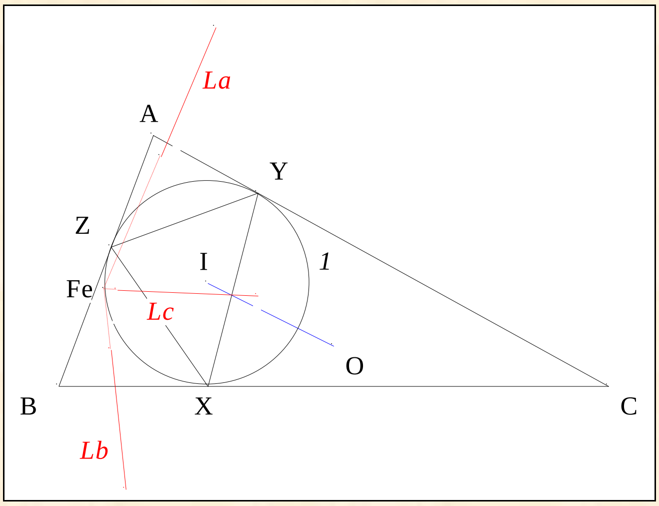
SYMÉTRIQUES DE (OI)

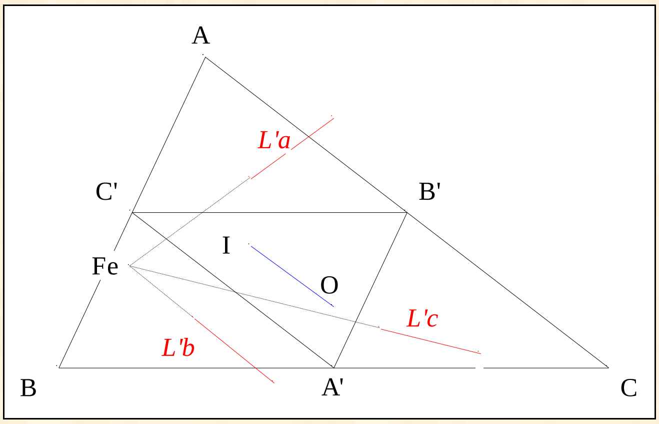
PAR RAPPORT

AUX CÔTÉS DES TRIANGLES DE CONTACT ET MÉDIAN

†

Jean-Louis AYME [1]





Résumé. Nous présentons deux preuves originales de deux résultats connus à savoir que les symétriques de la droite joignant les centres O et I des cercles circonscrit et inscrit, par rapport aux côtés des triangles de contact et médian, passent par le point de Feuerbach Fe. Ce résultat est atteint à partir de deux résultats de l'auteur.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils s'adressent tout particulièrement au professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) qui a relu et corrigé cet article.

[1] Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France) ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract. We present two original evidence of two results known namely symmetric of the straight line joining the centres O and I of the circles circumscribed and inscribed over the sides of the triangles of contact and median, pass through the point of Feuerbach Fe. This result is achieved from two results of the author.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown briefly.

Acknowledgements. They go particularly to the Professor Ercole Suppa of Teramo (Italy) who read and corrected this article.

Sommario. Presentiamo due dimostrazioni originali di due risultati noti, vale a dire che le rette simmetriche della retta che unisce i centri O ed I dei cerchi circoscritto ed inscritto, rispetto ai lati dei triangoli di contatto e mediale, passano per il punto di Feuerbach Fe. Questo risultato è ottenuto a partire da due risultati dell'autore. Le figure sono tutte in posizione generale e tutti i teoremi citati possono essere dimostrati sinteticamente.

Riconoscimenti. Sono rivolti particolarmente al professore Ercole Suppa di Teramo (Italia) che ha riletto e corretto questo articolo.

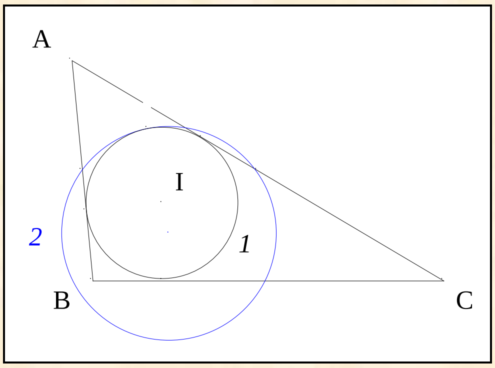
Sommaire

Attention, jusqu'à la huitième partie incluse, les notations peuvent varier d'une partie à l'autre.

A. KARL FEUERBACH [2]

[2] Feuerbach K.. *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822) 38

Figure :

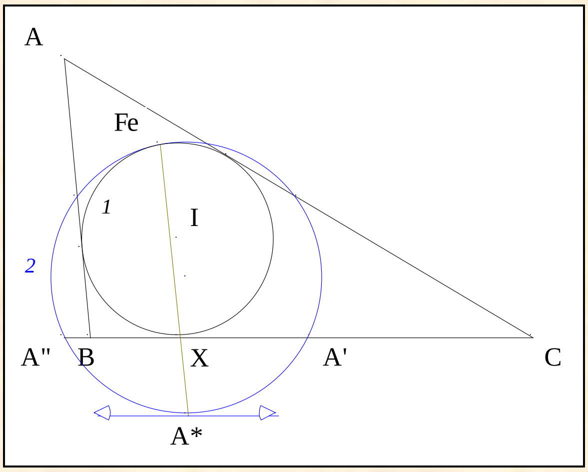


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*
et *2* le cercle d'Euler de ABC.

Donné : *1* et *2* sont tangents [3].

Scolies : **(1)** le point de contact du cercle d'Euler et du cercle inscrit, est le point de Feuerbach ; noté Fe, il est répertorié sous X_{11} chez ETC.

(2) Position de Fe



- Notons X le point de contact de *1* avec (BC),
  A' le milieu de [BC],
  A" le pied de la A-hauteur de ABC,
  A* le milieu de l'arc A'A" ne contenant pas le A-point d'Euler de ABC
  et *Ta** la tangente à *2* en A*.

- Le triangle A*A'A" est a-isocèle.

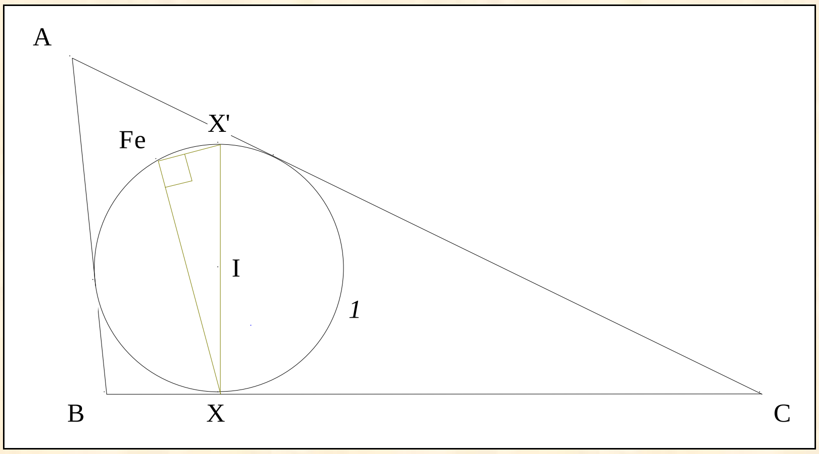
- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe **1**), Ta* // (A'A").

- **Conclusion :** les cercles *2* et *1*, le point de base Fe, les tangentes *Ta** et (A'A"), conduisent au théorème **8'** de Reim ; en conséquence, A*, Fe et X sont alignés.

---

[3] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1**

(2) Un triangle Fe-rectangle



- Notons X' l'antipôle de X sur *1*.

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", le triangle FeXX' est Fe-rectangle.

Note historique : la preuve analytique de Feuerbach constitue un tour de force et traduit sa ténacité ; il prend A pour origine, (AB) pour axe des abscisses et s'appuie sur un article d'Euler [4] pour arriver au résultat.
Rappelons que Jakob Steiner [5] en 1833, Chrian Heinrich von Nagel [6] en 1836, Olry Terquem en 1841, Carl Adams [7] en 1846, l'élève J. Mention [8] en 1846 et 1850, Reuschle en 1853, Hart vers 1860, Harvey [9] en 1887, J. P. Taylor [10] en 1900, Amédée Mannheim[11] en 1902, Georges Fontené [12] en 1905, prouveront le célèbre résultat de Feuerbach.
Signalons que Mention sera le premier a en donné une preuve géométrique en 1846, qu'Hamilton en 1860 déterminera la position du point de contact, que Calille Gérono [13] en 1865 déterminera à son tour l'emplacement du point de contact mais en n'en n'employant que la règle et que Fontené [14] donnera une preuve basée sur l'inversion tout en précisant la position du point de contact.

B. LE CAPITAINE

AU CORPS ROYAL D'ARTILLERIE

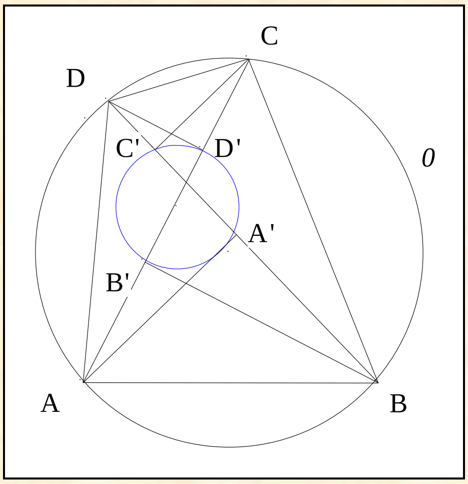
---

4 Euler L., Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* **11**, 103 (1765)
5 Steiner J., *Annales de Gergonne* **19**
Steiner J., *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques* (1833) 55
6 Nagel (von) C., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836)
7 Adams C., *Die merkwürdigen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks* (1846)
8 Mention, *Nouvelles Annales* **4** (1846) 403 ;
Mention, Note sur le triangle rectiligne, *Nouvelles Annales* **9** (1850) 101
9 Harvey, *Proceedings of Edinburgh Math. Soc.* **5** (1887) 102
10 Taylor J. P., Question 1544, *Intermédiaire des mathématiciens* (1900) 314
11 Mannheim A., *Nouvelles Annales* (1902) 500
12 Fontené, Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1905)
13 Gérono, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1865) 220
14 Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1907)

AMÉDÉE E. MOREL

VISION

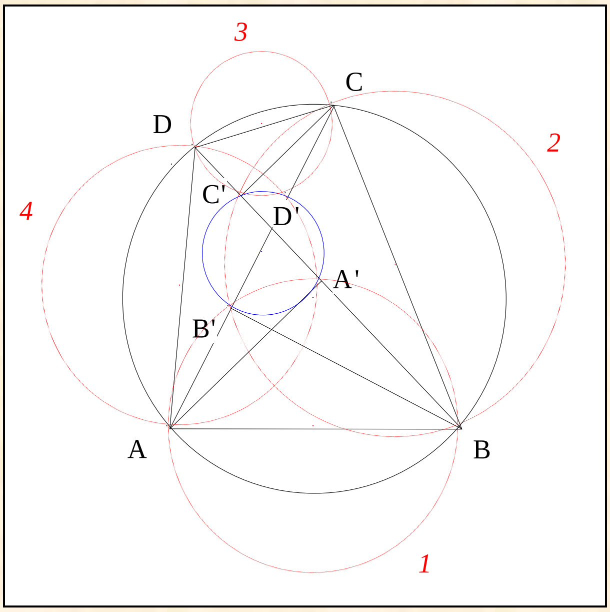
Figure :



Traits : *0* un cercle,
ABCD un quadrilatère inscrit dans *0*,
et A', B', C', D' les pieds des perpendiculaires abaissées de A, B, C, D resp. sur (BD), (AC), (BD), (AC).

Donné : A', B', C', D' sont cocycliques [15].

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle de diamètre [AB] ; il passe par A' et B' ;
  2 le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C' ;

[15] Morel A., Réponse à la Question **908**, *Nouvelles Annales* (1867) 317

3 le cercle de diamètre [CD] ; il passe par C' et D' ;
et *4* le cercle de diamètre [DA] ; il passe par D' et A'.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des six cercles" [16], A', B', C' et D' sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.

Énoncés traditionnels :

(1) les cercles qui ont pour diamètres les côtés d'un quadrilatère cyclique conduisent par leur intersection à un quadrilatère cyclique.

(2) les quatre projections des sommets d'un quadrilatère cyclique sur les diagonales, conduisent à un quadrilatère cyclique.

Scolie : *5* est "le cercle de Morel du quadrilatère cyclique ABCD".

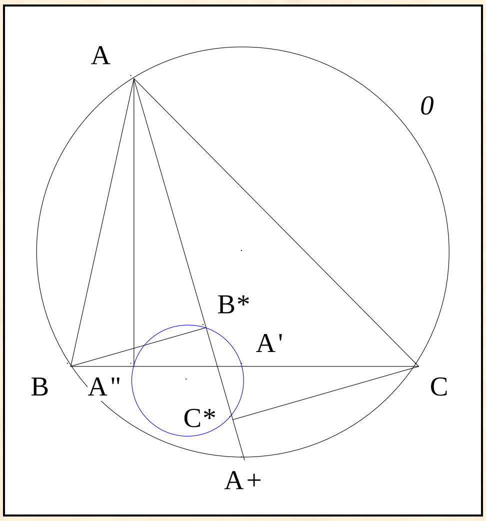
Note historique : c'est en répondant à la question 908 posée par Émile Lemoine [17] dans les *Nouvelles Annales* de 1867 qu'Amédée Morel cite le résultat précédent que l'on retrouve chez Eugène Catalan [18].

C. LE LIEUTENANT CALABRE

VISION

Figure :

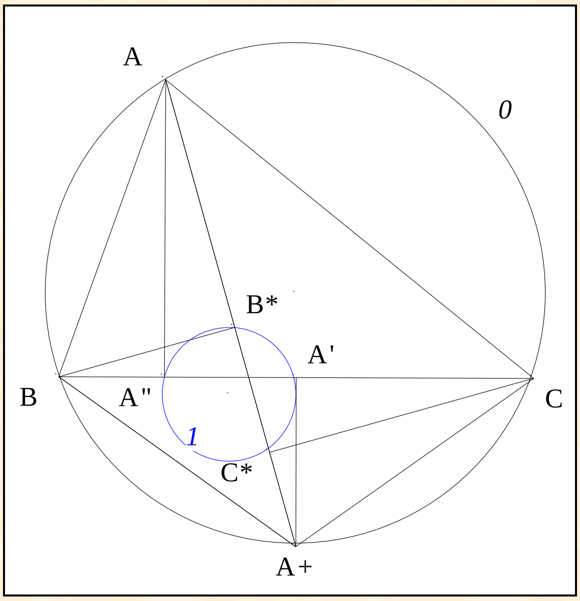
[16] Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six circles, G.G.G. vol. **2**
[17] Lemoine, Question 908, *Nouvelles Annales* (2) **8** (1867) 47
[18] Catalan E., Théorème **13**, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Elémentaire*, Dunod (1879) 39



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	A+	le milieu de l'arc BC ne contenant pas A,
	A'	le milieu de [BC],
	A"	le pied de la A-hauteur de ABC,
et	B*, C*	les pieds des perpendiculaires abaissées de B, C sur (AA+).

