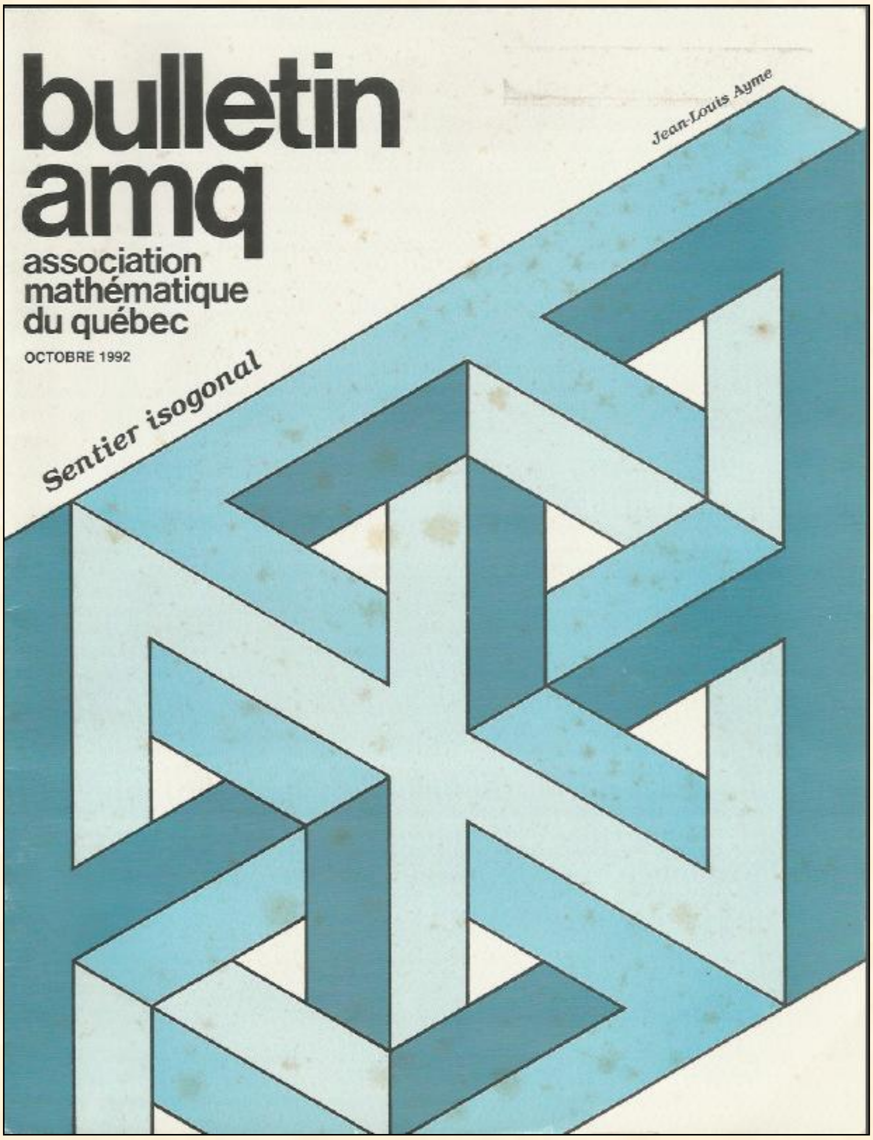
BULLETIN

DE

L'ASSOCIATION MATHEMATIQUE DU QUEBEC

(octobre 1992)



[1]

1 http://archimede.mat.ulaval.ca/amq/archives/1992/

SENTIER ISOGONAL

Jean-Louis Ayme
Collège Marie de France

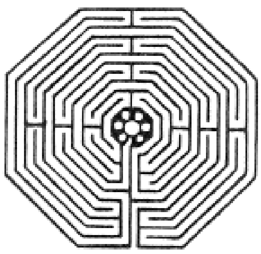
Cet article constitue le début (5 situations) d'une séquence de 8 situations qui furent présentées à des étudiants de seconde et de première du Baccalauréat français du Collège Marie de France (années qui correspondent en gros à secondaire V, ou collège I). Le but principal poursuivi est de mettre les étudiants dans un contexte de recherche relatif à des propriétés particulières des triangles. Les étudiants visés font de la géométrie synthétique depuis trois ou quatre ans et ont donc acquis une certaine habileté dans ce domaine.

