K sont cocycliques

- **Conclusion :** *2* passe par M.

## 2. Une courte biographie de Ménélaüs d'Alexandrie [1]

Ménélaos, latinisé en Ménélaüs est né vers 70 de notre ère, probablement à Alexandrie (Égypte).
Étudiant grec, puis membre de la fameuse École d'Alexandrie i.e. du Musée, Ménélaos que l'on ne doit pas confondre avec Ménélaos de Sparte, part pour Rome où il exercera ses talents d'astronome notamment selon Ptolémée, le 14 janvier 98 où il observe l'occultation de l'étoile beta Scorpion par la Lune.
L'idée d'un ciel sphérique relayée par la découverte d'une terre ronde, allait entraîner les savants de l'époque à jeter les bases de la trigonométrie sphérique et plane. Ménélaüs, allait écrire d'après Théon d'Alexandrie, un traité sur les *Cordes* en six livres qui disparaîtra. Seul son traité intitulé *les Sphériques*, composés de trois livres, nous est parvenu en arabe et en hébreu, le texte originel grec ayant été perdu. C'est dans le dernier livre consacré à la trigonométrie sphérique qu'il présente une propriété des triangles sphériques à partir d'un lemme "d'alignement" connu de ses contemporains et certainement d'Euclide i.e."la règle arithmétique des six quantités" ou encore "le théorème des six segments" :

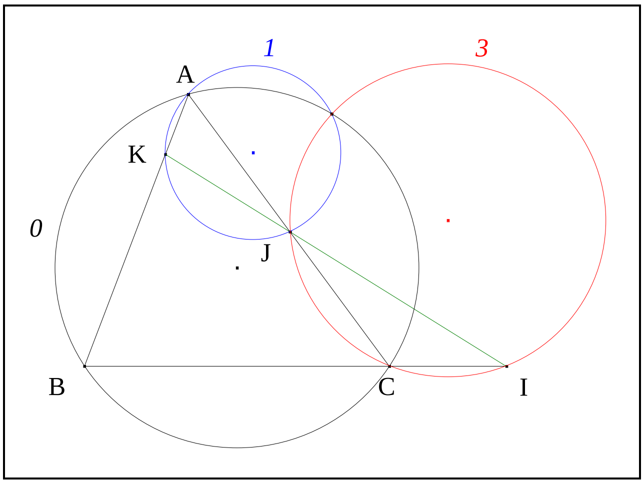
*lorsqu'une transversale rencontre les droites latérales d'un triangle,*
*le produit de trois de ces segments, qui n'ont pas d'extrémité commune,*
*est égal*
*au produit des trois autres* [2]

---

1 http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Menelaus.html.
2 Ménélaus, *Sphoerica*, tome III, p. 1.

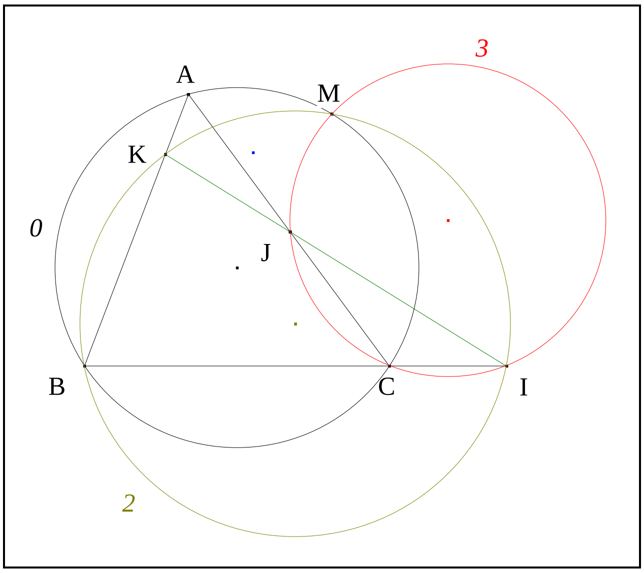
Attribué d'abord à tort à Claude Ptolémée par Henri Brice Charet de La Frémoire[3] et Eugène Catalan, ce résultat sera repris par Pappus d'Alexandrie, Girard Desargues, Blaise Pascal, Jean Ceva qui s'en serviront pour démontrer leurs plus belles propositions, et par Lazare Carnot qui, le restituant à son auteur, le placera à l'origine de sa théorie des transversales.
Des auteurs grecs attestent aussi qu'il aurait écrit un livre *d'Éléments de Géométrie*.
Il décède vers 130.

### 3. L'équivalence circulaire, visualisation suffisante [4]




- Notons M le point de concours de *0*, *1* et *3*.
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" appliqué
  au delta déterminé par le triangle ABC et la ménélienne (IJK), *0*, *1* et *3* sont concourants au pivot M.
- **Conclusion :** *0*, *1* et *3* sont concourants.

**Scolies :** **(1)** une autre approche




[3] La Frémoire (de) (1917-?) promotion 1835 de l'École Polytachnique.
[4] Wallace W. dans un papier datant de 1799.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème du pivot" appliqué
au delta déterminé par le triangle AKJ et la ménélienne (BCI),
*0*, *2* et *3* sont concourants au pivot M.

**(2)** M est "Le point de Miquel-Wallace du delta déterminé par le triangle ABC et la ménélienne (IJK)".

**Énoncé traditionnel :** *si*, quatre droites se coupant deux à deux forment quatre triangles
*alors*, les cercles circonscrits à chacun de ces triangles sont concourants.

**Note historique :** M a été appelé "point de Miquel" par le géomètre **S. Kantor** de Vienne en 1878.
Rappelons que ce résultat faussement attribué à Auguste Miquel[5], puis à Jakob Steiner[6] est de William Wallace[7].
Notons que ce résultat correspond au premier des dix théorèmes à démontrer de Steiner[8] sur le quadrilatère complet ; pour cette raison, ce résultat est connu sous le nom de "the Steiner-Miquel theorem" en anglais.
C'est l'historien J. Mackay de l'université d'Edinburgh qui attira, en 1890, l'attention des mathématiciens sur les découvertes détournées de Wallace.

## 4. Une courte biographie de William Wallace [9]

dit *Scoticus*

William Wallace est en Écosse, né le 23 septembre 1768 à Dysart (Écosse).
Son père Alexander Wallace, un fabriquant de cuir, enseigne à son fils les bases de l'arithmétique qui sera scolarisé jusqu'à l'âge de 11 ans.
Autodidacte, il gagne sa vie comme ouvrier chez un relieur. En 1784, sa famille déménage à Edinburgh où il travaille chez un libraire et donne des leçons particulières en mathématiques. John Playfair qui a su deviner le talent de William Wallace pour les mathématiques l'encourage à s'inscrire à l'université d'Edinburgh.
En 1794, il enseigne les mathématiques à l'Académie de Perth et se marie la même année. De cette union naîtrons trois filles et un fils.

---

5 Miquel, *Nouvelles Annales* 10 ; *Journal de Mathématiques* de Liouville, vol. 3 (1838) 485-487.
6 Steiner J., *Annales* de Gergonne 18 (1827-28) 302-303, Questions 1°, 2°, 3°, 4°.
7 *Leybourne's mathematical repository* (1804).
8 Steiner J., *Annales* de Gergonne 18 (1827-28) 302-303, Questions 1°.
9 http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Wallace.html.

En 1798, dans le *Leybourne's mathematical repository*, Wallace introduit une droite que l'on appellera plus tard "la droite de Simson".
En 1804, dans le même journal, il introduit "le point de Miquel", suite à une série de questions portant sur le quadrilatère complet que Jakob Steiner[10] avait posées dans les *Annales* de Gergonne 18 de 1827-28.
Recommandé par John Playfair, il obtient en 1803 le poste de professeur au Collège Royal Militaire de Great Marlow où le rejoindra James Ivory.
En 1819, il professe à l'Université d'Edinburgh. Passionné géomètre, il invente le pantographe.
En 1838, il prend sa retraite suite à des problèmes de santé survenue dès mai 1835, date à laquelle il cesse d'enseigner. Confiné au lit la plupart du temps, ayant de la difficulté à marcher et à se tenir debout, il continue à écrire jusqu'à sa guérison. En 1839, il écrit *Geometrical theorems and Analytical Formulae* puis, *A new bookof Interest containing Aliquot Tables*.
Il meurt à Edinburgh (Écosse), le 28 avril 1843.

## B. LE MARQUIS GIOVANNI CEVA

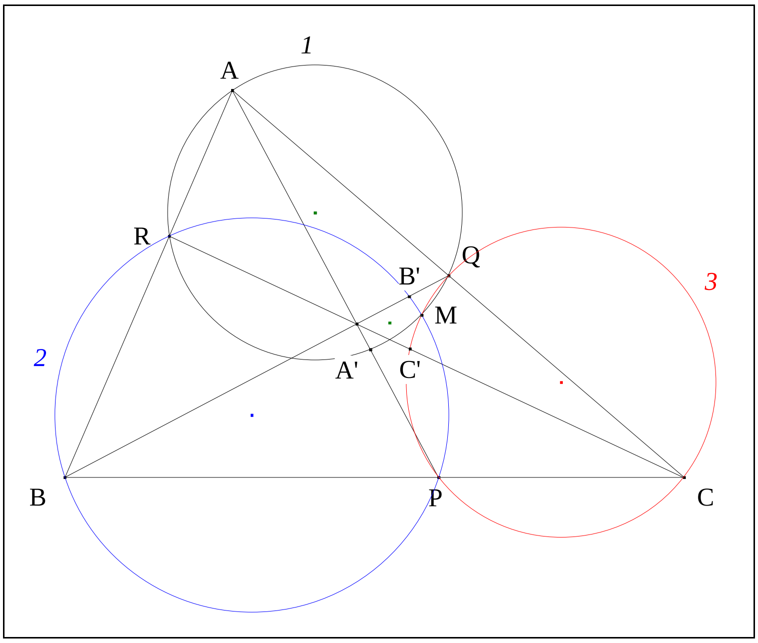
## ET

## LE COLONEL AMÉDÉE MANNHEIM

### 1. L'équivalence circulaire

**VISION**

**Figure :**




**Traits :**

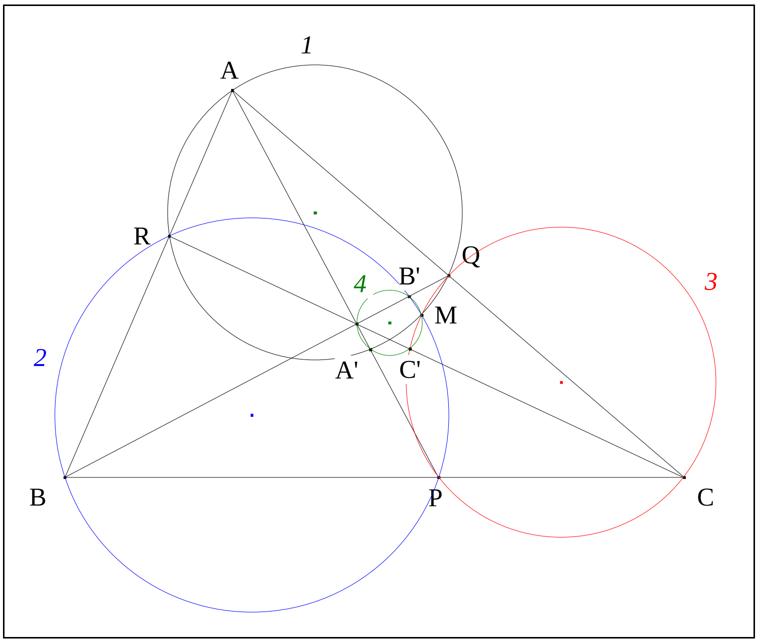
| | | |
|---|---|---|
| | ABC | un triangle, |
| | P, Q, R | trois points resp. de (BC), (CA), (AB), |
| | *1*, *2*, *3* | les cercles circonscrits resp. aux triangles ARQ, BPR, CQP, |
| | M | le pivot de Miquel, |
| | A' | le second point d'intersection de (AP) avec *1*, |

[10] Steiner J., *Annales* de Gergonne 18 (1827-28) 302-303, Questions 1°, 2°, 3°, 4°.

| | | |
|---|---|---|
| | B' | le second point d'intersection de (BQ) avec *2* |
| et | C' | le second point d'intersection de (CR) avec *3* . |

**Donné :** A', B', C' et M sont cocycliques
*si, et seulement si,*
(AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

**VISUALISATION NÉCESSAIRE**




- Notons *4* le cercle passant par A', B', C' et M.

