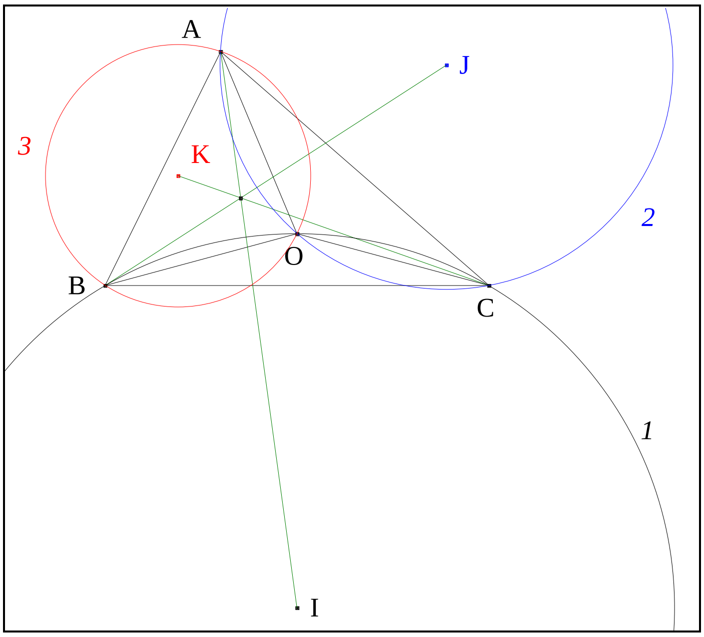
LE POINT DE CÉZAR KOSNITZA

PETITE ENCYCLOPÉDIE

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente le point de Konitza datant de 1941 ainsi que des résultats épars concernant ce point sous la forme d'une petite encyclopédie.
Cependant Joseph Neuberg l'avait évoqué en 1884…
Les figures [2] sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Je remercie chaleureusement et tout particulièrement Monsieur Yannick Banor, informaticien, de m'avoir permis, par ses compétences et surtout par son écoute attentive, de continuer l'activité de mon site, suite à un changement d'ordinateur.
La sauvegarde du mode de fonctionnement de mon logiciel de géométrie me permettant de continuer à élaborer et à publier des articles pour les amoureux de la Géométrie du Triangle.

Je remercie également le professeur Paul A. Blaga de l'Université "Babes-Bolyai" de Cluj-Napoca, Roumanie, pour m'avoir préciser l'orthographe de Cézar Kosnitza, donner la référence du point en question, envoyer deux photos, et renseigner sur la vie de ce géomètre.

---

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/04/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
[2] Le triangle de départ ABC est acutangle sauf pour des cas de lisibilité des figures…

Abstract. The author presents the Konitza's point dating from 1941 and scattered results regarding this point in the form of a small Encyclopaedia.
However Joseph Neuberg was mentioned this point in 1884...
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Acknowledgment. I warmly thank and especially Mr Yannick Banor, computer, allowing me, by his skills and especially his listens carefully, continue the activity on my site, following a change of computer. The backup of the mode of operation of my geometry software allowing me to continue to develop and publish articles for lovers of the geometry of the Triangle.

I thank also the Professor Paul A. Blaga of the"Babes-Bolya" University of Cluj-Napoca, Romania for having me clarify the spelling of Cezar Kosnitza, give the reference of the item in question, send two photos, and learn about the lives of this geometer.

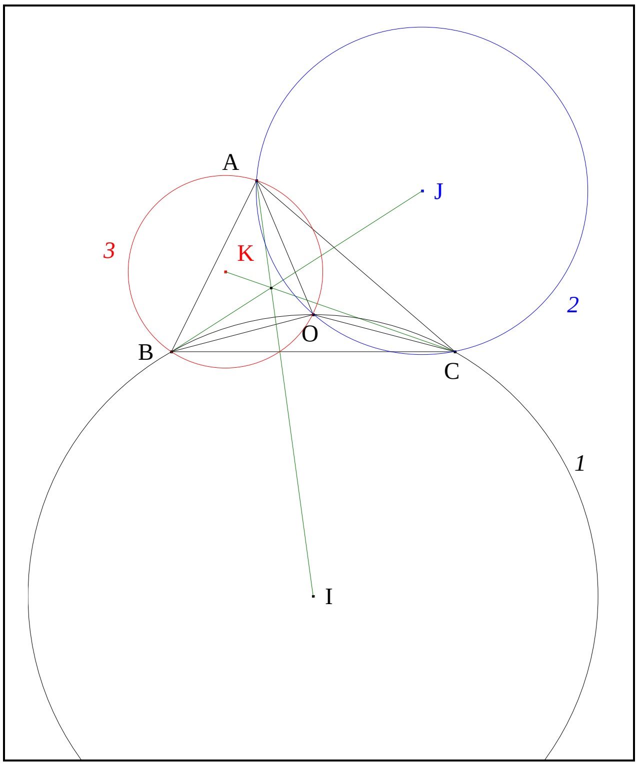
Sommaire

Sommaire (fin)

A. LE POINT DE KOSNITZA

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles OBC, OCA, OAB
et I, J, K les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

Donné : (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes [3].

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Ks, est "le point de Kosnitza de ABC", nom attribué par John Rigby en 1997 ; il est répertorié sous X_{54} chez ETC [4]

(2) (AI), (BJ), (CJ) sont "les A, B, C-droites de Kosnitza de ABC"

(3) IJK est "le triangle de Kosnitza de ABC"

(4) *1*, *2*, *3* sont resp. "les A, B, C-cercles de Kosnitza de ABC".

---

3 Ayme J.-L., Le point de Kosnitza est l'isogonal du centre du cercle de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

4 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ETC ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X54

Archives :

ANNALES ROUMAINES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE ROUMAIN
FONDÉ EN 1928 ET PUBLIÉ

PAR

NICOLAS RACLIŞ

CAHIER 4

COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

PAR

CÉSAR COSNITZA

DEUXIEME EDITION

AVEC UNE PRÉFACE

DE

M. D. POMPEIU

DE L'ACADEMIE ROUMAINE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITE ET A L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE BUCAREST

BUCAREST
1941

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

17. Les droites qui unissent les sommets A, B, C du triangle ABC aux centres des cercles OBC, OCA, OAB (O le centre du cercle ABC) concourent en un même point. Quel est ce point? [5]

Première note historique :

ce point de concours, attribué à Kosnitza, est apparu dans la revue roumaine *Gazeta Matematică* [6] ce qui suggère que ce géomètre est peut être un professeur roumain. Jordan Tabov corrobore cette suggestion en précisant qu'il a en trouvé une référence dans un livre roumain.

Une courte biographie de Cezar Coşniţă

[5] Problem **17** at page 38

[6] Dr. Paul A. Blaga precise :
This is the oldest Romanian journal in elementary mathematics (it appeared, continuously, from 1895)

[7]

Cezar Coşniță est né en 1910 à Adjud, une municipalité du judet de Vrancea, dans l'est de la Roumanie.

Fils de Ion Coşniță, il commence par fréquenter l'école primaire de sa ville natale, puis de 1922 à 1929, le lycée de Bârlad. En 1932, il obtient sa licence de mathématiques à l'Université de Bucarest. L'année suivante, il entre à l'Institut pédagogique. A sa sortie en 1934, il enseigne au lycée de Dealu, puis en 1937 à l'école secondaire à Focsani. En 1939, il revient à Bucarest où il enseigne à l'école secondaire Saint-Sava. Dans le même temps, il est assistant professeur à l'Institut Polytechnique [8] de Bucarest et en 1947, il soutient sa thèse doctorat en mathématiques.
De 1947 à 1952, il est membre du comité directeur du *Gazeta Matematică*. Au cours de la période 1951-1953, il travaille à l'Institut de Bucarest, puis comme professeur agrégé à l'Institut pour la construction.

Il décède en 1962.

Le docteur Paul Blaga ajoute :

In Romania he is well known especially for his contributions in elementary geometry but, first of all, by his high school textbooks (in geometry) and his excellent problem books (in algebra, calculus or analytical geometry). Among other publications, he is the author of an excellent introduction to barycentric coordinates, in French (1941). *The book is not very well known not even in Romania (probably because it was published in a small number of copies, during the war). The point known as Kosnita's point can be found there as Problem* 17 *at page* 38.

Une courte présentation du Dr. Paul A. Blaga

Dr. Paul A. Blaga is an assistant professor of geometry at the Faculty of Mathematics and Computer Science of the "Babes-Bolyai" University from Cluj-Napoca, Romania.

Seconde note historique :

7 Dr. Paul A. Blaga precise :
the photo was taken around 1950, according to the source).
The quality is not great ; they are scanned from an old book, with thin and yellowed pages

8 Dr. Paul A. Blaga precise :
Actually, the Institute had a name: Institute for Communal Households (the Romanian term was Gospodăriilor comunale, please don't ask me the significance, it was just a Soviet name for I don't know what, I wasn't able to find any information)

(63)

Nous faisons encore ressortir, à cette occasion, deux autres cas particuliers du théorème du n° 54 : 1° *Les droites qui joignent* A_1, A_2, A_3 *aux centres des cercles circonscrits aux triangles* A_2hA_3, A_3hA_1, A_1hA_2 *se coupent sur la ligne* ho *au centre du cercle des neuf points de* $A_1A_2A_3$; 2° *les droites joignant* A_1, A_2, A_3 *aux centres des cercles circonscrits aux triangles* A_2oA_3, A_3oA_1, A_1oA_2 *se rencontrent en un même point* (*).

Un géomètre ayant voulu garder l'anonymat ma'a signalé que ce point de Kosnitza avait été en fait présenté en 1884 par Joseph Neuberg dans son *Mémoire sur le tétraèdre* à la page 63.

B. JOHN RIGBY

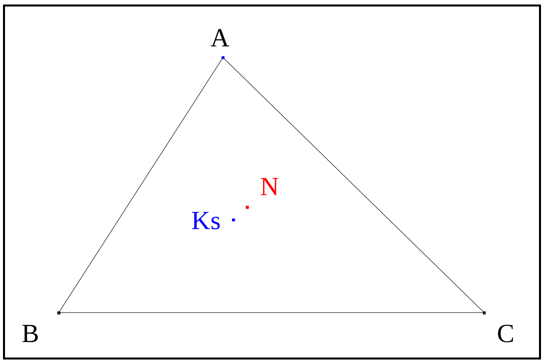
OU

Ks ISOGONAL DE N

1. Ks isogonal de N

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
N le centre du cercle d'Euler de ABC
et Ks le point de Kosnitza de ABC.

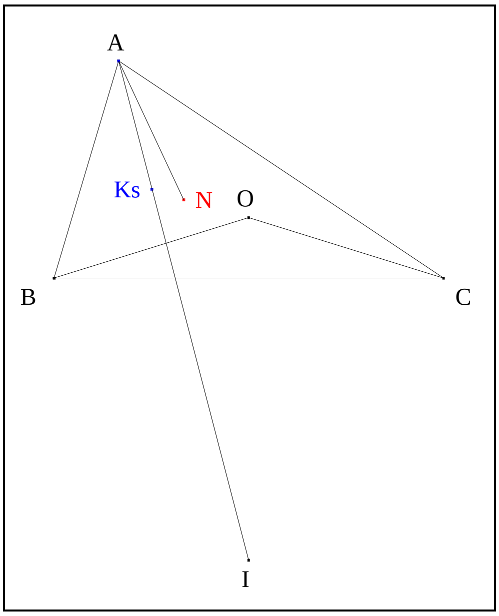
Donné : Ks est l'isogonal de N relativement à ABC [9].

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

Scolie : deux angles égaux [10]

[9] Rigby J., Brief notes on some forgotten geometrical theorems, *Mathematics & Informatics Quarterly* **7** (1997) 156-158
Ayme J.-L., Le point de Kosnitza est l'isogonal du centre du cercle de Feuerbach, G.G.G. vol. **1**, p. 14-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[10] Therem about Kosnita point, AoPS du 08/03/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h395496p2198659



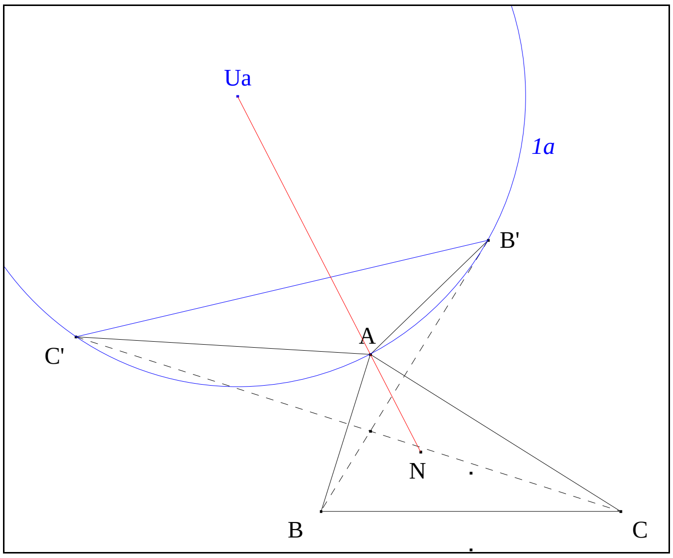
- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC
  et I le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

- **Conclusion :** d'après **B. 1.** Ks isogonal de N, <BAI = <CAN.

2. Isogonales d'une droite de Kosnitza

VISION

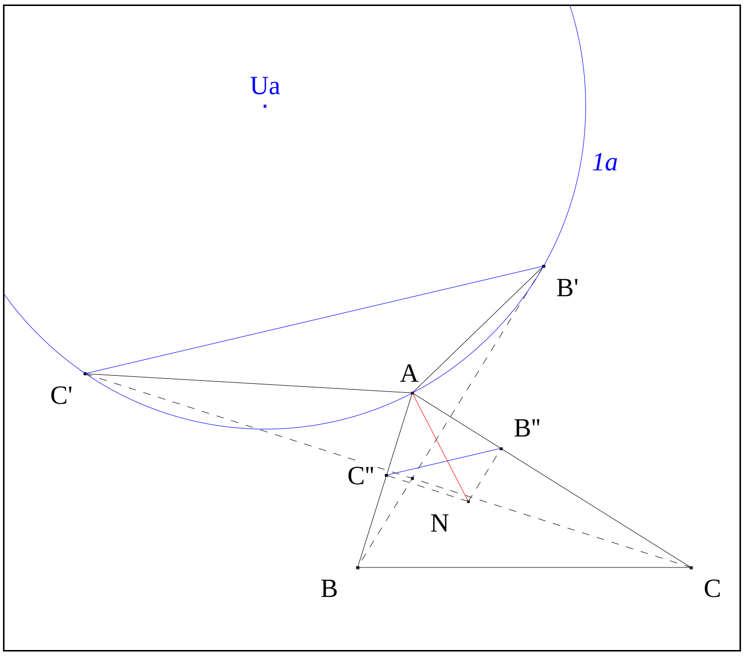
Figure :



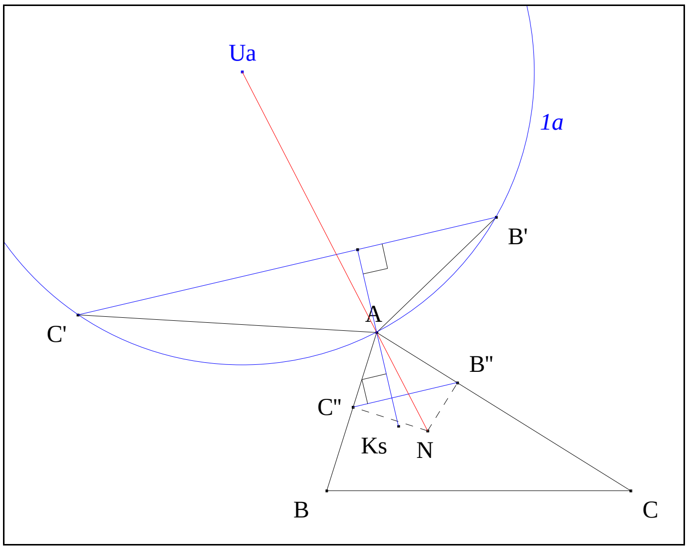
Traits : ABC un triangle,
N le centre du cercle d'Euler de ABC,
B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à (AC), (AB),
1a le cercle circonscrit au triangle AB'C'
et Ua le centre de *1a*.

Donné : (AN) passe par Ua. [11]

VISUALISATION



- Notons B", C" les pieds des perpendiculaires à (AC), (AB) issues de N.
- D'après Oene Bottema "Les triangles symétrique et N-pédal" [12], (B'C') // (B"C").



[11] Grinberg D., More on the Kosnita point and the reflection triangle, *Math Forum* du 08/08/2003 ;
http://mathforum.org/kb/thread.jspa?threadID=349807&tstart=0
Prove that the circumcentre of AB_1C_1 lies on the line AO_1, AoPS du 20/07/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h289760
Akopyan A., Tuymaada 2009, Senior League, Second Day, Problem **3**, AoPS du 14/10/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1151530_euler_center

[12] Bottema O. (1901-1992), Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, 2nd ed. Utrecht, Netherlands : Epsilon, Chapter **XVI** (1987) 83-87 ;
Boutte G., Message *Hyacinthos* # **3997** du 28 septembre 2001 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/3997
Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, *Forum Geometricorum* **3** (2003) 105-111 ;
http://forumgeom.fau.edu/

- Notons Ks le point de Kosnitza de ABC.
- D'après **B. 1.** Ks isogonal de N, (AKs) ⊥ (B'C') ou encore (AKs) ⊥ (B"C").
- Par construction, (AKs) et (AN) sont deux A-isogonales du triangle AB'C'.
- **Conclusion :** d'après Nagel "Un rayon" [13], (AN) passe par Ua.

Commentaire : une preuve synthétique différente de la précédente a été dédicacée à l'auteur par Kostas Vittas.

Scolie : *1a* est le "A-cercle de Yui de ABC".

[13] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christion von Nagel, G.G.G vol. **3**, p. 21-22; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

C. PERPENDICULAIRES

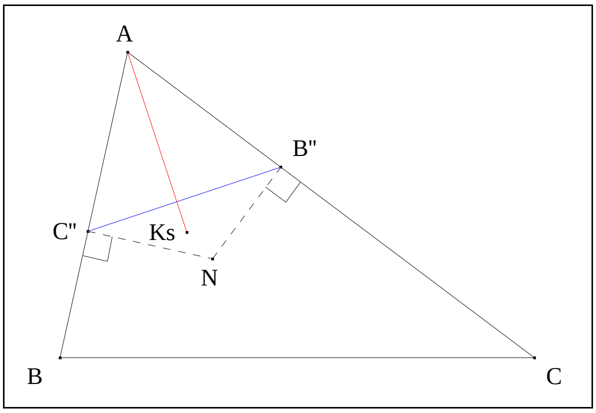
À

UNE A-DROITE DE KOSNITZA

1. Le triangle N-pédal

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
Ks le point de Kosnitza de ABC,
N le centre du cercle d'Euler de ABC
et B", C" les pieds des perpendiculaires à (AC), (AB) issues de N.

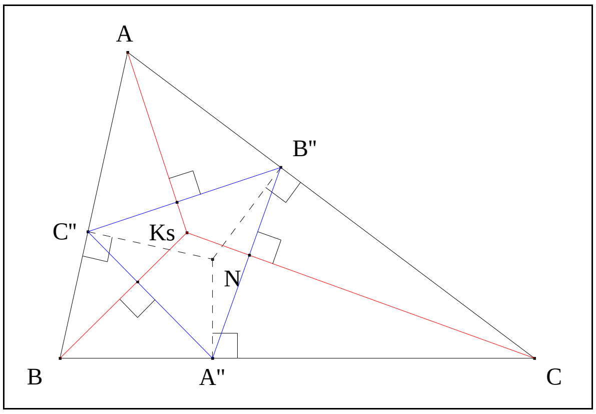
Donné : (B"C") est perpendiculaire à (AKs).

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" [14], (B"C") $\perp$ (AKs).

Scolie : vision triangulaire

[14] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-
Ayme J.-L., Mantel * Noyer * Droz-Farny * Goormaghtigh or Simson-Wallace generalized , G.G.G. vol.**12**, p. 29-32 ;
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons A" le pied de la perpendiculaires à (BC) issue de N.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (C"A") est perpendiculaire à (BKs).

  (A"B") est perpendiculaire à (CKs).

  (2) A"B"C" est le triangle N-pédal de ABC

  (3) ABC et A"B"C" sont deux triangles orthologiques ;

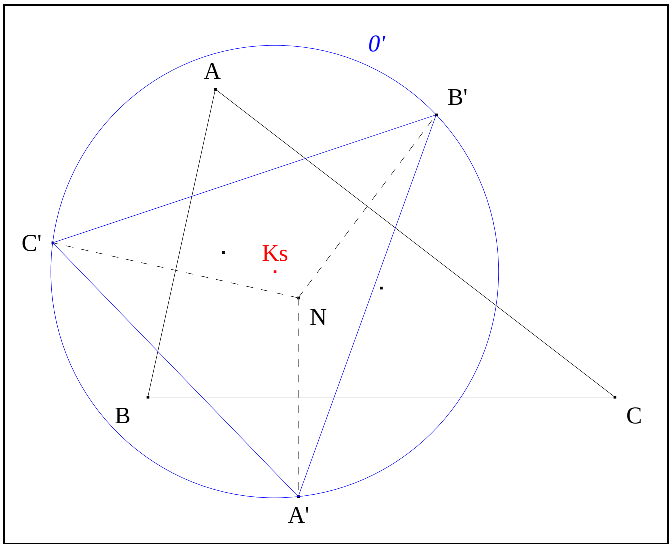
  * Ks est l'orthopôle de ABC relativement à A"B"C"

  * N est l'orthopôle de A"B"C" relativement à ABC.

2. Le triangle N-symétrique

VISION

Figure :

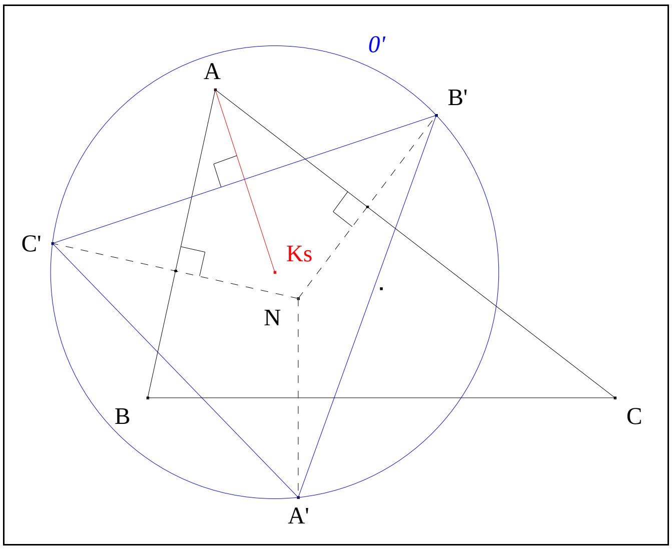


Traits : ABC un triangle,
N le centre du cercle d'Euler de ABC,
A'B'C' le triangle N-symétrique de ABC,

	0'	le cercle circonscrit à A'B'C'
et	Ks	le point de Kosnitza de ABC.

Donné : (B'C') est perpendiculaire à (AKs).

VISUALISATION

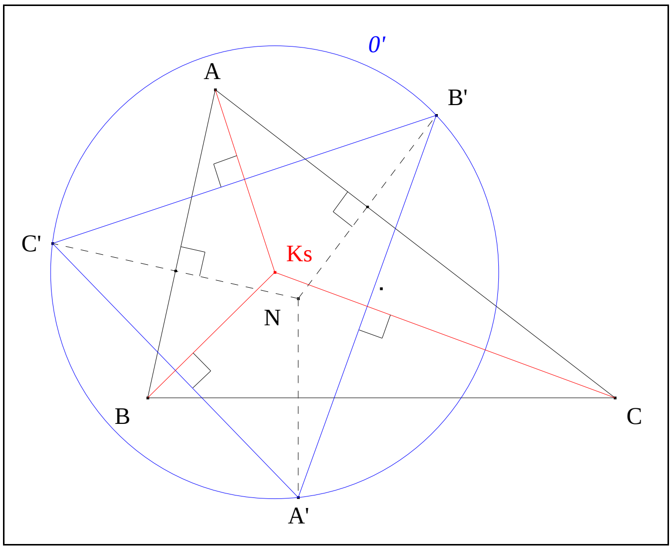


- A étant le centre du cercle circonscrit au triangle NB'C',
  la perpendiculaire à (B'C') issue de A est la médiatrice de [B'C'].

- **Conclusion :** d'après **B. 1.** N isogonal de Ks, (AKs) ⊥ (B'C').

Scolies : **(1)** en considérant le triangle AB'C', (AKs) est la médiatrice de [B'C']

(2) Vision triangulaire



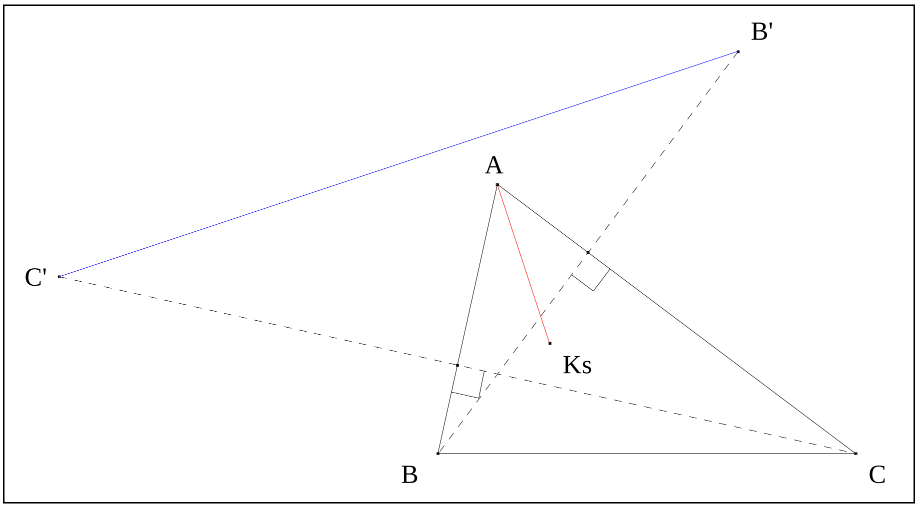
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BKs) est la médiatrice de [C'A']
  (CKs) est la médiatrice de [A'B'].

- **Conclusion :** Ks est le centre de *0'*.

3. Le triangle symétrique

VISION

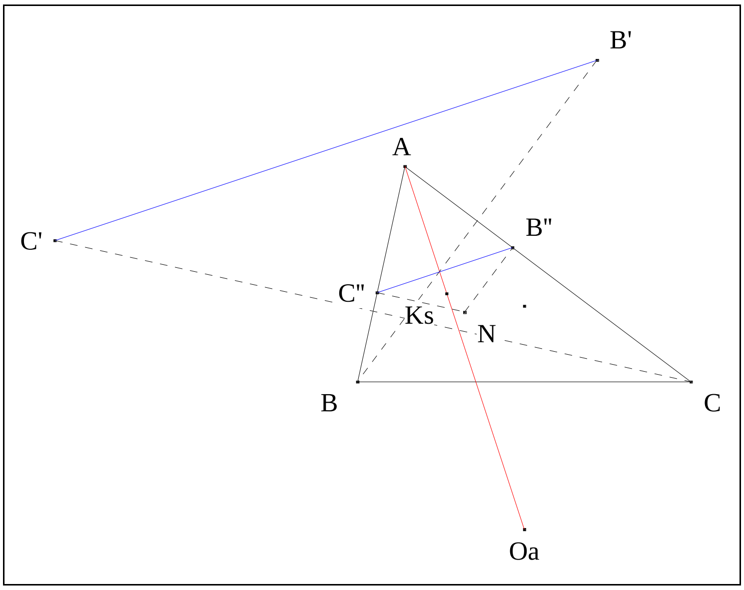
Figure :



Traits : ABC un triangle,
Ks le point de Kosnitza de ABC
et B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à (AC), (AB).

Donné : (B'C') est perpendiculaire à (AKs). [15]

VISUALISATION



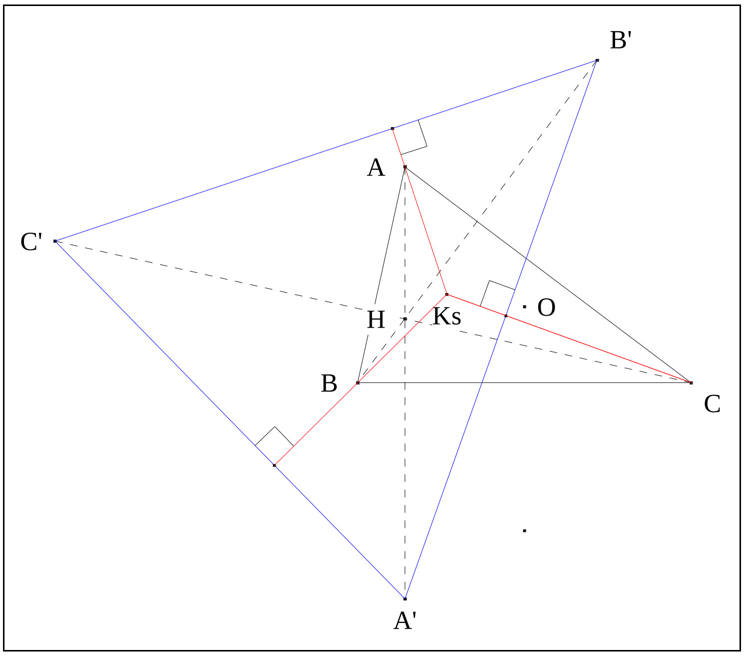
- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC

[15] Deux perpendiculaires, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1231423

et B", C" les pieds des perpendiculaires à (AC), (AB) issues de N.

- D'après Oene Bottema "Les triangles symétrique et N-pédal" [16], (B'C') // (B"C").
- D'après **C. 1.** Le triangle N-pédal, (B"C") ⊥ (AKs) ;
  en conséquence, (B'C') ⊥ (AKs) ;
- **Conclusion :** par symétrie de la relation ⊥ , (B'C') est perpendiculaire à (AKs).

Scolies : **(1)** vision triangulaire



- Notons A' le symétrique de A par rapport à (BC)
  et H l'orthocentre de ABC.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (C'A') est perpendiculaire à (BKs)

  (A'B') est perpendiculaire à (CKs).

(2) A'B'C' est le triangle symétrique de ABC ou
A'B'C' is the reflexion triangle of ABC en anglais

(3) ABC et A'B'C' sont deux triangles orthologiques ;

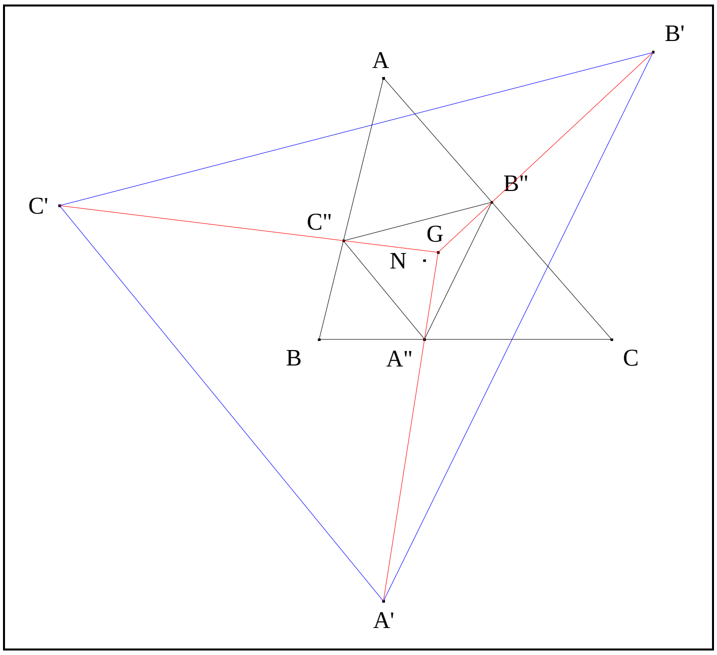
* Ks est l'orthopôle de ABC relativement à A'B'C'

* H est l'orthopôle de A'B'C' relativement à ABC.

