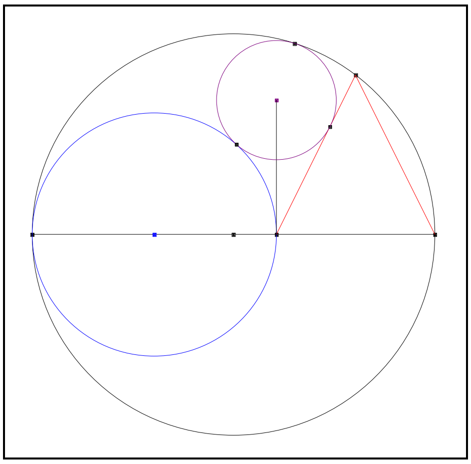
LA FAMEUSE SAN GAKU

DE

LA PRÉFECTURE DE GUMMA (1803)

Jean-Louis AYME



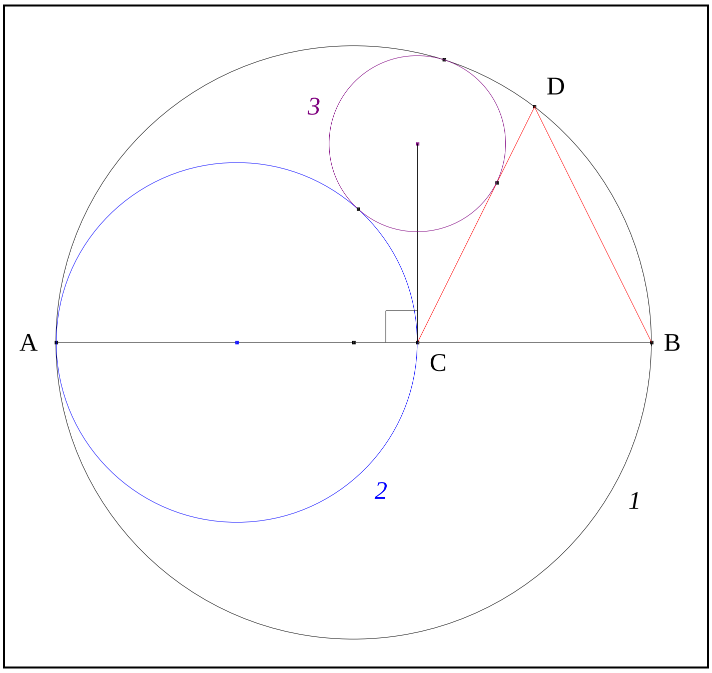
Résumé. Nous présentons une preuve synthétique de la fameuse San Gaku de la préfecture de Gumma (Japon) datant de 1803. Cette preuve s'appuie sur les cercles intérieur et extérieur de Thébault.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

I. LA FAMEUSE SAN GAKU

VISION

Figure :



Traits :

	1	un cercle,
	[AB]	un diamètre de *1*,
	C	un point de]AB[,
	2	le cercle de diamètre [AC],
	D	le point de *1* tel que le triangle DBC soit D-isocèle comme indiquée sur la figure
et	*3*	le cercle tangent resp. à *1*, *2* et à (CD).

Donné : le centre de *3* est sur la perpendiculaire à (AB) en C.

Note historique : cette figure gravée sur une "tablette mathématique" i.e. une San Gaku, aujourd'hui disparue, a été recensée en 1803 à la préfecture de Gumma (Japon) et décrite en 1807 par Kagen Fujita[1] dans son livre intitulé *Zoku Specki Sanpo*.
Cette "énigme japonaise" est présentée dans la rubrique "Three Circles" dans l'incontournable livre d'Hidetoschi Fukagawa et Dan Pedoe[2] publié en 1989 .

Un point d'histoire :

en 1635, un puissant Shogun i.e. un seigneur féodal, tenait le mikado i.e. l'empereur du Japon en tutelle, et interdisait à tout ressortissant du Japon de quitter l'île. Quatre années plus tard, il rompait toute relation avec l'Espagne et le Portugal qui étaient depuis longtemps présents dans les parages. Seuls les chinois et les hollandais purent continuer à commercer à distance. Durant la période Edo qui alla de 1603 à 1867, le Japon vécut sur lui-même. Les connaissances mathématiques n'arrivèrent plus et seul, par miracle, fut connu le traité de Yang Hui datant de 1261 qui sera traduit en japonais en 1661 par Seki Takakazu.

---

1 Fujita K. (1772-1828), *Mathematical Tablets*, vol. 2.
2 Fukagawa H. and Pedoe D., San Gaku Japanese Temple Geometry Problems, Winnipeg Canada (1989), Example 1. 2. p. 4.

Une coutume voulait que les géomètres japonais inscrivent leurs découvertes sur des tablettes de bois qu'ils suspendaient à l'entrée des temples ou au dessus des autels des sanctuaires shintoïstes[3] en offrande aux divinités locales pour les remercier de la découverte d'un théorème. Certaines divinités étaient supposées aimer les mathématiques et plus particulièrement les théorèmes de géométrie. Il semble que la beauté et la pureté de ces figures géométriques s'apparentent, dans l'esprit japonais (toujours difficile d'accès pour un occidental) à de l'art. Ajoutons qu'à l'époque Edo, les vecteurs du savoir était les moines…
Si beaucoup de ces tablettes votives ont été perdues durant la période de modernisation qui succéda à la période Edo, neuf cents environ ont pu être conservés, la plus vieille datant de 1683.
Si, dans la géométrie développée par les grecs, les arabes et les latins, le triangle a une situation privilégié, dans la géométrie dite des "Temples japonais", c'est le cercle qui occupe une position prépondérante. Sur la plupart des San Gakus i.e. "tablettes mathématiques" sont gravés avec art des figures en couleurs accompagnées d'aucune démonstration mais impliquant le challenge

See if you can prove this!

Rappelons que la beauté et la simplicité, a priori, des problèmes retenus sur les tablettes contrastent avec la difficulté de leur résolution. En effet, ces figures simples où l'esthétique des formes est déterminante dans le choix des problèmes ne sont pas l'œuvre d'amateurs, mais bien de professionnels. Précisons que les preuves rarement données, souvent élégantes, mais toujours difficiles, ne peuvent pas être l'œuvre d'un novice.
Notons que c'est le professeur Hidetoschi Fukagawa du Lycée de Aichi Prefecture, une ville située entre Tokyo et Osaka, qui souhaitant améliorer ses cours en passionnant pour les San Gakus, se mit dans les années 70, à les traduire, à les recenser et même à en découvrir ; cette passion lui a permis de soutenir une thèse à l'Académie des Sciences de Bulgarie.
En 1989, Hidetoschi Fukagawa[4] et Dan Pedoe[5] publient le classique *Japanese Temple Geometry Problems*[6]. En 1998, un article de fond sur ce même sujet est publié par Tony Rothmann dans le *Scientific American*[7] et en 2002, Fukagawa et John Rigby reviennent sur ce sujet en écrivant *Traditional Japanes Mathematics of the 18th and 19th centuries*.

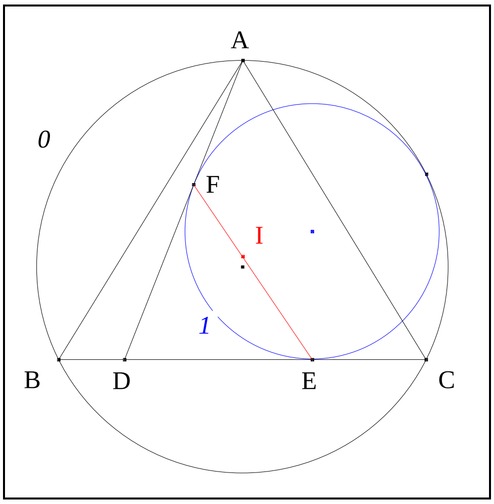
II. TROIS LEMMES

1. Un cercle intérieur de Thébault

VISION

Figure :

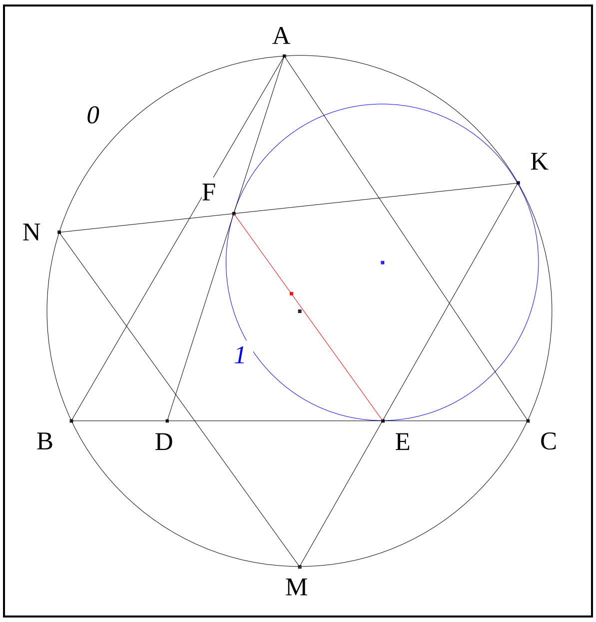
3 Le shintoïsme est habité par environ 800 dieux appelés kami.
4 Fukagawa H., Rothman A., *Sacred Geometry* : *Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press (2008).
5 Fukagawa H., Pedoe D., *Japanese Temple Geometry Problems*, The Charles Babbage Research Center, Winnipeg (1989).
The Charles Babbage Research Center, P.O. Box 272, St. Norbert Postal Station, Winnipeg (MB) Canada R3V 1L6.
6 Fukagawa, Pedoe, *Japanese Temple Geometry Problems*, The Charles Babbage Research Foundation, Winnipeg (1989).
7 Rothmann T., Japanese Temple Geometry, *Sci. Amer.* 278 (Mai 1998) 85-91.



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
D un point de [BC] distinct resp. de B, C,
1 un cercle tangent resp. à [DC[, [DA[
et E, F les points de contact de *1* resp. avec (DC), (DA).

Donné : *1* est tangent intérieurement à *0* *si, seulement si,* (EF) passe par I.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [8]



- *1* est tangent intérieurement à *0*.

- Notons K le point de contact de *0* et *1*,
  et M, N les seconds points d'intersection resp. de (KE), (KF) avec *1*.

