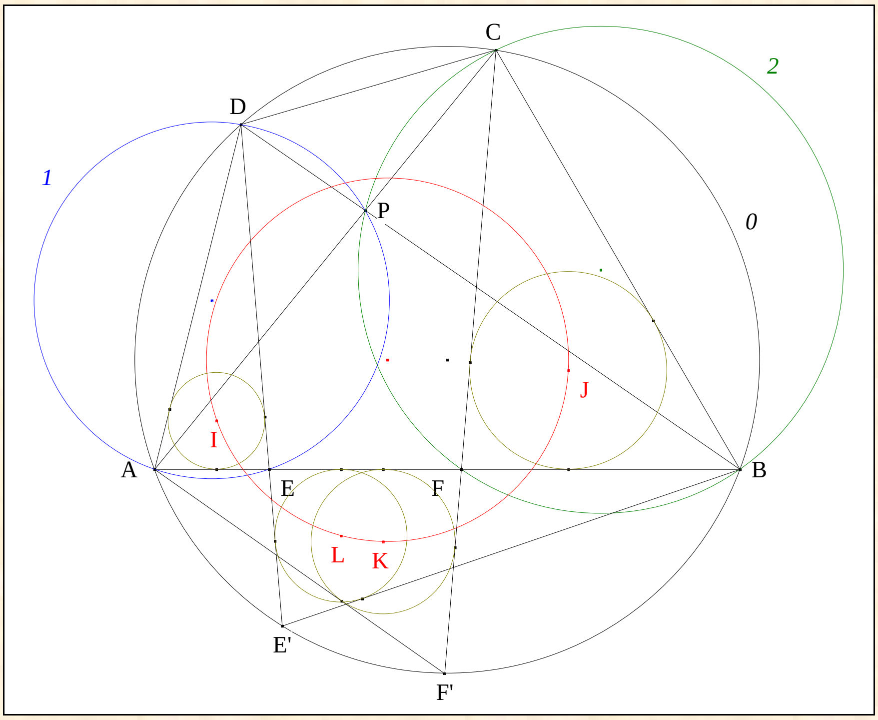
LE CERCLE

DE

LINH NGUYEN VAN

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur propose une nouvelle approche purement synthétique d'un résultat remarquable du vietnamien Linh Nguyen Van [2] bien connue sous le pseudonyme "Livetolove212" sur le site *Art of Problem Solving* [3].
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author proposes a new purely synthetic approach to a remarkable result of the Vietnamese Linh Nguyen Van Linh [4], well-known under the pseudonym "Livetolove212" on the *Art of Problem Solving* website.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved

---

1 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/09/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
2 a traduit cet article et publié sur sont site : https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2016/10/tam-noi-tiep-dong-vien.pdf
3 http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6_geometry
4 translated this article and published on site: https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2016/10/tam-noi-tiep-dong-vien.pdf

synthetically.

Tóm tắt. Trong bài viết này, tác giả đưa ra một lời giải sơ cấp cho bài toán thú vị được đề xuất bởi tác giả người Việt Nam- Nguyễn Văn Linh- được biết đến với tên gọi "Livetolove212" trên diễn đàn *Art of Problem Solving*.
Hình vẽ của bài toán được vẽ ở trường hợp tổng quát. Các hình vẽ khác chứng minh tương tự.

Sommaire

A. Le problème
ou
quatre points cocycliques 3

Lemme **1**
Lemme **2**
Lemme **3**
Lemme **4**
Quatre points cocycliques

B. Le problème gémellaire
ou
quatre points cocycliques 14

C. Le cercle de Linh Nguyen Van 20

1. Le problème
2. Archive
3. Une très courte biographie

D. Un résultat de l'auteur 24

A. LE PROBLÈME

OU

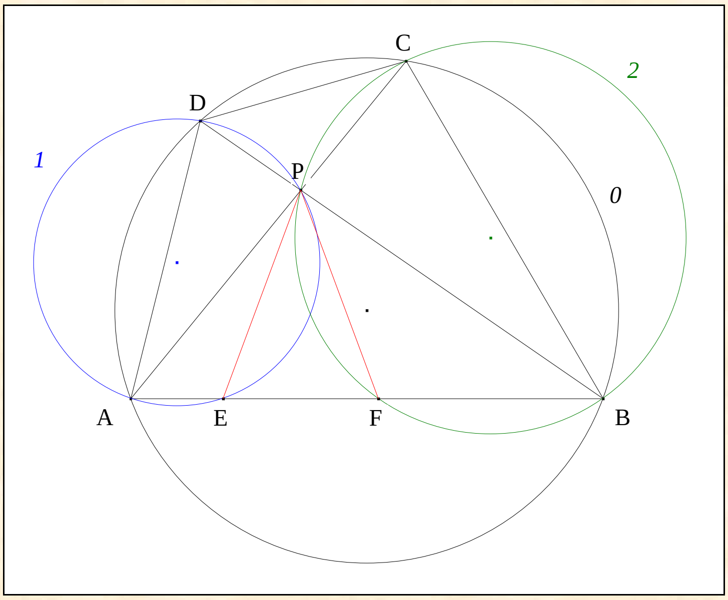
QUATRE POINTS COCYCLIQUES

LEMME 1

Dmitry Shvetsov

VISION

Figure :

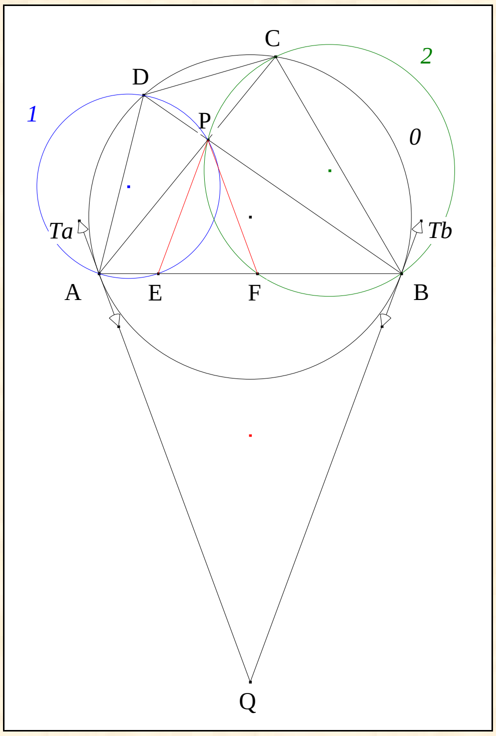


Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC
et	E, F	les seconds points d'intersection de (AB) resp. avec *1*, *2*.

Donné : PE = PF. [5]

VISUALISATION

[5] Shvetsov D., **VI** Geometrical Olympiad in honour of I. F. Sharygin. The correspondence round. Solution, Problem **4** ;
http://geometry.ru/olimp/2010/zaochsol-e.pdf
Ayme J.-L.(redécouverte), Two equal segment, AoPS du 18/09/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1307448_two_equal_segments



- Notons *Ta*, *Tb* les tangentes à *0* resp. en A, B
  et Q le point d'intersection de *Ta* et *Tb*.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base D et A, les moniennes (BDP) et (BAE), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que *Tb* // (PE).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *Ta* // (PF).

- **Scolie :** le triangle QBA est Q-isocèle.

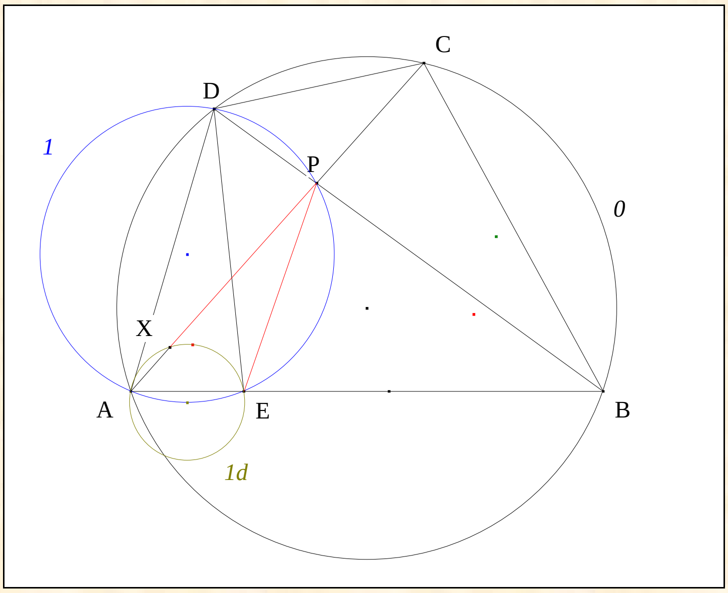
- Le triangle PEF étant homothétique à QBA, est P-isocèle.