(4) Les triangles symétrique et N-pédal

---

16 Bottema O. (1901-1992), Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, 2nd ed. Utrecht, Netherlands : Epsilon, Chapter **XVI** (1987) 83-87 ;
Boutte G., Message *Hyacinthos* # **3997** du 28 septembre 2001 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/3997
Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, *Forum Geometricorum* **3** (2003) 105-111 ;
http://forumgeom.fau.edu/



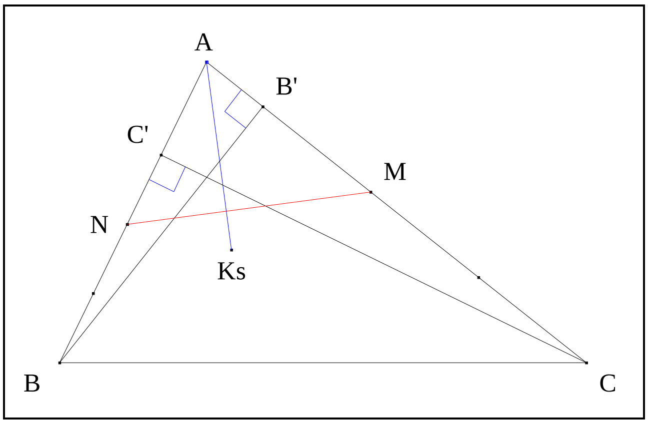
- Notons G le point médian de ABC
  et A"B"C" le triangle N-pédal de ABC.

- **Conclusion :** A"B"C" est homothétique à A'B'C' (centre G et rapport 4). [17]
  (une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [18])

4. Une ménélienne de ABC

VISION

Figure :



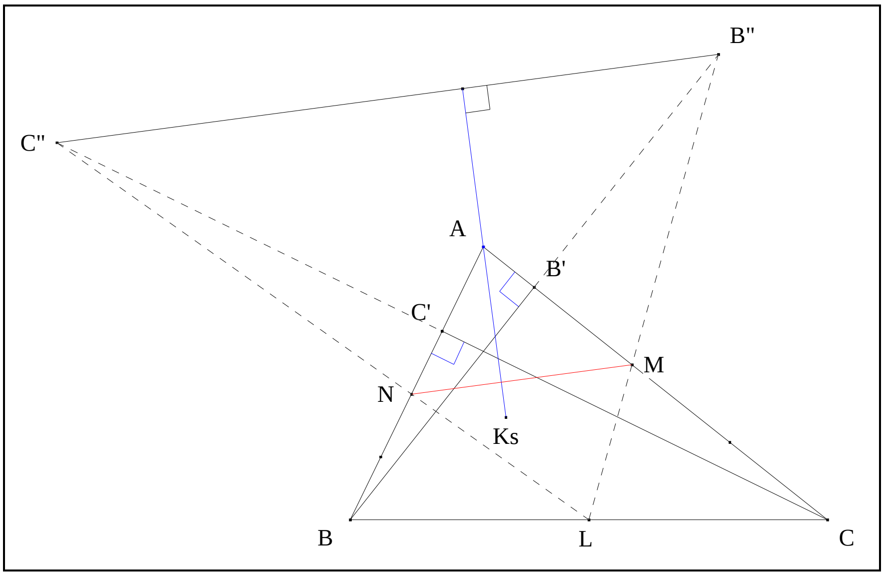
[17] Bottema O. (1901-1992), Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, 2nd ed. Utrecht, Netherlands : *Epsilon*, Chapter **XVI** (1987) 83-87 ;
Boutte G., Message *Hyacinthos* # **3997** du 28 septembre 2001 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/3997
Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, *Forum Geometricorum* **3** (2003) 105-111 ;
http://forumgeom.fau.edu/

[18] Ayme J.-L., Les triangles symétrique et N-pédal sont homothétiques, G.G.G. vol. **25** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Traits : ABC un triangle,
Ks le point de Kosnitza de ABC,
B', C' les pieds des B, C-perpendiculaires de ABC
et M, N les premier tiers-points de [B'C], [C'B] resp. à partir de M, N.

Donné : (MN) est perpendiculaire à (AKs). [19]

VISUALISATION



- Notons B", C" les symétriques de B, C resp. par rapport à (AC), (AB)
  et L le milieu de [BC].

- D'après "Le théorème de Ménélaüs" appliqué

  (1) au triangle BCC', la ménélienne (LN) passe par C".

  (2) au triangle BCB', la ménélienne (LM) passe par B".

- D'après "Le théorème de Ménélaüs" appliqué

  au triangle LCC" et à la ménélienne (BNC'), NL/NC" = 1/3.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que ML/MB" = 1/3.

- D'après Thalès "Rapports", (MN) // (B"C").

- D'après **C. 3.** Le triangle symétrique, (B"C") ⊥ (AKs).
  en conséquence, (MN) ⊥ (AKs).

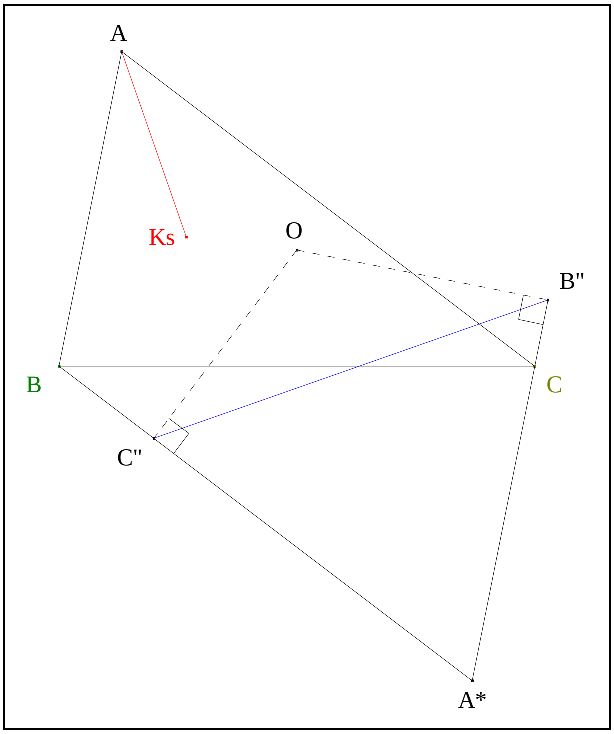
- **Conclusion :** par symétrie de la relation ⊥ , (MN) est perpendiculaire à (AKs).

[19] AK is perpendicular to MN, AoPS du 22/01/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h622010p3718645

5. Le triangle antimédian

VISION

Figure :

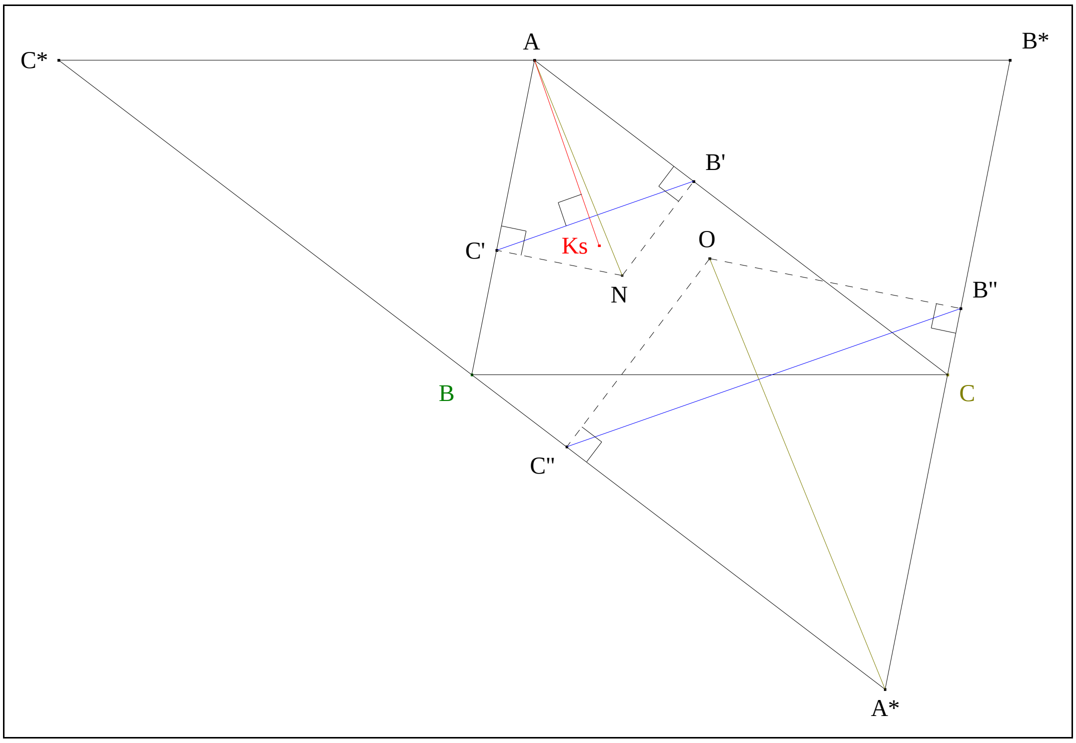


Traits :	ABC	un triangle,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	A*	le point d'intersection de la parallèle à (AC) issue de B avec la parallèle à (AB) issue de C
et	B", C"	les pieds des perpendiculaires à (A*C), (A*B) issues de O.

Donné : (B"C") est perpendiculaire à (AKs). [20]

VISUALISATION

[20] Hatzipolakis A., Kosnita Point, AoPS du 19/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h614549p3656989
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22770



- Notons B*, C* les points d'intersection de la parallèle à (BC) issue de A resp. avec (A*C), (A*B),
  N le centre du cercle d'Euler de ABC
  B', C' les pieds des perpendiculaires à (AC), (AB) issues de N.

- **Scolies :** **(1)** O est le centre du cercle d'Euler du triangle A*B*C*

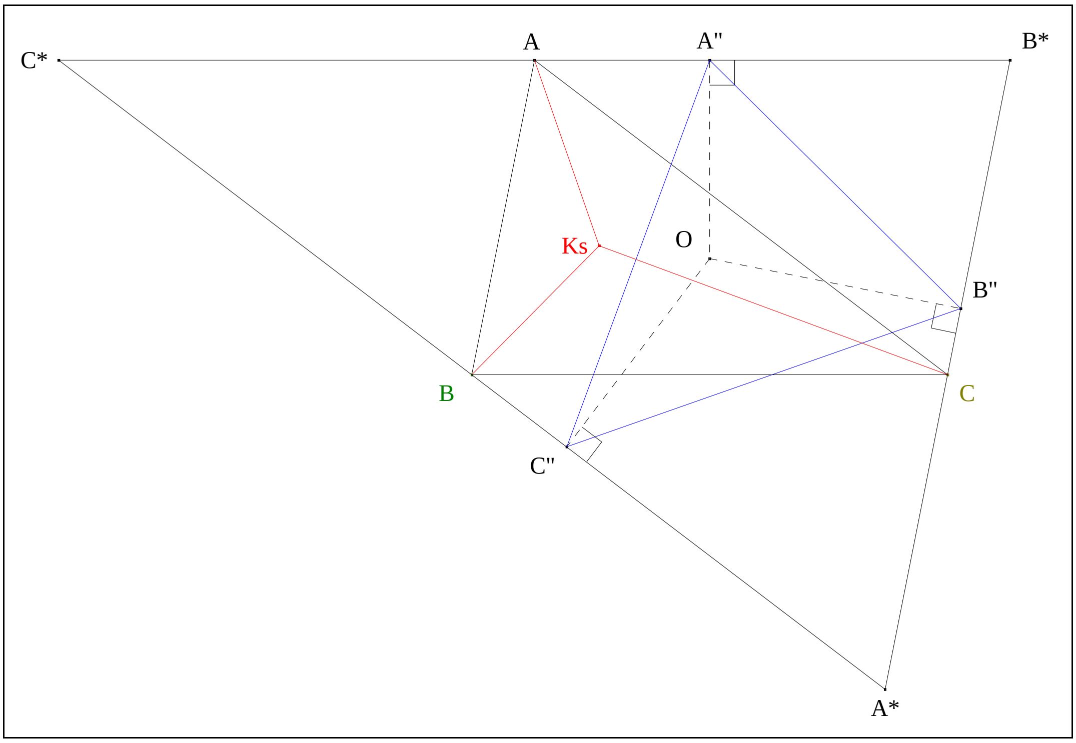
  (2) A*B*C* étant homothétique à ABC, (A*O) // (AN).

- Les quadrilatère AC'NB' et A*B"OC" étant homothétiques et ayant deux diagonales correspondantes parallèles, (B"C") // (B'C').

- D'après **C. 3.** Le triangle symétrique, (B'C') ⊥ (AKs) ;
  en conséquence, (B"C") ⊥ (AKs).

- **Conclusion :** par symétrie de ⊥ , (B"C") est perpendiculaire à (AKs).

Scolies : **(1)** vision triangulaire



* Notons A" le pied de la perpendiculaires à (B*C*) issue de O.

* **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (C"A") est perpendiculaire à (BKs)

  (A"B") est perpendiculaire à (CKs).

  (2) A*B*C* est "le triangle antimédian de ABC".

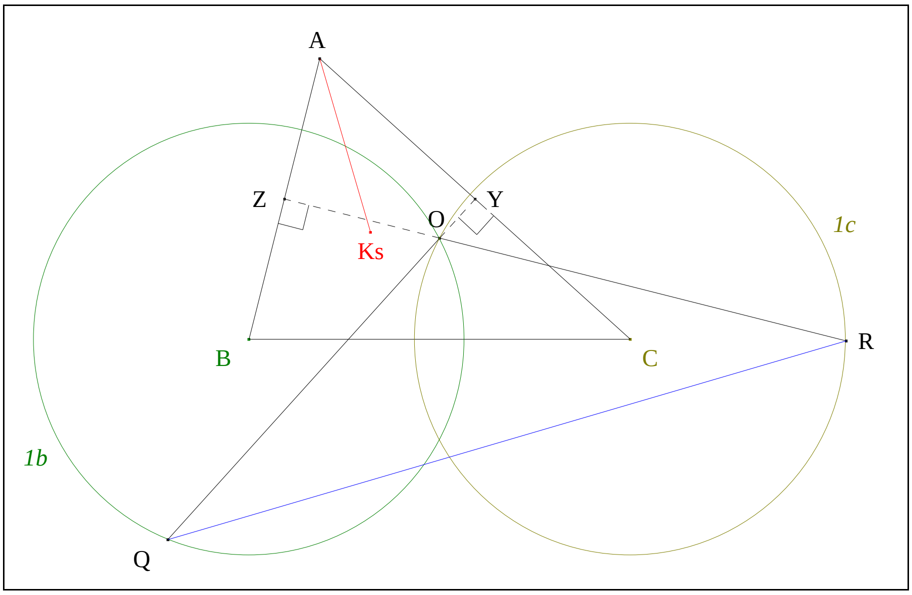
  (3) ABC et A"B"C" sont deux triangles orthologiques ;

  * Ks est l'orthopôle de ABC relativement à A"B"C"
  * O est l'orthopôle de A"B"C" relativement à ABC.

6. Le triangle O-symétrico de l'antimédian

VISION

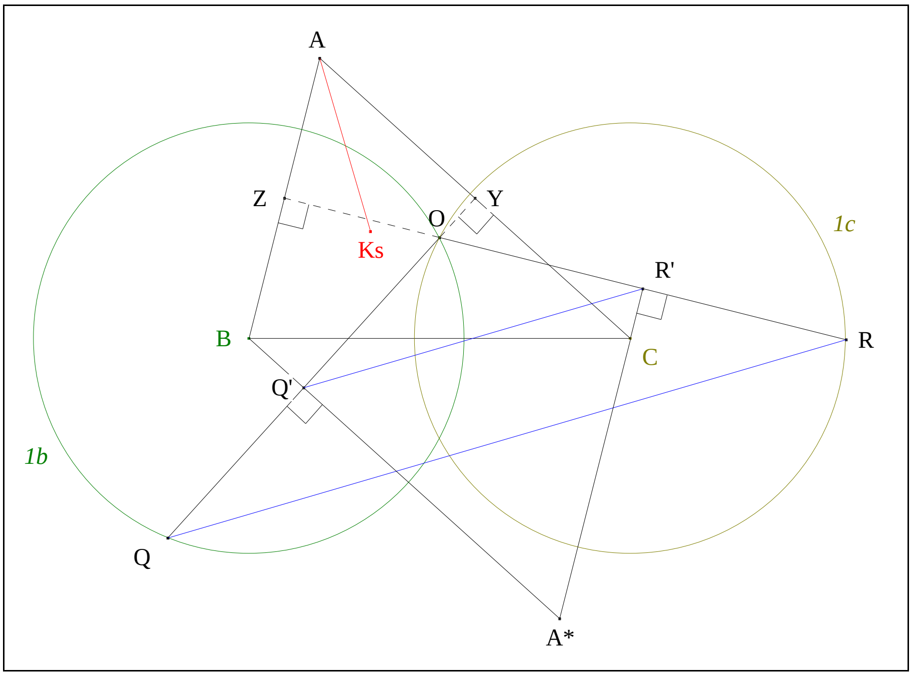
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	Y, Z	les milieux resp. de [AC], [AB],
	1b, *1c*	les cercles de centres resp. B, C passant par O
et	Q, R	les seconds points d'intersection de (OY), (OZ) resp. avec *1b*, *1c*.

Donné : (QR) est perpendiculaire à (AKs). [21]

VISUALISATION



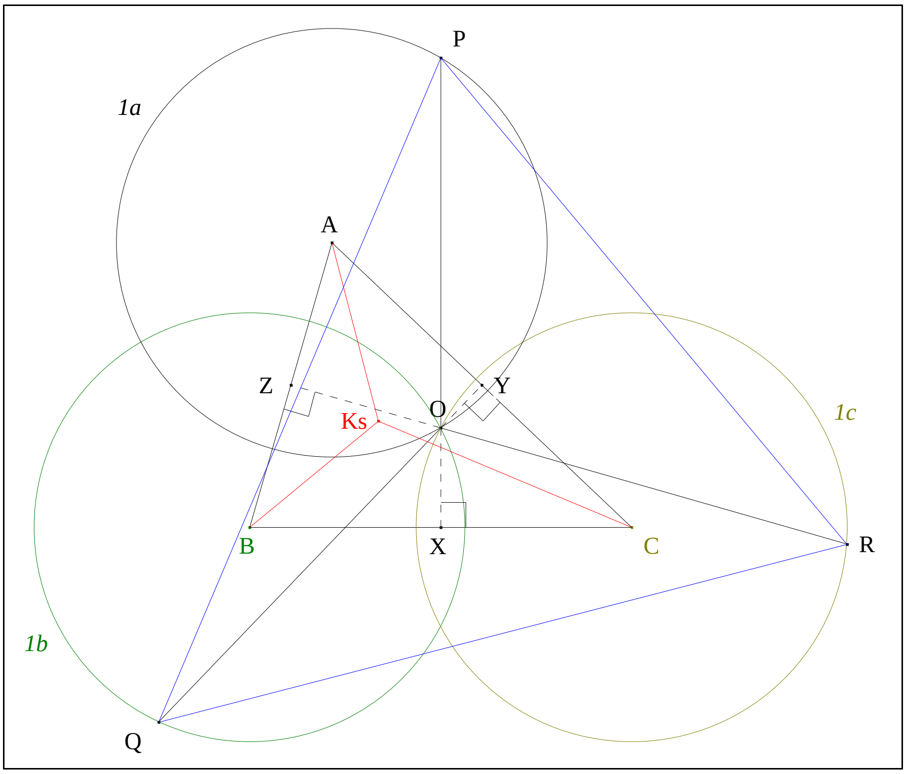
- Notons A* le point d'intersection de
  la parallèle à (AC) issue de B avec la parallèle à (AB) issue de C

[21] Hatzipolakis A., Kosnita Point, AoPS du 19/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h614549p3656989
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22770

et Q', R' les points d'intersection resp. de (A*B) et (OQ), (A*C) et (OR).

- **Scolie :** Q', R' sont les milieux resp. de [OQ], [OR].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle OQR, (QR) // (Q'R').
- D'après **C. 5.** Le triangle antimédian, (Q'R') ⊥ (AKs) ;
  en conséquence, (QR) ⊥ (AKs) ;
- **Conclusion :** (QR) est perpendiculaire à (AKs).

Scolie : **(1)** vision triangulaire



- Notons X le milieu de [BC],
  1a le cercle de centre A passant par O
  et P le second point d'intersection de (OX) avec *1a*.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (RP) est perpendiculaire à (BKs)

  (PQ) est perpendiculaire à (CKs).

(2) PQR est "le triangle O-symétrico de l'antimédian A*B*C* ".

(3) ABC et PQR sont deux triangles orthologiques ;

* Ks est l'orthopôle de ABC relativement à PQR

* O est l'orthopôle de PQR relativement à ABC.

D. POINTS

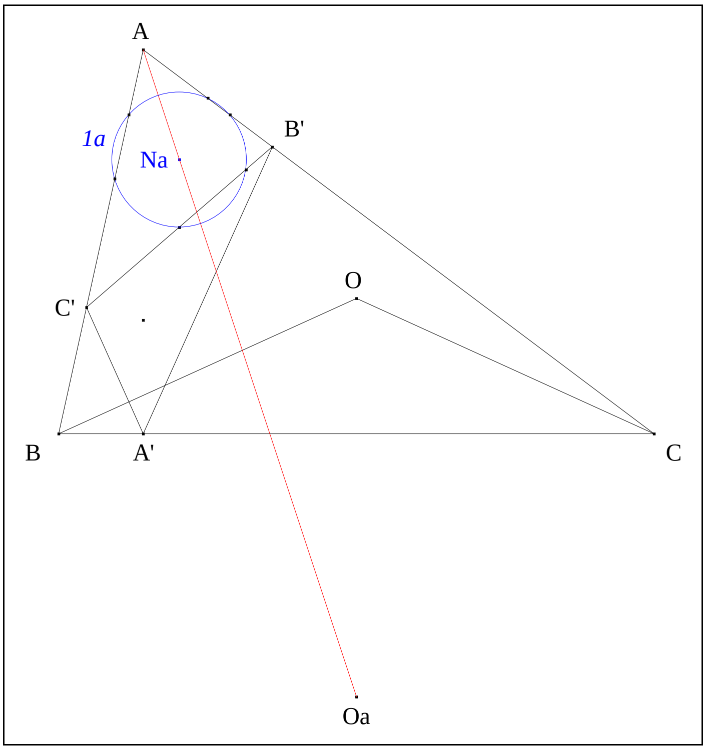
SUR

UNE A-DROITE DE KOSNITZA

1. Centre d'un cercle d'Euler

VISION

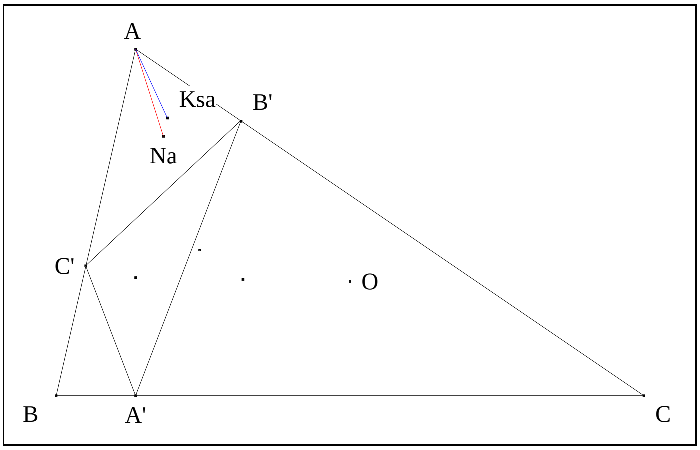
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	Oa	le centre du cercle circonscrit à BOC,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	1a	le cercle d'Euler du triangles AB'C'
et	Na	le centre de *1a*.

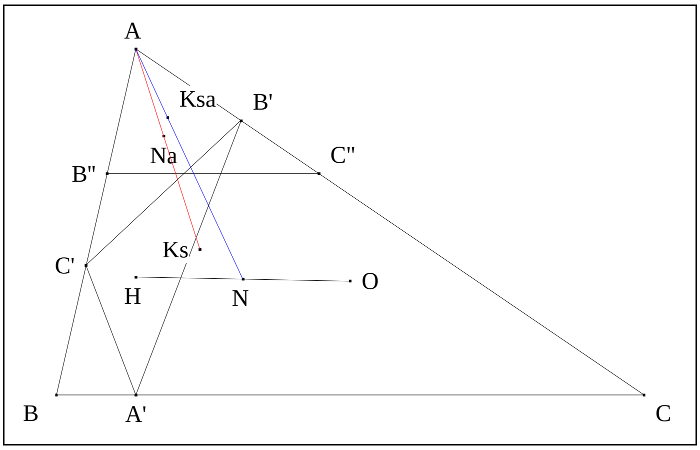
Donné : A, Na et Oa sont alignés.

VISUALISATION



- Notons Ksa le point de Kosnitza de AB'C'.

- D'après **B.** Ks est l'isogonal de N, (ANa) et (AKsa) sont deux A-isogonales de AB'C'.



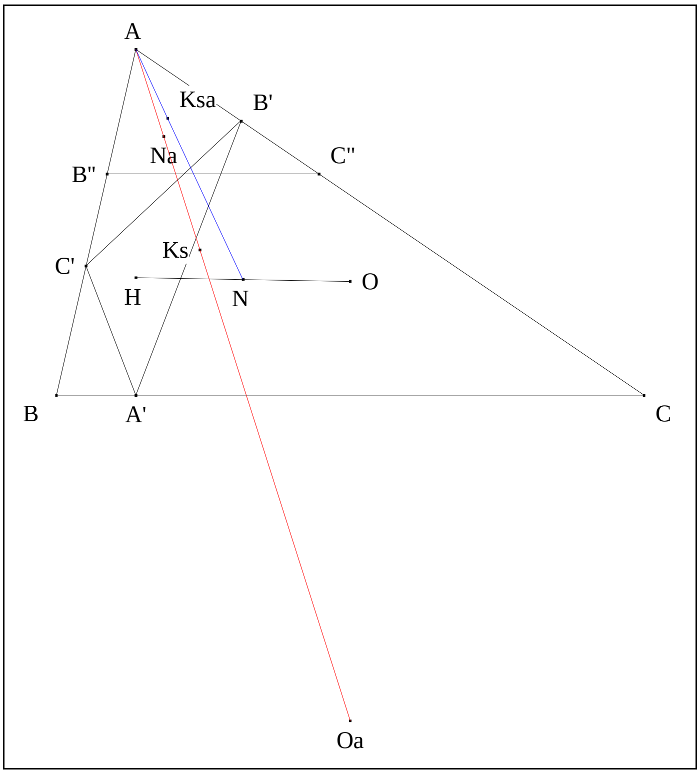
- Notons H l'orthocentre de ABC,
  N le milieu de [OH],
  B", C" les symétriques de B, C par rapport à la A-bissectrice intérieure de ABC
  et Ks le point de Kosnitza de ABC.

- D'après **B.** Ks est l'isogonal de N, (AN) et (AKs) sont deux A-isogonales de ABC.

- **Scolies :** le triangle AB"C" étant homothétique à ABC,

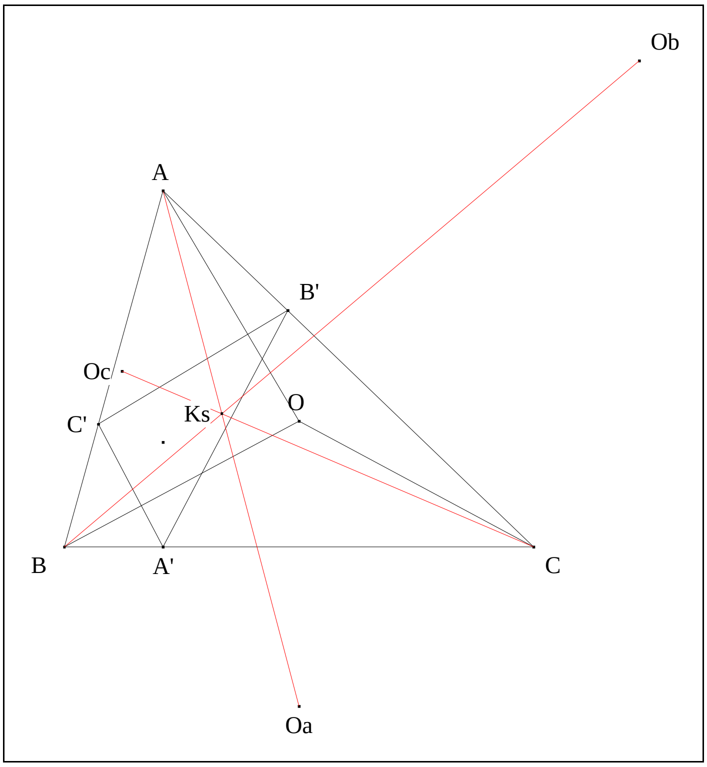
  (1) (ANa) passe par Ks

  (2) (AKsa) passe par N.



- **Conclusion :** d'après **A.** Le point de Kosnitza, A, Na et Oa sont alignés.

Scolie : vision triangulaire [22]



- Notons Oa, Ob, Oc les centres des cercles circonscrits resp. aux triangles BOC, COA, AOB.

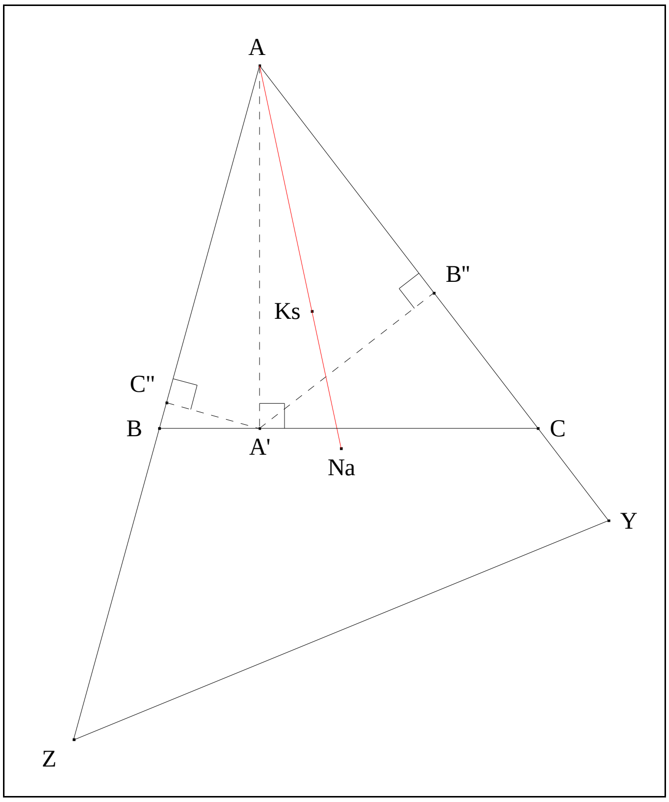
[22] Geometry from Kazakhstan!, AoPS du 27/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=559990

- **Conclusion :** d'après **A.** Le point de Kosnitza, (AOa), (AOb) et (AOc) concourent en Ks.

2. Un résultat d'Antreas Hatzipolakis

VISION

Figure :

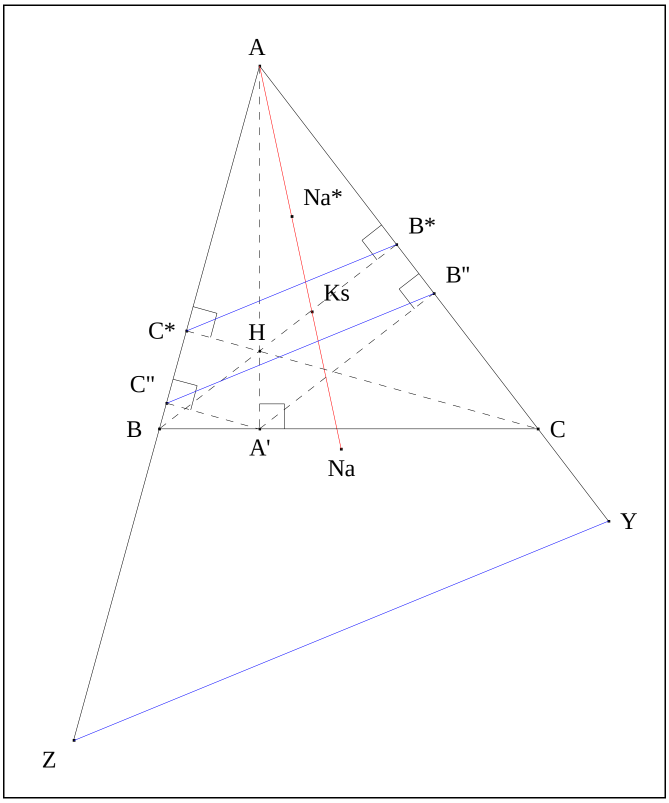


Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	A'	le pied de la A-hauteur de ABC,
	B", C"	les pieds des perpendiculaires à (AC), (AB) issue de A',
	Y, Z	les symétriques de A resp. par rapport à B", C"
et	Na	le centre du cercle d'Euler de AYZ

Donné : Na est sur (AKs). [23]

VISUALISATION

[23] Hatzipolakis A., Kosnita Point again, AoPS du 20/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h614695p3658055
Hatzipolakis A., Sondat's line ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22772



- Notons H l'orthocentre de ABC
  et B*, C* les pieds des B, C-hauteur de ABC.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [24],
  appliqué aux triangles perspectifs HB*C* et A'B"C" de centre A, (B*C*) // (B"C").

