ÉLÉGANCE 7

DEUX AIRES ÉGALES

DE

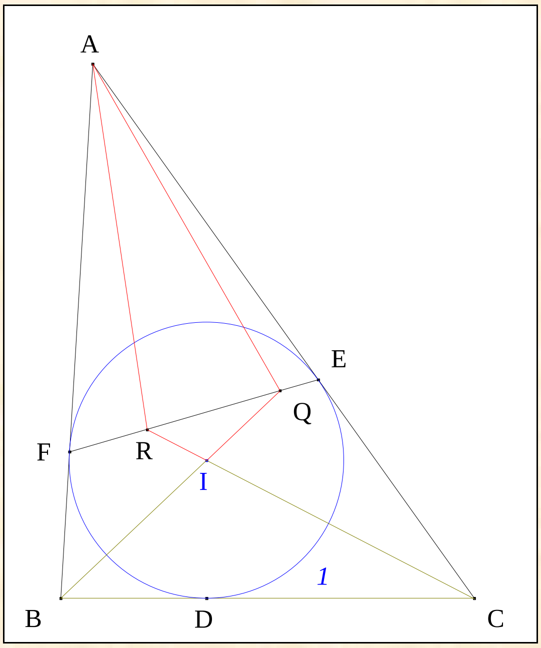
MIGUEL OCHOA SANCHEZ

†

Qu'est ce qui vous plait le plus dans une preuve synthétique ?
C'est son élégance. [1]

What you like most in a synthetic proof ?
Its elegance.

Jean - Louis AYME [2]



Résumé. L'auteur présente un résultat du péruvien Miguel Ochoa Sanchez concernant l'égalité des aires d'un quadrilatère et d'un triangle.
La résolution originale de l'auteur fait appel à une extraversion d'un résultat de Nathan Altshiller-Court, suivi d'une technique connues d'Euclide d'Alexandrie.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

---

1 Qualité de ce qui est exprimé avec justesse et agrément, avec une netteté sobre, sans lourdeur

2 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/09/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract. The author presents a result of the Peruvian Miguel Ochoa Sanchez concerning the equality of areas of a quadrilateral and a triangle.
The original resolution of the author consists to an extraversion of a result of Nathan Altshiller-Court, followed by a technique known to Euclid of Alexandria.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Resumen. El autor presenta el resultado del peruano Miguel Ochoa Sánchez relativos a la igualdad de áreas de un cuadrilátero y un triángulo.
La resolución original del autor año consiste en un resultado de extroversión Nathan Altshiller Court, seguido por una técnica conocida a Euclides de Alejandría.
Las figuras están en posición general y pueden demostrar teoremas todos sintéticamente todo citados.

Sommaire

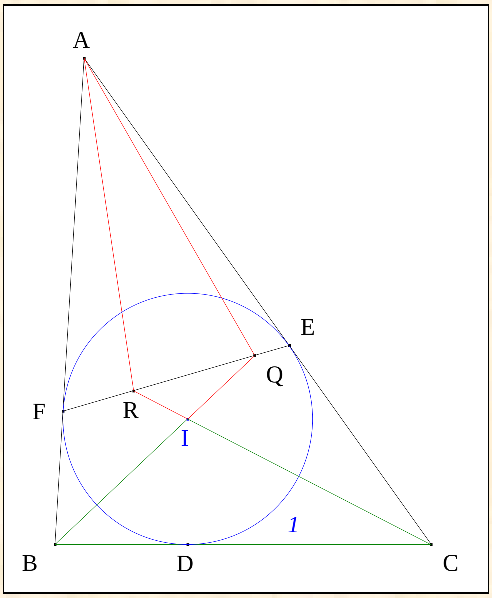
A. LE PROBLÈME

DE

MIGUEL OCHOA SANCHEZ

VISION

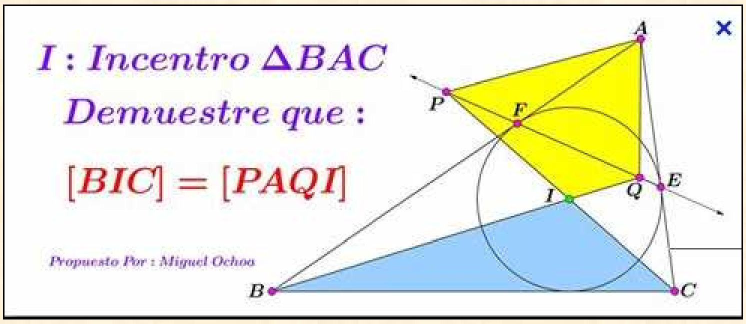
Figure :