- D'après "Une bissectrice intérieure" (Cf. Annexe 1),

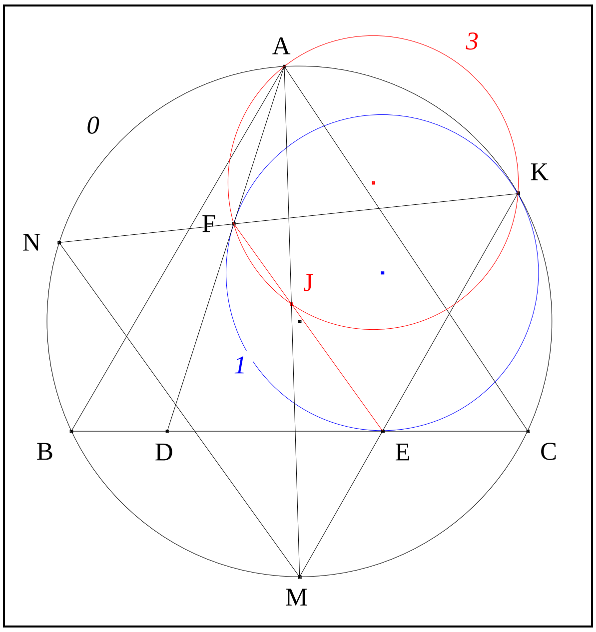
---

[8] Sawayama Y., A new geometrical proposition, *Amer. Math. Monthly*, 12 (1905) 222-224.
Ayme J.-L., Sawayama and Thébault's theorem, *Forum Geometricorum* vol. 3 (2003) 225-229 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325.pdf.
Ayme J.-L., Sawayama and Thébault's theorem, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/vol1.html.

(KE) est la K-bissectrice intérieure du triangle KCB.

- **Scolies :** **(1)** M est le milieu de l'arc BC ne contenant pas K
  (2) (AM) est la A-bissectrice intérieure de ABC
  (3) (AM) passé par I.

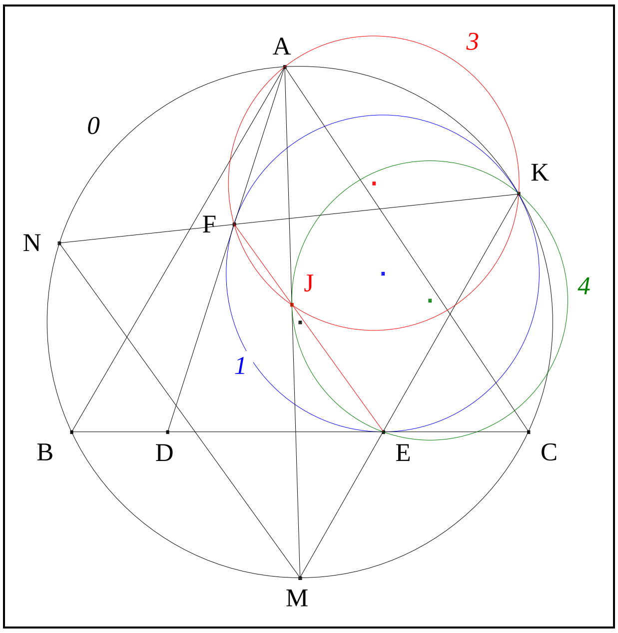
- Les cercles tangent *0* et *1*, le point de base K, les moniennes (MKE) et (NKF), conduisent au théorème **7** de Reim ; il s'en suit que (MN) // (EF).



- Notons J le points d'intersection de (AM) et (EF).

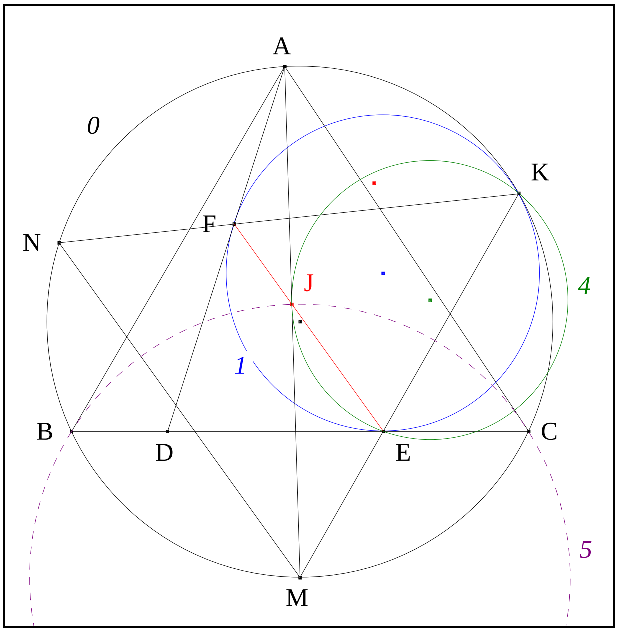
- Le cercle *0*, les points de base A et K, les moniennes naissantes (MAJ) et (NKF), les parallèles (MN) et (JF), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, A, K, F et J sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



- Notons *4* le cercle passant par E, J et K.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 2) appliqué au triangle AFJ
  avec F sur (AF), E sur (FJ) et J sur (AJ), *4* est tangent à (AJ) en J.



- Notons *5* le cercle de centre M passant par B.

- **Scolies :** **(1)** *5* est le A-cercle de Mention (Cf. Annexe 3)
  (2) *5* passe par I
  (3) *5* est orthogonal à *1* (Cf. Annexe 4)

- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 5), *5* est orthogonal à *4*.

- MB=MJ ; en conséquence, I et J sont confondus.

- **Conclusion :** (EF) passe par I.

Scolie : *1* est "le B-cercle intérieur de Thébault de ABC relativement à la A-cévienne (AD)".

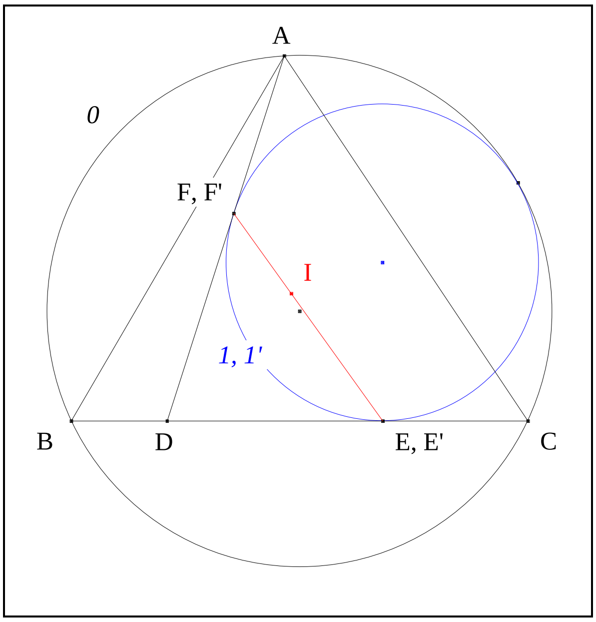
Commentaire : lorsque D est en B, nous retrouvons la "Première partie de la Question 659" de Gohierre de Longchamps [9].

Note historique : Y. Sawayama a été instructeur à l'École centrale militaire de Tokyo (Japon) vers 1905.

VISUALISATION SUFFISANTE [10]

[9] Longchamps (Gohierre de) G., Question 659, *Mathesis* IX (1889) 207 ;
Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4 p. 10-12 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/vol4.html.

[10] L'auteur.



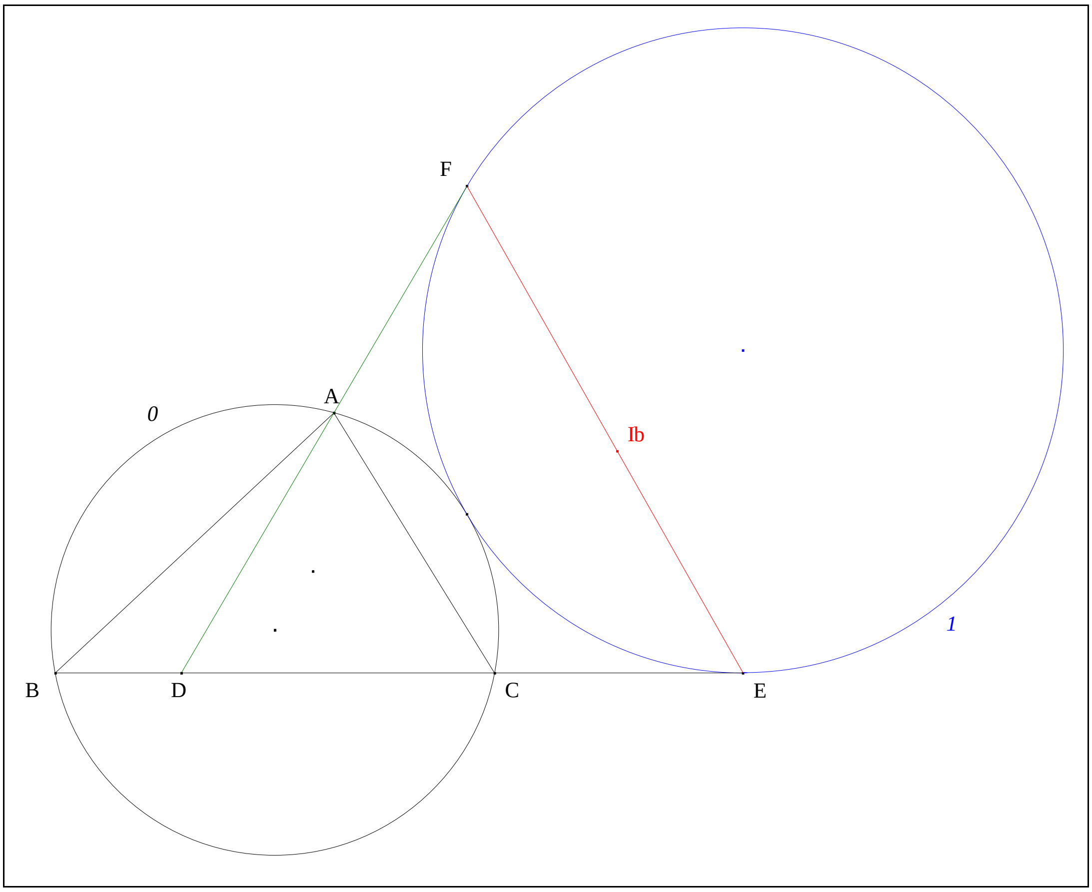
- (EF) passe par I.
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que *1* n'est pas tangent à *0*.
- Nous avons, DE = DF.
- Notons *1'* le cercle tangent resp. à (DC), (DA) et intérieurement tangent à *0*,
  et E', F' les points de contact de *1'* resp. avec (DC), (DA).
- D'après la condition nécessaire, (E'F') passe par I.
- Nous avons, DE' = DF' ;
  en conséquence, **(1)** E et E' sont confondus
  (2) F et F' sont confondus
  (3) *1* et *1'* sont confondus ;

  il s'en suit que *1* est tangent (intérieurement) à *0*, ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** *1* est tangent intérieurement à *0*.