Donné : A', A", B*, C* sont cocycliques [19].

VISUALISATION

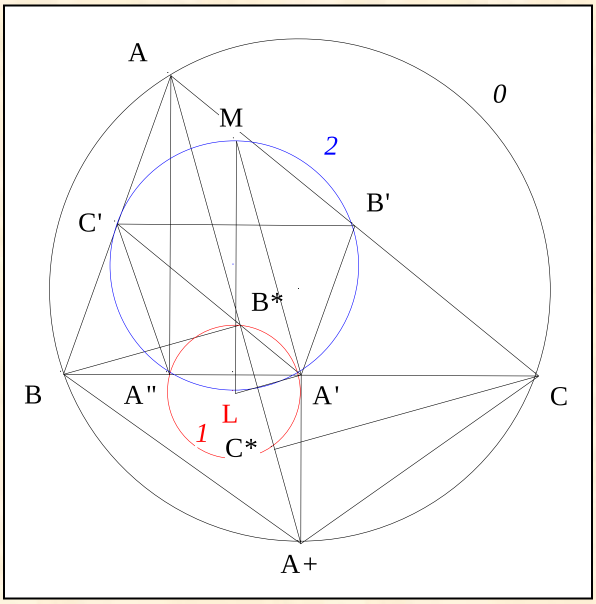


- **Scolies :** **(1)** (AA+) est la A-bissectrice intérieure de ABC
  (2) A' est le pied de la perpendiculaire abaissée de A+ sur (BC).
- Considérons le quadrilatère ABA+C et ses diagonales (AA+) et (BC).
- **Conclusion :** d'après Morel, A', A", B*, C* sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle.

[19] Malloizel R., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1878) 91

Scolies : **(1)** *5* est "le A-cercle de Calabre de ABC".

(2) Le centre du A-cercle de Calabre est sur le cercle d'Euler



- Notons aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
  B', C' les milieux resp. de [AC], [AB],
  2 le cercle d'Euler ; il passe par A", A', B', C' ;
  et L, M les points d'intersection de la médiatrice de [A'A"] avec *1*.

- L est le milieu de l'arc A"A' ne contenant pas le A-point d'Euler de ABC.

- Le quadrilatère A"A'B'C' étant un trapèze cyclique, est isocèle ;
  il s'en suit que (LM) est la médiatrice de [B'C'].

- M étant le milieu de l'arc B'C' ne contenant pas A', (A'M) est la A'-bissectrice du triangle A'B'C' ;
  le quadrilatère A'B'AC' étant un parallélogramme, (A'M) // (AA+).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (A'M) ⊥ (A'L) ;
  en conséquences, (A'L) ⊥ (AA+) , (A'L) // (BB*) , (A'L) // (CC*).

- A' étant le milieu de [BC], (BB*) et (CC*) étant parallèles, (A'L) est la médiatrice de [B*C*].

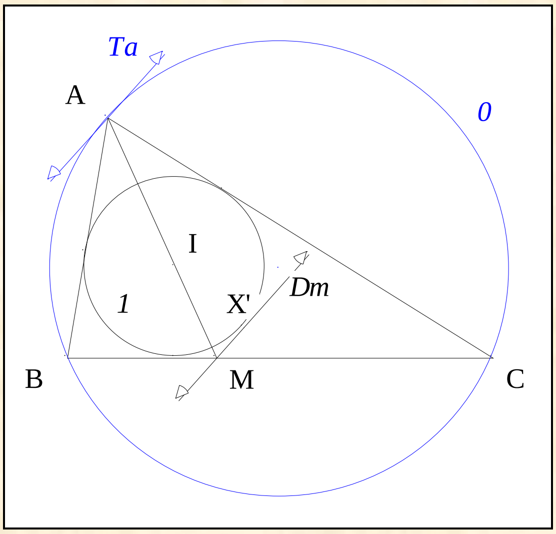
- **Conclusion :** L est le centre de *1*.

D. DEUX ANONYMES

1. Une tangente au cercle inscrit

VISION

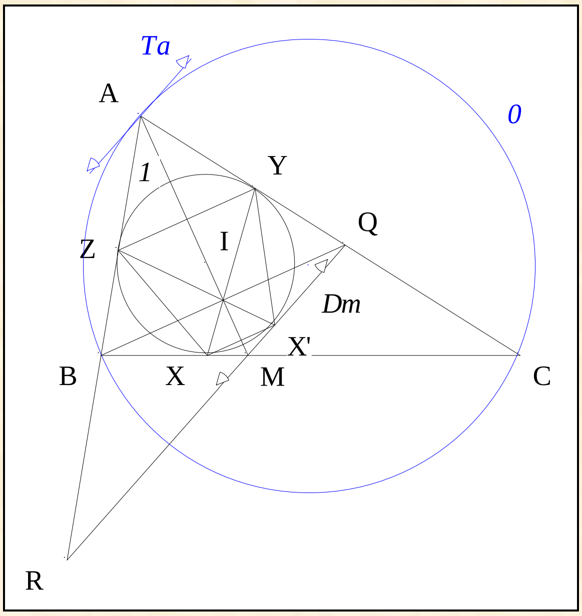
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Ta	la tangente à *0* en A,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*,
	M	le pied de la bissectrice (AI),
	*D*m	la seconde tangente à *1* menée à partir de M
et	X'	le point de contact de *D*m avec *1*.

Donné : *D*m est parallèle à *Ta*.

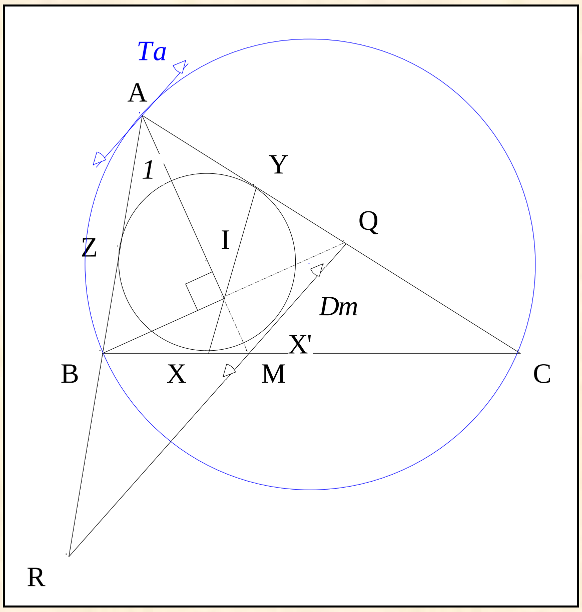
VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)

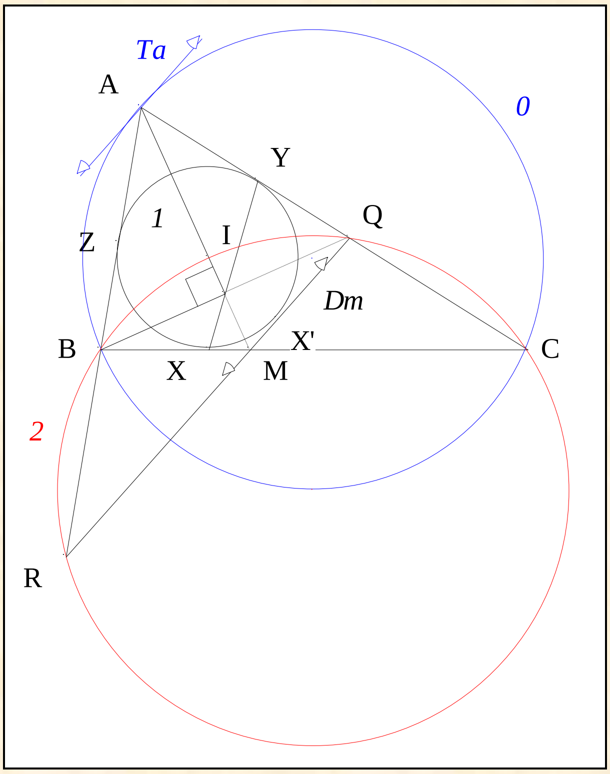
  et Q, R les points d'intersection de *D*m resp. avec (CA) et (AB).

- D'après "Le théorème de Newton" (Cf. Annexe **2**),
  les diagonales des quadrilatères tangentiel ABMQ et inscrit XX'YZ à *1*, sont concourantes.



- D'après Lascases "An unlikely concurrence" [20], (AI) ⊥ (BQ).

- La A-bissectrice (AI) du triangle ABQ étant aussi la A-hauteur, ABQ est A-isocèle ;
  en conséquence, (AI) est la médiatrice de [BQ].



- M étant sur la médiatrice (AI) de la base [BQ] du triangle A-isocèle ABQ,
  le quadrilatère BQCR est un trapèze isocèle;
  en conséquence, BQCR est cyclique.

---

[20] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. **4**

- Notons *2* ce cercle.

- Les cercles *2* et *0*, les points de base B et C, les moniennes (RBA) et (QCA), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (RQ) // *Ta*.

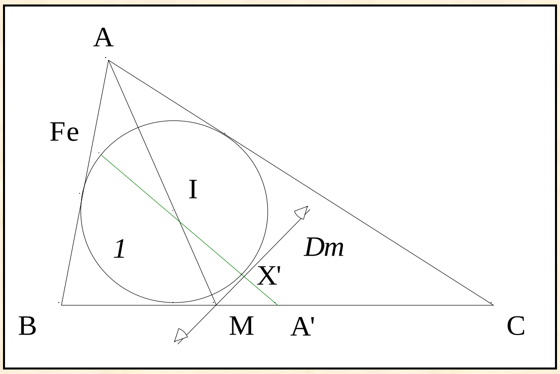
- **Conclusion :** *D*m est parallèle à *Ta*.

Scolie : X' est le symétrique de X par rapport à (AI).

2. Trois points alignés [21]

VISION

Figure :



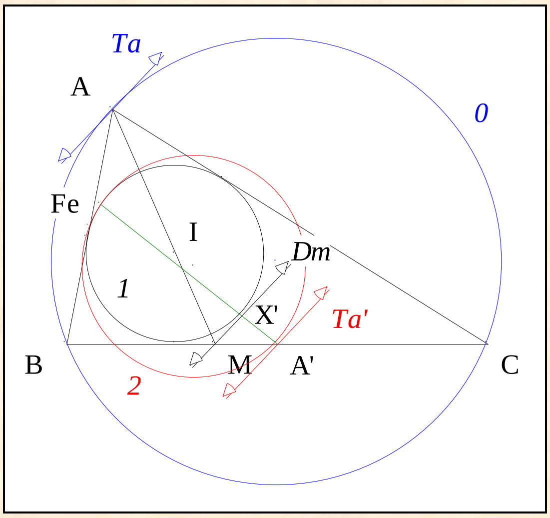
Traits :

	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*,
	M	le pied de la bissectrice (AI),
	Dm	la seconde tangente à *1* menée à partir de M,
	X'	le point de contact de Dm avec *1*,
	A'	le milieu du côté [BC]
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC.

Donné : Fe, A' et X' sont alignés.

VISUALISATION

[21] Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales*, Séries **4**, vol. **8**, 1907



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC,
  Ta la tangente à 0 en A,
  2 le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A' ;
  et *Ta'* la tangente à 2 en A',

- D'après **1**. Une tangente au cercle inscrit, *Dm* // *Ta* ;
  nous savons : *Ta* // *Ta'* ;
  par transitivité de la relation //, *Dm* // *Ta'*.

- D'après "Le point de Feuerbach" [22], *2* est tangent à *1* en Fe.

- **Conclusion :** les cercles *1* et *2*, le point de base Fe, les parallèles *Dm* et *Ta'*, conduisent au théorème **8'** de Reim ; en conséquence, Fe, A' et X' sont alignés.

Note historique : ce résultat faisait partie de la solution du deuxième problème [23] de la 13-ième O.I.M. qui s'est tenue à Budapest (Hongrie) en 1982.

Commentaire : la tangente au cercle d'Euler en un point milieu d'un côté d'un triangle est parallèle à la tangente au cercle circonscrit de ce triangle au sommet correspondant.

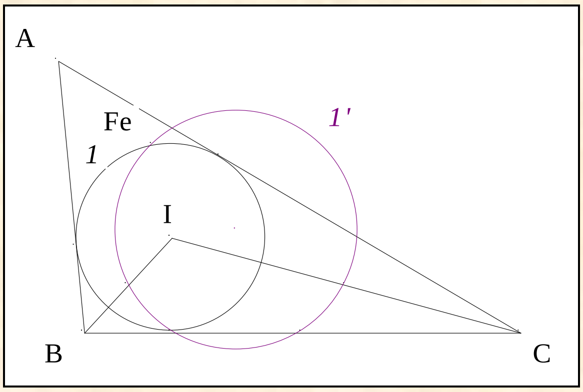
E. JOHANN DÖTTL

VISION

Figure :

[22] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1**

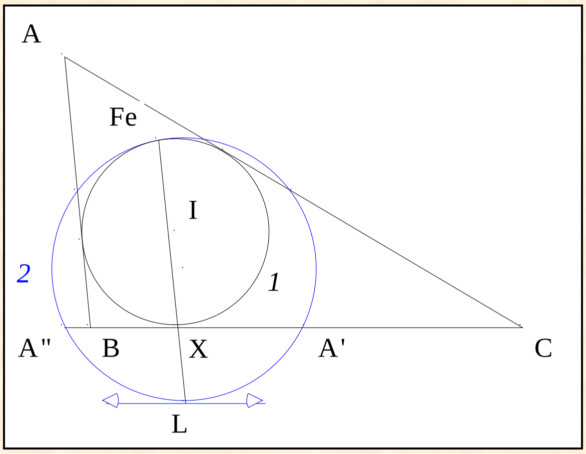
[23] Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales*, Séries **4**, vol. **8**, 1907



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*,
	1'	le cercle d'Euler du triangle IBC
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC.

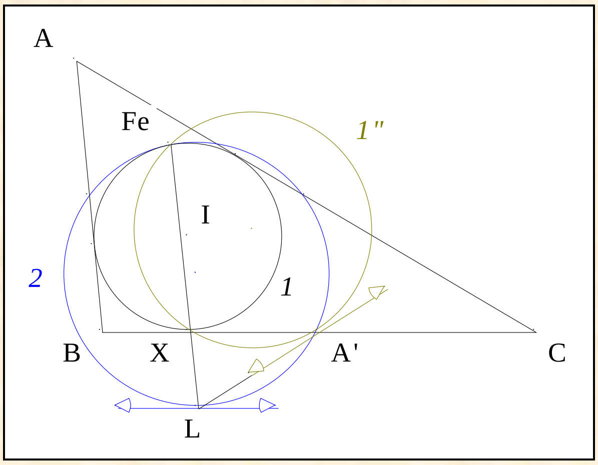
Donné : Fe est sur *1*'.

