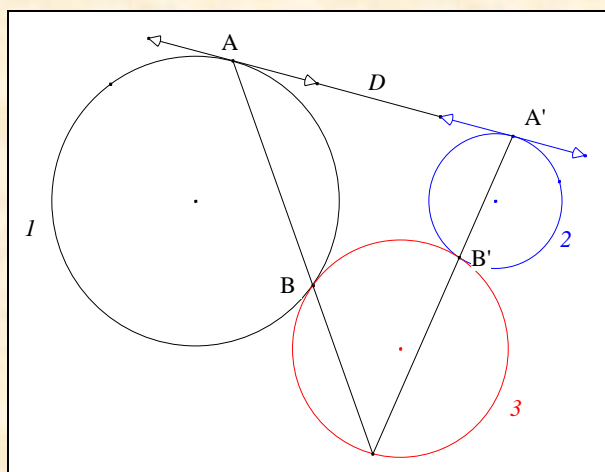


## QUICKIES 5



*La sculpture donne de l'âme au problème*

Jean-Louis AYME <sup>1</sup>



### Résumé.

L'auteur présente neuf "Quickies" relevés, ici où là, au gré des ses lectures, et accompagnés de leur solution relevant d'un point de vue personnel...  
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

### Abstract.

The author presents nine "Quickies" accompanied by their solution with a personal point of view...  
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

### Sommaire

1. B. J. Sollertinsky, Question **493**, *Journal de Mathématiques élémentaires* (1893)
2. IMO, Day **2**, Problem **4**, Colombie (24/07/2013)
3. Achille Brocot, Question **86**, *Journal de Mathématiques élémentaires* **I** (1877) ; **II** (1878)
4. Augustin-Louis Cauchy, *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome **I** (1804)
5. Maurice d'Ocagne, Question **798**, *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1898)
6. Griffiths Conrad Evans, *Mathematics Teacher* **31** (1938)
7. Le lemme d'Hiroshi Haruki ou le théorème de Michel Chasles
8. M.O. China (1996) Day **1** Problem **1**
9. Johnson R. A., A circle theorem, *American Mathematical Monthly*, vol. **23**, 5 (1916)

<sup>1</sup> Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/12/2013

## POINT DE VUE

*...en enlevant tout ce qu'il y a en trop  
pour ne retenir que l'essentiel.*



Sensible aux lignes pures, belles et puissantes, l'auteur agit dans cette série de "Quickies" comme un sculpteur.

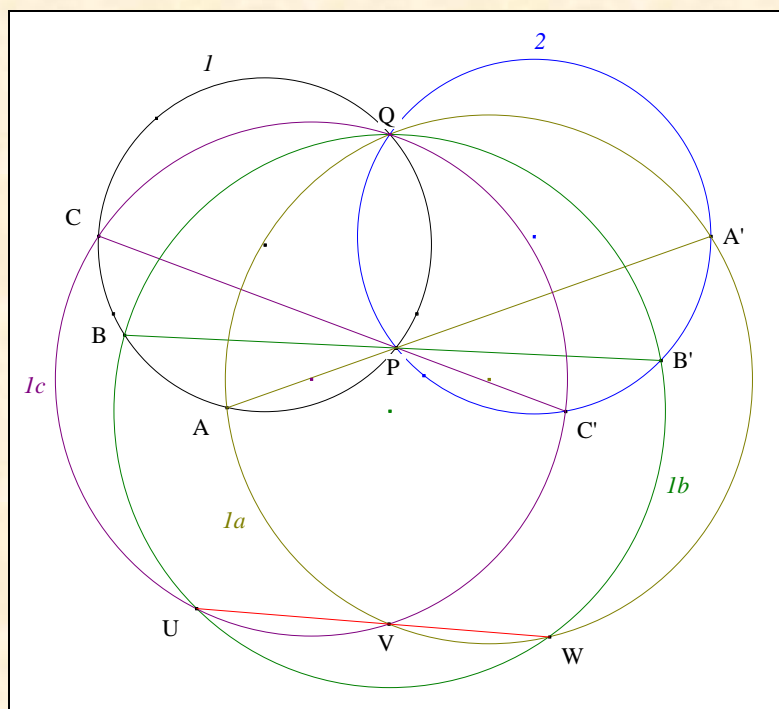
Le problème de Géométrie analogue à un bloc de pierre, est taillé directement, sans modèle préalable, à l'aide d'élégants théorèmes eux-mêmes dépourvus de tout superflu. Cette taille permet de dégager de sa gangue et de faire émerger une forme imaginée par l'auteur...

# QUICKIE 1

B. J. Sollertinsky, Question 493, *Journal de Mathématiques élémentaires* (1893)

## VISION

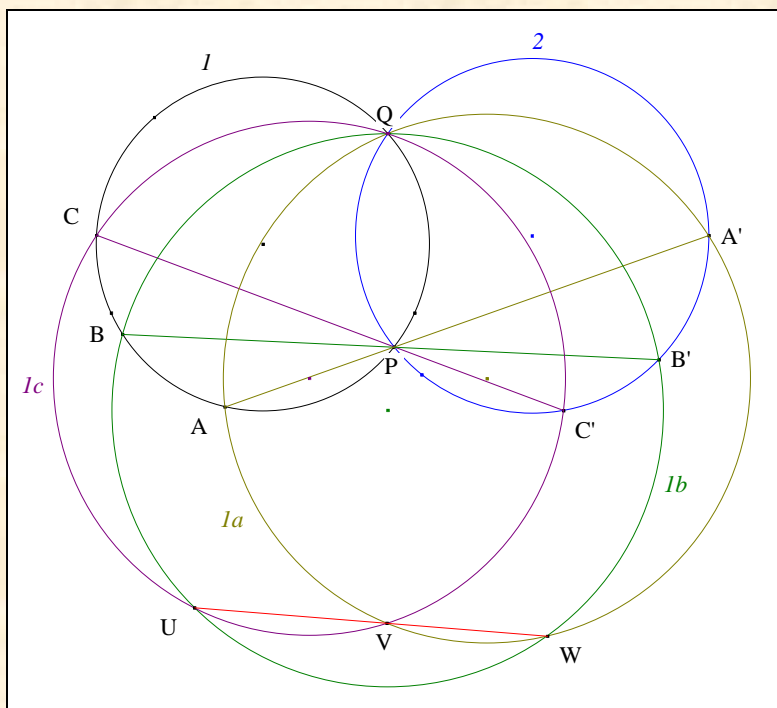
Figure :



- Traits :**
- |              |   |
|--------------|---|
| $1, 2$       | deux cercles sécants,   |
| $P, Q$       | les points d'intersection de $1$ et $2$ ,   |
| $A, B, C$    | trois points de $1$ ,   |
| $A', B', C'$ | les seconds points d'intersection de $2$ resp. avec $(AP)$ , $(BP)$ , $(CP)$ ,    |
| $1a, 1b, 1c$ | les cercles circonscrits resp. aux triangles $AA'Q$ , $BB'Q$ , $CC'Q$             |
| et $U, V, W$ | les seconds points d'intersection de $1b$ et $1c$ , $1c$ et $1a$ , $1a$ et $1b$ . |
- Donné :**  $U, V$  et  $W$  sont alignés.

**Commentaire :** le théorème du pivot.

## VISUALISATION



- D'après Miquel "Le théorème du pivot" <sup>2</sup>  
appliqué aux cercles concourants en Q,

- |     |                   |                           |
|-----|-------------------|---------------------------|
| (1) | $1, 1a$ et $1b$ , | A, B et W sont alignés    |
| (2) | $1, 1a$ et $1c$ , | A, C et V sont alignés    |
| (3) | $1, 1b$ et $1c$ , | B, C et U sont alignés    |
| (4) | $2, 1a$ et $1b$ , | A', B' et W sont alignés  |
| (5) | $2, 1a$ et $1c$ , | A', C' et V sont alignés  |
| (6) | $2, 1b$ et $1c$ , | B', C' et U sont alignés. |

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible"  
appliqué aux triangles ABC et A'B'C' perspectifs,  
U, W et V sont alignés.