- **Conclusion :** d'après **"**Un cercle de Mannheim" [11], (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes sur *4*.

**Scolies :** **(1)** une "cévienne"[12] d'un triangle est une droite qui passe par un des sommets de ce triangle et qui recoupe la droite latérale opposée ; ce point d'intersection est appelé "pied de la cévienne".

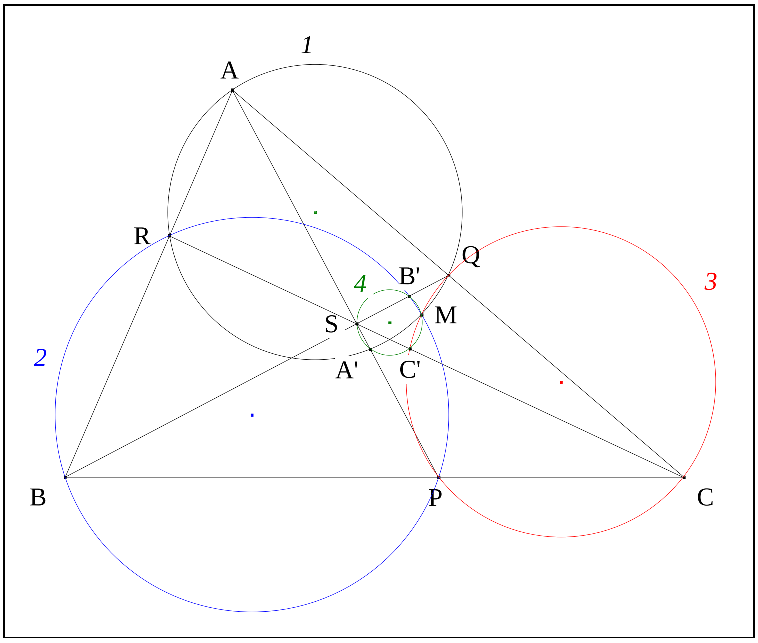
**(2)** Une A-cévienne d'un triangle ABC est une droite passant par le sommet A et recoupant la droite latérale opposée (BC) de ce triangle.

**VISUALISATION SUFFISANTE**

---

[11] Mannheim A., Problem 10145, *Educational Time* **52** (1890)
et Question 1594, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1890) 239 ;
Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2 ; http://perso.orangze.fr/jl.ayme.

[12] C'est dans un article publié par le *Journal de mathématiques Élémentaires* en 1888 que le professeur Père Augustin-François Poulain (Cherbourg 15/12/1838-Paris 19/07/1919) sous directeur aux internats des Facultés catholiques d'Angers, appelle "cévienne" toute droite passant par le sommet d'un triangle et recoupant le côté opposé.




- Notons S le point de concours de (AA'), (BB') et (CC').

- **Conclusion :** d'après "Le M-cercle de Mannheim" [13], A', B', C', M et S sont cocycliques.

## 2. Une courte biographie de Giovanni Ceva [14]

Giovanni Ceva ou Jean Ceva (et non Jean de Ceva) est né à Milan (Italie), le 7 décembre 1647.
Élève du Collège des Jésuites de Milan, il y enseigne à sa sortie de l'Université de Pise, puis devient professeur à l'université de Mantoue en 1686 où il y restera jusqu'à la fin de sa vie.
En 1708, suite à l'annexion du duché de Milan par l'Autriche, il rejoint le nouveau régime.
En 1678, il écrit *De lineis rectic se invicem secantibus, statica constructio*, un livre de 84 pages en deux tomes dans lequel on trouve le joli théorème de "concourance" qui aujourd'hui porte son nom et le théorème "dual" de Ménélaüs qui avait été presque oublié par les géomètres depuis le premier siècle de notre ère.
En 1682, il écrit *Opuscula mathematica*.
En 1686, il obtient un poste de professeur à l'Université de Mantoue et publie en 1692, *Geometria Motus*.
En 1708, il soutient les autrichiens, les nouveaux conquérants du duché de Mantoue.
Quant à son frère Thomas Ceva (1648-1737), il est surtout connu pour avoir construit un instrument permettant la trisection de l'angle.
Il décède à Mantoue (Italie), le 15 juin 1734.

## 3. L'équivalence linéaire

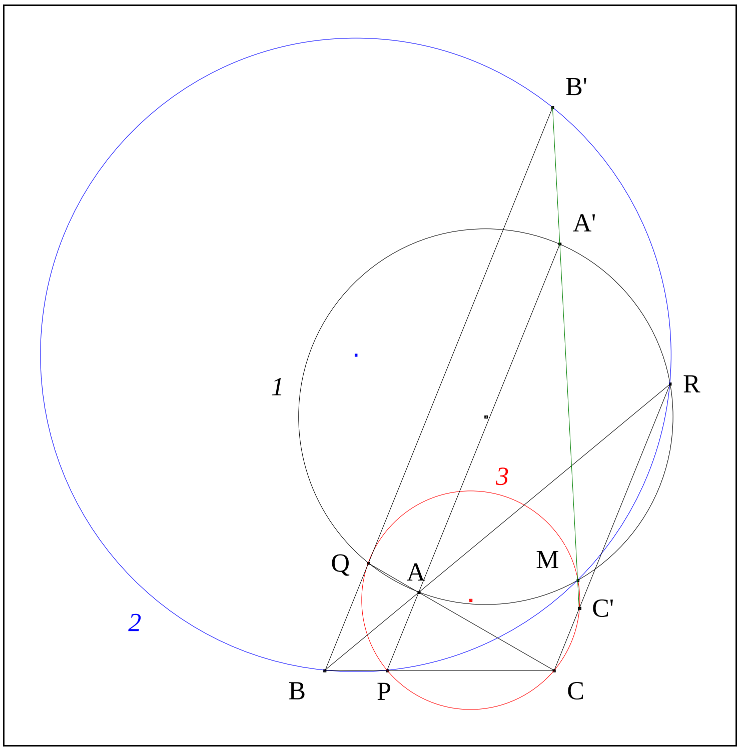
**VISION**

**Figure :**

---

13 Mannheim A., Problem 10145, *Educational Time* **52** (1890)
et Question 1594, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1890) 239 ;
Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2 ; http://perso.orangze.fr/jl.ayme.

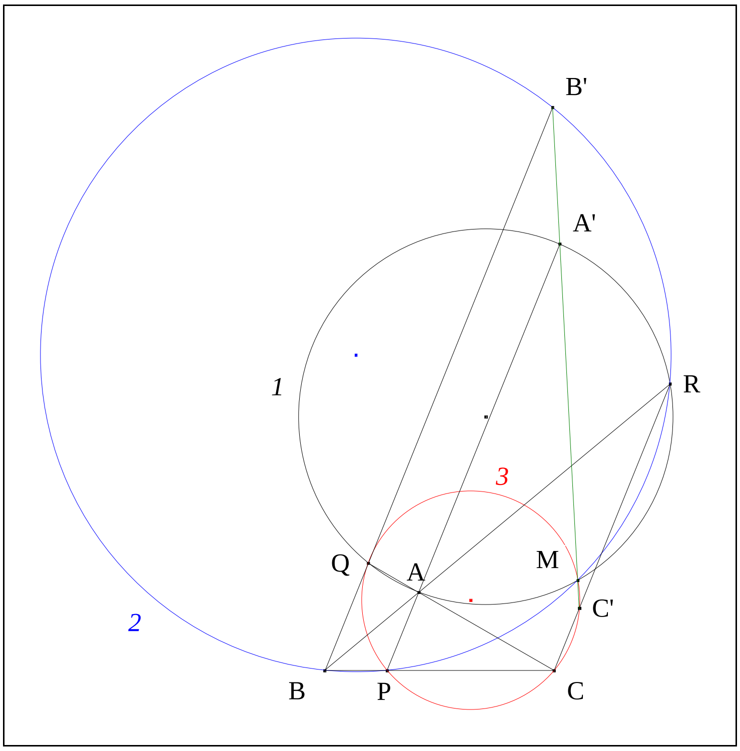
14 http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Ceva_Giovanni.html.




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | P, Q, R | trois points resp. de (BC), (CA), (AB), |
| | *1*, *2*, *3* | les cercles circonscrits resp. aux triangles ARQ, BPR, CQP, |
| | M | le point de Miquel-Wallace, |
| | A' | le second point d'intersection de (AP) avec *1*, |
| | B' | le second point d'intersection de (BQ) avec *2* |
| et | C' | le second point d'intersection de (CR) avec *3* . |

**Donné :** A', B', C' et M sont alignés *si, et seulement si*, (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

**VISUALISATION NÉCESSAIRE**




- Les cercles *1* et *2*, les points de base R et M, les moniennes (ARB) et (A'MB'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AA') // (BB').

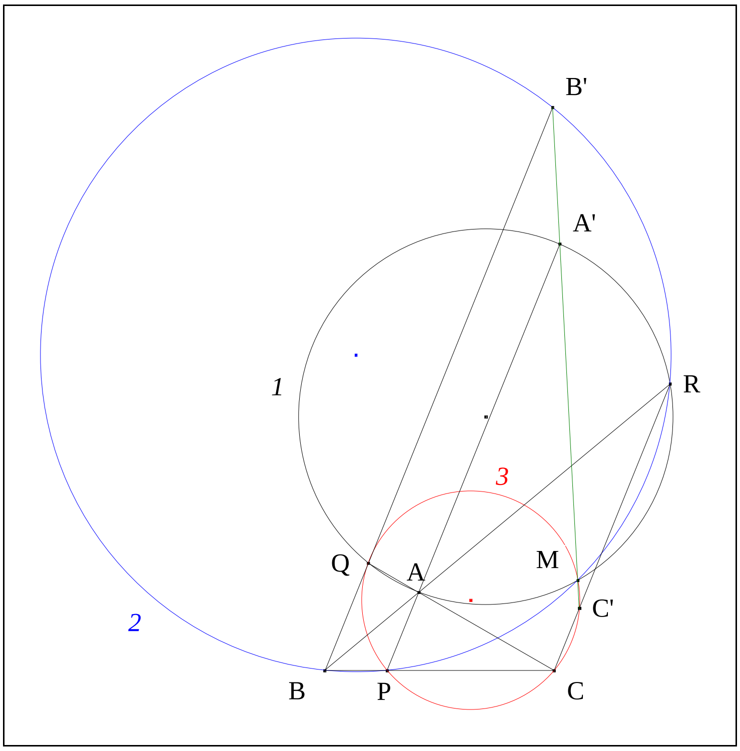
- Les cercles *2* et *3*, les points de base P et M, les moniennes (BPC) et (B'MC'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BB') // (CC').

- **Conclusion :** (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles entre elles.

**Commentaire :** pour l'auteur.
cette condition nécessaire conduit à une vision circulaire du théorème de Ceva.

### VISUALISATION SUFFISANTE [15]

[15] *JME* de Vuibert, (octobre 1893) 4.