- **Conclusion :** PE = PF.

LEMME 2

VISION

Figure :



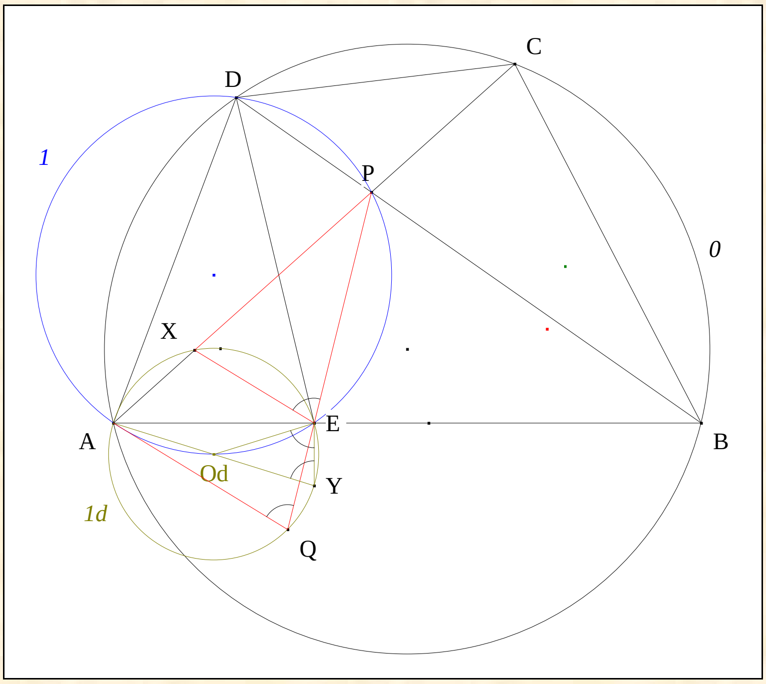
Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	1	le cercle circonscrit au triangle PAD,
	E	le second point d'intersection de (AB) avec *1*,
	1d	le D-cercle de Mention [6] du triangle DAE
et	X	le second point d'intersection de (PA) avec *1d*.

Donné : PX = PE. [7]

VISUALISATION

6 il passe par A, E et le centre de DAE

7 Ayme J.-L., An isoceles triangle, AoPS du 15/09/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1306238_an_isoceles_triangle
Ayme J.-L., Un triangle isocèle, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1327712,1327712#msg-1327712



- Notons Od le centre de *1d* ; Od est sur *1* ;
  et Y, Q les seconds points d'intersection de *1d* resp. avec (AOd), (PE).

- Une chasse angulaire :

  * d'après Möbius "Angle de deux cercles" appliqué aux cercles *1* et *1d*, <PEX = <OdEY

  * le triangle OdEY étant Od-isocèle, <OdEY = <EYOd

  * par une autre écriture, <EYOd = <EYA

  * par "Angles inscrits", <EYA = <EQA

  * par transitivité de =, <PEX = <EQA

  * par "Angles correspondants", (EX) // (QA).

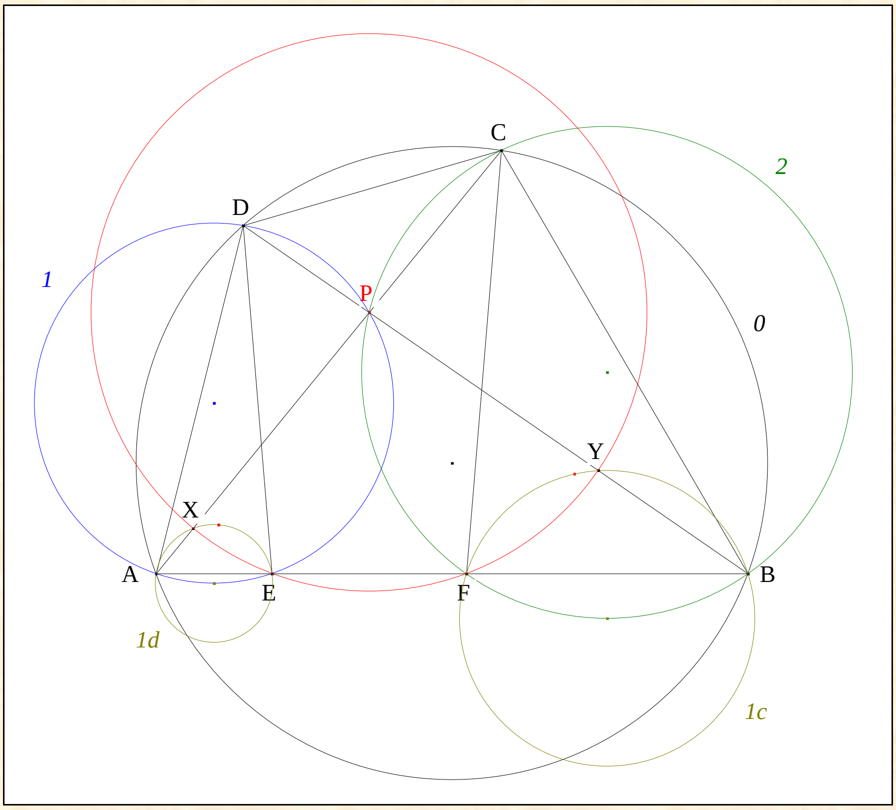
- Le trapèze cyclique EXAQ étant isocèle, le triangle PXE est P-isocèle.

- **Conclusion :** PX = PE.

LEMME 3

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC,
	E, F	les seconds points d'intersection de (AB) resp. avec *1*, *2*,
	1d, *1c*	les D, C-cercle de Mention resp. des triangles DAE, CBF
et	X, Y	les seconds points d'intersection resp. de (PA) avec *1d*, (PB) avec *1c*.

Donné : X, E, F et Y sont cocycliques. [8]

VISUALISATION

- D'après **A.** Lemme **1**, PE = PF.
- D'après **A.** Lemme **2**, PE = PX et PF = PY.
- **Conclusion :** X, E, F et Y sont cocycliques.

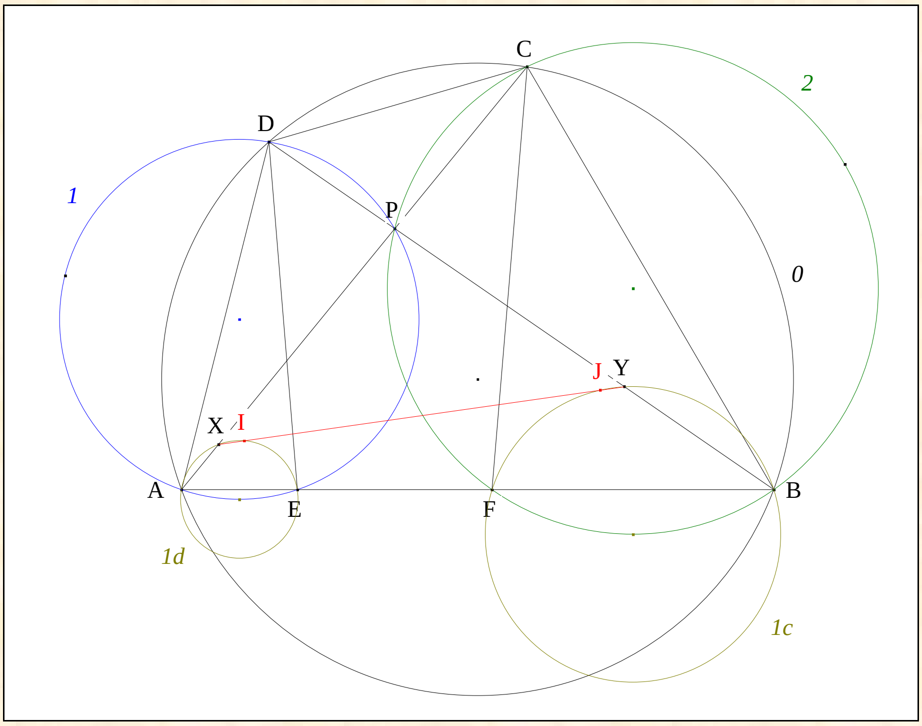
---

[8] Ayme J.-L., A nice circle, AoPS du 18/09/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1307470_a_nice_circle