**A propos de B. J. Sollertinsky**

Il résidait vers 1890 à Gatchina (Russie) située à 45 km au sud de Saint-Pétersbourg.

**Archives :**

**493.** — Deux circonférences  $\Delta, \Delta'$ , se coupent aux points M, M'. Trois cordes MA, MB, MC du cercle  $\Delta$  rencontrent  $\Delta'$  respectivement en A', B', C'. Démontrer que les circonférences AA'M', BB'M', CC'M' se coupent deux à deux en des points situés sur une droite. (B. Sollertinsky.)

3

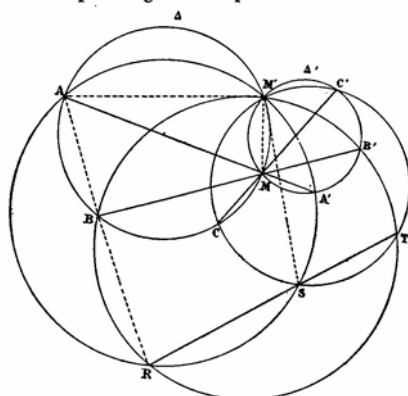
<sup>2</sup> Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 13, p. 4-6 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>  
<sup>3</sup> Sollertinsky B., Question 493, *Journal de Mathématiques élémentaires* (1893) 96

## QUESTION 493

Solution par M. ALETROP (à Madrid).

Deux circonférences  $\Delta, \Delta'$  se coupent aux points  $M, M'$ . Trois cordes  $MA, MB, MC$  du cercle  $\Delta$  rencontrent  $\Delta'$ , respectivement en  $A', B', C'$ . Démontrer que les circonférences  $AA'M', BB'M', CC'M'$  se coupent deux à deux en des points situés sur une droite. (B. Sollertinsky.)

Soit  $R$  le second point d'intersection des circonférences  $AA'M', BB'M'$ ; les points  $A, B, R$  sont en ligne droite. En effet, on sait que l'angle formé par deux cordes telles que



$AB, A'B'$  est constant et égal au supplément de l'angle formé par les cordes qui joignent le point  $M'$  aux extrémités d'une sécante quelconque  $AA'$ ; donc le point d'intersection de  $AB$  et  $A'B'$  se trouvera sur le segment  $ARA'$ , lieu des points d'où l'on voit sous un angle supplémentaire de  $\widehat{AMA'}$  la droite  $AA'$ . De même, il se trouve sur le segment  $BRB'$ ; donc il

288

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

coïncide avec l'intersection  $R$  de ces deux segments. En d'autres termes, les points  $A, B, R$  sont en ligne droite, ainsi que les points  $A', B', R$ .

Cela posé, tirons  $M'S$ ; on a, dans la circonférence  $\Delta$ ,

$$\widehat{BMM'} = 180^\circ - \widehat{BAM'},$$

et, dans la circonférence  $AA'M'$ ,

$$\widehat{RSM'} = 180^\circ - \widehat{RAM'};$$

donc  $\widehat{BMM'} = \widehat{RSM'}$ .

Pour des raisons analogues, on a

$$\widehat{B'MM'} = \widehat{TSM'}.$$

Par suite,

$$\widehat{RSM'} + \widehat{TSM'} = \widehat{BMM'} + \widehat{B'MM'} = 180^\circ,$$

ce qui montre que les points  $R, S, T$  sont en ligne droite.

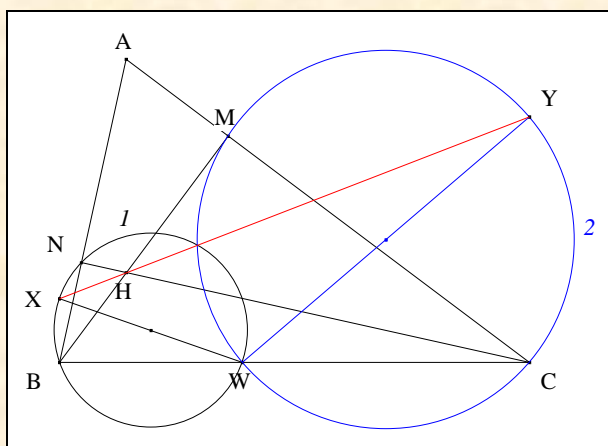
*Nota.* — Solutions diverses par MM. GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille; DROZ-FARNY, professeur au collège de Porentruy; YOUSSEFIAN, à Constantinople; M<sup>me</sup> V. F. PRIME, à Bruxelles.

## QUICKIE 2

IMO, Day 2, Problem 4, Colombie (24/07/2013)

### VISION

Figure :

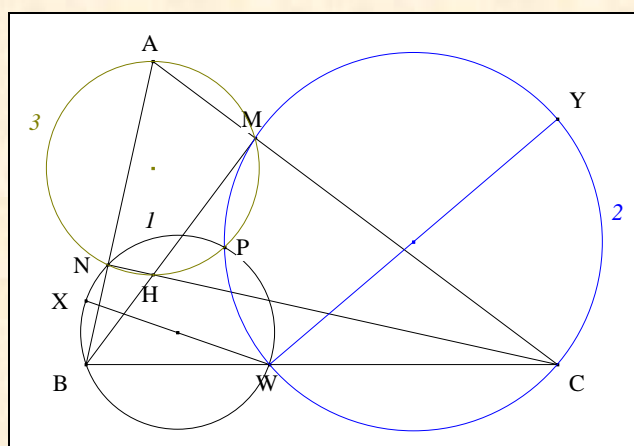


**Traits :**  $ABC$  un triangle acutangle,  
 $H$  l'orthocentre de  $ABC$ ,  
 $W$  un point de  $[BC]$ ,  
 $M, N$  les pieds de  $B, C$ -hauteurs de  $ABC$ ,  
 $1, 2$  les cercles circonscrits resp. aux triangles  $BWN, CWM$ ,  
 et  $X, Y$  les antipôles de  $W$  relativement à  $1, 2$

**Donné :**  $X, Y$  et  $H$  sont alignés.<sup>5</sup>

**Commentaire :** la droite d'Amédée Mannheim.

### VISUALISATION

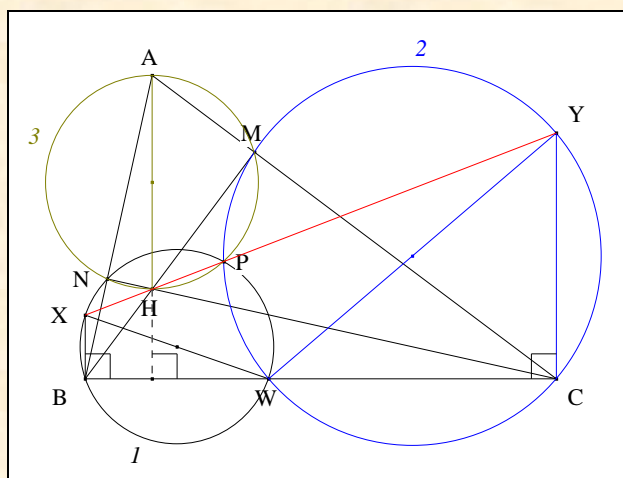


<sup>5</sup>

Warut Suksompong, Potcharapol Suteeparuk (Thaïlande)  
 IMO 2013 Problem 4, AoPS du 24/07/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3154369>  
 Cercles exinscrits et triangle rectangle ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,858953>



- Notons  $P$  le second point d'intersection de  $I$  et  $2$ ,  
et  $3$  le cercle de diamètre  $[AH]$  ; il passe par  $M$  et  $N$ .
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" <sup>6</sup>,  $I$ ,  $2$  et  $3$  sont concourants en  $P$ .