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AYZ, (B"C") // (YZ) ;
  par transitivité de la relation //, (B*C*) // (YZ).

- Les triangles AYZ et AB*C* étant homothétiques, Na est l'homologue de Na* ;
  en conséquence, A, Na et Na* sont alignés.

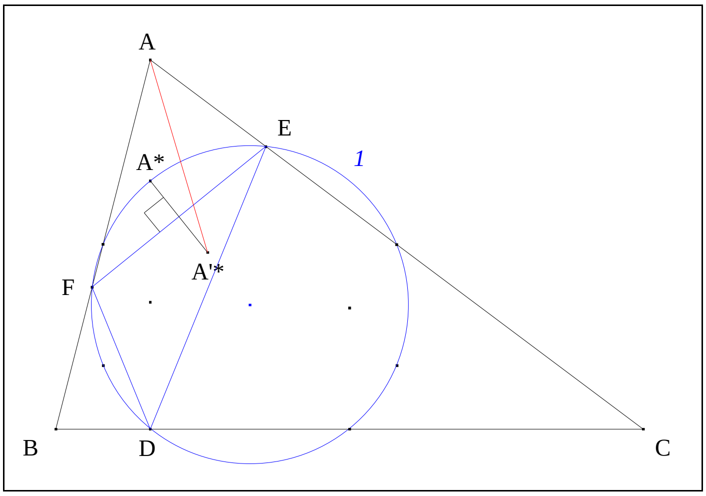
- **Conclusion :** d'après **D. 1.** Centre du cercle d'Euler, Na est sur (AKs).

3. Le triangle d'Euler

VISION

Figure :

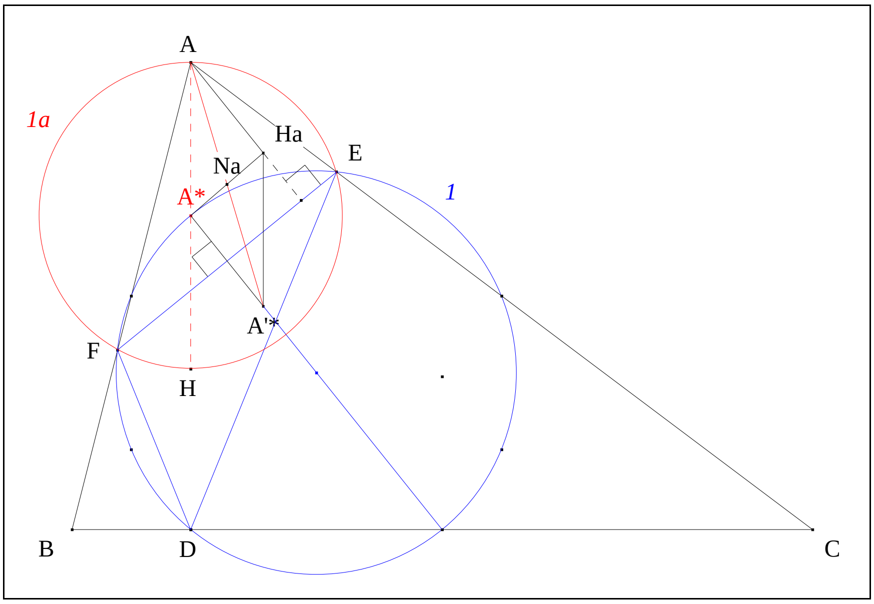
[24] Ayme J.-L., Une reverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 40-44 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABC un triangle,
DEF le triangle orthique de ABC,
1 le cercle d'Euler de ABC,
A* le A-point d'Euler de ABC
et A'* le symétrique de A* par rapport à (EF).

Donné : A'* est sur la A-droite de Kosnitza de ABC.

VISUALISATION



- Notons H l'orthocentre de ABC,
  Ha l'orthocentre deu triangle AEF,
  1a le cercle de diamètre [AH] ; il passe par E et F ;
  et Na le centre du cercle d'Euler du triangle AEF.

- D'après "La relation de Carnot" (Cf. **V.** Annexe **1**), le quadrilatère AA*A'*Ha est un parallélogramme.

- **Scolies :** **(1)** A* est le centre de *1a*

  (2) Na est le milieu de [A*Ha]

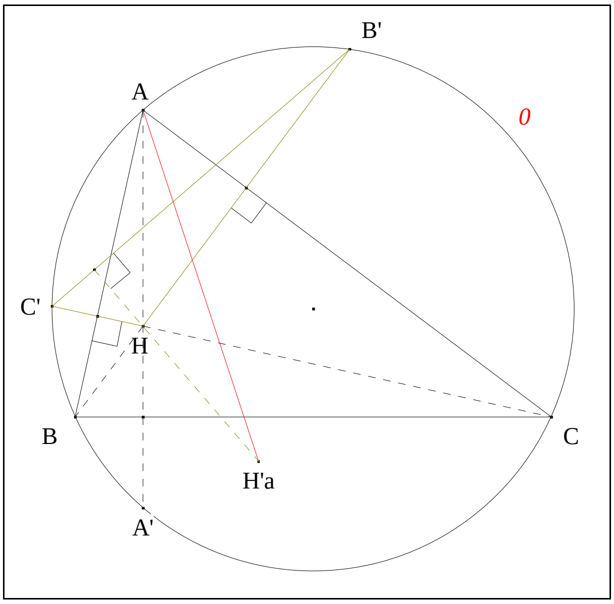
  (3) A, Na et A'* sont alignés.

- **Conclusion :** d'après **D. 1.** Centre d'un cercle d'Euler, A'* est sur la A-droite de Kosnitza de ABC.

4. Le triangle H-circum-orthique

VISION

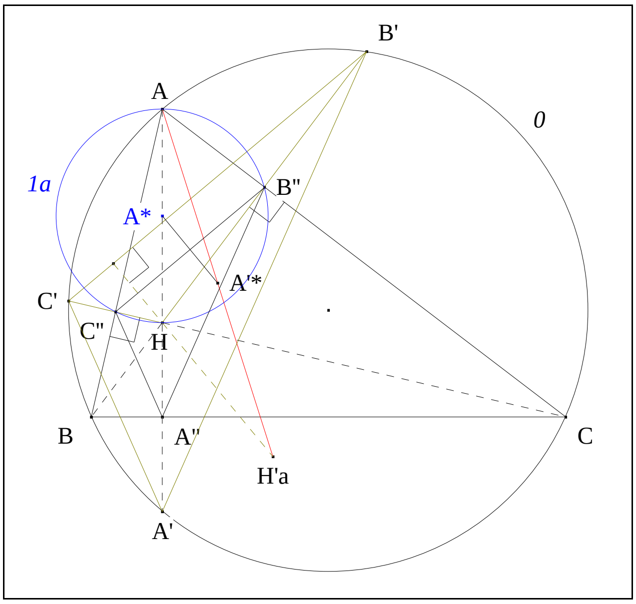
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle H-circumorthique de ABC
et H'a l'orthocentre du triangle HB'C'.

Donné : H'a est sur le A-droite de Kosnitza de ABC.

VISUALISATION



- Notons A"B" C" le triangle orthique de ABC,
  A* le A-point d'Euler de ABC
  1a le cercle de diamètre [AH] ; il a pour centre A* et passe par B" et C" ;
  et A'* le symétrique de A* par rapport à (B"C").

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. **V.** Annexe **2**),
  A'B'C' est homothétique à A"B"C" (centre H et rapport 2).

- D'après Carnot "La relation" (Cf. **V. A**nnexe **1**), H'aH = 2.A*A'*.

- **Scolie :** (H'aH) // (A*A'*).

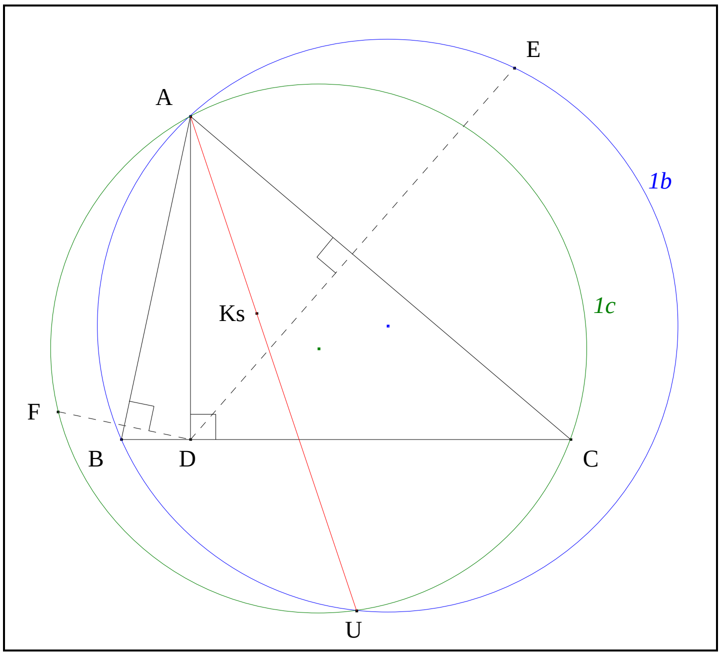
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AHH'a, A'* est sur (AH'a).

- **Conclusion :** d'après **D. 2.** Le triangle d'Euler, H'a est sur le A-droite de Kosnitza de ABC.

5. Un point, intersection de deux cercles

VISION

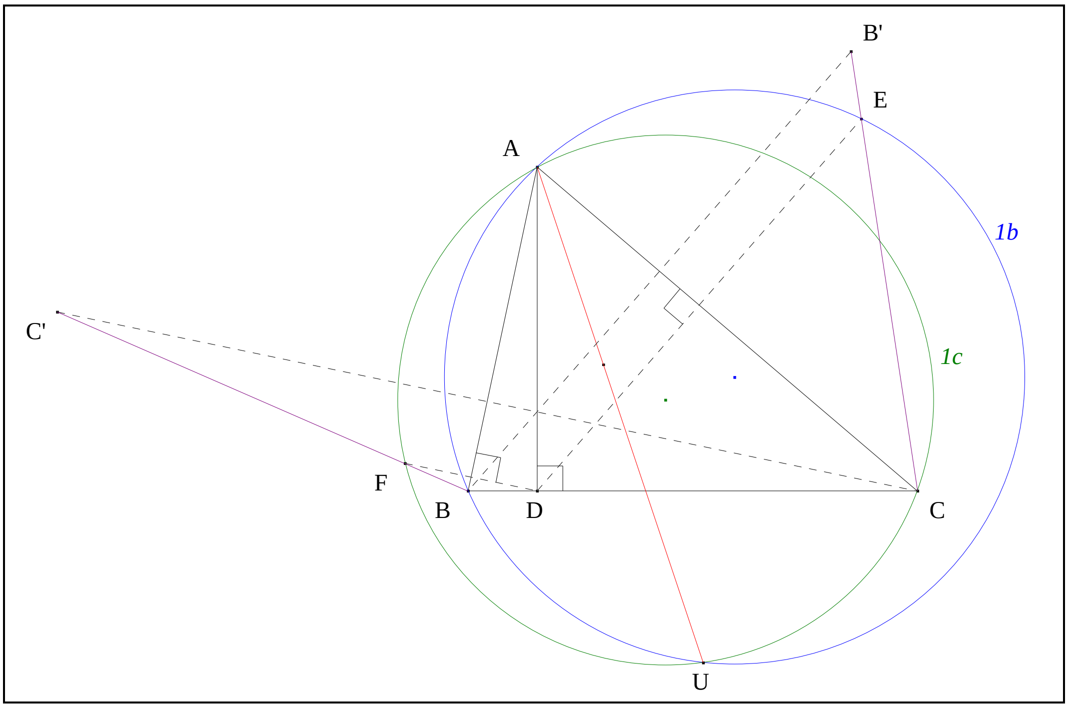
Figure :



Traits : ABC un triangle,
Ks le point de Kosnitza de ABC,
D le pied de la A-hauteur de ABC,
E, F les symétriques de D resp. par rapport à (AC), (AB),
1b, *1c* les cercles circonscrits resp. aux triangles BAE, CAF
et U le second point d'intersection de *1b* et *1c*.

Donné : U est sur (AKs) [25].

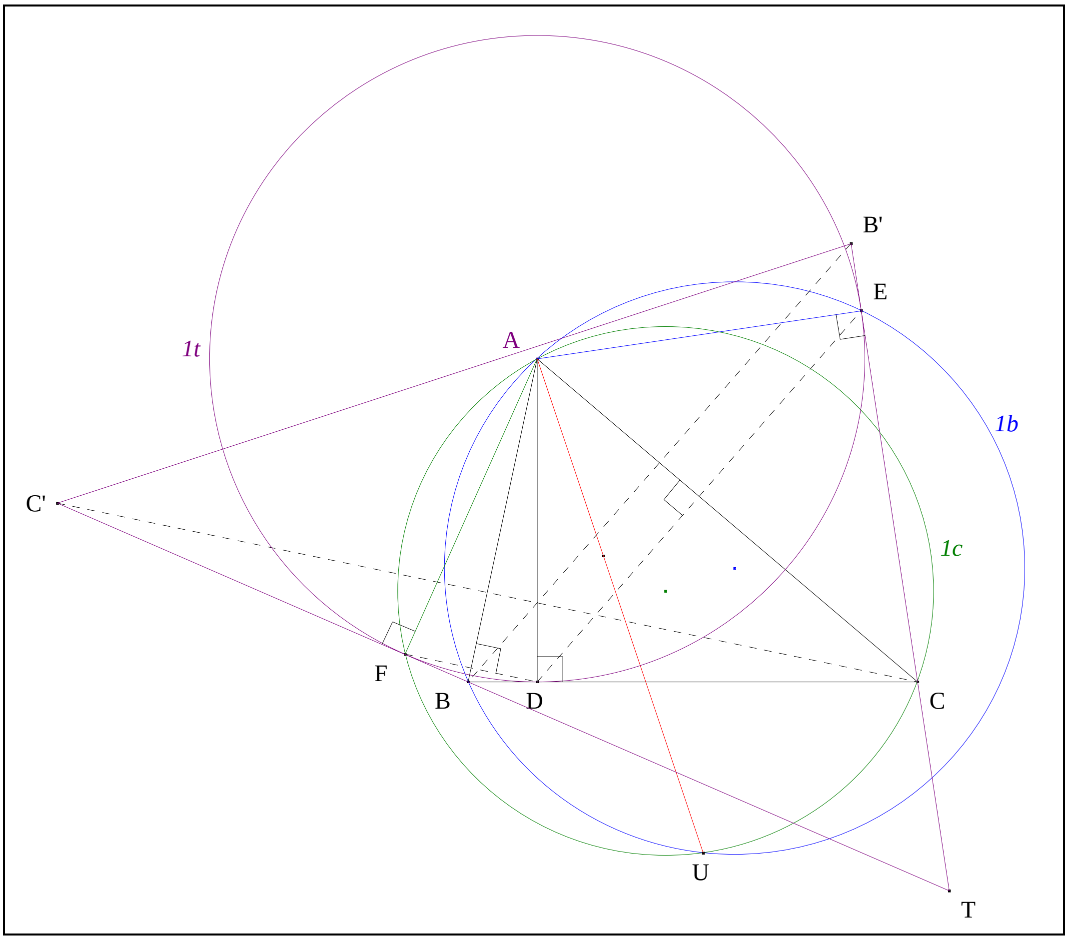
VISUALISATION



[25] The Kosnita point lies on AU, AoPS du 29/12/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h619169p3693390

- Notons B', C' les symériques de B, C resp. par rapport à (AC), (AB).
- Par symétrie axiale, **(1)** B, F et C' sont alignés

  (2) C, E et B' sont alignés.



- Notons T le point d'intersection de (BF) et (CE),

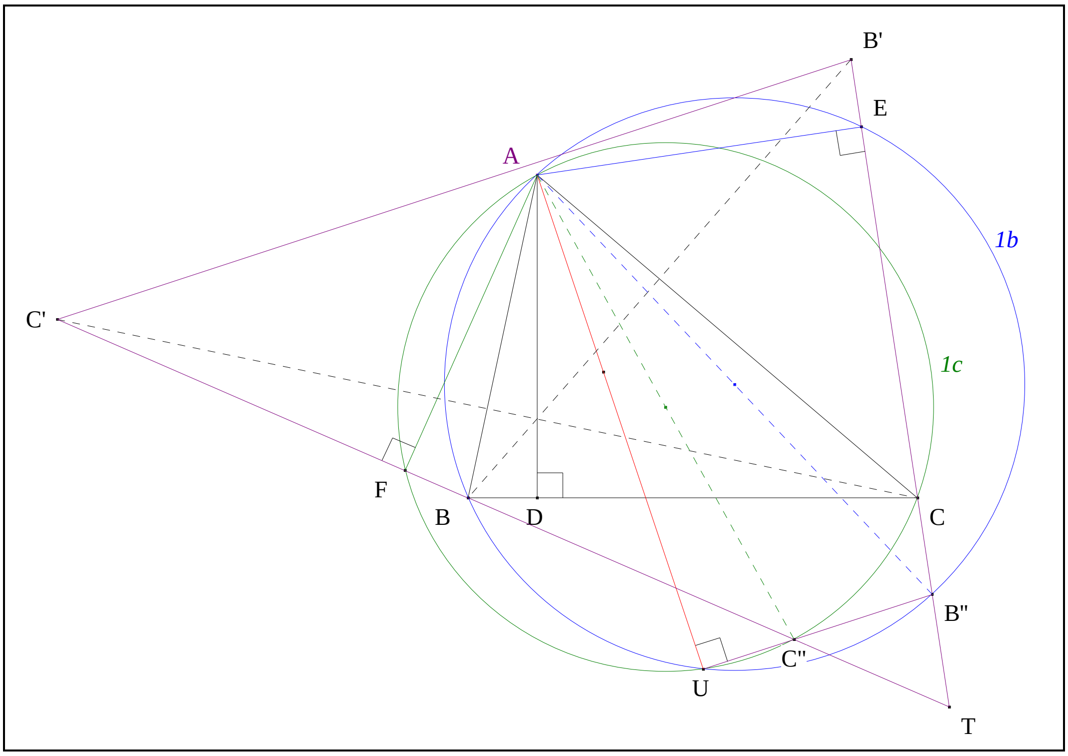
  et *1t* le cercle de centre A passant par D.

- **Scolies :** **(1)** *1t* est tangent à (BC) en D

  (2) *1t* est tangent à (CE) en E

  (3) *1t* est tangent à (BF) en F

  (4) *1t* est le T-excercle du triangle TBC.

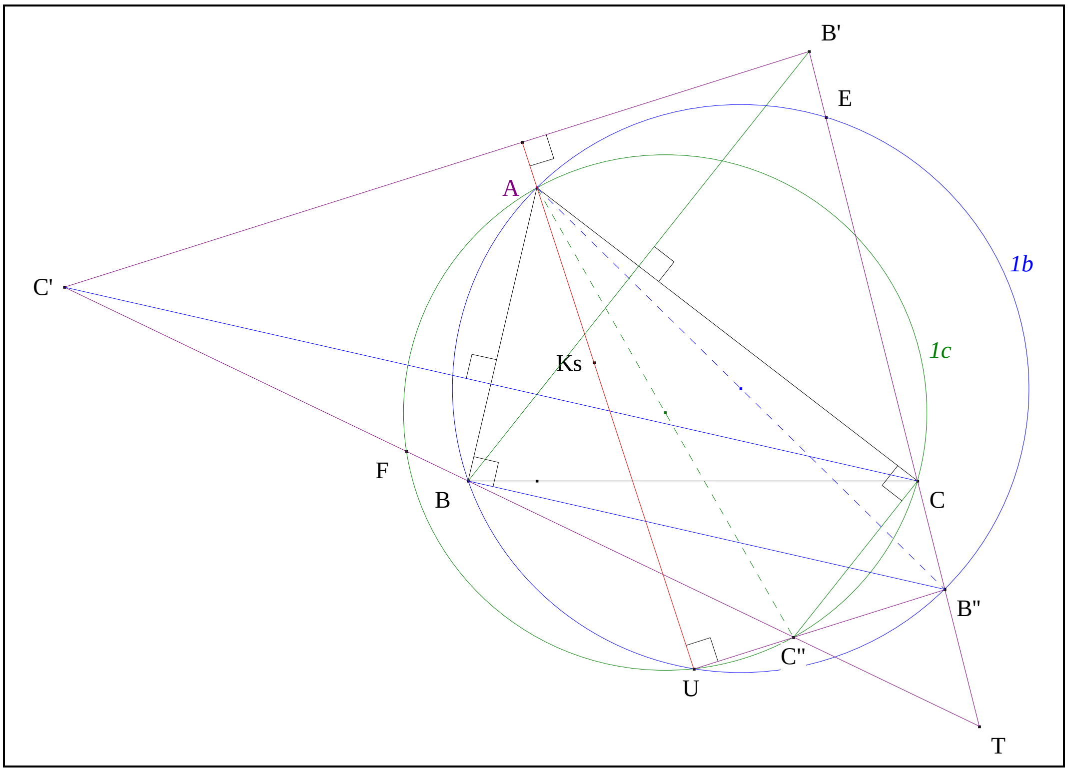


* Notons B", C" les seconds points d'intersection de (CE), (BF) resp. avec *1b*, *1c*.

* **Scolies :** **(1)** B", C" sont les antipôles de A resp. par rapport à *1b*, *1c*

  (2) B", C" et U sont alignés

  (3) (B"C") ⊥ (AU).



* **Scolies :** **(1)** (BB"), (CC") sont resp. les B, C-bissectrices intérieures de TBC

(2) (BB") // (CC') et (CC") // (BB').

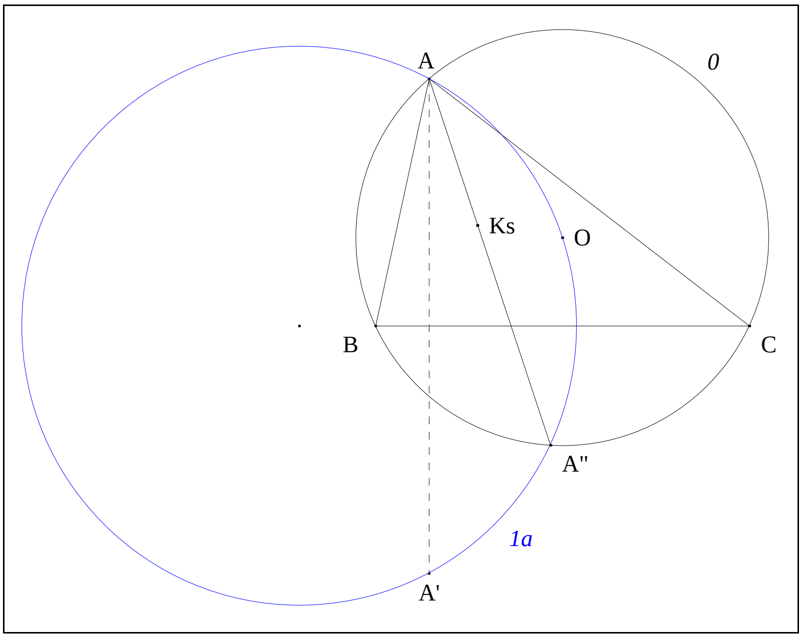
- D'après "Le petit théorème de Pappus" [26]
  appliqué à l'hexagone sectoriel B"C"CC'B'BB" de frontières (TC') et (TB'), (B'C') // (B"C") ;
  nous savons que (B"C") ⊥ (AU) ;
  en conséquence, (B'C') ⊥ (AU).

- **Conclusion :** d'après **C. 3.** Le triangle symétrique, U est sur (AKs).

6. Un résultat de l'auteur

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
A' le symétrique de A par rapport à (BC),
1a le cercle circonscrit au triangle AOA',
A" le second point d'intersection de *1a* et 0,
et Ks le point de Kosnitza de ABC.

Donné : Ks est sur la corde commune [AA"].

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [27]

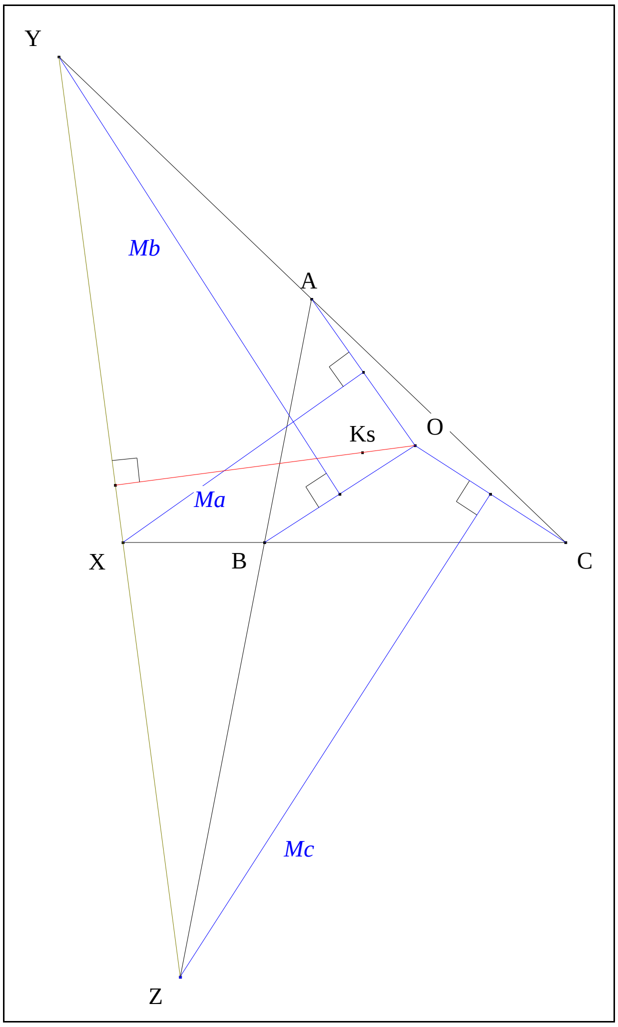
26 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexanrie, G.G.G. vol. **6**, p. 2-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
27 Ayme J.-L., Le point de Kosnitza est l'isogonal du centre du cercle d'Euler, G.G.G. vol. **1**, p. 11-13 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

E. LA DROITE (OKs)

1. Une perpendiculaire à (OKs)

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
Ks le point de Kosnitza de ABC,
Ma, *Mb*, Mc les médiatrices de [OA], [OB], [OC]
et X, Y, Z les points d'intersection de *Ma*, *Mb*, *Mc* resp. avec (BC), (CA), (AB).

Donnés : **(1)** X, Y et Z sont alignés [28]

(2) (OKs) est perpendiculaire à (XYZ) [29].

---

28 Geometry Problem (**23**), AoPS du 24/10/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h373509
Ayme J.-L., Le point de Kosnitza est l'isogonal du centre du cercle de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** (2007) p. 5-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

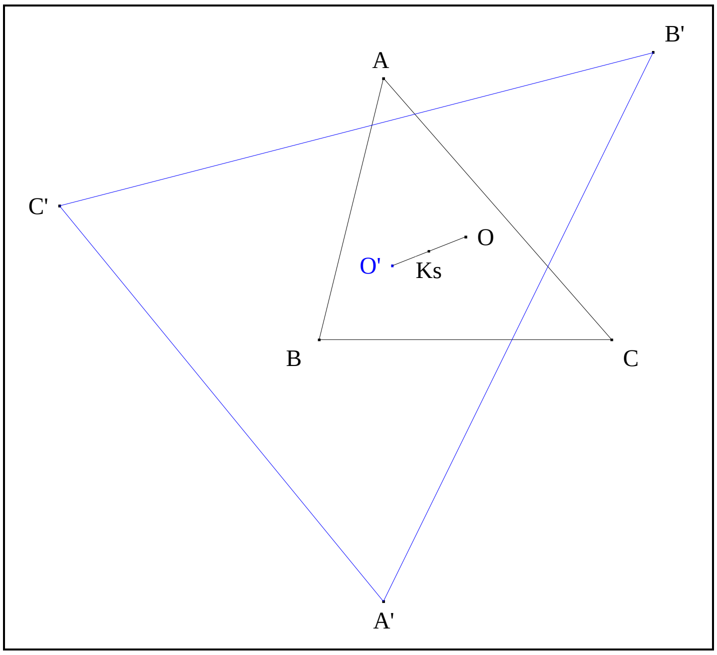
29 Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. **1** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

2. Le centre du cercle circonscrit au triangle symétrique

VISION

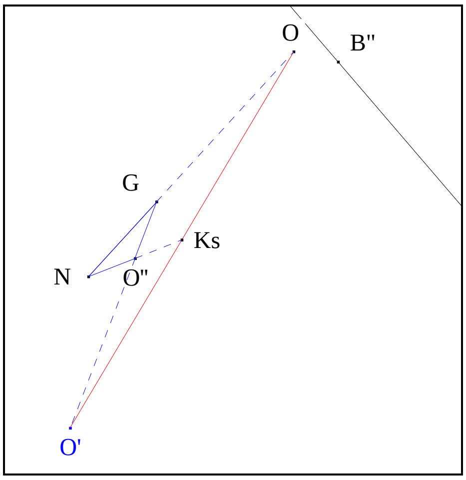
Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle symétrique de ABC,
O' le centre du cercle circonscrit à A'B'C'
et Ks le point de Kosnitza de ABC.

Donné : Ks est le milieu de [OO'].

VISUALISATION



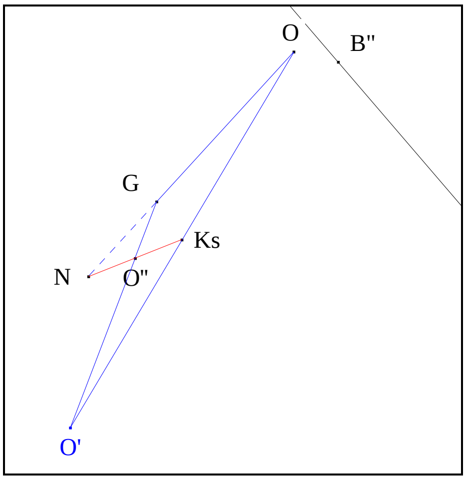
- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC,
  A"B"C" le triangle N-pédal de ABC,
  O" le centre du cercle circonscrit à A"B"C",
  et G le point médian de ABC

- D'après "Le cercle de Mathieu" [30], O" est le milieu de [NKs].

- D'après "La droite d'Euler" [31], G est le premier tiers point de [NO] à partir de N.

- D'après **C. 3.** Le triangle symétrique, scolie **4**, O" est le premier quart point de [GO'] à partir de G.

- D'après Ménélaüs "Le théorème des six segments"
  appliqué au triangle GNO" avec
  O sur (GN), Ks sur (NO"), O sur (O"G), O, Ks et O' sont alignés.



- **Conclusion :** d'après Ménélaüs "Le théorème des six segments"
  appliqué au triangle GOO' avec la ménélienne (NKsO"), Ks est le milieu de [OO'].