- D'après Miquel "Le théorème du pivot" appliqué à ABC, *1*, *2* et *3* sont concourants.

- Notons M ce point de concours.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base R et M, la monienne (AMB) et les parallèles (AA') et (BB'), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, A', M et B' sont alignés.

- Les cercles *2* et *3*, les points de base P et M, la monienne (BMC) et les parallèles (BB') et (CC'), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, B', S et C' sont alignés.

- D'après l'axiome d'incidence Ia, (A'SB') et (B'SC') ayant deux points en communs, sont confondues.

- **Conclusion :** A', B', C' et M sont alignés.

**Scolie :** (A'B'C'M) est "la droite de Mannheim".

**Commentaire :** (AA'), (BB') et (CC') étant parallèles entre elles,
leur point de concours X est "rejeté à l'infini" dans leur direction;
en conséquence, le X-cercle de Mannheim se dégénère en la droite (A'B'C'S).

## 4. Une courte biographie du Colonel Amédée Mannheim [16]

[16] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mannheim.html.

dit *Canon*

Victor Mayer Amédée Mannheim naît à Paris (France), le 17 juillet 1831.
Élève au lycée Charlemagne à Paris, classe de Catalan, puis admis 78-ème à l'entrés à l'École Polytechnique en 1848 à l'âge de 17 ans, il rejoint à sa sortie, l'École d'Application de Metz. Promu officier d'artillerie, il devient répétiteur en 1859, puis examinateur en 1863 et, enfin, en 1864 professeur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique, tout en continuant sa carrière militaire et en fondant la *Société Amicales des Anciens Élèves de l'École*. En 1872, il reçoit le prix *Poncelet* décerné par l'Académie des Sciences.
En 1890, il quitte l'armée avec le grade de colonel, mais continue d'enseigner jusqu'à l'âge de 70 ans.
Passionné de cinématique, il publie un traité intitulé *Géométrie cinématique* dans lequel il applique la transformation par polaire réciproque que Chasles avait initiée.
En fait, Amédée a toujours été un éternel étudiant. De 1979 à 1886, il n'a pu s'empêcher de rédiger pour *Nouvelles Annales*, toutes les solutions des problèmes d'admission à l'École polytechnique en signant "par un ancien élève de Mathématiques spéciales". Pour Charles-Ange Laisant, il se cachait aussi sous le pseudonyme de "Canon" en posant de nombreuses questions de mathématiques.
Nous retiendrons ce commentaire en anglais

*Although virtually forgotten today, in his own time*
*he was considered to be one of the more important synthetic geometers*
*in the tradition of Michel Chasles*

Il décède à Paris (France) le 11 décembre 1906.

## C. MÉNÉLAÜS ET CÉVA

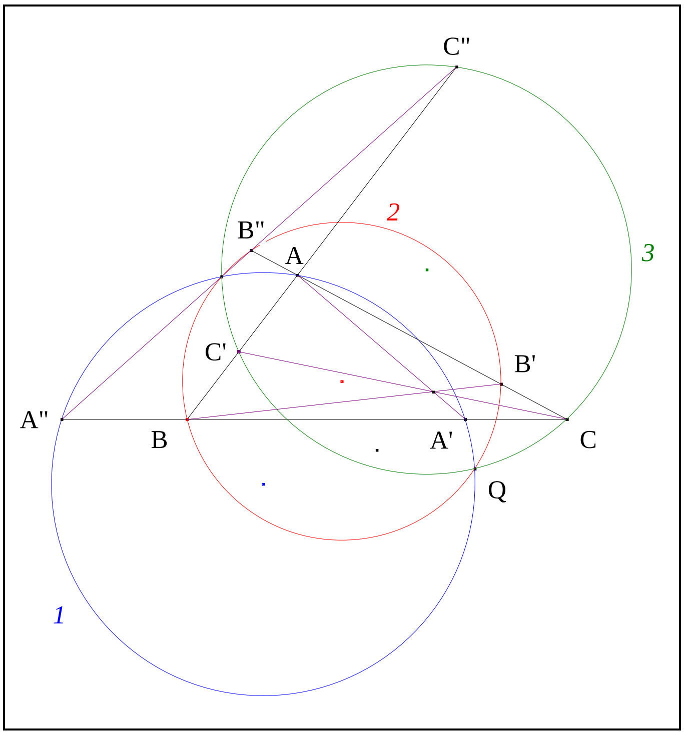
## OU

## UN PROBLÈME DU *MONTHLY*

### 1. Le problème du *Monthly*

## VISION

### Figure

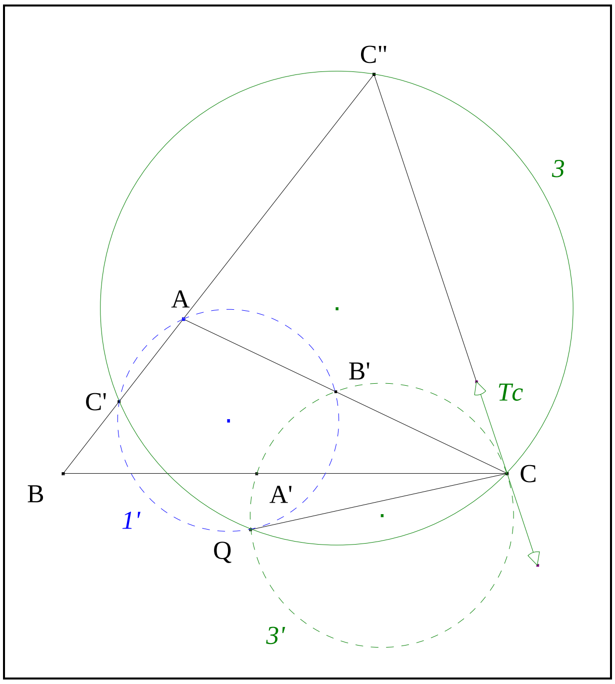



| | | |
|---|---|---|
| **Traits** | ABC | un triangle, |
| | A', B', C' | trois points resp. de (BC), (CA), (AB), |
| | Q | le pivot de ABC relativement à A', B', C', |
| | *1*, *2*, *3* | les cercles circonscrits resp. aux triangles AQA', BQB', CQC', |
| | A" | le second point d'intersection de (BC) avec *1*, |
| | B" | le second point d'intersection de (CA) avec *2* |
| et | C" | le second point d'intersection de (AB) avec *3*. |

**Donné** A", B", C" sont alignés.
*si, et seulement si,*
(AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.[17]

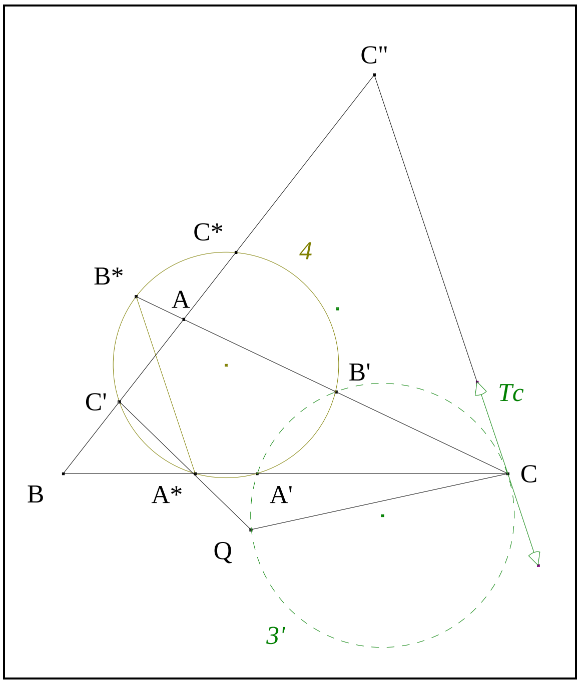
## VISUALISATION NÉCESSAIRE

[17] *American Mathematical Monthly* **24** (1917) 313-317 ;
A.M.'s Problem, Message *Hyacinthos* # 1350 du 04/09/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



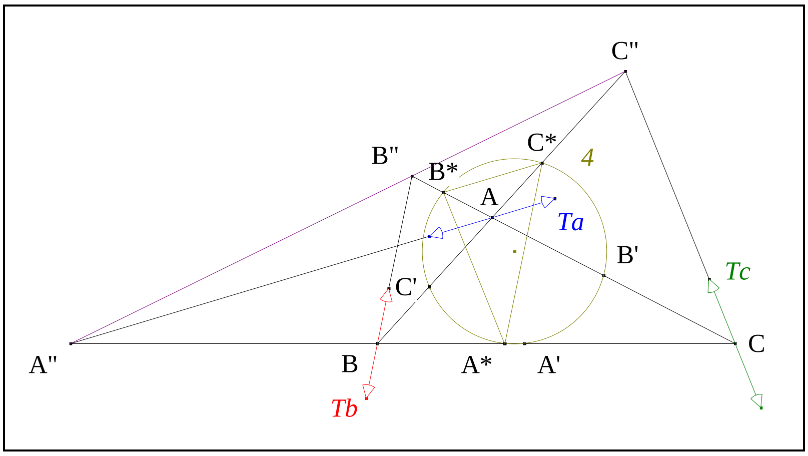

- Notons *1'*, *3'* les cercles circonscrits resp. aux triangles AB'C', CA'B',
  C" le second point d'intersection de (AC'B) avec *3'*
  et *Tc* la tangente à *3'* en C.

- D'après "Une surprenante tangente" (Cf. Appendice 1), *Tc* passe par C".




- Notons *4* le cercle circonscrit au triangle A'B'C'
  et A*, B*, C* les seconds points d'intersection de *4* resp. avec (BC), (CA), (AB).

- Les cercles *4* et *3'*, les points de base A' et B', les moniennes (A*A'C) et (B*B'C), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (A*B*) // *Tc* .

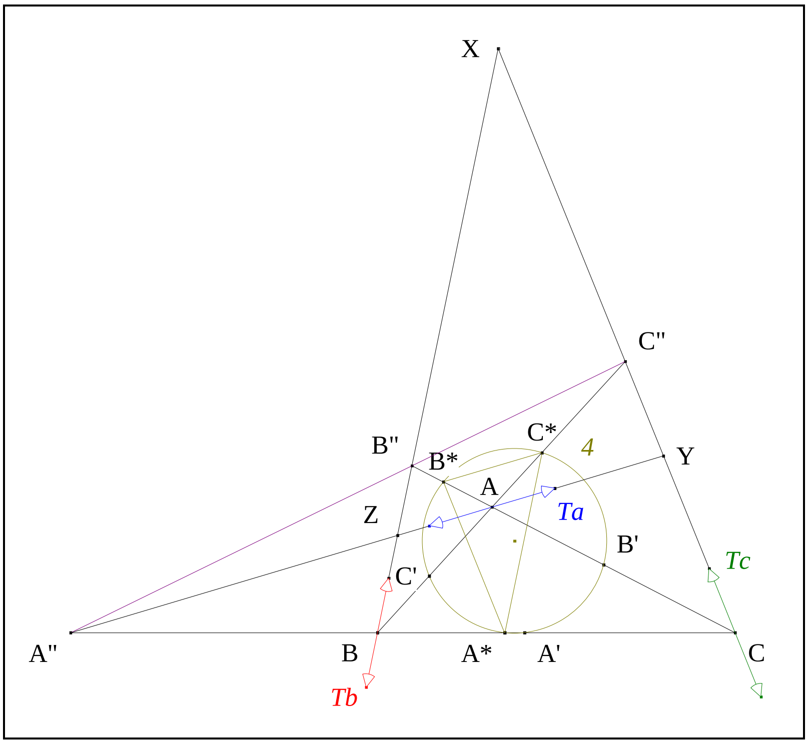



- Notons $2'$ le cercle circonscrit au triangle BA'C',
  A" le second point d'intersection de (BA'C) avec $2'$,
  B" le second point d'intersection de (CB'A) avec $1'$,
  *Ta* la tangente à $1'$ en A
  et *Tb* la tangente à $2'$ en B.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** (B*C*) // *Ta* et (C*A*) // *Tb* .