- **Conclusion :**  $(AH)$ ,  $(BX)$  et  $(CY)$  étant parallèles entre elles,  $X$ ,  $Y$ ,  $P$  et  $H$  sont alignés <sup>7</sup>.

**Scolie :**  $(XYPH)$  est "La droite de Mannheim", dégénérescence d'un "cercle de Mannheim".

**Archive :**



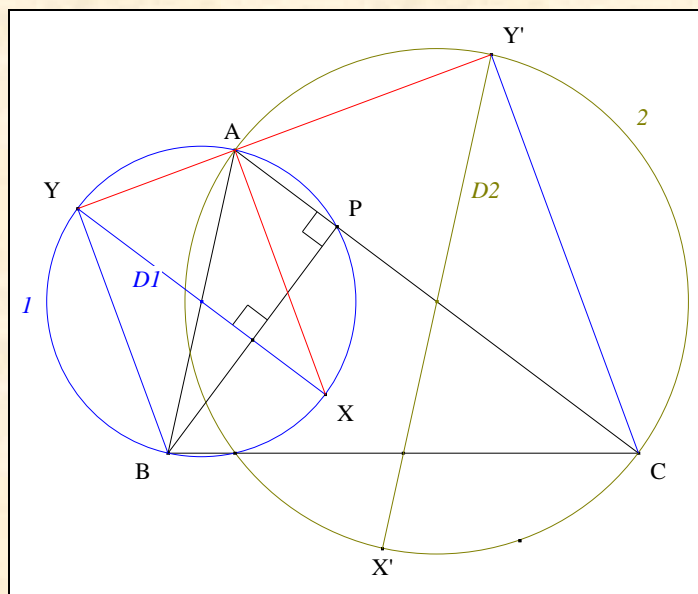
Day 2 - 24 July 2013

**Problem 4.** Let  $ABC$  be an acute-angled triangle with orthocentre  $H$ , and let  $W$  be a point on the side  $BC$ , lying strictly between  $B$  and  $C$ . The points  $M$  and  $N$  are the feet of the altitudes from  $B$  and  $C$ , respectively. Denote by  $\omega_1$  the circumcircle of  $BWN$ , and let  $X$  be the point on  $\omega_1$  such that  $WX$  is a diameter of  $\omega_1$ . Analogously, denote by  $\omega_2$  the circumcircle of  $CWM$ , and let  $Y$  be the point on  $\omega_2$  such that  $WY$  is a diameter of  $\omega_2$ . Prove that  $X$ ,  $Y$  and  $H$  are collinear.

<sup>6</sup> Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-6 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>  
<sup>7</sup> *Journal de Mathématiques Élémentaires* de Vuibert (octobre 1893) 4  
 Ayme J.-L., Ménélaüs et Ceva, G.G.G. vol. **6**, p. 10-12 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>







- Notons  $P$  le second point d'intersection de  $(AC)$  avec  $I$ .
- Par hypothèse,
 

$(XY) \parallel (APC)$
$(APC) \perp (PB)$
$(XY) \perp (PB)$ ;
- en conséquences,
 

(1)	$X'$ est le premier A-perpoint de ABC
(2)	$X$ est le second A-perpoint de ABC.
- **Conclusion partielle :**

(1)	$X$ est sur la A-bissectrice intérieure de ABC
(2)	$X'$ est sur la A-bissectrice extérieure de ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 

(1)	$Y$ est sur la A-bissectrice intérieure de ABC
(2)	$Y'$ est sur la A-bissectrice extérieure de ABC.
- **Conclusions :**

(1)	$A, X$ et $X'$ sont alignés sur la A-bissectrice intérieure de ABC
(2)	$A, Y$ et $Y'$ sont alignés sur la A-bissectrice intérieure de ABC.

### A propos d'Achille Bricot

Achille Brocot (1817-1874) semble davantage connu des amateurs d'horlogerie que des mathématiciens et pourtant cet amateur a fourni un joli travail sur l'approximation rationnelle et laissé son nom à une structure arborescente représentant les rationnels.

Comme beaucoup d'artisans à l'époque, Achille Brocot n'a pas choisi sa vocation. Fils aîné de Louis-Gabriel Brocot, il collabore puis succède à son père (comme son fils lui succédera).

Archive :

## QUESTION 86.

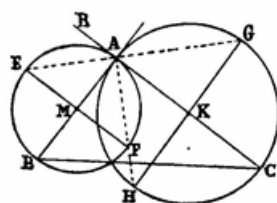
**Solution** par M. LAMY, élève du Collège de Cherbourg.

Étant donné un triangle ABC, sur AB et sur AC comme diamètres, on décrit des circonférences ; on mène dans la première un diamètre EF parallèle à AC, et, dans la seconde, un diamètre GH parallèle à AB. Démontrer que les points F, H sont sur la

— 128 —

bissectrice de l'angle A du triangle, et que les points E, G sont sur la bissectrice extérieure de cet angle. (Brocot).

Joignons AF. Le triangle AMF est isocèle, donc  $\angle MAF = \angle MFA$  or  $\angle MFA = \angle FAC$  comme alternes-internes, donc  $\angle MAF = \angle FAC$  et AF est bissectrice de l'angle BAC.



De même, si l'on joint AH, le triangle AHK est isocèle et  $\angle HAK = \angle AHK$ . Or  $\angle AHK = \angle BAK$  comme alternes-internes, donc  $\angle HAK = \angle BAH$ , et AH est bis-

sectrice de l'angle BAC ; elle coïncide donc avec AF.

Joignons EA. Le triangle isocèle EAM donne  $\angle EAM = \angle AEM$ , or  $\angle AEM = \angle RAE$  comme alternes-internes, donc  $\angle EAM = \angle RAE$  et AE est bissectrice de l'angle extérieur RAB.

De même, en joignant AG, on démontre que  $\angle RAG = \angle GAP$  et que AG est bissectrice de l'angle PAK opposé par le sommet à l'angle BAR. Donc AG coïncide avec le prolongement de la droite AE bissectrice de BAR ; par conséquent, le point G se trouve sur cette bissectrice.

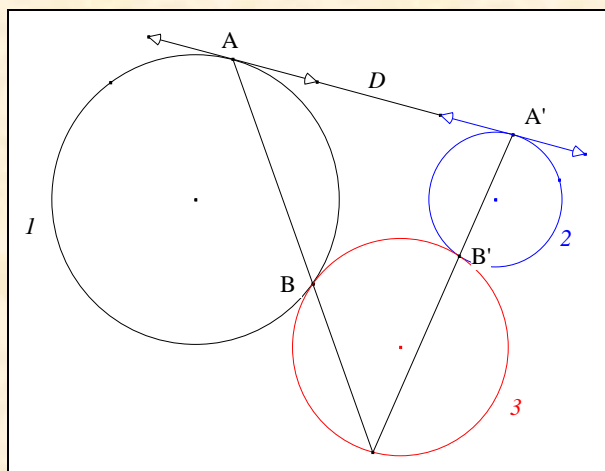
*Nota.* — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand ; Cordeau, école Lavoisier ; Cuvelier, de Dinant (Belgique) ; Dalzon, de Saint-Étienne ; Montenot, Franquet, de Troyes ; Belin, de Semur ; de Mézières, de Nantes ; Boucher, de Cherbourg ; Trokay, de Liège ; Rimmel, Dermenghem, Martin, de Pont-à-Mousson ; Menaud, de Dijon ; Bouffez, à Amiens.