2. Un cercle extérieur de Thébault

VISION

Figure :

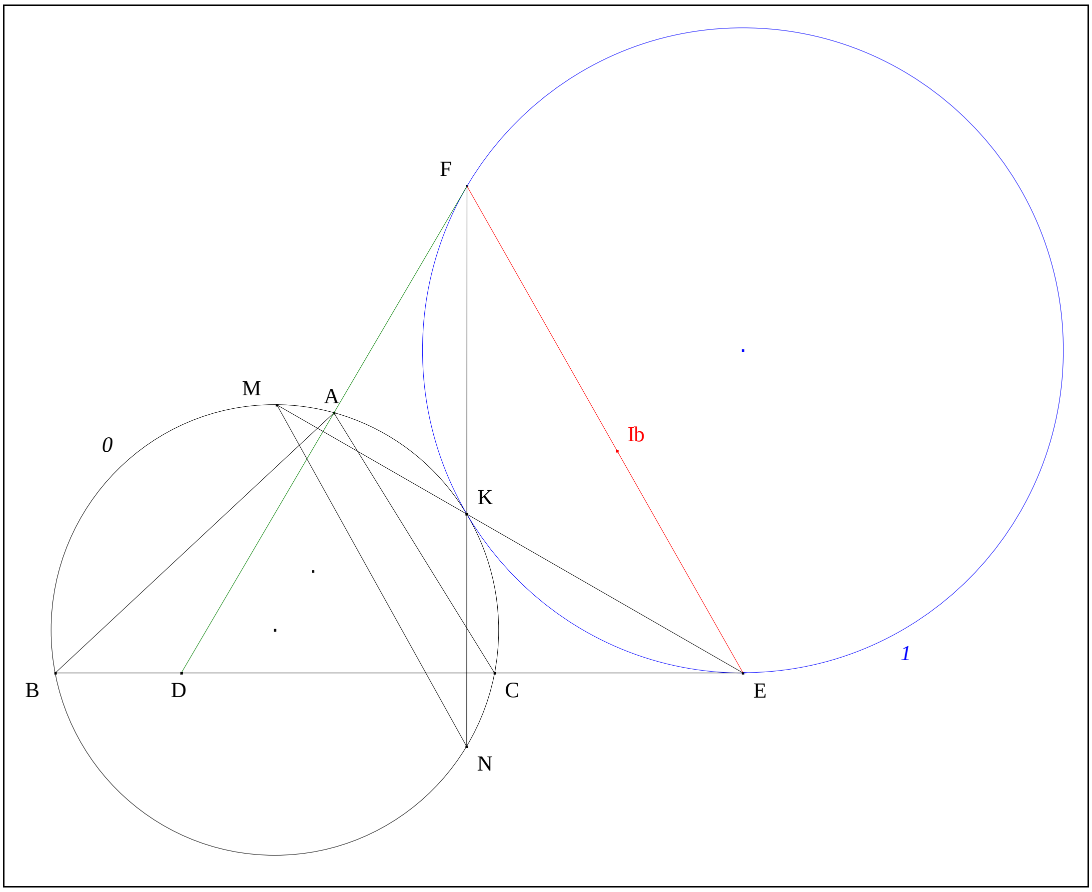


Traits : ABC un triangle,
Ib le B-excentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
D un point de [BC] distinct resp. de B, C,
1 un cercle tangent resp. à [DC[, [DA[
et E, F les points de contact de *1* resp. avec (DC), (DA).

Donné : *1* est tangent extérieurement à *0* *si, seulement si,* (EF) passe par Ib.[11]

VISUALISATION NÉCESSAIRE [12]

[11] Ce résultat est une extraversion d'un cercle intérieur de Thébault. Le lecteur pourra s'en dispenser.
[12] L'auteur.



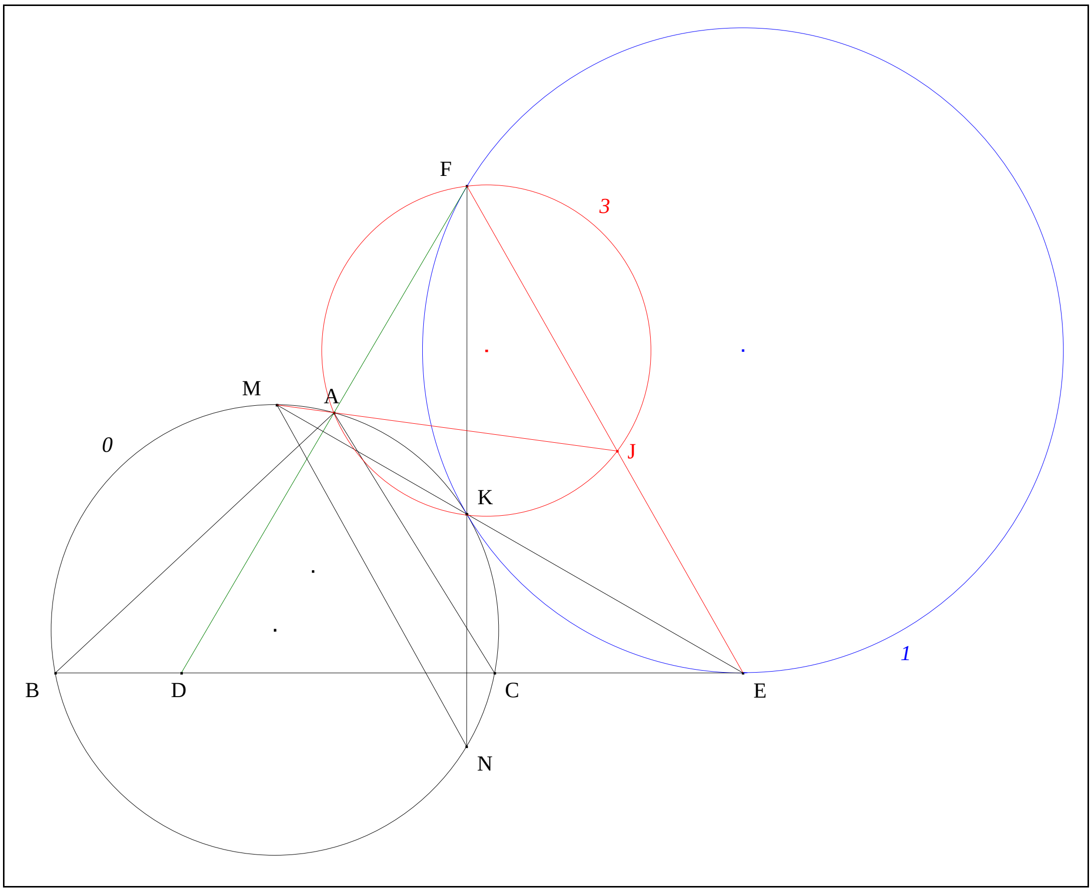
- *1* est tangent extérieurement à *0*.

- Notons K le point de contact de *0* et *1*,
  et M, N les seconds points d'intersection resp. de (KE), (KF) avec *1*.

- D'après "Une bissectrice extérieure" (Cf. Annexe 6),
  (KE) est la K-bissectrice extérieure du triangle KCB.

- **Scolies :** **(1)** M est le milieu de l'arc BC contenant K
  (2) (AM) est la A-bissectrice extérieure de ABC
  (3) (AM) passé par Ib.

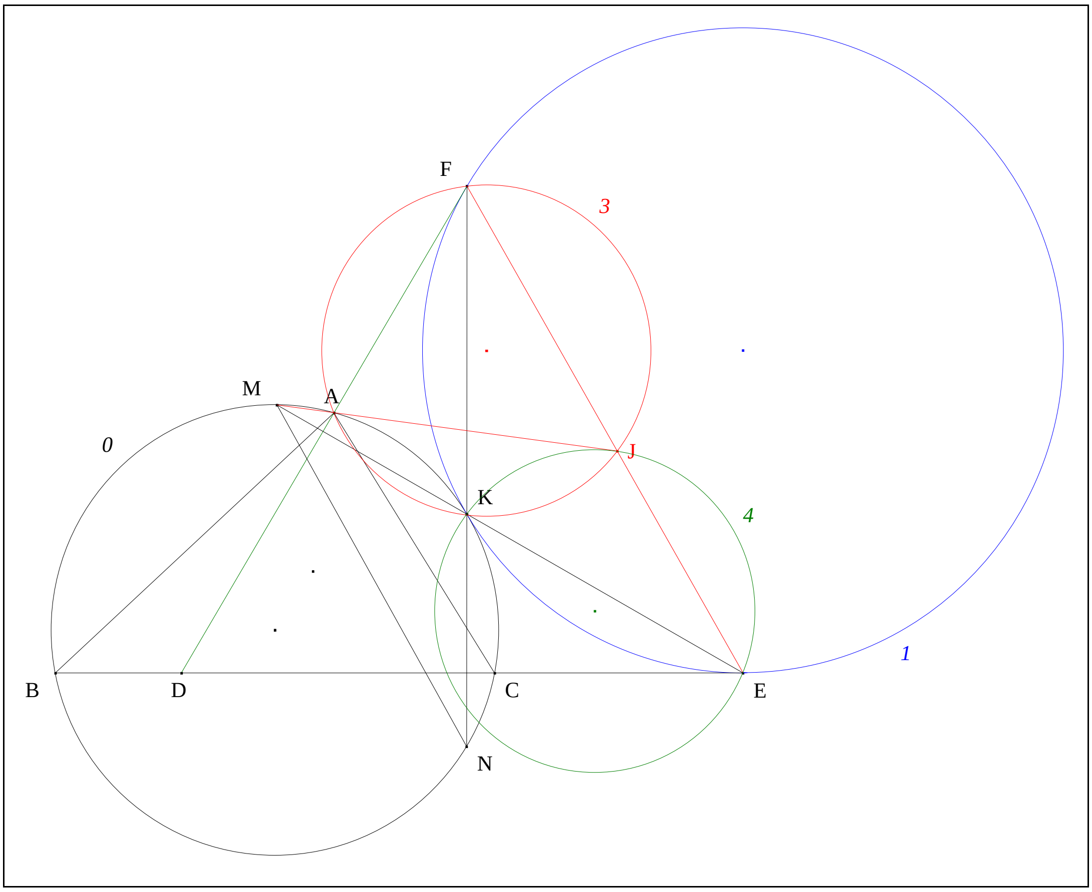
- Les cercles tangent *0* et *1*, le point de base K, les moniennes (MKE) et (NKF),
  conduisent au théorème **7** de Reim ; il s'en suit que (MN) // (EF).



