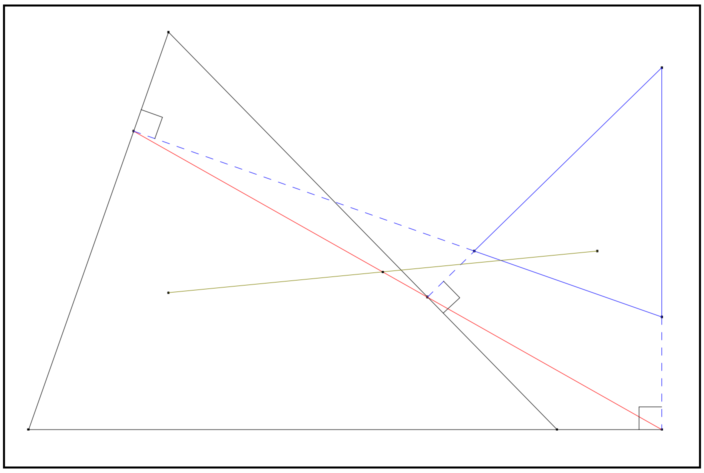
SUR UN AUTRE THÉORÈME

DE

PIERRE SONDAT

UNE PREUVE SIMPLE ET PUREMENT SYNTHÉTIQUE



Jean - Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve entièrement synthétique d'un résultat de Pierre Sondat datant de 1895 accompagnée d'une brève note historique et d'une archive. Cette preuve simple est basée sur une suites de résultats qui conduisent au résultat envisagé. Les figures sont toutes en position générale, toutes les notations se reproduisent figure après figure et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

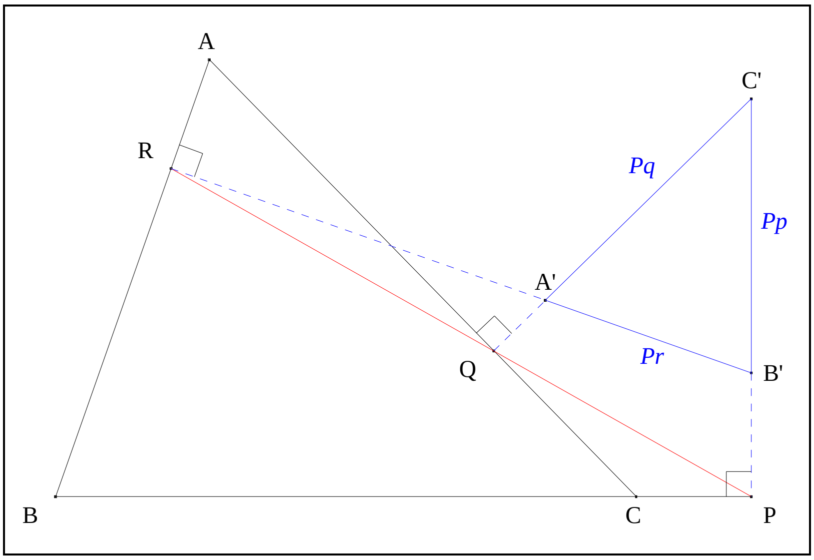
I. Triangle paralogique
II. Une suite de résultats
  1. Le centre de similitude
  2. Le centre de perspective
  3. Le résultat de Vaclav Jérabek
III. Le résultat "élaboré" de Pierre Sondat
IV. Une très courte biographie
V. Annexe
VI. Archive

Remerciements : je tiens à remercier tout particulièrement le professeur Francisco Bellot Rosado, créateur de la Compétition Mathématique Méditerranéenne en 1998, pour son aide précieuse et constante dans la recherche des archives concernant cet article.

I. TRIANGLE PARALOGIQUE

VISION

Figure :



Finition :	ABC	un triangle,
	(PQR)	une ménélienne de ABC,
	*P*p, *P*q, *P*r	trois droites resp. perpendiculaires à (BC), (CA), (AB) resp. en P, Q, R
et	A', B', C'	les points d'intersections resp. de *P*q et *P*r, de *P*r et *P*p, de *P*p et *P*q.

Définition : A'B'C' est "le triangle paralogique de ABC relativement à (PQR)".

Scolies : **(1)** A'B'C' est directement semblable à ABC [1]

(2) A'B'C' est perspectif à ABC (Cf. Annexe 1).

Énoncé traditionnel : aux points d'intersection d'une ménélienne avec les côtés d'un triangle ABC, on élève des perpendiculaires qui déterminent un triangle A'B'C' semblable au triangle donné.

Note historique : selon le géomètre américain Roger Arthur Johnson[2], le concept de triangles paralogiques a été introduit, étudié et généralisé aux cas des isoclines par le suisse Jacob Steiner (1796-1863).