LEMME 4

VISION

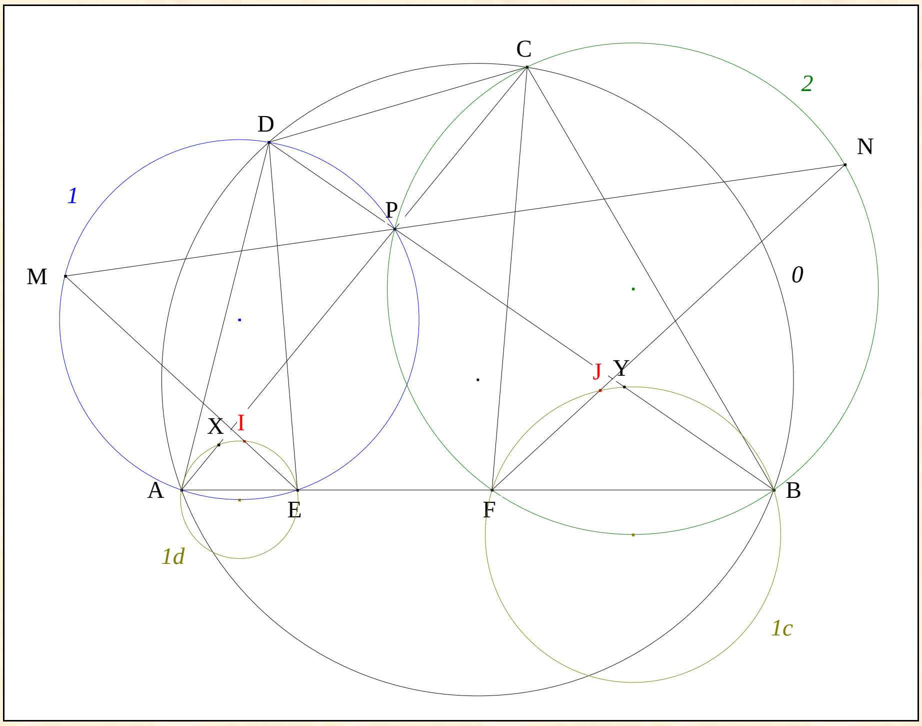
Figure :



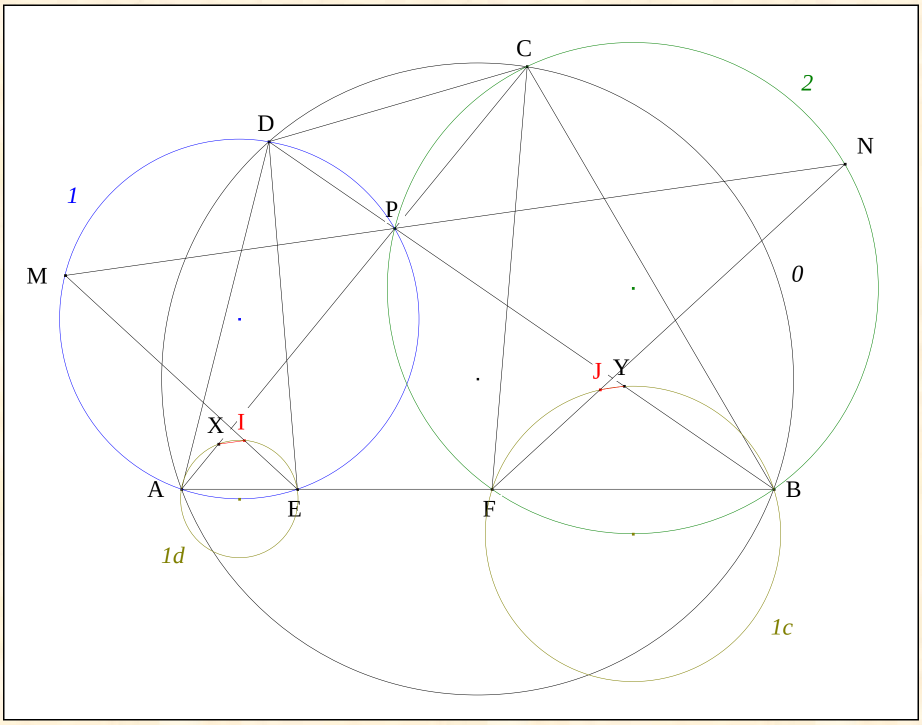
Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC,
	E, F	les seconds points d'intersection de (AB) resp. avec *1*, *2*,
	1d, *1c*	les D, C-cercle de Mention resp. des triangles DAE, CBF,
	X, Y	les seconds points d'intersection resp. de (PA) avec *1d*, (PB) avec *1c*
et	I, J	les centres resp. des triangles AED, BFC.

Donné : X, I, J et Y sont alignés.

VISUALISATION

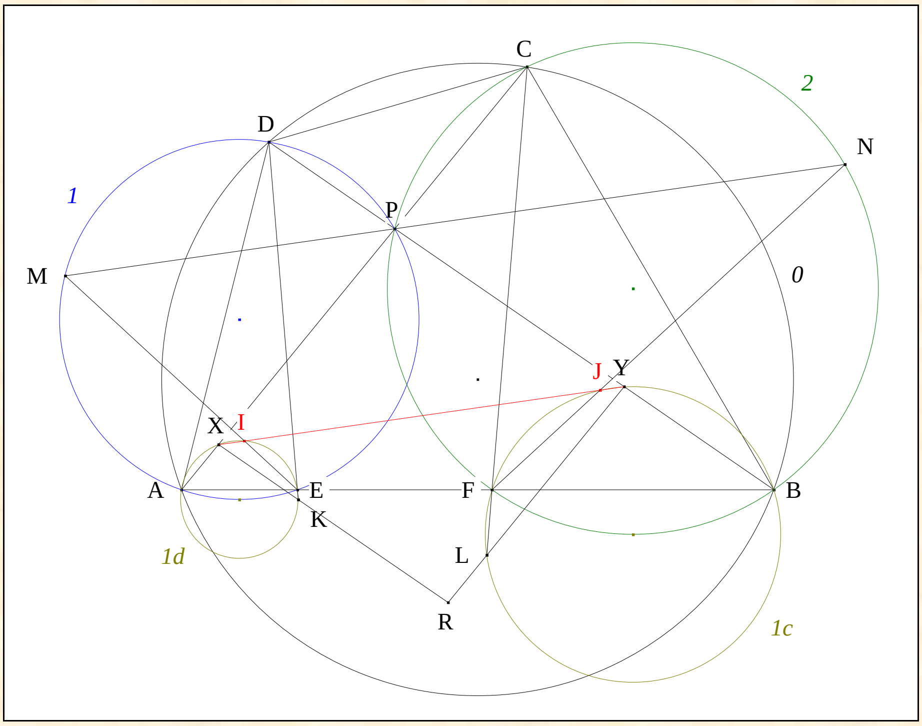


- Notons M, N les seconds points d'intersection resp. de (EI) avec *1*, (FJ) avec *2*.
- M étant le second E-perpoint de AED, (PM) est la P-bissectrice intérieure de PAD.
- N étant le second F-perpoint de BFC, (PN) est la P-bissectrice intérieure de PBC.
- Les triangles PAD et PBC étant P-opposés, (PM) et (PN) sont confondues.
- **Conclusion partielle :** M, P et N sont alignés.



- Les cercles *1d* et *1*, les points de base A et E, les moniennes (XAP) et (IEM), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (XI) // (PM).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (YJ) // (PN).



- Notons K, L les seconds points d'intersection resp. de (DE) avec *1d*, (CF) avec *1c*.

- Les cercles *1d* et *1*, les points de base A et E, les moniennes (XAP) et (KED),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (XK) // (PD).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (YL) // (PC).

- Notons R le point d'intersection de (XK) et (YL).