- Notons J le points d'intersection de (AM) et (EF).

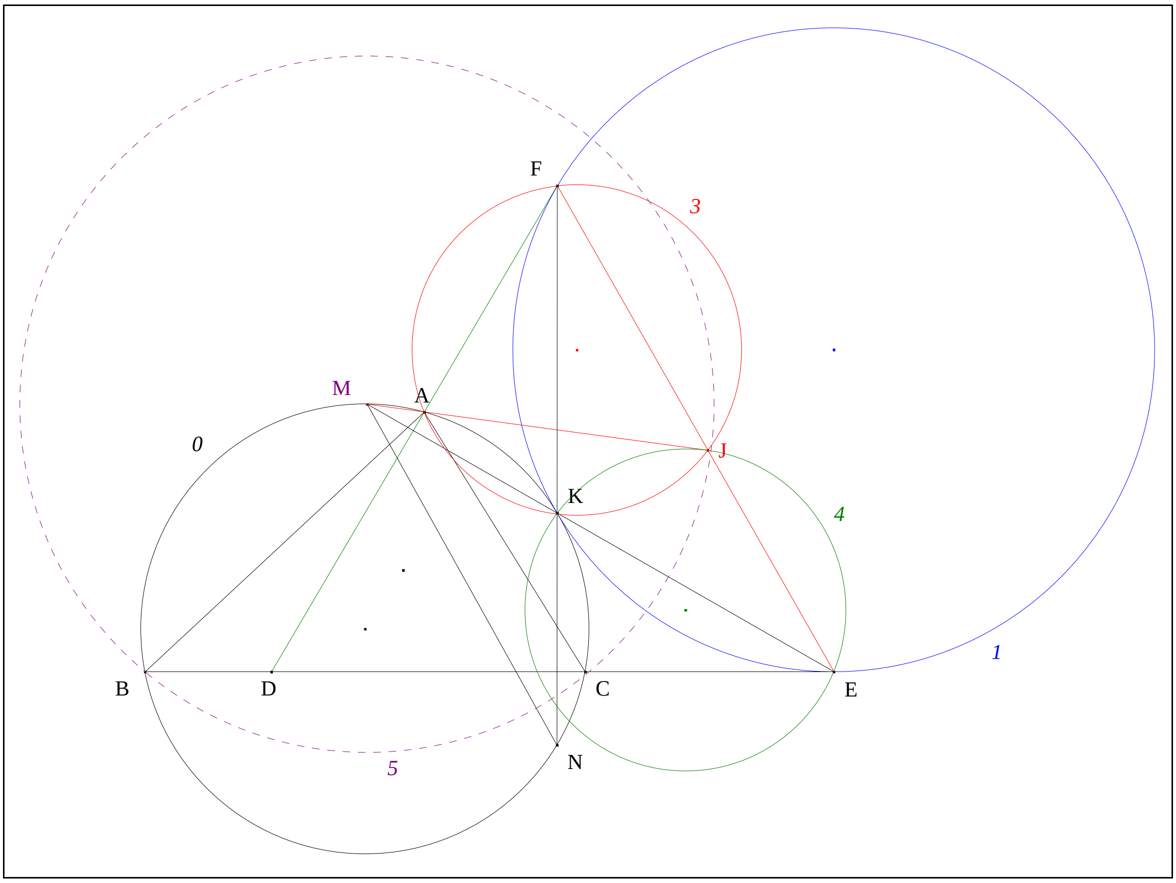
- Le cercle *0*, les points de base A et K, les moniennes naissantes (MAJ) et (NKF), les parallèles (MN) et (JF), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, A, K, F et J sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



- Notons *4* le cercle passant par E, J et K.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 2) appliqué au triangle AFJ
  avec F sur (AF), E sur (FJ) et J sur (AJ), *4* est tangent à (AJ) en J.



- Notons *5* le cercle de centre M passant par B ; il passe par C.

- **Scolies :** **(1)** *5* est le A-cercle de Mention (Cf. Annexe 3)
  (2) *5* passe par Ib
  (3) *5* est orthogonal à *1* (Cf. Annexe 4)

- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 5), *5* est orthogonal à *4*.

- MB=MJ ; en conséquence, Ib et J sont confondus.

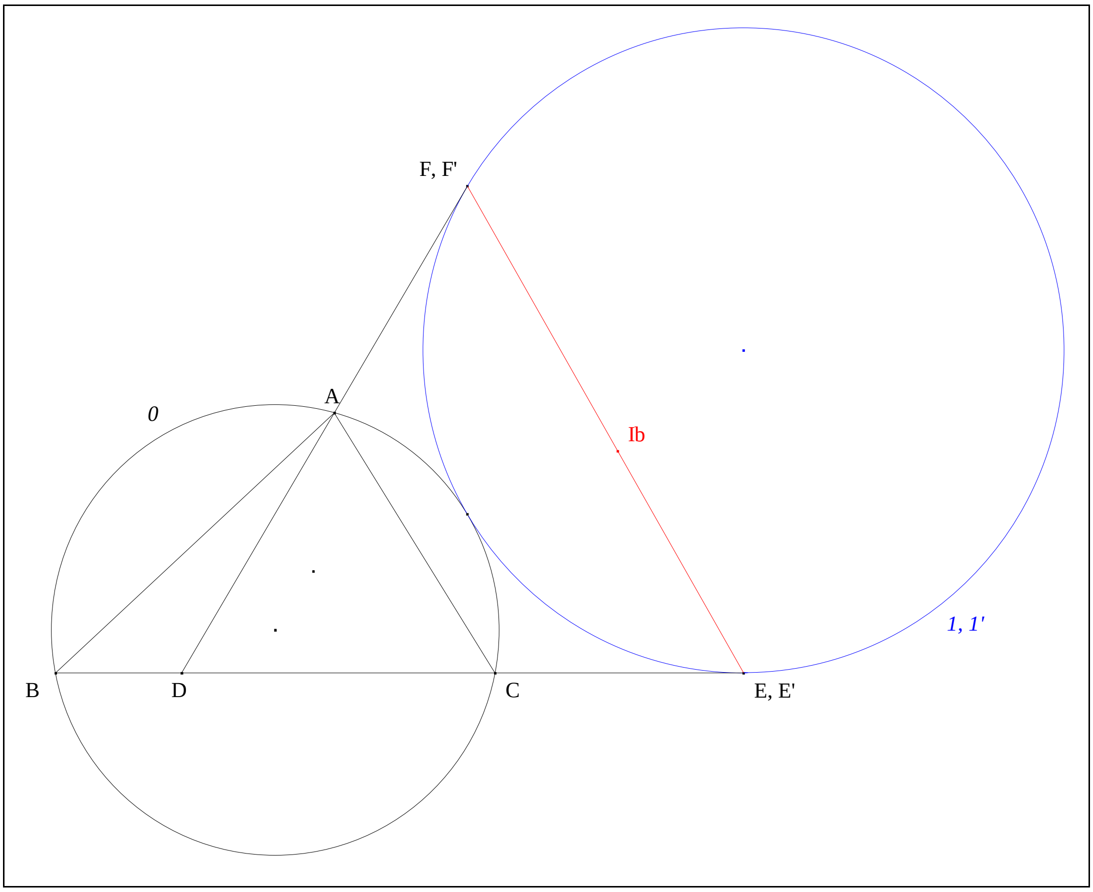
- **Conclusion :** (EF) passe par Ib.

Scolies : **(1)** *1* est "le B-cercle extérieur de Thébault de ABC relativement à la A-cévienne (AD)"

(2) le résultat reste vrai lorsque D est en C.

VISUALISATION SUFFISANTE [13]

[13] L'auteur.



- (EF) passe par Ib.

- Raisonnons par l'absurde en affirmant que *1* n'est pas tangent à *0*.

- Nous avons, DE = DF.

- Notons *1'* le cercle tangent resp. à [DC[, [DA[et extérieurement tangent à *0*,
  et E', F' les points de contact de *1'* resp. avec (DC), (DA).

- D'après la condition nécessaire, (E'F') passe par Ib.

- Nous avons, DE' = DF' ;
  en conséquence, **(1)** E et E' sont confondus
  (2) F et F' sont confondus
  (3) *1* et *1'* sont confondus ;

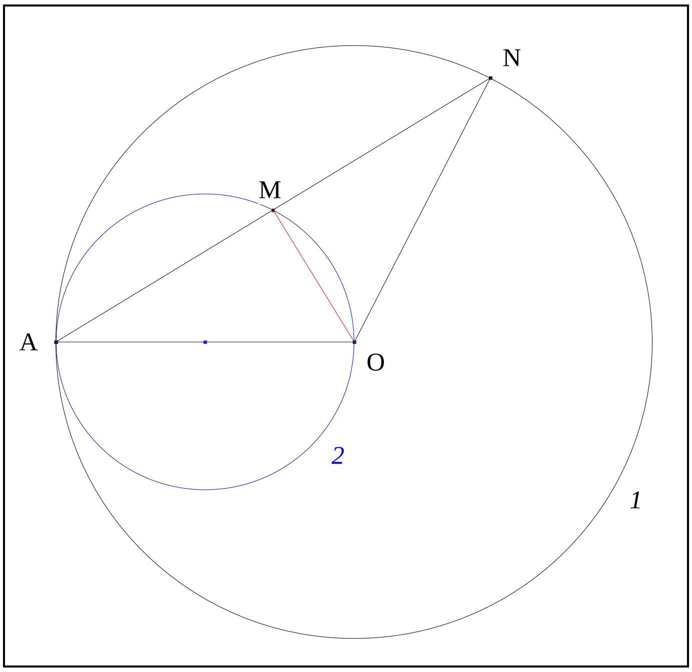
  il s'en suit que *1* est tangent (extérieurement) à *0*, ce qui est contradictoire.

- **Conclusion :** *1* est tangent extérieurement à *0*.