Les situations sont présentées aux étudiants uniquement par l'énoncé et la question qui s'y rattache. Les étudiants dessinent alors la figure correspondante à l'énoncé et, en groupe, discutent des différentes approches possibles pour résoudre le problème. Les schémas de démonstration sont présentés seulement après que les étudiants aient bien débattu la question.

Dans ce qui suit, nous donnons les figures préliminaires que les étudiants doivent construire mais n'ont pas au départ. Nous avons aussi mis en notes quelques définitions théorèmes et commentaires qui n'apparaissent dans les textes données aux élèves.

Enfin, un mot sur le terme isogonal. *Gonos*, en grec, signifie angle. Le terme isogonale se réfère donc à des égalités d'angles. La dernière situation de cet article fera apparaître des droites dites isogonales et des points isogonaux.

Les liens entre micro-connaissances sont plus importants que les micro-connaissances elles-mêmes.



Si Euclide disait qu'en géométrie il n'y a pas de « Voie Royale » parce qu'on ne peut en effet faire l'économie d'un des éléments de la chaîne, nous pouvons dire avec le fondateur de l'école de Crotone qu'il y a en géométrie des « Voies Iniatiatiques » discrètes qui élèvent, par des clartés successives, l'élève ayant déceler ces traces invisibles à l'esprit géométrique.

Dans la forêt, vaste et obscure, des exercices sur le triangle où l'on s'égare sans guide sur des « Voies Faunes », nous proposons un sentier « isogonal », voir un fil d'Ariane, reliant quelques clairières, qui fera entrevoir les possibilités d'une théorisation, matière vivante, insaisissable articulation entre les techniques de résolution de problèmes et les prétentions quasi métaphysiques d'ordonnancement des connaissances.

Situation 1

Un triangle le plus quelconque

Énoncé : dans un demi-plan fermé de frontière Δ (fig. 1a), on considère d'abord deux points distincts A et B de Δ (fig. 1b), ensuite le demi-cercle de diamètre [AB] et la demi-droite Δ' dont le support est la médiatrice du bipoint (A, B) (fig. 1c), et, enfin, le sixième du cercle de centre A passant par B (fig. 1d).
Soit D la région ouverte ne contenant pas A et admettant pour frontières le sixième du cercle, la moitié du demi-cercle contenant B et le segment de Δ' compris entre les deux courbes précédentes.

Question : rechercher dans D le point M équidistant des frontières de D.

Référence : *Sortais, Yvonne et René, **La géométrie du triangle**, Exercices résolu, Paris (Hermann), 1987.*