II. UNE SUITE DE RÉSULTATS

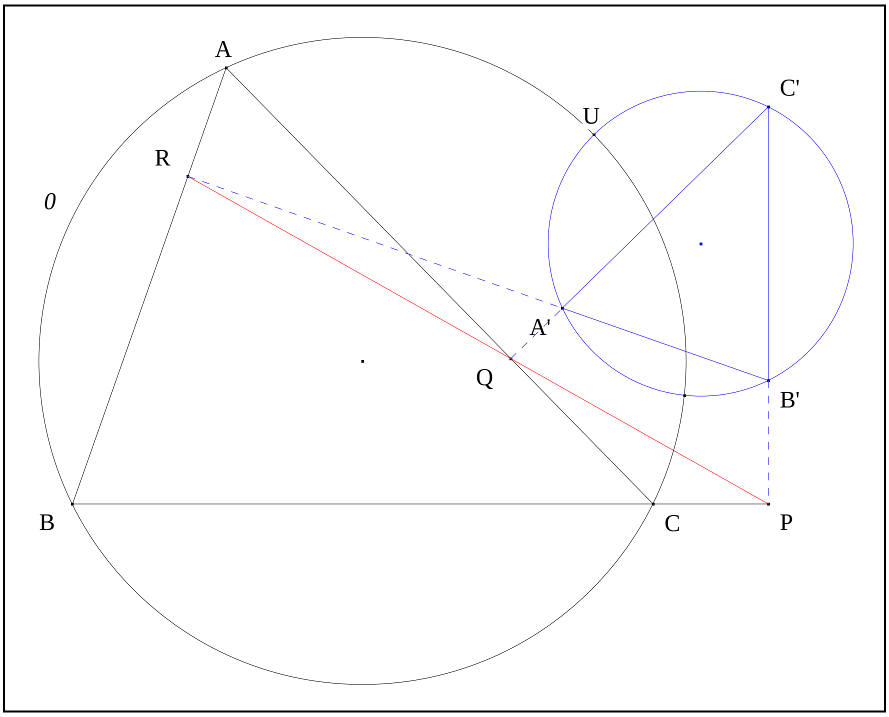
1. Le centre de similitude

[1] La preuve s'appuie sur le théorème "angles à côtés perpendiculaires".

[2] Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960. (from 1929 original) p. 258-259.

VISION

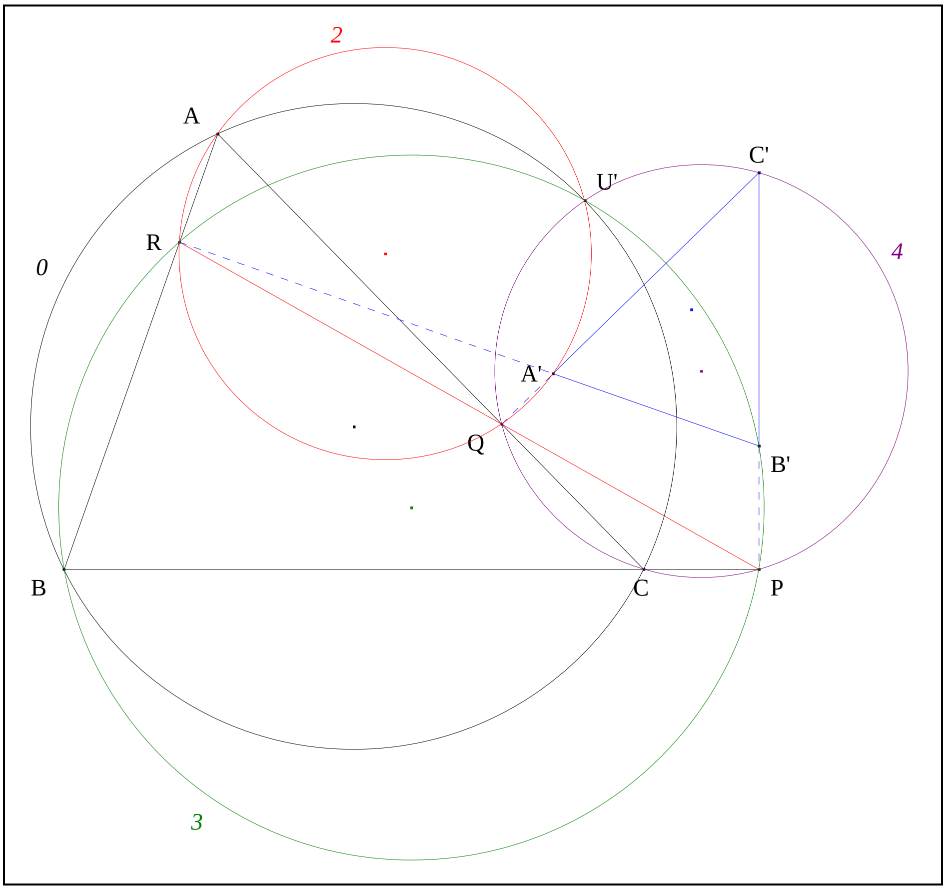
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	(PQR)	une ménélienne de ABC,
	A'B'C'	le triangle paralogique de ABC relativement à (PQR),
	1	le cercle circonscrit à A'B'C'
et	U	le centre de similitude de A'B'C' et ABC.