Traits : ABC un triangle
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
et Q, R les points d'intersection de (EF) resp. avec (BI), (CI).

Donné : [RAQI] = [BIC]. [3]

Archive



[4]

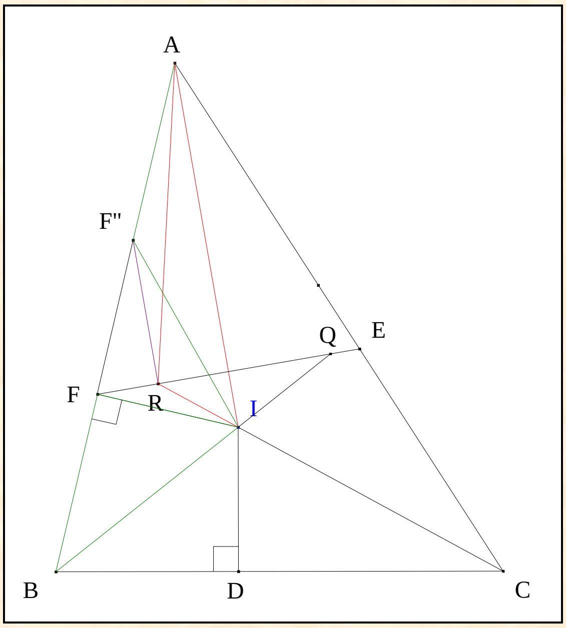
[3] Two areas, AoPS du 29/09/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1312457_two_areas
Deux aires, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1335174

[4] Ochoa M. ; https://twitter.com/miguelochoasan2

VISUALISATION

Commentaire : raisonnons par décomposition, [RAQI] = [AIR] + [AIQ].

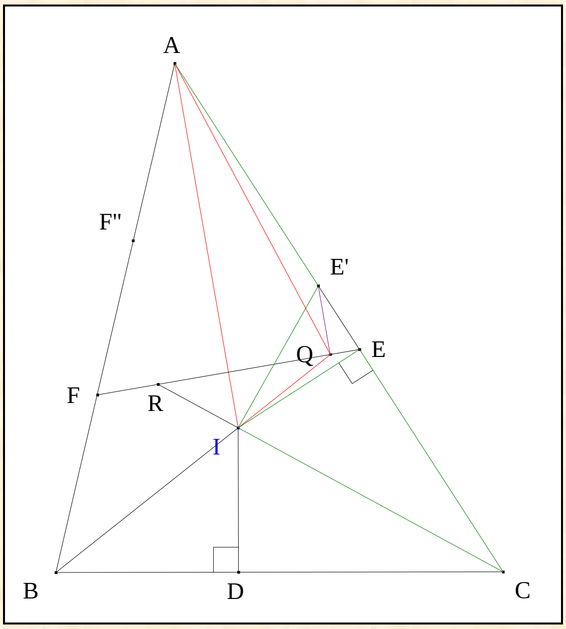
Cas : [AIR]



- Notons F" le point de conctact du C-excercle de ABC avec (AB).
- D'après **B.** Appendice **4** scolie, (F"R) // (AI).
- Une chasse d'aire :
  - * par Euclide "**I.** Proposition **37**" [5], [AIR] = [AIF"]
  - * par une autre écriture, [AIF"] = [AF"I]
  - * F étant l'isotome de F" relativement à [AB] [6], [AF"I] = [BFI]
  - * par symétrie par rapport à (BI) [7], [BFI] = [BDI].
- **Conclusion partielle :** par transitivité de =, [AIR] = [BDI].

