THE NEUBERG – MINEUR LINE

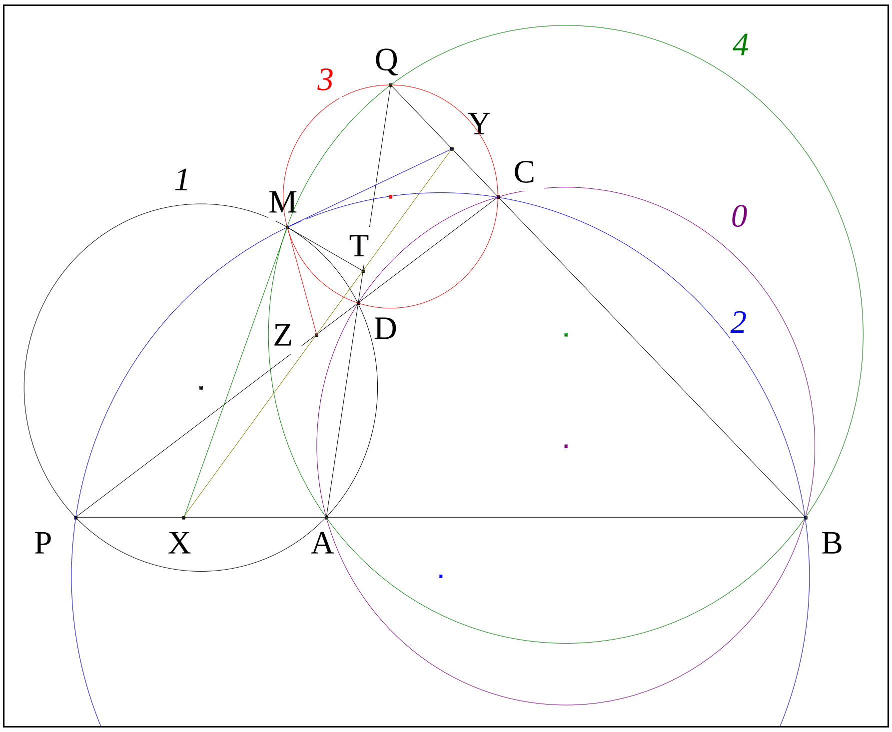
REVISITED

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve originale et purement synthétique d'un résultat d'Adolphe Mineur datant de 1931 suivie d'une courte note historique.
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

VISION

Figure :

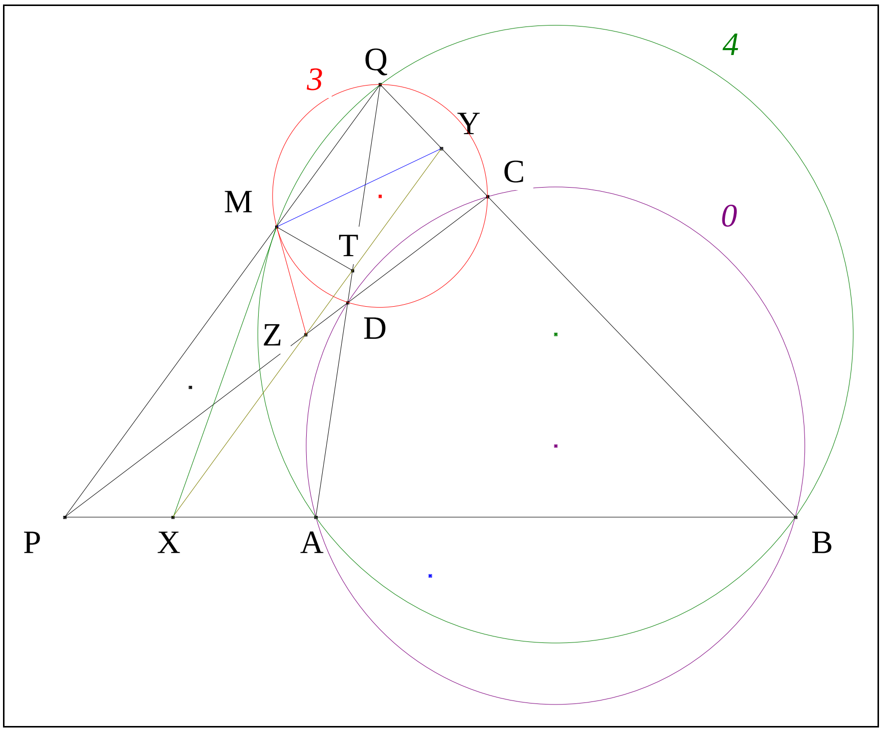


Traits :