  **(2)** *Ta* passe par A"
  *Tb* passe par B".

- **Scolie :** par hypothèse, A", B" et C" sont alignés.




- Notons X, Y, Z les points d'intersection resp. de *Tb* et *Tc* , de *Tc* et *Ta* , de *Ta* et *Tb*.

- Les triangles A*B*C* étant XYZ sont homothétiques ou plus généralement perspectifs.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1) [18],

[18] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6 p. 39-44 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

(C"A"B") étant l'axe de ABC et XYZ, ABC et XYZ sont perspectifs.

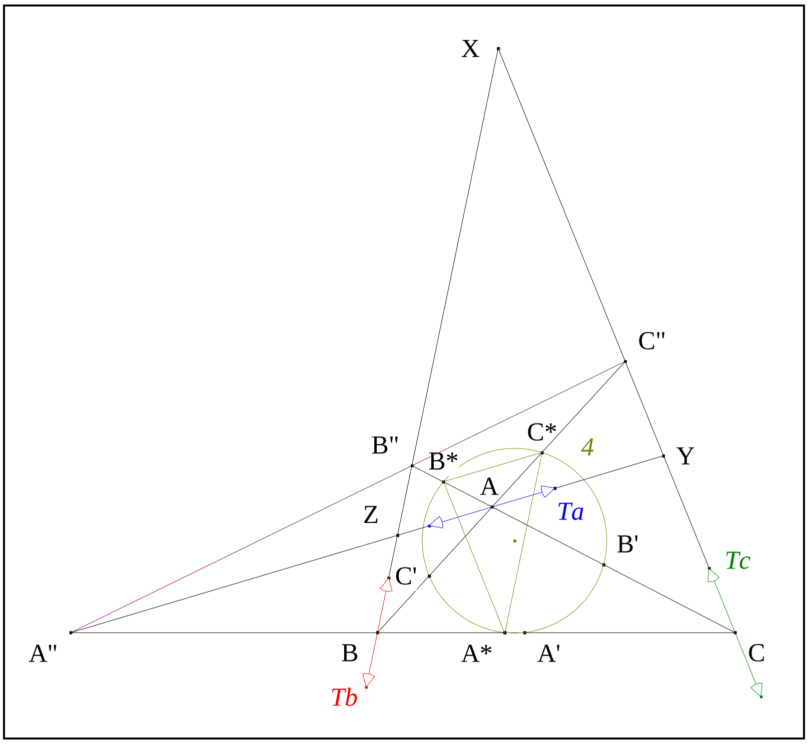
- Nous avons : A*B*C* inscrit dans ABC et ABC inscrit dans XYZ,
A*B*C* et XYZ sont perspectifs, ABC et XYZ sont perspectifs ;

d'après "The cevian nests theorem"[19], A*B*C* et ABC sont en perspective.

- **Conclusion :** d'après "Le M-cercle de Terquem" (Cf. Annexe 2) [20],
A'B'C' et ABC sont perspectifs i.e. (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

**Note historique :** la preuve de Darij Grinberg[21] a recours à la loi des sinus et celle de Jean-Pierre Ehrmann[22] a recours à la technique de puissance d'un point par rapport à un cercle.

**VISUALISATION SUFFISANTE** [23]




- Notons *1'*, *2'*, *3'* les cercles circonscrits resp. aux triangles AC'B', BA'C', CB'A',
*Ta*, *Tb*, *Tc* les tangentes à *1'*, *2'*, *3'* en A, B, C,
*4* le cercle circonscrit au triangle A'B'C',
A*, B*, C* les seconds points d'intersection de *4* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et X, Y, Z les points d'intersection de *Tb* et *Tc*, de *Tc* et *Ta* , de *Ta* et *Tb* .

- D'après "Une surprenante tangente" (Cf. Appendice 1), *Ta* passe par A",
*Tb* passe par B",
*Tc* passe par C".

---

19 Döttl J., *Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks* (1886) n° 39 ;
Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

20 Ayme J.-L., A new point on Euler line, G.G.G. vol. 5, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

21 Ginberg D., A.M.'s Problem, Message *Hyacinthos* # 8887 du 30/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

22 Ehrmann J.-P., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # 1352 du 6/09/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.
Dick Klingens, http://www.pandd.demon.nl/isogon2.htm.

23 Journal de Mathématiques Élémentaires **65** (1940-41), p. 22, #13023 ;
Hatzipolakis A., Message *Hyacinthos* #1350 du 05/09/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

- (AA'), (BB') et (CC') étant concourantes par hypothèse, A'B'C' et ABC sont perspectifs ;
  d'après "Le cercle de Terquem", A*B*C* et ABC sont perspectifs.

- Comme dans la visualisation nécessaire,
  nous montrerions que A*B*C* et XYZ sont homothétiques.

- Nous avons : A*B*C* inscrit dans ABC et ABC inscrit dans XYZ,
  A*B*C* et ABC sont perspectifs, A*B*C* et XYZ sont perspectifs ;

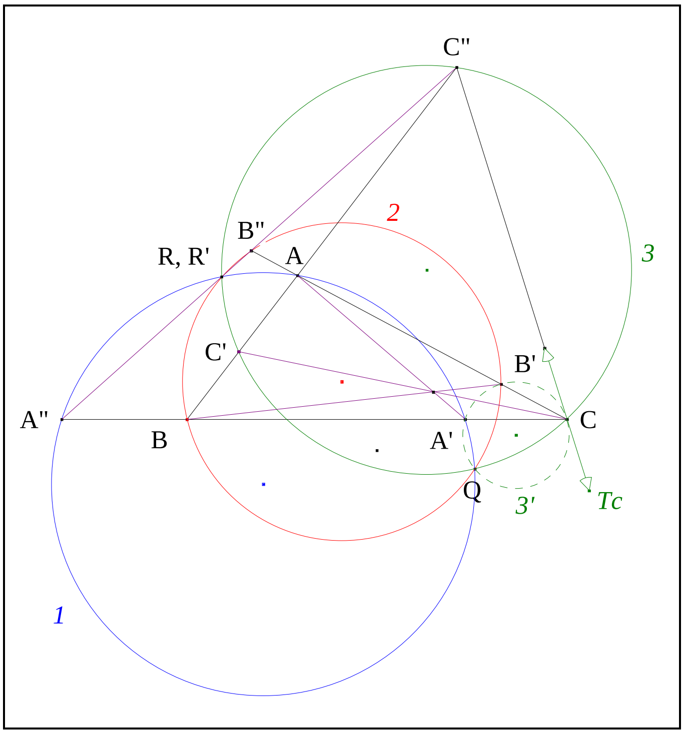
  d'après "The cevian nests theorem", ABC et XYZ sont perspectifs.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1) [24],
  (C"A"B") est l'axe de la perspective de ABC et XYZ.

- **Conclusion :** A", B", C" sont alignés.

**Note historique :** cette condition suffisante a été reproposée en 1940 dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires.*
La preuve de Jean-Pierre Ehrmann[25] a recours à la technique de puissance d'un point par rapport à un cercle.

**Scolie :** les cercles *1*, *2* et *3* sont coaxiaux [26]




- Notons R le second point d'intersection de *2* et *3*,
  et R' le second point d'intersection de *1* et *3*.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 3)

---

24 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6 p. 39-44 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

25 Ehrmann J.-P., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # 1352 du 06/09/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/ ; Dick Klinggens, http://www.pandd.demon.nl/isogon2.htm

26 Grinberg D., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # 7360 du 15/07/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

| | | |
|---|---|---|
| * | appliqué à *3*, *3'* et *2*, | C", B" et R sont alignés |
| * | appliqué à *3*, *3'* et *1*, | C", A" et R' sont alignés ; |

en conséquence, R et R' sont confondus.

- **Conclusion :** les cercles *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

**Note historique :** Darij Grinberg affirme sans preuve en 2003, la "coaxialité" de ces trois cercles.

**Commentaire :** nous venons de montrer

A", B" et C" sont alignés *implique* *1*, *2* et *3* se coupent en un deuxième point.

La réciproque se calque d'une façon inverse à la précédente.

Nous avons montré

A", B", C" sont alignés *si, et seulement si*, (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

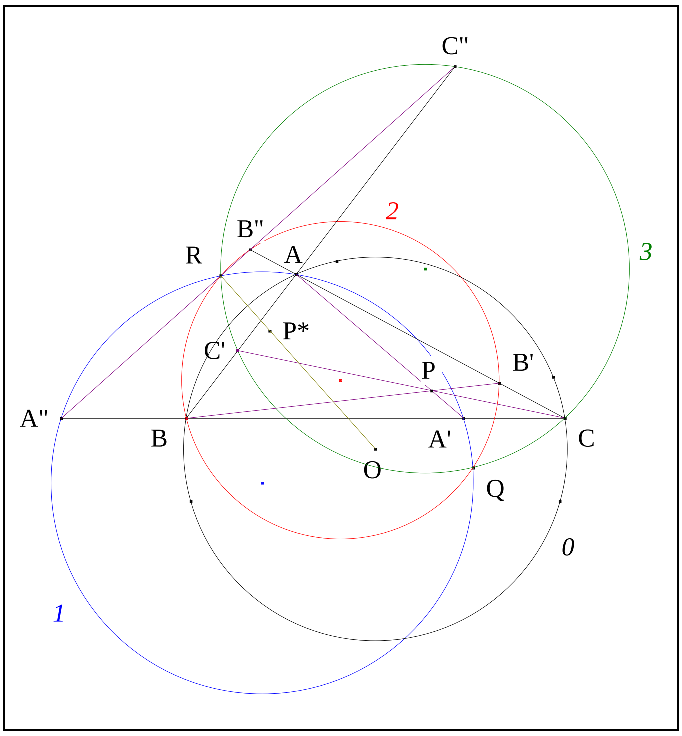
En conséquence, les propositions suivantes sont équivalentes :

**(1)** les cercles *1*, *2* et *3* sont concourants en un deuxième point
**(2)** les points A", B", C" sont alignés
**(3)** les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