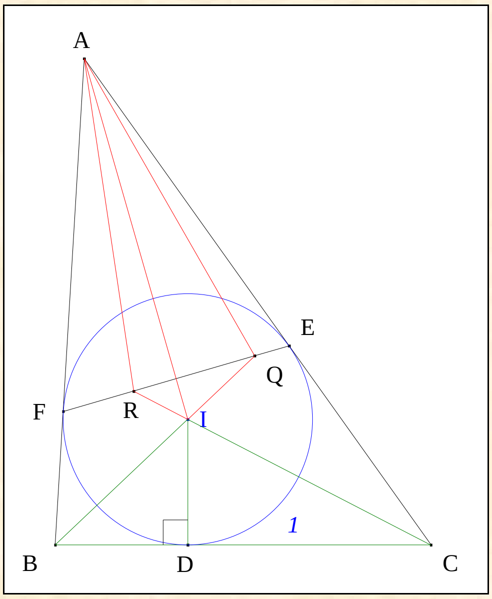
5 Joyce D. E. ; http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/propI37.html
6 Joyce D. E. ; http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/propI38.html
7 Joyce D. E. ; http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/propI4.html

Cas : [AIQ]



- Notons E' le point de conctact du B-excercle de ABC avec (AC).
- D'après **B.** Appendice **4** scolie, (E'Q) // (AI).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que [AIQ] = [CDI].

Cas : [ARIQ]



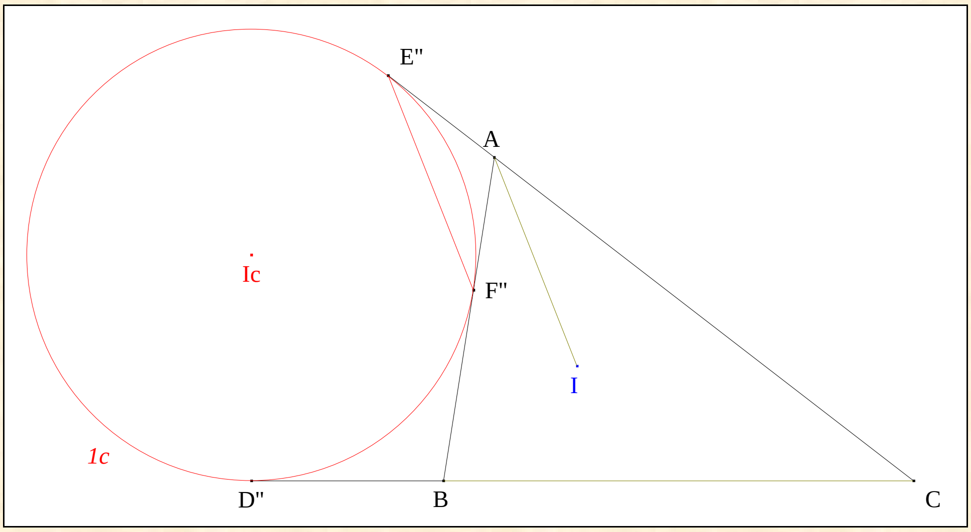
- Par décomposition, [RAQI] = [AIR] + [AIQ].
- Par substitution, [RAQI] = [BDI] + [CDI].
- **Conclusion :** par addition, [RAQI] = [BIC].