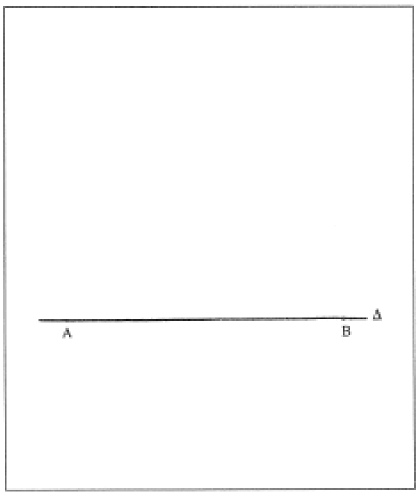


Figure 1a

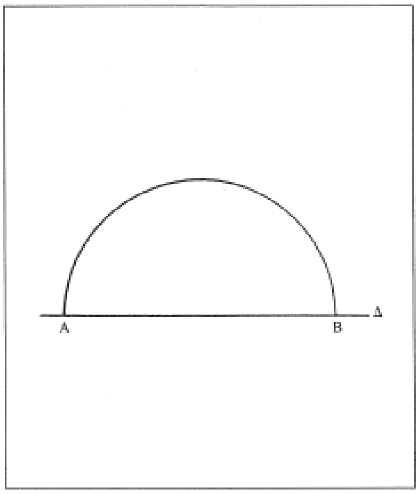


Figure 1b

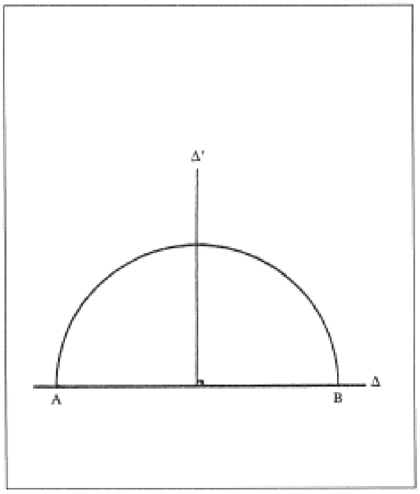


Figure 1c

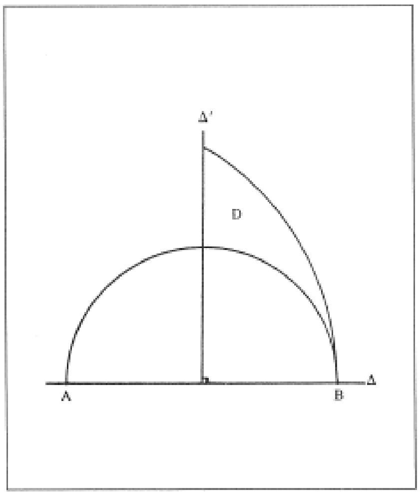


Figure 1d

Figure d'étude :

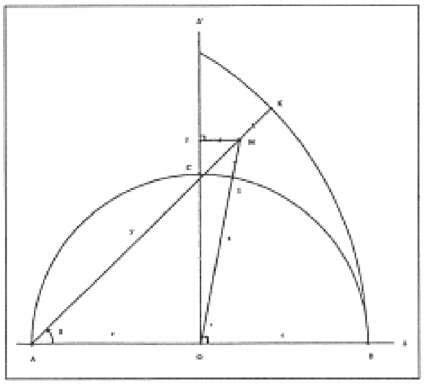


Figure 1d

Schéma de démonstration : (fig. 1d)

Raisonnons analytiquement.

$\boxed{\text{Hypothèse}}$: il existe un et un seul point M de D équidistant des frontières de D.

Alors calculons-le.

- Notation : voir figure 1d.
- Considérons le repère $R = (0, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, R étant orthonormé.
- Les vecteurs $\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MK}$ ayant même norme, nous avons

$$x - r = y \cos \phi - r = 2r - y$$

d'où $\quad x = y \cos \phi$ et $y = \dfrac{3r}{1 + \cos \sigma}$.

- Appliquons le théorème d'al-Kaschi[1] au triangle OAM :

$$x^2 = y^2 + r^2 - 2\, yr \cos \sigma$$

par substitution

$$\left(\frac{3r\cos\sigma}{1 + \cos \sigma}\right)^2 = \left(\frac{3r}{1 + \cos \sigma}\right)^2 + r^2 - 2\,\frac{3r}{1 + \cos \sigma}\, r \cos \sigma$$

ce qui donne $7 \cos^2 + 2 \cos \sigma - 5 = 0$

d'où $\quad \cos\sigma = \dfrac{5}{7}$, l'autre « solution »

$\cos \sigma = -1$ étant à rejeter.

Nous avons :

$$x = \frac{5r}{4},\ y = \frac{7r}{4} \text{ et } BM = \frac{\sqrt{33}}{4}\, r.$$

Les mesures des côtés du triangle vérifient

$$\frac{r}{4} = \frac{x}{5} = \frac{y}{7}.$$

$\boxed{\text{Conclusion}}$: notre hypthèse est vraie.