VISUALISATION



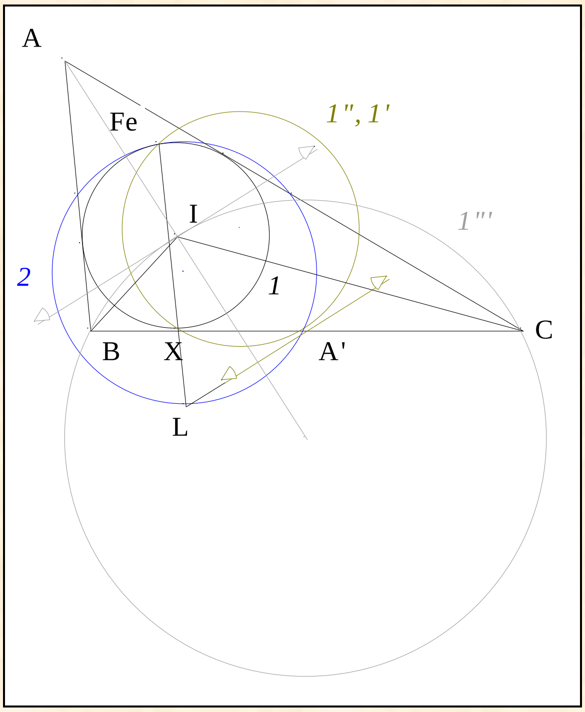
• Notons	A'	le milieu de [BC]
	A"	le pied de la A-hauteur de ABC,
	X	le point de contact de *1* avec (BC),
	2	le cercle d'Euler de ABC,
	L	le milieu de l'arc A'A" ne contenant pas le A-point d'Euler de ABC
et	*Tl*	la tangente à *2* en L.

• **Scolies :**	**(1)**	par définition,	*2* passe par A'
	(2)	d'après **A.** Feuerbach,	*2* passe par Fe
			L, X et Fe sont alignés
	(3)	d'après "La tangente au sommet" (Cf Annexe **1**),	*Tl* // (BXC).



- Le cercle *2*, les points de base A' et Fe, les moniennes naissantes (LA'A') et (LFeX), les parallèles *Tl* et (A'X), conduisent au théorème **2"** de Reim ;
  en conséquence, A', Fe et X sont sur le cercle tangent à (LA') en A'.

- Notons *1"* ce cercle.



- Notons *Ta'* la tangente (LA') à *1"* en A',
  1''' le cercle circonscrit à IBC
  et *Ti* la tangente à *1'''* en I.

- **Scolies :** **(1)** *1"* passe par le milieu A' du côté [BC] de IBC
  (2) *1"* passe par le pied de la I-hauteur de IBC
  (3) (AI) passe par le centre de *1'''*.

- D'après **C.** Calabre, *Ta'* ⊥ (AI) ;
  d'après "Theorem of schamrock" (Cf. Annexe **3**), (AI) ⊥ *Ti* ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, *Ta'* // *Ti* ;
  d'après **D. 2**, *1"* est le cercle d'Euler de IBC ;
  en conséquence, *1*" et *1*' sont confondus.

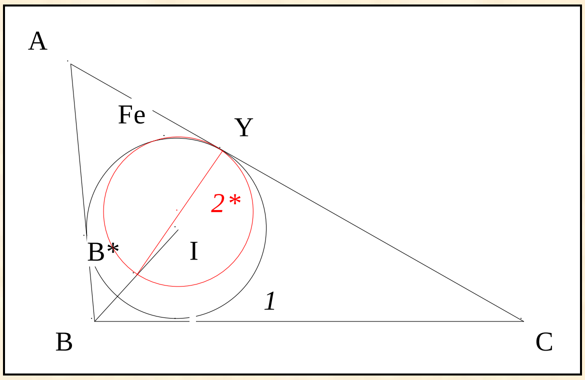
- **Conclusion :** Fe est sur *1*'.

Note historique : en 2004, Khoa Lu Nguyen [24] connu sous le pseudonyme de "Treegoner" a donné une preuve angulaire de ce résultat.
Darij Grinberg [25] a signalé dans un message au sein du groupe Hyacinthos qu'il avait atteint ce résultat à partie d'une généralisation du point de Feuerbach [26] et que l'esquisse d'une preuve possible se trouve dans un autre message Hyacinthos [27].

F. MICHEL GARITTE

VISION

Figure :

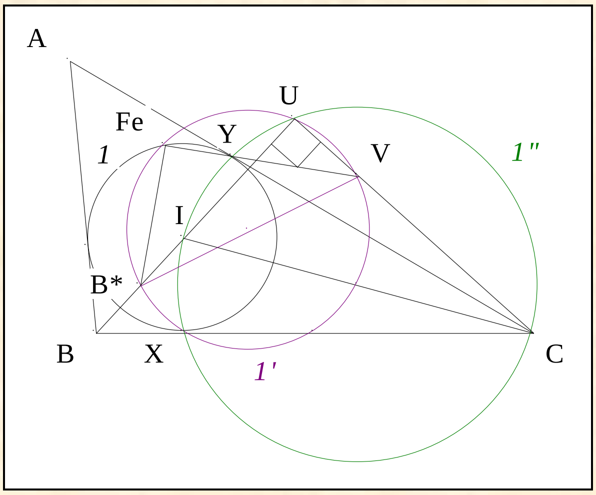


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
Fe le point de Feuerbach,
Y le point de contact de *1* avec (CA),
B* le milieu de [IB]
et *2** le cercle de diamètre [B*Y].

Donné : Fe est sur *2**.

VISUALISATION

[24] Nguyen K. L., F again + Concurrent Circumcircles, Message *Hyacinthos* # 10520 du 23/09/2004
[25] Grinberg D., F again + Concurrent Circumcircles, Message *Hyacinthos* # 10527 du 24/09/2004
[26] Grinberg D., Theorem **3.** 7b, Generalization of the Feuerbach ; http://de.geocities.com/darij_grinberg
[27] Grinberg D., Re: Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # **9725** du 19/04/2004



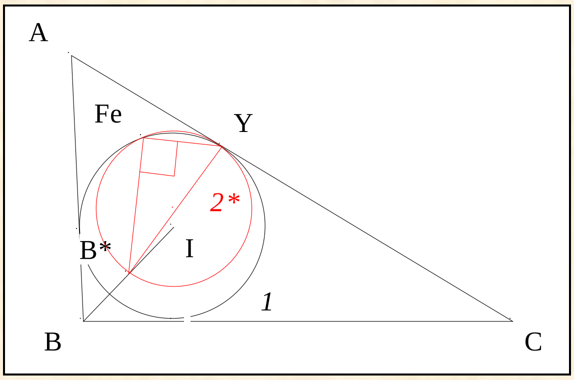
- Notons X le point de contact de *1* avec (BC),
  1' le cercle d'Euler du triangle IBC,
  1" le cercle de diamètre [IC]
  et U le pied de la C-hauteur de IBC.

- **Scolies :** **(1)** d'après "Le cercle d'Euler-Bevan" [28] *1'* passe par U
  (1) d'après **E.** Döttl, *1'* passe par Fe
  (2) d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *1"* passe par X, Y et U

- Notons V le second point d'intersection de (CU) avec *1'*.

- D'après "Le théorème des trois cercles" [29] appliqué au triangle YCV avec *1*, *1'* et *1"*, Fe, Y et V sont alignés.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (B*Fe) ⊥ (FeYV).



- **Conclusion :** Fe est sur *2**.

Scolie : *2** est le "B-cercle de Garitte de ABC".

G. ANTREAS P. HATZIPOLAKIS

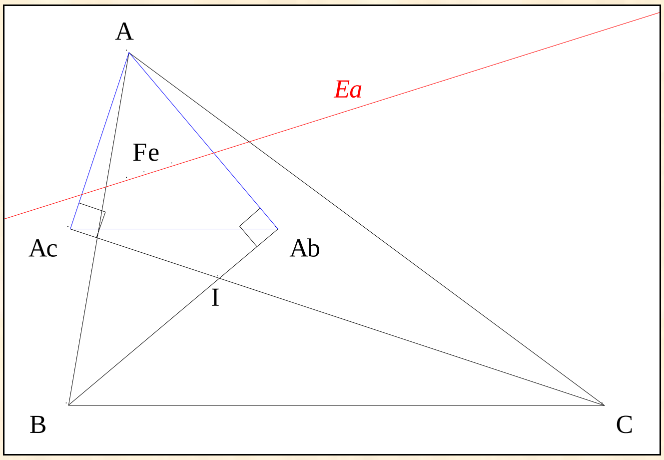
---

28 Ayme J.-L., Les cercles Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. **2**

29 Ayme J.-L., du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**

VISION

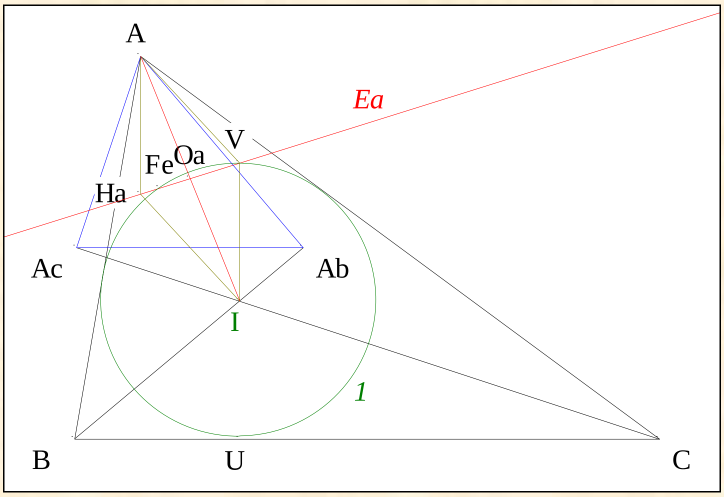
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
Fe le point de Feuerbach de ABC,
Ab, Ac les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BI), (CI),
et *E*a la droite d'Euler du triangle AAcAb.

Donné : *E*a passe par Fe [30].

VISUALISATION



- Notons Ha l'orthocentre de AAcAb,
  Oa le centre du cercle circonscrit au triangle AAbAc,
  1 le cercle inscrit de ABC,
  U le point de contact de *1* avec (BC)
  et V l'antipôle de U relativement à *1*.

- **Scolie :** par définition, Ea = (HaOa).

- D'après "Rayon du cercle inscrit" (Cf. Annexe **4**), AHa = IV ;
  par hypothèses, (AHa) // (IV) ;

---

[30] Hatzipolakis A., F??, Message *Hyacinthos* # **10485** du 18/09/2004.

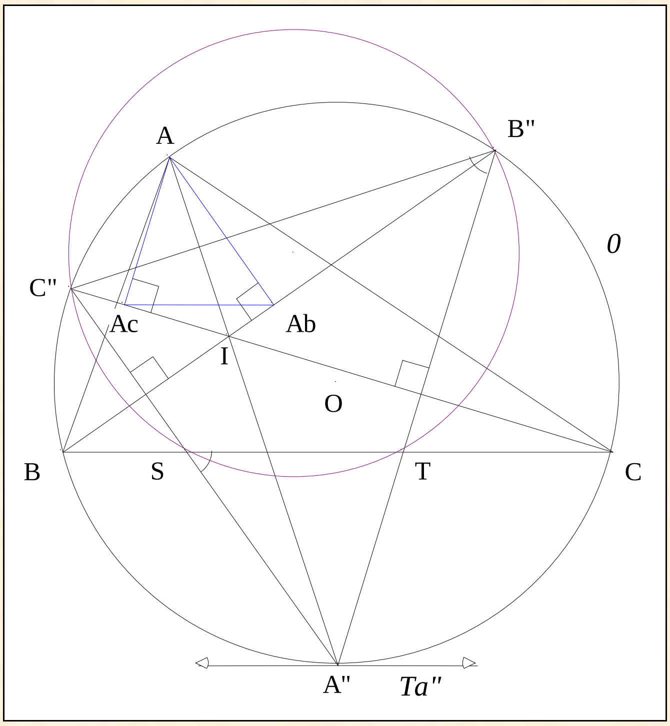
en conséquence, le quadrilatère AHaIV est un parallélogramme;
Oa étant le milieu de [AI], Ha, Oa et V sont alignés.

- D'après "Les cercles de Garitte", (FeOa) ⊥ (FeU) ;
  d'après Feuerbach "Le point de…, scolie **3**", (FeU) ⊥ (FeV) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (FeOa) // (FeV) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (FeOa) = (FeV).

- **Conclusion :** Ea i.e. (HaOa) passe par Fe.

Commentaire : ce beau résultat d'Antreas Hatzipolakis a été démontré synthétiquement à partir d'une généralisation du point de Feuerbach déjà mentionnée et d'une longue chasse angulaire par Darij Grinberg [31] et par Khoa Lu Nguyen [32] qui s'appuie aussi sur l'article de Grinberg.

Scolies : **(1)** deux triangles inversement semblables



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  A"B"C" le triangle I-circumcévien de ABC,
  Ta" la tangente à *0* en A"
  et S, T les seconds points d'intersection resp. de (A"C"), (A"B") avec *0*.

- Nous avons : (AAb) // (A"S) , (AAc) // (A"T) , (AbAc) // (ST) ;
  en conséquence, le triangle AAbAc est homothétiques au triangle A"ST.

- Nous avons : *Ta"* // (TS).

- Le cercle *0*, les points de base B" et C", les moniennes naissantes (A"B"T) et (A"C"S), les parallèles *Ta"* et (TS), consuisent au théorème **1"** de Reim ;
  en conséquence, B", C", T et S sont cocycliques ;
  il s'en suit que le triangle A"ST est inversement semblable au triangle A"B"C".

---

[31] Grinberg D., F??, Antreas' Feuerbach concurrence, Message *Hyacinthos* # **10584** du 02/10/2004

[32] Nguyen K. L., Antreas's Euler lines concurrence revisited, Message *Hyacinthos* # 10913 du 28/11/2004

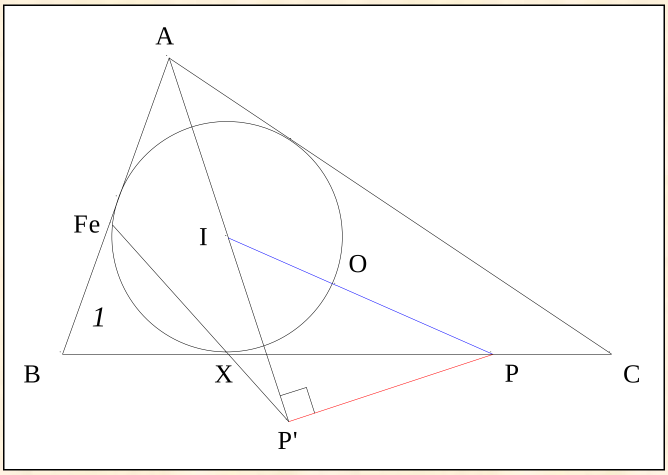
- **Conclusion :** AAbAc est inversement semblable à A"B"C".

