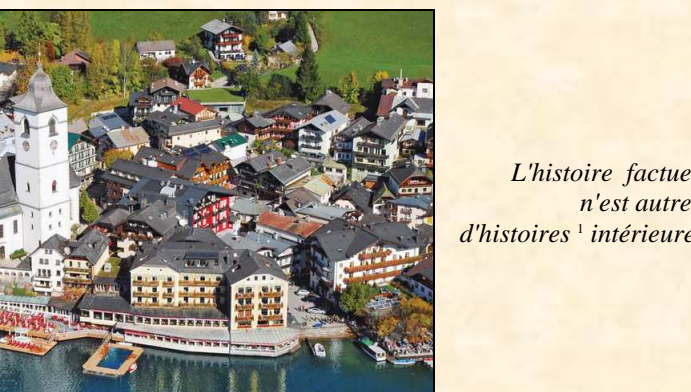


GÉOMÉTRIE

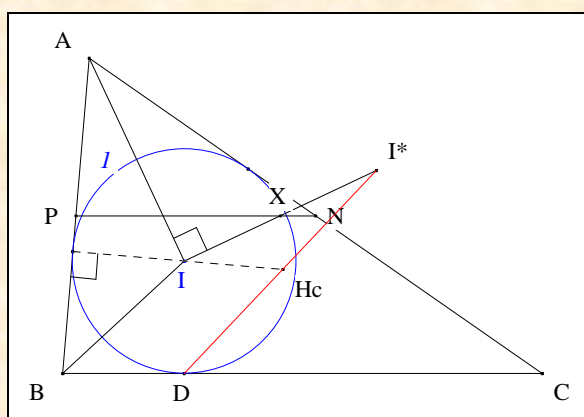
LA BELLE HISTOIRE

UN SUJET DE L'AUTEUR



*L'histoire factuelle et concomitante
n'est autre que le reflet
d'histoires ¹ intérieures et non concomitantes.*

2

Jean-Louis Ayme³

Résumé.

L'auteur présente *La belle histoire* où chaque Sujet, pris dans le noeud coulant d'un lasso, livre, escale après escale, des résultats qui permettent d'élaborer une solution fructueuse par la suite...

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

¹ Vient du latin "historia" qui signifie "histoire vraie", vécue.

² Sankt Wolfgang im Salzkammergut (Austria). Il est internationalement célèbre grâce à l'opérette *L'Auberge du Cheval-Blanc*

³ St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 28/04/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract.

The author presents *The beautiful story* where each subject, taken in the flowing node of a lasso, leads, step after step, to results which will might allow us to reach out eventually for a fruitful solution...

The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Resumen.

El autor presenta *La hermosa historia* donde cada Sujeto, atrapado en el nodo fluido de un lasso, trae, paso a paso, resultados que permiten desarrollar posiblemente una solución fructífera...

Las figuras están en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

Zusammenfassung.

Der Autor präsentiert *Die schöne Geschichte* in welcher jeder Leitgedanke zuerst durch den lockeren Knoten eines Lasso's fließen muss, um nach und nach, Ergebnisse zu zeigen, die uns im Endeffekt eine fruchtbare Lösung ermöglichen...

Die Figuren sind alle in einer allgemeinen Position und alle aufgeführten Lehrsätze können synthetisch nachgewiesen werden.



J'ai croisé...



J'ai rencontré...

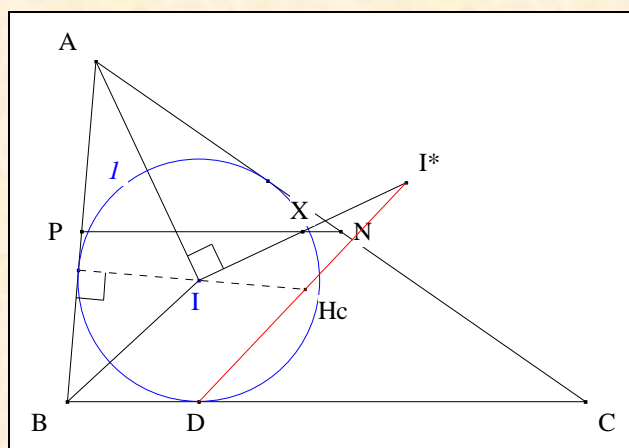


Je me suis déplacé...