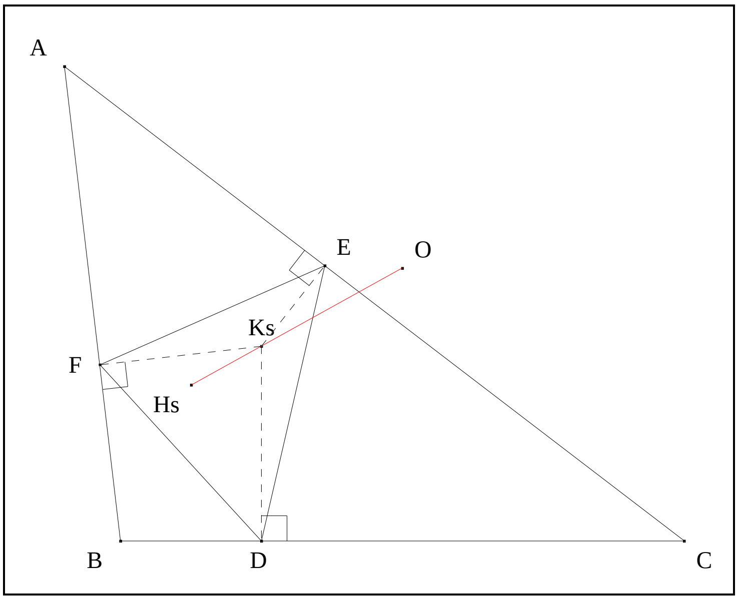
[30] Ayme J.-L., Pedal-cevian lines go through the de Longchamps's point, G.G.G. vol..**6**, p. 34-37 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[31] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol.**2**, p. 5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

3. Le point Hs sur (OKs)

VISION

Figure :

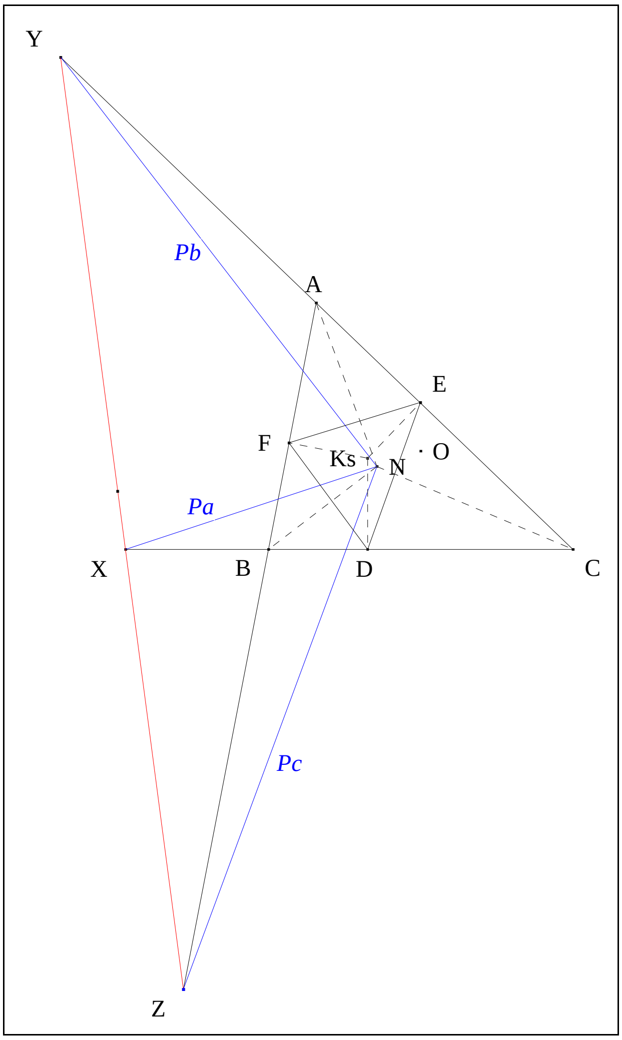


Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	DEF	le triangle Ks-pédal de ABC
et	Hs	l'orthocentre de DEF.

Donné : Hs, Ks et O sont alignés [32].

VISUALISATION

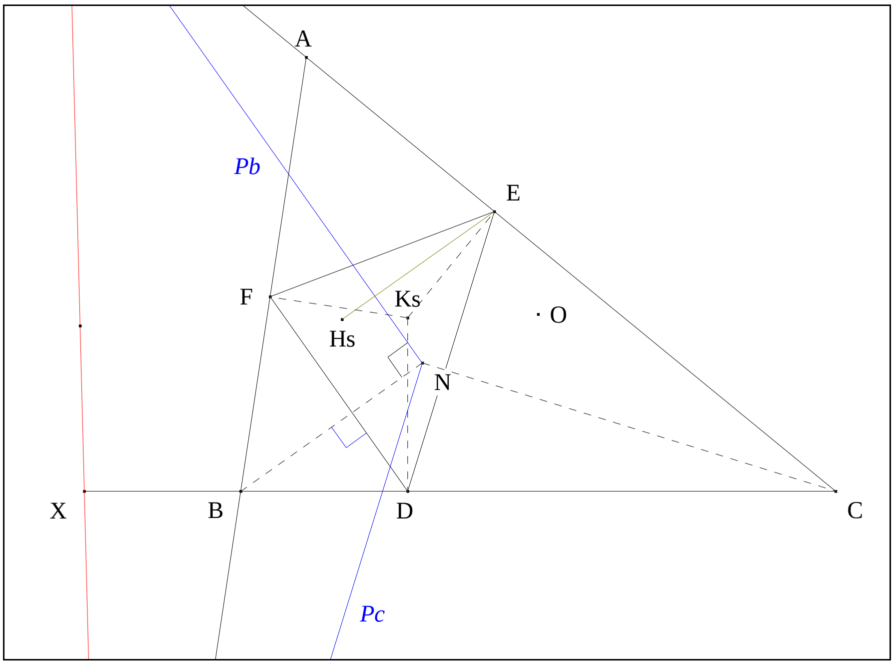
[32] HK passes through the circumcenter, AoPS du 05/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1125044_hk_passes_through_the_circumcenter



- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC,
  Pa, *Pb*, *Pc* les perpendiculaires à [NA], [NB], [NC] en N
  et X, Y, Z les points d'intersection de *Pa*, *Pb*, *Pc* resp. avec (BC), (CA), (AB).

- D'après Félix Laroche "Pôle et ortho-transversale" [33], X, Y et Z sont alignés.

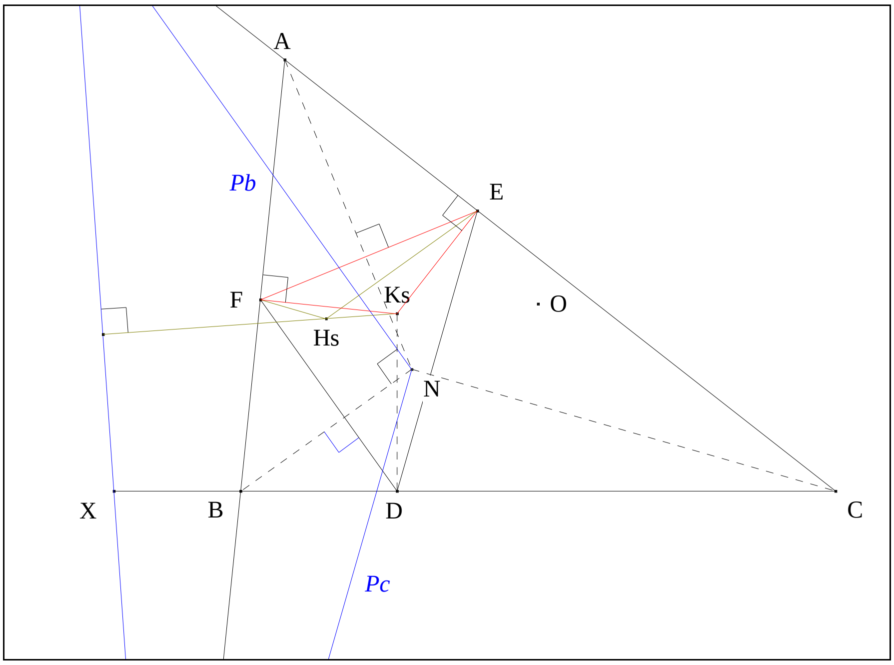
[33] Ayme J.-L., Pôle et ortho-transversale, G.G.G. vol.**9**, p. 3-6 ;
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" [34], par hypothèse, d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, | (DF) ⊥ (BN) ; (BN) ⊥ (NY) ; (DF) // (NY).

- Par hypothèse, nous savons que en conséquence, | (EHs) ⊥ (DF) ; (DF) // (NY) (EHs) ⊥ (NY).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (FHs) ⊥ (NZ).



- Considérons les triangles NYZ et KsFE.

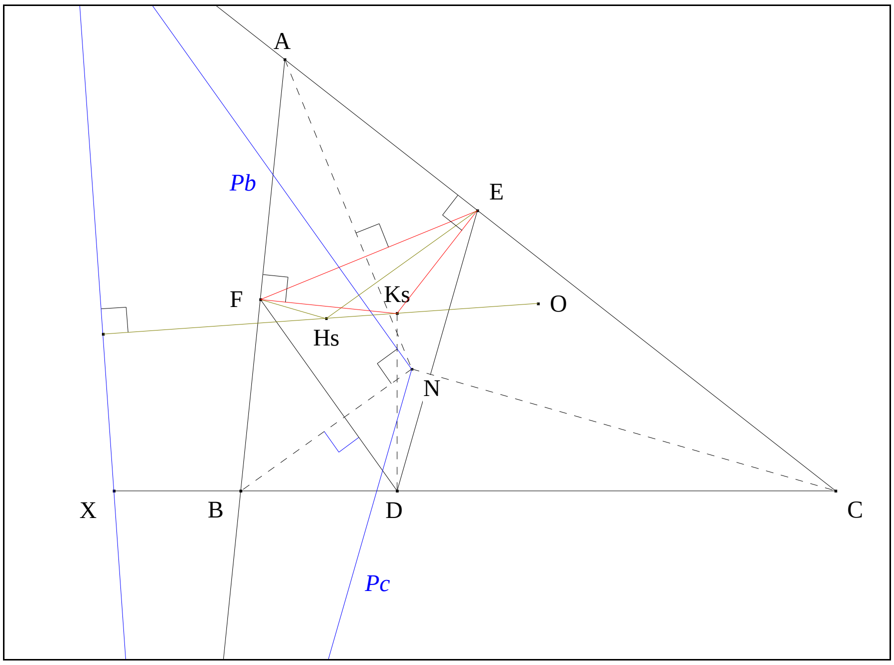
[34] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-
Ayme J.-L., Mantel * Noyer * Droz-Farny * Goormaghtigh or Simson-Wallace generalized , G.G.G. vol.**12**, p. 29-32 ;
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- Par hypothèse et par définition, **(1)** NYZ est orthologique à KsFE

  (2) A est le centre d'orthologie de NYZ relativement à KsFE.

- D'après Steiner "Triangles orthologiques", en conséquence,
  KsFE est orthologique à NYZ ;
  Hs est le centre d'orthologie de KsFE relativement à NYZ.

- **Conclusion partielle :** (KsHs) ⊥ (XYZ).



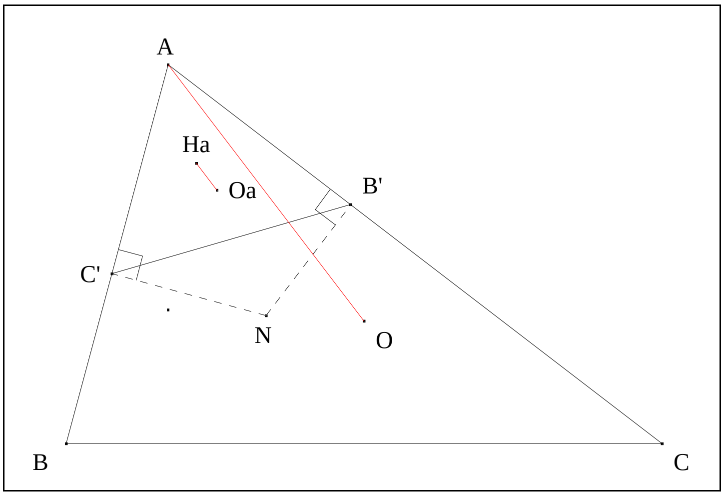
- D'après **E. 1.** Une perpendiculaire à (OKs), d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, d'après le postulat d'Euclide,
  (XYZ) ⊥ (OKs) ;
  (KsHs) // (OKs) ;
  (KsHs) = (OKs).

- **Conclusion :** Hs, Ks et O sont alignés.

4. Le résultat de Nguyen Van Linh

VISION

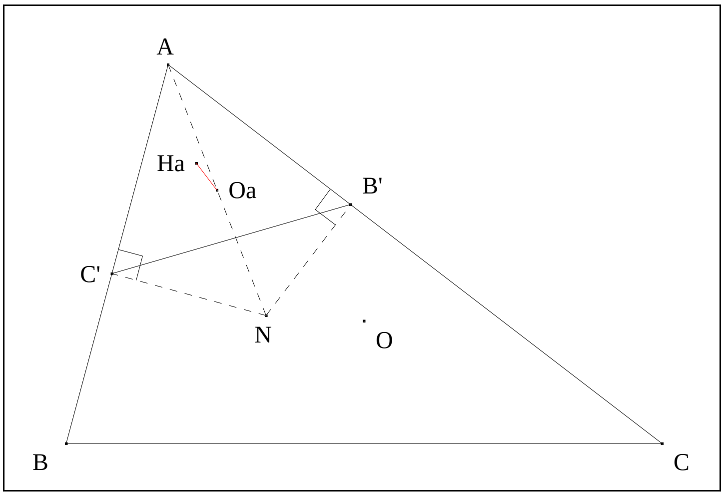
Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
N le centre du cercle d'Euler de ABC,
A'B'C' le triangle N-pédal de ABC
et Ha, Oa l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit à AB'C'.

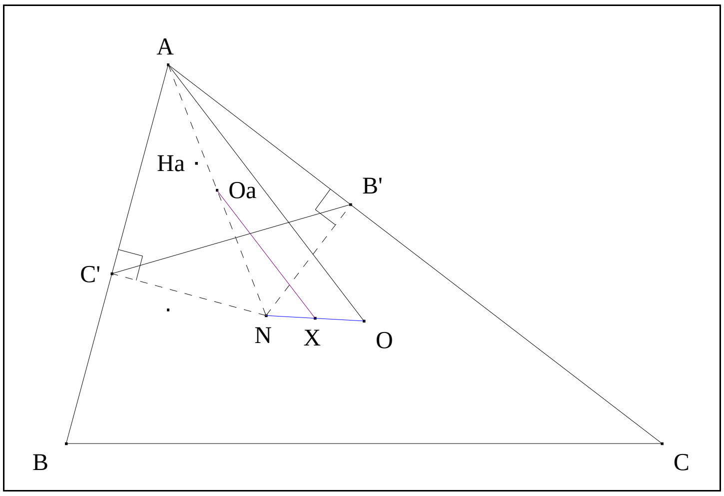
Donné : (HaOa) est parallèle à (AO). [35]

VISUALISATION

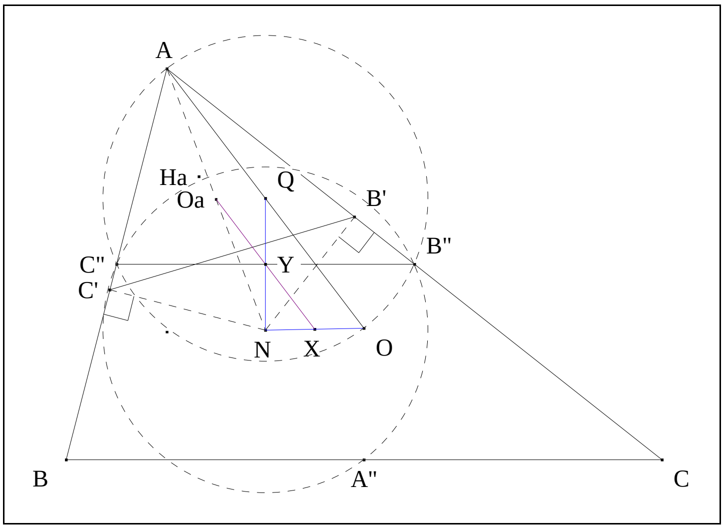


- **Scolie :** (HaOa) est la droite d'Euler de AB'C'.

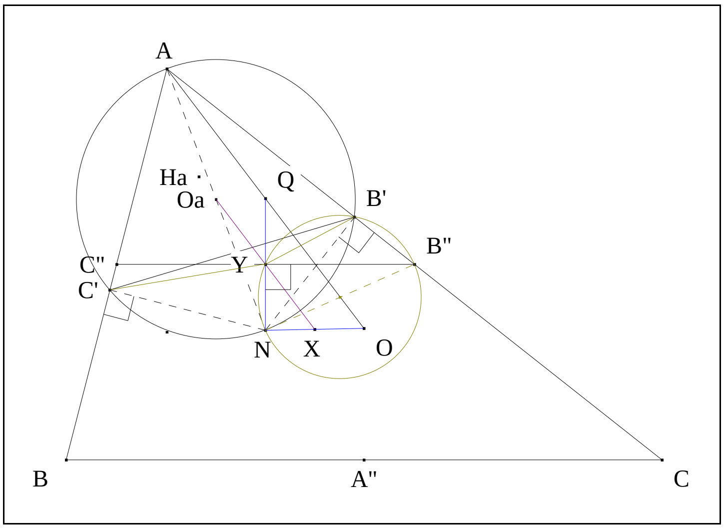
[35] Nguyen Van Linh, 4 Euler lines are concurrent, Vietnam IMO training 2015 test, AoPS du 11/05/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1087710p4817974
Thre interesting collinear points, AoPS du 30/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1220084_three_interesting_collinear_points



- Notons X le milieu de [ON].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ANO, (OaX) // (AO).



- Notons Q le milieu de [AO]
  et A"B"C" le triangle médian de ABC.
- **Scolie :** Q est le centre du cercle circonscrit au triangle AB"C".
- AB"C" et A"C"B" étant égaux, (B"C") est la médiatrice de [NQ].
- Notons Y le milieu de [NQ].
- **Scolie :** Y est sur (B"C").
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ANQ, Y est sur (OaX).

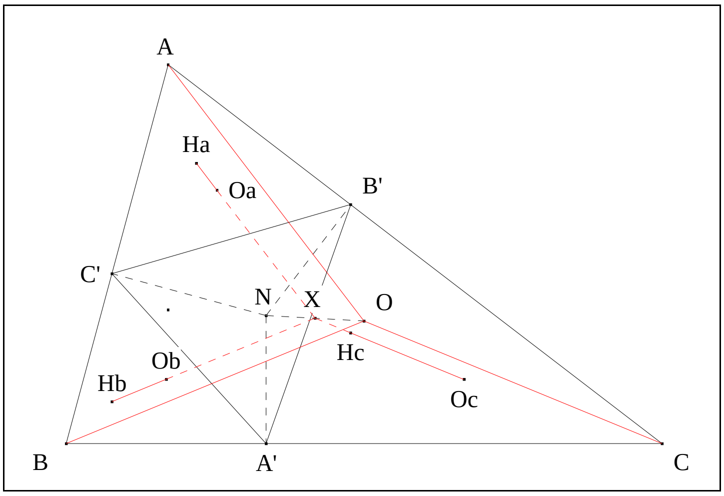


- Une chasse angulaire :

*	B' et Y étant sur le cercle de diamètre [NB"],	<AB'Y = <B"NY
*	par duplication,	<B"NY = ½ <B"NC"
*	par symétrie d'axe (B"C"),	½. <B"NC" = ½ <C"QB"
*	N étant sur le cercle circonscrit à AB"C" par "Angle au centre",	½ <C"QB" = <C"AB"
*	par une autre écriture,	<C"AB" = <C'AB'
*	par transitivité de la relation =,	<AB'Y = <C'AB'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <YC'A = <C'AB'.
- Les angles <AB'Y, <YC'A et <C'AB' étant égaux,
  d'après "Un point sur la droite d'Euler" (Cf. **U.** Appendice **2**), Y est sur (HaOa).
- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, (HaOa) passe par X.
- **Conclusion :** (HaOa) // (AO).

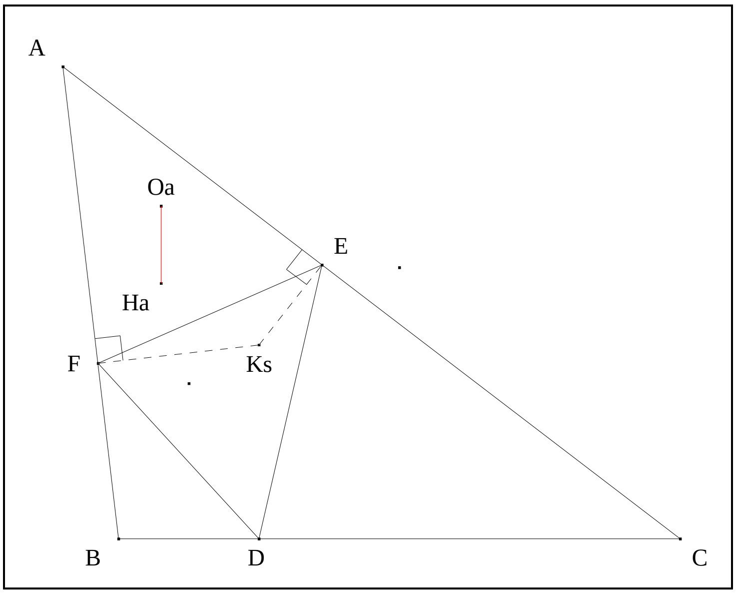
Scolie : vision triangulaire



5. Une perpendiculaire à (BC)

VISION

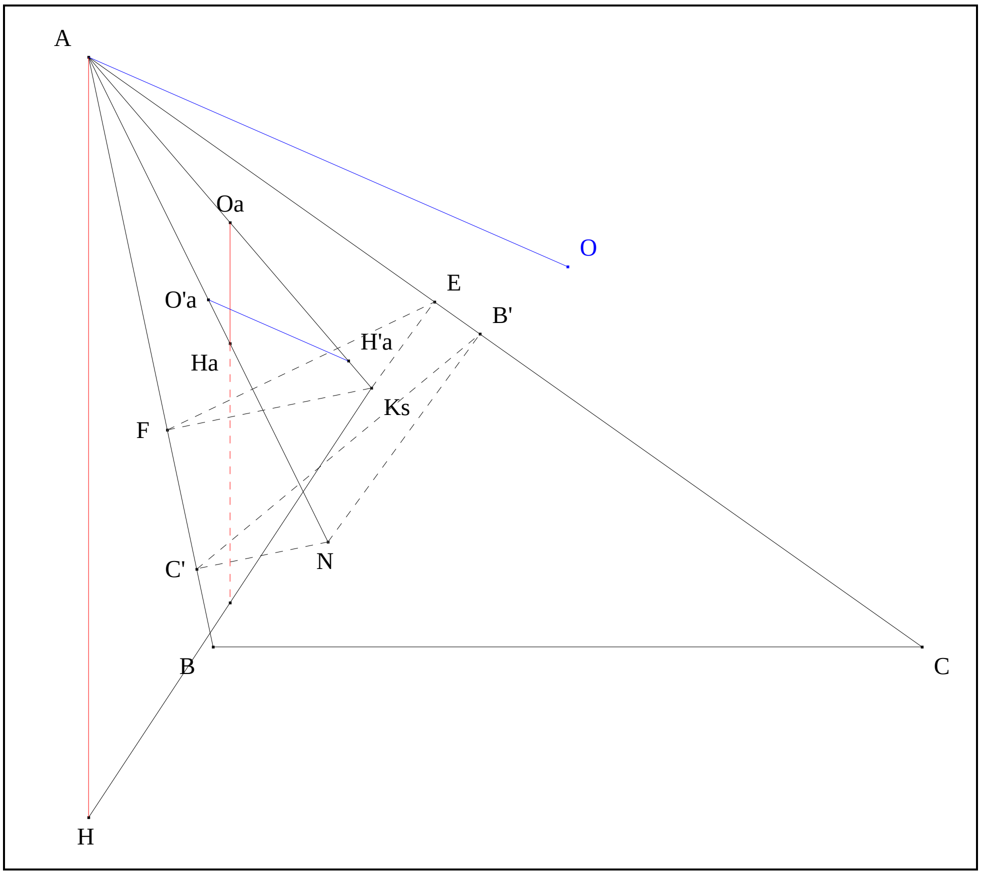
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	DEF	le triangle Ks-pédal de ABC
et	Ha, Oa	l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

Donné : (HaOa) est perpendiculaire à (BC).

VISUALISATION



- Notons H l'orthocentre de ABC,
  O le centre du cercle circonscrit à ABC,
  N le centre du cercle d'Euler de ABC,
  A'B'C' le triangle N-pédal de ABC
  et H'a, O'a l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

- D'après **E. 4.** Le résultat de Nguyen Van Linh**,** (H'aO'a) // (AO) ;

- D'après **B. 1.** Ks isogonal de N, **(1)** (AHa) et (AH'a) sont deux A-isogonales de ABC

  (2) (AOa) et (AO'a) sont deux A-isogonales de ABC

- **Scolies :** **(1)** Oa est sur (AH'aKs)

  (2) Ha est sur (AO'aN)

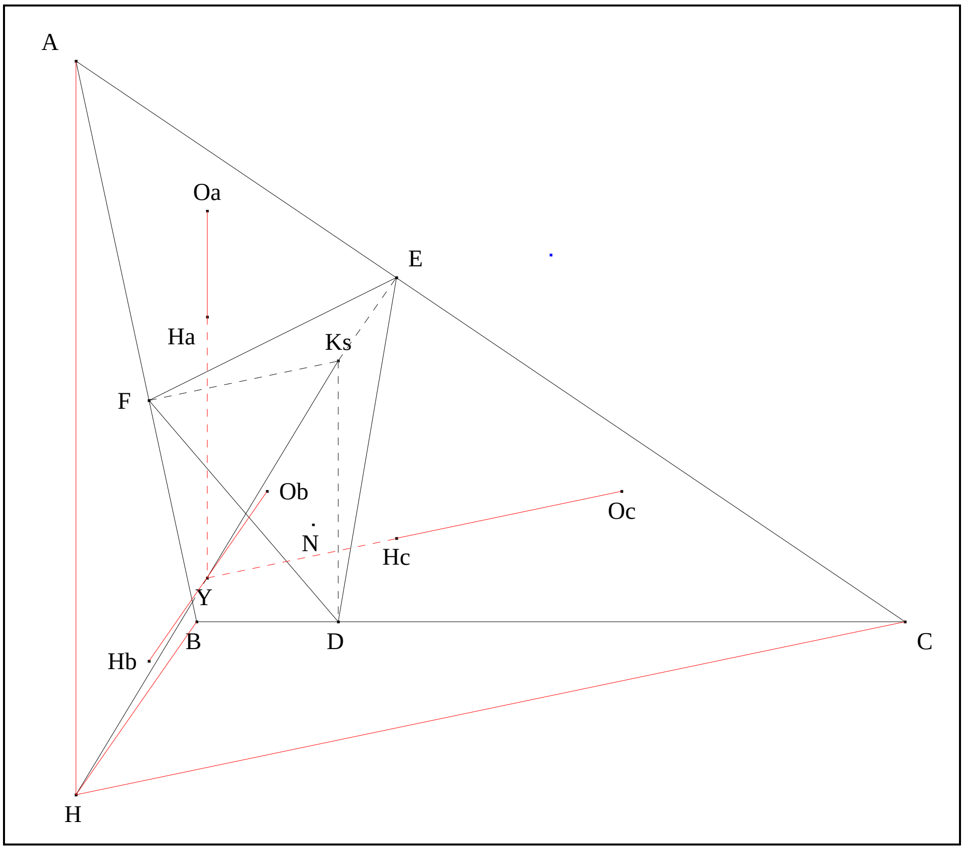
- H étant l'isogonal de O, (AH) et (AO) sont deux A-isogonales de ABC.

- D'après **E. 4.** Le résultat de Nguyen Van Linh**,**
  mutatis mutandis nous montrerions que * (HaOa) passe par le milieu de [HKs]

  * (HaOa) est parallèle à (AH).

- **Conclusion :** (AH) étant perpendiculaire à (BC), (HaOa) est perpendiculaire à (BC).

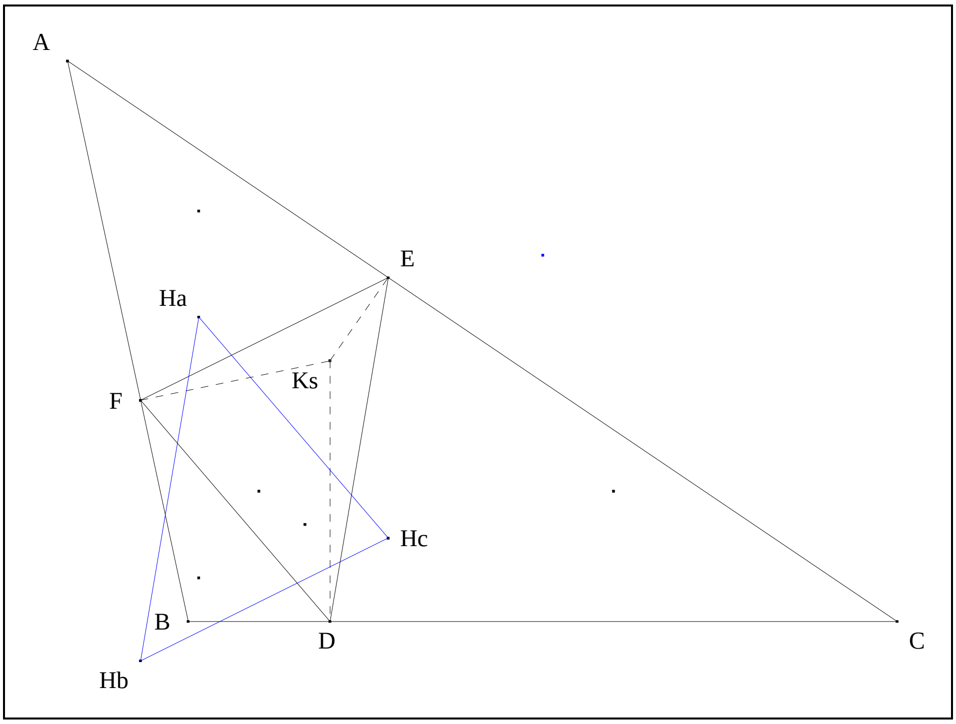
Scolie : vision triangulaire



6. Deux triangles homothétiques égaux

VISION

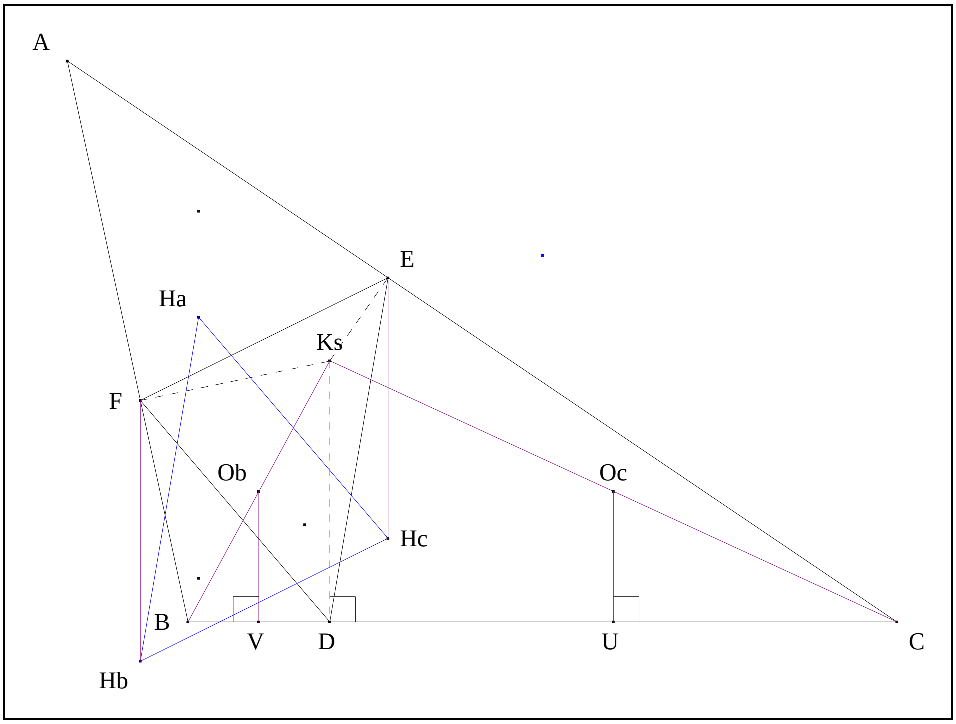
Figure :



Traits : ABC un triangle,
Ks le point de Kosnitza de ABC,
DEF le triangle Ks-pédal de ABC
et Ha, Hb, Hc les orthocentres resp. des triangles AEF, BFD, CDE.

Donné : les triangles HaHbHc et DEF sont homothétiques et égaux.

VISUALISATION



- Notons Oc le centre du cercle circonscrit au triangle CDE
  et U le pied de la perpendiculaire à (BC) issue de Oc.

- D'après Carnot "La relation" (Cf. **V.** Annexe **1**), EHc = 2.OcU et (EHc) // (OcU) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à CDE, 2.OcU = KsD et (OcU) // (KsD) ;
  par transitivité de la relation =, EHc = KsD et (EHc) // (KsD).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que KsD = FHb et (KsD) // (FHb).

- Par transitivité des relations = et //, EHc = FHb et (EHc) // (FHb).