  (2) V est le point de de Longchamps de AAbAc.

H. L'AUTEUR

VISION

Figure :



Traits :

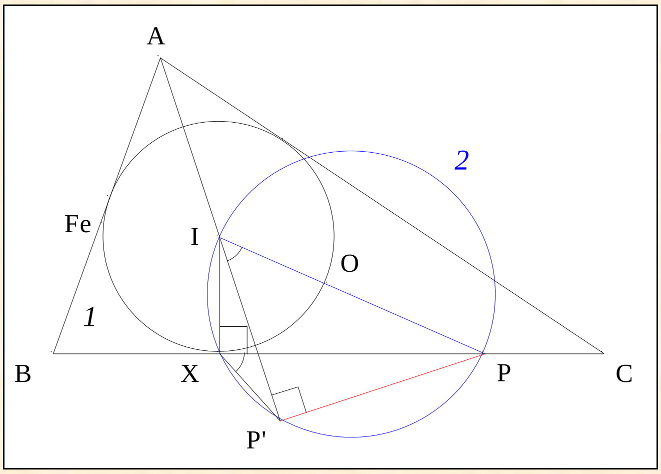
	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit,
	1	le cercle inscrit de ABC
	I	le centre le centre de *1*,
	X	le point de contact de *1* avec (BC),
	P	le point d'intersection de (OI) et (BC),
	P'	le pied de la perpendiculaire à (AI) issue de P
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC.

Donné : Fe, X et P' sont alignés. [33]

---

[33] Ayme J.-L., A little result, Message *Hyacinthos* # **13356** du 22/06/2006

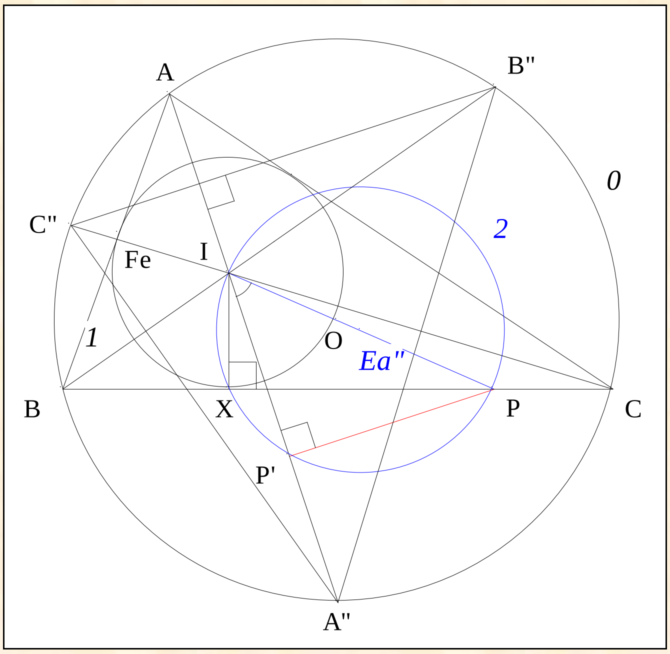
VISUALISATION



- Notons *2* le cercle de diamètre [IP] ; il passe par P' et X.

- Nous travaillons avec les angles de droites.

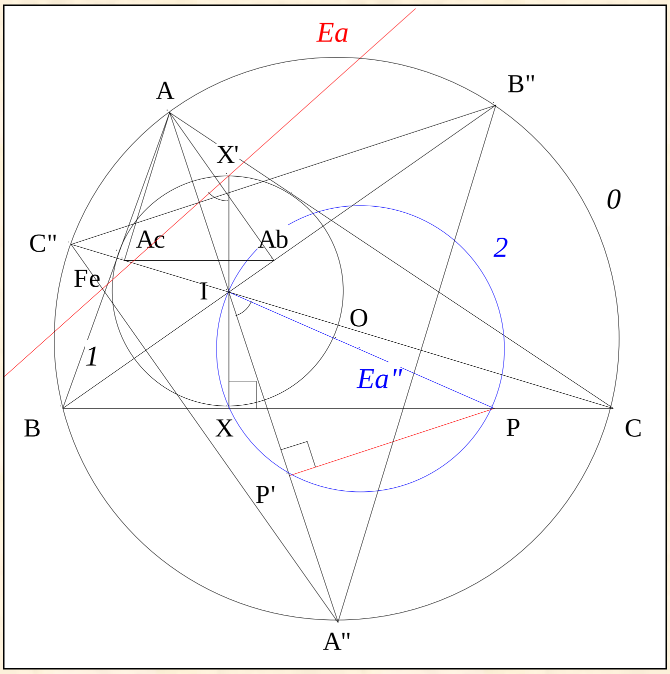
- D'après le théorème de l'angle inscrit, <P'XP = <P'IP.



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  A"B"C" le triangle I-circumcévien de ABC
  et Ea" la droite d'Euler de A"B"C".

- **Scolies :** **(1)** Ea" = (OI)
  (2) (A"IA) est la A-hauteur de A"B"C".

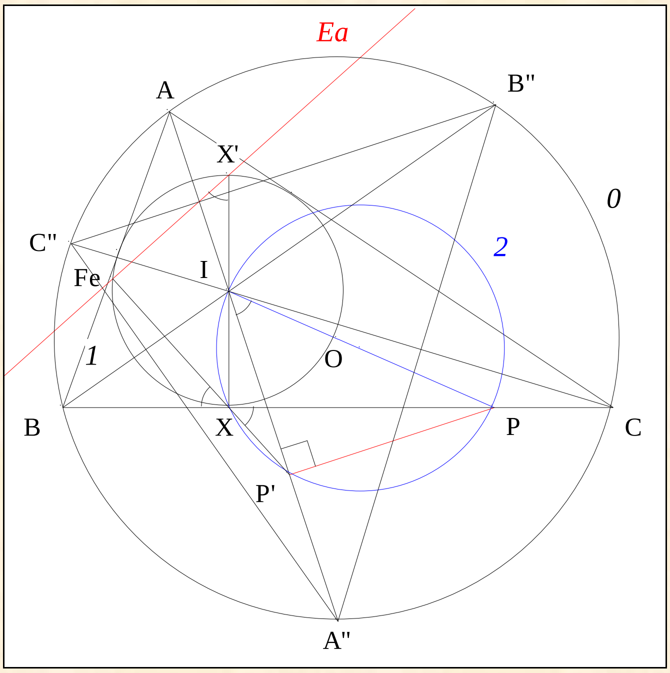
- **Conclusion partielle :** <P'IP est l'angle des droites Ea" et (A"IA).



- Notons Ab, Ac les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp sur (BI), (CI),
  X' l'antipôle de X relativement à *1*
  et Ea la droite d'Euler du triangle AAbAc.

- **Scolies :** **(1)** Ea passe par Fe et X'
  (2) (XIX') est parallèle à la A-hauteur de AAbAc.

- A"B"C" étant inversement semblable à AAbAc,
  l'angle des droites Ea" et (A"IA) est égal à l'angle des droites (XIX') et Ea.

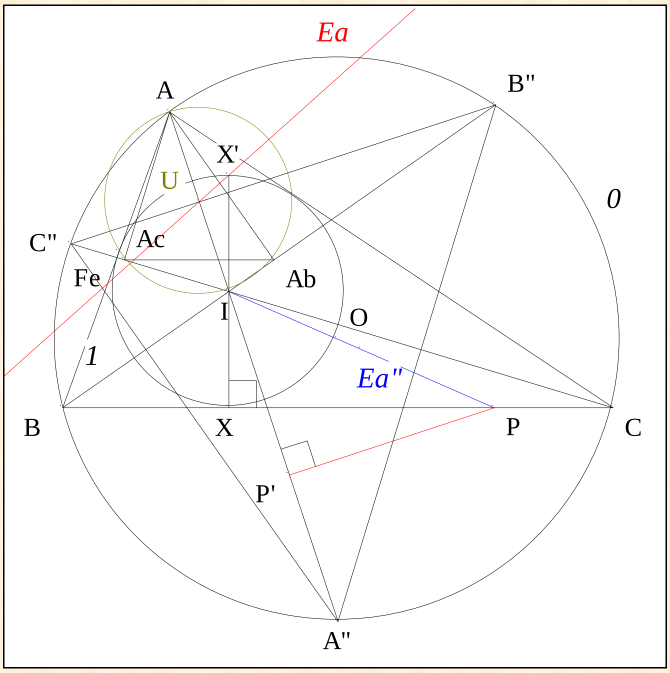


- Nous avons : <P'IP = <XX'Fe ;
  d'après le théorème de la tangente, <XX'Fe = <BXFe ;
  par transitivité de la relation =, <P'XP = <BXFe.

- **Conclusion :** Fe, X et P' sont alignés.

Note historique : l'idée de cette preuve revient à un passionné de Géométrie à savoir Jan Vonk, étudiant de première année en mathématiques à l'université de Gand (Belgique).
Je le remercie pour sa remarquable contribution à cette preuve.
Rappelons qu'il vient de signer un article [34] sur le même sujet avec une approche différente de celle de l'auteur.

Scolie : un point sur Ea



- Notons U le point d'intersection de (AI) et (B"C").
- Nous savons que I est l'orthocentre de A"B"C" ;
  d'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe **5**), U est le milieu de [AI].
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  U est le centre de diamètre [AI] passant par Ab, Ac i.e. U est le centre du cercle circonscrit à AAbAc.
- **Conclusion :** U est sur *E*a.

[34] Vonk J., The Feuerbach Point and Reflections of the Euler Line, *Forum Geometricorum*, Volume **9** (2009) 47–55 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200905.pdf

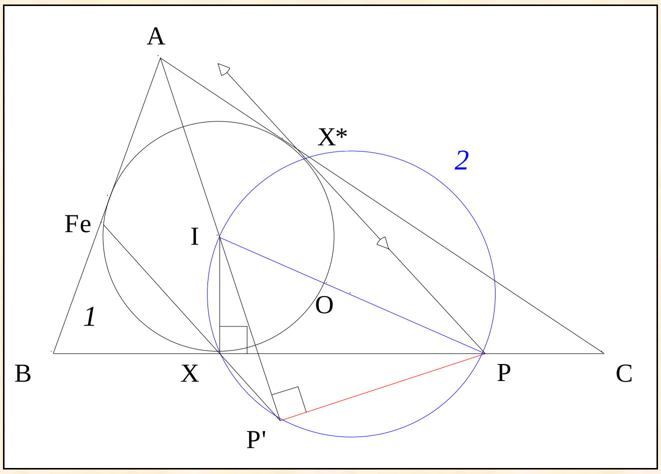
I. LA GRANDE RÉCOLTE

Dans cette neuvième partie,
les mêmes hypothèses et les mêmes notations se retrouvent d'un numéro à l'autre.

1. La tangente en X*

VISION

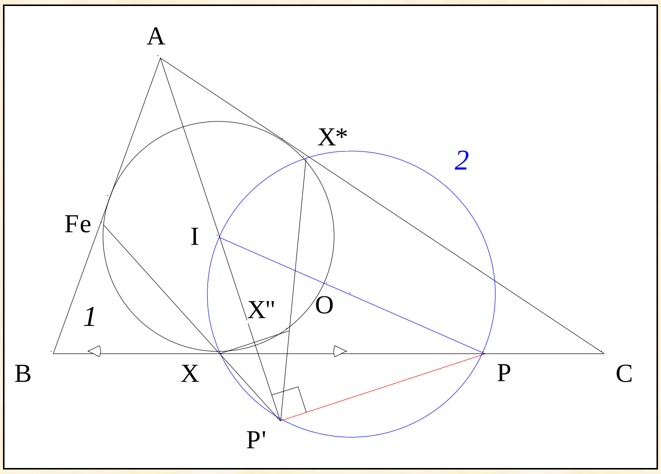
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit,
	1	le cercle inscrit de ABC
	I	le centre le centre de *1*,
	X	le point de contact de *1* avec (BC),
	P	le point d'intersection de (OI) et (BC),
	Fe	le point de Feuerbach de ABC,
	P'	le point d'intersection (AI) et (FeX),
et	X*	le second point d'intersection de *1* et *2*.

Donné : (PX*) est la tangente à *1* en P.

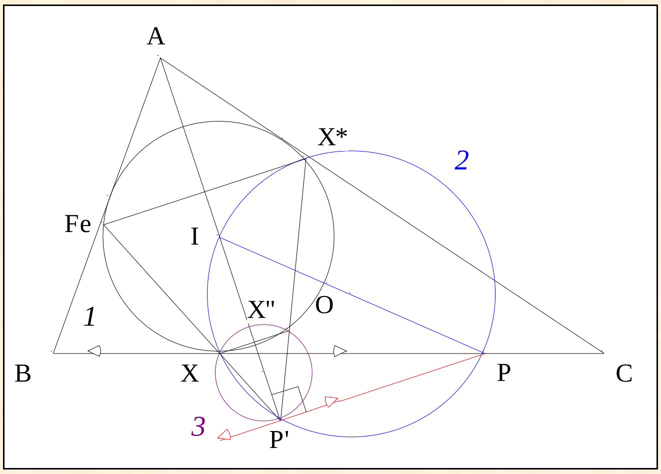
VISUALISATION



- Notons X" le symétrique de X par rapport à (AI).

- **Scolies :** **(1)** X" est sur *1*
  (2) (XX") // (PP').

- Les cercles *1* et *2*, les points de base X et X*, la moniennes (XXP), les parallèles (XX') et (PP'), conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, X", X* et P' sont alignés.

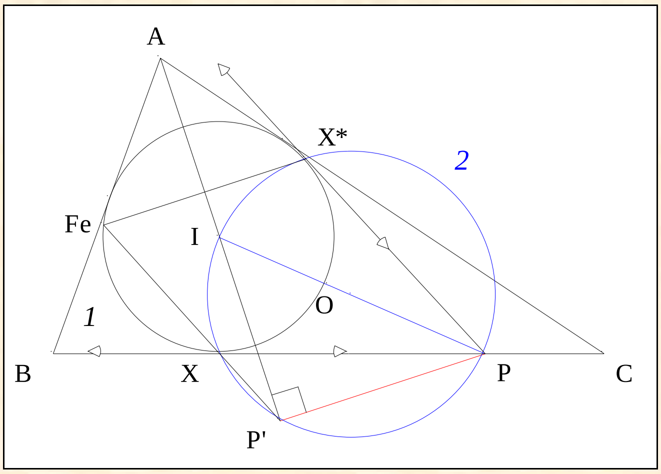


- La P'-hauteur du triangle P'X"X étant aussi médiane, P'X"X est P-isocèle.

- Notons *3* le cercle circonscrit à P'X"X.

- P'X"X étant P-isocèle, (P'P) est la tangente à *3* en P'.

- Les cercles *3* et *1*, les points de base X et X", les moniennes (P'XFe) et (P'X"X*), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (PP') // (FeX*).