- Par parallélisme, **(1)** (XI) est la X-bissectrice intérieure du losange XPYR

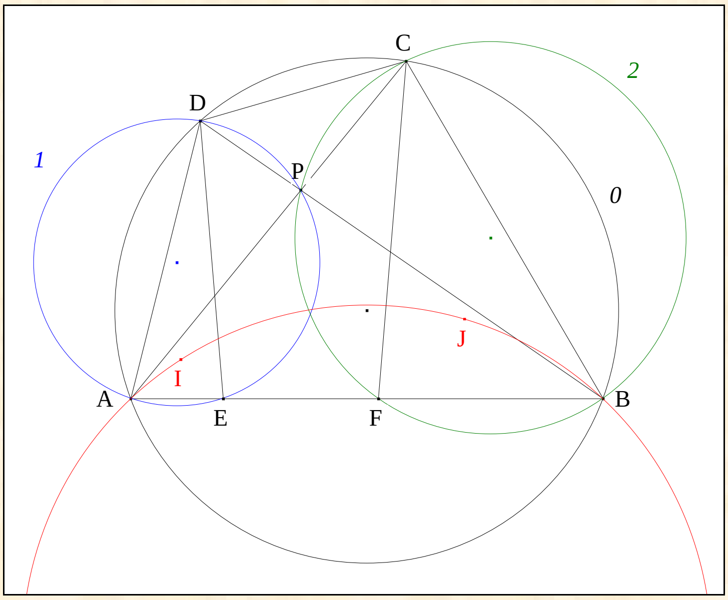
  (2) (YJ) est la Y-bissectrice intérieure du losange XPYR.

- **Conclusion :** X, I, J et Y sont alignés.

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

VISION

Figure :

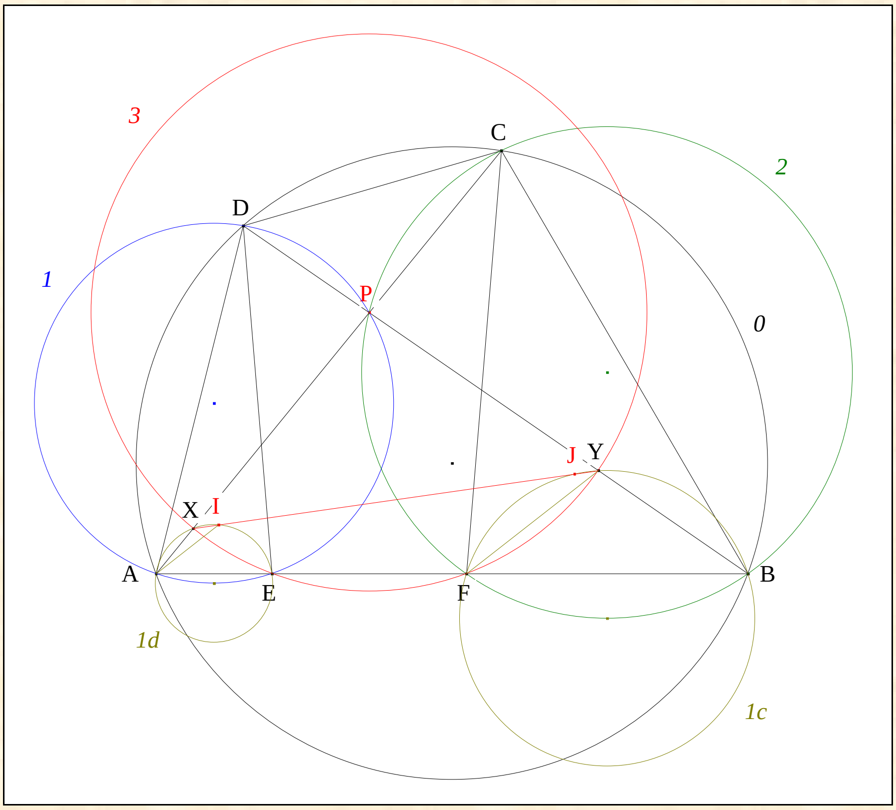


Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC,
	E, F	les seconds points d'intersection de (AB) resp. avec *1*, *2*,
et	I, J	les centres resp. des triangles AED, BFC.

Donné : A, I, J et B sont cocycliques. [9]

VISUALISATION

[9] Nguyen Van Linh, Incircle problem, AoPS du 06/03/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/u57217h1208052p5974754



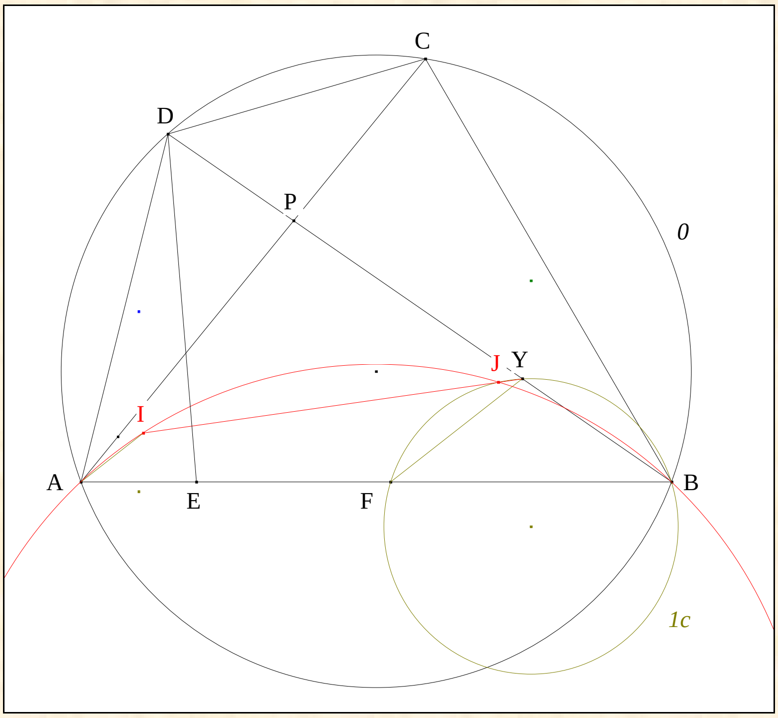
- Notons *1d*, *1c* les D, C-cercle de Mention resp. des triangles DAE, CBF
  et X, Y les seconds points d'intersection resp. de (PA) avec *1d*, (PB) avec *1c*.

- D'après **A.** lemme **3**, X, E, F, et Y sont cocycliques.

- Notons 3 ce cercle.

- D'après **A.** lemme **4**, X, I, J et Y sont alignés.

- Les cercles *1d* et *3*, les points de base E et X, les moniennes (AEF) et (IXY), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AI) // FY).



- Le cercle *1c*, les points de base B et J, les moniennes naissantes (FBA) et (YJI), conduisent au théorème **0''** de Reim ; en conséquence, B, J, A et I sont cocycliques

- **Conclusion :** A, I, J et B sont cocycliques.

Note historique : une preuve différente en a été donnée par l'ingénieur-pétrole vénézuelien [10] Luis Gonzales.

[10] Gonzales L., Orthocenter lies on PQ, AoPS du 17/02/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1199843

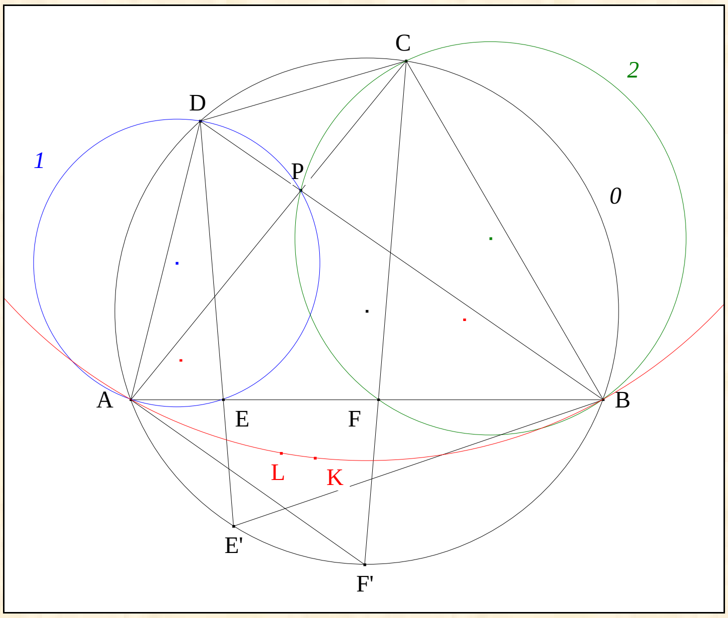
B. LE PROBLÈME GÉMELLAIRE

OU

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

VISION

Figure :