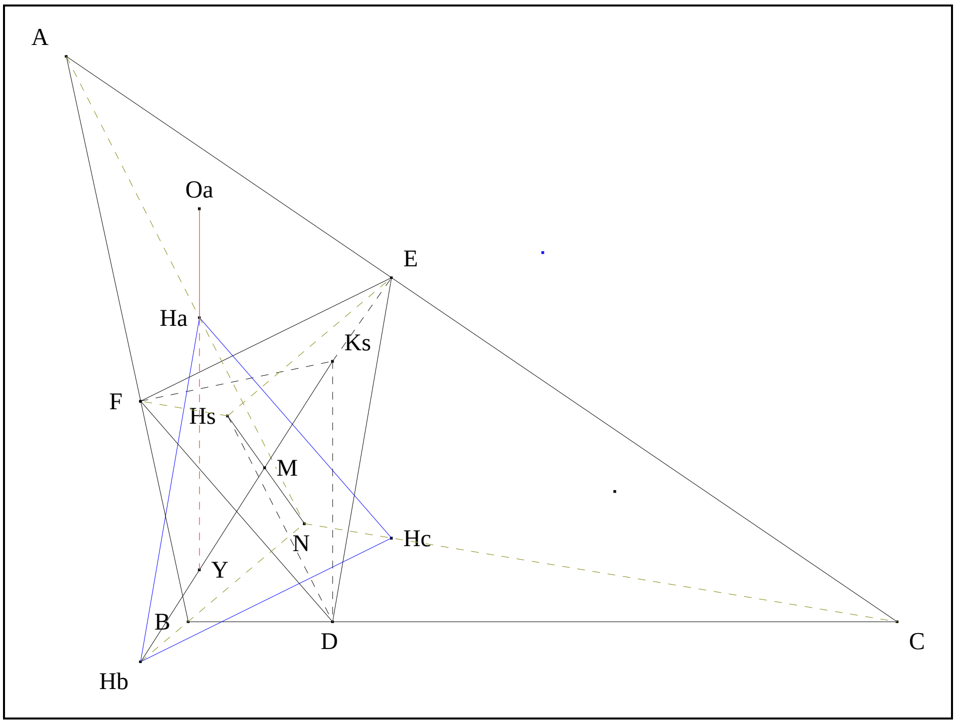
- **Conclusion partielle :**
  le quadrilatère EFHbHc
  ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, HbHc = EF et (HbHc) // (EF).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que * HcHa = FD et (HcHa) // (FD)

  * HaHb = DE et (HaHb) // (DE).

- **Conclusion :** les triangles HaHbHc et DEF sont homothétiques et égaux.

Scolie : HaHbHc et DEF sont perspectifs et orthologiques



- Notons M le centre d'homothétie de HaHbHc et DEF.

- Notons Hs l'orthocentre de DEF.

- Nous avons : * N est l'orthopôle de HaHbHc relativement à DEF

  * Hs est l'orthopôle de DEF relativement à HaHbHc.

- D'après "Le théorème de Sondat" [36], Hs, M et N sont alignés.

- Ks et Y étant deux points homologues, M est sur (HbKs).

---

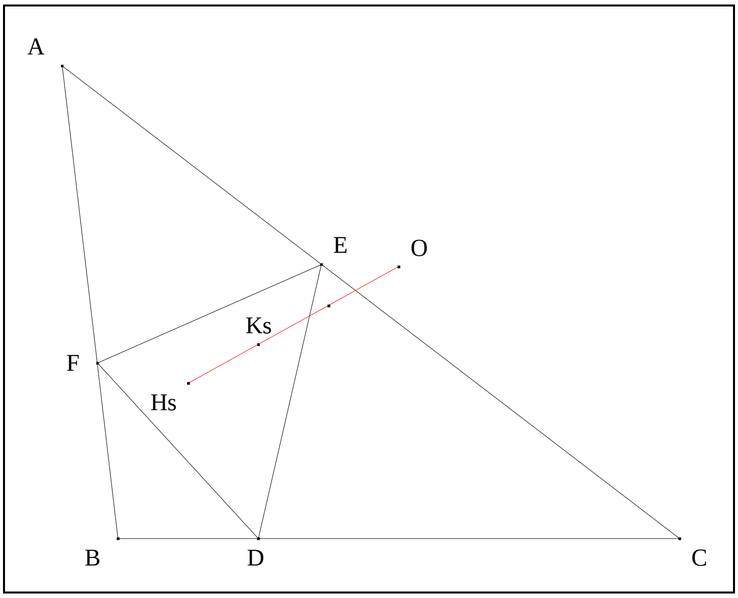
[36] Ayme J;-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. **1** ; http://jl;ayme.pagesperso-orange.fr/

- **Conclusion :** HaHbHc et DEF étant égaux, M est le milieux de [HsN] et [KsY].

7. Position de Hs sur (OKs)

VISION

Figure :

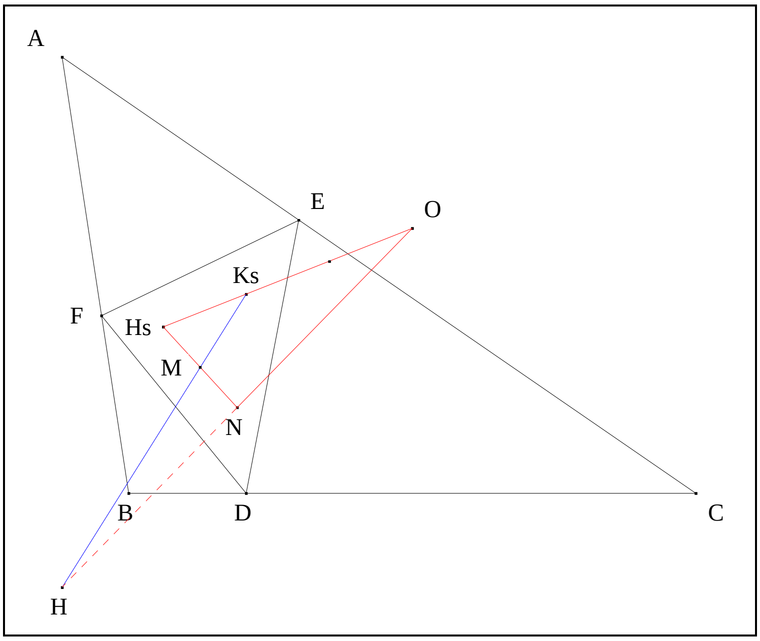


Traits : ABC		un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	DEF	le triangle Ks-pédal de ABC
et	Hs	l'orthocentre de DEF.

Donné : HsO = 3.HsKs [37].

VISUALISATION

[37] HK passes through the circumcenter, AoPS du 05/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1125044_hk_passes_through_the_circumcenter



- D'après **E. 3.** Le point Hs sur (OKs), Hs, Ks et O sont alignés.

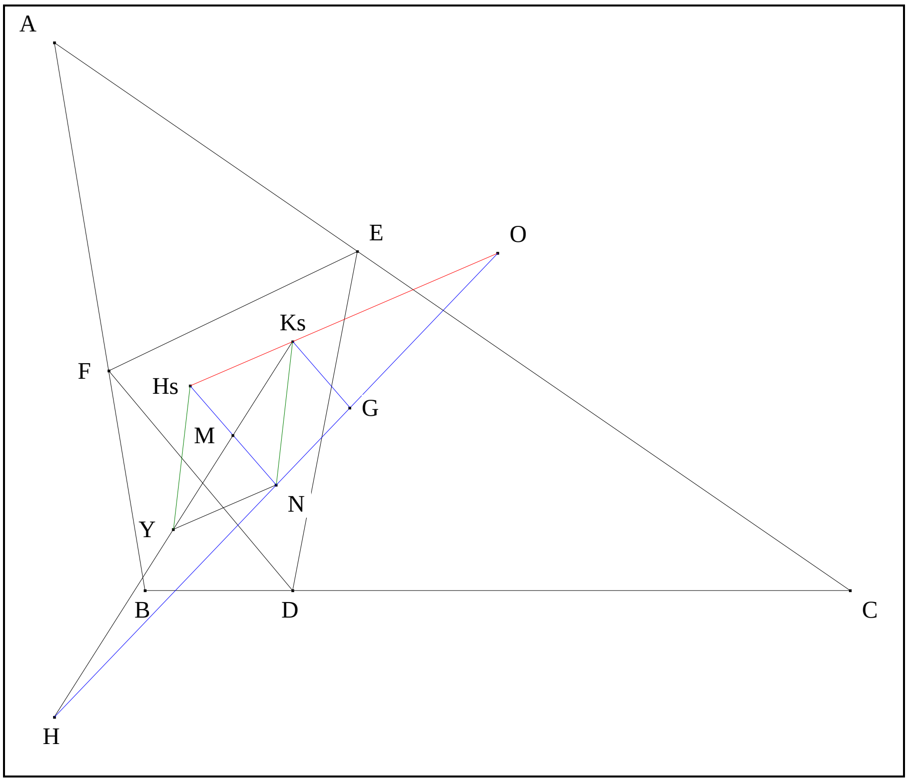
- Notons M le point d'intersection de (HKs) et (NHs).

- D'après **E. 6.** Deux triangles homothétiques et égaux, M est le milieu de [NHs]
  d'après Feuerbach [38], N est le milieu de [OH].

- **Conclusion :** d'après le théorème de Ménélaüs
  appliqué au triangle ONHs et à la ménélienne (HKsM), HsO = 3.HsKs.

Scolies : **(1)** deux parallèles

[38] Ayme J;-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. **2**, p. 4-5 ; http://jl;ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons G le point médian de ABC.
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports", (GKs) // (NHs).

(2) Deux autres couples de parallèles

- **Conclusion :** (NKs) // (YHs) et (NY) // (HsKs).

F. LES POINTS

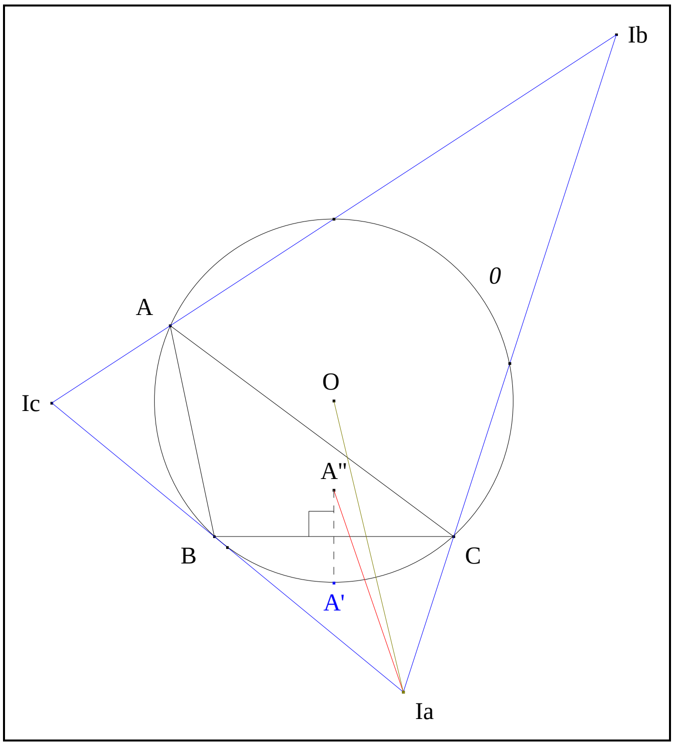
DE

SCHIFFLER ET KOSNITZA

1. Le triangle excentral

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
A' le milieu de l'arc BC ne contenant pas A,
A" le symétrique de A' par rapport à (BC)
et IaIbIc le triangle excentral de ABC.

Donné : (IaA") est la Ia-droite de Kosnitza de IaIbIc.

VISUALISATION

- **Scolie :** **(1)** *0* est le cercle d'Euler de IaIbIc

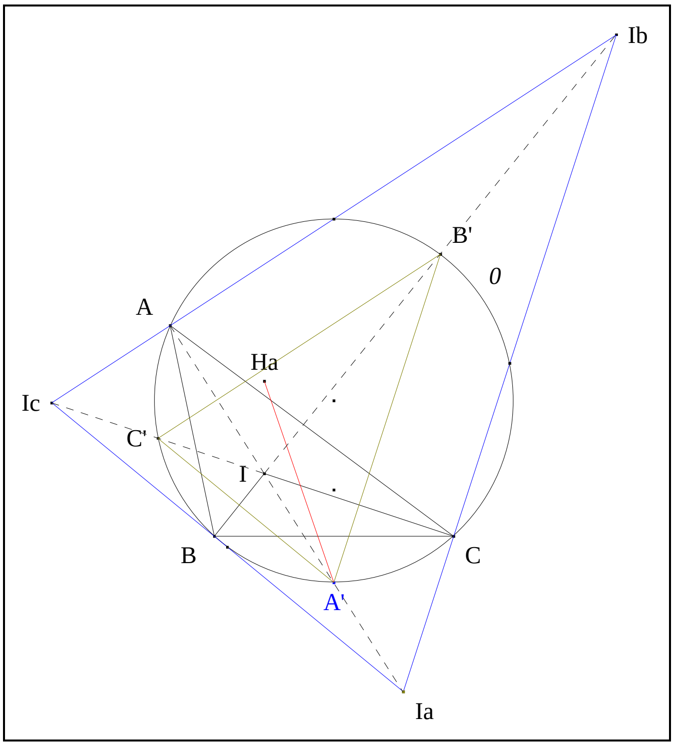
  (2) A' est le Ia-point d'Euler de IaIbIc

- **Conclusion :** d'après **D. 3.** Le triangle d'Euler, (IaA") est la Ia-droite de Kosnitza de IaIbIc.

2. Le second triangle circomperp

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle I-circompédal de ABC,
	IaIbIc	le triangle excentral de ABC
et	Ha	l'orthocentre du triangle IBC.

Donné : (A'Ha) est la A'-droite de Kosnitza de A'B'C'.

VISUALISATION

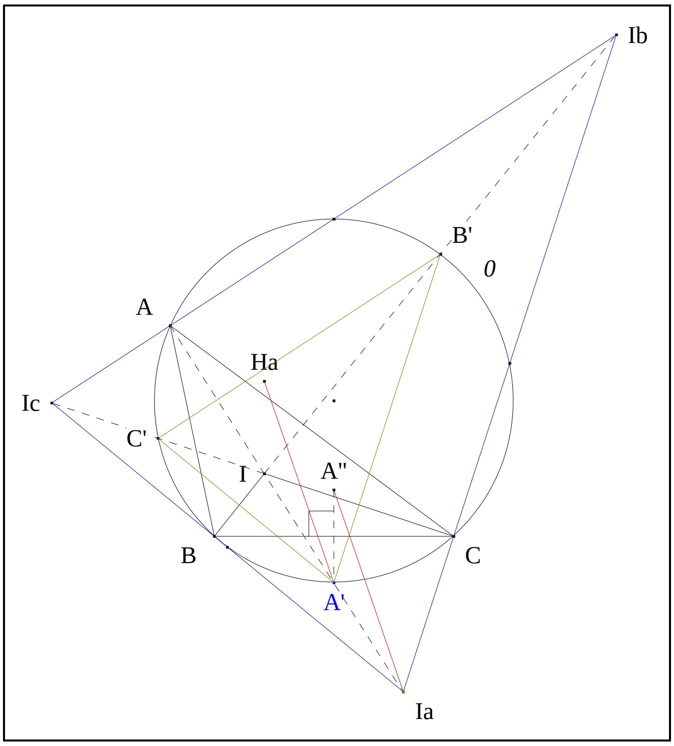
- **Scolie :** **(1)** I est l'orthocentre de IaIbIc

  (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc

  (2) A'B'C' est le triangle d'Euler de IaIbIc

- **Conclusion :** d'après **D. 4.** Le triangle H-circum-orthique,
  (A'Ha) est la A'-droite de Kosnitza de A'B'C'.

Scolie : deux parallèles

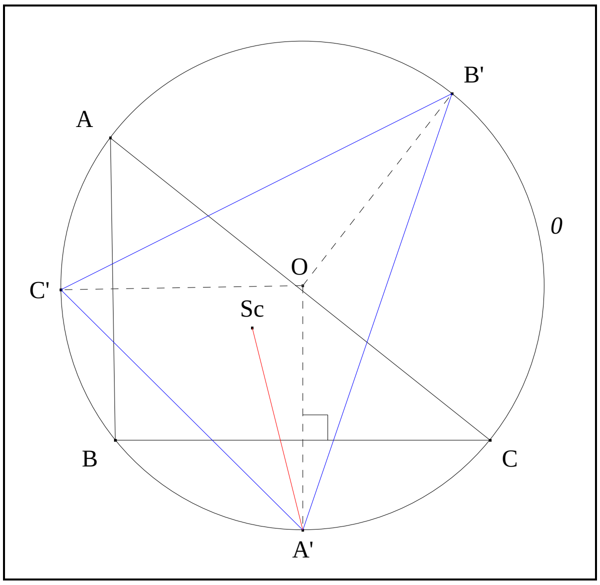


- Notons A" le symétrique de A' par rapport à (BC).
- **Conclusion :** IaIbIc étant homothétique à A'B'C' (centre I et rapport 2), (A'Ha) // (IaA").

3. Les points de Schiffler et Kosnitza

VISION

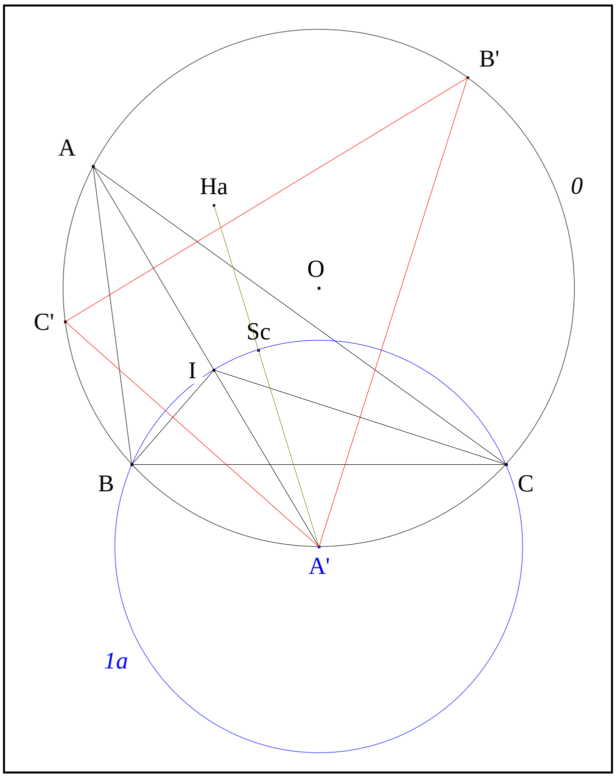
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
Sc le point de Schiffler de ABC
et A'B'C' le second triangle circumperp de ABC.

Donné : (A'Sc) est la A'-droite de Kosnitza A'B'C' [39].

VISUALISATION



- Notons I le centre de ABC,
  Ha l'orthocentre du triangle IBC
  et *1a* le A-cercle de Mention de ABC ; il passe par par B, I, C et a pour centre A'.

- D'après **D. 4.** Le triangle H-circum-orthique, (A'Ha) est la A'-droite de Kosnitza de A'B'C'.

- **Scolie :** (A'Ha) est la droite d'Euler du triangle IBC.

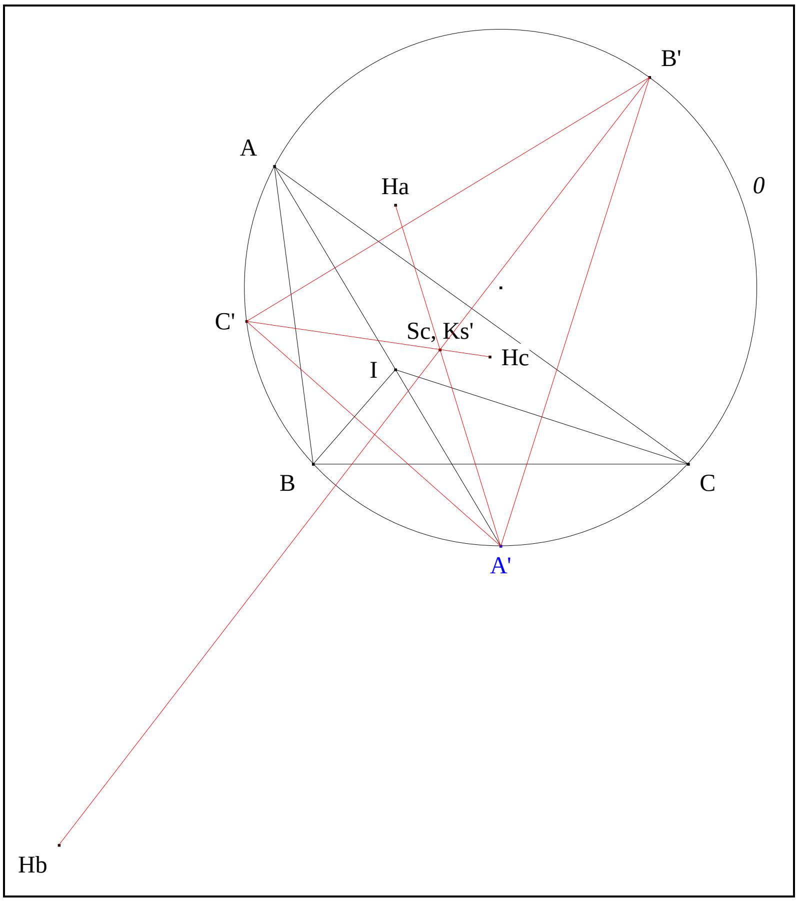
- D'après "Le point de Schiffler" [40], (A'Ha) passe par Sc.

- **Conclusion :** (A'Sc) est la A'-droite de Kosnitza A'B'C'.

Scolies : **(1)** vision triangulaire

[39] Euler Lines Reflected, AoPS du 17/10/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h610293
Hatzipolakis A., one more !! re: i - euler lines - parallelogic - tr. - oi line
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22657

[40] Ayme J.-L., Le point de Schiffler, G.G.G. vol. **9** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons Hb, Hc les orthocentres resp. des triangles ICA, IAB
  et Ks' le point de Kosnitza de A'B'C'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** (B'Sc) est la B'-droite de Kosnitza A'B'C'

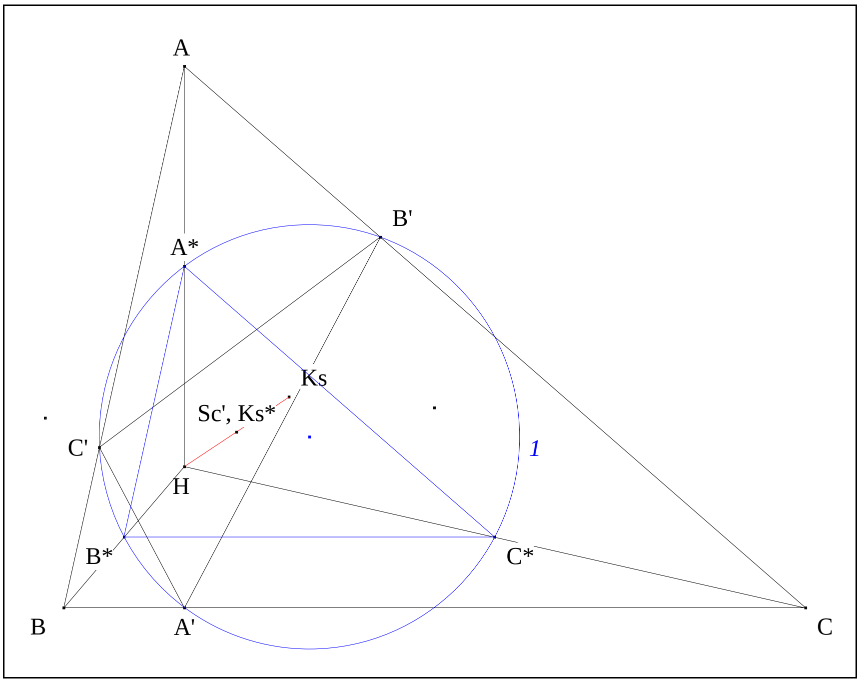
  (2) (C'Sc) est la C'-droite de Kosnitza A'B'C'.

- **Conclusion :** Ks' et Sc sont confondus.

Énoncé traditionnel :

le point de Schiffler de ABC *est le point de Kosnitza de* A'B'C'.

(2) une situation remarquable



- Notons A*B*C* le triangle d'Euler de ABC,
  Ks* le point de Kosnitza de A*B*C*
  1 le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A*, B*, C* ;
  et Sc' le point de Schiffler de A'B'C'.

- A*B*C* étant homothétique à ABC (centre H et rapport ½),

  (1) Ks* est le milieu de [HKs]

  (2) Ks* est le point de Kosnitza de A*B*C*

- **Scolies :** **(1)** A* est le milieu de l'arc B'C' ne contenant pas A'

  (2) B* est le milieu de l'arc C'A' ne contenant pas B'

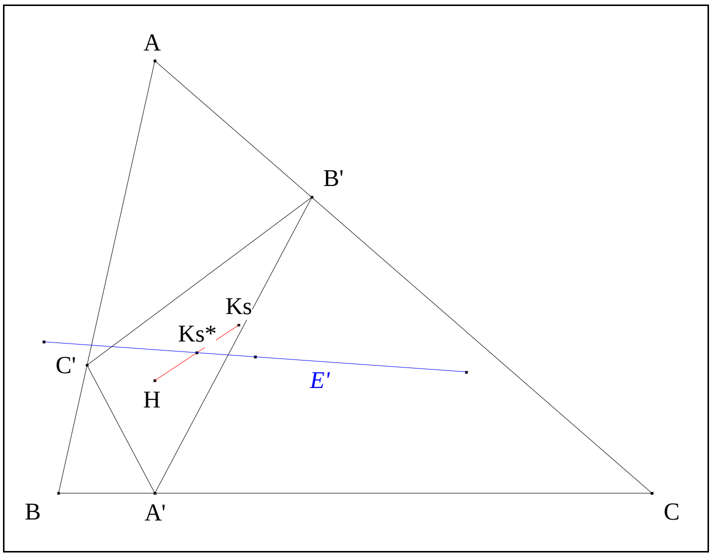
  (3) C* est le milieu de l'arc A'B' ne contenant pas C'.

- **Conclusion :** d'après **F. 3.** Les points de Schiffler et Kosnitza, Sc' et Ks* sont confondus.

4. Ks* est sur la droite d'Euler du triangle orthique

VISION

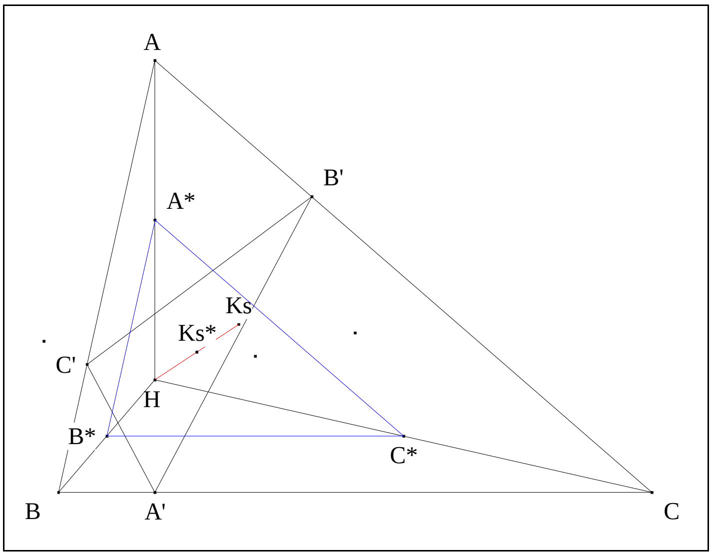
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	E'	la droite d'Euler de A'B'C',
	Ks	le point de Kosnitza de ABC
et	Ks*	le milieu de [HKs].

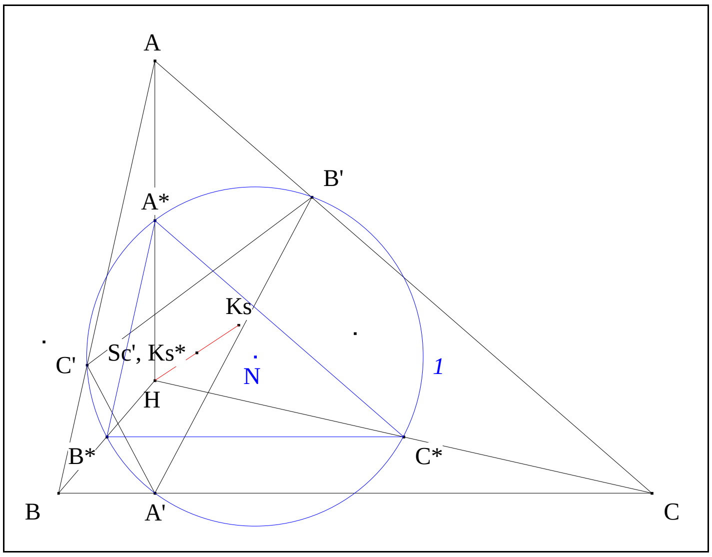
Donné : *E'* passe par Ks*.

VISUALISATION



- Notons A*B*C* le triangle d'Euler de ABC.

- **Conclusion partielle :** A*B*C* étant homothétique à ABC (centre H et rapport ½), Ks* est le point de Kosnitza de A*B*C*.



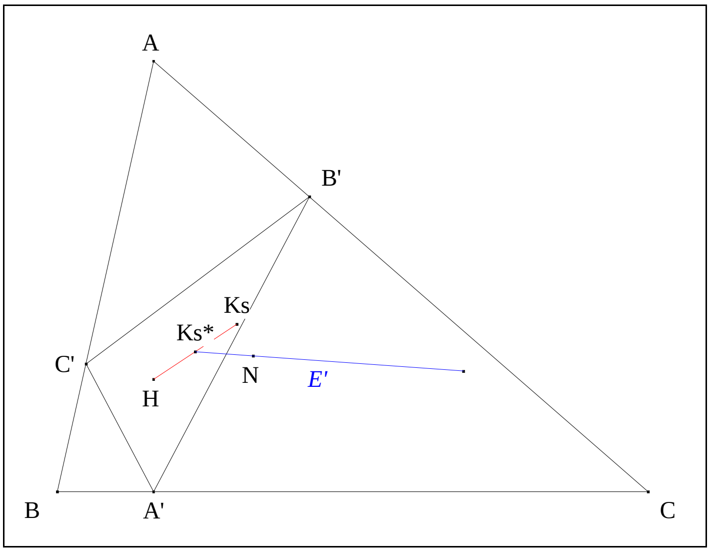
- Notons *1* le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A*, B*, C* ;
  N le centre de *1*
  et Sc' le point de Schiffler de A'B'C'.

- **Scolies :** **(1)** A* est le milieu de l'arc B'C' ne contenant pas A'

  (2) B* est le milieu de l'arc C'A' ne contenant pas B'

  (3) C* est le milieu de l'arc A'B' ne contenant pas C'.

- D'après **F. 3.** Les points de Schiffler et Kosnitza, Sc' et Ks* sont confondus.



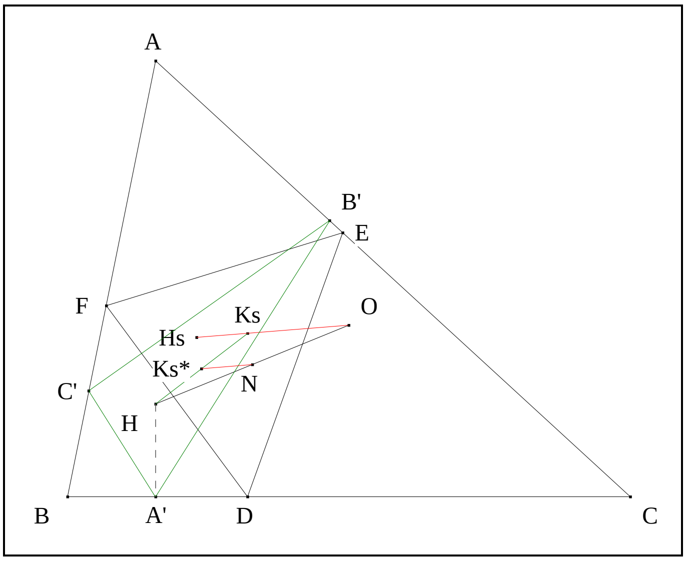
- D'après "Le point de Schiffler" [41], (NKs*) est la droite d'Euler de A'B'C'

  ou encore (NKs*) = *E'*.