Remarque : Dans la suite des situations, afin d'assurer une certaine uniformité des figures proposées par les étudiants, il leur est demandé de toujours partir d'un triangle ayant cette propriété. Pour les besoins de la cause, nous appelons un tel triangle un « triangle le plus quelconque. » La figure 1e donne l'exemple d'un tel triangle.

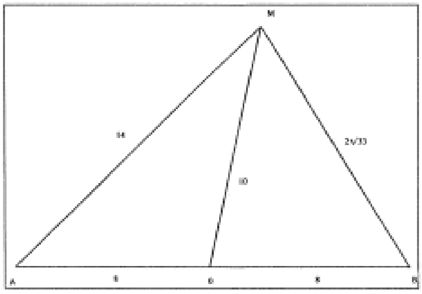


Figure 1e

1- *Loi du cosinus*

Situation 2

Les trois médiatrices

Énoncé : dans un plan, on considère un triangle ABC et les médiatrices de ses trois côtés (fig. 2).

Question : démontrer que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes.

Figure d'étude :

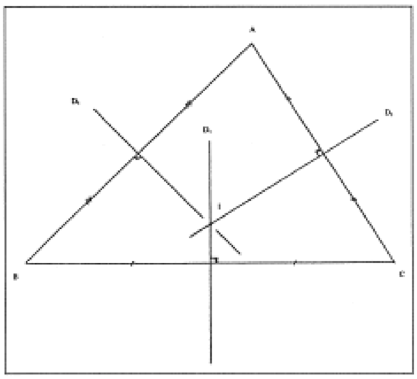


Figure 2

Schéma de démonstration : (fig. 2)

- notons D_1 = méd (B,C)
  D_2 = méd (C,A)
  et D_3 = méd (A,B).
- Les droites D_1 et D_2 sont sécantes en I car le triangle ABC n'est pas dégénéré.
- L'application du théorème de la médiatrice[1] nous dévoile que

  IB = IC et IC = IA.

- Par transitivité, nous en déduisons que IB = IA.
- Cette égalité traduit, d'après la réciproque du théorème de la médiatrice, que I appartient à la droite D_3.
- En conséquence, les médiatrices du triangle ABC sont concourantes.

• Remarque: Les sommets A, B, C étant à égale distance du point I, commun aux trois médianes, ils sont cocycliques; en raisonnant par l'absurde, on peut démontrer qu'il n'existe qu'un seul cercle passant par ces trois points. Ce point I est donc le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Situation 3

Les droites de SIMSON

Énoncé : dans un plan, on considère d'abord un triangle ABC et son cercle circonscrit *C* (fig. 3a), ensuite un point M de *C* (fig. 3b) distinct des sommets du triangle et, enfin, les projetés orthogonaux A′, B′ et C′ de M respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB) (fig. 3c).

Question : démontrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés (fig. 3d).

Note : Simson Robert, mathématicien écossais, 1687-1768. La droite passant par A′, B′ et C′ est dite la droite de Simson du point M relativement au triangle ABC.

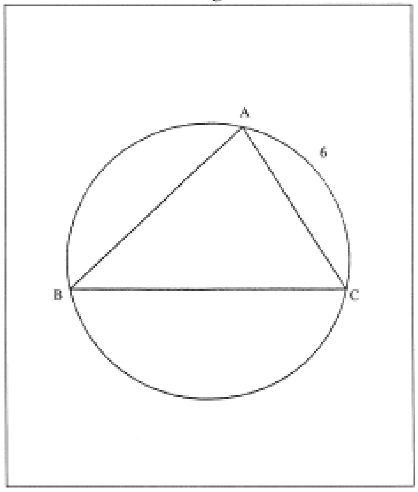


Figure 3a

1- *Théorème de la médiatrice : Tout point d'une perpendiculaire élevée sur le milieu d'un segment de droite est également distant des deux extrémités de ce segment.*