Donné : U est sur *0* et *1*.

VISUALISATION

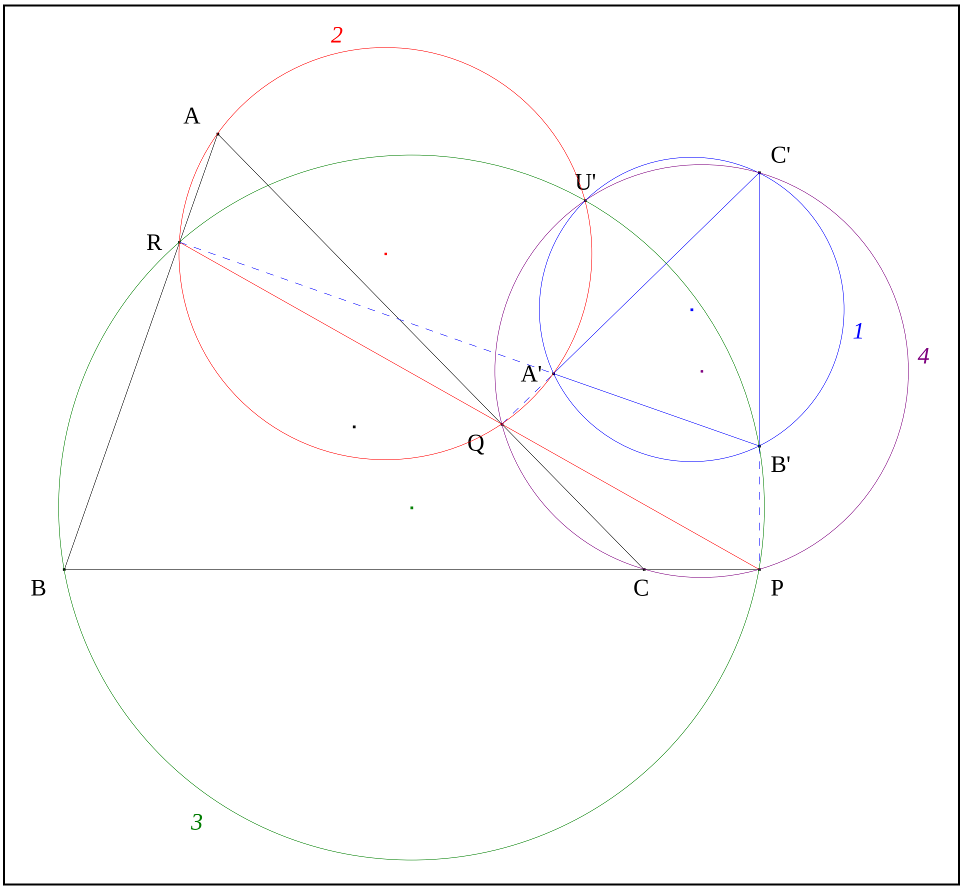


- Notons *2*, *3*, *4* les cercles circonscrits resp. aux triangles QA'R, RB'P, PC'Q.

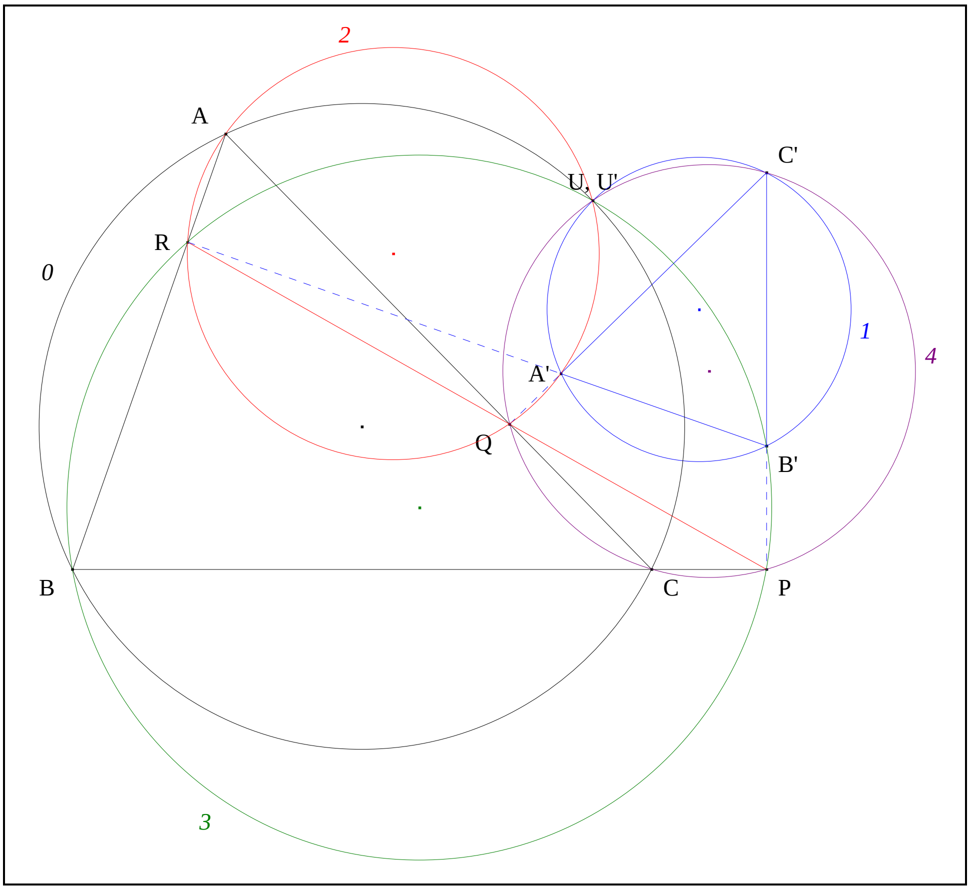
- D'après "Le point de Miquel-Wallace" (C. Annexe 2) appliqué à ABC avec la ménélienne (PQR), *0*, *2*, *3* et *4* sont concourants.