### QUICKIE 4

Le Baron Augustin-Louis Cauchy, *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome I (1804)

### VISION

Figure :

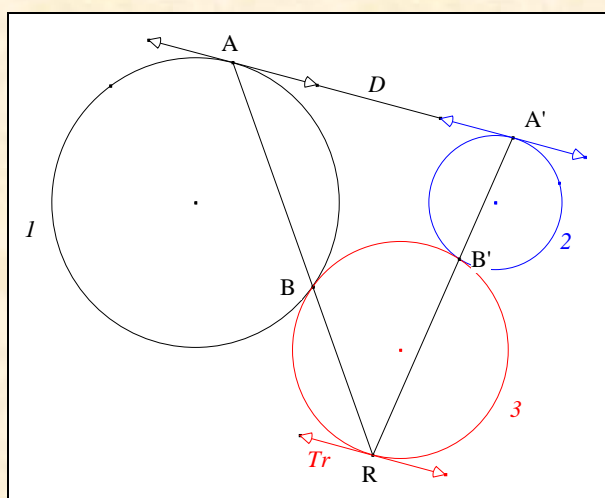


**Traits :**  $D$  une droite,  
 $A, A'$  deux points de  $D$ ,  
 $1, 2$  deux cercles extérieur l'un de l'autre, tangents d'un même côté de  $D$  resp. en  $A, A'$ ,  
 $O, O'$  les centres resp. de  $1, 2$ ,  
 $3$  un cercle tangent extérieurement à  $1$  et  $2$ ,  
 et  $B, B'$  les points de contact de  $3$  resp. avec  $1, 2$ .

**Donné :**  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont sécantes sur  $3$ .<sup>10</sup>

**Commentaire :** le théorème de Reim.

### VISUALISATION

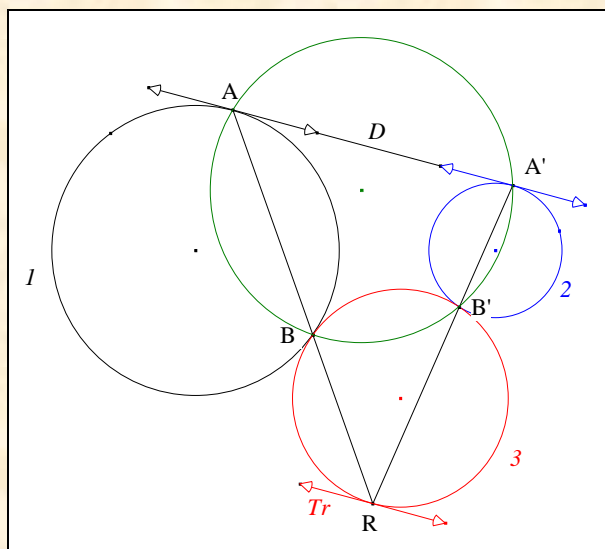


<sup>10</sup>

Cauchy A.-L., *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome I (1804) 193

- Notons  $R$  le second point d'intersection de la monienne naissante  $(AB)$  avec  $3$   
et  $Tr$  la tangente à  $3$  en  $R$ .
- Les cercles tangents  $1$  et  $3$ , le point de base  $B$ , la monienne  $(ABR)$ , conduisent au théorème 8 de Reim ;  
il s'en suit que  $D \parallel Tr$ .
- Les cercles tangents  $2$  et  $3$ , le point de base  $B$ , les parallèles  $D$  et  $Tr$ , conduisent au théorème 8' de Reim ;  
en conséquence,  $R, B'$  et  $A'$  sont alignés.
- **Conclusion :**  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont sécantes sur  $3$ .

**Scolies :** (1) Quatre points cocycliques



- **Conclusion :** le cercle  $3$ , les points de base  $B$  et  $B'$ , les moniennes naissantes  $(RBA)$  et  $(RB'A')$ ,  
les parallèles  $Tr$  et  $(AA')$ , conduisent au théorème 1'' de Reim ;  
en conséquence,  $A, A', B, B'$  sont cocycliques.

(2)  $R$  est sur l'axe radical de  $1$  et  $2$

**Note historique :** Jean Mention <sup>11</sup> dans les *Nouvelles Annales* attribue ce résultat à Augustin-Louis Cauchy.

**Archive :**

<sup>11</sup> Mention J., *Nouvelles Annales* **IX** (1850-51) 401-403 ; <http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0>



## NOTE SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE

(voir t. IX, p. 336).

PAR M. J. MENTION.

## DEUXIÈME PARTIE.

1. Feu M. Richard m'ayant demandé, à plusieurs reprises, de lui démontrer géométriquement le contact du cercle des neuf points, voici le moyen auquel je suis parvenu il y a quelque temps.

Je me propose de mener, par le milieu d'un des côtés  $a$ , un cercle tangent au système  $(r, \alpha)$  ou  $(\beta, \gamma)$ .

Soit  $F$  le pied de la bissectrice intérieure passant par le sommet  $A$ ; ce pied est le centre de similitude interne du système  $(r, \alpha)$ ; soient  $D, D'$  les points où  $(r), (\alpha)$  touchent le côté  $a$  dont le milieu est  $M$  et  $K$  le pied de la hauteur relative à ce côté. On prouve aisément cette proportion :  $FD.FD' = FM.FK$  (voir GERONO, *Annales*, tome III, page 496). Ainsi le cercle cherché passe par le pied de la hauteur. Or je choisis le milieu du côté  $a$  parce qu'il est un point de l'axe radical de chacun des systèmes  $(r, \alpha), (\beta, \gamma)$ , et me voici amené à cette question spéciale :

« Trouver la position d'une circonférence tangente à deux circonférences données, et passant par un point de leur axe radical. »

Cette position se fixe très-nettement en faisant usage d'une solution aussi élégante que peu connue, donnée, pour le cas général, par M. Cauchy, alors élève de l'École Polytechnique (Correspondance sur cette École, tome I, page 193), ce qui conduit au théorème suivant.

2. THÉORÈME. *M, un point de l'axe radical de deux*

*Ann. de Mathémat., t. IX. (Novembre 1850.)*

26

( 402 )

*cercles,  $O, O'$ ;  $A, A'$  les points de contact d'une des tangentes communes. Les points  $B, B'$  où les lignes  $MA, MA'$  coupent les cercles, sont les points où le cercle tangent à  $(OA, O'A')$  et passant par  $M$  touche les cercles.*

Le centre du cercle est situé sur la perpendiculaire abaissée de  $M$  sur la tangente commune; et si  $\delta$  désigne la distance de  $M$  à cette tangente, son rayon est égal à  $\frac{t^2}{2\delta}$ ; expression dans laquelle  $t$  est la longueur commune des tangentes menées par  $M$  aux deux cercles.

Conséquemment, revenant au triangle rectiligne de ci-dessus, la perpendiculaire abaissée de  $M$  sur  $\text{tang}(r, \alpha)$  contient le centre du cercle passant par  $M$  tangentielle-ment au système  $(r, \alpha)$ ; mais  $\text{tang}(r, \alpha)$  est perpendiculaire au rayon du cercle circonscrit issu du sommet  $A$  (voir 1<sup>re</sup> partie, corollaire 3). Donc cette perpendiculaire est un rayon du cercle des neuf points. En voilà plus qu'il n'en faut pour établir l'identité du cercle cherché et de celui des neuf points.