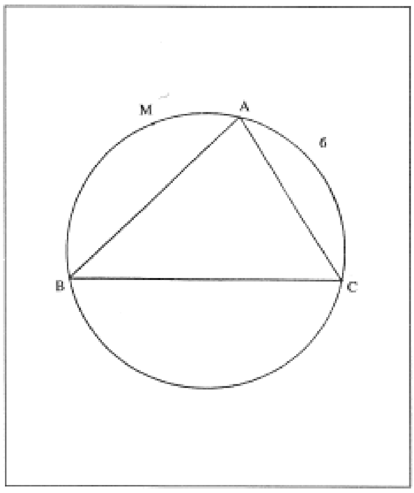
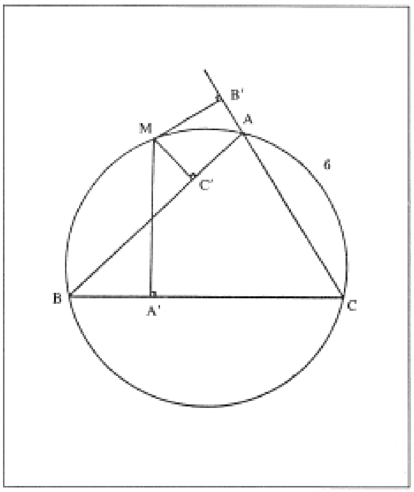


Figure 3b



Figures 3c

Schéma de démonstration : (fig. 3e)

- la mise en oeuvre du théorème de l'angle inscrit[1] dévoile que les triangles rectangles MC'A et MA'C sont semblables ;

  en conséquence

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}.$$

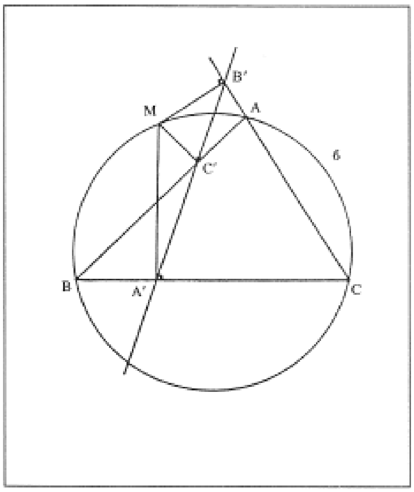


Figure 3d

Figure d'étude :

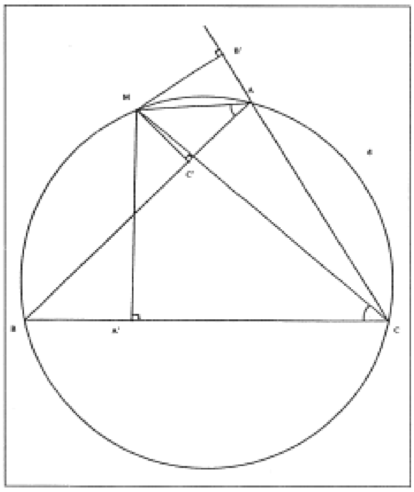


Figure 3e

- Mutadis mutandis, i.e., en permutant circulairement et simultanément les lettres A, B, C, et les lettres A', B', C', on démontre que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$$

1- *Théorème de l'angle inscrit : 2 angles dont les sommets sont sur la circonférence d'un même cercle et qui interceptent des arcs égaux, sont égaux.*

- En multipliant membre à membre ces trois égalités, nous obtenons, après simplification, la relation

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{C'B}} = +1$$

qui traduit, d'après la réciproque du théorème de Mérélaüs[2], que les points A′, B′, C′ sont alignés.

- Remarque : pour démontrer l'énoncé réciproque[3], on s'intéresse à son énoncé contraposé (en supposant que M n'est pas sur le cercle circonscrit) ; si M n'est pas sur 6 alors les triangles rectangles MC′A et MA′C ne sont pas semblables et dans cette situation particulière où les sommets des angles droits se correspondent, nous avons :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{A'C}} \neq \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}.$$

En procédant de la même façon que précédemment, on démontre que les points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés ; en conséquence, l'énoncé réciproque est vrai.