LE SUJET DE L'AUTEUR ⁴

VISION

Figure :



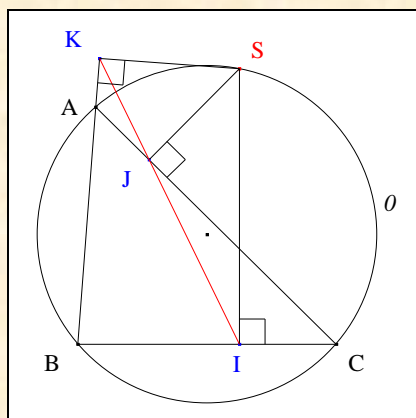
Traits :	ABC	un triangle tel que $AB < AC$,
	N, P	les milieux resp. de $[AC]$, $[AB]$,
	I	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de I ,
	D	le point de contact de I avec (BC) ,
	X	le point d'intersection de (NP) et de la perpendiculaire à (AI) en I,
	I^*	le symétrique de I par rapport à X
et	H_c	l'orthocentre du triangle IAB.
Donné :	I^* est sur (DH_c) .	

⁴ Ayme J.-L., Hard or simple, AoPS du 18/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1433720_hard_or_simple
 Problema 825 ; <http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>

ESCALE 1

La S-droite de Simson-Wallace ⁵

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 S un point
 et I,J,K les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB).

Donné : S est sur O si, et seulement si, (IJK) est une ménélienne de ABC.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. ⁶

Scolie : (IJK) est la S-droite de Simson-Wallace ou pédale de pôle S de O relativement à ABC.

Note historique : bien que l'historien d'Edimburgh, John Sturgen Mackay ⁷ n'a trouvé aucune trace de la droite dite de Simson dans ses oeuvres, il montra que cette erreur en paternité provenait du géomètre français François Joseph Servois qui écrivait en 1814 :

*le théorème suivant, qui est, je crois, de Simson...*⁸

Cette erreur allait être reprise par Jean Victor Poncelet⁹ qui, en omettant la remarque de Servois, allait perpétuer définitivement ce fait. C'est en 1799 que William Wallace ¹⁰ découvrait "cette droite", bien après la mort de Simson en 1768.

⁵ Wallace, *Leybourne's mathem. repository* (old series) **2** (1798) 111

⁶ Ayme J.L., *Droite de Simson...*, G.G.G., vol. 7, p. 2-4 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

⁷ MacKay J. S., *Proceedings Edinburgh Math Soc.*, (1890-1891) 83

⁸ Servois F. J., *Annales de Gergonne* **4** (1813-14) 250-251

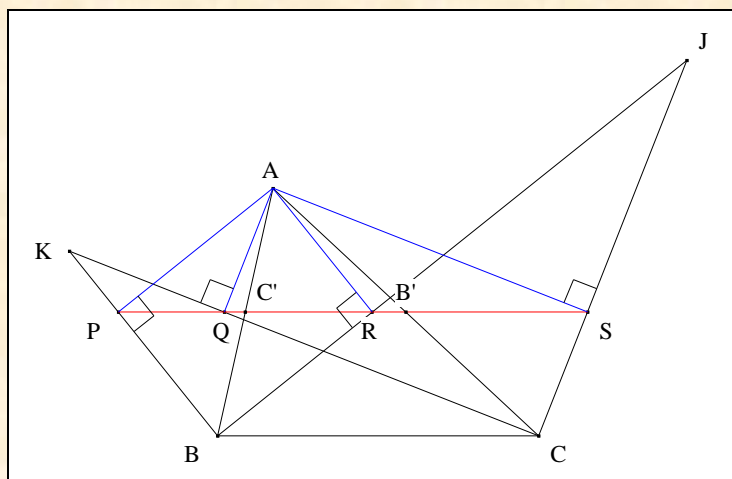
⁹ Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures* (1822)

¹⁰ Wallace W. (1768-1843), *Leybourne's mathem. repository* (old series) **2** (1798) 111

ESCALE 2

La A-droite d'Arthur Lascases ¹¹

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 B', C' les milieux resp. de [CA], [AB],
 J, K les points B, C-excentraux de ABC
 et P, Q, R, S les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp.
 sur (BK), (CK), (BK), (CK).