B. APPENDICE

1. Deux parallèles

VISION

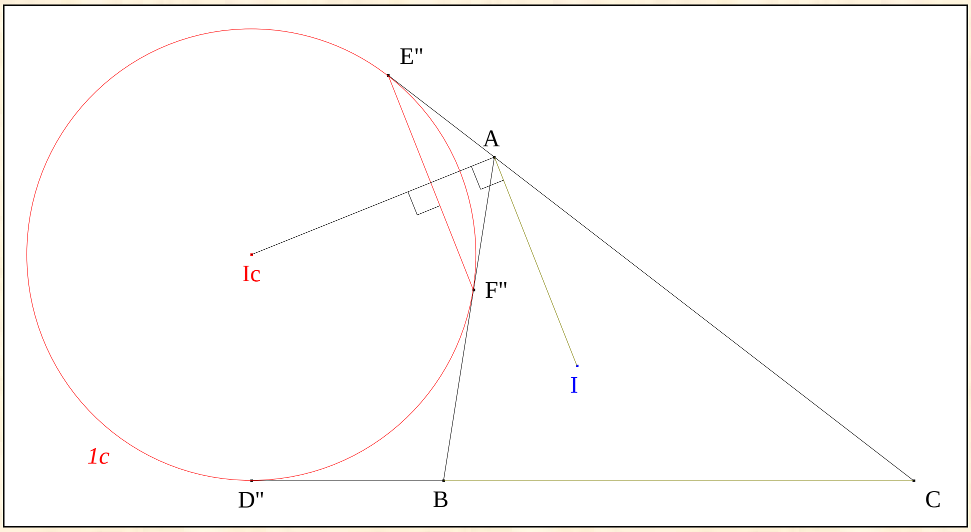
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
1c le C-excercle de ABC,
Ic le centre de *1c*
et D"E"F" le C-extriangle de contact de ABC.

Donné : (E"F") est parallèle à (AI).

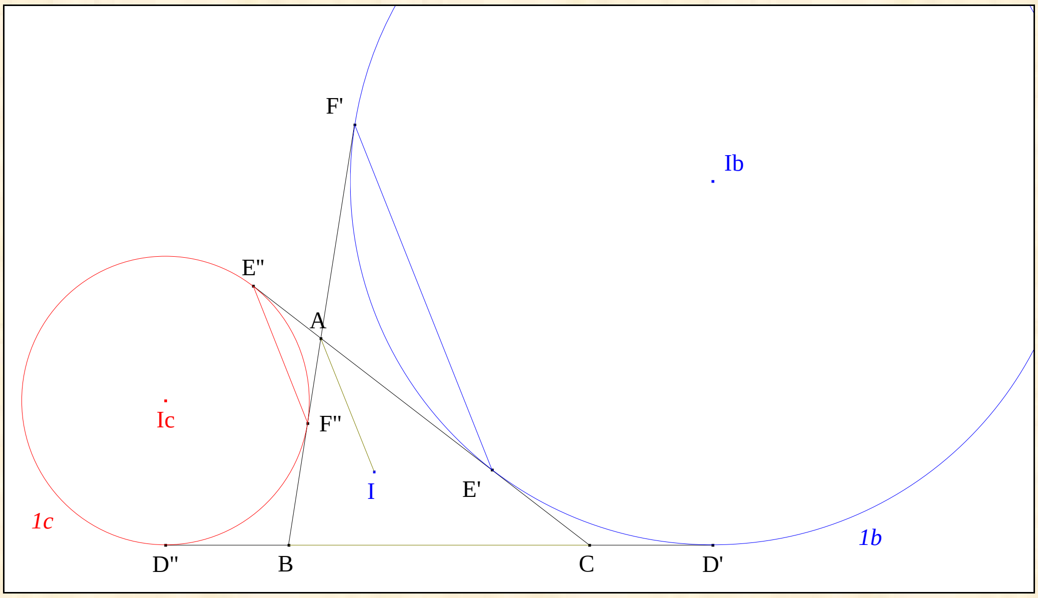
VISUALISATION



- Par "Corde et tangentes", (E"F") ⊥ (AIc)

- Par culture géométrique, (AIc) ⊥ (AI).
- D'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (E"F") // (AI).
- **Conclusion :** (E"F") est parallèle à (AI).

Scolie : avec le B-excercle de ABC

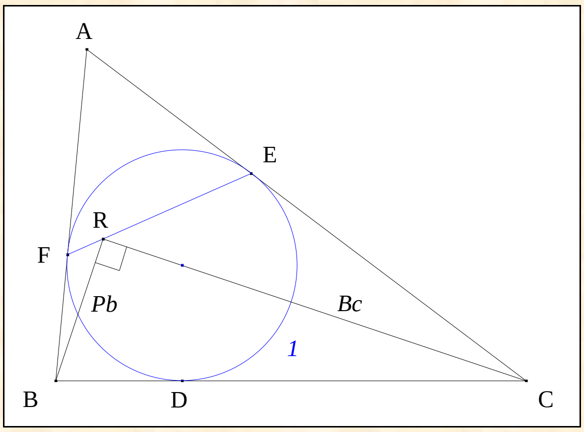


- Notons *1b* le B-excercle de ABC,
  Ib le centre de *1b*
  et D'E'F' le B-extriangle de contact de ABC.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (E'F') est parallèle à (AI).