Ce procédé, appliqué aux trois systèmes où entre le cercle  $r$ , donne le théorème suivant :

*Les droites qui joignent les milieux des côtés aux points de contact de  $\text{tang}(\alpha, r), (\beta, r), (\gamma, r)$  avec le cercle inscrit se coupent en un même point de ce cercle;*

12

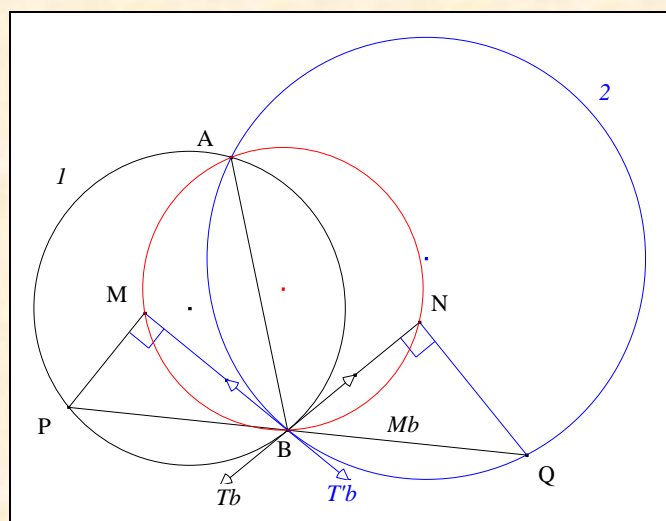


## QUICKIE 5

Maurice Philbert d'Ocagne, Question **798**, *Journal de Mathématiques Élémentaires* (oct. 1898)

### VISION

**Figure :**



**Traits :**  $1, 2$  deux cercles sécants,  
 $A, B$  les points d'intersection de  $1$  et  $2$ ,  
 $Tb, T'b$  les tangentes resp. à  $1, 2$  en  $B$ ,  
 $Mb$  une  $B$ -monienne de  $1$  et  $2$ ,  
 $P, Q$  les seconds points d'intersection de  $Mb$  resp. avec  $1, 2$   
 et  $M, N$  les pieds des perpendiculaires issues de  $P, Q$  resp. sur  $T'b, Tb$ .

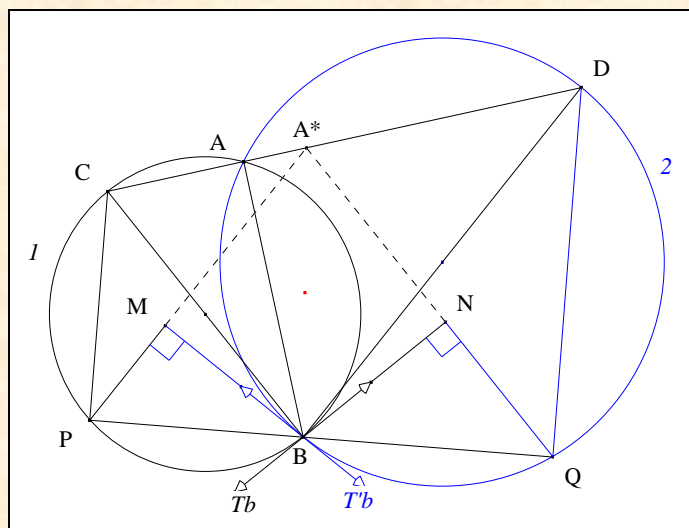
**Donné :**  $A, M, B$  et  $N$  sont cocycliques.<sup>13</sup>

**Commentaire :** les théorèmes de Reim et de Pappus.

### VISUALISATION

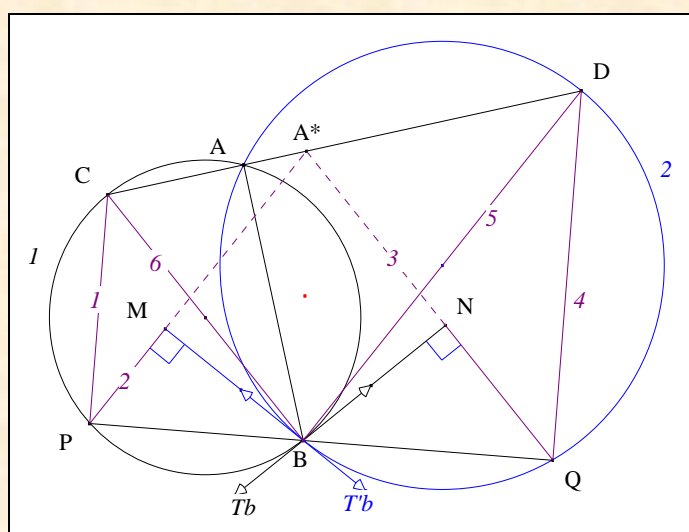
<sup>13</sup>

d'Ocagne M. P., Question **798**, *Journal de Mathématiques Élémentaires* (oct. 1898) 9-10



- Notons  $C, D$  les antipôles de  $B$  resp. à  $1, 2$   
et  $A^*$  le point d'intersection de  $(PM)$  et  $(QN)$ .
- D'après "Une monienne brisée diamétralement",  $C, A$  et  $D$  sont alignés.
- Le cercles  $1$  et  $2$ , les points de base  $A$  et  $B$ , les moniennes  $(CAD)$  et  $(PBQ)$ , conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que  $(CP) \parallel (DQ)$ .
- Scolies :
 

(1)	$(BC) \parallel (QA^*)$
(2)	$(BD) \parallel (PA^*)$



- D'après Pappus "Le petit théorème" <sup>14</sup> appliqué à l'hexagone  $CPA^*QDBC$ ,  $A^*$  est sur  $(CAD)$ .

<sup>14</sup> Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 2-4 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

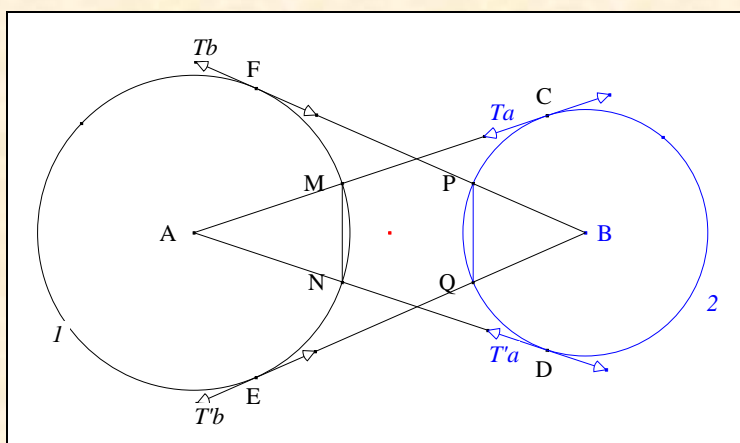


## QUICKIE 6

Griffiths Conrad Evans, *Mathematics Teacher* **31** (1938)

### VISION

Figure :



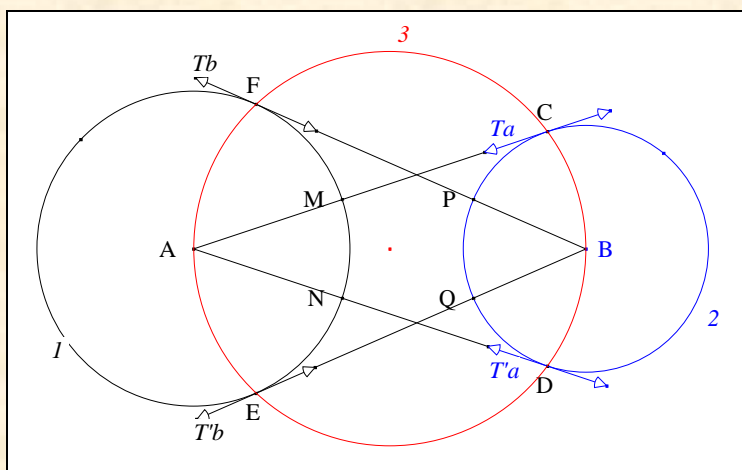
<b>Traits :</b>	$I, 2$	deux cercles extérieurs l'un de l'autre,
	$A, B$	les centres resp. de $I, 2$ ,
	$Ta, T'a$	les tangentes à $2$ issues de $A$ ,
	$M, N$	les points d'intersection proche de $2$ de $Ta, T'a$ avec $I$ ,
	$C, D$	les points de contact de $Ta, T'a$ avec $2$ ,
	$Tb, T'b$	les tangentes à $1$ issues de $B$ ,
	$P, Q$	les points d'intersection proche de $I$ de $Tb, T'b$ avec $2$
et	$F, E$	les points de contact de $Tb, T'b$ avec $1$ .