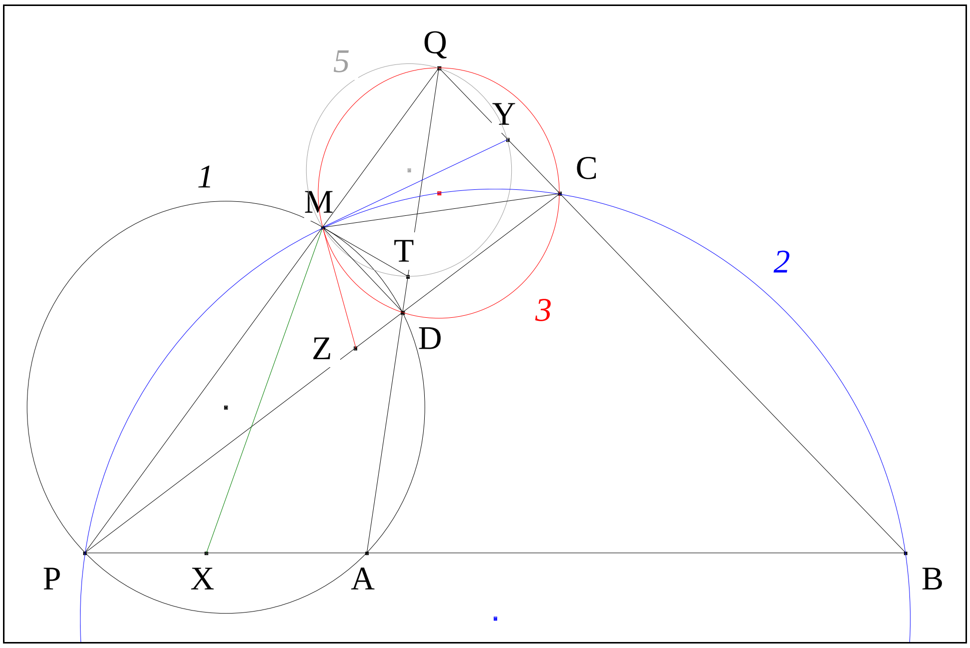
	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P, Q	les points d'intersection resp. de (AB) et (CD), de (BC) et (DA),
	1, *2*, *3*, *4*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC, QDA, QAB,
	M	le point de Miquel de ABCD
et	X, Y, Z, T,	les points d'intersection des tangentes à *1*, *2*, *3*, *4* en M resp. avec (AB), (BC), (CD), (DA).

Donné : X, Y, Z et T sont alignés[1].

VISUALISATION



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à *0*, *3* et *4*, P, M et Q sont alignés.



- **Scolie :** les angles seront mesurés à Π près.

- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe 2)