3. Un cercle des milieux

VISION

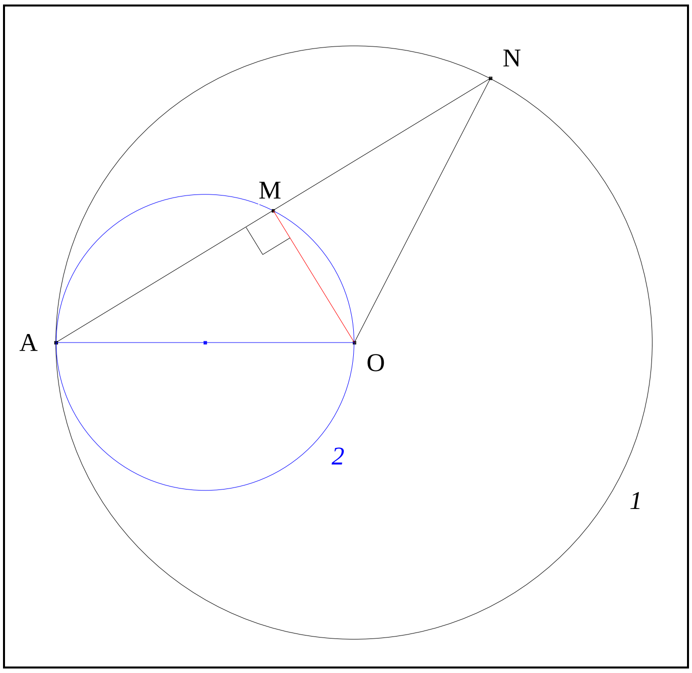
Figure :



Traits :	*1*	un cercle,
	O	le centre de *1*,
	A	un point de *1*,
	2	le cercle de diamètre [AO],
	M	un point de *2*,
et	N	le second point d'intersection de (AM) avec *1*.

Donné : M est le milieu de [AN].

VISUALISATION



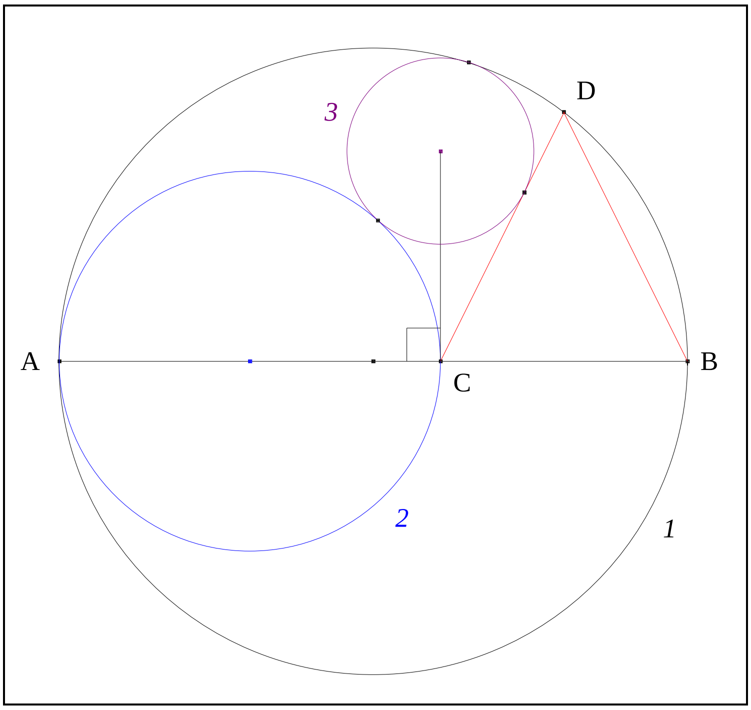
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", le triangle MAO est M-rectangle.
- **Conclusion :** (OM) étant la O-hauteur du triangle O-isocèle OAN, M est le milieu de [AN].

Scolie : (OM) est la O-bissectrice intérieure de OAN.

III. LA PREUVE

VISION

Figure :



Traits :

	1	un cercle,
	[AB]	un diamètre de *1*,
	C	un point de [AB] distinct de A, B,
	2	le cercle de diamètre [AC],
	D	le point de *1* tel que le triangle DBC soit D-isocèle comme indiquée sur la figure
et	*3*	le cercle tangent resp. à *1*, *2* et à (CD).

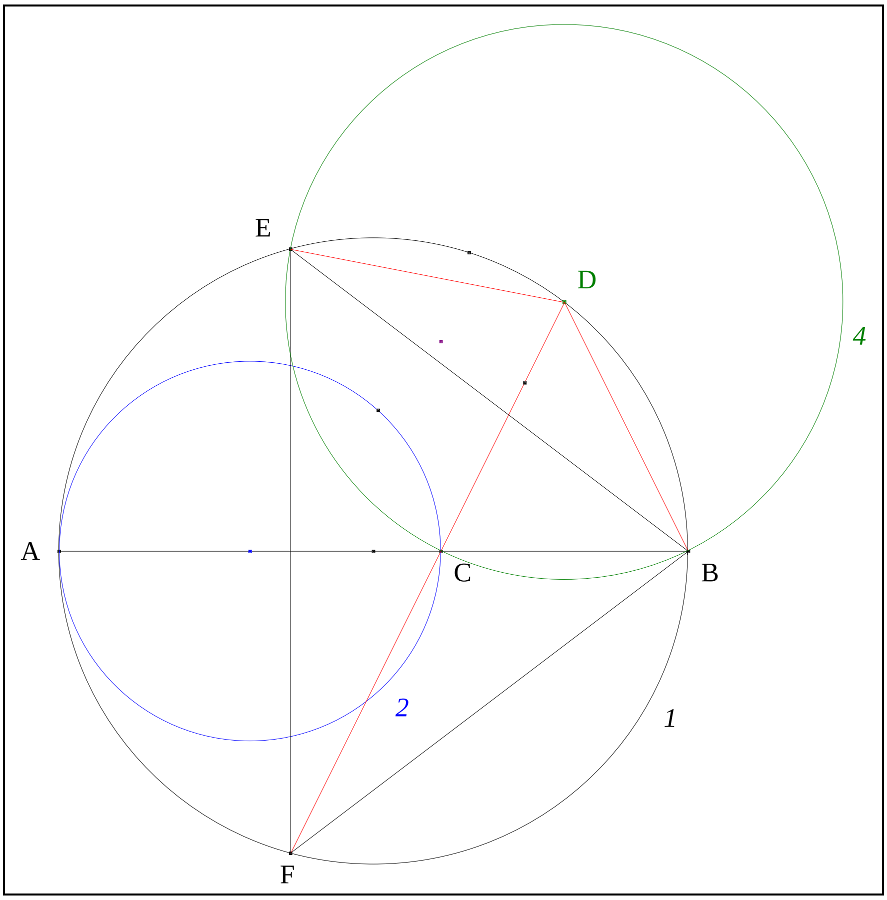
Donné : le centre de *3* est sur la perpendiculaire à (AB) en C.

VISUALISATION

L'IDÉE PHARE DE VLADIMIR ZAJIC[14]

"C est le centre d'un triangle"

[14] Zajic V., tangent circles, *Mathlinks* du 13/01/2009 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?search_id=939985547&t=251037.

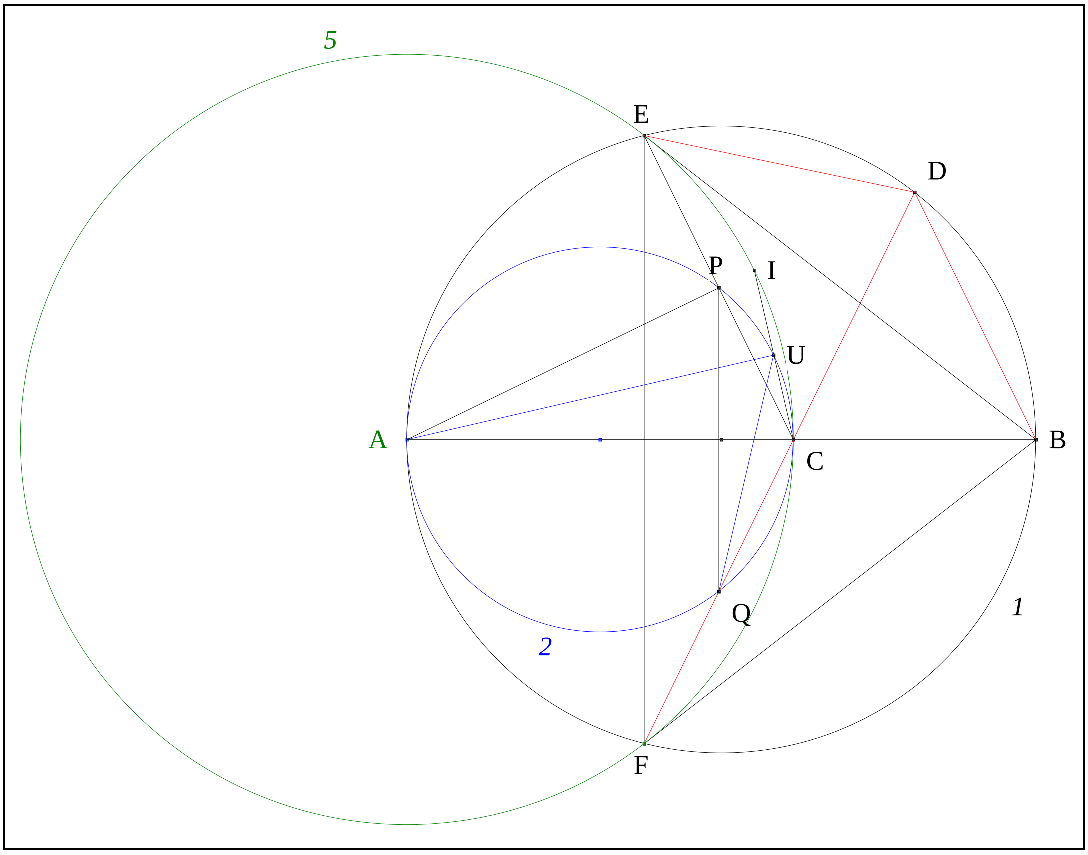


- Notons   *4*   le cercle de centre D passant par B ; il passe par C ;
  E   le second point d'intersection de *4* avec *1*
  et   F   le symétrique de E par rapport à la droite diamétrale (AB) de *1*.