- **Conclusion :** *E'* passe par Ks*.

Scolie :

[41] Ayme J.-L., Le point de Schiffler, G.G.G. vol. **9** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



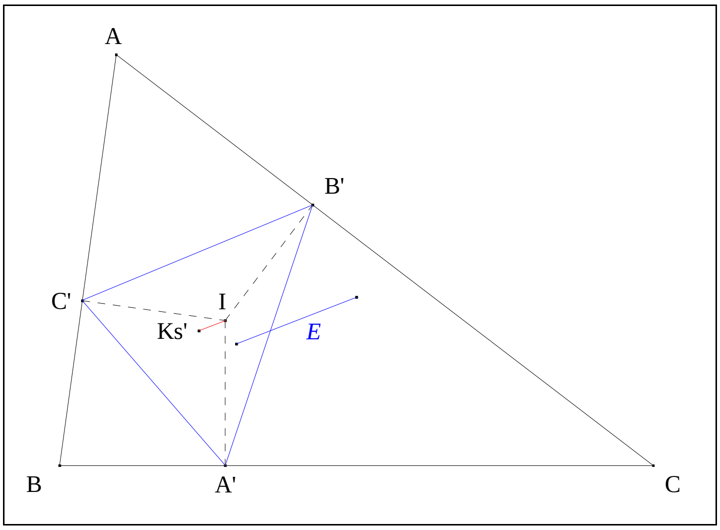
- Les hypothèses et notations sont les mêmes qu'en **7.** Position de Hs sur (OKs).

- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle HOKs, (NKs) // (OKs).

5. Le triangle de contact

VISION

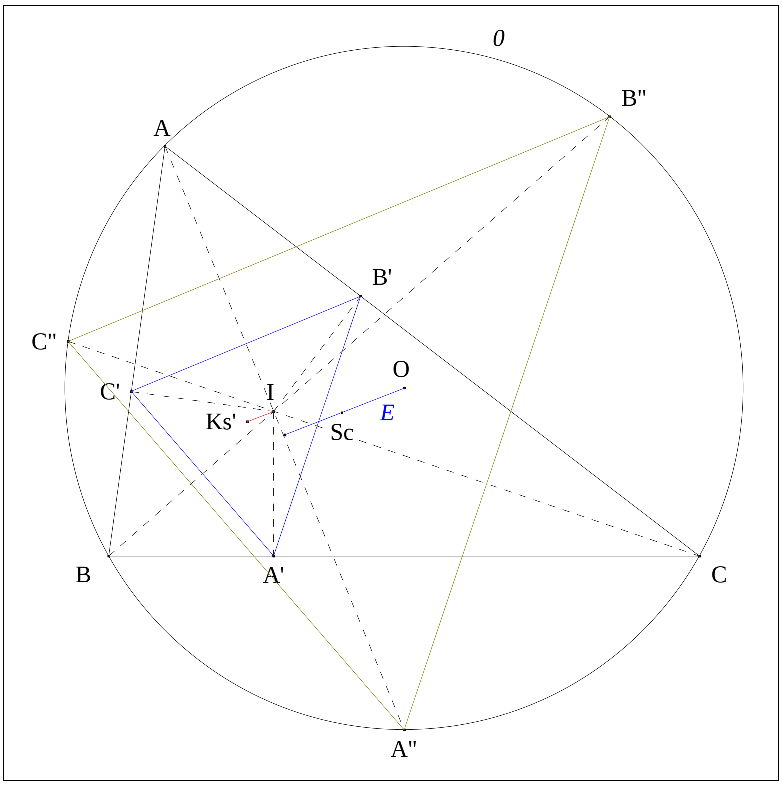
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	E	la droite d'Euler de ABC,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle de contact de ABC
et	Ks'	le point de Kosnitza de A'B'C'.

Donné : (IKs') est parallèle à *E*. [42]

VISUALISATION



- Notons Sc le point de Schiffler de ABC,
  0 le cercle circonscrit à ABC,
  O le centre de *0*
  et A"B"C" le triangle I-circompédal de ABC.

- D'après **F. 3.** Les points de Schiffler et Kosnitza, scolie **3**, Sc est le point de Kosnitza de A"B"C".

- D'après "Le point de Schiffler" [43], Sc est sur *E*.

- Les triangles A'B'C' et A"B"C" étant homothétiques, les homologues de I et Ks' sont resp. O et Sc.

- **Conclusion :** (IKs') est parallèle à *E*.

---

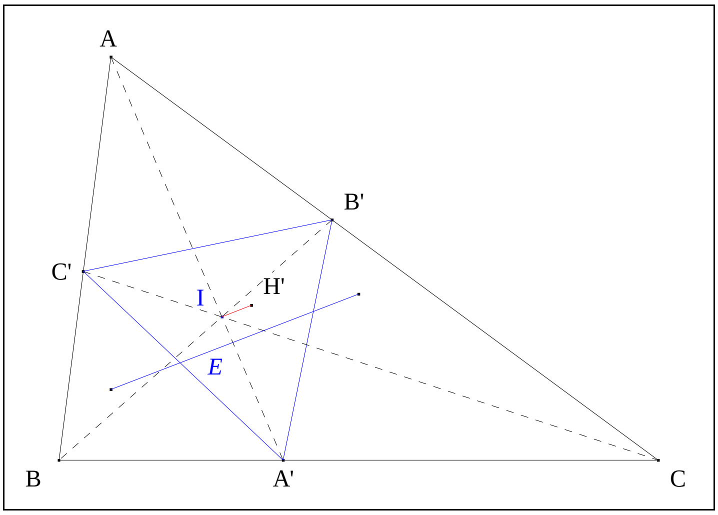
[42] Nice property of Kosnita Point, AoPS du 18/06/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h412741p2317616
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h412741p3632970

[43] Ayme J.-L., Le point de Schiffler, G.G.G. vol. **9** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

6. Le triangle I-cévien

VISION

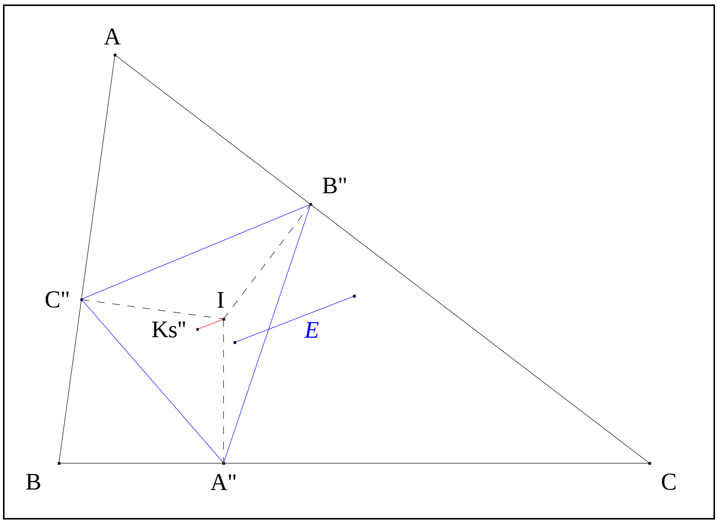
Figure :



Traits : ABC un triangle,
E la droite d'Euler de ABC,
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle I-cévien de ABC
et H' l'orthocentre de A'B'C'.

Donné : (IH') est parallèle à *E*. [44]

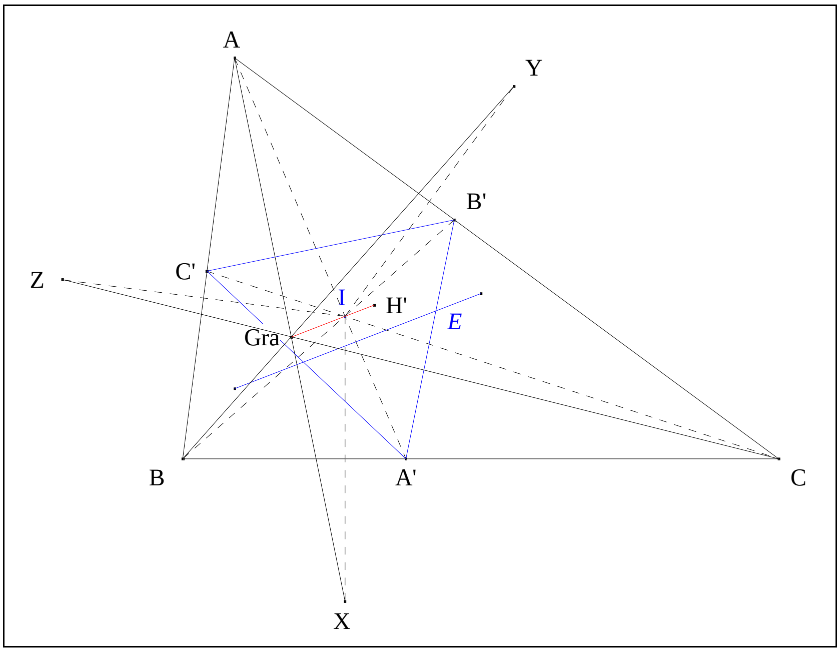
VISUALISATION



- Notons A"B"C" le triangle I-pédal de ABC
  et Ks" le point de Kosnitza de A"B"C".

[44] The Euler line, AoPS du 22/10/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h171583
parallel to Euler line !, AoPS du 02/08/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h491764p2761508

- D'après **F. 5.** Le triangle de contact, (IKs") // *E*.



- Notons XYZ le triangle I-symétrique de ABC
  et Gra le point de Gray [45] de ABC.

- D'après "La droite de Gray" [46], *E* // (IGraH') ;
  par transitivité de //, (IKs") // (IGraH') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (IKs") = (IGraH') ;
  en conséquence, I, Ks" et H' sont alignés.

- **Conclusion :** (IH') est parallèle à *E*.

45 Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. **2** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

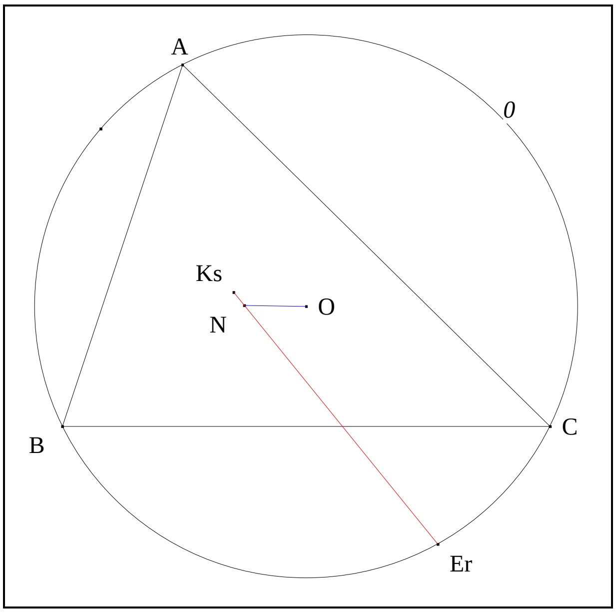
46 Ayme J.-L., the Gray's line, AoPS du 06/12/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=177764
Ayme J.-L., La droite de Gray, G.G.G. vol. **2** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

G. LA DROITE (KsN)

1. L'alignement Ks – N - Er

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	N	le centre du cercle d'Euler de ABC,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
et	Er	l'antipoint d'Euler de ABC.

Donné : Ks, N et Er sont alignés [47].

Commentaire : une preuve synthétique basée sur une idée de Telv Cohl peut être vue sur le site de l'auteur. [48]

---

[47] antigonal conjugate of I wrt its cevian triangle lies on O'I, AoPS du 14/10/2014 ;
inspired from pohoatza's post
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h610037

[48] Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. **5**, p. 38-43 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

H. JOHN RODGERS MUSSELMAN

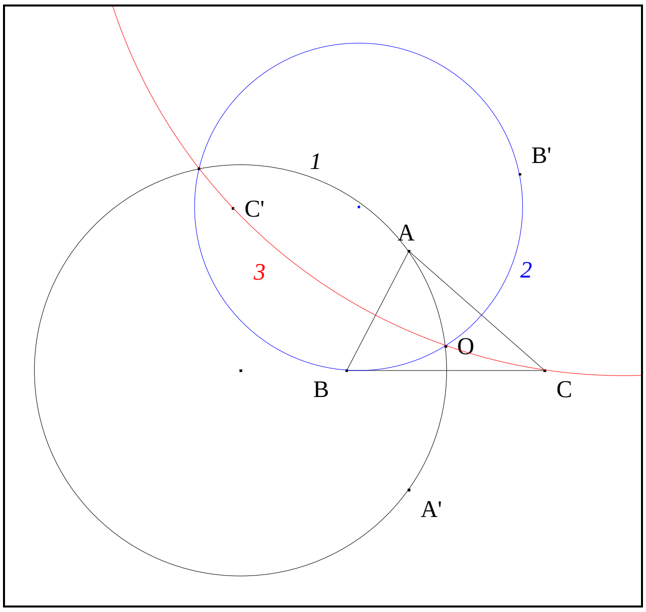
OU

INVERSE DE POINT DE KOSNITZA

1. Inverse de Ks

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle symétrique de ABC
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AOA', BOB', COC'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [49]

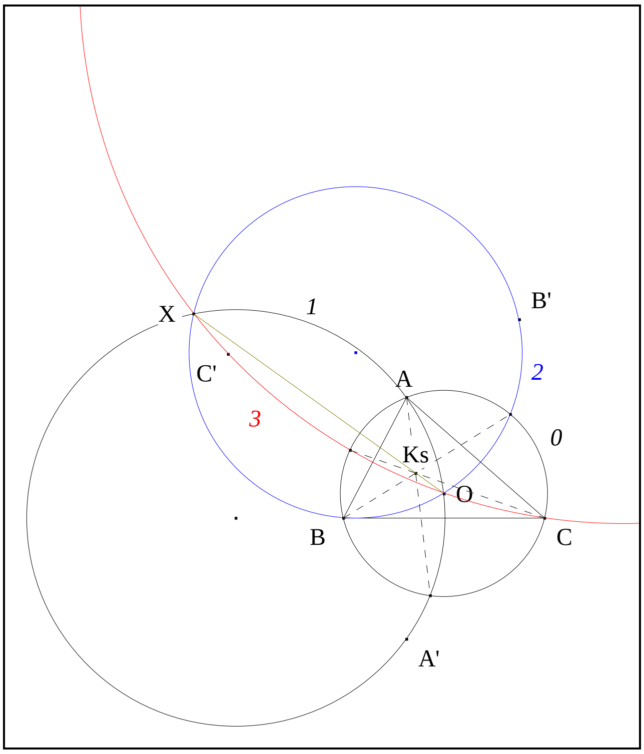
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [50]

Note historique : ce résultat de l'américain John Rogers Musselman a été démontré et généralisé par le belge René Goormaghtigh [51] ; sa preuve a recours aux nombres complexes.
Notons que cette généralisation était connue de Joseph Neuberg [52].
Rappelons que la preuve proposée par Darij Grinberg a recours à l'inversion.

---

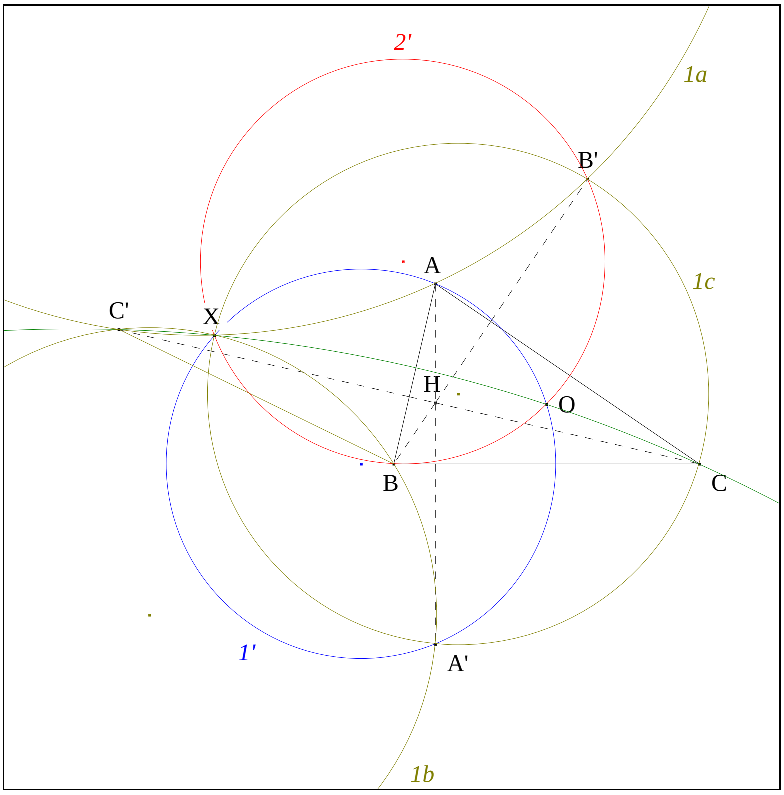
49 Musselman J. R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* 46 (1939) 601
50 Ayme J.-L., Cercles coaxiaux **1**, G.G.G. vol. **24**, p. 20-21 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Ayme J.-L., Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. **23** p. 3-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
51 Goormaghtigh R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **48** (1941) 281-283
52 Neuberg J., Mémoire sur le Tétraèdre (1884)

Scolies :



(1) le second point de base répertorié sous X_{1157} chez ETC a été attribué à Bernard Gibert. Ce point est l'inverse de Ks par rapport à *0*

(2) (BC), (CA), (AB) sont des axes de symétrie resp. de *1*, *2*, *3*

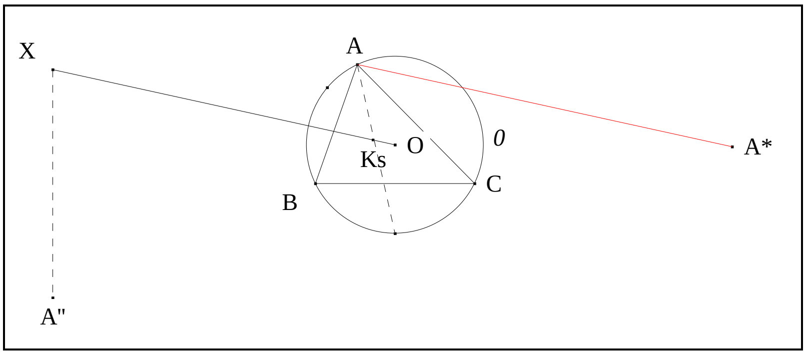


(3) les cercles circonscrits (de Paul Yiu) resp. aux triangle AB'C', BC'A', CA'B' passe par X [53].

2. Une parallèle à (OKs)

VISION

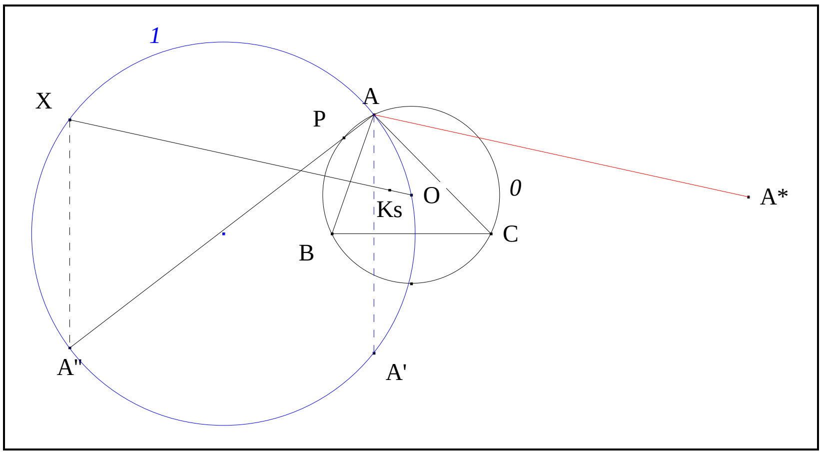
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de 0,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	X	l'inverse de Ks relativement à *0*,
	A"	le symétrique de X par rapport à (BC)
et	A*	le symétrique de A" par rapport à la A-bissectrice intérieure de ABC.

Donné : (AA*) est parallèle à (OKs). [54]

VISUALISATION



- Notons A' le symétrique de A par rapport à (BC),

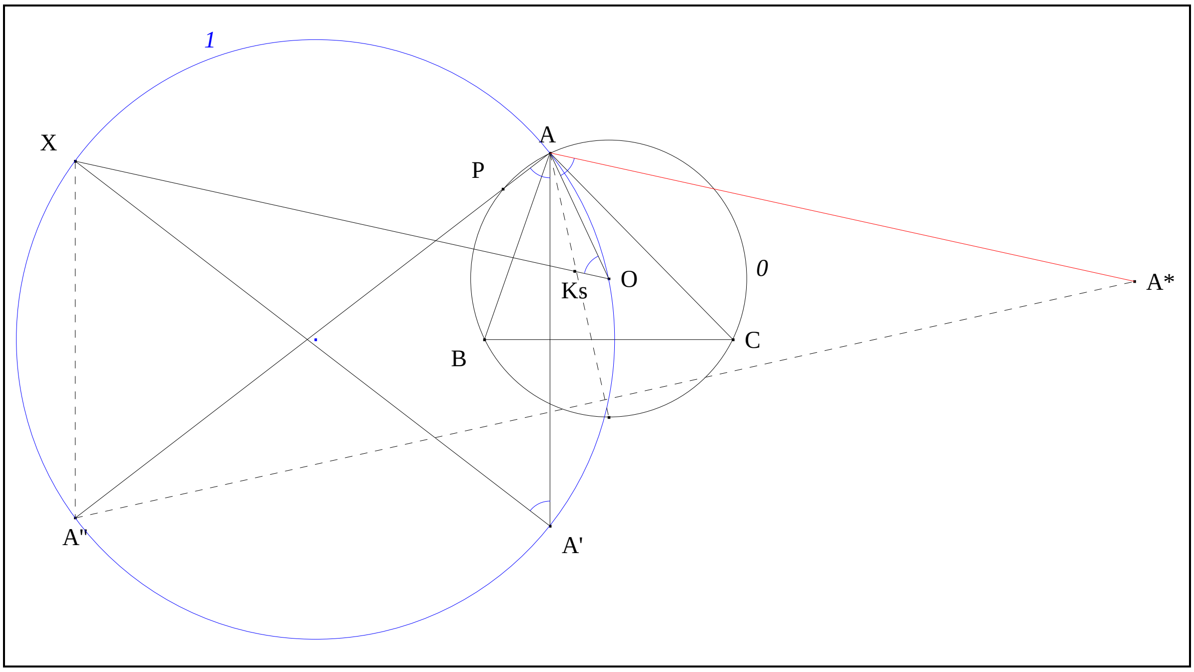
[53] Yiu P., A triad of circles with an interesting common point, Message *Hyacinthos* # **4533** (2001) ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/4533
Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200311.pdf
Ayme J.-L., Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. **23**, p. 5-7, 8-13 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[54] Ayme J.-L., Parallel to OKs, AoPS du 04/04/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1222187_parallel_to_oks

	1	le cercle circonscrit au triangle AOA'
et	P	le second point d'intersection de (AA") avec *0*.

- D'après **H. 1.** Inverse de Ks, * *1* passe par X et A"

  * O, Ks et X sont alignés.

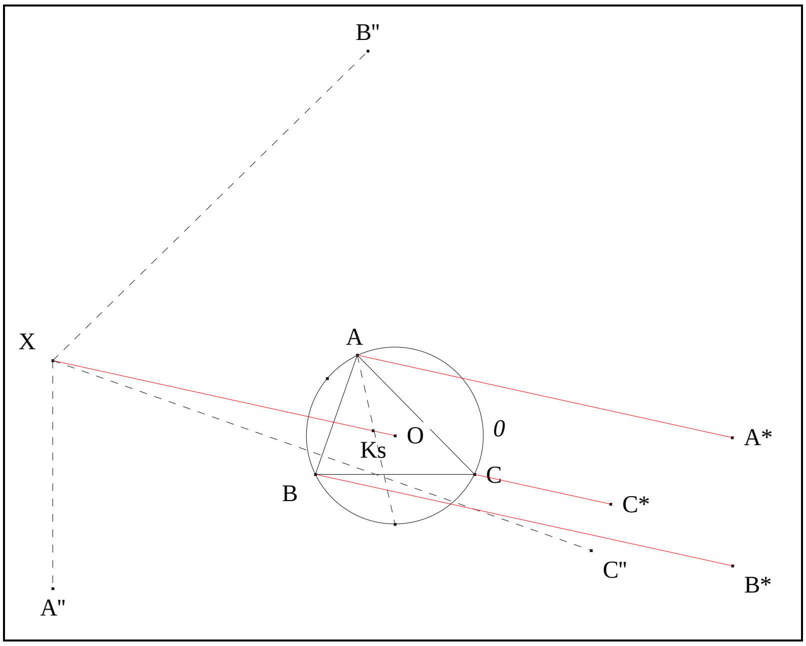


- Une chasse angulaire :

*	(AA') et (AO) étant deux A-isogonales de ABC,	<OAA* = <A"AA'
*	par symétrie d'axe (BC),	<A"AA' = <AA'X
*	par "Angles inscrits",	<AA'X = <AOX
*	par transitivité de =,	<OAA* = <AOX
*	par "Angles alternes-internes",	(AA*) // (OX).

- **Conclusion :** par une autre écriture, (AA*) est parallèle à (OKs).

Scolies : **(1)** trois droites parallèles entre elles

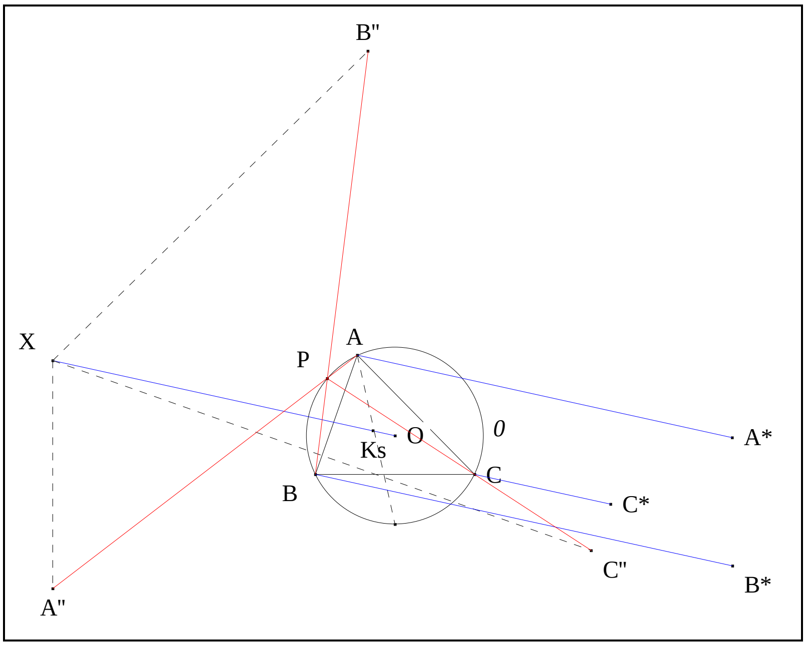


- Notons B", C" les symétriques de X resp. par rapport à (CA), (AB)
  et B*, C* les symétrique de B", C"
  resp. par rapport à la B, C-bissectrice intérieure de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  * (BB*) // (OKs)
  * (CC*) // (OKs).

- **Conclusion :** (AA*), (BB*), (CC*) et (OKs) sont parallèles entre elles.

(2) Trois droites concourantes



- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Beltrami" [55] (Cf. **V.**Annexe **3**),
  (AA"), (BB") et (CC") sont concourantes en P.

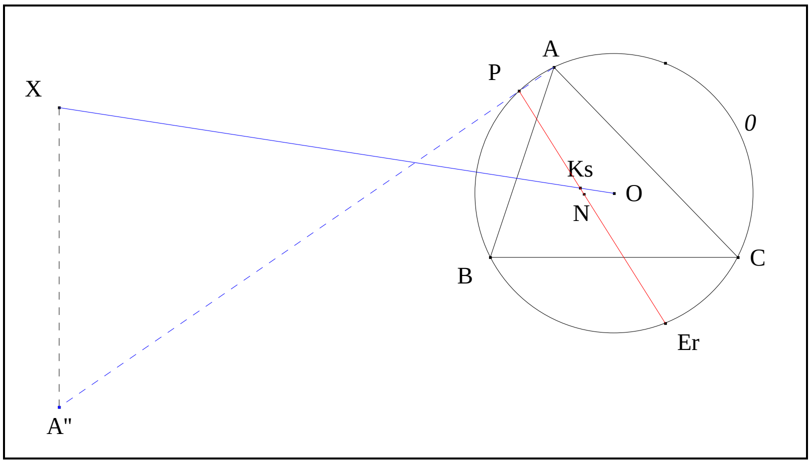
[55] Beltrami E., *Archives* de Grünert **43**, p. 48

(3) (AA*) et (AP) sont deux A-isogonales de ABC.

4. L'alignement P - Ks – N – Er

VISION

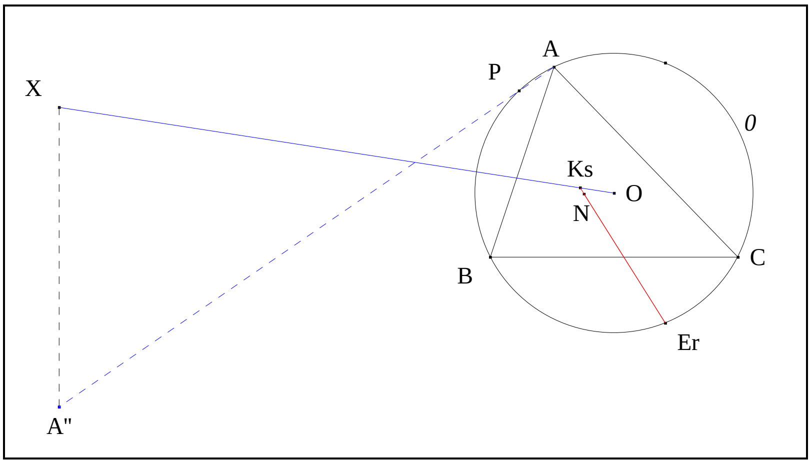
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
N le centre du cercle d'Euler.

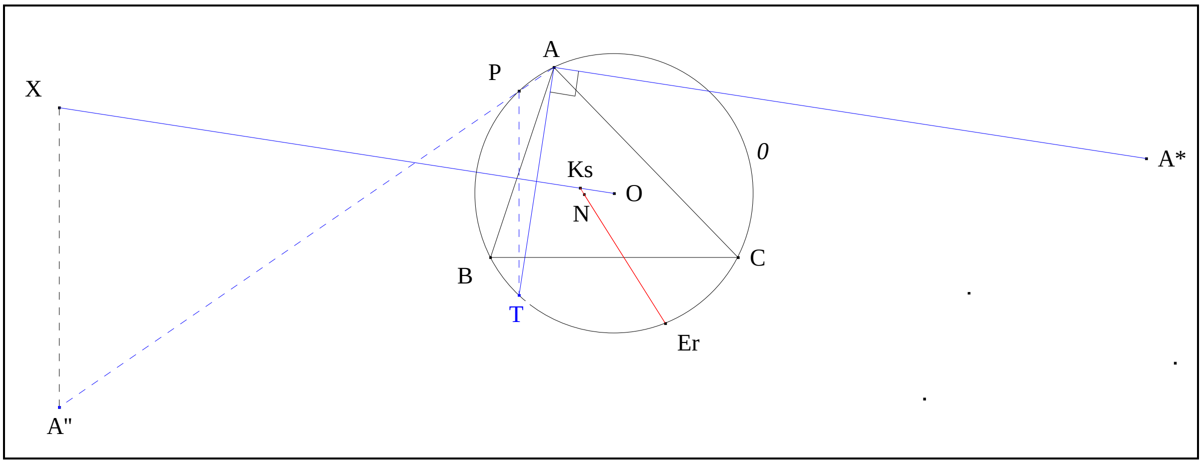
Donné : P, Ks, N et Er sont alignés. [56]

VISUALISATION



- D'après **G. 1.** L'alignement Ks – N – Er, Ks, N et Er sont alignés.