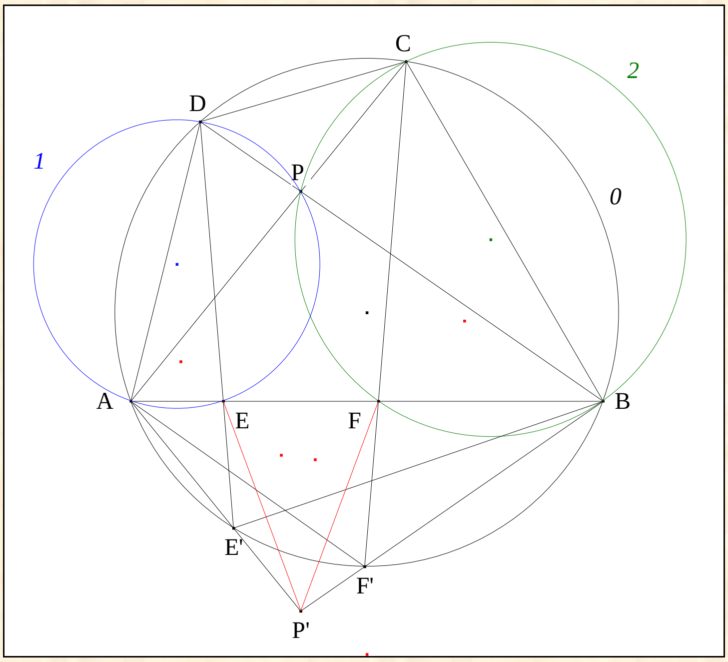


Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC,
	E, F	les seconds points d'intersection de (AB) resp. avec *1*, *2*,
	E', F'	les seconds points d'intersection resp. de (DE), (CF) avec *0*
et	K, L	les centres resp. des triangles BEE', AFF'.

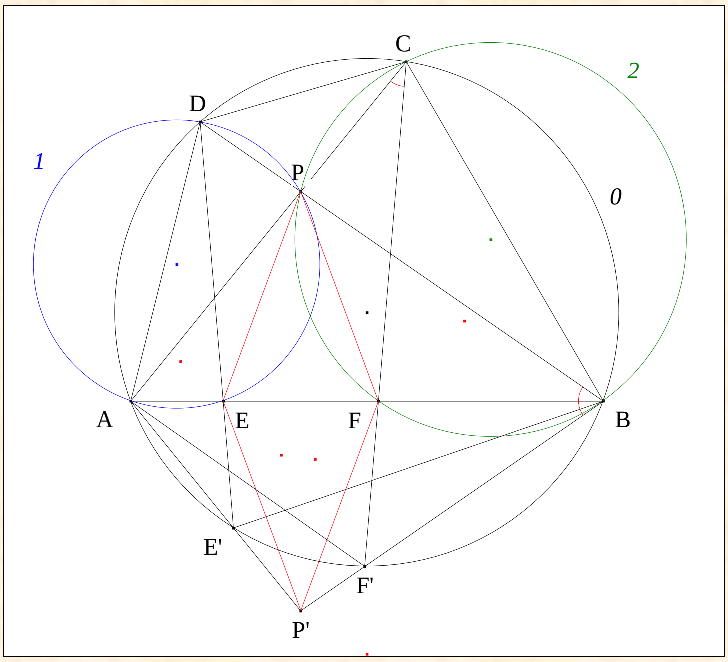
Donné : A, L, K et B sont cocycliques.

Commentaire : la preuve proposée au lecteur est faite sous la forme d'une suite de figures retraçant celui du premier problème.