- Notons U' ce point de concours.

- **Scolie :** U' est sur *0*.



- D'après "Le point de Miquel-Wallace" (C. Annexe 2) appliqué à A'B'C' avec la ménélienne (PQR), *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants ;
  en conséquence, U' est sur *1*.



* Par construction, nous savons que U' est le centre de similitude de A'B'C' et ABC ;
  en conséquence, U' et U sont confondus.

* **Conclusion :** U est sur *0* et *1*.

Note historique : le professeur B. Sollertinski[3] a énoncé le résultat suivant

si deux triangles sont, à la fois, directement semblables et perspectifs,
leur centre de similitude est l'un des points d'intersection des cercles circonscrits.

Nous remarquons que par une circonstance toute exceptionnelle, la publication de la solution a précédé celle de l'énoncé.

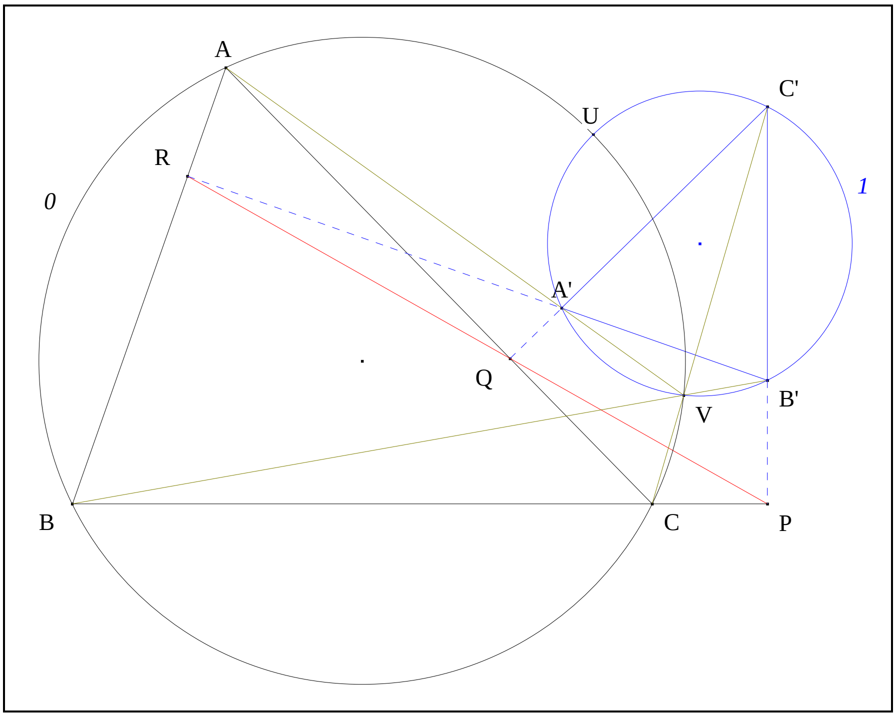
2. Le centre de perspective

VISION

Figure :