**Donné :**  $MN = PQ$ .<sup>16</sup>

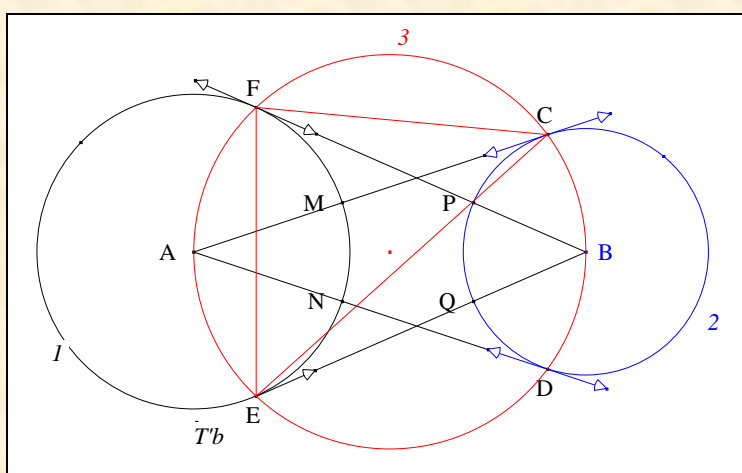
**Commentaire :** ce résultat porte différents noms en français : théorème "des cordes parallèles" chez Jean-Marie Monier ou encore "du face à face", en anglais "The eyeball theorem". Penser au rectangle de Ryokan Maruyama

### VISUALISATION

<sup>16</sup> Evans G. C., *Mathematics Teacher* **31** (1938) 114



- D'après J. Ch. Dupain "Six points cocycliques" <sup>17</sup>, A, E, D, B, C et F sont cocycliques.
- Notons 3 ce cercle.



- **Scolie :** A est le second C-perpoint du triangle CFE.
- D'après Jules A. Mention "Theorem of shamrock", I est le C-cercle de Mention du triangle CFE.
- **Conclusion partielle :** M est le centre du triangle CFE.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  - (1) N est le centre du triangle DFE
  - (2) P est le centre du triangle FDC
  - (3) Q est le centre du triangle EDC.
- D'après "Le rectangle de Ryokan Maruyama" <sup>18</sup>, le quadrilatère MNPQ est un rectangle.
- **Conclusion :**  $MN = PQ$ .

<sup>17</sup> Dupain J. Ch., Note sur les tangentes communes à deux cercles, *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Sér. 2, **8** (1869) 458-459 ; <http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0>

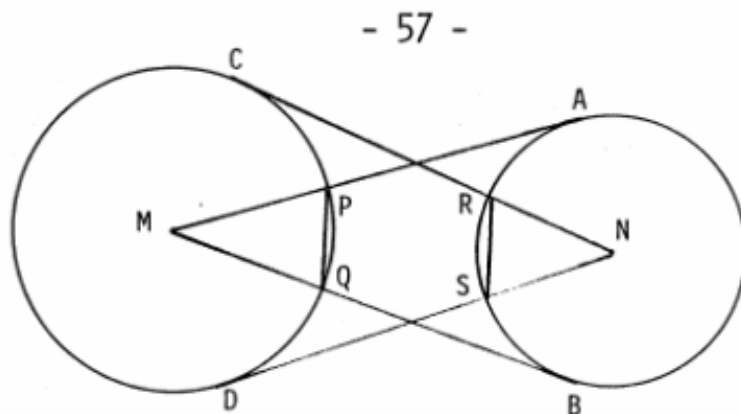
<sup>18</sup> Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach-Ayme, G.G.G. vol. **5**, p. 10-11 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>  
 Fukagawa H., Pedoe D., *Japanese Temple Geometry Problems*, Example 3.5 (1)  
 Ayme J.-L., Le rectangle de Ryokan Maruyama, G.G.G. vol. **4**, p. 10-11 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>



Archive :

63. *Proposed by H.G. Dworschak, Algonquin College.*

From the centres of each of two nonintersecting circles tangents are drawn to the other circle, as shown in the diagram on the following page. Prove that the chords PQ and RS are equal in length. (I have been told that this problem originated with Newton, but have not been able to find the exact reference.)



19

The line of centres MN intersects the chords PQ and RS at their midpoints

F and G. It is clear that

$$\triangle MFP \sim \triangle MAN \quad \text{and} \quad \triangle NGR \sim \triangle NCM.$$

Hence, if  $r_1$  and  $r_2$  denote the radii, as shown in the figure, we have

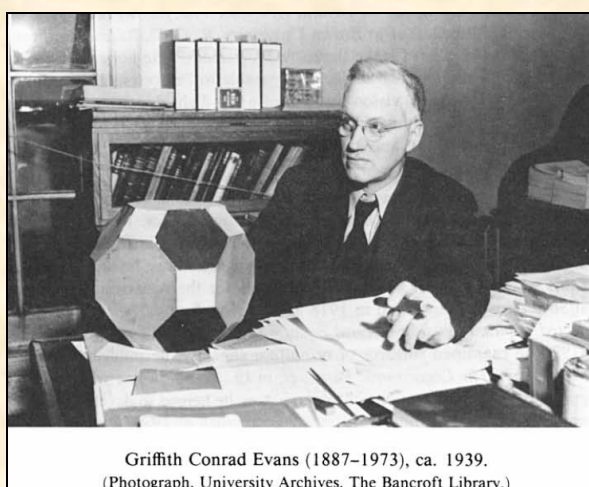
$$\frac{1}{2} PQ = FP = \frac{r_1 r_2}{MN} \quad \text{and} \quad \frac{1}{2} RS = GR = \frac{r_1 r_2}{MN},$$

and so  $PQ = RS$ .

*Also solved by Richard Atlani, Collège Algonquin; G.D. Kaye, Department of National Defence; B. Vanbrughe, Université de Moncton; and the proposer.*

20

Une photo de l'auteur de ce résultat



Griffith Conrad Evans (1887–1973), ca. 1939.  
(Photograph, University Archives, The Bancroft Library.)

21

<sup>19</sup> *Eureka* vol. 1, n° 7 (September 1975) 56-57

<sup>20</sup> Solution : *Eureka* vol. 1, n° 10 (December 1975) 99-100

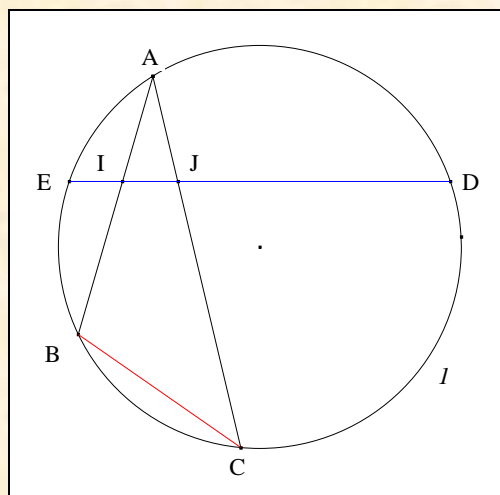
<sup>21</sup> <http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/evans-griffith.pdf>

## QUICKIE 7

Le lemme d'Hiroshi Haruki ou le théorème de Michel Chasles

### VISION

Figure :