---

1 Thébault V., Mineur A., Sur une propriété du quadrilatère, *Mathesis* 45 (1931) 384-386.

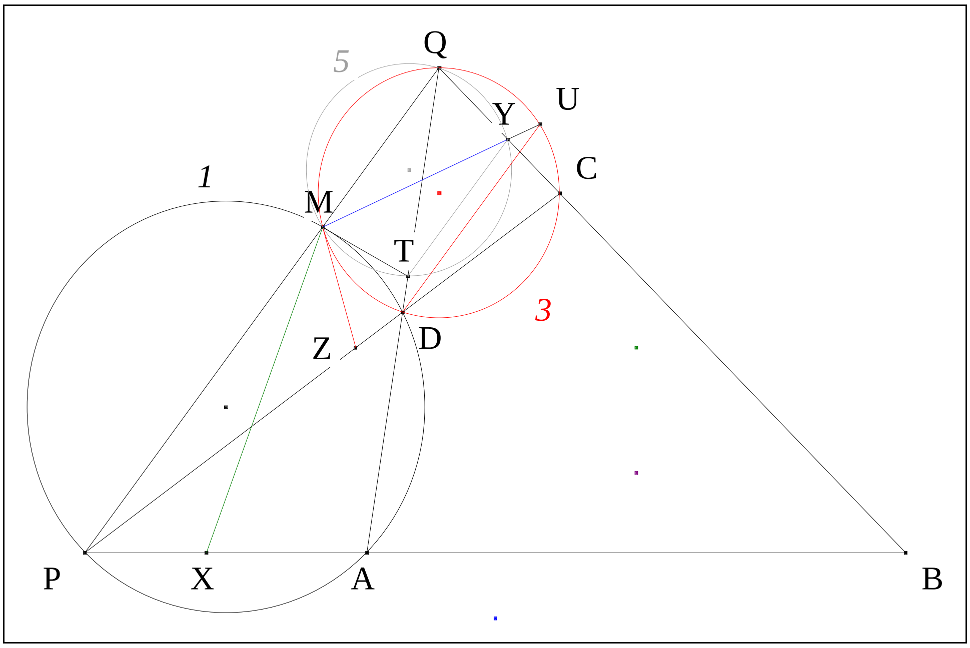
appliqué à *1* et *2*, <TMY = <DMC.

- D'après le théorème de l'angle inscrit appliqué à *3*, <DMC = <DQC
  ou encore <DQC = <TQY.

- Par transitivité de la relation =, <TMY = <TQY.

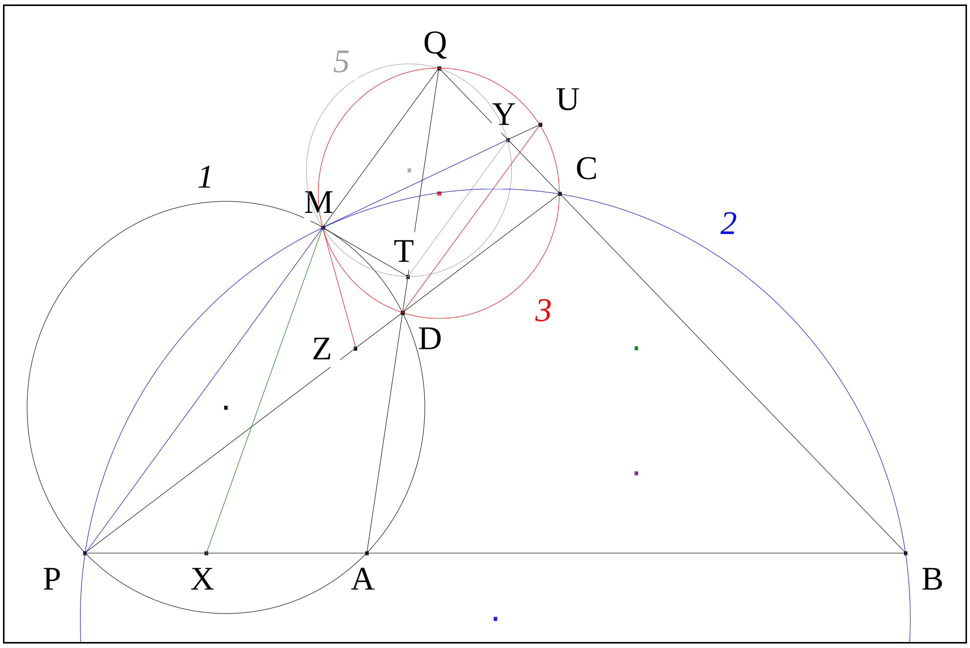
- **Conclusion partielle :** d'après le théorème de l'angle inscrit, Q, M, T et Y sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.