Donné : P, Q, R, S, B' et C' sont alignés.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat basée sur la droite de Simson-Wallace peut être vue sur le site de l'auteur. ¹²

Note historique : les premières solutions ont été données par Joseph Vigne de Toulon, Léon Vidal, élève du même lycée (classe de Monsieur Huet) et l'abbé Poitrasson. Le recours à la droite de Simson-Wallace a été utilisé par Wilkinson en 1862 et aussi par l'élève Léon Vidal ¹³ en 1872.

¹¹ Lascases Arth., Question 477, *Nouvelles Annales* 18 (1859) 171

¹² Ayme J.L., Un unlikely concurrence, G.G.G., vol. 4, p. 1-4 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

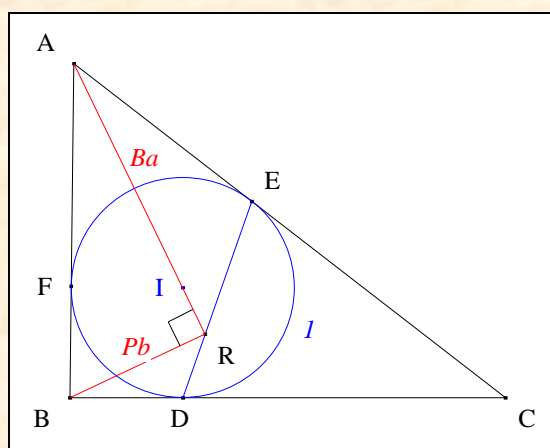
¹³ Vidal L., *Nouvelles Annales* 2 11, (1872) 265

ESCALE 3

La A-ligne brisée de Nathan Altshiller-Court ¹⁴

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
I	le cercle inscrit à ABC,
I	le centre de I ,
DEF	le triangle de contact de ABC,
Ba	la A-bissectrice de ABC,
Pb	la perpendiculaire à Ba issue B
et R	le point d'intersection de Pb et Ba .

Donné : R est sur (DE).

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat basée sur le théorème de Reim peut être vue sur le site de l'auteur. ¹⁵

Note historique : ce résultat qui a été qualifié de *an unlikely concurrence* par Ross Honsberger ¹⁶ en 1995, a été proposé comme exercice par Nathan Altshiller-Court en 1952 et avait été étudié dans le cas particulier du triangle rectangle par Georges Papelier ¹⁷ en 1927.

¹⁴ Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc., (1952) exercice **43**, p. 118
 Lines from vertices to some point are perpendicular, 2012 Indonesia Round 2.5 TST **1** Problem **3**, *Mathlinks* du 10/05/2012 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=479013>
 Nice, AoPS du 22/01/2014 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=572362>
¹⁵ Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, vol. **4**, p. 5-6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
¹⁶ Honsberger R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31
¹⁷ Papelier G., *Exercices de géométrie Modernes*, Pôles et polaires (1927) 19

ESCALE 4

Indian TST Day 2 Problem 1

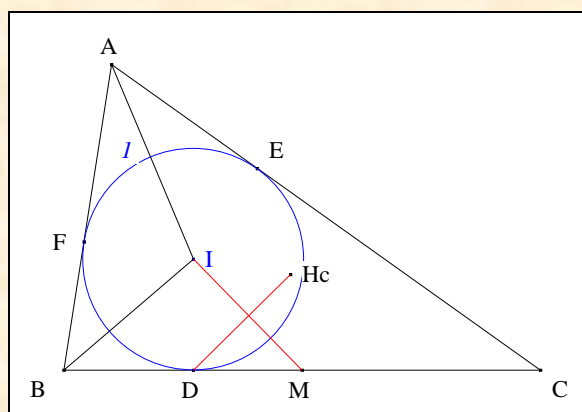
Une perpendiculaire

à

la A-droite (MI) de Jean-Baptiste Durrande¹⁸

VISION

Figure :