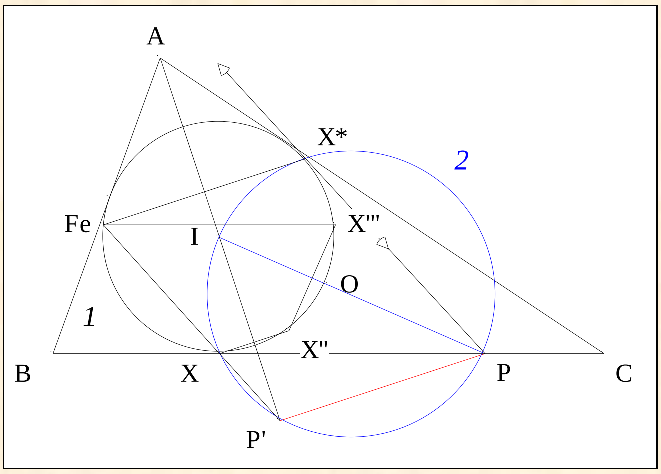


- **Conclusion :** les cercles *2* et *1*, les points de base X et X*, la monienne (P'XFe), les parallèles (P'P) et (FeX*), conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, (PX*) est la tangente à *1* en P.

2. Une parallèle à (BC) passant par Fe

VISION

Figure :

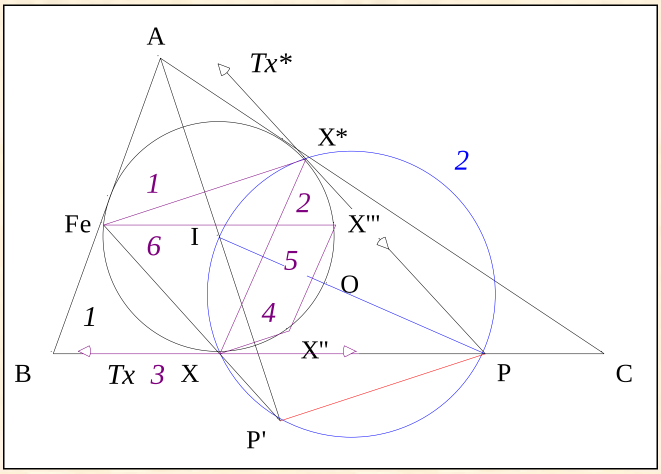


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

X''' le symétrique de X'' par rapport à (OI).

Donné : (FeX''') est parallèle à (BC).

VISUALISATION



- Notons *Tx* la tangente à *1* en X.

- **Scolies :** **(1)** *Tx* = (BC)
  (2) (FeX*) // (XX")
  (3) (XX*) // (X"X"').

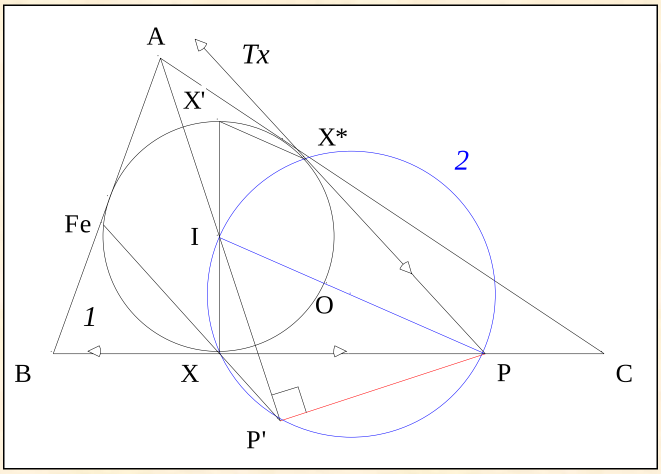
- D'après MacLaurin "Pentagramma mysticum",
  la droite à l'infini est la pascale de l'hexagone dégénéré FeX*X *Tx* X"X"'Fe.

- **Conclusion :** (FeX"') est parallèle à (BC).

3. Une parallèle à (OI)

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
X' l'antipôle de X relativement à *1*.

Donné : (X'X*) est parallèle à (OI).

VISUALISATION

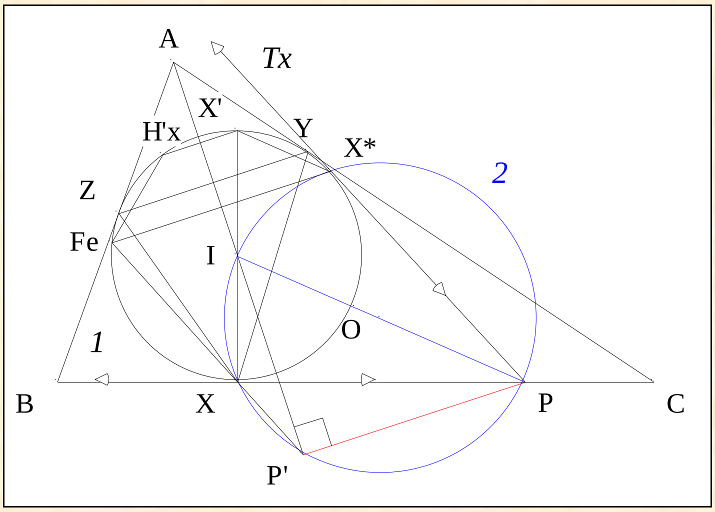
- Les cercles *1* et *2*, les points de base X et X*, les moniennes (X'XI) et (X*X*P), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (X'X*) // (IOP).

- **Conclusion :** (X'X*) est parallèle à (OI).

4. Un joli trapèze isocèle

VISION

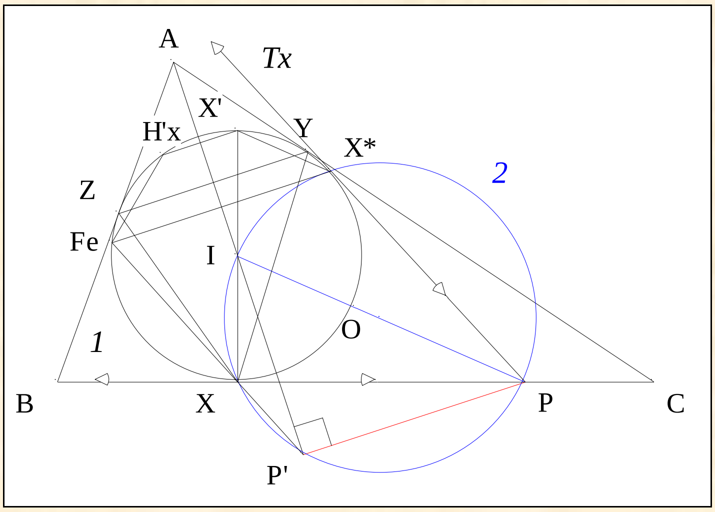
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
XYZ le triangle de contact de ABC
et H'x le symétrique de l'orthocentre de XYZ par rapport à (YZ).

Donné : FeX*X'H'x est un trapèze isocèle.

VISUALISATION



- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 5), H'x est sur *1*.

- Nous savons que (XX') et (XH'x) sont deux X-isogonales de XYZ ;
  en conséquence, (X'H'x) // (FeX*).

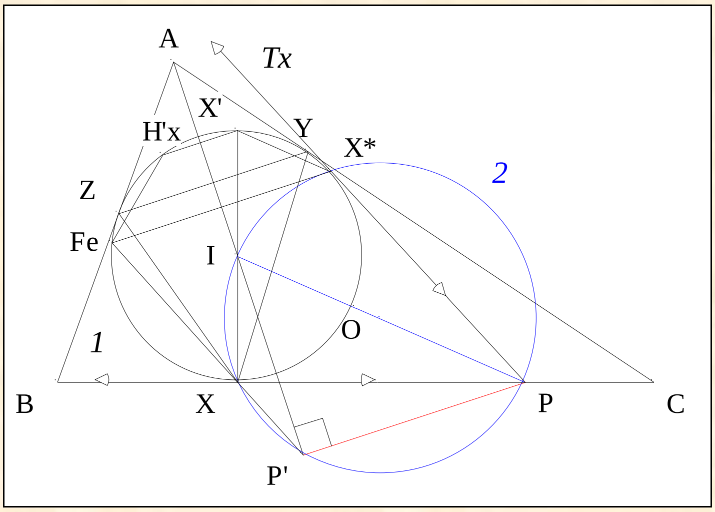
- **Conclusion :** FeX*X'H'x est un trapèze isocèle.

Scolie : (X'H'x), (FeX*) et (YZ) sont parallèles entre elles.

5. Symétrique de (OI) par rapport à (YZ)

VISION

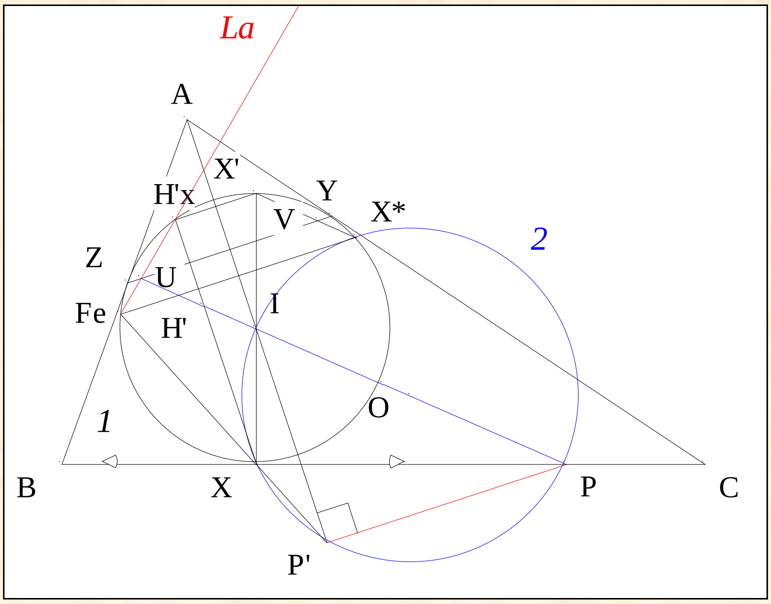
Figure :



Traits : mêmes hypothèses et notations que précédemment.

Donné : (FeH'x) est la symétrique de (OI) par rapport à (YZ).

VISUALISATION



- Notons U, V les points d'intersection de (YZ) resp. avec (FeH'x), (X*X")
  et H' l'orthocentre de XYZ.

- Par définition, (IH') est la droite d'Euler de XYZ.

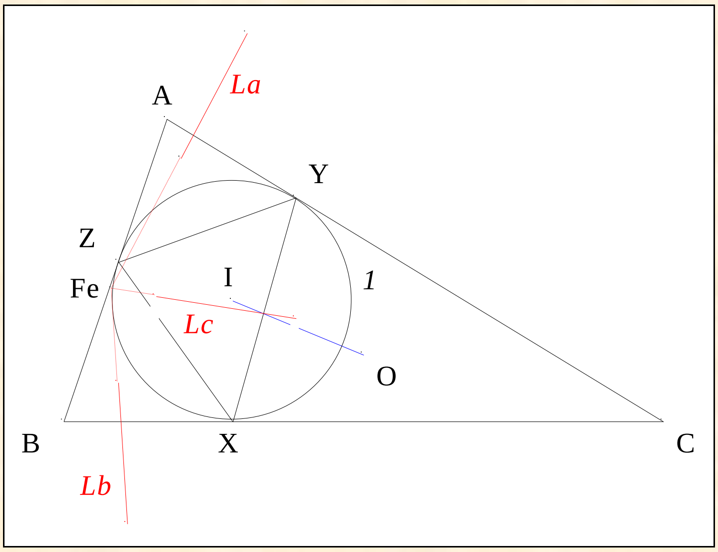
- D'après Gob "T est sur la droite d'Euler" (Cf. Annexe **6**), (IH') passe par O ;
  d'après l'axiome d'incidence **Ia**, I, O, P et H' sont alignés.

- Le quadrilatère H'x UVX' est un trapèze isocèle ;
  en conséquence, (UH') // (X*X') ;
  nous savons que (X*X') // (IOPH') ;
  par transitivité de la relation //, (UH') // (IOPH') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (IOPH') passe par U.

- (UH'x) est la symétrique de (OI) par rapport à (YZ).

- Notons *La* cette symétrique.

- **Conclusion :** (FeH'x) est le symétrique de (OI) par rapport à (YZ) ou encore
  La passe par Fe.



- Notons *Lb*, *Lc* les symétriques de (OI) resp. par rapport à (ZX), (XY).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *Lb* passe par Fe
Lc passe par Fe.

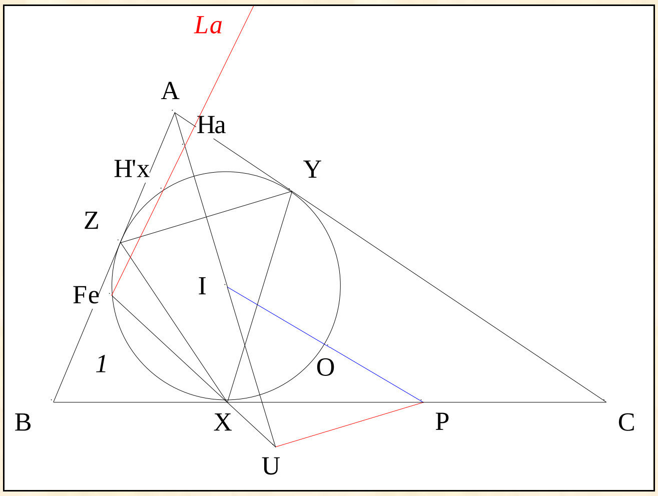
Note historique : ce résultat a été aussi prouvé par Darij Grinberg à partir de son article [35] déjà cité précédemment.

Énoncé traditionnel : les symétriques de la droite joignant les centres des cercles circonscrit et inscrit d'un triangle, par rapport aux côtés du triangle de contact de ce triangle, concourent au point de Feuerbach de ce triangle.

6. Un point remarquable sur *La*

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
Ha le symétrique de I par rapport à (YZ).

Donné : *La* passe par Ha.

VISUALISATION

- D'après "Orthocentre d'un triangle I-annexe" (Cf. Annexe **7**), Ha est l'orthocentre du triangle AZY.

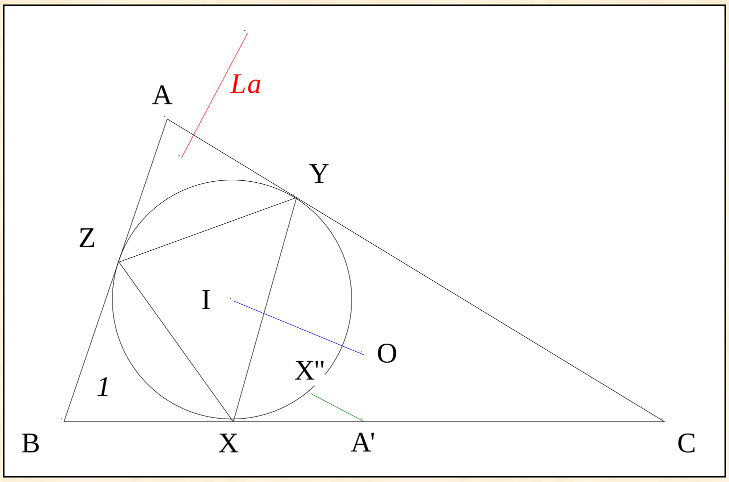
- **Conclusion :** par symétrie, *La* passe par Ha.