2. Un résultat de Nathan Altshiller-Court

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
Bc la C-bissectrice intérieure de ABC,
Pb la perpendiculaire à *Bc* issue de B
et R le point d'intersection de *Pb* et *Bc*.

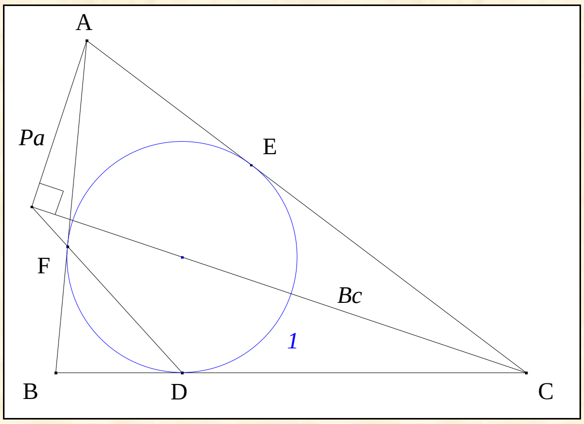
Donné : *Pb* et *Bc* se brisent sur (FE) en R.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [8]

3. Une variante

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
Bc la C-bissectrice intérieure de ABC
et *Pa* la perpendiculaire à *Bc* issue de A.

Donné : *Pa* et *Bc* se brisent sur (FD).

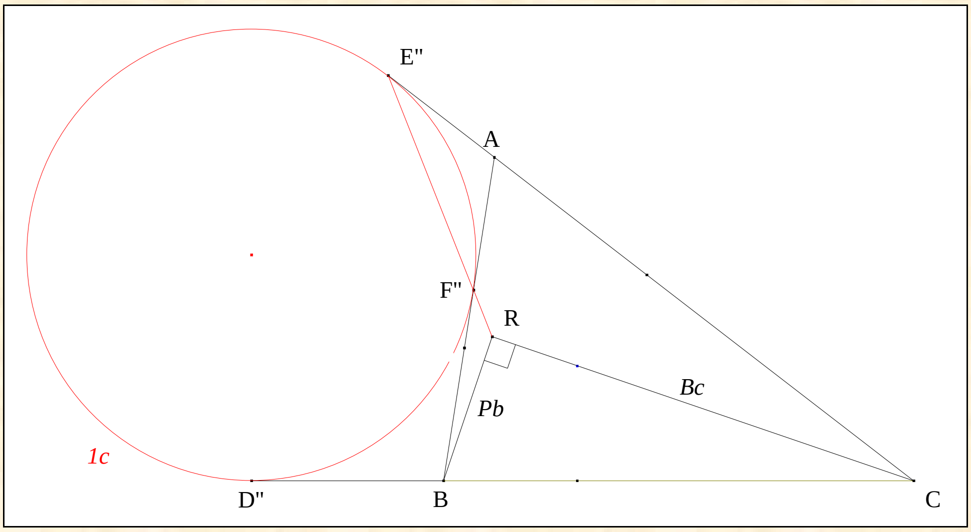
---

[8] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. **4**, p. 6-8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

4. La C-extraversion

VISION

Figure :