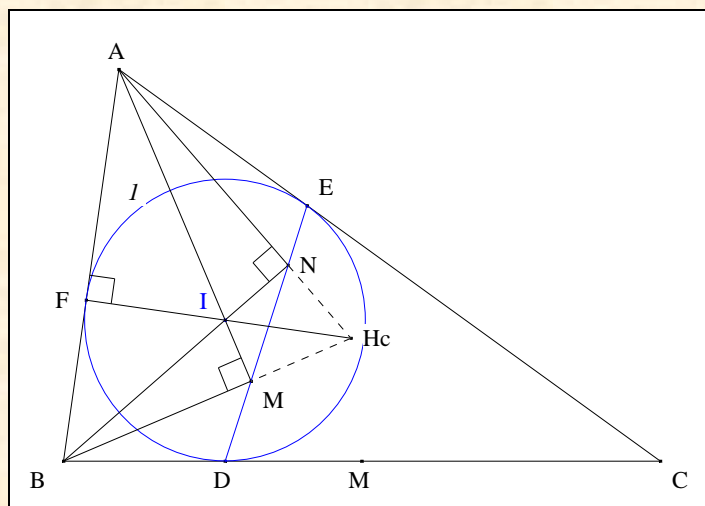
Traits : ABC un triangle,
M le milieu de [BC],
I le cercle inscrit à ABC,
I le centre de I,
DEF le triangle de contact de ABC
et Hc l'orthocentre du triangle IAB.

Donné : (DHc) est perpendiculaire à (MI).

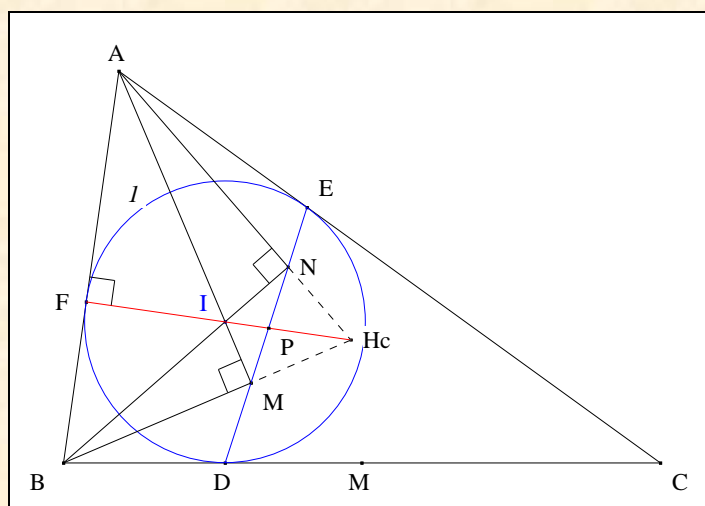
VISUALISATION

¹⁸

Line joining incentre and midpoint perpendicular to a line, AoPS du 11/07/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=597376>
beautiful geometry, AoPS du 20/06/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1104088_beautiful_geometry
Geometry, AoPS du 18/11/2016
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1301875_incircle_and_circumcircle



- Notons M, N les points d'intersection de (DE) resp. avec $(AI), (BI)$.
- D'après Etape 3, $(AN), (BM)$ sont resp. les A, B-hauteurs de IAB ;
en conséquence, H_c est le point d'intersection de (AN) et (BN) .



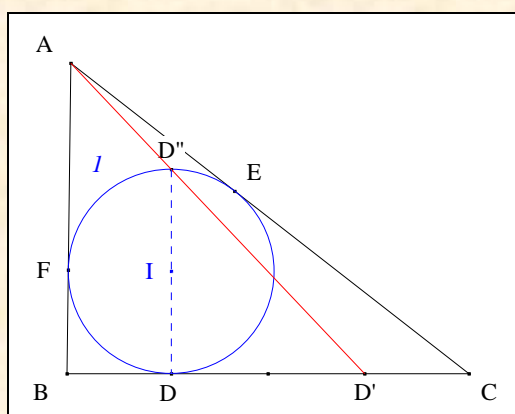
- Notons P le point d'intersection de (DE) et (FIH_c) .
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet"
appliqué au quadrilatère IMH_cN , le quaterne (I, H_c, P, F) est harmonique ;
par permutation, le quaterne (P, F, I, H_c) est harmonique.

ESCALE 5

La A-droite de Simon L'Huilier

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le cercle inscrit de ABC,
 I le centre de I ,
 DEF le triangle de contact de ABC,
 D' l'isotome de D relativement à $[BC]$
 et D'' l'antipôle de D relativement à I .