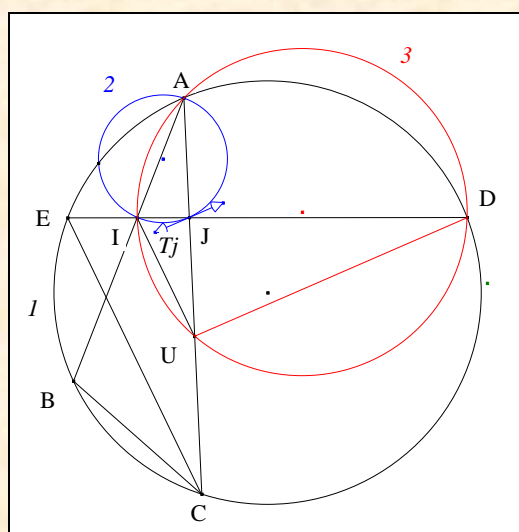


**Traits :**  $I$  un cercle,  
 $E, D$  deux points de  $I$ ,  
 $A$  un point de  $I$ ,  
 $B, C$  deux points de l'arc  $ED$  ne contenant pas  $A$   
 et  $I, J$  les points d'intersection resp. de  $(AB), (AC)$  avec  $[DE]$ .

**Donné :** lorsque  $A$  varie sur l'arc  $ED$  ne contenant pas  $B$ ,  $IE \cdot JD / IJ$  est constant.

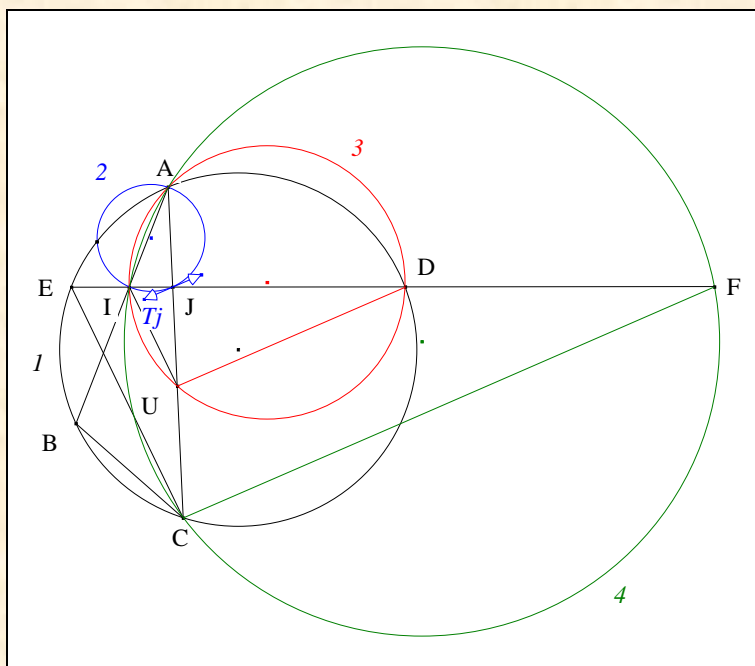
**Commentaire :** le théorème de Reim.

### VISUALISATION



- Notons
 

2	le cercle passant par A, I, J,
3	le cercle passant par A, I, D,
$T_j$	la tangente à 2 en J
et U	le second point d'intersection de (AC) avec 3.
- Les cercles 3 et 1, les points de base A et D, les moniennes (UAC) et (IDE), conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que  $(UI) \parallel (CE)$ .
- Les cercles 2 et 3, les points de base A et I, les moniennes (JAU) et (JID), conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que  $T_j \parallel (UD)$ .



- Notons
 

4	le cercle passant par A, I, C
et F	le second point d'intersection de (ED) avec 4.
- Les cercles 3 et 4, les points de base A et I, les moniennes (UAC) et (DIF), conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que  $(UD) \parallel (CF)$  ;  
par transitivité de la relation  $\parallel$ ,  $T_j \parallel (CF)$ .
- Une chasse de rapports :

* d'après Thalès "Rapports",  * d'où	$\frac{IE}{IJ} = \frac{UC}{UJ} = \frac{DF}{DJ} ;$ $\frac{IE \cdot JD}{IJ} = DF .$
--	---



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que  $\frac{IE.JD}{IJ} = EK$ .

**Note historique :** ce résultat, cité en 1983 par Ross Honsberger <sup>22</sup> dans la revue américaine *The Two-Year College Math. J.*, avait déjà été relaté et utilisé en 1987 par Léon Bankoff <sup>23</sup> dans la revue *Mathematics Magazine* pour démontrer métriquement le théorème du papillon. De plus, il ajoutait que la preuve d'Hiroshi Haruki

*is crisp and concise.*

Ce résultat réapparaît en 2008 dans un article signé par Yaroslav Bezverkhnyev <sup>24</sup> au sein de la revue électronique *Forum Geometricorum*.

### Une courte biographie d'Hiroshi Haruki



Hiroshi Haruki est né au Japon.  
Il obtient son Master of science, puis son Phd à l'université d'Osaka (Japon) où il en deviendra l'un de ses professeurs.  
De 1986 jusqu'à sa retraite en 1986, il enseigne à l'université de Waterloo (Ontario, Canada).  
Il décède le 13 septembre 1997.

### Archive :

Thus Haruki's Lemma is essentially the same as Chasles' Theorem: *If  $A, B, C, D$  are four fixed points of a conic and if  $P$  is a variable point of the conic, then the cross ratio  $P(ABCD)$  is independent of the position of  $P$  on the conic. (See [37].)*

<sup>25</sup>

<sup>22</sup> Honsberger R., The Butterfly problem and other delicacies from the noble art of Euclidean geometry, Part I, *The Two-Year College Math. J.*, **14** (1983) 2-8  
Part I, *The Two-Year College Math. J.*, **14** (1983) 154-158

<sup>23</sup> Bankoff L., The Metamorphosis of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* vol. **60**, **4** (October 1987) 195-210

<sup>24</sup> Bezverkhnyev Y., Haruki's lemma and a Related Locus Problem, *Forum Geometricorum* **8** (2008) 63-72 ;  
<http://forumgeom.fau.edu/>

<sup>25</sup> Bankoff L., The Metamorphosis of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* vol. **60**, **4** (October 1987) 200

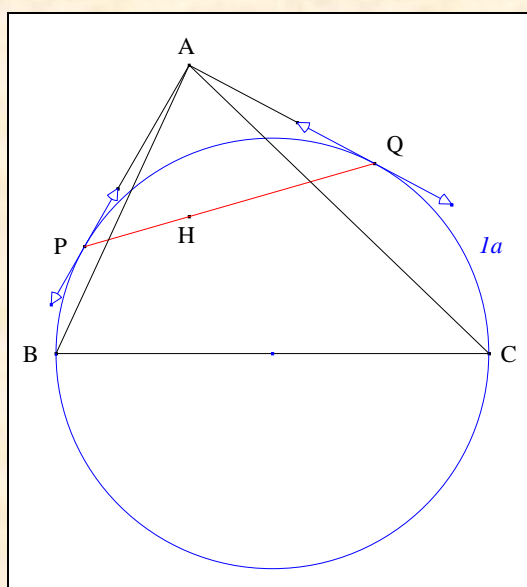


## QUICKIE 8

M.O. China (1996) Day 1 Problem 1

### VISION

Figure :



**Traits :** ABC un triangle,  
H l'orthocentre de ABC,  
Ia le cercle de diamètre [BC]  
et P, Q les points de contact des tangentes à Ia issues de A.