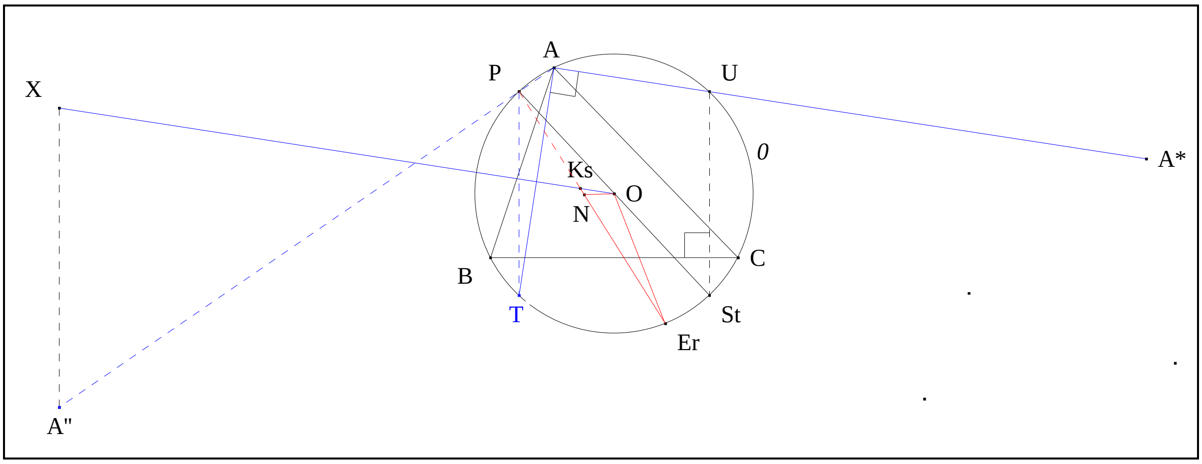
[56] Kosnita point, AoPS du 02/10/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/q2h168791p937576
Collinear with Kosnita point, AoPS du 13/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1227276_collinear_with_kosnita_point
Ayme J.-L., Avec le point de Kosnita, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8



* Notons T le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) issue de P avec *0*.

* D'après **H. 2.** Une parallèle à (OKs), scolies **1** et **2**,

  P est le pôle de la droite de Simson dont la direction (AT) est perpendiculaire à (OKs).



* Notons U le second point d'intersection de (AA*) avec *0*
  et St le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) issue de U avec *0*.

* St est le pôle de la droite de Simson de direction (OKs).

* **Conclusion partielle :** les directions des droites de Simson de pôle resp. P, St étant perpendiculaires,
  P, O et St sont alignés.

* Une chasse angulaire :

  * d'après "Angle de deux droites de Simson et arc liant leur pôle", <ErPSt = <KsON

  * les triangles KsON et KsErO étant semblables [57], <KsON = <KsErO

  * par transitivité de =, <ErPSt = <KsErO

  * d'après "Angles au centre et inscrit", P, Ks et N sont alignés.

* **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, P, Ks, N et Er sont alignés.

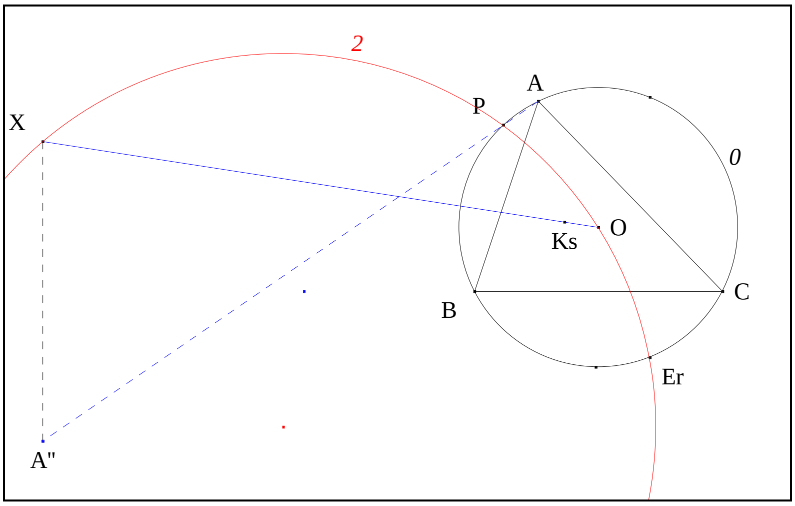
---

[57] Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. **5**, p. 42-43 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

5. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

P le second point d'intersection de (AA") avec *0*,

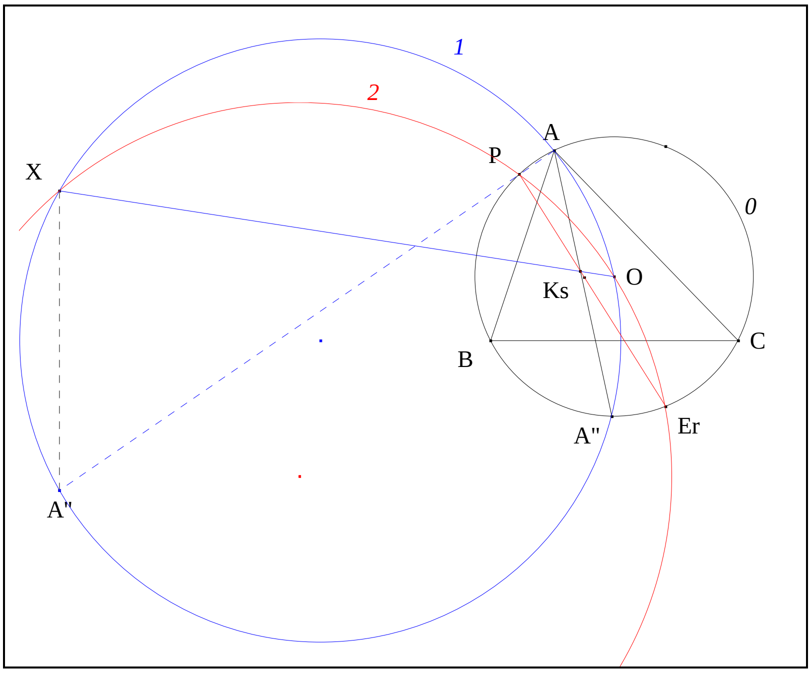
Er l'antipoint d'Euler de ABC

et *2* le cercle passant par X, P, O.

Donné : *2* passe par Er. [58]

VISUALISATION

[58] Ayme J.-L ;, Four concyclic points, AoPS du 21/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1231293_four_concyclic_points
Ayme J.-L., Quatre points cocycliques, Les-Mathematiques.net ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1259791



- Notons A" le second point d'intersection de (AKs) avec *1*
  et *1* le cercle passant par A, O, A".

- D'après **H. 4.**, P, Ks et Er sont alignés.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [59]
  appliqué à *0*, *1* et à la corde (PKsEr), *2* passe par Er.

Scolies : **(1)** nomenclature de ETC : X (X_{1157}), P (X_{1141}), O (X_3), Er (X_{110})

(2) ce cercle n'est pas répertorié chez ETC

I'm not aware of it being mentioned in ETC anywhere. [60]

(3) le centre de cercle n'est pas répertorié chez ETC

The center is a^4 (b-c) (b+c) (a^2-b^2-b c-c^2) (a^2-b^2+b c-c^2) (a^4-2 a^2 b^2+b^4-2 a^2 c^2-b^2 c^2+c^4)::
on lines {{186,523},{526,1511},{900,6097},{1510,6150}} ... not in ETC.
crosspoint of X(54) and X(1291).
X(i)-isoconjugate of X(j) for these (i,j): {476,2962},{930,2166}.

Your circle passes through X{3,110,1141,1157,2070,5961,8157} [61]

[59] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[60] Moses, Peter J. C. <mows@mopar.freeserve.co.uk> le 04/05/2016
[61] Moses, Peter J. C. <mows@mopar.freeserve.co.uk> le 04/05/2016

The circle passing through the points X(3), X(110), X(1141) is:

a^2yz-(a^2b^2c^2(a^2-b^2-bc-c^2)(a^2-b^2+bc-c^2)(a^2b^2-b^4+a^2c^2+2b^2c^2-c^4)x(x+y+z))/((a-b)(a+b)(a-c)(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a+c)(a-b+c)^2(a+b+c)^2)+...
=0

It contains the triangle centers X(3), X(110), X(1141), X(1157),
X(2070), X(5961), X(8157).

And its center is:
(a^4(b^2-c^2)(a^8 -4a^6(b^2+c^2) + a^4(6b^4+8b^2c^2+6c^4) -
4a^2(b^6+b^4c^2+b^2c^4+c^6) + b^8+b^4c^4+c^8) : ... :....),

with search number in ETC:

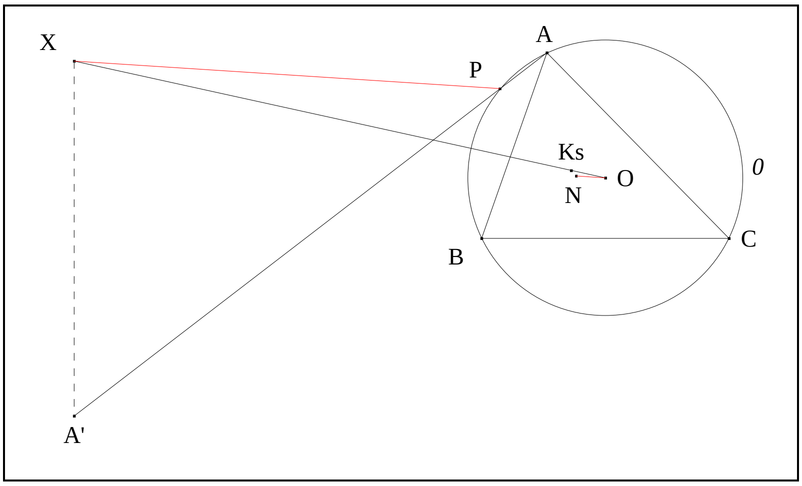
(3.23047681377330, 2.90026989811674, 0.141796023008186)

[62]

6. Une parallèle à la droite d'Euler

VISION

Figure :



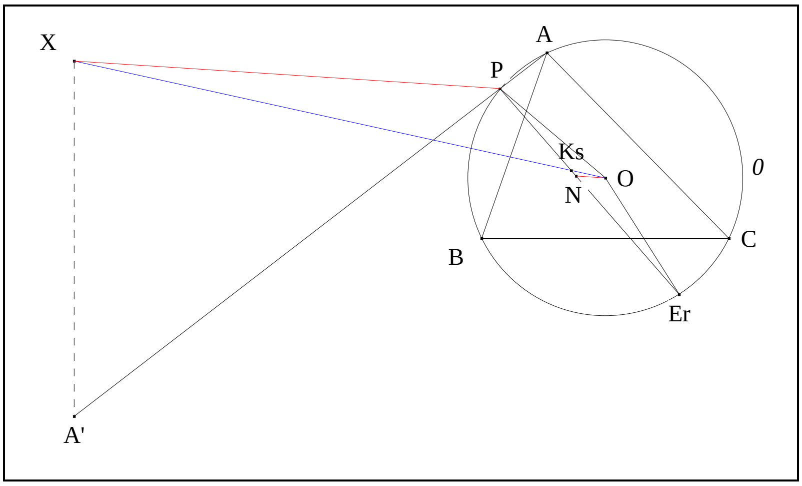
Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (PX) est parallèle à (ON). [63]

VISUALISATION

[62] Angel Montesdeoca <amontes@ull.es> le 04/05/2016

[63] Ayme J.-L., A new parallel to the Euler line, AoPS du 05/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1222785_a_new_parallel_to_the_euler_line
Ayme J.-L., Une nouvelle parallèle à la droite d'Euler, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1248179



- D'après **H. 4.** L'alignement Ks – N – P, Ks, N, P et Er sont alignés.

- Une chasse angulaire :

*	par une autre écriture,	<XON = <KsON
*	les triangles KsON et KsErO étant semblables [64],	<KsON = <OErKs
*	par une autre écriture,	<OErKs = <OErP
*	le triangle OPEr étant O-isocèle,	<OErP = <ErPO
*	par une autre écriture,	<ErPO = <KsPO
*	X étant l'inverse de Ks, les triangles OPKs et OXPsont semblables ; en conséquence,	<KsPO = <OXP
*	par transitivité de =,	<XON = <OXP
*	par "Angles alternes-internes",	(XP) // (ON).

- **Conclusion :** (XP) est parallèle à (ON).

[64] Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. **5**, p. 42-43 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

I. SYMÉTRIQUE DE Ks

PAR RAPPORT

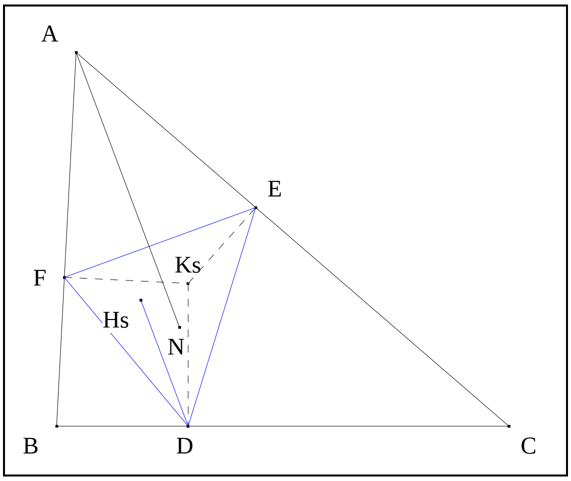
A

UN CÔTE DU TRIANGLE

1. Deux parallèles

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	DEF	le triangle Ks-pédal de ABC,
	N	le centre du cercle d'Euler de ABC
et	Hs	l'orthocentre de DEF.

Donné : (DHs) est parallèle à (AN) [65].

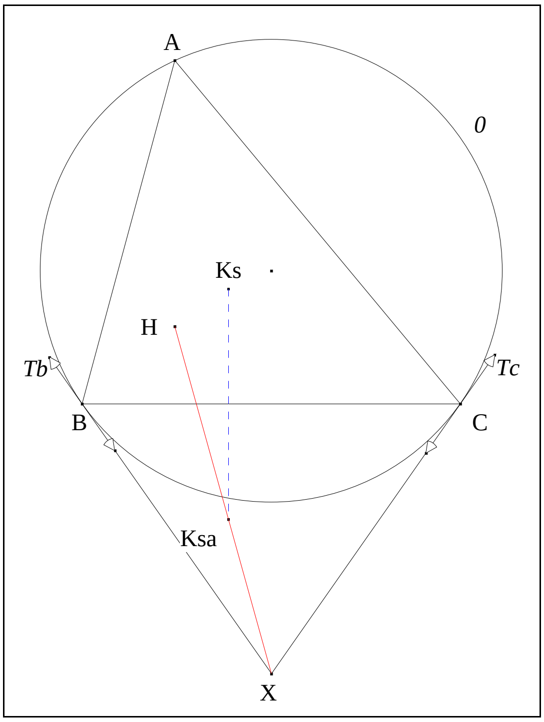
Commentaire : la preuve est immédiate.

2. Une cévienne du triangle tangentiel

VISION

Figure :

[65] HK passes through the circumcenter, AoPS du 05/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1125044_hk_passes_through_the_circumcenter

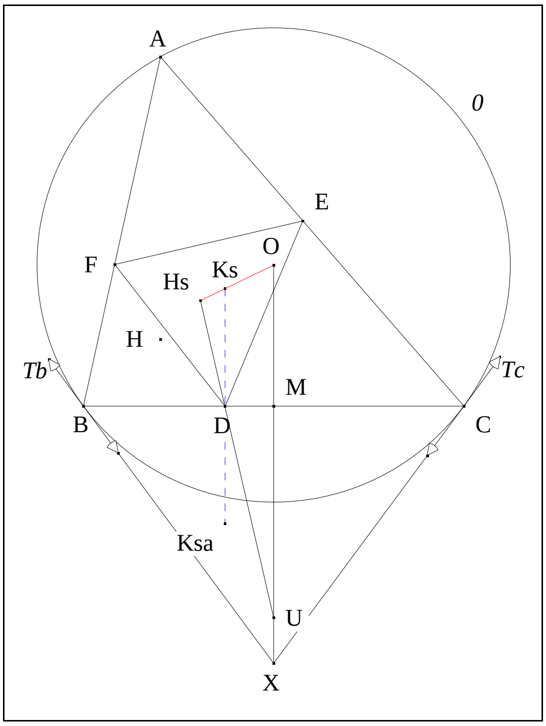


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	Ksa	le symétrique de Ks par rapport à (BC),
	Tb, *Tc*	les tangentes à *0* resp. en B, C
et	X	le point d'intersection de *Tb* et *Tc*.

Donné : H, Ksa et X sont alignés. [66]

VISUALISATION

[66] H,K_1,D are collinear, AoPS du 09/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1127104_hk_1d_are_collinear

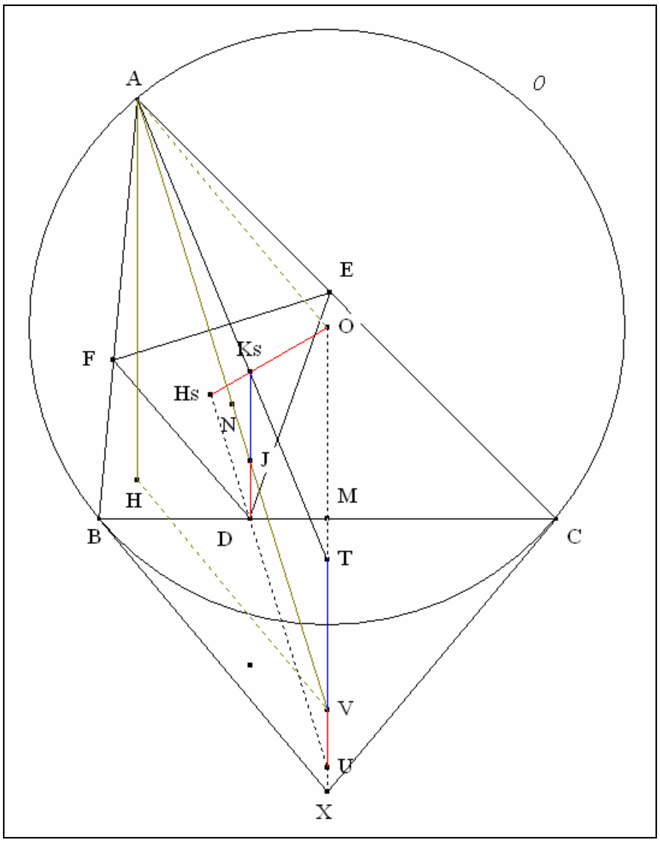


- Notons O le centre de *0*,
  M le milieu de [BC],
  DEF le triangle Ks-pédal de ABC
  Hs l'orthocentre de DEF
  et U le point d'intersection de (DHs) et (OM).

- D'après **E. 3.** Le point Hs sur (OKs), O, Ks et Hs sont alignés.

- D'après **E. 7.** Position de Hs sur (OKs), HsO = 3.HsKs.

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Rapports" appliqué au triangle HsOU, 3.DKs = OU.



- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC,
  V le point d'intersection de (AN) et (OM),
  J le point d'intersection de (DKs) et (AV),
  et T le point d'intersection de (AKs) et (OM).

- **Scolies :** **(1)** V est le symétrique de O par rapport à (BC)

  (2) T est le milieu de [OX].

- V étant le symétrique de O par rapport à (BC).
  d'après la relation de Carnot, AH = OV
  OV = TO + TV
  TO + TV = TX +TV.

- **Conclusion partielle :** TV = AH – TX.

- Nous avons : 3.DKs = OU
  OU = OV + VU
  OV + VU = AH + DJ.

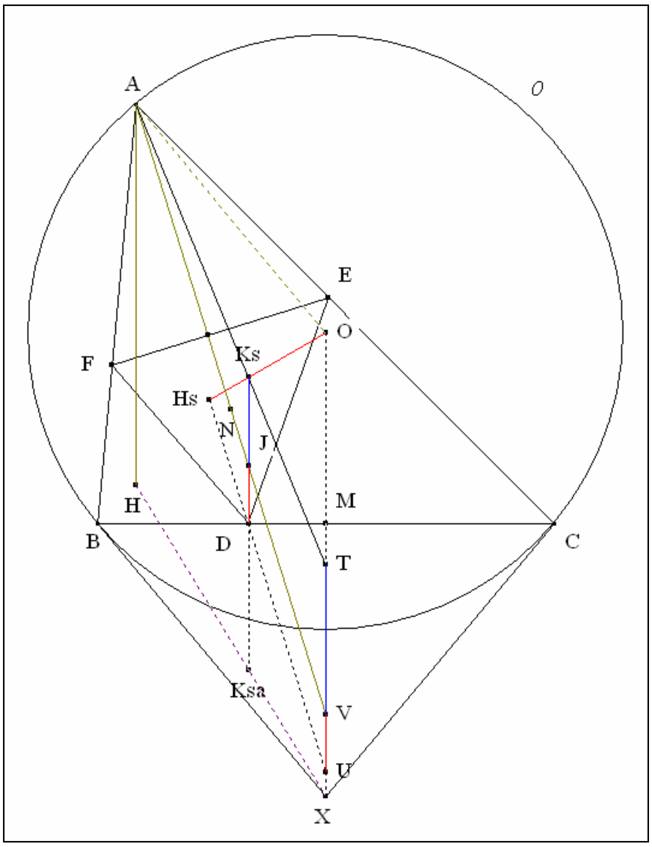
- **Conclusion partielle :** 3.DKs = AH + DJ

- D'après **H. 1.** Deux parallèles, (QD) // (PN).

- Le quadrilatère JDUV étant un parallélogramme, UV = DJ.

- Les triangles AJKs et AVT étant homothétiques, AKs/AT = KsJ/TV.

- **Conclusion partielle :** KsA.TV = KsJ.AT.



- Le quadrilatère AHXT étant un trapèze,

  * Ksa est sur [HX] ↔ KsT.AH + KsA.TX = AT.KsKsa

- Raisonnons à rebours et par équivalence logique :

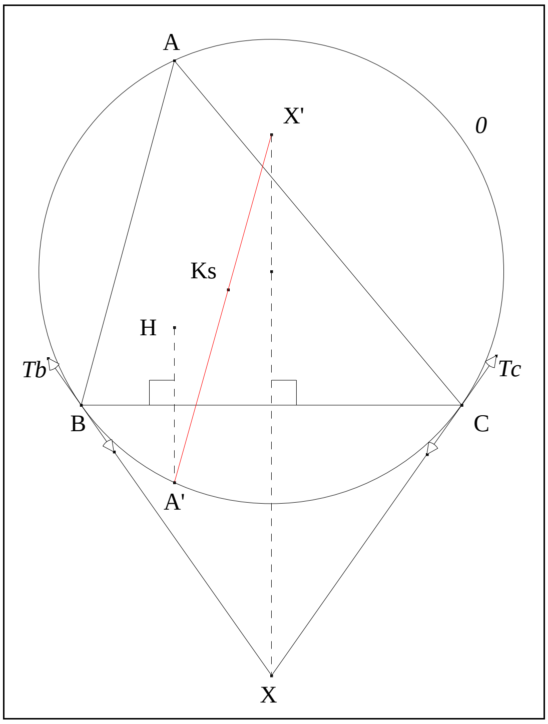
*	par la technique du zéro,	KsT.AH + AKs.AH – KsA.AH + KsA.TX		= AT.KsKsa
*	par factorisation,	AT.AH	– KsA.(AH – TX)	= AT.KsKsa
*	par substitution,	AT.AH	– KsA.TV	= AT.KsKsa
*	par substitution,	AT.AH	– KsJ.AT	= AT.KsKsa
*	par simplification,	AH	– KsJ	= Ks.Ksa
*	par hypothèse,	AH	– KsJ	= 2.DKs
*	par addition,	AH + DKs	– KsJ	= 2.DKs + DKs
*	ou encore,	AH + DJ		= 3.DKs.

- **Conclusion :** H, Ksa et X sont alignés.

3. Une variante de l'auteur

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A' la circumtrace de (AH)
et X' le symétrique de X par rapport à (BC).

Donné : A', Ks et X' sont alignés. [67]

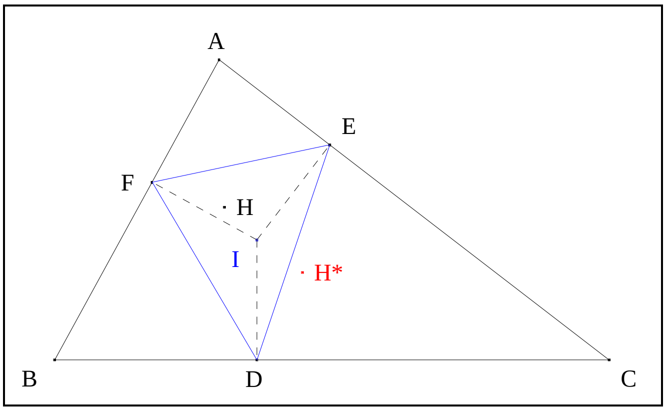
[67] Ayme J.-L., With the Kosnita's point, AoPS du 04/09/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1138223_with_the_kosnitas_point

J. UNE PERPENDICULAIRE À (HKs)

1. Le point de Schiffler du triangle tangentiel

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	H	l'orthocentre de DEF
et	H*	l'isogonal de H par rapport à ABC.

Donné : H* est le point de Schiffler de ABC. [68]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [69]

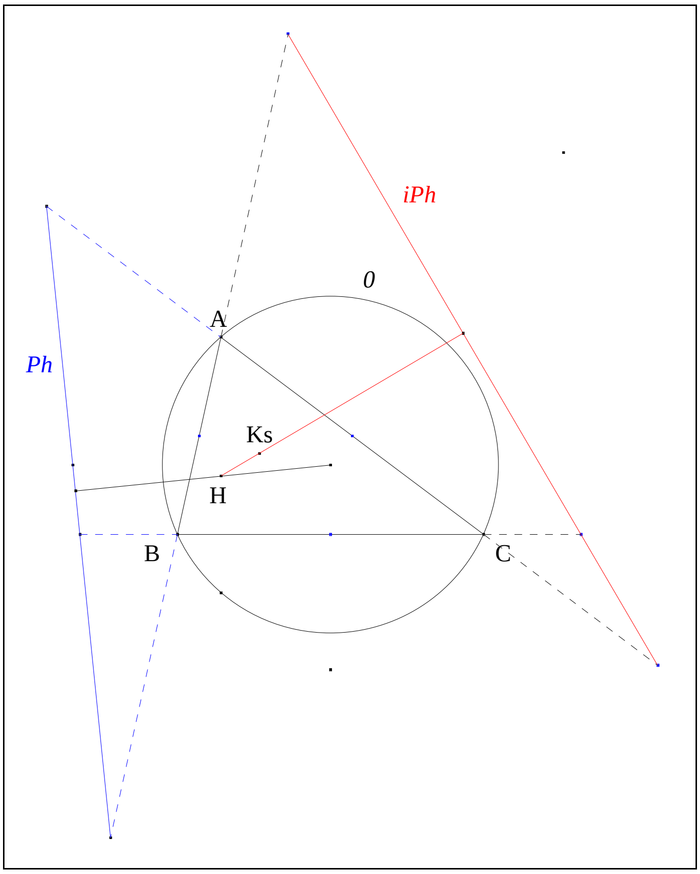
2. Isotomique de la polaire de l'orthocentre

VISION

Figure :

[68] Concurrence of 4 Euler lines [Schiffler point], AoPS du 29/08/2006 http://artofproblemsolving.com/community/c6h108577

[69] Ayme J.-L., Le point de Schiffler…, G.G.G. vol. **9**, p. 24-25 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



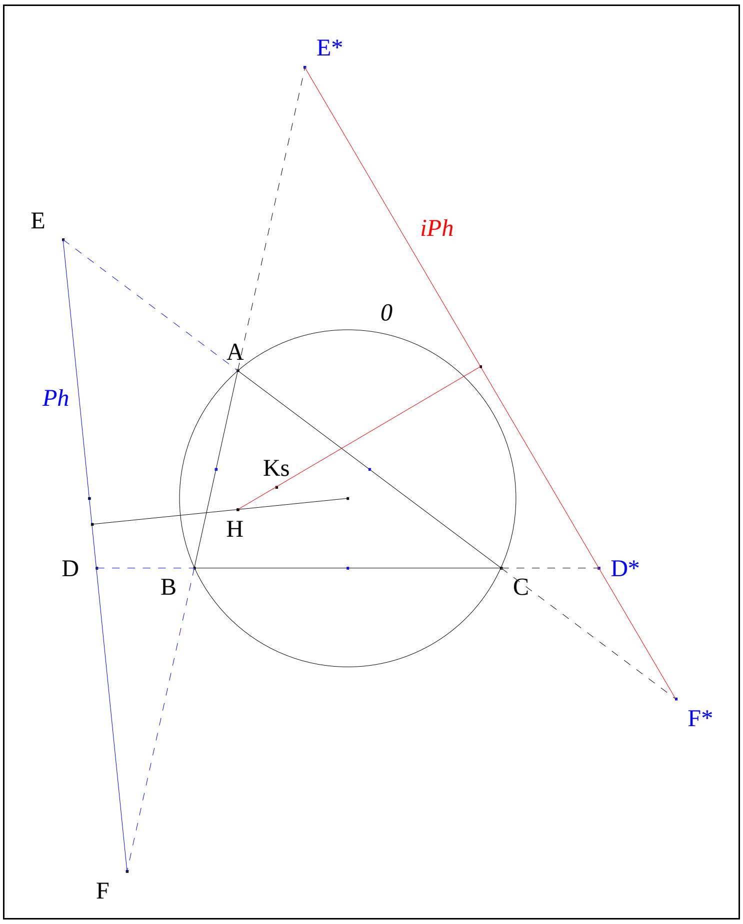
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
H l'orthocentre de ABC,
Ph la polaire de H relativement à *0*,
i*Ph* l'isotomique [70] de *Ph* relativement à ABC
et Ks le point de Kosnitza de ABC.

Donné : (HKs) est perpendiculaire à i*Ph*. [71]

VISUALISATION

---

[70] ou transversale réciproque
[71] With the Kosnita point, Problem **445**, AoPS du 25/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1217571_with_the_kosnita_point



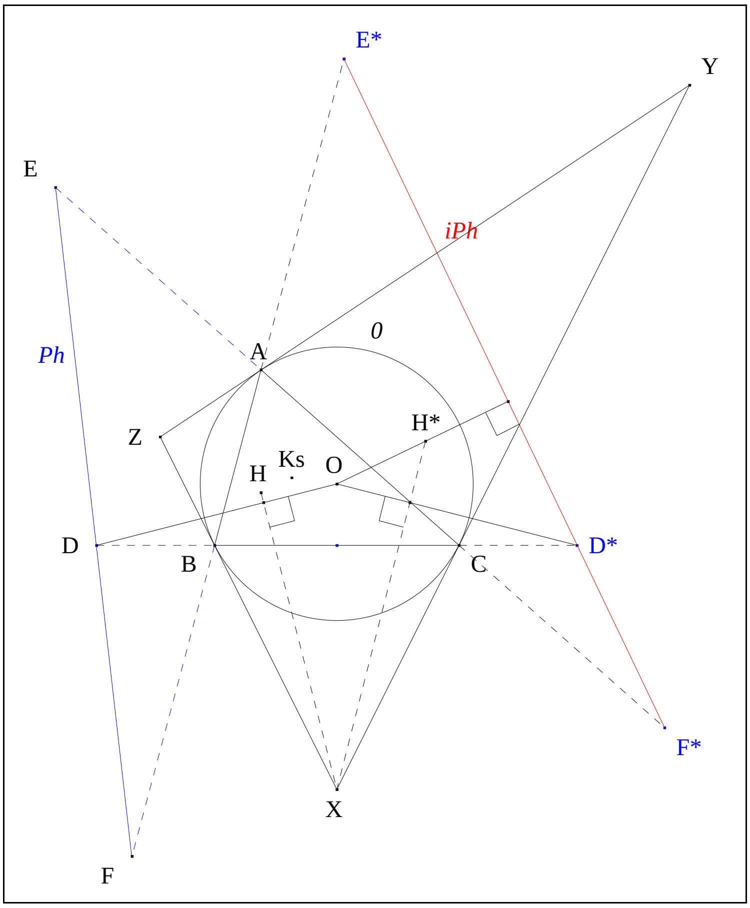
- Notons D, E, F les points d'intersection de *Ph* resp. avec (BC), (CA), (AB)
  et D*, E*, F* les isotomes de D, E, F resp. par rapport à [BC], [CA], [AB].

- **Scolies :** **(1)** *Ph* est l'axe de perspective des triangles perspectifs ABC et H-circumcévien

  (2) D* est le symétrique de D par rapport au milieu de [BC] (et circulairement…)

- D'après Gohierre de Longchamps [72], D*, E*, F* sont sur l'isotomique i*Ph* de *Ph* relativement à ABC.

[72] Ayme J.-L., Gohierre de Longchamps dans les Journaux scientifiques, G.G.G. vol. **5**, p. 6-10 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons XYZ le triangle tangentiel de ABC
  et H* l'isogonal de H relativement à XYZ.