Donné : D'' est sur (AD') .²¹

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur.²²

Scolie : D' est le point de contact du A-excercle de ABC.

Note historique : dans le premier tome des *Annales de Gergonne*²³ de 1810-11, Simon L'Huilier introduit la dénomination de "cercle exinscrit" à un triangle dont l'intérêt se développera au début du 19e siècle.

²¹ incircle and excircle, AoPS du 31/10/2012 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=504812>

²² Ayme J.-L., La ponctuelle (MI), vol. 7, p. 5-8 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

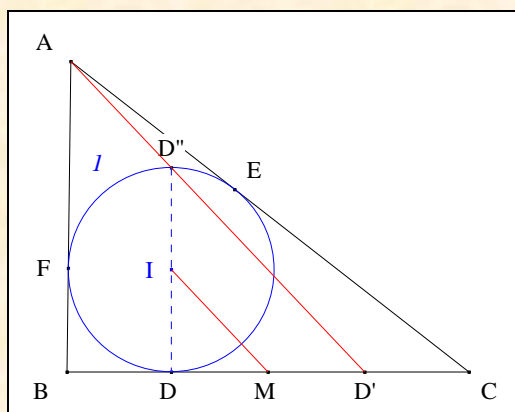
²³ *Annales de Gergonne*, tome 1 (année 1812) 156

ESCALE 6

Simon L'Huilier et Jean-Baptiste Durrande

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
M le milieu de [BC],
 I le cercle inscrit de ABC,
I le centre de I ,
DEF le triangle de contact de ABC,
D' l'isotome de D relativement à [BC]
et D'' l'antipôle de D relativement à I .

Donné : (MI) est parallèle à (AD'D'').

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur. ²⁴

²⁴

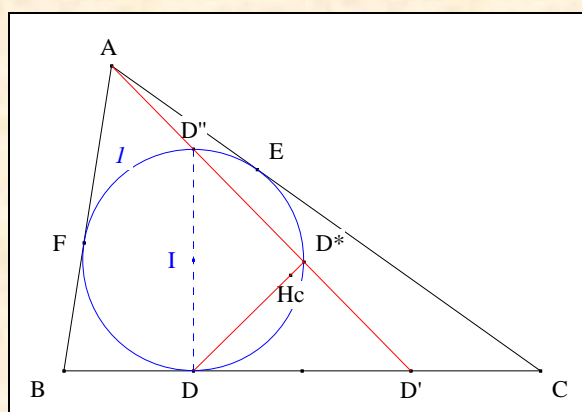
Ayme J.-L., La ponctuelle (MI), vol. 7, p. 8-10 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

ESCALE 7

*L'orthopoint D^**

VISION

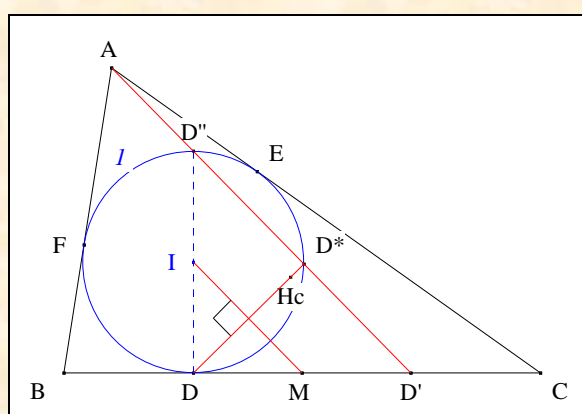
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le cercle inscrit à ABC,
 I le centre de I ,
DEF le triangle de contact de ABC,
 D' l'isotome de D relativement à $[BC]$,
 D'' l'antipôle de D relativement à I ,
 H_c l'orthocentre du triangle IAB
et D^* le second point d'intersection de (AD'') avec I .

Donné : D^* est sur (DH_c) .

VISUALISATION



- Notons M le milieu de $[BC]$.
- D'après Escale 5, A, D', D'' et D^* sont alignés.
- D'après Escale 4, $(DH_c) \perp (MI)$.
- D'après Escale 6, $(MI) \parallel (AD^*)$;

en conséquence,

$$(DHc) \perp (AD^*).$$

- D'après Thalès "Triangle inscritible dans un demi-cercle",

$$(DD^*) \perp (AD^*) ;$$

en conséquence,

$$(DD^*) \parallel (DHc) ;$$

d'après le postulat d'Euclide,

$$(DD^*) = (DHc).$$

- **Conclusion :** D^* est sur (DHc) .