Situation 4

Les trois perpendiculaires

Énoncé : dans un plan, on considère d'abord un triangle ABC et un point M n'appartenant pas au cercle circonscrit à ce triangle (Fig. 4a), ensuite les symétriques I, J et K de M respectivement par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) (fig. 4b), et, enfin, les perpendiculaires (AP), (BQ) et (CR) respectivement aux droites (JK), (KI) et (IJ), P, Q et R étant les pieds de ces perpendiculaires. (fig. 4c et 4d).

Question : montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

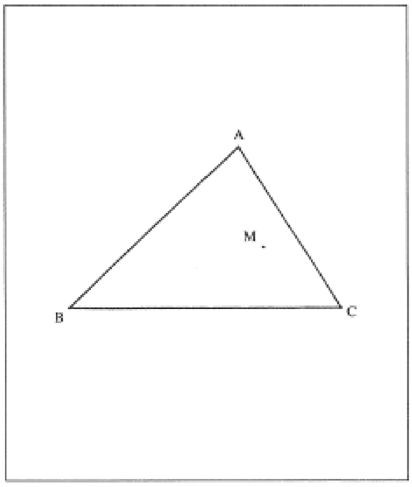


Figure 4a

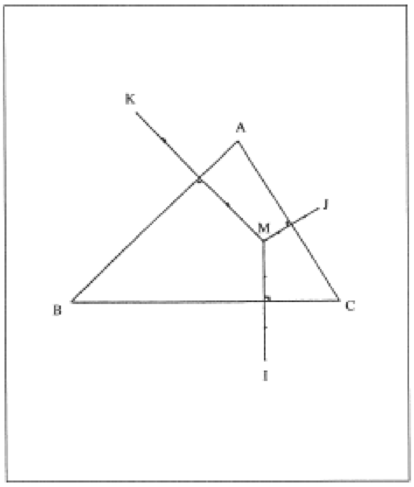


Figure 4b

2- *Théorème de Ménélaüs : Soit un triangle ABC. Soit M, N, P, trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets A, B, C du triangle ABC. Si les trois points M, N, P sont alignées, alors on a*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1.$$

L'orientation des segments est ici importante. $\overline{MB}$ est différent de $\overline{BM}$. Un rapport est positif si les segments sont dans le un même sens et négatif sinon.

3- *L'énoncé réciproque : Si M est le point commun à trois perpendiculaires élevées sur les côtés (éventuellement prolongés) d'un triangle en trois points alignés, alors M est sur le cercle circonscrit à ce triangle.*

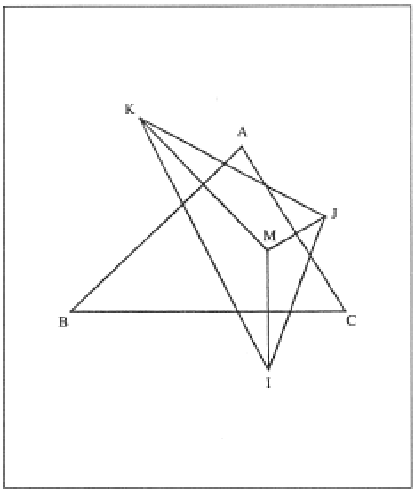
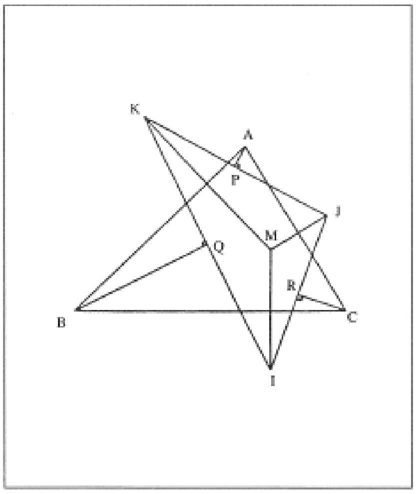


Figure 4c



Figures 4d

Figure d'étude :