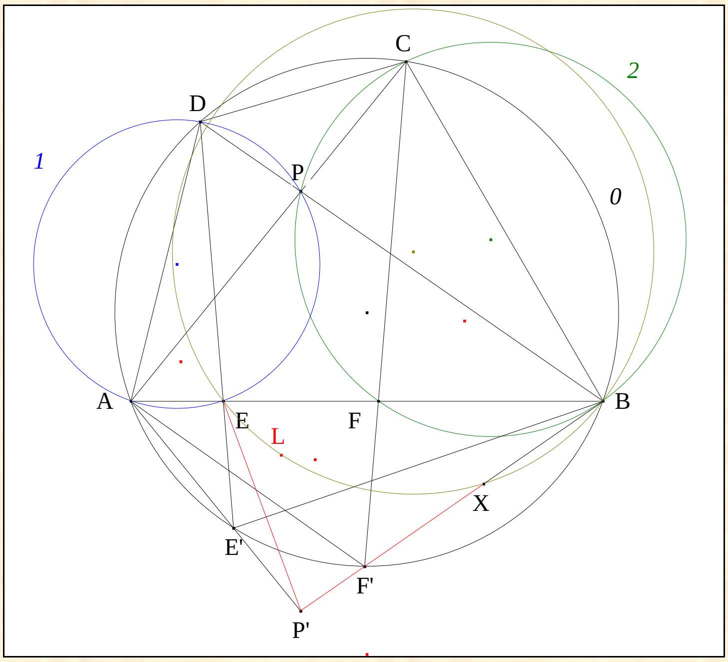
VISUALISATION



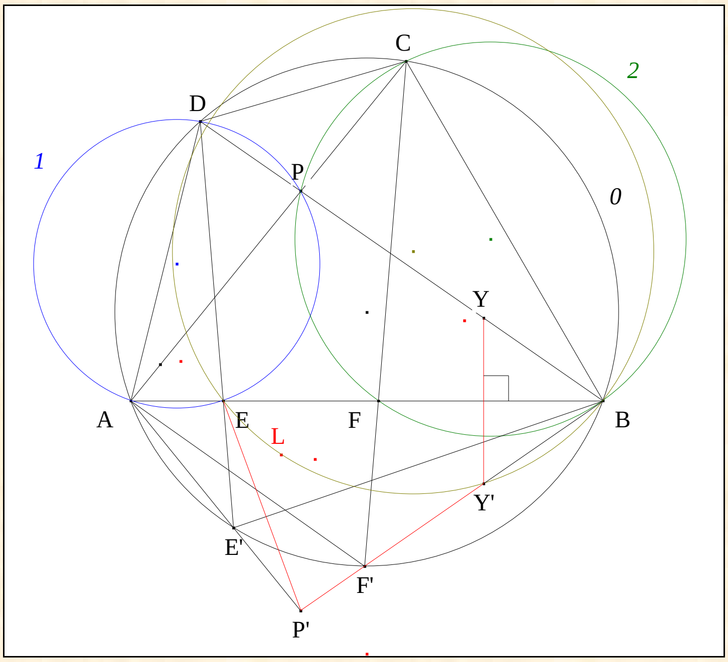
Lemme 1



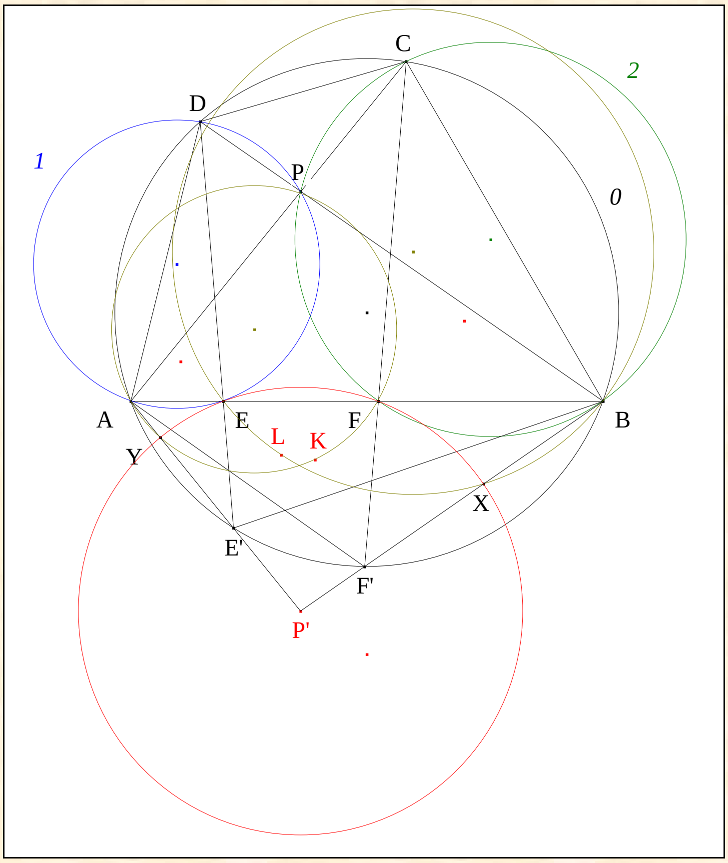
Conséquence : PEP'F est un losange



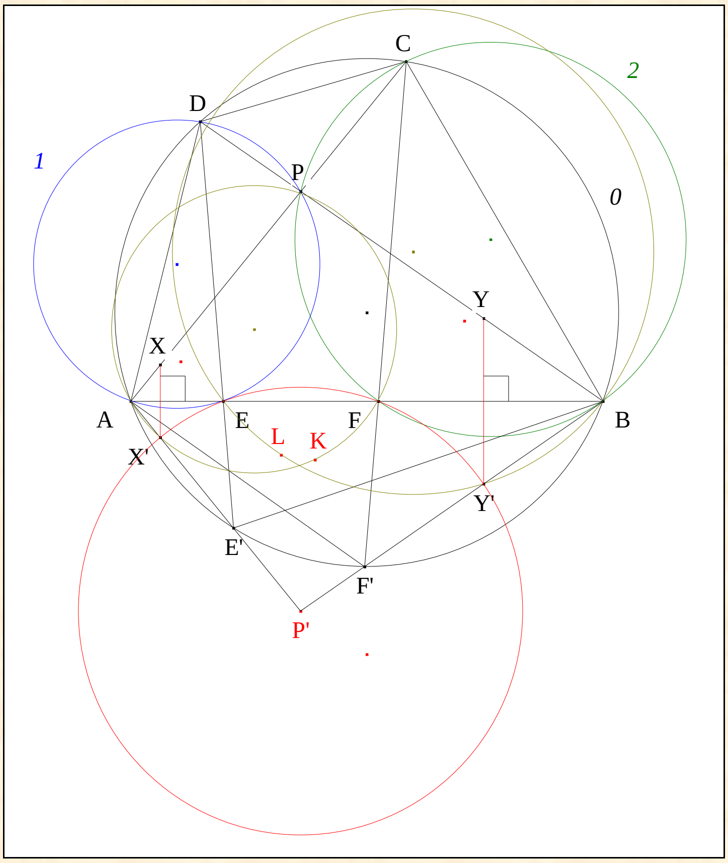
Lemme 2



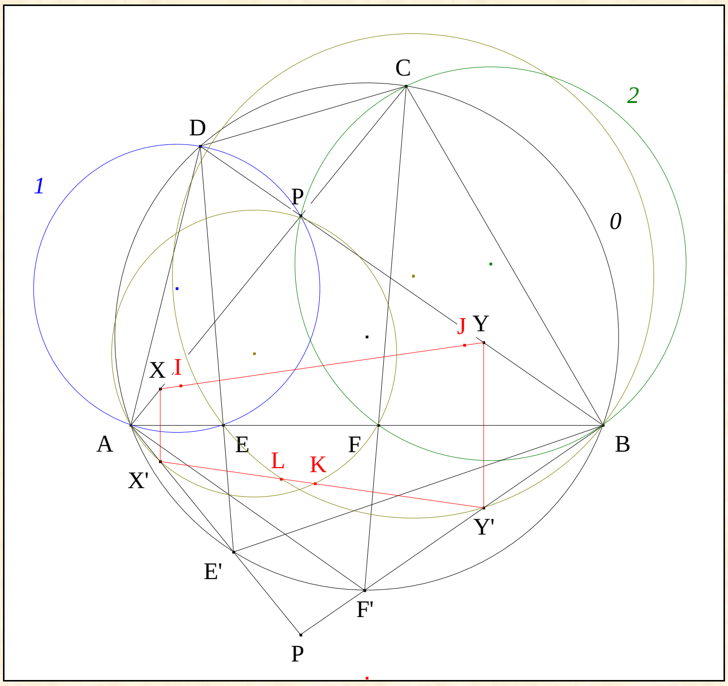
Conséquence : (AB) est la médiatrice de [YY']



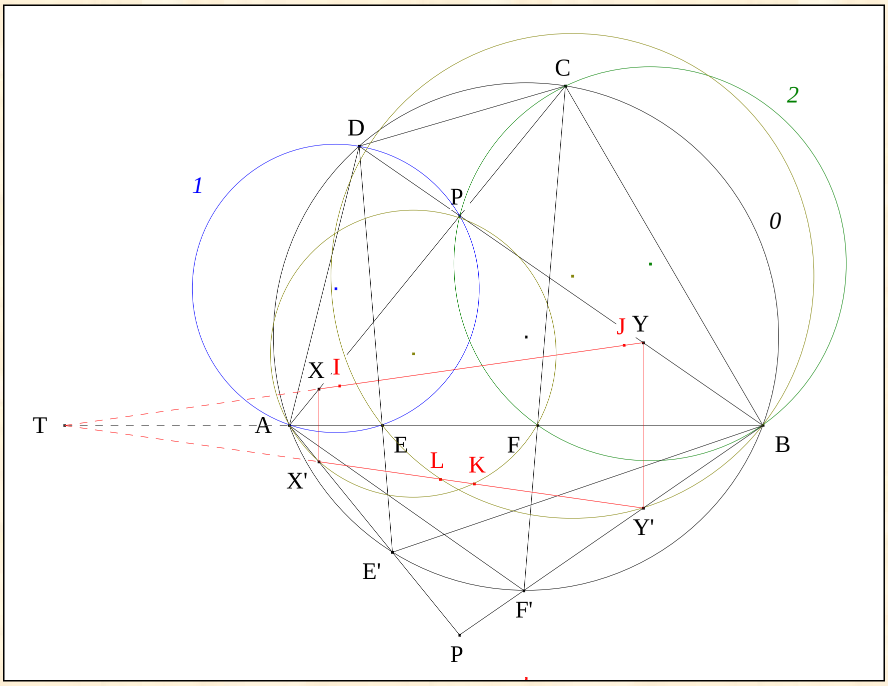
Lemme 3



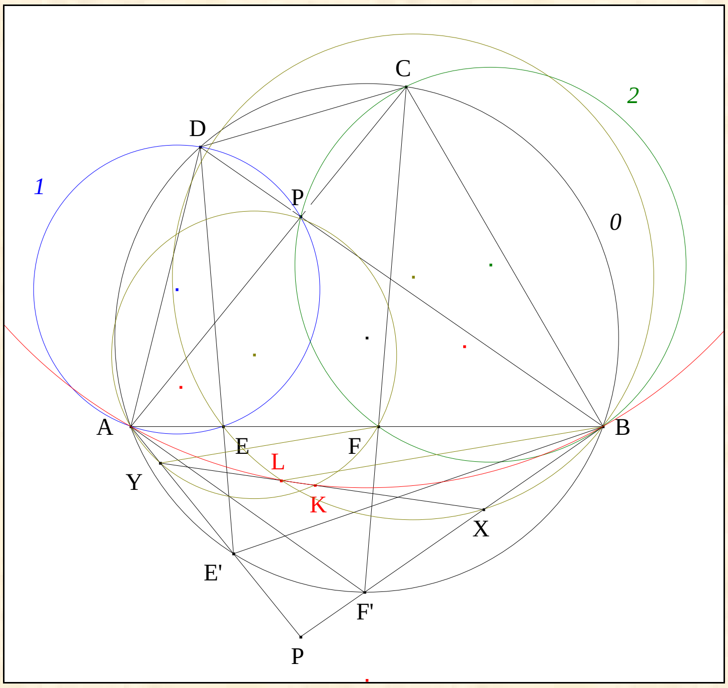
Conséquence : (AB) est la médiatrice de [XX']



Lemme 4



Conséquence : (XY), (AB) et (X'Y') sont concourantes en T
ou encore
(IJ), (AB) et (KL) sont concourantes en T