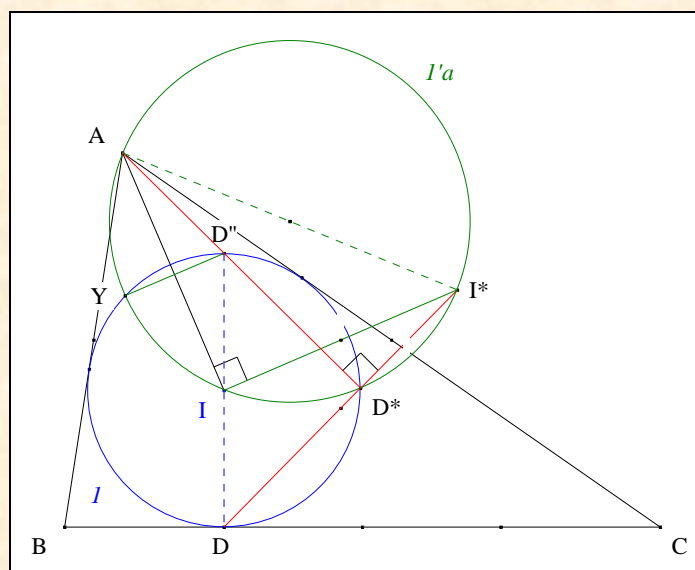
ESCALE 8

Le lemme

"Cercle passant par le centre d'un cercle" ²⁵

VISION

Figure :



Traits :

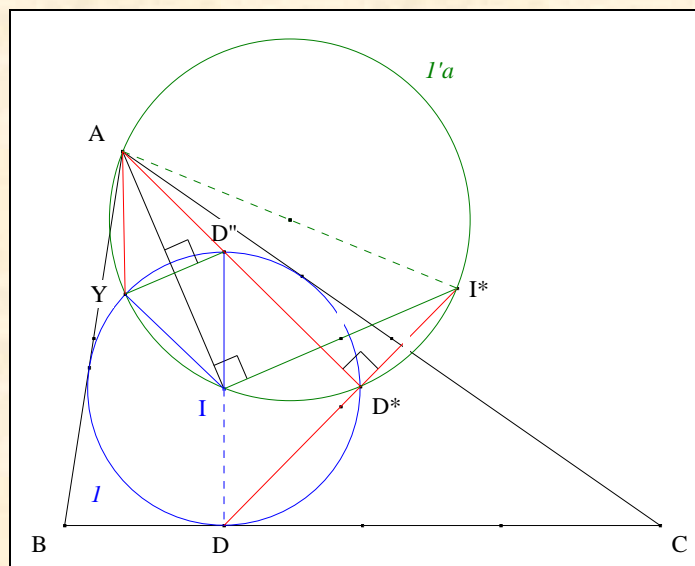
ABC	un triangle tel que $AB < AC$,
I	le cercle inscrit à ABC,
I	le centre de I ,
D	le point de contact de I avec (BC) ,
D''	l'antipôle de D relativement à I ,
D^*	le second point d'intersection de (AD'') avec I ,
I^*	le point d'intersection de (DD^*) et de la perpendiculaire à (AI) en I ,
$I'a$	le cercle de diamètre $[AI^*]$; il passe par I et D^* ;
et	Y le second point d'intersection de $I'a$ et I .

Donné : (AI) est la médiatrice de $[YD'']$.