- **Scolies :**   **(1)**   F est sur *1*
  (2)   (BA) est la B-bissectrices intérieures du triangle B-isocèle BEF.
  (3)   *4* est le F-cercle de Mention de BEF.

- **Conclusion partielle :** d'après "Un cercle de Mention" (Cf. Annexe 3),   C est le centre de BEF.

- **Scolie :**   F, C et D sont alignés.



- Notons I le centre du triangle DEF,
  P, Q, U les seconds point d'intersection resp. de (CE), (CF), (CI) avec *2*,
  et *5* le cercle de centre A passant par E.

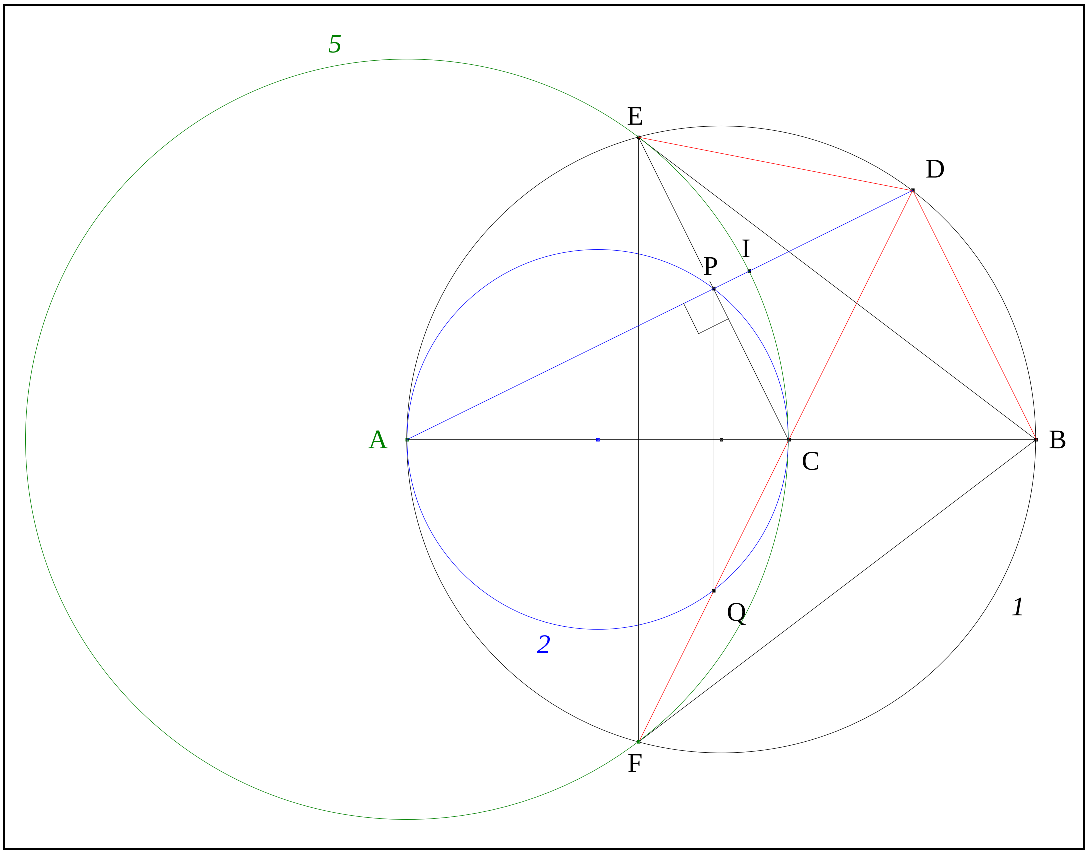
- D'après "Un cercle de Mention" (Cf. Annexe 3),
  5 est resp. les B, D-cercles de Mention des triangles resp. BEF, DEF ;
  en conséquence, *5* passe par E, I, C et F.

- **Conclusion partielle :** d'après II. 3. Un cercle des milieux,
  (1) P est le milieu de [CE]
  (2) Q est le milieu de [CF]
  (3) U est le milieu de [CI].

Scolies :

(1) (AU) étant la A-bissectrice intérieure du triangle ACP,
d'après le théorème de l'angle inscrit,
(QU) est la Q-bissectrice intérieure du triangle QCP.

(2) Quatre points alignés

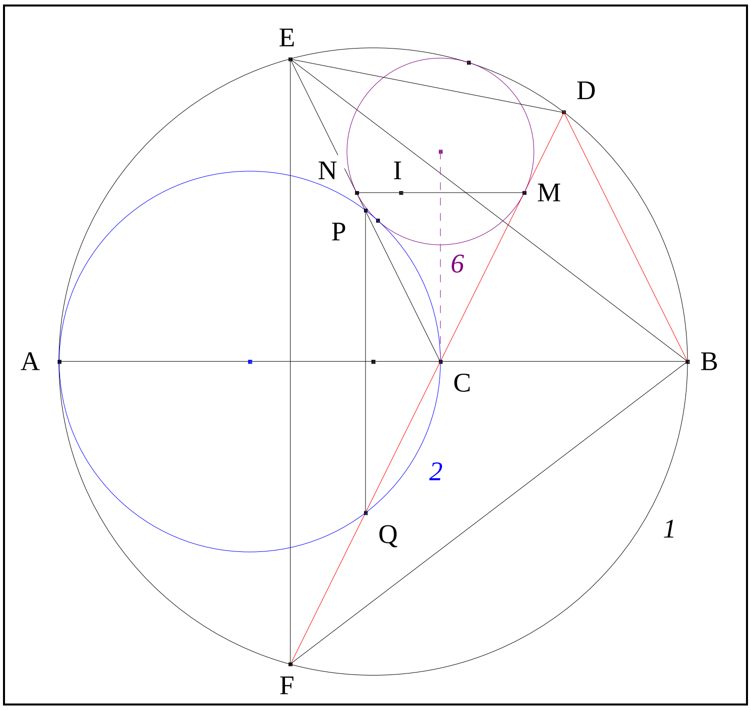


- (AP) est la médiatrice de [CE].
- D'après le théorème de la médiatrice, D est sur (AP) i.e. A, P et D sont alignés
- A étant le second D-perpoint de DEF, I est sur (APD).
- **Conclusion :** A, P, I et D sont alignés.

L'OUVERTURE D'HANSOL[15]

"*3* est un cercle intérieur et extérieur de Thébault"

[15] Connu sous le pseudonyme de "Leonhard Euler" dans le site *Mathlinks*.

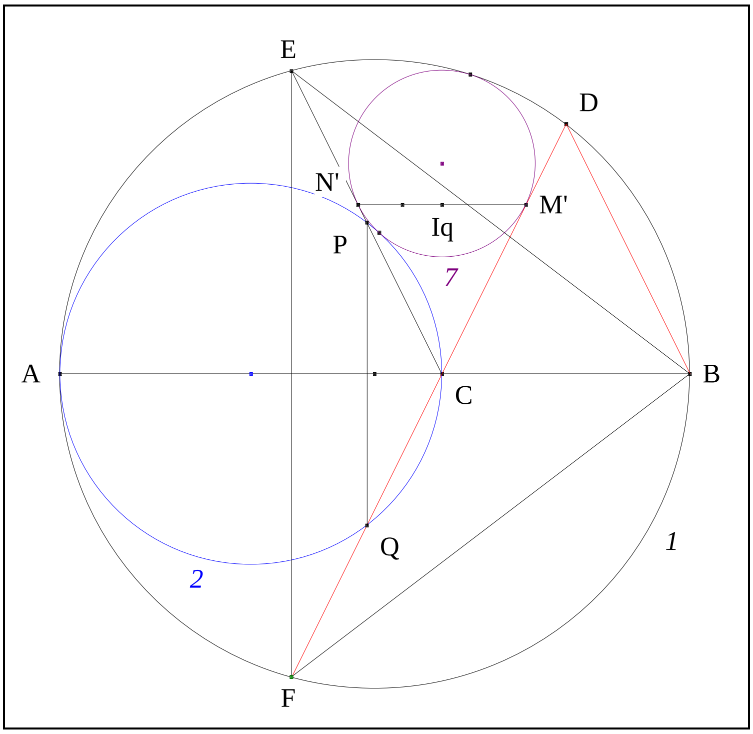


- Notons $\quad$ *6* $\quad$ le cercle tangent resp. à [CD[, [CE[, *1*,
  et $\quad$ M, N $\quad$ les point de contact de *4* resp. avec (CD), (CE).

- *6* est le F-cercle intérieur de Thébault du triangle EFD relativement à la E-cévienne (EC)[16].

- **Conclusion partielle :** d'après II. 1. Un cercle intérieur de Thébault, $\qquad$ (MN) passe par I.

- **Scolie :** $\quad$ (CA) étant la C-bissectrice du triangle C-isocèle CEF,
  le centre de *6* est sur la perpendiculaire à (AB) en C ;
  en conséquence, $\qquad$ (MN) // (AB).



[16] Voir p. 6.

- Notons Iq le Q-excentre du triangle CPQ,
  7 le cercle tangent resp. à [QCD[, [CPE[, *2*
  et M', N' les point de contact de *7* resp. avec (CQ), (CP).

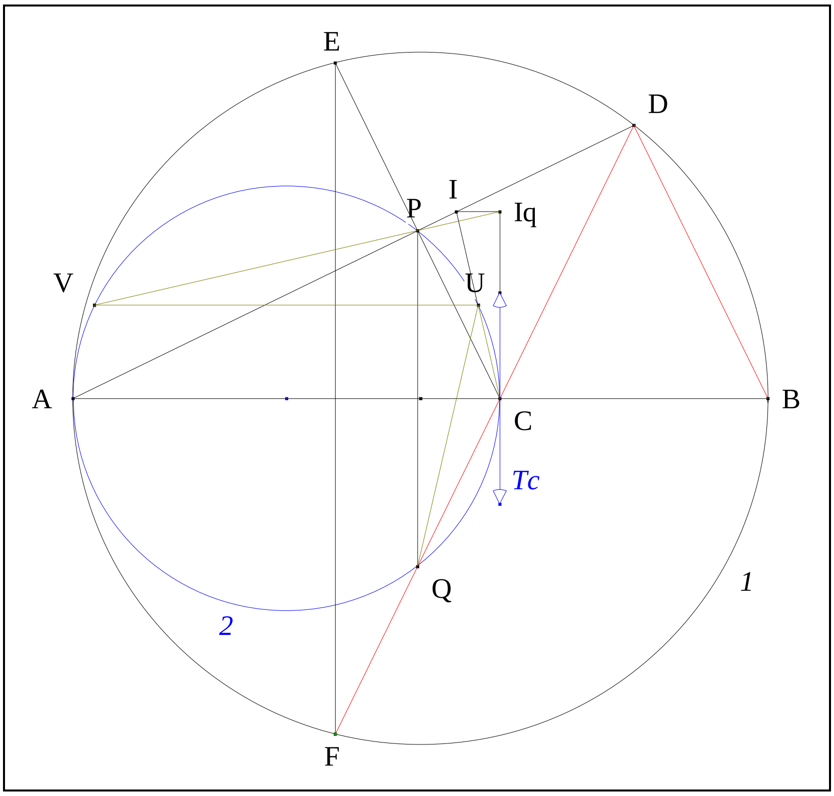
- *7* est le Q-cercle extérieur de Thébault du triangle PQC relativement à la P-cévienne (PC)[17].