---

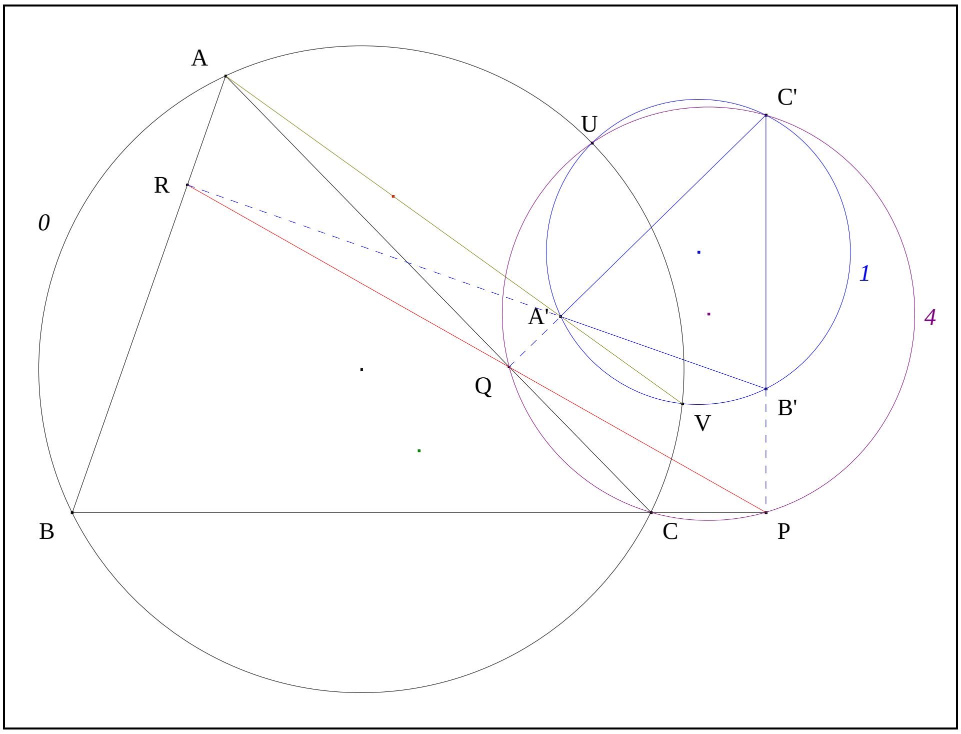
[3] Sollertinski B., *Journal de Mathématiques Élémentaires* 91, n° 478 ;
solution de Sollertinski B., *Journal de Mathématiques Élémentaires* 91, p. 287.



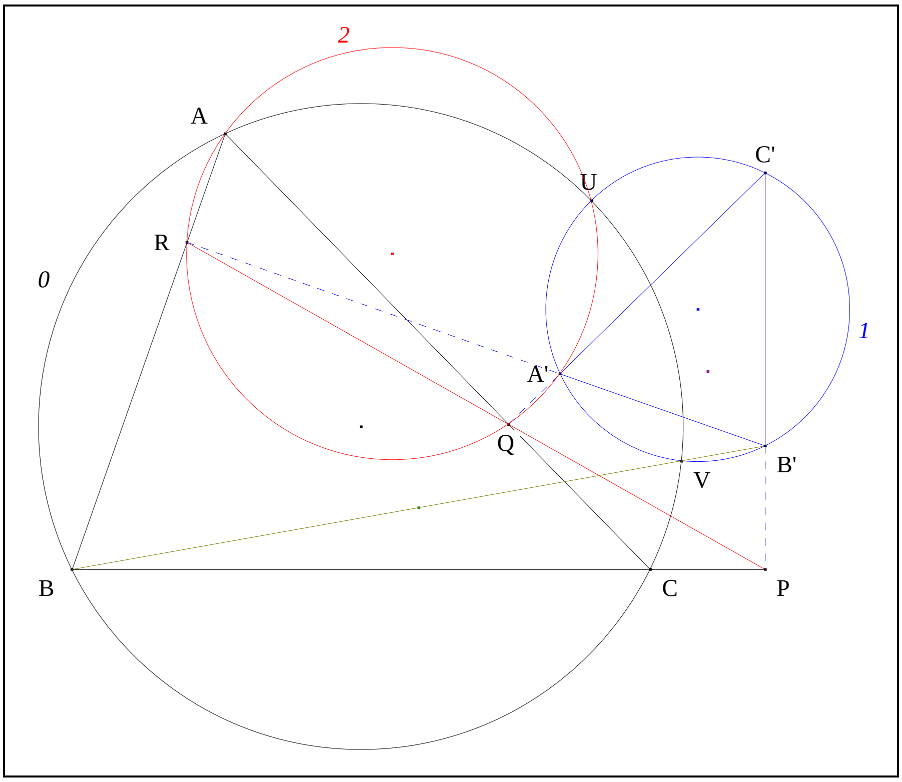
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
V le second point d'intersection de *0* et *1*.

Donné : V est le centre de perspective de A'B'C' et ABC.