VISUALISATION

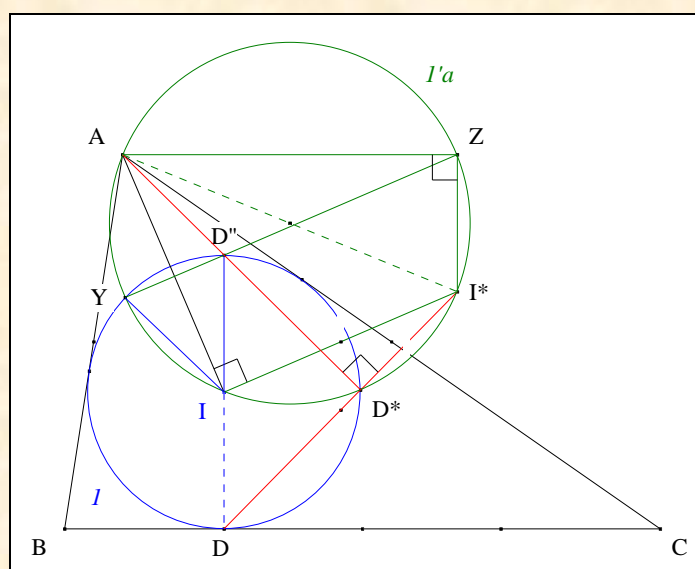
²⁵

Ayme J.-L. Simplicity 1, G.G.G. vol. 36, p. 11-12 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Par hypothèse, $IY = ID''$.
- D'après "Cercle passant par le centre d'un cercle" ²⁶, $AY = AD''$.
- **Conclusion** : d'après "Le théorème de la médiatrice", (AI) est la médiatrice de $[YD'']$.

Scolies : (1) deux segments égaux

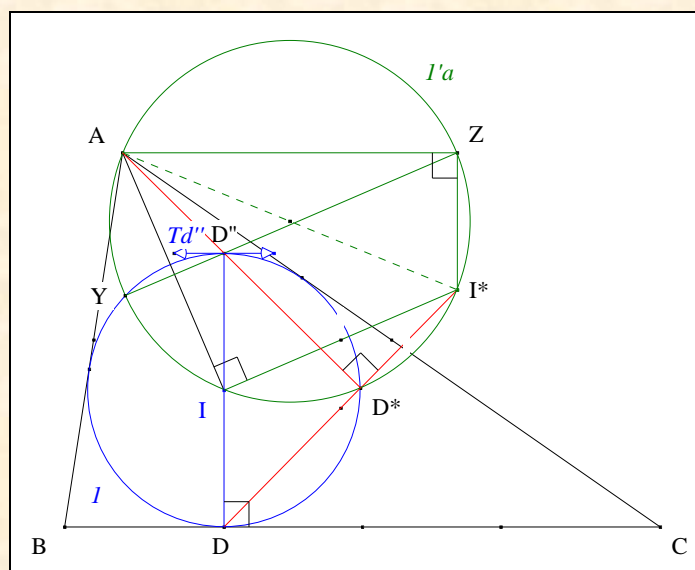


- Notons Z le second point d'intersection de (YD'') avec $I'a$.
- Le trapèze $IYZI^*$ étant cyclique, $I^*Z = IY$;
- **Conclusion** : $I^*Z = ID''$.

²⁶

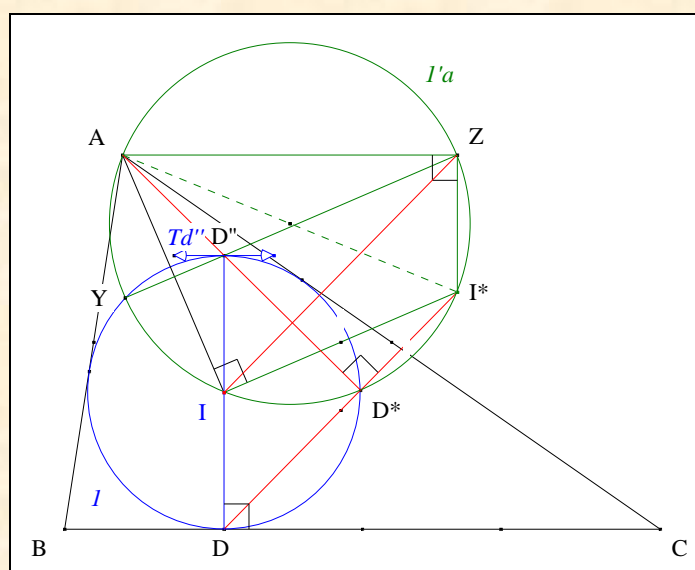
Ayme J.-L. Simplicity 1, G.G.G. vol. 36, p. 11-12 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

(2) Un premier parallélogramme



- Notons Td'' la tangente à I en D'' .
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi-cercle", $(I^*Z) \perp (AZ)$;
- Les cercles $I'a$ et I , les points de base D^* et Y , les moniennes (AD^*D'') et (ZYD'') , conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que en conséquence, $(AZ) \parallel Td''$; $(I^*Z) \perp Td''$.
- Par hypothèse, $Td'' \perp (ID'')$; d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(I^*Z) \parallel (ID'')$.
- **Conclusion :** le quadrilatère $I^*ZD''I$ est un parallélogramme.