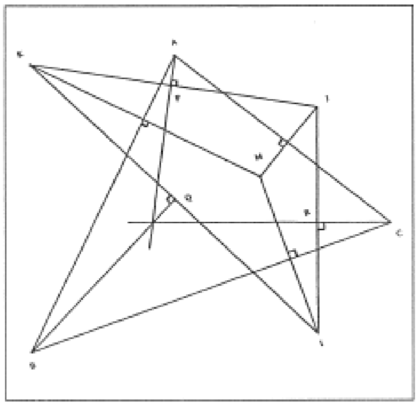


Figure 4e

Schéma de démonstration : (fig. 4e)

- considérons le triangle MKI
- Les droites (AB) et (BC) sont, par définition de la symétrie axiale, les médiatrices respectives des côtés [MK] et [MI] du triangle MKI.
- Ces deux médiatrices se coupent en B par hypothèse.
- Les médiatrices d'un triangle étant concourantes, la perpendiculaie (BQ) est la dernière médiatrice du triangle.
- (BQ) est aussi une médiatrice du triangle IJK.
- En permuttant circulairement et simultanément les lettres A, B et C, les lettres I, J et K, et les lettres P, Q et R, on démontre que les perpendiculaires (CR) et (AP) sont les deux autres médiatrices du triangle IJK.
- En conséquence, les perpendiculaires (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Situation 5

Le triangle podaire

Énoncé : dans un plan, on considère d'abord un triangle ABC et un point M n'appartenant pas au cercle circonscrit à ce triangle (fig. 5a), ensuite les projetés orthogonaux A′, B′ et C′ de M respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB) (fig. 5b), et, enfin, les perpendiculaires (AP), (BQ) et (CR) respectivement aux droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′), P, Q et R étant les pieds de ces perpendiculaires (fig. 5c et 5d).

Question : démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Note : le triangle A′B′C′ est dit le triangle podaire du point M relativement au triangle ABC.

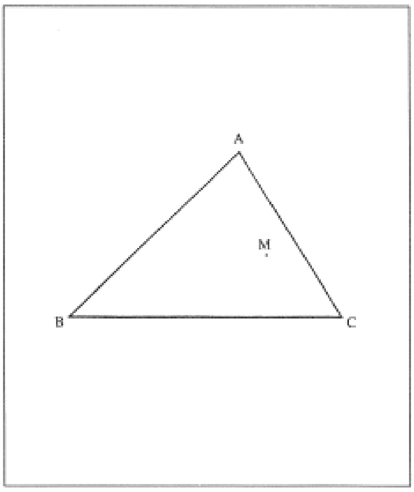


Figure 5a

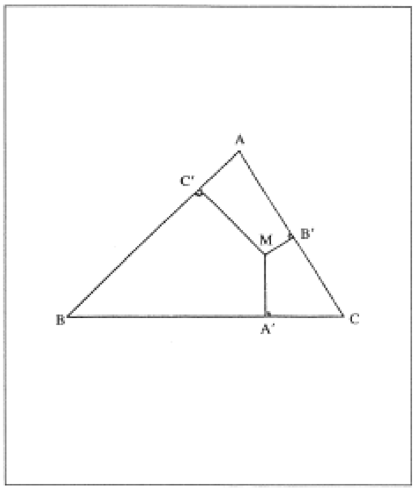


Figure 5b

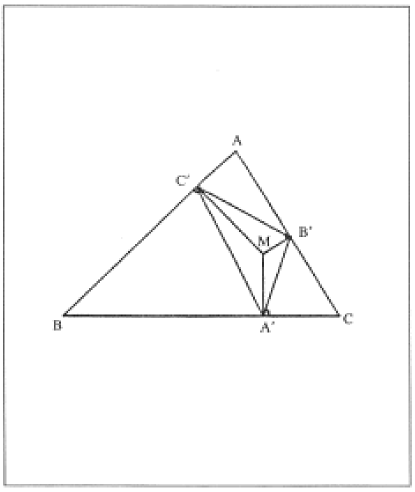
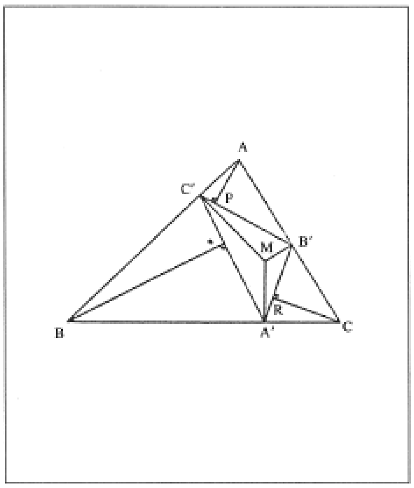