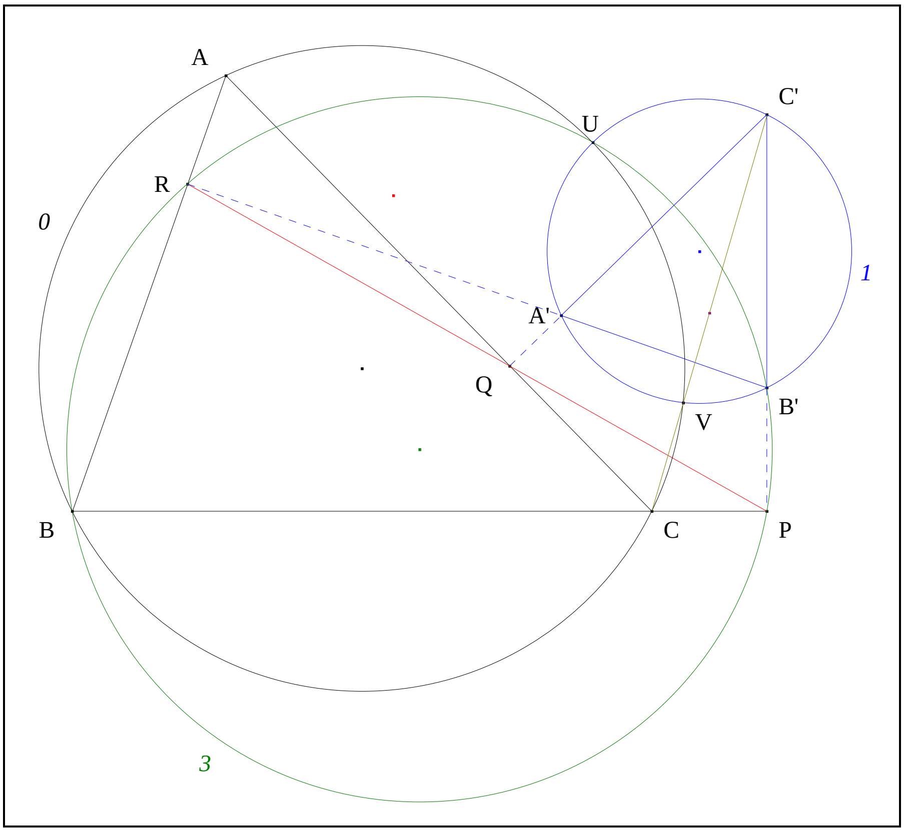
VISUALISATION



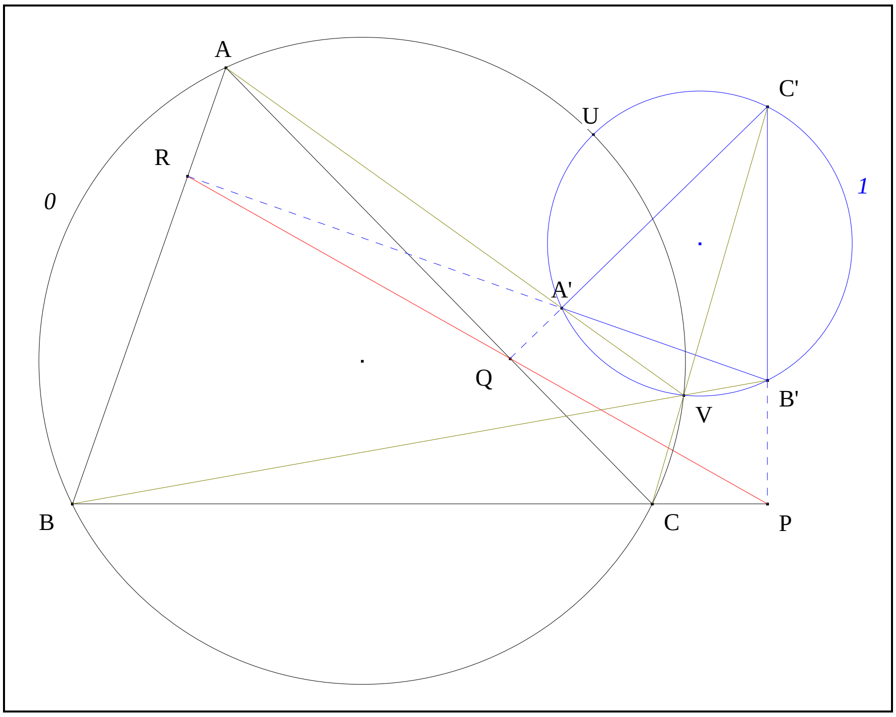
- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 3)
  appliqué aux cercles *0*, *4* et *1* concourants en U, A, V et A' sont alignés.



- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 3) appliqué aux cercles *0*, *2* et *1* concourants en U, B, V et B' sont alignés.



- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 3) appliqué aux cercles *0*, *3* et *1* concourants en U, C, V et C' sont alignés.



- **Conclusion :** par définition, V est le centre de perspective de A'B'C' et ABC.

Note historique : le professeur B. Sollertinski[4] a énoncé le résultat suivant

si deux triangles sont, à la fois, directement semblables et perspectifs,
leur centre de perspective est l'un des points d'intersection des cercles circonscrits.