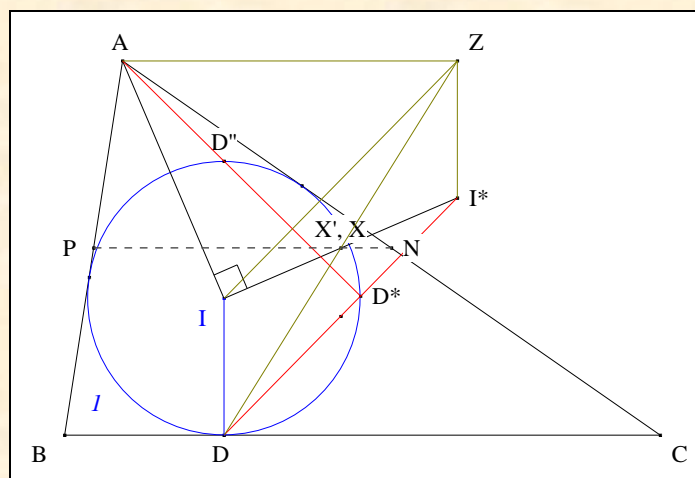
(2) Un second parallélogramme



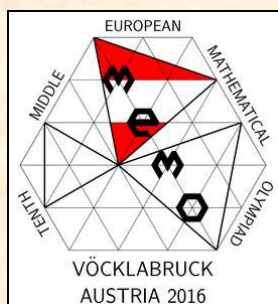
- Nous avons : $ID = ID''$ et D, I, D'' alignés.
- **Conclusion :** le quadrilatère I^*ZID est un parallélogramme.

- Notons Z le point tel que I^*DIZ soit un parallélogramme
et X' le point d'intersection de (II^*) et (DZ) .

- **Conclusion partielle :** X' est le milieu resp. de $[II^*]$, $[DZ]$.



- D'après Etape 8, (AZ) est parallèle à (BC) .
- (NP) étant l'axe médian de la bande de frontières (AZ) et (BC) , X' et X sont confondus.
- **Conclusion :** X est le milieu de $[II^*]$.



AUBERGE

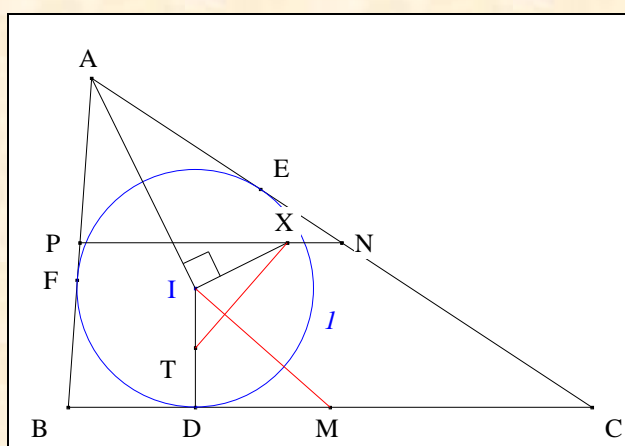
10th Middle European Mathematical Olympiad 2016

Problem 6²⁸

Une retombée

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle tel que $AB < AC$,
MNP	le triangle médian de ABC,
I	le cercle inscrit à ABC,
I	le centre de I ,
D	le point de contact de I avec (BC) ,
X	le point d'intersection de (NP) et de la perpendiculaire à (AI) en I

et

T	le milieu de $[ID]$.
-----	-----------------------

Donné : (TX) est perpendiculaire à (IM) .

VISUALISATION

²⁸

MEMO 2016, Vöcklabruck, Austria, on 22 – 28 August 2016
 nice geometry, AoPS du 10/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1426915_nice_geometry
 incenter and midpoints, perpendicularity, AoPS du 25/08/2016 ;
<https://artofproblemsolving.com/community/c6h1295939p6876261>