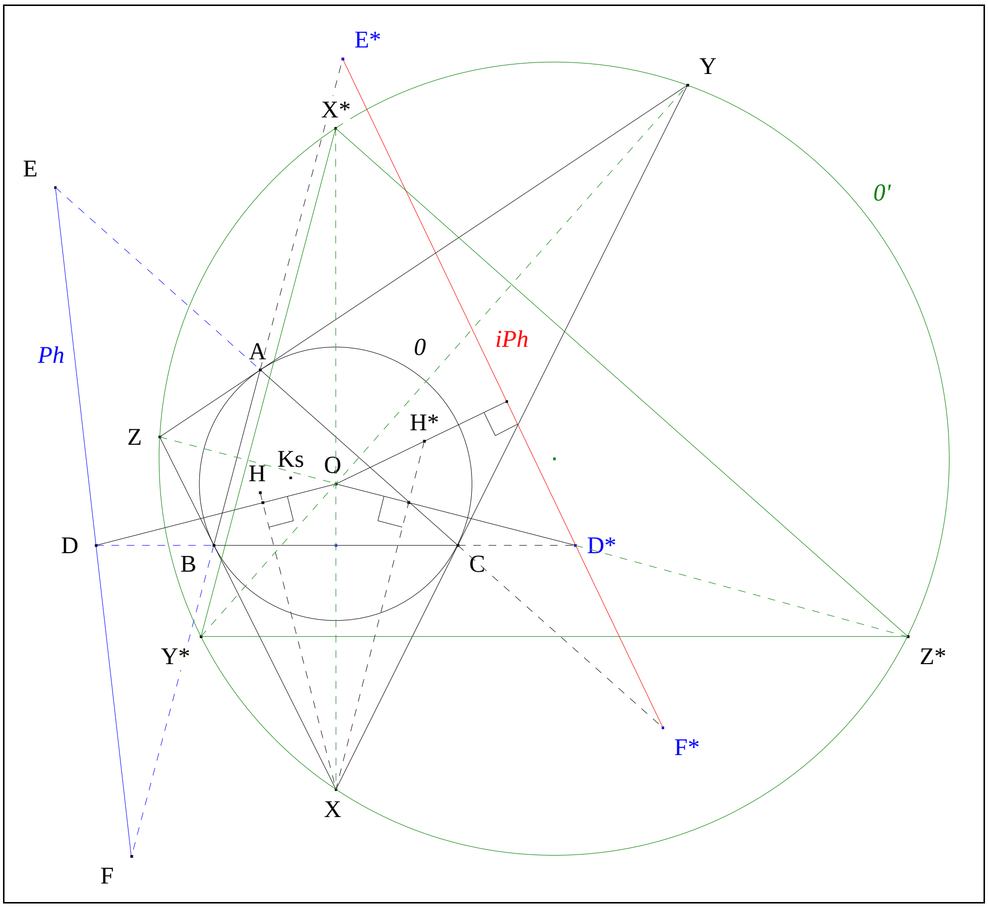
- D'après **J. 1.** Le point de Schiffler du triangle tangentiel, H* est le point de Schiffler de XYZ.

- (HX) étant la polaire de D relativement à *0*, (OD) ⊥ (HX) ;
  par symétrie d'axe (OX), (OD*) ⊥ (H*X) ;
  en conséquence, D* est sur la polaire de H* relativement à *0*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que E* est sur la polaire de H* relativement à *0*
  F* est sur la polaire de H* relativement à *0*.

- **Conclusions partielles :** **(1)** H* est le pôle de i*Ph*

  (2) (OH*) ⊥ i*Ph*.



- Notons $0'$ le cercle circonscrit à XYZ
  et X*Y*Z* le triangle O-circomcévien de XYZ.

- O étant le centre de XYZ, X*Y*Z* est le second triangle circomperp de X*Y*Z*.

- D'après **F. 3.** Les points de Schiffler et Kosnitza, H* est le point de Kosnitza de X*Y*Z*.

- **Scolies :**
  (1) O est l'orthocentre de X*Y*Z*
  (2) ABC est homothétique à X*Y*Z*
  (3) H, Ks ont pour homologues resp. O, H*
  (4) (HKs) // (OH*) et (OH*) ⊥ i*Ph*.

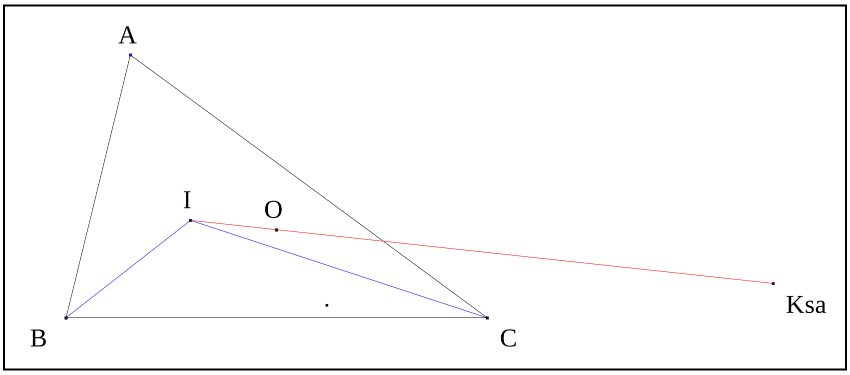
- **Conclusion :** (HKs) est perpendiculaire à i*Ph*.

K. AVEC DES POINTS DE KOSNITZA

1. Les triangles IBC

VISION

Figure :

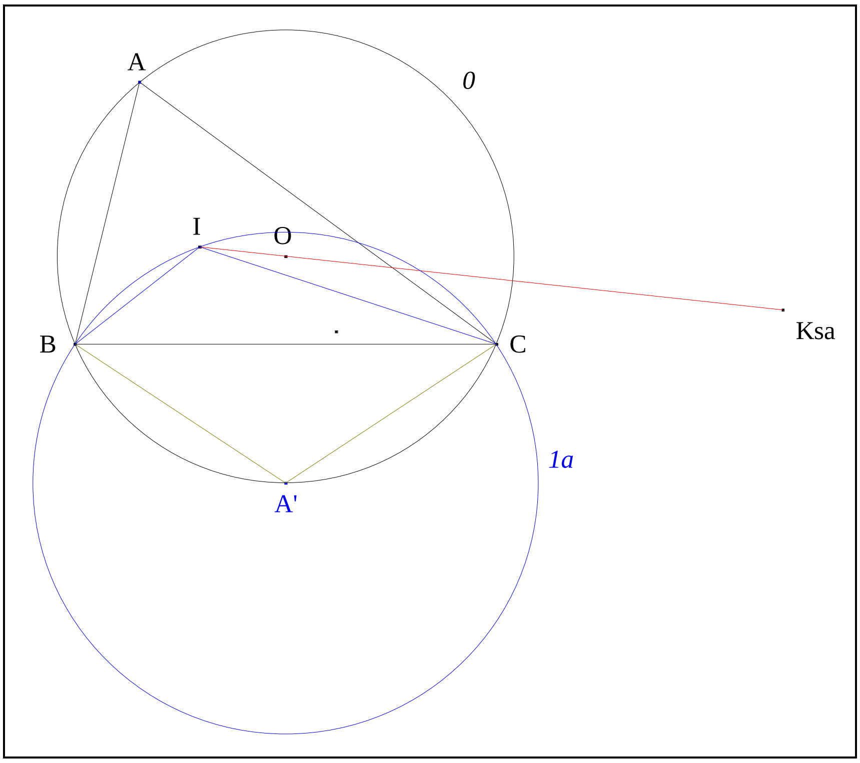


Traits :		ABC	un triangle,
		I	le centre de ABC,
		O	le centre du cercle circonscrit à ABC
	et	Ksa	le point de Kosnitza du triangle IBC.

Donné : Ksa est sur (IO). [73]

VISUALISATION

[73] Hung dit buratinogigle sur AoPS, Kosnita points lies on OI line, AoPS du 21/04/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1231298_kosnita_points_lies_on_oi_line



- Notons $\quad$ *0* $\quad$ le cercle circonscrit à ABC,
  1a $\quad$ le A-cercle de Mention de ABC
  et $\quad$ A' $\quad$ le premier A-perpoint de ABC.

- **Scolies :** $\quad$ **(1)** $\quad$ A' est le centre de *1a*

  (2) $\quad$ O est le centre du cercle circonscrit au triangle A'BC.

- **Conclusion :** par définition, $\quad$ Ksa est sur (IO).

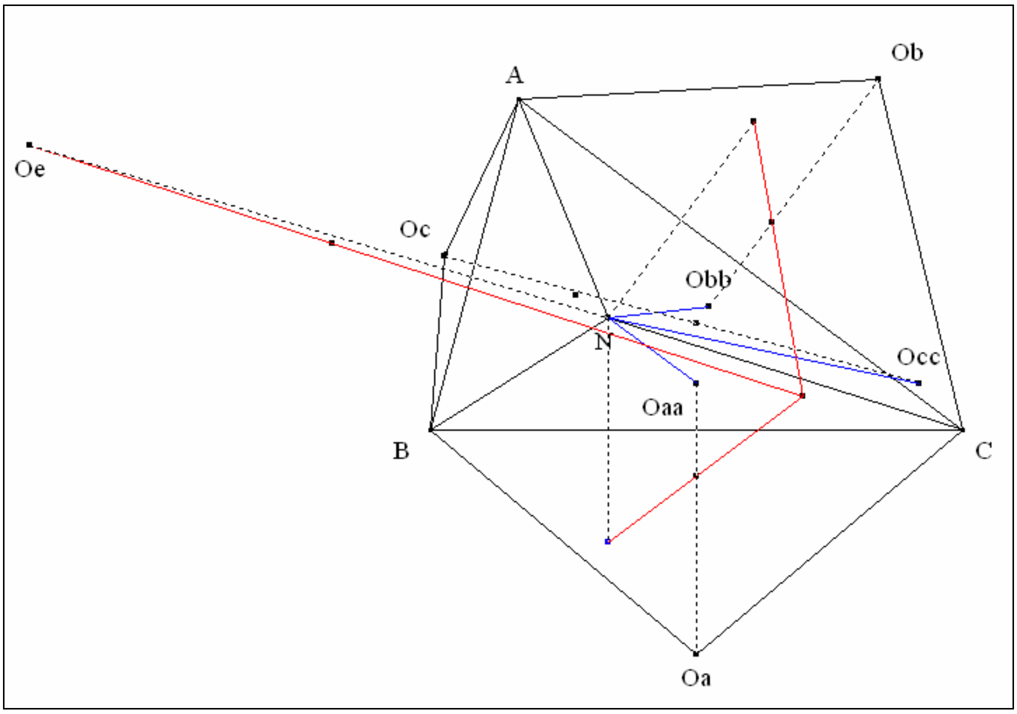
Enoncé traditionnel :

I *étant le centre d'un triangle* ABC,
les points de Kosnitza resp. des triangles IBC, ICA, IAB
sont
sur la droite d'Euler du triangle de contact de ABC.

2. Les triangles NBC

VISION

Figure :



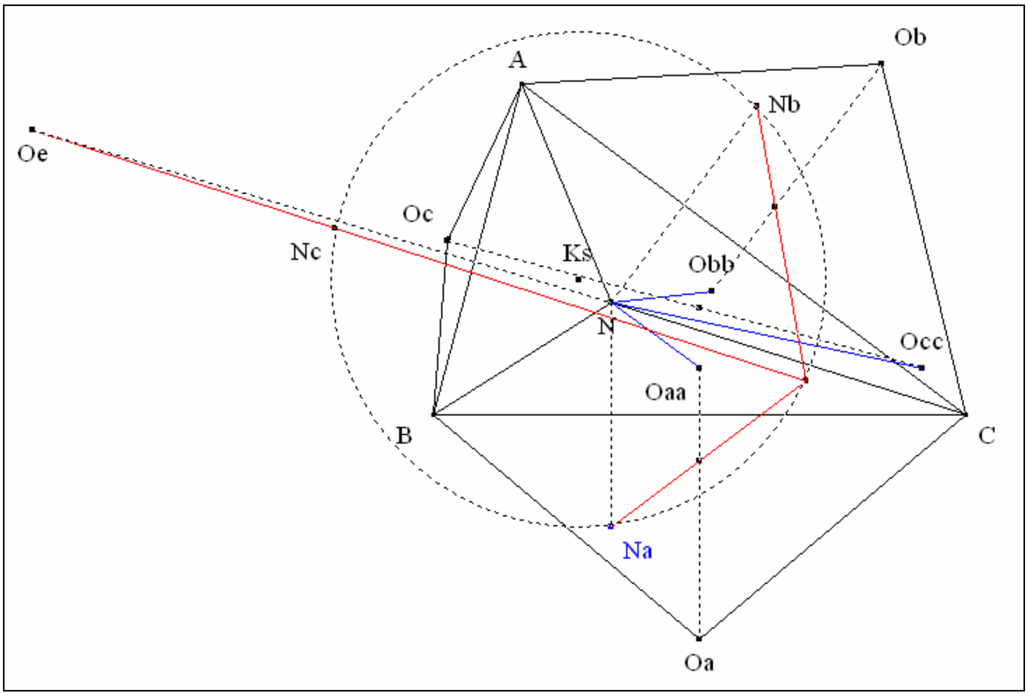
Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	N	le centre du cercle d'Euler de ABC,
	Oa, Ob, Oc	les centres des cercles circonscrits reps. aux triangles NBC, NBA, NAB,
et	Oaa, ObbOcc	le centre des cercles circonscrits resp. aux trianglex OaBC, ObCA, OcAB.

Donné : les symétriques de (NOaa), (NObb), (NOcc) resp.
par rapport à (BC), (CA) (AB) sont concourantes. [74]

Commentaire : (NOaa) passe par le point de Kosnita de NBC et circulairement.

Indication :

[74] Hung dit *buratinogigle*, NPC and Kosnita points, AoPS du 27/01/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h622641p3724306



En considérant le point de Kosnitza Ks de ABC,
Ks est le centre du cercle circonscrit au triangle N-symétrico de ABC.
Le point de concours recherché est sur ce cercle.

L. UNE PARALLÈLE

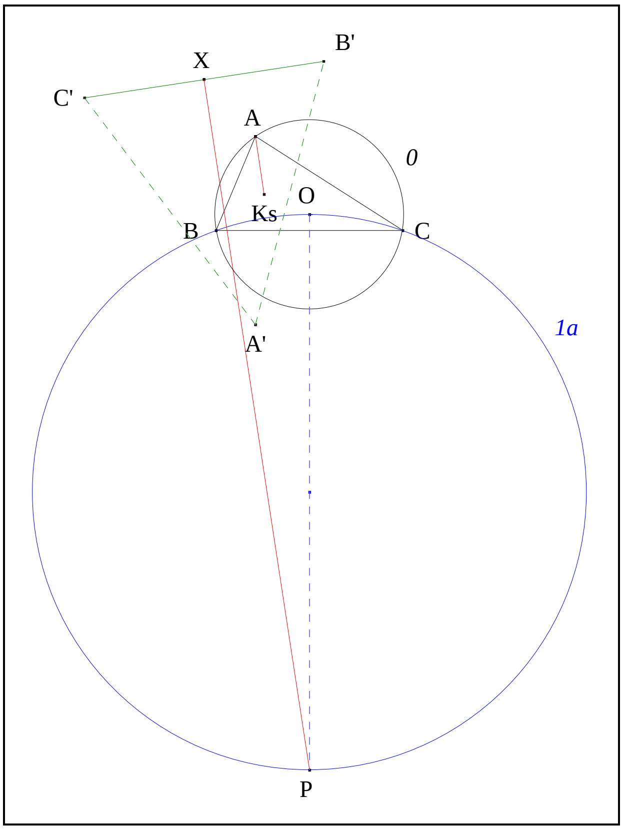
À

UNE A-DROITE DE KOSNITZA

1. Le résultat de François Rideau

VISION

Figure :

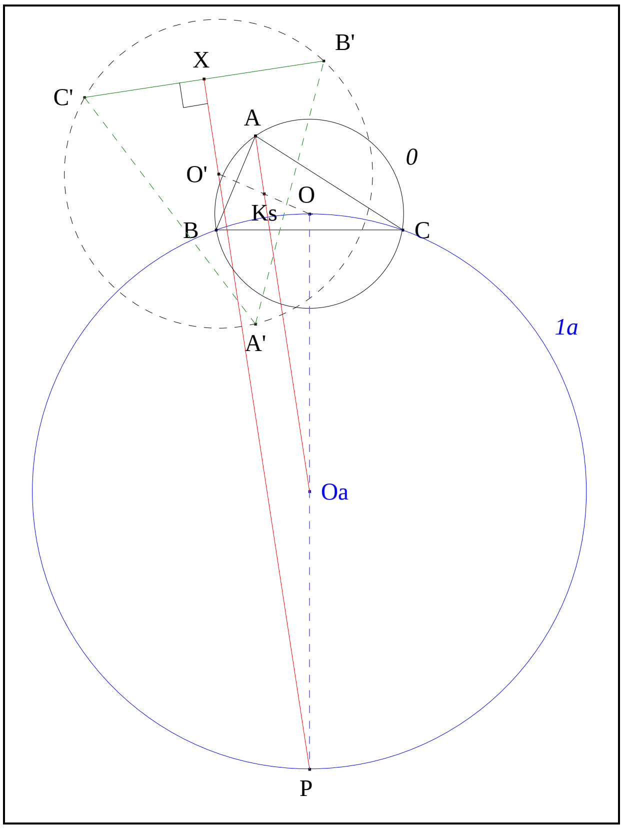


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A'B'C'	le triangle symétrique de ABC,
	X	le milieu de [B'C'],
	1a	le cercle circonscrit au triangle OBC,
et	P	l'antipôle de O par rapport à *1a*.

Donné : (PX) est parallèle à (AKs). [75]

VISUALISATION

[75] With the symmetric triangle, AoPS du 04/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1222208_with_the_symmetric_triangle
Deux perpendiculaires, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1231423



- Notons O' le centre du cercle circonscrit à A'B'C'
  et Oa le centre du cercle circonscrit à OBC.

- D'après **A.** Le point de Kosnitza, (AKs) passe par Oa.

- D'après **E. 2.** O' est le symétrique de O par rapport à Ks.

- D'après Thalès "Rapports", (PO') // (OaKs).

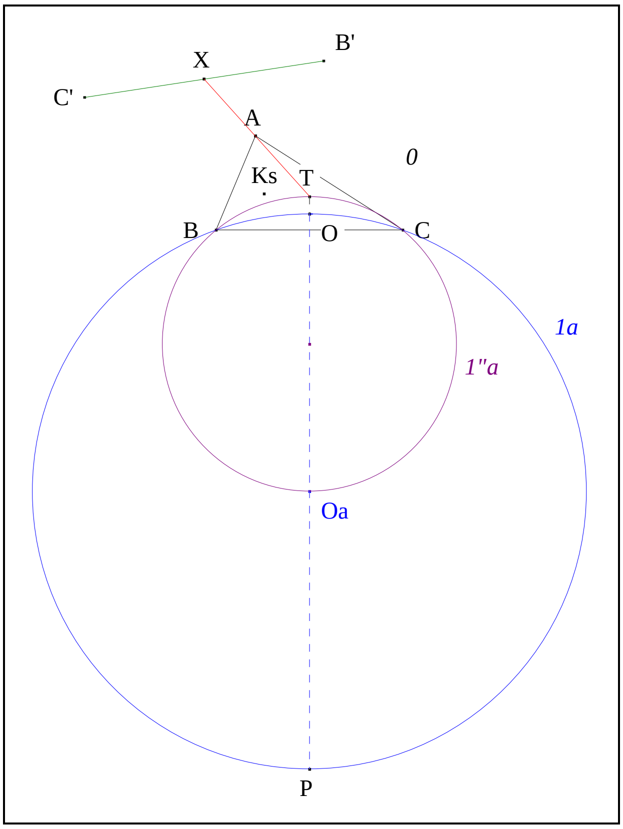
- D'après **C. 3.** (AOaKs) ⊥ (B'C') ;

  en conséquences, **(1)** (PO') ⊥ (B'C')

  (2) (PO') passe par X.

- **Conclusion :** (PX) est parallèle à (AKs).

Scolie : trois points alignés



- Notons *1''a* le cercle circonscrit au triangle OaBC
  et T l'antipôle de Oa relativement à *1''a*.

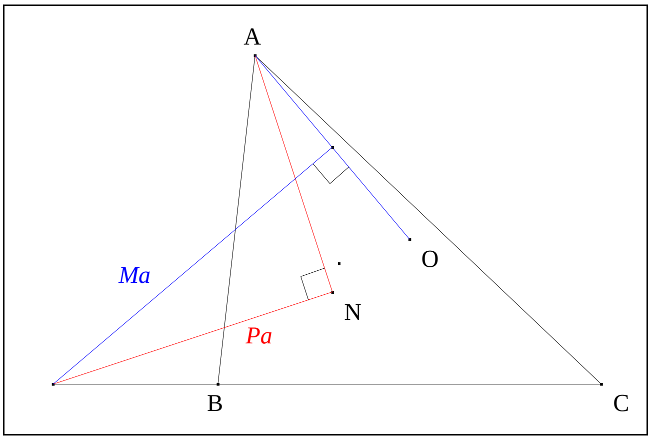
- **Conclusion :** T, A et X sont alignés.

U. APPENDICE

1. Un lemme

VISION

Figure :

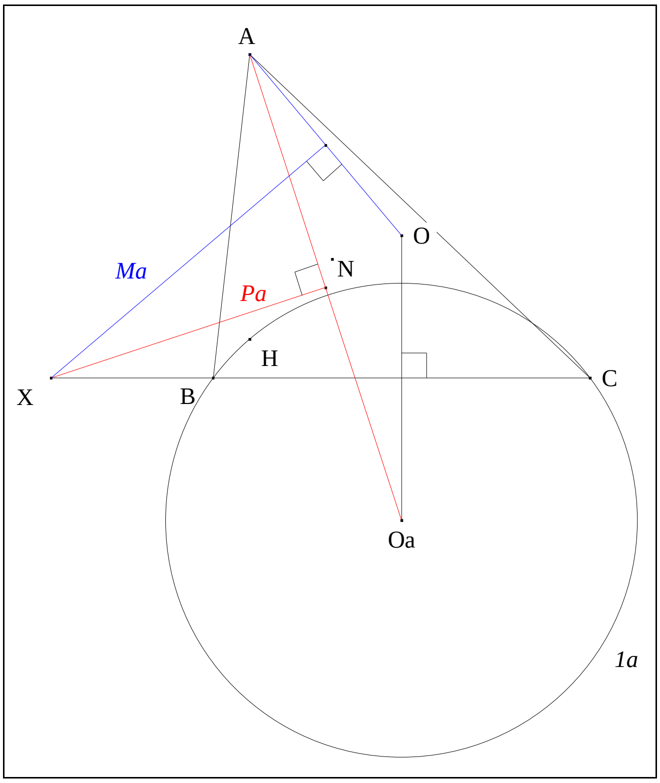


Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
Ma la médiatrice de [AO],
N le centre du cercle d'Euler à ABC,
Ks le point de Kosnitza de ABC
et *Pa* la perpendiculaire à [NA] en N.

Donné : *Pa*, *Ma* et (BC) sont concourantes. [76]

VISUALISATION

[76] Three concurrent lines, AoPS du 09/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1209383_three_concurrent_lines



• Notons	H	l'orthocentre de ABC,
	1a	le cercle circonscrit au triangle BHC
et	Oa	le centre de *1a*.

• **Scolies :**	**(1)**	*Pa* est la médiatrice de [AOa]
	(2)	(BC) est la médiatrice de [OOa].

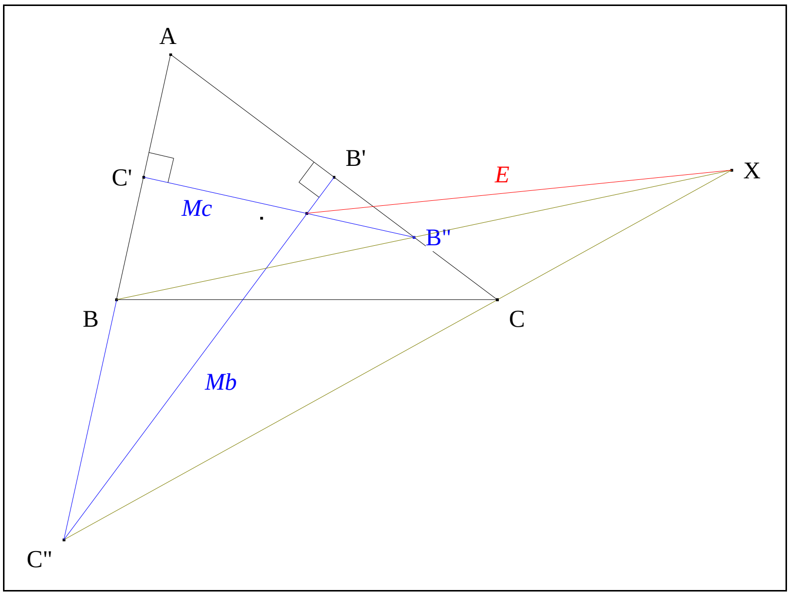
• **Conclusion :** *Pa*, *Ma* et (BC) sont concourantes.

• Notons X ce point de concours.

2. Un point sur la droite d'Euler

VISION

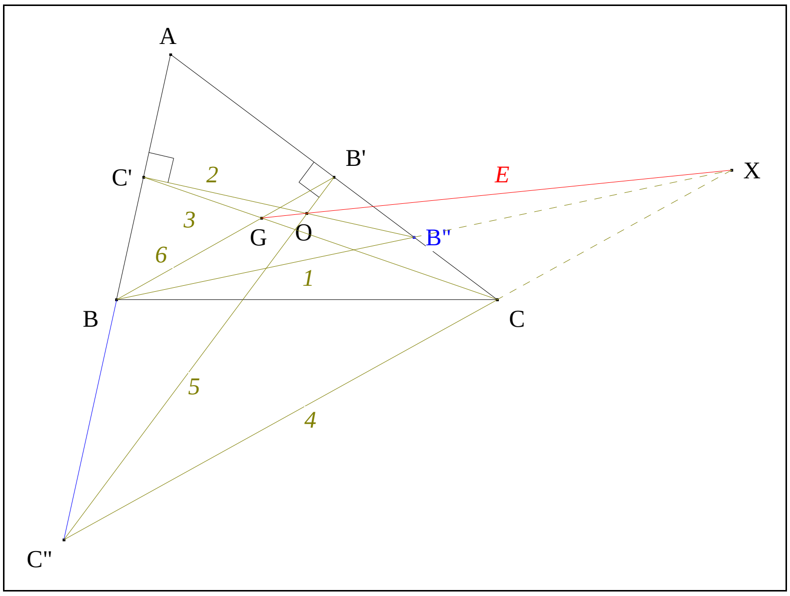
Figure :



Traits : ABC un triangle,
B', C' les milieux resp. de [AC], [AB],
Mb, *Mc* les médiatrices resp. de [AC], [AB],
B", C" les points d'intersection de *Mb*, *Mc* resp. avec (AC), (AB),
E la droite d'Euler à ABC,
et X le point d'intersection de (BB") et (CC").

Donné : X est sur *E*. [77]

VISUALISATION



- Notons O, G les points d'intersection resp. de *Mb* et *Mc*, (BB') et (CC').

- **Scolies :** **(1)** O est le centre du cercle circonscrit à ABC

  (2) G est le point médian de ABC

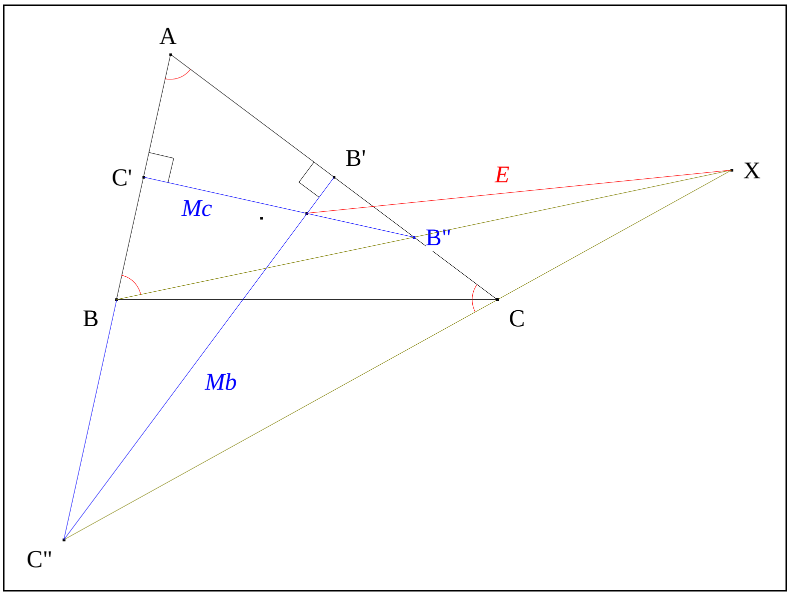
[77] Three concurrent lines, AoPS du 09/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1209383_three_concurrent_lines

(3) (OG) = *E*.

- D'après Pappus "La proposition 139" [78]
  (XOG) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel BB"C'CC"B'B.

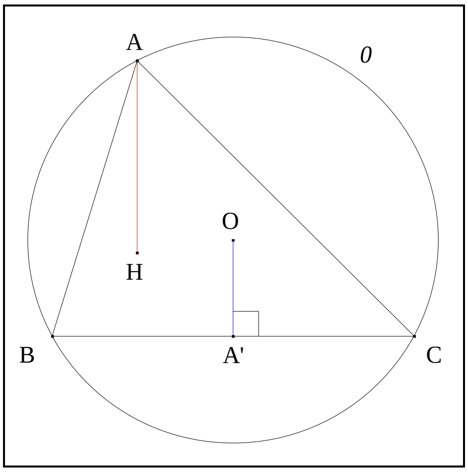
- **Conclusion :** X est sur *E*.

Scolie : vision angulaire



V. ANNEXE

1. Une relation [79]



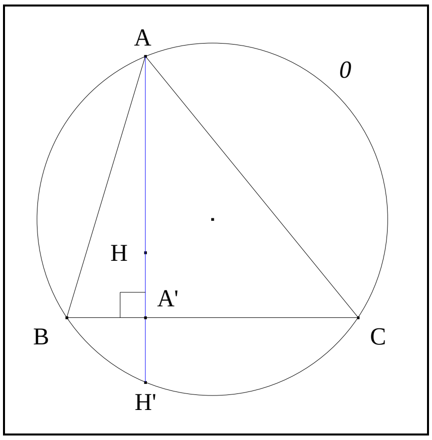
Traits : ABC un triangle,

[78] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **7**, p. 10-14 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[79] Carnot L., *Géométrie de position* (1803)

	H	l'orthocentre de ABC
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*
et	A'	le milieu de [BC],

Donné : AH = 2.OA'.

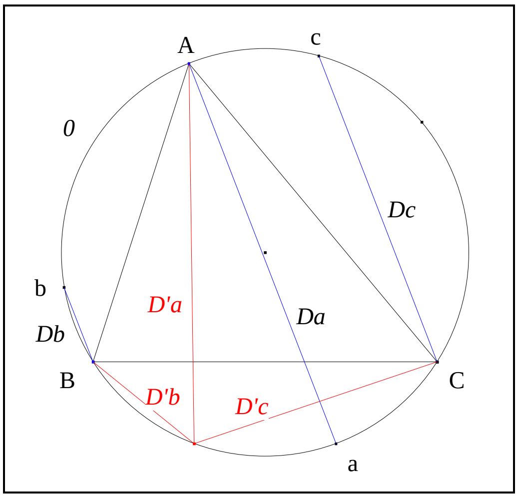
2. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté [80]



Traits :		ABC	un triangle acutangle,
		H	l'orthocentre du triangle,
		A'	le pied de la hauteur de ABC en A,
		0	le cercle circonscrit à ABC
	et	H'	le pied de la hauteur de ABC en A sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

3. Le théorème de Beltrami [81]



Traits:	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Da, *Db*, *Dc*	trois céviennes passant par A, B, C,
	a, b, c	les seconds points d'intersection de *Da*, *Db*, *Dc* avec *0*

80 Carnot, n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101

81 Beltrami E., *Archives* de Grünert **43**, p. 48

et *D'a*, *D'b*, *D'c* les isogonales de *Da*, *Db*, *Dc*.

Donné : *Da*, *Db*, *Dc* sont parallèles *si, et seulement si,* *D'a*, *D'b*, *D'c* sont concourantes sur *0*.