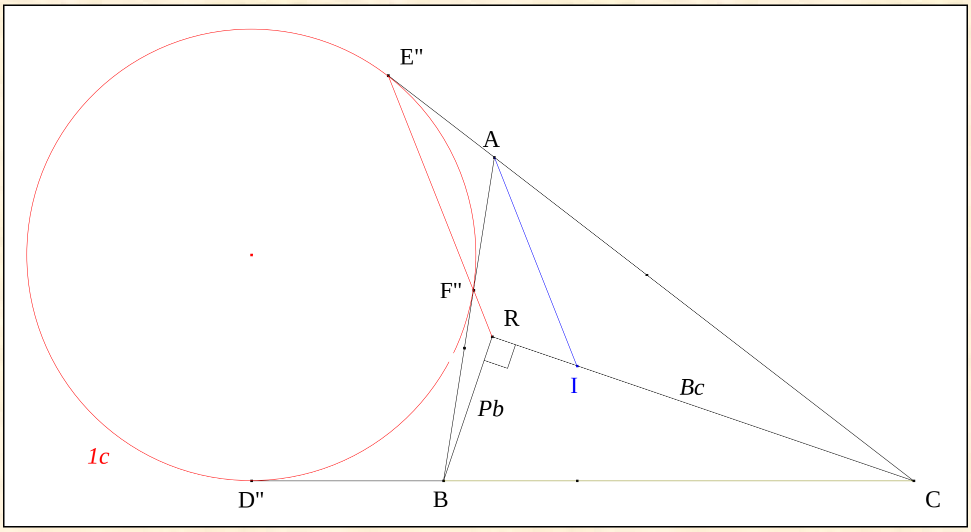


Traits :	ABC	un triangle,
	1c	le C-excercle de ABC,
	D"E"F"	le C-extriangle de contact de ABC,
	Bc	la C-bissectrice intérieure de ABC
	Pb	la perpendiculaire à *Bc* issue de B.
et	R	le point d'intersection de *Pb* et *Bc*.

Donné : *Pb* et *Bc* se brisent sur (E"F") en R.

Commentaire : ce résultat résulte de la règle d'extraversion.

Scolie : une parallèle à (AI)



- Notons I le centre de ABC.

- **Conclusion :** d'après **B. 1** et **4**, (E"F"R) est parallèle à (AI).

C. À PROPOS DE L'EXTRAVERSION OU DES QUATRE VERSIONS DU CENTRE I

Si la considération du cercle inscrit dans un triangle apparaît au IIIe siècle avant notre ère dans les *Éléments* d'Euclide, celle des cercles exinscrits ou "excercles" ne se fait sentir qu'au début du XIXe siècle ; elle est mentionnée en 1809 dans les *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques* de Simon L'Huilier [9].
Le terme "cercles tritangents" qui recouvre ces quatre cercles apparaît durant la première moitié du XXe siècle.

La tentation de traduire des résultats concernant le cercle inscrit avec l'un des cercles exinscrits d'un triangle ABC, a donné naissance au concept d'extraversion. Cette idée a commencé avec Emile Lemoine, s'est poursuivie avec Félix Klein et s'est concrétisé dans les travaux de John Conway et de Georgey Kapetis qui se sont appuyés sur la théorie de Galois.

L'extraversion permet aux géomètres de classer les centres des triangles en classes d'équivalence.
Citons quelques exemples :

*	les "strong points" ou "singlets"	
*	les "points fissibles" ou "pairs"	en deux versions comme les points de Fermat
*	les "points quatiles"	en quatre versions comme le centre du triangle
*	les "points hexyle"	en six versions comme le milieu du segment joignant un centre à un excentre
*	les "points octiles"	en huit versions…

Règle principale d'extraversion relativement, par exemple, au sommet A :

inscrit	par	A-excercle
A-excercle	par	inscrit
B-excercle	par	C-excercle
C-excercle	par	B-excercle.

Ainsi, l'extraversion d'un théorème relativement au sommet A, est uniquement définie.

---

9 L'Huilier S., *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*, Paris et Genève (1809) 198, remarque **I**

Attention :

considérons le triangle déterminé par les polaires de A, B, C respectivement aux A, B, C-excercles de ABC.
L'extraversion relativement au cercle inscrit du triangle déterminé par ces polaires n'a pas de sens car une extraversion "transforme" in/excercles en différents in/excercles et non trois excercles en un même cercle inscrit.

Remarque :

lorsque l'extraversion est correctement appliquée, celle-ci permet de mieux comprendre les relations entre des théorèmes concernant la géométrie du triangle.