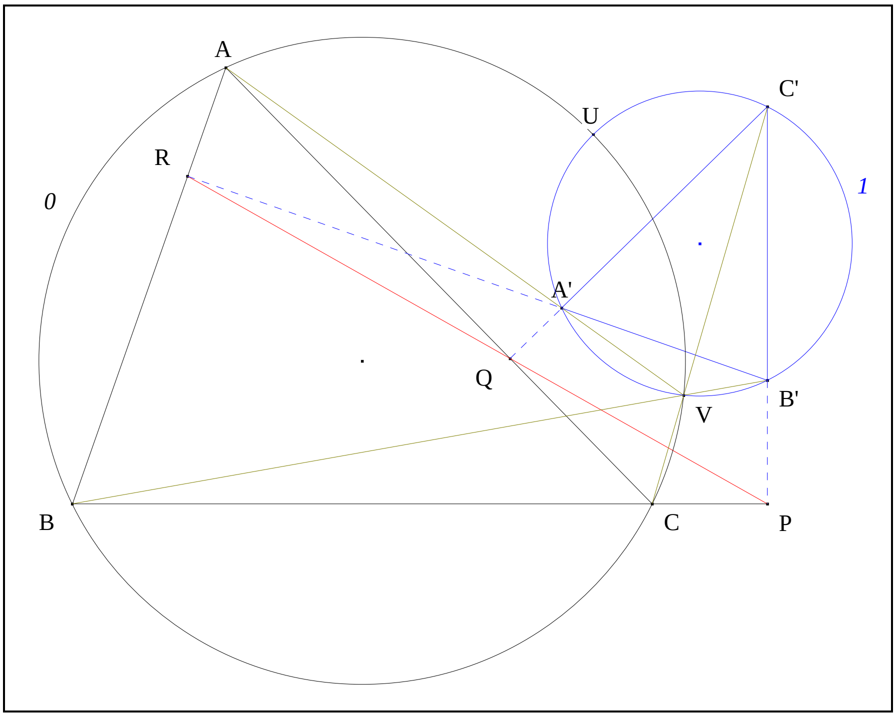
Nous remarquons que par une circonstance tout exceptionnelle, la publication de la solution a précédé celle de l'énoncé.

3. Le résultat de Vaclav Jérabek

VISION

Figure :

[4] Sollertinski B., *Journal de Mathématiques Élémentaires* 91, n° 478 ;
solution de Sollertinski B., *Journal de Mathématiques Élémentaires* 91, p. 287.



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : *1* est orthogonal à *0* [5].

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Altshiller "Deux cordes orthogonales" (Cf. Annexe 4), *1* est orthogonal à *0*.

Énoncé traditionnel : *si,* les côtés correspondants de deux triangles perspectifs sont perpendiculaires deux à deux
alors, les cercles circonscrits à ces deux triangles sont orthogonaux.

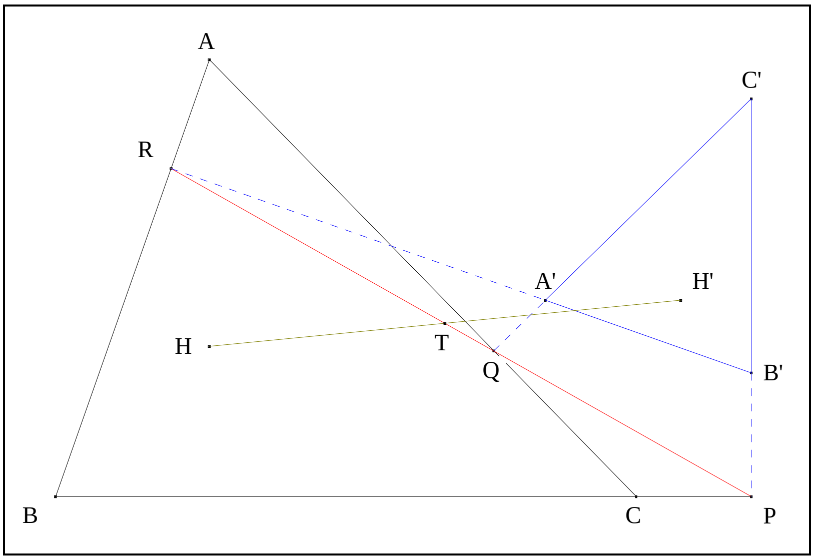
Énoncé complet : aux points d'intersection d'une ménélienne avec les côtés d'un triangle ABC, on élève des perpendiculaires qui déterminent un triangle A'B'C' semblable au triangle donné. Les deux triangles sont en perspective; l'un des points d'intersection de leur cercle circonscrit est leur centre de similitude, l'autre est le centre de perspective. Les deux cercles sont orthogonaux.