## 2. La droite (OP*)

### VISION

**Figure**

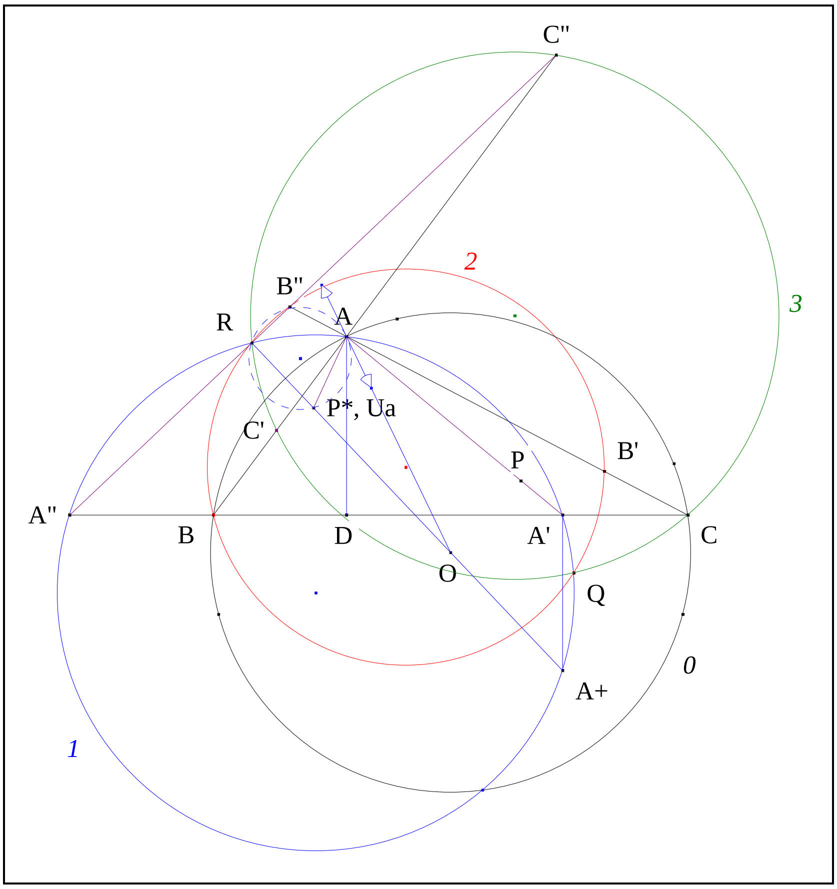



| | | |
|---|---|---|
| **Traits** | ABC | un triangle, |
| | *0* | le cercle circonscrit à ABC, |
| | O | le centre de *0*, |
| | P | un point, |
| | A'B'C' | le P-triangle cévien de ABC, |
| | Q | le pivot de ABC relativement à A', B', C', |
| | *1*, *2*, *3* | les cercles circonscrits resp. aux triangles AQA', BQB', CQC', |
| | A" | le second point d'intersection de (BC) avec *1*, |
| | B" | le second point d'intersection de (CA) avec *2*, |
| | C" | le second point d'intersection de (AB) avec *3*, |
| | R | le second point de concours de *1*, *2*, *3* |
| et | P* | l'isogonal de P relativement à ABC. |

**Donné** (OP*R) est perpendiculaire à (A"B"C").[27]

**VISUALISATION**

[27] L'auteur.



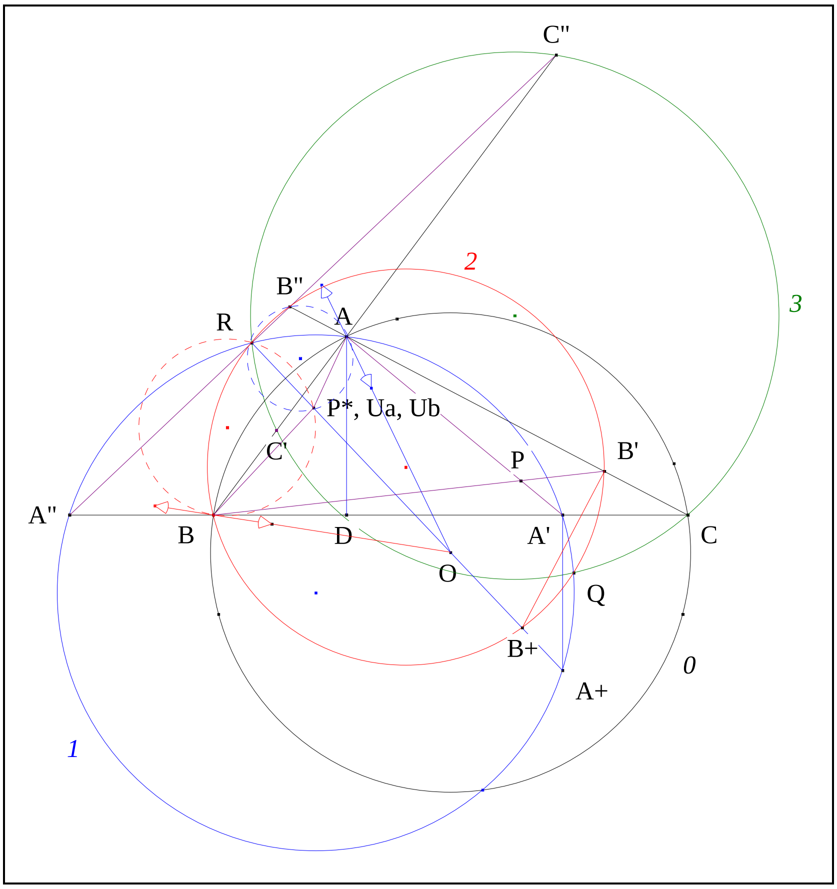

- Notons A+ le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) en A' avec *1*,
  D le pied de la A-hauteur de ABC.
  et Ua le point d'intersection de (AP*) et (RA+).

- Une chasse angulaire à $\pi$ près :
  autre écriture, <URA = <A+RA ;
  d'après "Le théorème du quadrilatère cyclique", <A+RA = <AA'A+ ;
  d'après "Le théorème angle et parallèle", <AA'A+ = <DAA' ;
  par isogonalité, <DAA' = <UAO ;
  par transitivité de la relation //, <URA = <UAO.

- **Conclusion partielle :** le cercle passant par Ua, R et A est tangent à (AO).

- Notons *0a* ce cercle.

- **Scolie :** *0a* ne passe pas par B".



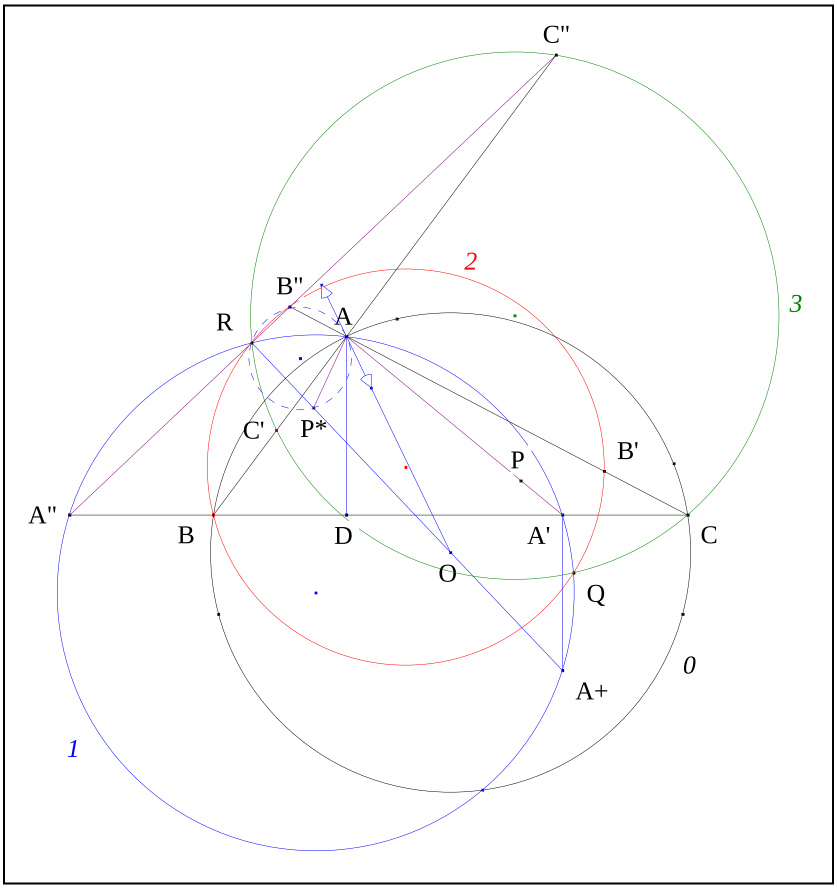

- Notons B+ le second point d'intersection de la perpendiculaire à (CA) en B' avec *2*,
  E le pied de la B-hauteur de ABC.
  et Ub le point d'intersection de (BP*) et (RB+).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que le cercle passant par Ub, R et B est tangent à (BO).

- Notons *0b* ce cercle.

- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 4),
  *0* étant orthogonal à *0a* et *0b*, (OP) est leur axe radical ;
  en conséquence, Ua et Ub sont confondus avec P*.

- **Conclusion partielle :** O, P* et R sont alignés.




- Une chasse angulaire à $\pi$ près :

| | |
|---|---|
| d'après "Le théorème de la tangente", | <P*RA = <P*AO ; |
| par isogonalité, | <P*AO = <DAA' ; |
| d'après "Le théorème angle et parallèle", | <DAA' = <AA'A+ ; |
| d'après "Le théorème du quadrilatère cyclique", | <AA'A+ = <A+RA ; |
| par transitivité de la relation =, | <P*RA = <A+RA ; |
| en conséquence, | R, P* et A+ sont alignés. |

- **Scolie :** par hypothèse, A+ est l'antipôle de A" relativement à *1*.

- **Conclusion :** d'après Thalès " Triangle inscriptible dans un demi cercle", (OP*R) est perpendiculaire à (A"B"C").

**Note historique :** ce résultat de l'auteur a pu être établi à partir de celui de Luis Gonzales.[28]

**Scolie :** R est l'inverse de P* relativement à *0*.

**Note historique :** ce précédent résultat a été démontré angulairement par Darij Grinberg[29] en 2004.

## 3. Nature de (A"B"C")

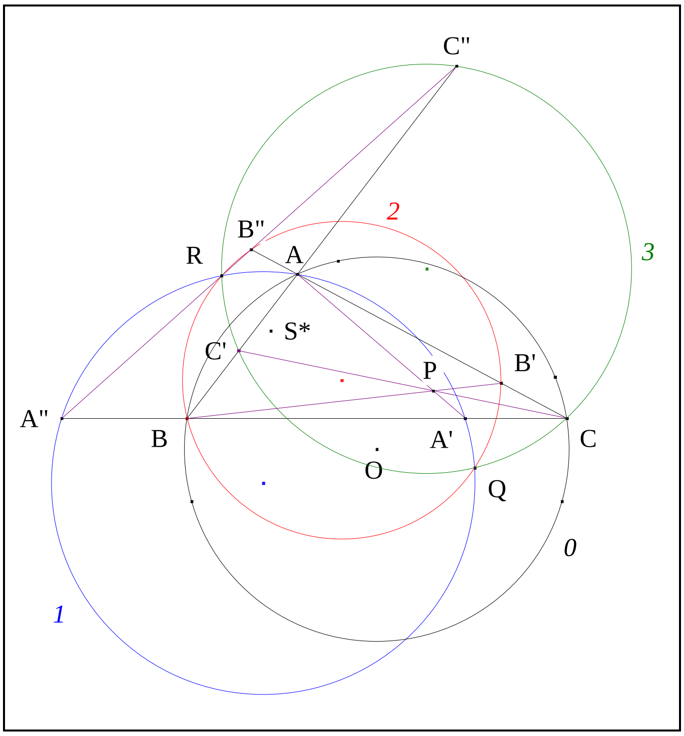
---

28 Gonzales L., Concurrent 2 (PC point again), *Mathlinks* du 02/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=315750.