[35] Grinberg D., Generalization of the Feuerbach point ; http://de.geocities.com/darij_grinberg/.

7. Une droite perpendiculaire à *La*

VISION

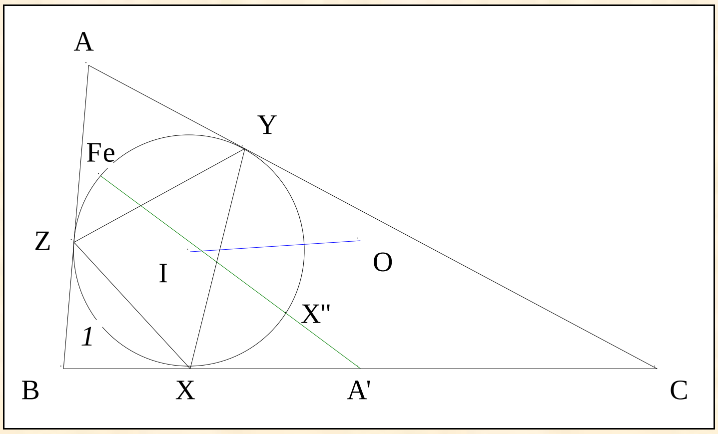
Figure :



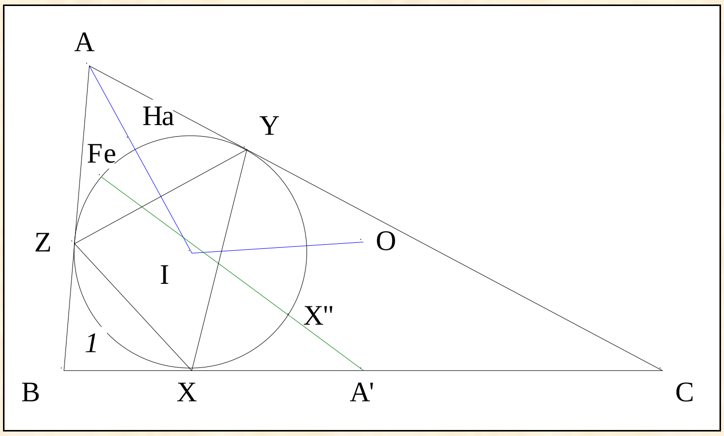
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous rappelons
X" le symétrique de X par rapport à (AI)
et A' le milieu de [BC].

Donné : *La* est perpendiculaire à (A'X").

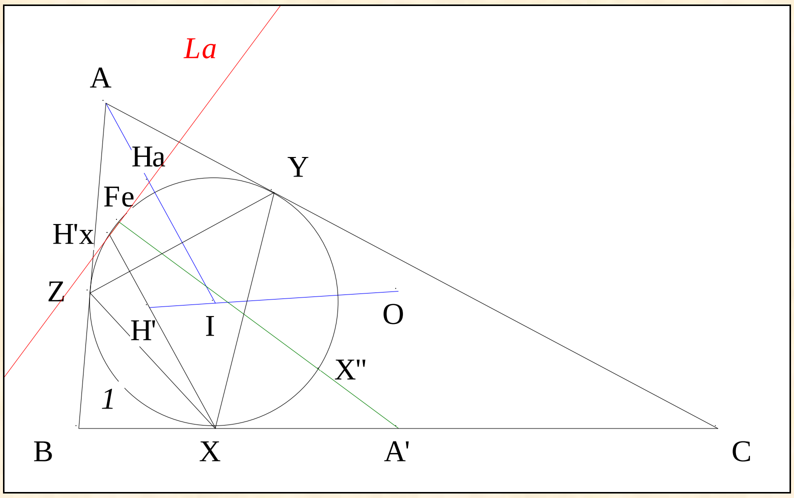
VISUALISATION



- **Scolie :** Fe, X" et A' sont alignés.



- **Scolies :** **(1)** Ha est l'orthocentre du triangle AZY
  (2) A, Ha et I sont alignés.



- Nous avons : (XX") ⊥ (AI) ;
  d'après Euclide "Deux tangentes égales, scolie **3**", (AI) ⊥ (YZ) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires", (XX") // (YZ) ;

  par définition d'une hauteur, (YZ) ⊥ (XH'x) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires", (XX") ⊥ (XH'x) ;
  en conséquence, X" et Hx sont deux points diamétraux de *1*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (FeH'x) ⊥ (FeX") i.e. *La* ⊥ (A'X"A').

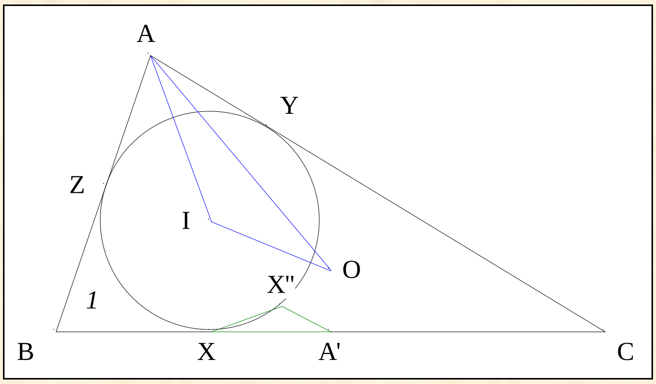
- **Conclusion :** *La* est perpendiculaire à (A'X").

8. Deux triangles inversement semblables [36]

VISION

Figure :

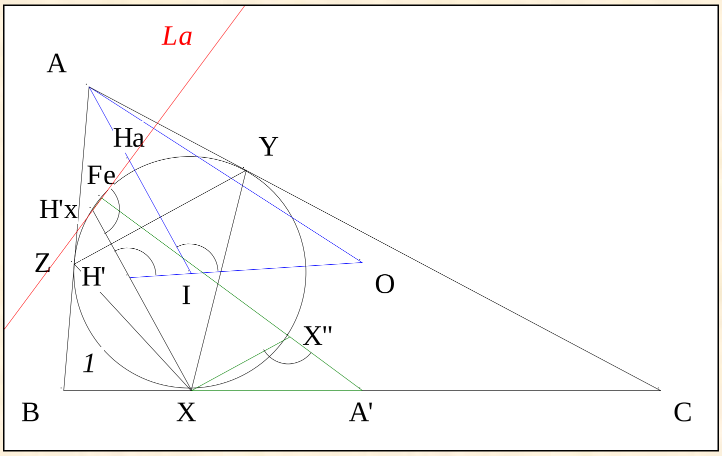
[36] Grinberg D., Circumcircle and incircle, Message *Hyacinthos* # **7779** du 04/09/2003



Traits : mêmes hypothèses et notations que précédemment.

Donné : le triangle A'X"X est inversement semblable au triangle OIA.

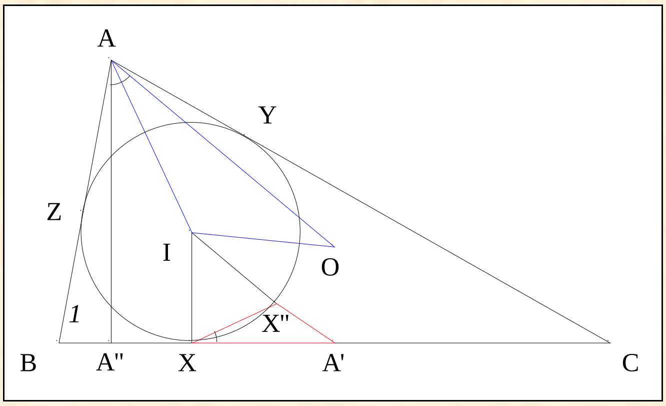
VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** *La* = (H'xFeHa)
  (2) (XX") ⊥ (XH'x)
  (3) *La* est perpendiculaire à (A'X")
  (4) (AI) // (XH'x).

- Une chasse angulaire avec les angles de droites :
  d'après le théorème des angles à côtés perpendiculaires, <XX"A' = <XH'xFe ;
  par symétrie par rapport à (OI), <XH'xFe = <OH'H'x ;
  par le théorème des angles à côtés parallèles, <OH'H'x = <OIA.

- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation =, <XX"A' = <OIA.



- Notons A" le pied de la A-hauteur de ABC.

- Nous savons que (AA") et (AO) sont deux A-isogonales de ABC
 ou encore que (AI) est la bissectrice de <A"AO.

- Par hypothèses, (BC) ⊥ (AA")
 (XX") ⊥ (AI).

- Une chasse angulaire avec les angles de droites :
 nous avons : <IAO = <A"AI ;
 par le théorème des angles à côtés perpendiculaires, <A"AI = <A'XX".

- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation =, <IAO = <A'XX".

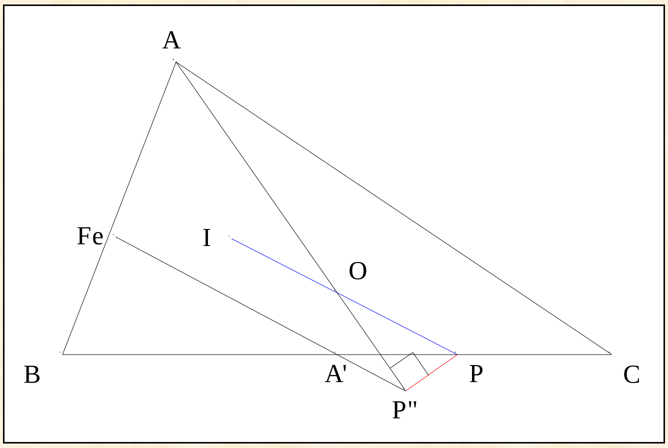
- Les triangles A'X'X et OIA ayant trois angles égaux, sont semblables.

- **Conclusion :** ayant mis en œuvre une symétrie axiale,
 le triangle A'X"X est inversement semblable au triangle OIA.

9. Trois points alignés [37]

VISION

Figure :



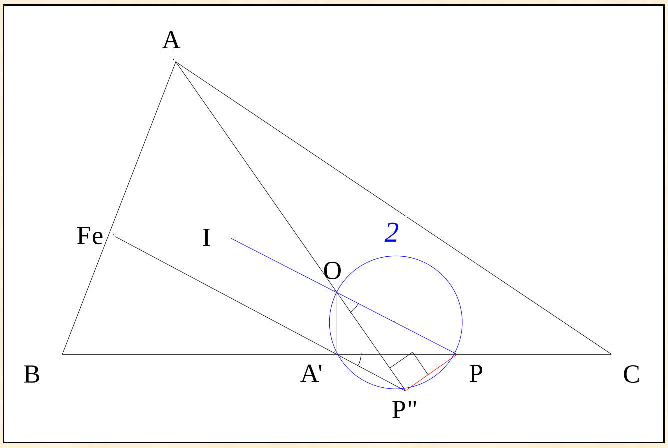
Traits : ABC un triangle,

[37] Ayme J.-L., A new perspector ?, Message *Hyacinthos* # **16676** du 21/08/2008

O le centre du cercle circonscrit,
A' le milieu de [BC],
I le centre le centre de *1*,
P le point d'intersection de (OI) et (BC),
P" le pied de la perpendiculaire à (AO) issue de P
et Fe le point de Feuerbach de ABC.

Donné : Fe, A' et P" sont alignés. [38]

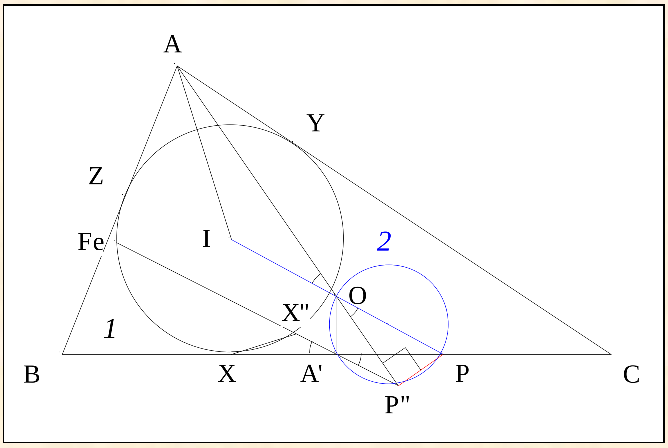
VISUALISATION



- Notons *3* le cercle de diamètre [OP] ; il passe par P" et A'.

- Nous travaillons avec les angles de droites.

- D'après le théorème de l'angle inscrit, <P"A'P = <P"OP ;
  d'après le théorème des angles opposés par le sommet, <P"OP = <AOI ;
  par transitivité de la relation =, <P"A'P = <AOI.



- D'après IX. 8. Deux triangles inversement semblables, <AOI = <X"A'X ;
  A', X" et Fe étant alignés, <X"A'X = <FeA'X
  par transitivité de la relation =, <P"A'P = <FeA'X.

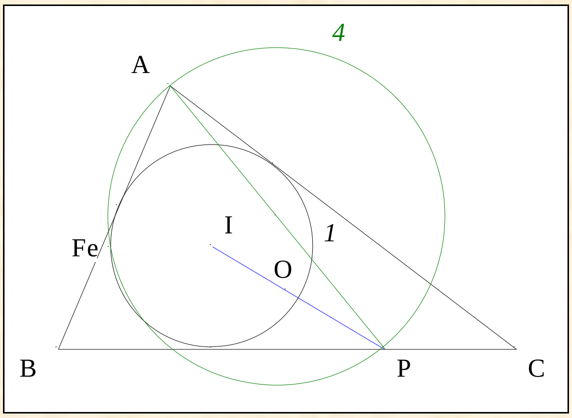
- **Conclusion :** Fe, A' et P" sont alignés ou encore Fe, X", A' et P" sont alignés.

[38] Ayme J.-L., A little result, Message *Hyacinthos* # **13356** et *Mathlinks* du 22/06/2006

10. Un cercle passant par Fe [39]

VISION

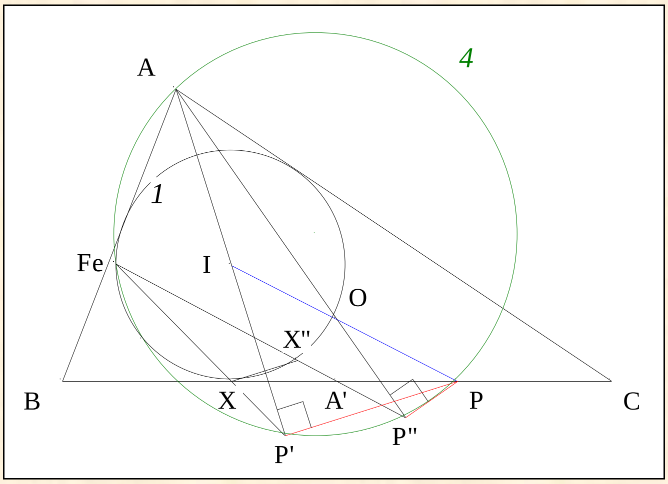
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
4 le cercle de diamètre [AP].