Figure 5c



Figures 5d

Figure d'étude :

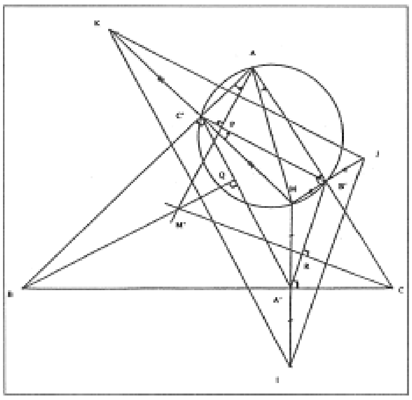


Figure 5e

Schéma de démonstration : (Fig. 5e)

- notons I, J et K les symétriques du point M respectivement par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB).

- L'homothétie de centre M et de rapport 2 transforme le triangle A′B′C′ en le triangle IJK.

- Sachant que la relation d'orthogonalité est invariante par parallèlisme, nous sommes ramenés à la situation 4.

- En conséquence, les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes (en M[1]).

- *Remarques :*
  * sachant qu'un triangle rectangle est inscriptible dans un demi cercle, les hypothèses nous permettent de déduire que le quadrilatère AC′MB′ est inscriptible dans le cercle de diamètre [AM].
  Les théorèmes des angles inscrits et des angles à côtés perpendiculaires[1] nous permettent d'écrire

  $$(\overrightarrow{AC'} \wedge \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB'}) \text{ (à } z\pi) \text{ près).}$$

  En conséquence, les céviennes[2] (AM) et (AP) sont isogonales.

  * En procédant de la même façon, on démontre que les ceiviennes (BM) et (BQ) (resp. (CM) et (CR)) sont isogonales[3].

  * Le point M′ est l'isogonal de M[4].

  * Dire que M′ est l'isogonal de M implique que M n'est pas sur ζ.

Les situations 4 et 5 nous permettent de montrer des propriétés intéressantes. Ainsi, dans la situation 6, nous montrons que si M et M′ sont deux points distincts isogonaux par rapport au triangle ABC, alors les triangles podaires de M et M′ relativement au triangle ABC sont cocycliques. (fig. 6)

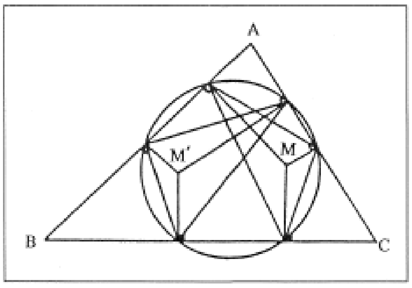


Figure 6

Les situations 7 et 8, plus complexes, portent sur ce que les géomètres appellent le cercle d'Euler et le point de Lemoine.

1- *Théorème des angles à côtés perpendiculaires : deux angles dont les côtés sont respectivement perpendiculaires sont égaux.*

2- *Une cévienne est une droite qui passe par un seul sommet d'un triangle.*

3- *Deux droites D et Δ se coupant en un point A sont dites isogonales par rapport à deux autres droites d et δ se coupant aussi en A lorsque l'angle fait entre les droites D et d est le même que celui fait entre les droites Δ et δ. De façon équivalente, deux droites D et Δ se coupant en un point A sont dites isogonales par rapport à deux autres droites d et δ se coupant aussi en A lorsque la bissectrice de D et Δ est la même que la bissectrice de d et δ.*

4- *Deux points M et M′ sont dits isogonaux (relativement à un triangle ABC) lorsque les droites MA, MB, MC sont respectivement isogonales aux droites M′A, M′B, M′C par rapport aux côtés du triangle ABC.*