29 Grinberg D., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # 9254 du 08/02/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

**VISION**

**Figure**

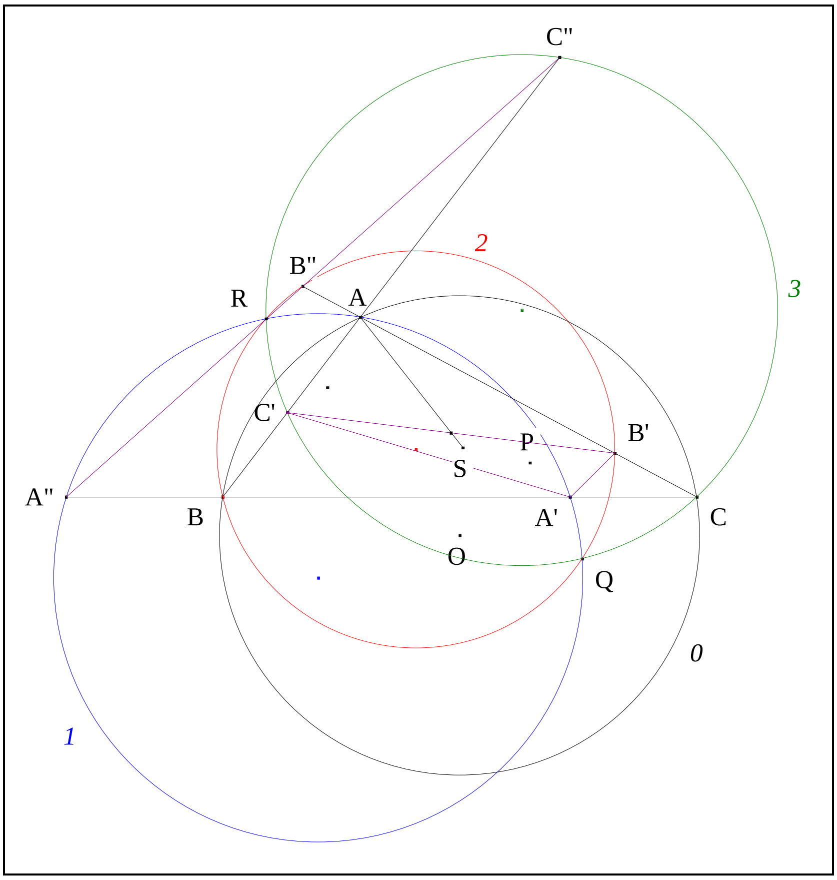



| | | |
|---|---|---|
| **Traits** | ABC | un triangle, |
| | *0* | le cercle circonscrit à ABC, |
| | O | le centre de *0*, |
| | P | un point, |
| | A'B'C' | le P-triangle cévien de ABC, |
| | Q | le pivot de ABC relativement à A', B', C', |
| | *1*, *2*, *3* | les cercles circonscrits resp. aux triangles AQA', BQB', CQC', |
| | A" | le second point d'intersection de (BC) avec *1*, |
| | B" | le second point d'intersection de (CA) avec *2*, |
| | C" | le second point d'intersection de (AB) avec *3*, |
| | R | le second point de concours de *1*, *2*, *3*, |
| | S | l'isotomcomplément de P relativement à ABC |
| et | S* | l'isogonal de S relativement à ABC. |

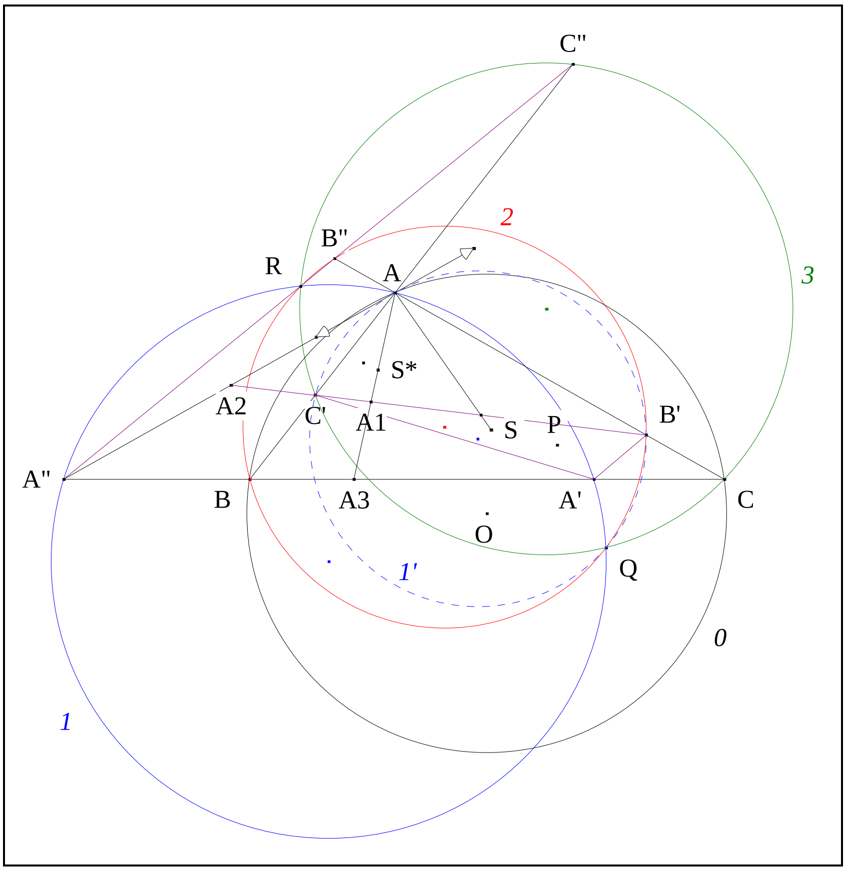
**Donné :** (A"B"C") est la polaire trilinéaire de S* relativement à ABC. [30]

**VISUALISATION**

[30] Ehrmann J.-P., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # 1352 du 06/09/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/ ; Dick Klingens, http://www.pandd.demon.nl/isogon2.htm




- **Scolie :** S est le centre de perspective de ABC et du triangle médian de A'B'C' (Cf. Appendice 2).



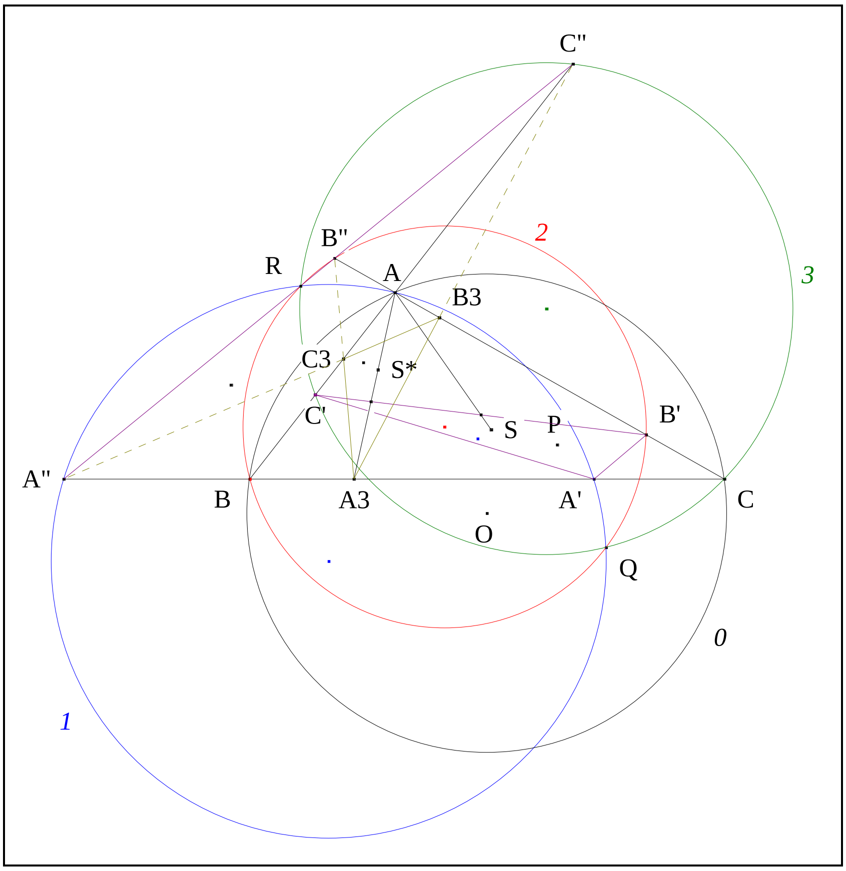
- (AS) étant la A-médiane du triangle AB'C', (AS*) est la A-symédiane de AB'C'.

- Notons *1'* le cercle circonscrit à AB'C',
  A1, A2 les points d'intersection resp. de (AS*), (AA") avec (B'C')
  et A3 le point d'intersection de (AS*) et (BC).

- **Scolies :** **(1)** (AA") est tangente à *1'* en A. (Cf. Appendice 1)
  **(2)** La quaterne (B', C', A1, A2) est harmonique.[31]

- Par projection de centre A sur (BC), la quaterne (B, C, A3, A") est harmonique.

- **Conclusion partielle :** A" est sur la tripolaire de S* relativement à ABC.




- Notons A3B3C3 le triangle S*-cévien de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que B" est sur la tripolaire de S* relativement à ABC
  C" est sur la tripolaire de S* relativement à ABC.

- **Conclusion :** (A"B"C") est la polaire trilinéaire de S* relativement à ABC.

**Note historique :** Jean-Pierre Ehrmann a été le premier à préciser sans preuve en 2000, la nature de cette droite qui a été prouvée par Darij Grinberg[32] en 2003.

**Scolie :** <QA'B = <QB'C = <QC'A ( $\pi$ ).

---

31 Rappelons que toute parallèle à la tangente au cercle circonscrit à un triangle à l'un de ses sommets rencontre la symédiane correspondante à ce sommet au milieu du segment déterminé par les côtés adjacents à ce sommet sur cette tangente.

32 Grinberg D., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # 8887 du 30/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

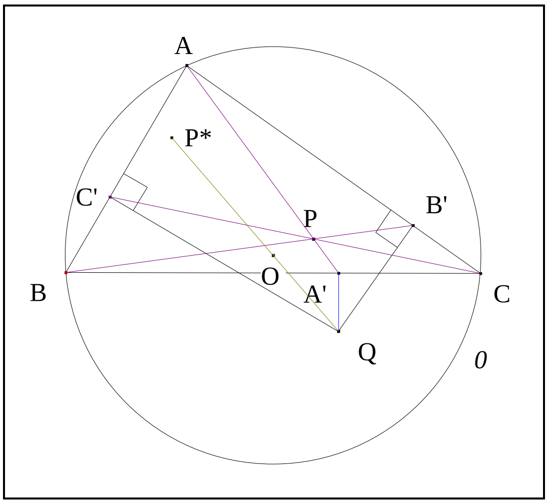
**Commentaire :** cette observation nous conduit à envisager la situation lorsque Q est un PC-point i.e. lorsque <QA'B est droit.

## 4. Le cas où Q est un PC-point

### 4. 1. UN BEAU RÉSULTAT

**VISION**

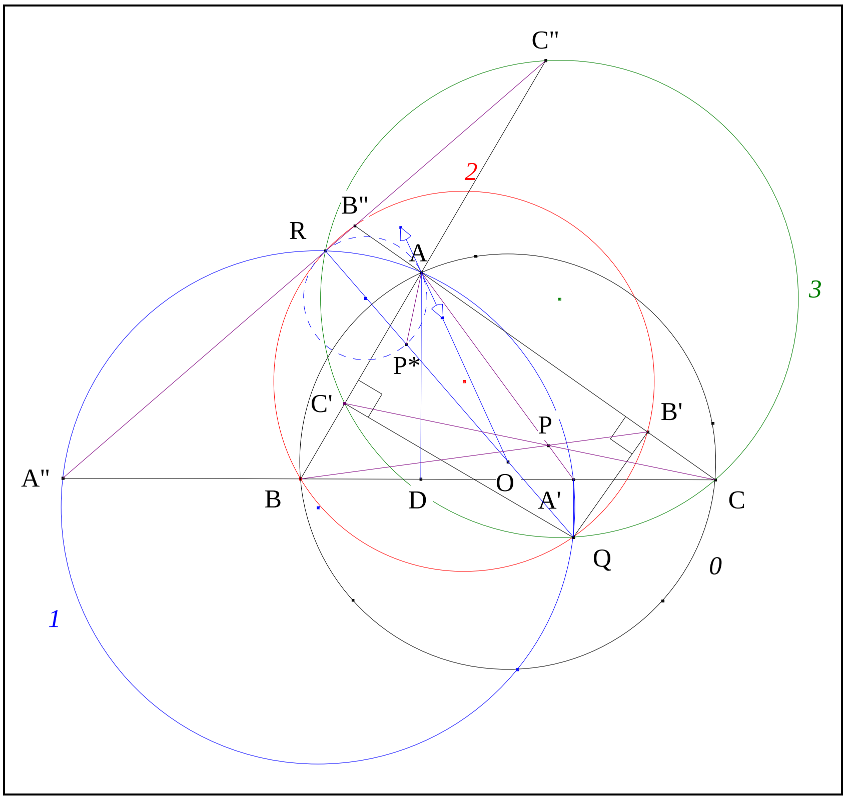
**Figure :**




**Traits :** ABC un triangle,
*0* le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
Q un PC-point,
A'B'C' le Q-triangle pédal de ABC,
P le point de Ceva de A'B'C'
et P* l'isogonal de P relativement à ABC.