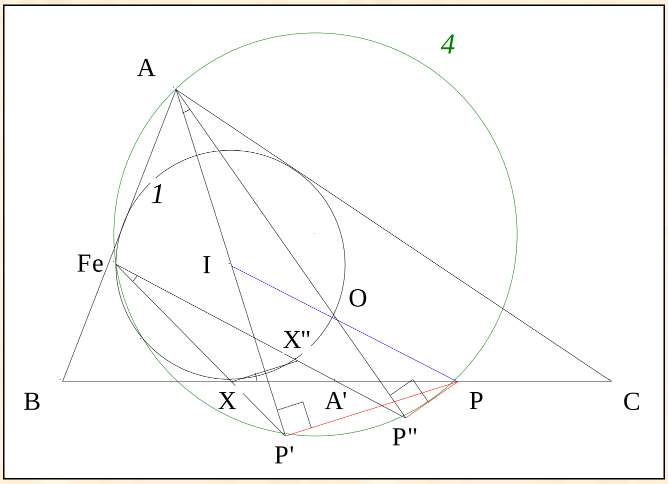
Donné : *4* passe par Fe.

VISUALISATION



- **Scolie :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *4* passe par P' et P".

[39] Bui Q. T., A little result, Message *Hyacinthos* du 23/06/2006



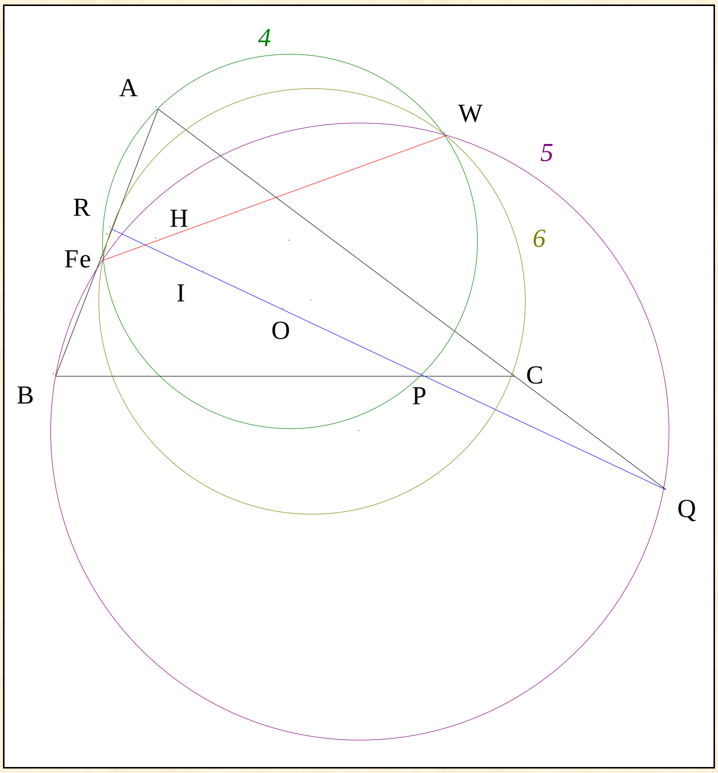
- Nous travaillons avec les angles de droites.

- D'après **I. 8.** Deux triangles inversement semblables, <IAO = <A'X X" ;
  d'après le théorème de la tangente, <A'XX" = <XFeX" ;
  par transitivité se la relation =, <IAO = <XFeX" ;
  par alignement des points, <P'AP" = <P'FeP".

- **Conclusion :** *4* passe par Fe.

Note historique : ce résultat de Quang Tuan Bui a été trouvé par ordinateur.

Scolies : **(1)** vision triangulaire



- Notons P, Q, R les points d'intersection de (OI) resp. avec (BC), (CA), (AB),
  4, 5, 6 les cercles de diamètre resp. [AP], [BQ], [CR]
  et H l'orthocentre de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *5* et *6* passent par Fe.

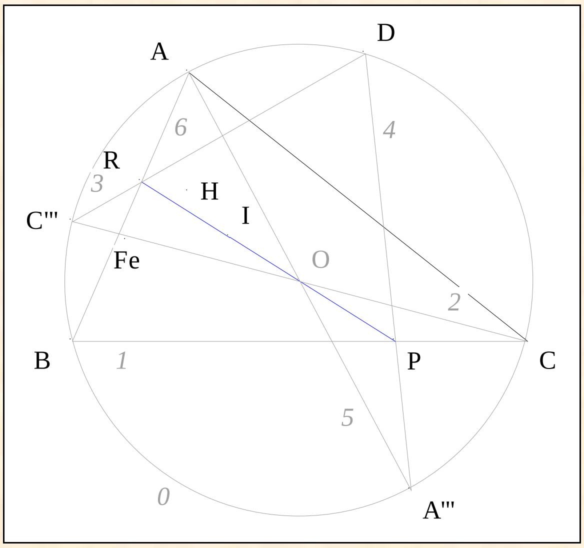
- D'après Bodenmiller "Trois céviennes diamétrales" (Cf. Annexe **9**), *4*, *5* et *6* sont coaxiaux.

- Notons W le second point de concours.

- **Conclusion :** d'après "Deux céviennes diamétrales" (Cf. Annexe **10**), (FeW) passe par H.

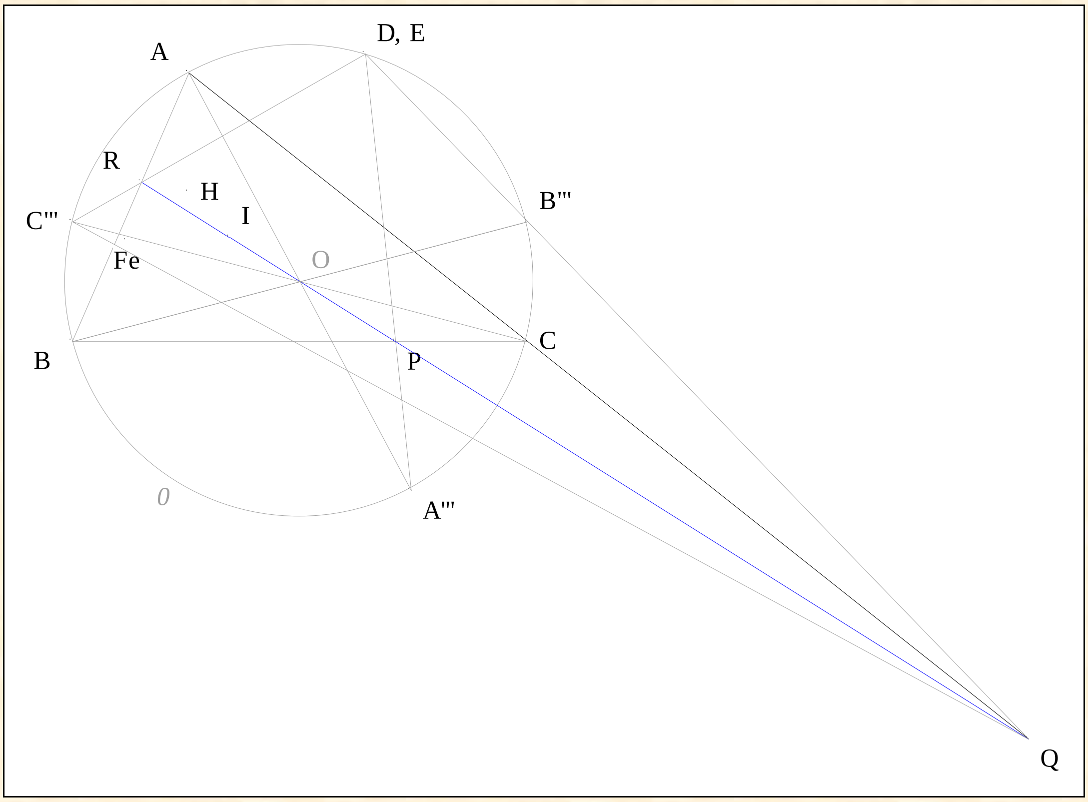
  (2) W est répertorié sous X_{108} chez ETC.

  (3) Le cercle circonscrit à ABC passe par X_{108}



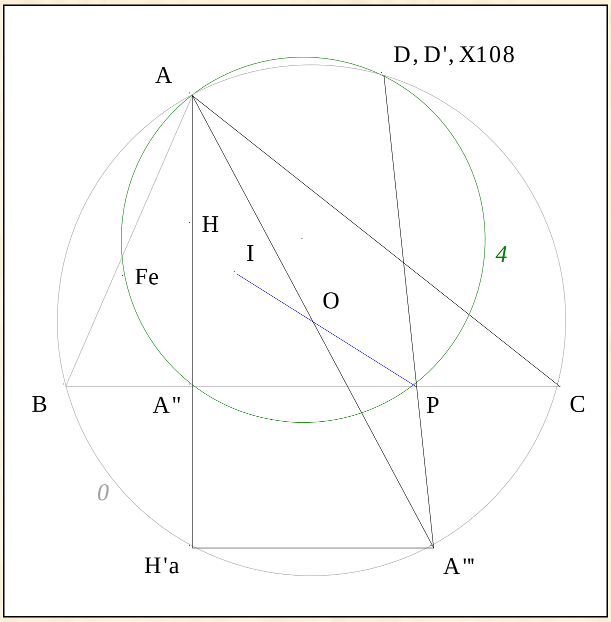
- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  A''', B''', C''' les seconds points d'intersection de (AO), (BO), (CO) avec *0*,
  et D, E les points d'intersection resp. de (A'''P) et (C'''R), de (B'''Q) et (A'''P).

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **11**),
  (POR) étant la pascale de l'hexagone BCC'''DA'''AB, D est sur *0*.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que E est sur *0* ;
  en conséquence, D et E sont confondus.

- **Conclusion partielle :** (A"P), (B"P) et (C"P) concourent en D sur *0*.



- Notons H'a le second point d'intersection de (AA") avec *0*
  et D' le second point d'intersection de *0* et *1*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe **5**), (A"P) // (H'aA''').

- Les cercles *0* et *4*, le point de base A, la monienne (H'aAA"), les parallèles (A"P) et (H'aA'''),
  conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, A''', D' et P sont alignés ;

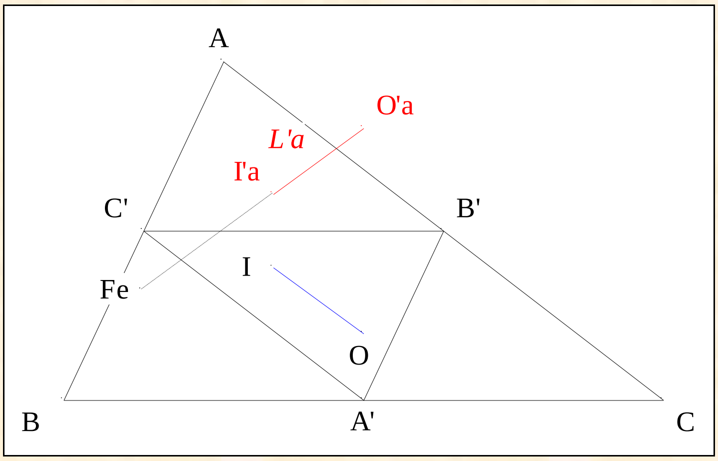
il s'en suit que D' et D sont confondus.

- **Conclusion :** (A'''P), (B'''P) et (C'''P) concourant en D sur *0*,
  0, *1*, *2* et *3* sont concourant en D i.e. en X_{108}.

11. Symétrique de (OI) par rapport aux côtés du triangle médian de ABC

VISION

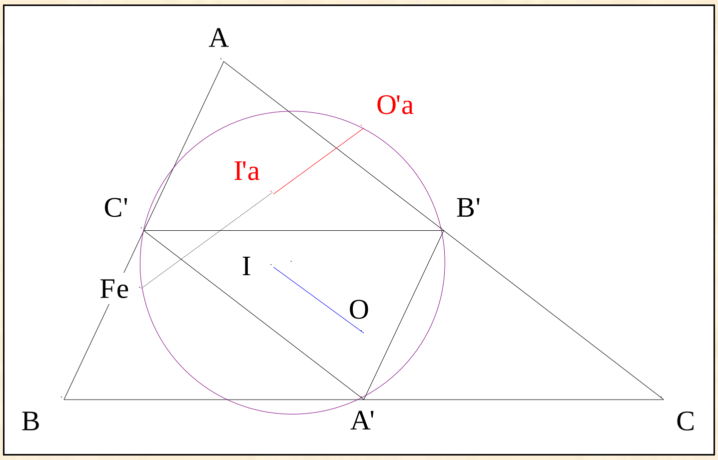
Figure :



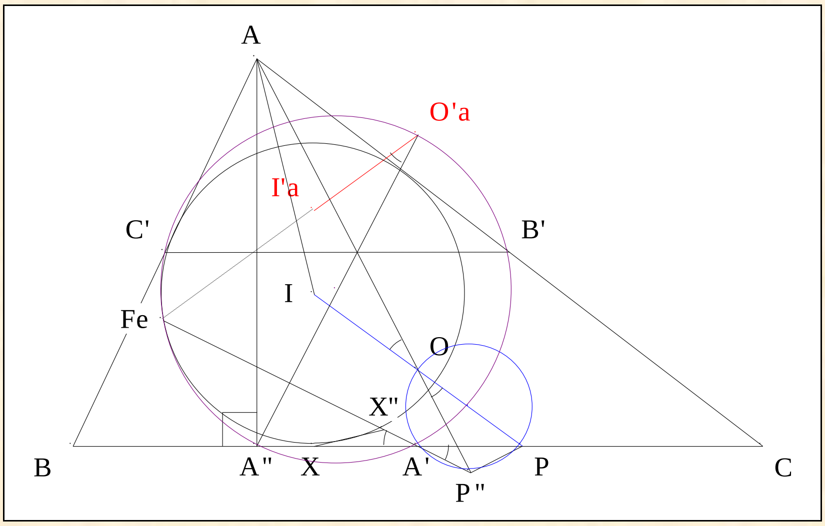
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A'B'C' le triangle médian de ABC,
O'a, I'a les symétriques resp. de O, I par rapport à (B'C')
et *L'a* la droite (O'aI'a).

Donné : *L'a* passe par Fe.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** O est l'orthocentre de A'B'C'
  (2) le cercle circonscrit à A'B'C' est le cercle d'Euler de ABC
  (3) d'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf Annexe **5**), O'a est sur le cercle d'Euler de ABC
  (4) d'après **A.** Feuerbach, le cercle d'Euler de ABC passe par Fe.