Quatre points cocycliques : A, L, K et B

C. LE CERCLE

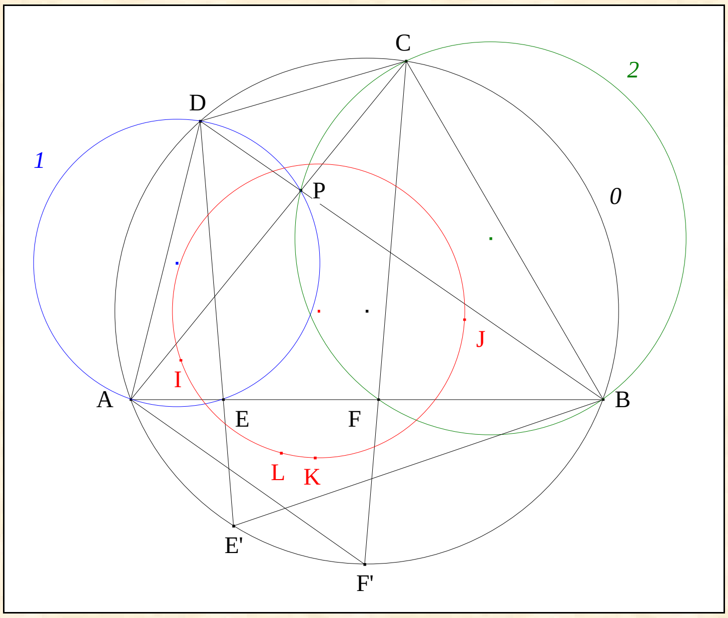
DE

LINH NGUYEN VAN

1. Le problème

VISION

Figure :

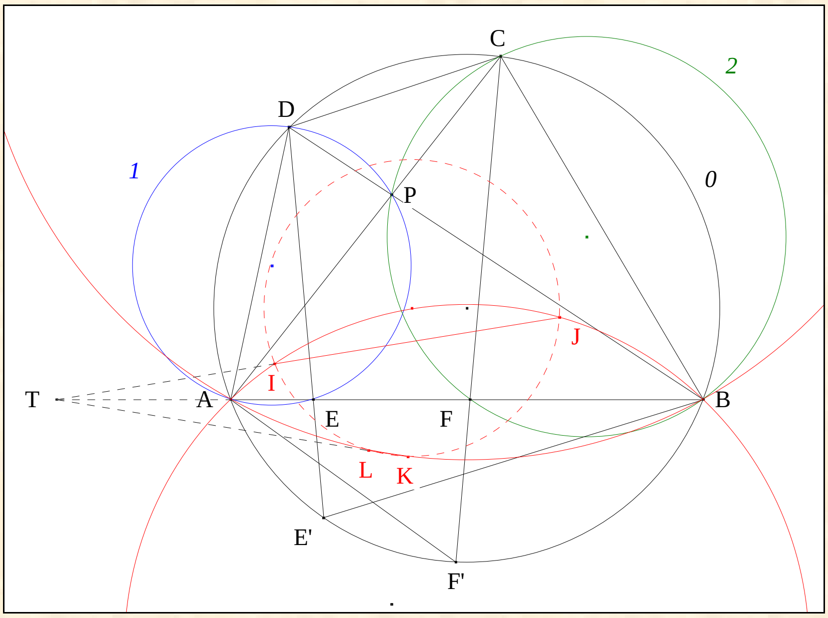


Traits : ABCD un quadrilatère cyclique,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
1, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC,
E, F les seconds points d'intersection de (AB) resp. avec *1*, *2*,
I, J les centres resp. des triangles AED, BFC,
E', F' les seconds points d'intersection resp. de (DE), (CF) avec *0*
et K, L les centres resp. des triangles BEE', AFF'.

Donné : I, J, K et L sont cocycliques. [11]

VISUALISATION

[11] Nguyen Van Linh, 4 incenters are concyclic, AoPS du 29/07/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1280308_4_incenters_are_concyclic



* **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cercles" [12]
appliqué aux deux cercles rouges
et aux droites (IJ), (AB), (KL) concourantes en T, I, J, K et L sont cocycliques.

2. Archive

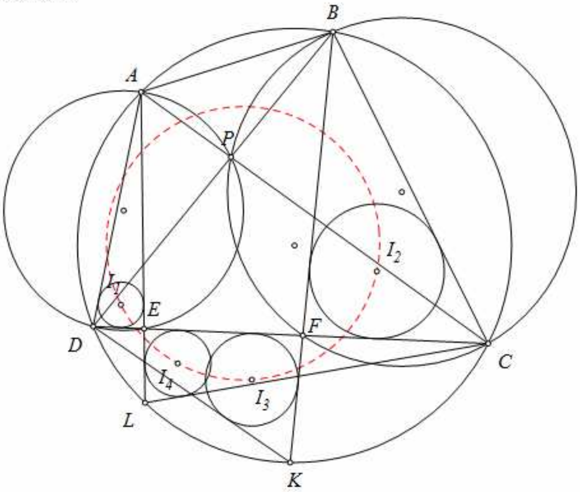
Jul 29, 2016, 2:38 pm

Given quadrilateral $ABCD$ inscribed in (O). AC cuts BD at P. (APD) and (BPC) intersect C at E and F, respectively. AE, BF intersect (O) again at L, K, respectively. Let I_1, I_2, I_3, I_4 be the incenters of triangles ADE, BCF, DFK, CEL, respectively. Prove that I_1, I_2, I_3, I_4 are concyclic.

livetolove212
794 posts

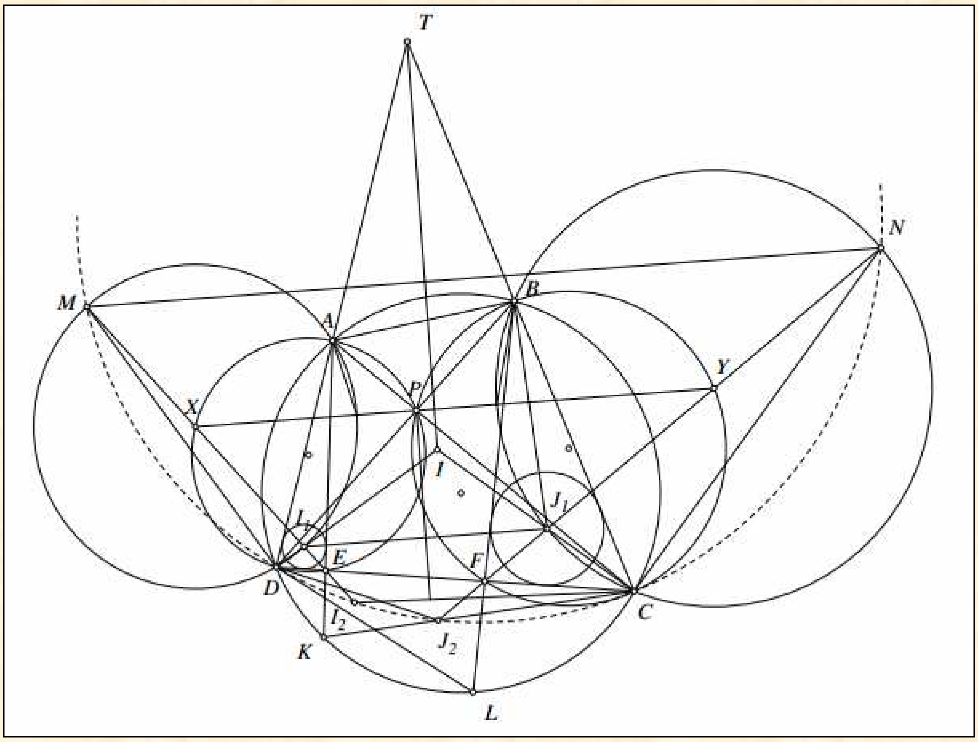
See also: http://www.artofproblemsolving.com/community/u57217h1208052p5974754
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1199843

Attachments:



[13]

12 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
13 http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1280308_4_incenters_are_concyclic



Jul 30, 2016, 9:18 am PM #4

livetolove212
794 posts

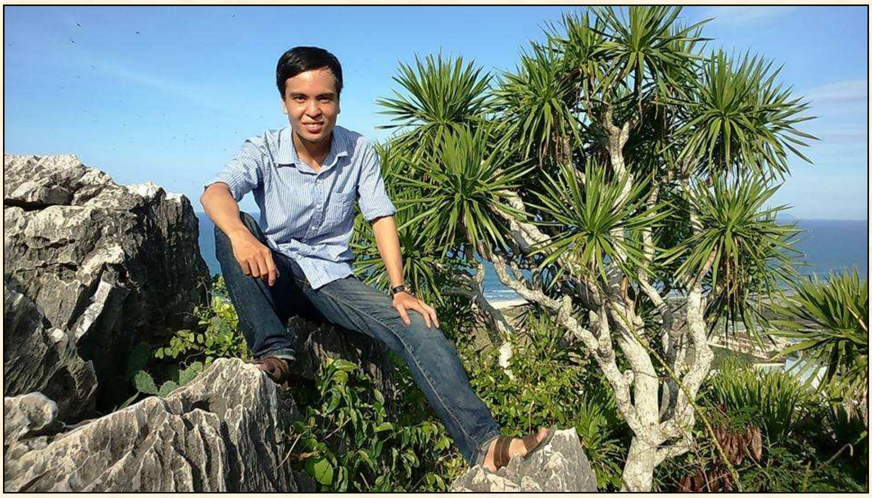
Thank you for your interest. This is my solution.