**Donné :** O, P* et Q sont alignés.

**VISUALISATION**




- Immergeons la figure dans la situation précédente.

- Notons *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AQA', BQB', CQC',
  A" le second point d'intersection de (BC) avec *1*,
  B" le second point d'intersection de (CA) avec *2*,
  C" le second point d'intersection de (AB) avec *3*
  et R le second point de concours de *1*, *2*, *3*.

- **Scolies :**
  **(1)** Q est le pivot de ABC relativement à A', B', C'.
  **(2)** O, P* et R sont alignés
  **(3)** P* est l'inverse de R relativement à *0*.
  **(4)** le point R de la situation générale devient Q dans cette situation particulière.

- **Conclusion :** O, P* et Q sont alignés et R est l'inverse de P* relativement à *0*.

**Note historique :** ces deux résultats ont été émis sous forme de conjecture par Darij Grinberg[33] en 2003 et ont été redécouverts et démontrés par Luis Gonzales en 2010 suite à un problème posée par Nguyen Van Linh[34].

### 4. 2. UN TRÈS BEAU RÉSULTAT

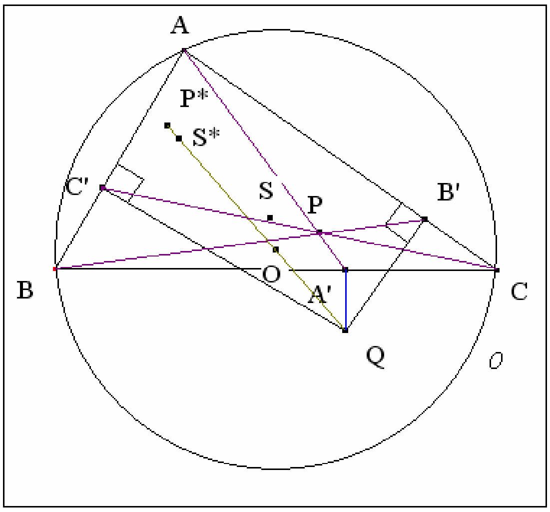
### VISION

---

[33] Grinberg D., Darboux and a line with 5 points Generalized, proposition 2, *Hyacinthos* Message # 6664 du 06/03/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/ ;
Grinberg D., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # 8887 du 30/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[34] Livetolove212, Concurrent 2 (PC point again), *Mathlinks* du 02/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=315750.

**Figure :**

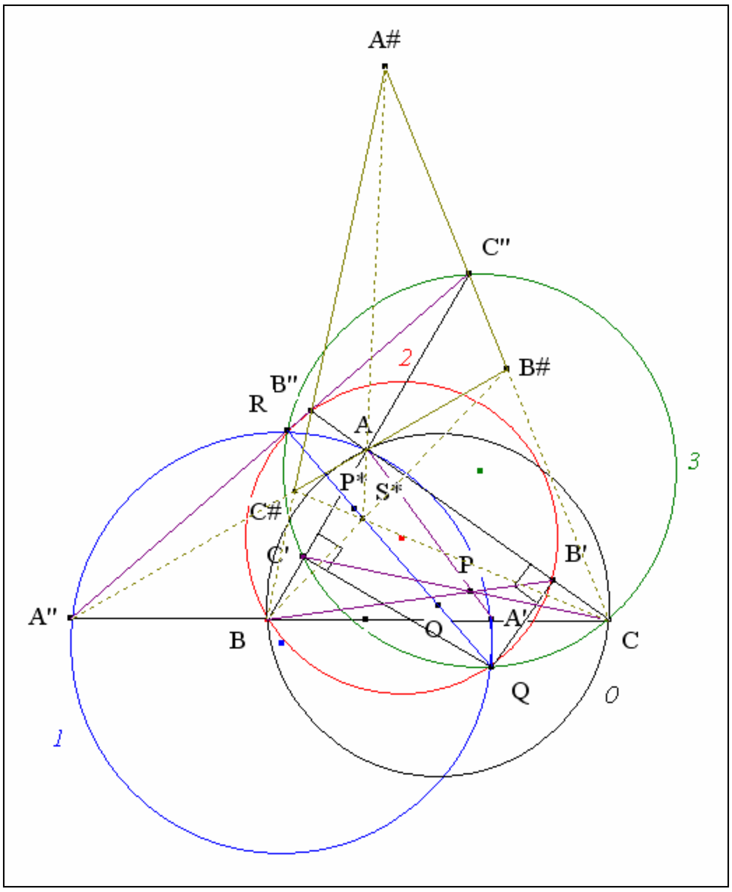



| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | *0* | le cercle circonscrit à ABC, |
| | O | le centre de *0*, |
| | Q | un PC-point, |
| | A'B'C' | le Q-triangle pédal de ABC, |
| | P | le point de Ceva de A'B'C', |
| | P* | l'isogonal de P relativement à ABC, |
| | S | l'isotomcomplément de P relativement à ABC |
| et | S* | l'isogonal de S relativement à ABC. |

**Donné :** S* est sur (OP*Q).[35]

**VISUALISATION**

[35] Ayme J.-L.,
A conjecture, *Mathlinks* du 03/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=360019 ;
With the isotomcomplement, *Mathlinks* du 05/08/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=360366 ;
*Hyacinthos*, Message # 19149 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.




- Notons A#B#C# le triangle Q-antipédal de Q relativement à ABC.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (B#C#) passe par A" ;
  (C#A#) passe par B"
  (A#B") passe par C".
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles"[36], A#B#C# et ABC sont perspectifs.
- D'après C. 3. Nature de (A"B"C"), S* est le centre de perspective de A#B#C# et ABC.
- **Scolie :** Q est le pôle d'orthologie ABC relativement à A#B#C#.
- D'après "Le théorème de Sondat"[37], (QS*) ⊥ (A#B#C#) ;
  en conséquence, (QS*) passe par R.
- D'après C. 4. 1. Un beau résultat, (QOP*) passe par R.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, S* est sur (OP*Q).

**Commentaire :** Jean-Pierre Ehrmann a confirmé cette conjecture par calcul barycentrique.

**Note historique :** Luis Gonzales en a donné une preuve analogue.

---

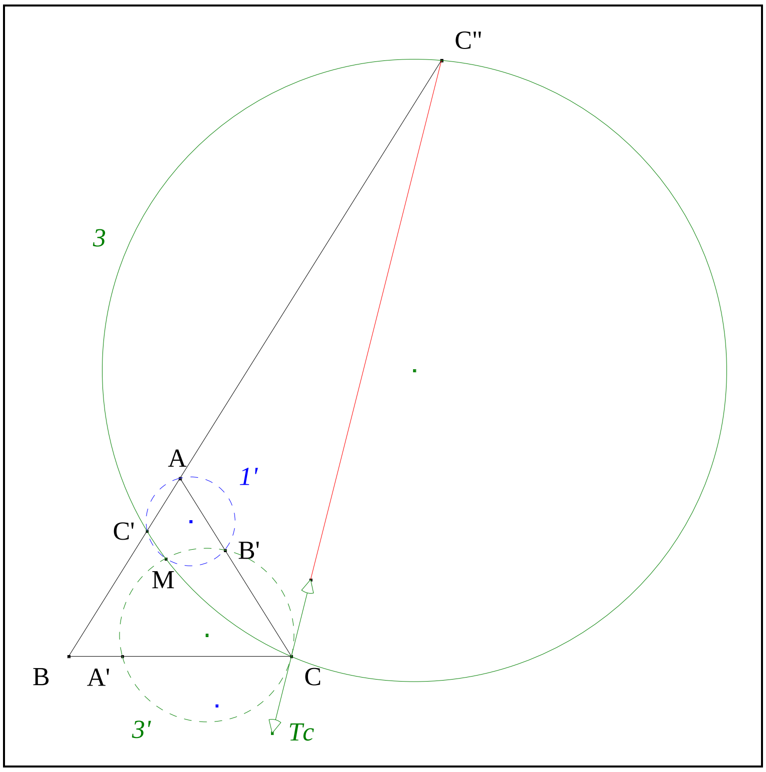
[36] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 39-44 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[37] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

# D. APPENDICE

## 1. Une surprenante tangente

### VISION

**Figure :**




**Traits :** ABC un triangle,
A', B', C' trois points resp. de (BC), (CA), (AB),
*1', 3'* les cercles circonscrits resp. aux triangles AB'C', CA'B',
M le point d'intersection de *1'* et *3'*,
*3* le cercle circonscrit au triangle CMC'
et C" le second point d'intersection de (AC'B) avec *3*'.

**Donné :** (CC") est tangente à *3'* en C.

### VISUALISATION

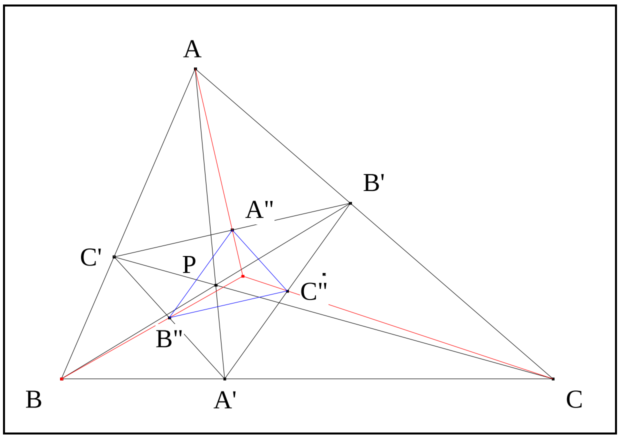
- D'après Miquel "Le théorème du pivot", M est le pivot de ABC relativement à A', B' et C'.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 3) appliqué à *1'*, *3'* et *3*,
(CC") est tangente à *3'* en C.

**Note historique :** la preuve de Darij Grinberg[38] est angulaire.

[38] Ginberg D., A.M.'s Problem, Message *Hyacinthos* # 8887 du 30/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

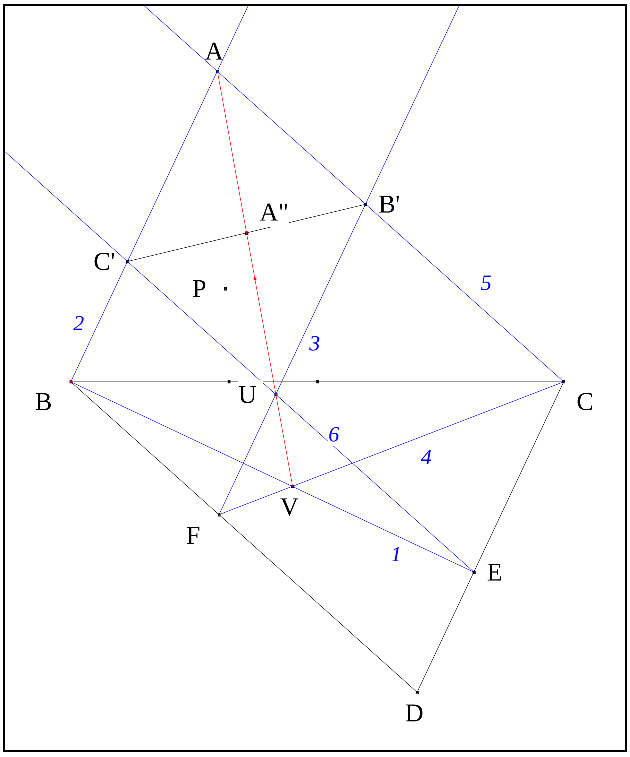
**2. L'isotomcomplément**




**Traits :** ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le P-triangle cévien de ABC
et A"B"C" le triangle médian de A'B'C'.