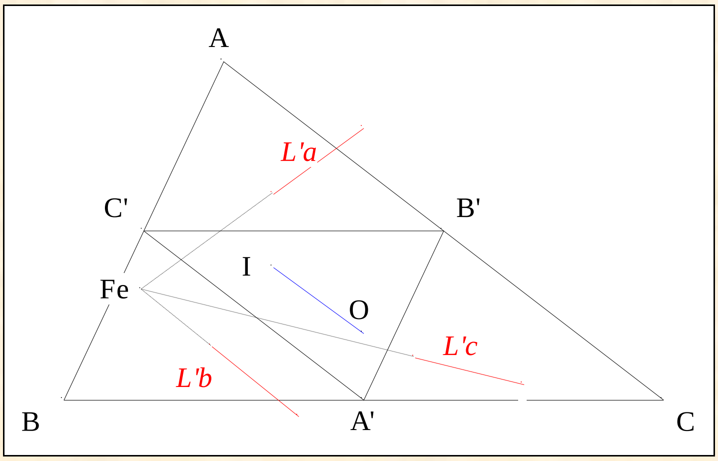
- Nous travaillons avec les angles de droites.

- Une chasse angulaire :

d'après **I. 9.** Trois points alignés	<FeA'X = <P"A'P ;
d'après le théorème de l'angle inscrit,	<P"A'P = <P"OP ;
d'après le théorème des angles opposés par le sommet,	<P"OP = <AOI ;
par symétrie d'axe (B'C'),	<AOI = <A"O'aI'a ;
par transitivité de la relation =,	<FeA'X = <A"O'aI'a ;
Fe, A", A' et O'a étant sur le cercle d'Euler de ABC,	(O'aI'a) passe par Fe.

- **Conclusion :** (O'aI'a) est le symétrique de (OI) par rapport à (B'C') ou encore *L'a* passe par Fe.

Scolie : deux autres droites passant par Fe



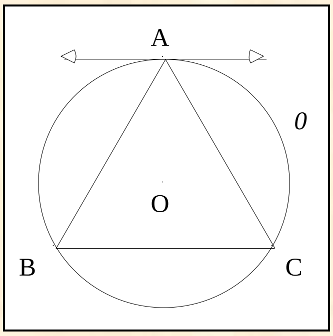
- Notons *L'b*, *L'c* les symétriques de (OI) resp. par rapport à (C'A'), (A'B').

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *L'b* passe par Fe
  L'c passe par Fe.

Énoncé traditionnel : les symétriques de la droite joignant les centres des cercles circonscrit et inscrit d'un triangle, par rapport aux côtés du triangle médian de ce triangle, concourent au point de Feuerbach de ce triangle.

J. ANNEXE

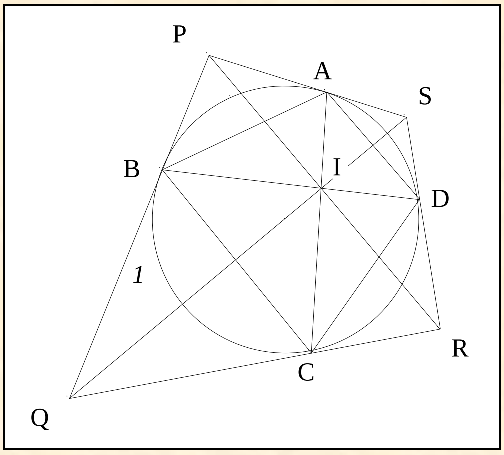
1. La tangente au sommet



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et *Ta* la tangente à *0* en A.

Donné : ABC est isocèle en A *si, et seulement si,* *Ta* est parallèle à la base (BC).

2. Le théorème de Newton [40]

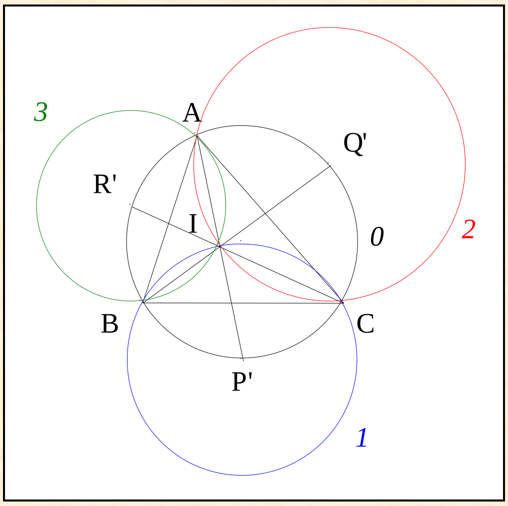


Traits : *1* un cercle,
ABCD un quadrilatère inscrit dans *1*
et PQRS le quadrilatère tangentiel de ABCD.

Donné : les diagonales [PR], [SQ], [AC] et [BD] sont concourantes.

[40] Newton I., *Principes* (1686) corollaire **II** du lemme **XXIV** ; il est aussi appelé théorème faible de Brianchon

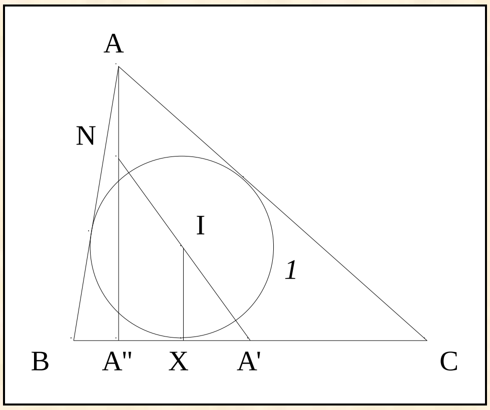
3. Theorem of schamrock



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	I	le centre de ABC,
	P', Q', R'	le points d'intersection resp. de(IA), (IB), (IC) avec *0*
et	*1*, *2*, *3*	les cercles de centres resp. P', Q', R' passant resp. par B et C, C et A, A et B.

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants en I.

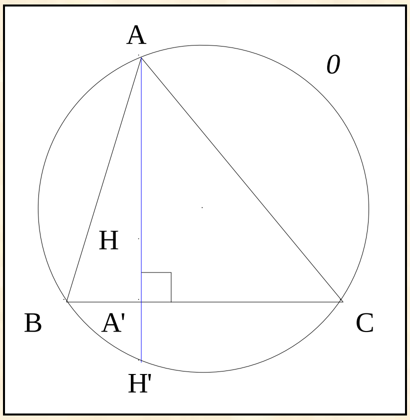
4. Rayon du cercle inscrit



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*,
	X	le point de contact de *1* avec (BC),
	A'	le milieu de [BC],
	A"	le pied de la A-hauteur de ABC
et	N	le point d'intersection de (A'I) avec (AA").

Donné : AN = IX.

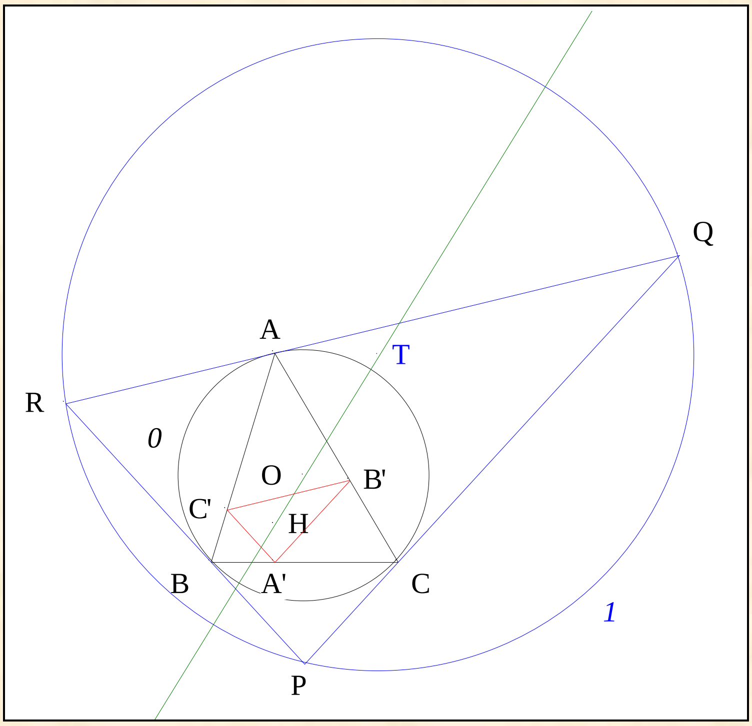
5. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté [41]



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre du triangle,
A' le pied de la hauteur de ABC en A,
0 le cercle circonscrit à ABC
et H' le pied de la hauteur de ABC en A sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

6. Centre du cercle circonscrit du triangle tangentiel [42]



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
O le centre de *0*,
H l'orthocentre de ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
PQR le triangle tangentiel de ABC

---

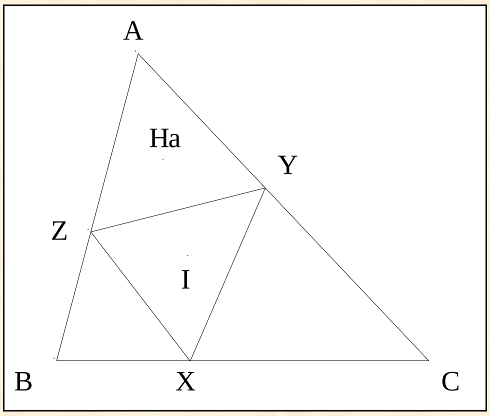
[41] Carnot, n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101

[42] Gob M. A., proposition **2**, Sur la droite et le cercle d'Euler, *Notes de Géométrie Récentes*, supplément de *Mathesis* **9** (1889)

	1	le cercle circonscrit à PQR
et	T	le centre de *1*.

Donné : T est sur la droite d'Euler de ABC.

7. Orthocentre d'un triangle I-annexe [43]



Traits :		ABC	un triangle,
		I	le centre de ABC,
		XYZ	le triangle de contact de ABC
	et	Ha	le symétrique de I par rapport à (YZ).

Donné : Ha est l'orthocentre du triangle AYZ.

Énoncé traditionnel : les symétriques du centre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle de contact, sont les orthocentres des triangles annexes du triangle de contact.

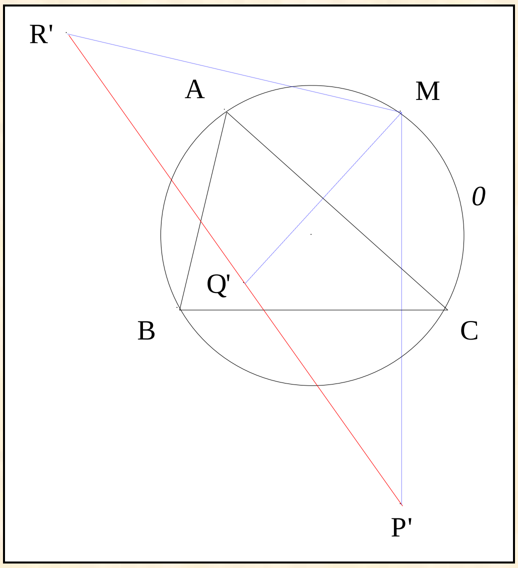
Scolies :

(1) AYZ est le triangle I-annexe de ABC.

(2) Lorsque ABC est A-rectangle, Ha se confond avec A.

[43] Emelyanov L. A., Emelyanova T. L., Three mysterious points of triangle.

8. La droite et l'antipoint de Steiner [44]



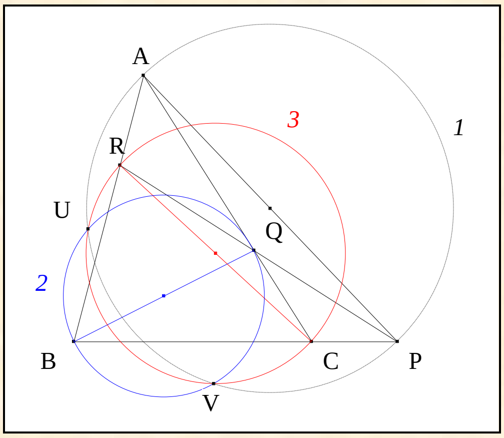
Traits : ABC un triangle acutangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point,
et P', Q', R' les symétriques de M resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : M est sur *1* *si, et seulement si,* P', Q' et R' sont alignés.

Scolies : **(1)** (P'Q'R') est "la droite de Steiner de pôle M relativement à ABC".

(2) M est "l'antipoint de Steiner de (P'Q'R') relativement à ABC.

9. Trois céviennes diamétrales [45]

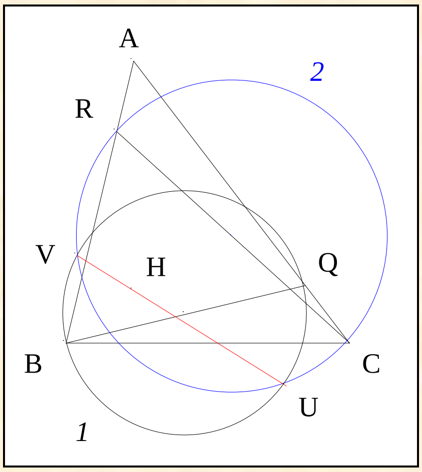


Traits : ABC un triangle,
P, Q, R trois points resp. de (AB), (BC), (CA),
1, 2, 3 les cercles de diamètre resp. [AP], [BQ], [CR]
et U, V les points d'intersection de *2* et *3*.

[44] Steiner J.
[45] Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Cologne (1830) 138

Donné :	(PQR) est une ménélienne de ABC	*si, et seulement si,*	*1* passe par U et V.

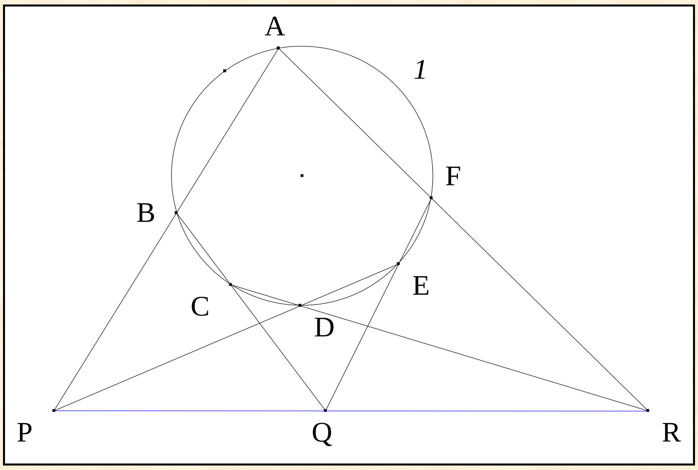
10. Deux céviennes diamétrales



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
Q un point de (CA),
R un point de (AB),
2, 3 les cercles de diamètre resp. [BQ], [CR]
et U, V les points d'intersection de *2* et *3*.

Donné : U, V et H sont alignés.

11. Hexagramma mysticum [46]



Traits : *1* un cercle,
ABCDEF un hexagone tels que les sommets A, B, C, D, E soient sur *1*,
et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

---

[46] Pascal B. (1640)