From links I shared above we have DI_1J_1C is cyclic. From this,
$\angle EI_1J_1 = \angle DI_1J_1 - \angle DI_1E = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BCD - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle DAE) = \frac{1}{2}\angle DAB - \frac{1}{2}\angle DAE = \angle EAP = \angle EXP$
Hence $I_1J_1 \parallel XY$.
Let M, N be the reflections of I_1 wrt X, of J_1 wrt Y then $MN \parallel XY \parallel I_1J_1$.
We get
$\angle MNC = \angle MNJ_1 + \angle J_1NC = \angle I_1J_1F + \angle J_1BC = \angle I_1J_1F + \angle FJ_1C - 90^\circ = \angle I_1J_1C - 90^\circ = 270^\circ - \angle I_1DC = 180^\circ - (90^\circ + \angle I_1DC) = 180^\circ - \angle MDC$
This means $MNCD$ is cyclic.
We have $\angle MI_2C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle EKC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADC = \angle MDC$ hence $I_2 \in (MNCD)$, similarly with J_2.
We obtain MNJ_2I_2 is cyclic. Moreover, $I_1J_1 \parallel MN$ then applying Reim theorem, $I_1J_1J_2I_2$ is also cyclic.

[14]

[14] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1280308_4_incenters_are_concyclic

3. Une très courte biographie de Linh Nguyen Van



Linh Nguyen Van est né le 2 décembre 1992 à Hanoi (Vietnam).
Dans une correspondance, il précise

I'm graduated from Hanoi Foreign Trade University in 2015.
However I like to become a math teacher and now I'm a geometry trainer for Vietnamese and Arab Saudian IMO teams.
I have some interesting problems which you can find on my geometry blog [15]*.*

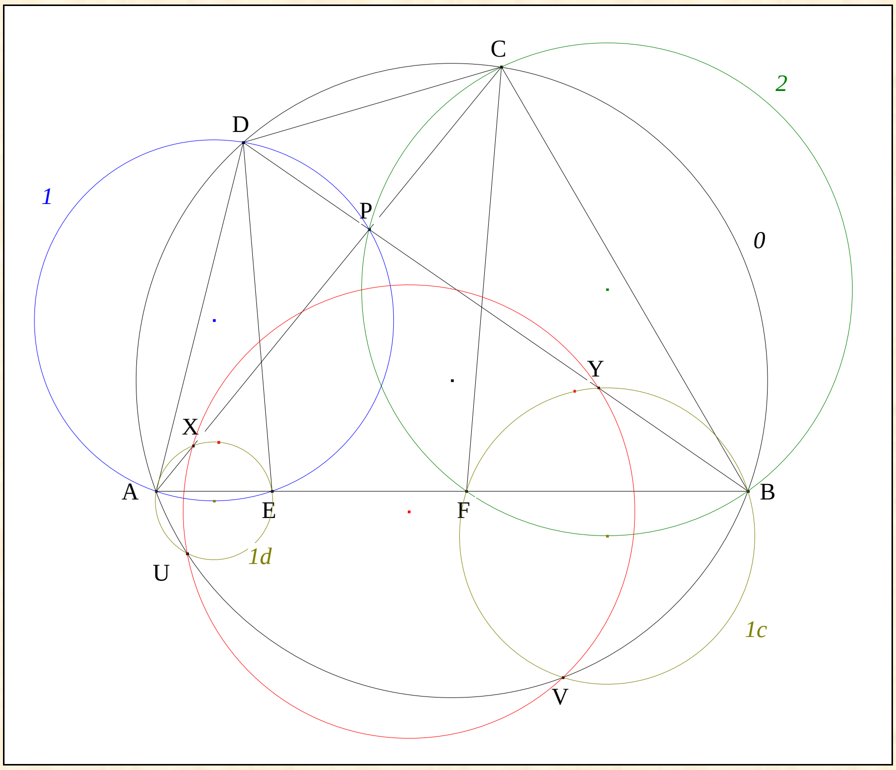
Here I send you a photo of me and my Vietnamese IMO students in 3 years 2013, 2014, 2015.

15 Nguyen Van Linh, Vietnam IMO training 2015, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2016/01/21/vietnam-imo-training-2015/
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/

D. UN RÉSULTAT DE L'AUTEUR

VISION

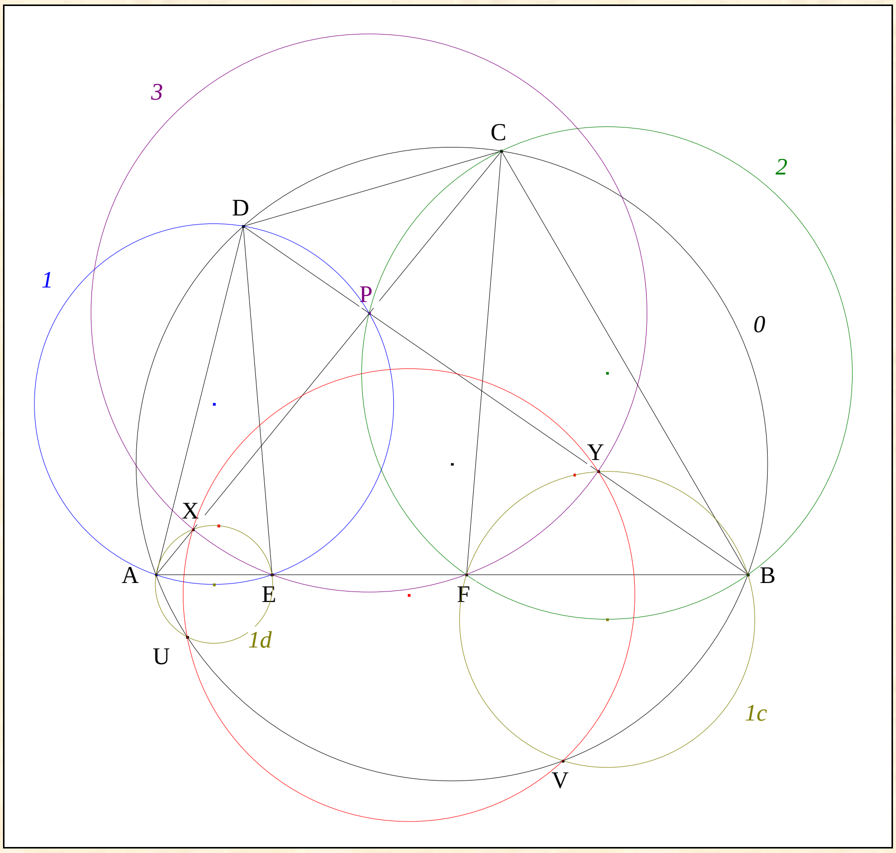
Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC,
	E, F	les seconds points d'intersection de (AB) resp. avec *1*, *2*,
	1d, *1c*	les D, C-cercle de Mention resp. des triangles DAE, CBF,
	X, Y	les seconds points d'intersection resp. de (PA) avec *1d*, (PB) avec *1c*
et	U, V	les seconds points d'intersection de *0* resp. avec *1d*, *1c*.

Donné : X, U, V et Y sont cocycliques.

VISUALISATION



- D'après **A.** Lemme **3**, X, E, F et Y sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

- **Conclusion :** d'après Henri Lebesgues "Le théorème des cinq cercles" [16] appliqué à la droite (AB) et aux cercles *1d*, *3*, *1c* et *0*, X, U, V et Y sont cocycliques.

Scolie : un résultat gémellaire s'obtient en considérant les points X' et Y' définis en **B.** et les homologues U' et V'.

[16] Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**, p. 9-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/