**Donné :** A"B"C" est en perspective avec ABC.

**VISUALISATION**



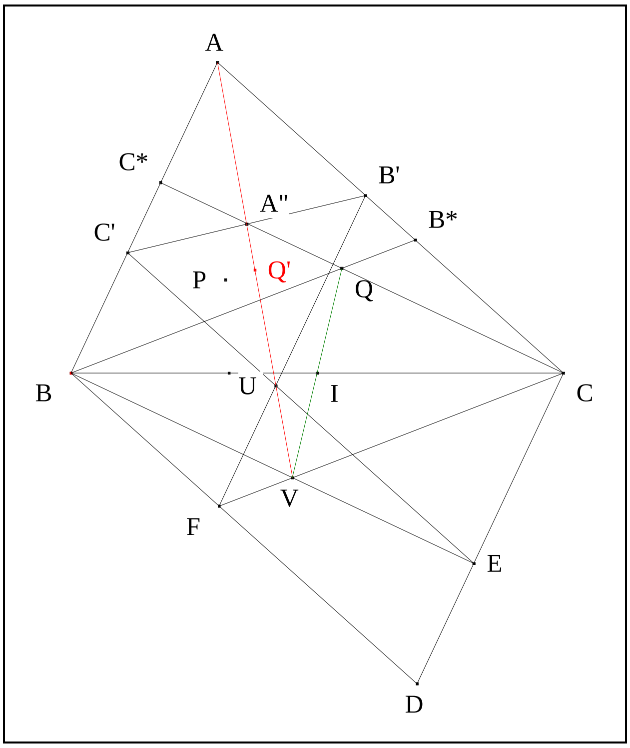

- Notons D le point tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme
  E le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par C' avec (CD)

Danneels E., *Hyacinthos*.

F le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par B' avec (BD)
et U, V le point d'intersection de (C'E) et (B'F), de (BE) et (CF).

- D'après Pappus "Deux sommets à l'infini" [39], (VAU) est la pappusienne de l'hexagone dégénéré *123456*.

- Le quadrilatère AC'UB' étant un parallélogramme, A' est sur (VAU).




- Notons B* l'isotomique de B' relativement à [AC],
  C* l'isotomique de C' relativement à [AB],
  Q le conjugué isotomique de P,
  Q' le complément du conjugué isotomique de P,
  et I le milieu de [BC].

- Par construction, le quadrilatère BVCQ est un parallélogramme;
  en conséquence, Q, I et V sont alignés.

- D'après "Le point complémentaire" (Cf. Annexe 5), (AA"UV) passe par Q'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB") passe par Q'
  (CC") passe par Q'.

- **Conclusion :** A"B"C" est en perspective avec ABC.

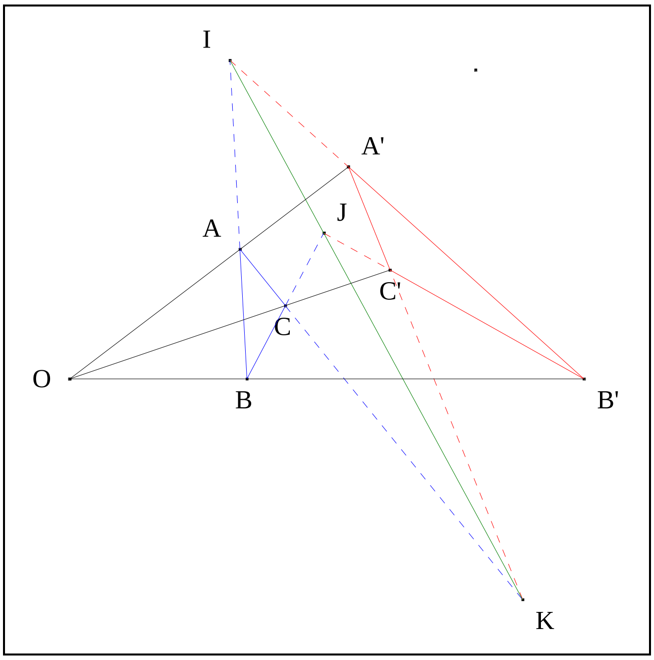
**Scolie :** Q' est "le complément de l'isotomique de P" en français
ou "l'isotomcomplement de P" en anglais comme le dit et l'utilise Darij Grinberg.

**Note historique :** ce résultat présenté comme "Theorem 1" par Darij Grinberg[40] a été démontré en recourrant aux coordonnées barycentriques.

39 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G., vol. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
40 Grinberg D., Isotomcomplement theory, Message # 6423 *Hyacinthos* du 24/01/2003.

# E. ANNEXE

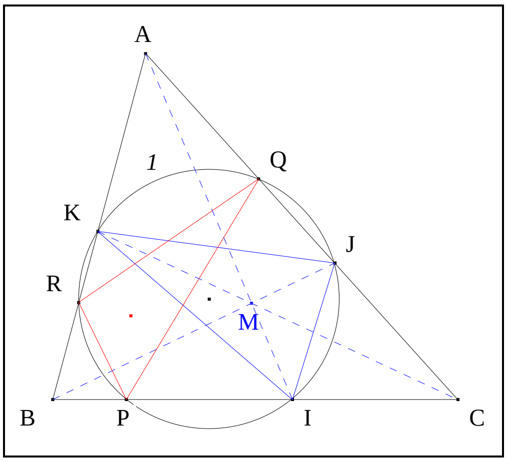
## 1. Le théorème des deux cercles de Desargues




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | A'B'C' | un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes, |
| | O | ce point de concours, |
| | I, J, K | les points d'intersection de (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A'). |

**Donné :** (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.[41]

## 2. Le M-cercle de Terquem



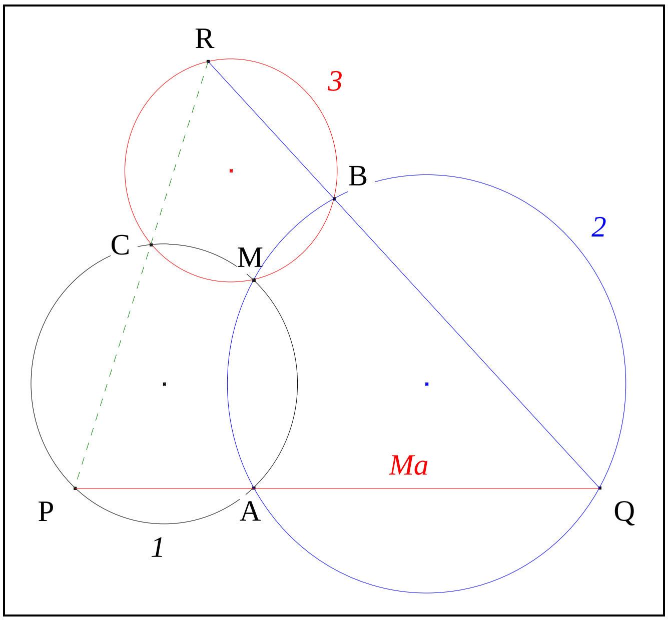

| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | M | un point, |

[41] Bosse A., *Perspective et de la Coupe des pierres* (1648).

| | | |
|---|---|---|
| | IJK | le triangle M-cévien de ABC, |
| | *1* | le cercle circonscrit à IJK |
| et | P, Q, R | les second points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB). |

**Donné :** PQR est un triangle cévien de ABC.[42]

### 3. Le théorème des trois cercles "concourants

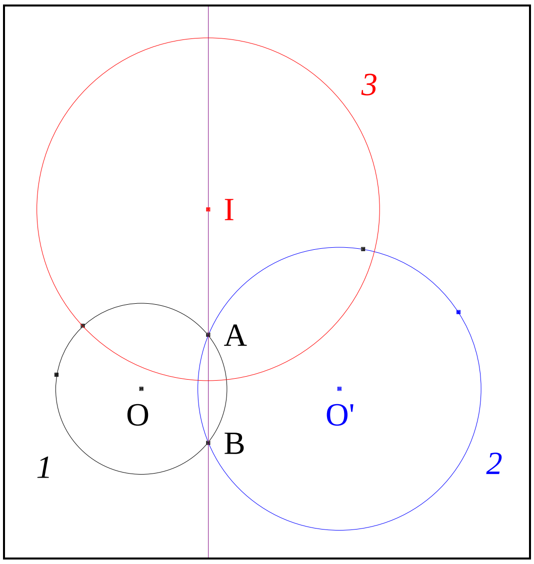



| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | *1*, *2*, *3* | trois cercles concourants, |
| | M | le point de concours de *1*, *2*, *3*, |
| | A | le second point d'intersection de *1* et *2*, |
| | *M*a | une A-monienne de *1* et *2*, |
| | P, Q | les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*, |
| | B, C | les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1* |
| et | R | un point de *3*. |

**Donné :** (QBR) est une monienne de *2* et *3*
*si, et seulement si*,
(PCR) est une C-monienne de *1* et *3*.

### 4. Axe radical de deux cercles sécants [43]

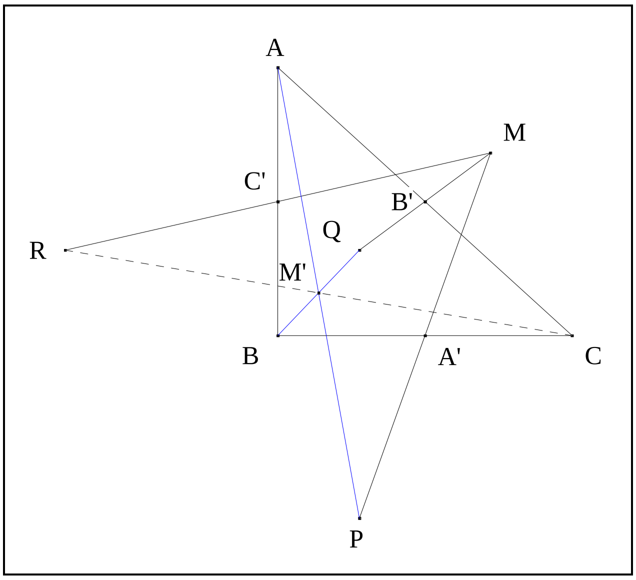
[42] Terquem O., *Nouvelles Annales* **1** (1842) 403.
[43] Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, *Cahier* **16** (1813) 124-214.




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | *1*, *2* | deux cercles sécants, |
| | O, O' | les centres de *1*, *2*, |
| | A, B | les points d'intersection de *1* et *2*, |
| | *3* | un cercle orthogonal à *2* |
| et | I | le centre de *3*. |

**Donné :** I est sur (AB) *si, et seulement si,* *3* est orthogonal à *2*.

## 5. Le point complémentaire [44]




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | A'B'C' | le triangle médian de ABC, |
| | M | un point, |
| | P, Q, R | les symétriques de A, B, C par rapport à A', B', C' |
| et | M' | le point d'intersection de (AP) et (BQ). |

**Donné :** (CR) passe par M'.

44 d'Ocagne M. (1882).