- **Conclusion partielle :** d'après II. 2. Un cercle extérieur de Thébault, (M'N') passe par Ip.

- **Scolies :** **(1)** (M'N') // (AB)
  (2) (MN), (M'N') et (AB) sont parallèles entre elles.

LA FERMETURE DE L'AUTEUR

"(I Iq) est parallèle à (AB)"

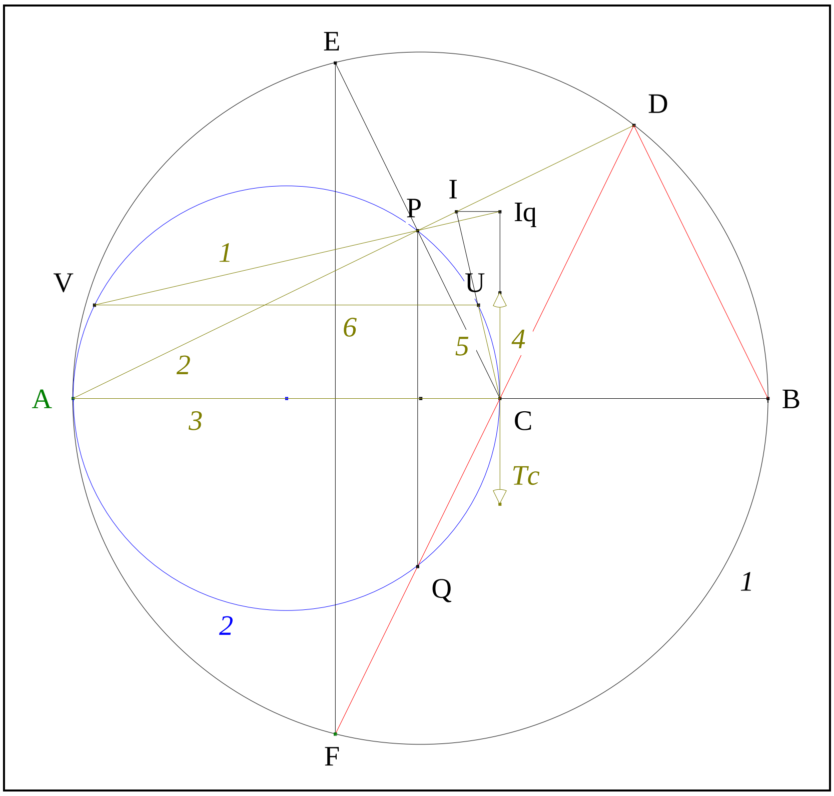


- Notons Tc la tangente à *2* en C.
  et V le second point d'intersection de la P-bissectrice extérieure (PIq) de CPQ avec *2*.

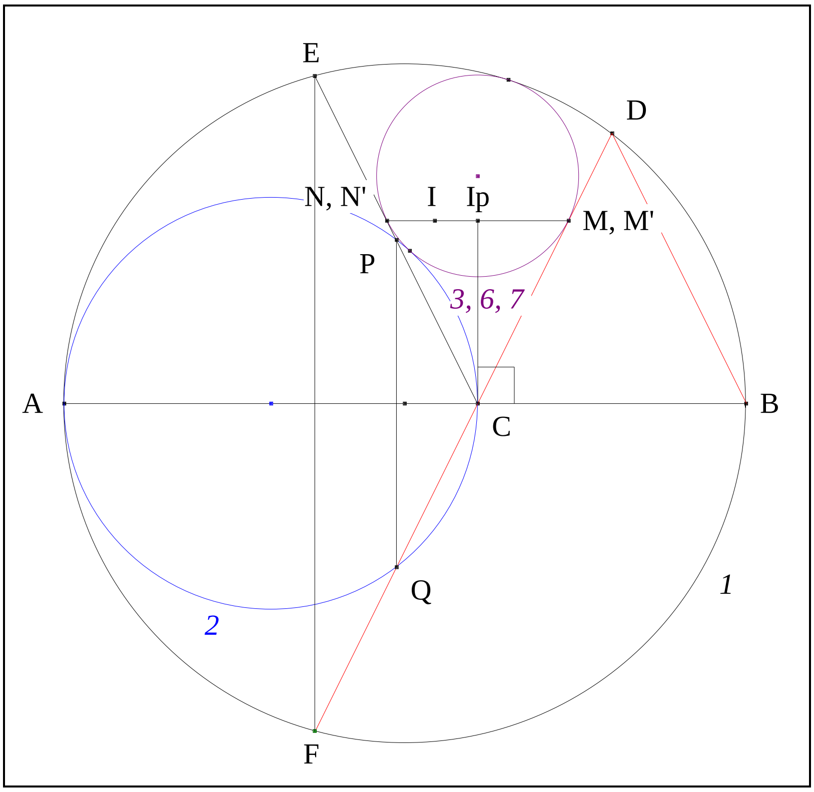
- **Scolies :** **(1)** Tc est la C-bissectrice extérieure de CPQ
  (2) Tc passe par Iq
  (3) (AC) est la C-bissectrice nintérieure de CPQ.

- D'après Catalan "Une parallèle à (AI)" (Cf. Annexe 7), (UV) // (AC).

[17] Voir p. 12.



- D'après Carnot "Pentagramma mysticum" (Cf. Annexe 8) appliqué à l'hexagone dégénéré VPAC Tc UV, la pascale (Iq I) est parallèle à (AC).



- **Scolie :** (MN), (M'N'), (I Iq) et (AB) sont parallèles entre elles.

- D'après le postulat d'Euclide, en conséquence, (MN), (M'N') et (I Iq) sont confondues ; M et M' sont confondus,

N et N' sont confondus
et 3, 6 et 7 sont confondus.

- **Conclusion :** le centre de *3* est sur la perpendiculaire à (AB) en C.

Note historique :

en 1998, l'Inspecteur Général de Mathématiques, Dominique Roux, faisait connaître à certains membres du jury du CAPES externe de mathématiques, ce fameux problème japonais datant de 1803.

En 2003, le professeur Francisco Bellot Rosado m'envoyait la solution métrique décrite dans le manuscrit de T. Yosida[18] et recopiée dans le livre de Fukagawa et Pedoe[19] publié en 1989.
La même année, Francisco Garcia Capitan[20] de Priego de Cordoba (Andalousie, Espagne) publiait sur son site un article concernant ce San Gaku et d'autres.

En 2004, le problème en question apparaît sur le site *Mathlinks*[21] sous le titre "Circles" et deux solutions, l'une métrique et l'autre par inversion, sont proposées.

Le 5 Mai 2005, Darij Grinberg[22] espérant une solution synthétique, repose ce problème sous le titre "Never been solved". Dans l'une des réponses, Virgil Nicula précise que cette "énigme" est une San Gaku et propose une solution analytique. Le 24 du même mois, le problème[23] est reposé avec le même titre et Vladimir Zajic plus connu sous le pseudonyme de "Yetti" en donne une très longue solution métrique.

Entre temps, Alexander Bogolmony[24] introduit cette San Gaku dans son site *Cut-The-Knot* sous le titre "Tangent Circles and an Isosceles Triangle" et présente deux solutions, l'une par inversion de N. Bowler et l'autre par inversion negative de Vladimir i.e. de Yetti.

En Janvier 2009, le problème réapparaît sur le site *Mathlinks* sous le titre "tangent circles"[25]. Une nouvelle preuve métrique est alors proposée par Yetti qui, au passage, généralise d'une façon très élégante ce problème en s'appuyant sur son idée phare

C being the incenter of…

Let ABC be scalene with incenter I. The angle bisectors AI, BI, CI cut the triangle circumcircle (O) again at X, Y, Z. (P) is a circle with diameter IX. (Q) is incircle of the curvilinear triangle BIZ, tangent to the rays IB, IZ and internally tangent to (O). (R) is incircle of the curvilinear triangle CIY tangent to the rays IC, IY and internally to (O).

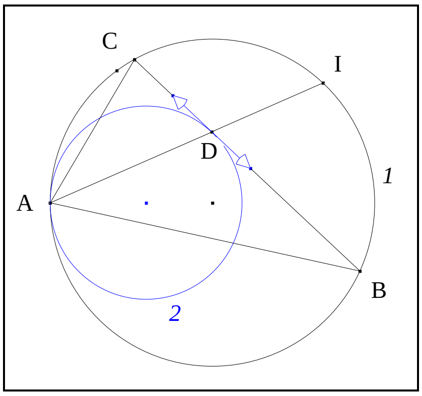
Prove that the circles (Q), (R) are both externally tangent to (P).

Le 17 du même mois, le sud coréen Hansol plus connu sous le pseudonyme de "Leonhard Euler"[26] sur le site *Mathlinks* prouve synthétiquement cette généralisation et en propose une à son tour qui sera résolue par Yetti le 18.

ANNEXE

18 Yosida T., (1819-1892), Zoku Sinpeki Sanpo Kai (?), *Solutions to Mathematical Tablets*, vol. 2.
19 Fukagawa H. and Pedoe D., San Gaku Japanese Temple Geometry Problems, Winnipeg Canada (1989), Example 1. 2. p. 80-81.
20 Garcia Capitan F., *Problemas San Gaku o Problemas Bonitos de Geometria resueltos por Metodos Elementales* ; http://garciacapitan.auna.com/problemas/sangaku1/libro.pdf.
21 Circles, *Mathlinks* du 18/10/2004 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=18266.
22 Grinberg D., Never been solved, *Mathlinks* du 05/05/2005 ; http://alt2.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=38681&start=20.
23 Never been solved, *Mathlinks* du 24/05/2005 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=38681.
24 Tangent Circles and an Isosceles Triangle; http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CirclesAndRegularTriangle.shtml.
25 tangent circles, *Mathlinks* du 13/01/2009 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?search_id=939985547&t=251037.
26 tangent circles, *Mathlinks* du 13/01/2009 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?search_id=939985547&t=251037.