**Donné :** P, Q et H sont alignés. <sup>26</sup>

**Commentaire :** le théorème des croisillons de Philippe de La Hire.

### VISUALISATION

<sup>26</sup>

China vectors, AoPS du 10/05/2007 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=148257>  
Orthocentre is collinear with two tangent points, AoPS du 29/07/2010 ;  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1964606>

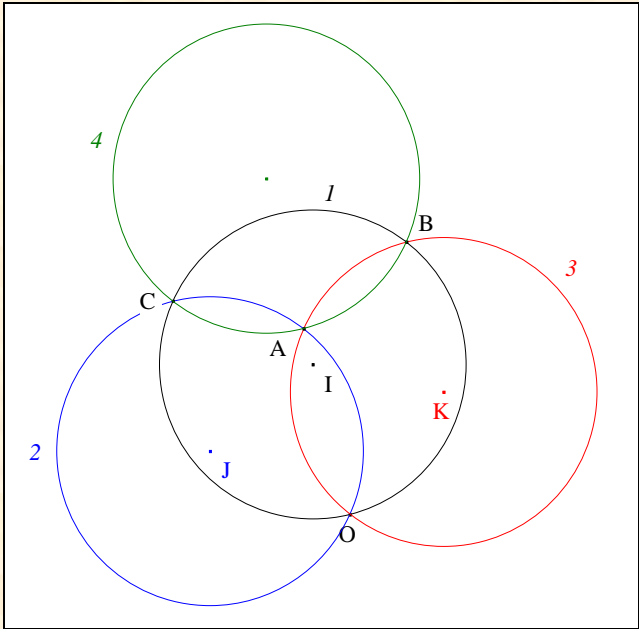


QUICKIE 9

Roger Arthur Johnson, A circle theorem, *American Mathematical Monthly*, vol. **23**, 5 (1916)

VISION

Figure :



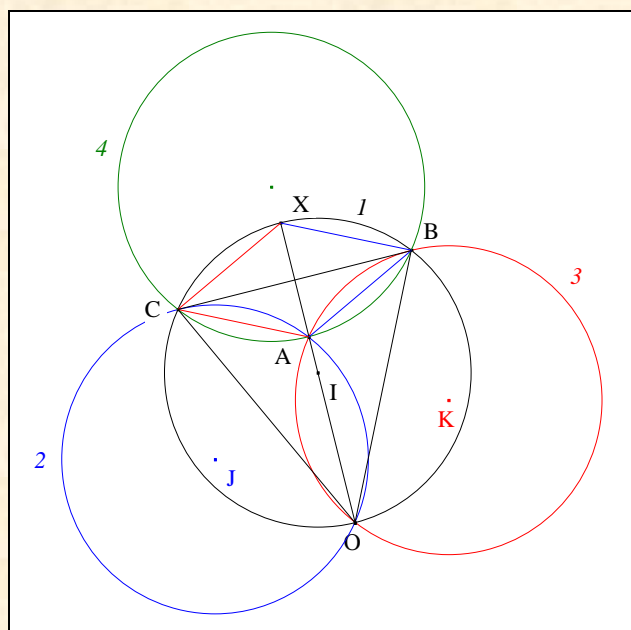
**Traits :** 1, 2, 3           trois cercles égaux et concourants,  
O           le point de concours de 1, 2, 3,  
I, J, K       les centres resp. de 1, 2, 3,  
A, B, C     les seconds points d'intersection resp. de 2 et 3, 3 et 1, 1 et 2  
et       4           le cercle passant par A, B, C.

**Donné :** 1, 2, 3 et 4 sont égaux. <sup>29</sup>

**Commentaire :** les théorèmes d'Auguste Ferdinand Möbius et de Lazare Carnot.

VISUALISATION

<sup>29</sup> Johnson R. A., A circle theorem, *American Mathematical Monthly*, vol. **23**, 5 (1916) 161-162  
Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York (1960) 75



- Notons  $X$  le second point d'intersection de  $(OI)$  avec  $I$ .
- D'après Möbius "Triangle isocèle inscrit" <sup>30</sup> appliqué à
  - \*  $I$  et 2,  $CX = CA$
  - \*  $I$  et 3,  $BX = BA$  ;
 en conséquence,  $(BC)$  est la médiatrice de  $[AX]$ .
- D'après Carnot "Symétrie de l'orthocentre par rapport à un côté",  $A$  est l'orthocentre du triangle  $OBC$ .
- D'après "Les cercles de Carnot",  $I$  et 4 sont égaux.
- **Conclusion :**  $I$ , 2, 3 et 4 sont égaux.

- Scolies :**
- (1)  $O$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$
  - (2) le résultat de R. A. Johnson est aussi connu sous l'appellation du "théorème des quatre cercles", ou "The four coin theorem" ou "les cercles de Johnson" ou encore "The Triquetra Theorem" utilisé par Dana N. Mackensie <sup>31</sup>.
  - (3)  $ABC$  est "le triangle de Johnson".

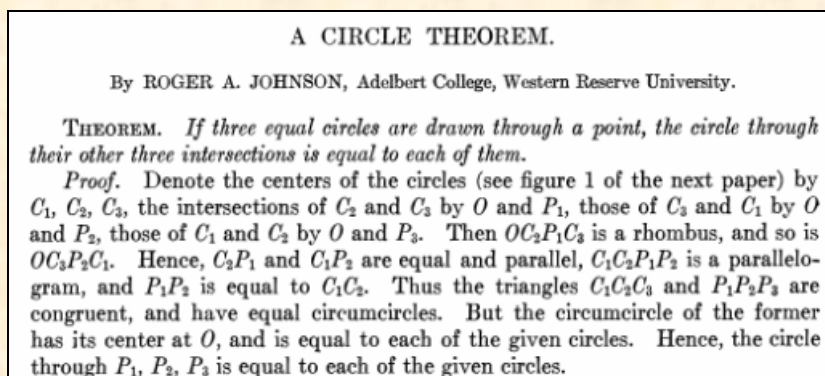
**Note historique :** le théorème des "quatre cercles" a aussi été attribué au roumain Gheorghe Titeica <sup>32</sup>, un contemporain de Johnson et est connu en Roumanie sous le nom du "Problème de Titeica".  
En 1916, le Dr. Arnold Emch de l'université de l'Illinois en donne une autre démonstration en considérant un quadrilatère cyclique.

<sup>30</sup> Ayme J.-L., A propos de deux cercles sécants, G.G.G. vol. 12, p. 21-23 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>  
<sup>31</sup> Mackensie D. N., Triquetras and Porisms, *The College Math. J.*, 23 (March 1992) 118-131

<sup>32</sup> *Mathematical Reviews* 81c:51010

En 1923, les compétitions mathématiques hongroises<sup>33</sup>, initiées le baron Lorand Eötvös, propose cette situation aux finissants des lycées avant leur entrée en faculté. En 1999, les "quatre cercles de Johnson" ont constitué le logo des I.M. O. qui ont eu lieu à Bucarest (Roumanie).

Archive :



34

Cette archive m'a été communiquée gracieusement par le professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie).

<sup>33</sup> Les compétitions Eötvös ont duré de 1894 à 1928 et ont été organisées par le physicien Eötvös qui devint l'année d'ouverture, ministre de l'Éducation.  
Pour commémorer en 1929, le dixième anniversaire de sa mort, le professeur hongrois de l'Université Polytechnique de Budapest, Joseph Kürschak (1864-1933) édita l'ensemble des sujets et leurs solutions officielles sous le nom de *Problems of the Mathematics Contests*; cette édition eut un très grand succès et s'épuisa rapidement. Réédité en 1955, la nouvelle édition prenait en compte les idées ainsi que les solutions alternatives de Kürschak. Face à une très forte demande, *The Mathematical Association of America* les rééditaient en 1961 sous le titre de *Hungarian Problems*.

<sup>34</sup> Johnson R. A., A circle theorem, *American Mathematical Monthly*, vol. **23**, 5 (1916) 161-162