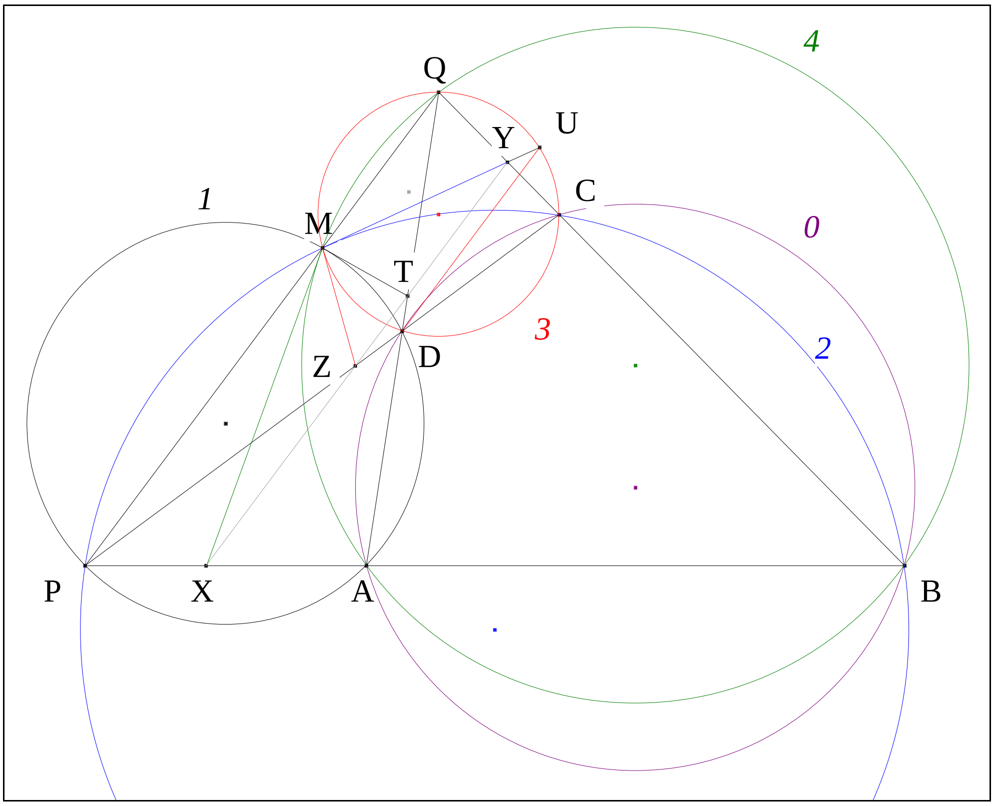
- Notons U le second point d'intersection de (MY) avec *3*.

- Les cercles *5* et *3*, les points de base M et Q, les moniennes (YMU) et (TQD), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (YT) // (UD).



- Les cercles *3* et *2*, les points de base M et C, les moniennes (UMM) et (DCP), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (UD) // (MP).

- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation //, (YT) // (MPQ).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** (TZ) // (MPQ)
  (2) (ZX) // (MPQ).

- D'après le postulat d'Euclide, (YT), (TZ) et (ZX) sont confondues.

- **Conclusion :** X, Y, Z et T sont alignés.

Scolie : (XYZT) est "la droite de Neuberg-Mineur du quadrilatère cyclique ABCD".

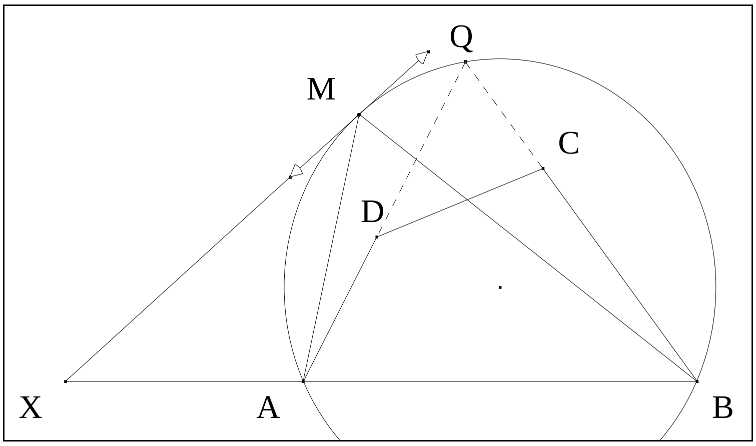
Note historique : un auteur anonyme a été proposé comme question en 1897 dans le *Journal des Mathématiques Élémentaires* de Vuibert :

les quatre points qui divisent extérieurement les côtés d'un quadrangle dans les rapports des carrés des côtés adjacents sont cocycliques.