1. Une bissectrice intérieure [27]

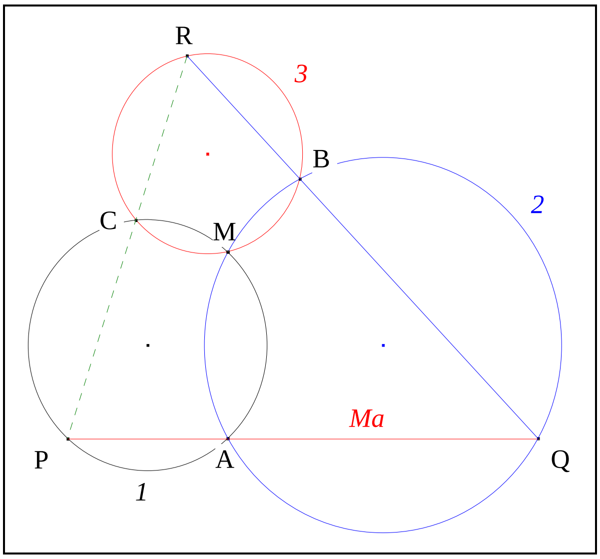


Traits :

	1	un cercle,
	[CB]	une corde de *1*,
	I	un point de l'arc AB de *1*,
	D	une droites passant par I,
	D	le point d'intersection de *D* avec (AB),
	A	le second point d'intersection de *D* avec *1*
et	*2*	le cercle passant par A, par D et tangent à (CB) en D.

Donné : (AD) est la A-bissectrice intérieure du triangle ABC
si, et seulement si,
2 est tangent à *1* en A.

2. Le théorème des trois cercles [28]



Traits :

	1, *2*, *3*	trois cercles concourants,
	M	le point de concours de *1*, *2*, *3*,
	A	le second point d'intersection de *1* et *2*,
	*M*a	une A-monienne de *1* et *2*,
	P, Q	les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*,
	B, C	les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1*
et	R	un point de *3*.

---

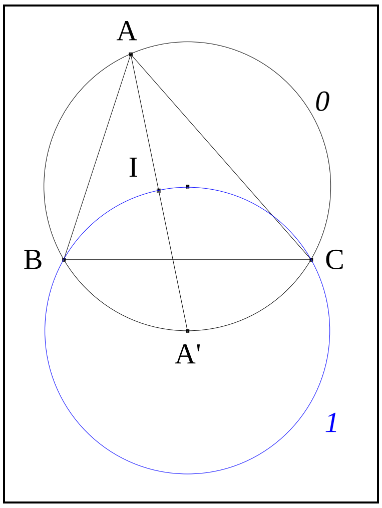
[27] F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, sixième édition (1920), J. Gabay reprint, 283. Théorème 119.

[28] Miquel A., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville 3 (1838) 485-487.
Forder H. G., *Geometry*, Hutchinson (1960) 17.

Donné : (QBR) est une monienne de *2* et *3*
si, et seulement si,
(PCR) est une C-monienne de *1* et *3*.

Commentaire : ce résultat est une réciproque du pivot de Miquel[29].
Il reste vrai dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles

3. Un cercle de Mention[30]



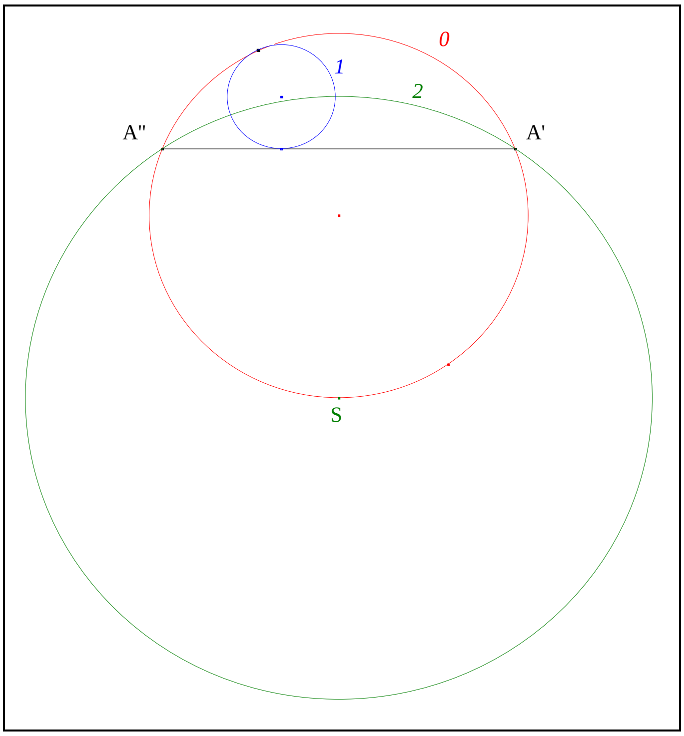
Finition :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	I	le centre de ABC,
	A'	le second point d'intersection de (IA) avec *0*
et	*1*	le cercle de centre A' passant par B et C.

Définition : *1* est le A-cercle de Mention de ABC.

4. Une San Gaku

29 Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.

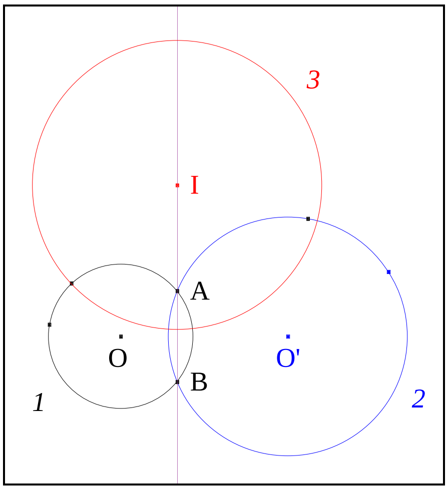
30 Catalan E., Livre II, théorème XXI, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaires* (1879) 46 ;
Johnson R. A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, (1965) 185.



Hypothèses :	*0*	un cercle,
	[A"A']	une corde horizontale de *0*,
	S	le pôle sud de *0*,
	1	un cercle nordique, tangent resp. à (A"A') et à *0*,
et	*2*	le cercle de centre S passant resp. par A", A'.

Conclusion : *2* est orthogonal à *1*.

5. Axe radical de deux cercles sécants[31]

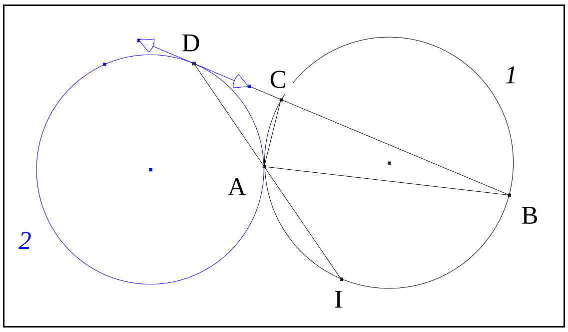


Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	3	un cercle orthogonal à *2*
et	I	le centre de *3*.

[31] Gaultier (de Tours) L., Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, *Cahier* **16** (1813) 124-214.

Donné : I est sur la droite (AB) *si, et seulement si,* *3* est orthogonal à *2*.[32]

6. Une bissectrice extérieure

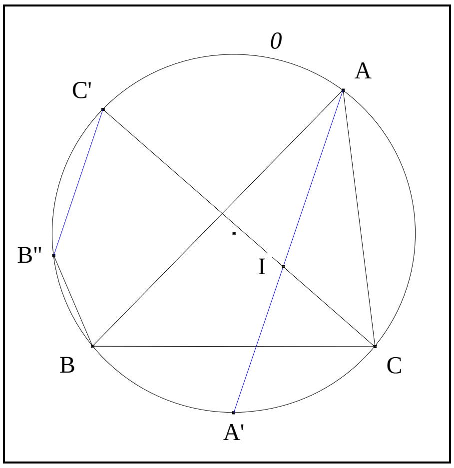


Traits :

	1	un cercle,
	[CB]	une corde de *1*,
	I	un point de l'arc CB de *1*,
	D	une droites passant par I,
	D	le point d'intersection de *D* avec (AB),
	A	le second point d'intersection de *D* avec *1*
et	*2*	le cercle passant par A, par D et tangent à (CB) en D.

Donné : (AD) est la A-bissectrice extérieure du triangle ABC
si, et seulement si,
2 est tangent à *1* en A.

7. Un parallèle à (AI) [33]



Traits :

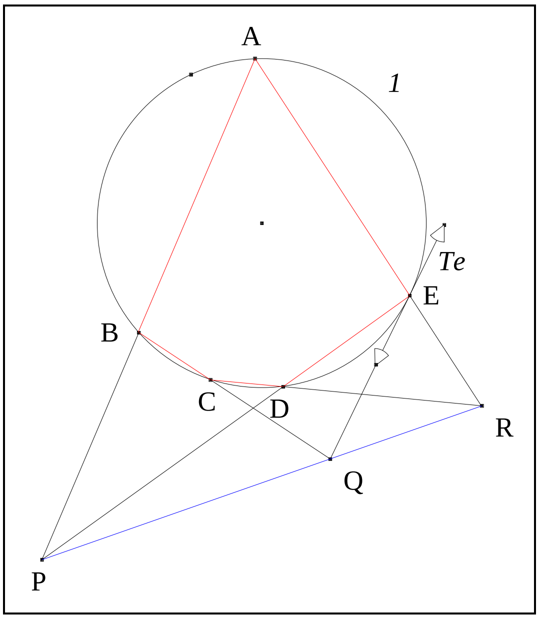
	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	I	le centre de ABC,
	A', C'	les seconds points d'intersection de (AI), (CI) avec *0*
et	B"	le second point d'intersection de la B-bissectrice extérieure de ABC avec *0*.

Donné : (B"C') est parallèle à (AI).

8. Pentagramma mysticum[34]

[32] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, 205.
Gaultier (de Tours) L., Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier 16 (1813) 124-214.

[33] Mention.



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEA	un pentagone tels que les points A, B, C, E soient sur *1*,
	Te	la tangente à *1* en E
et	P, Q, R	les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et Te, (CD) et (EA).

Donné : D est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

---

[34] Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456.