En 1921, Joseph Neuberg[2] le démontre comme conséquence d'un problème plus général. Dix plus tard, Victor Thébault revient sur ce résultat dans la revue *Mathesis* et souhaite "qu'il serait intéressant d'en établir une démonstration directe".
Une réponse métrique en est donnée la même année par Adolphe Mineur[3] qui a recours à des rapports, au théorème de Stewart et aux puissances. Dans sa discussion algébrique, il envisage le cas où le cercle se dégénère en une droite, mais ne fait pas le lien avec le fait que le quadrilatère ABCD est cyclique.

[2] Neuberg J., Un problème sur les quadrilatères articulés, *BB* (1921) 583.
[3] Thébault V., Mineur A., Sur une propriété du quadrilatère, Note 37 *Mathesis* 45 (1931) 384-386.

En 2003, l'étudiant Darij Grinberg[4] propose au groupe *Hyacinthos*, cette question qui reste sans réponse. En 2007, Grinberg[5] découvre une preuve synthétique. Dans son article intitulé "The Neuberg-Mineur Circle", il commence par géométriser l'énoncé "métrique" de Neuberg en considérant la tangente au point de Miquel P de ABCD

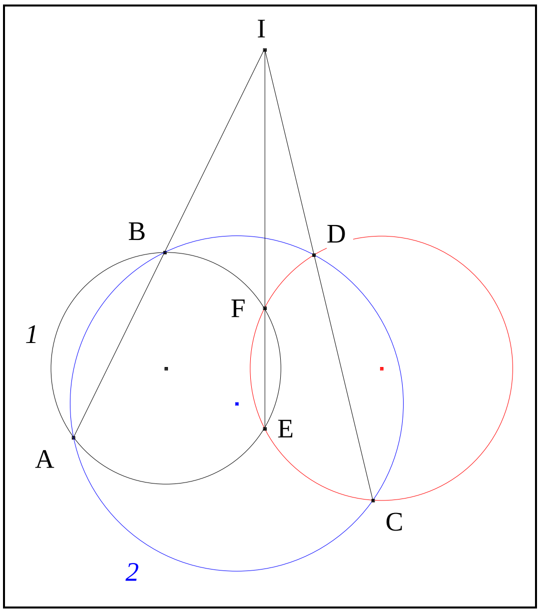


XA / XB = AD² / BC²

ensuite, introduit deux cercles tangents et, en fin, démontre le résultat et remarque que lorsque ABCD est cyclique, le cercle se dégénère en une droite qu'il prouve de deux façons différentes.

ANNEXE

1. Le théorème des trois cordes[6]



Traits : *1, 2* deux cercles sécants,

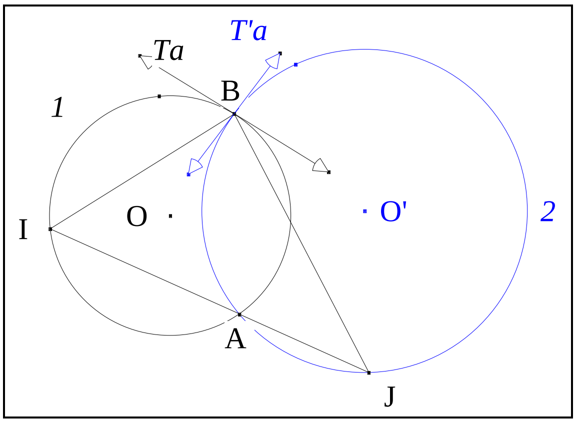
[4] Grinberg D., The Neuberg-Mineur circle, Message *Hyacinthos* # 8510 du 01/11/2003.
[5] Grinberg D., The Neuberg-Mineur circle, Mathematical Reflections 3 (2007) ;
http://reflections.awesomemath.org/2007_3/NeubergMineur.pdf/
http://de.geocities.com/darij_grinberg/
[6] Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I (1822) 40.

	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	C, D	deux points de *2*,
	E, F	deux points de *1*
et	I	le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

Scolie : le résultat reste inchangé lorsque les cercles sont tangents.

2. Un triangle de Möbius[7]



Traits :

	1, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
et	(IBJ)	une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO' (= <Ta T'a) à $\prod$ près.

[7] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.