III. LE RÉSULTAT "ÉLABORÉ" DE PIERRE SONDAT

VISION

Figure :

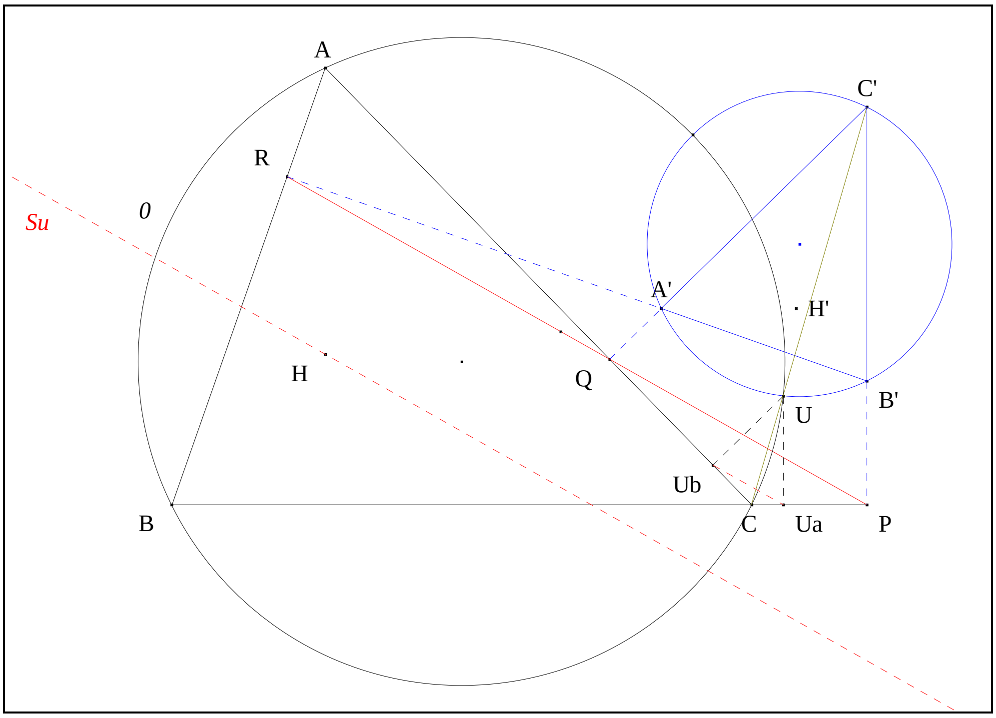
[5] Jérabek V. (1845-1931), *Mathesis* (1896) 81-83.



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
H l'orthocentre de ABC,
H' l'orthocentre de A'B'C'
et T le point d'intersection de (HH') et (PQR).

Donné : T est le milieu de [HH'] [6].

VISUALISATION



- Notons Ua, Ub les pieds des perpendiculaires abaissées de U resp. sur (BC), (CA).

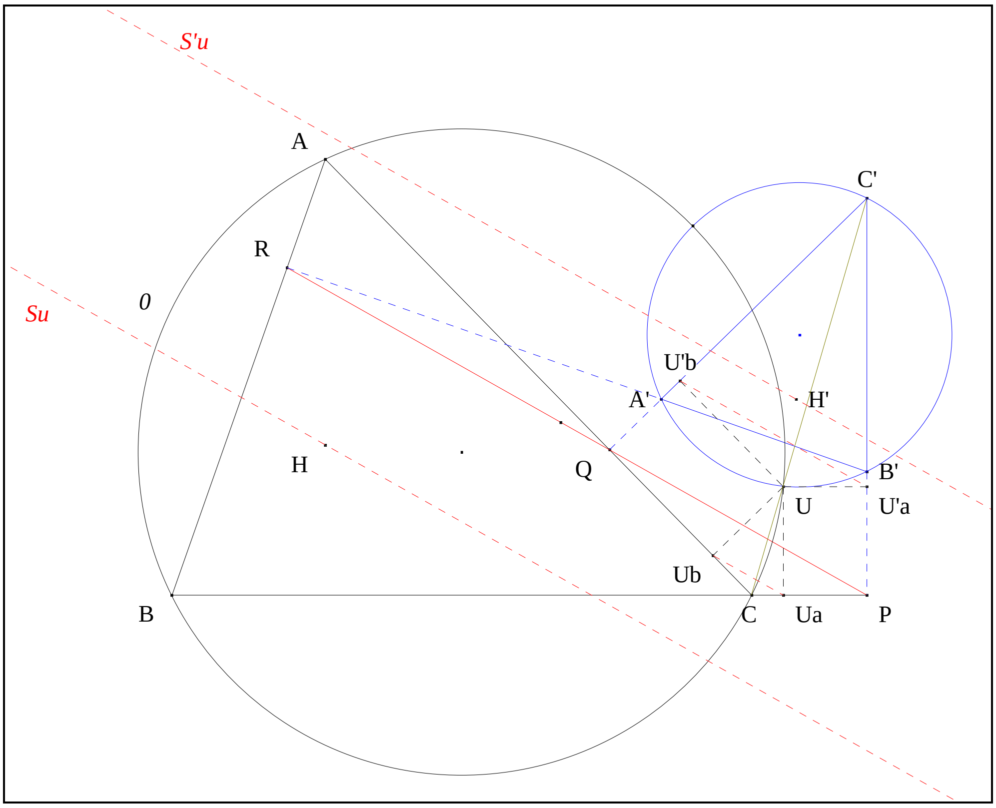
- **Scolies :** **(1)** (UaUb) est la U-droite de Simson relativement à ABC

---

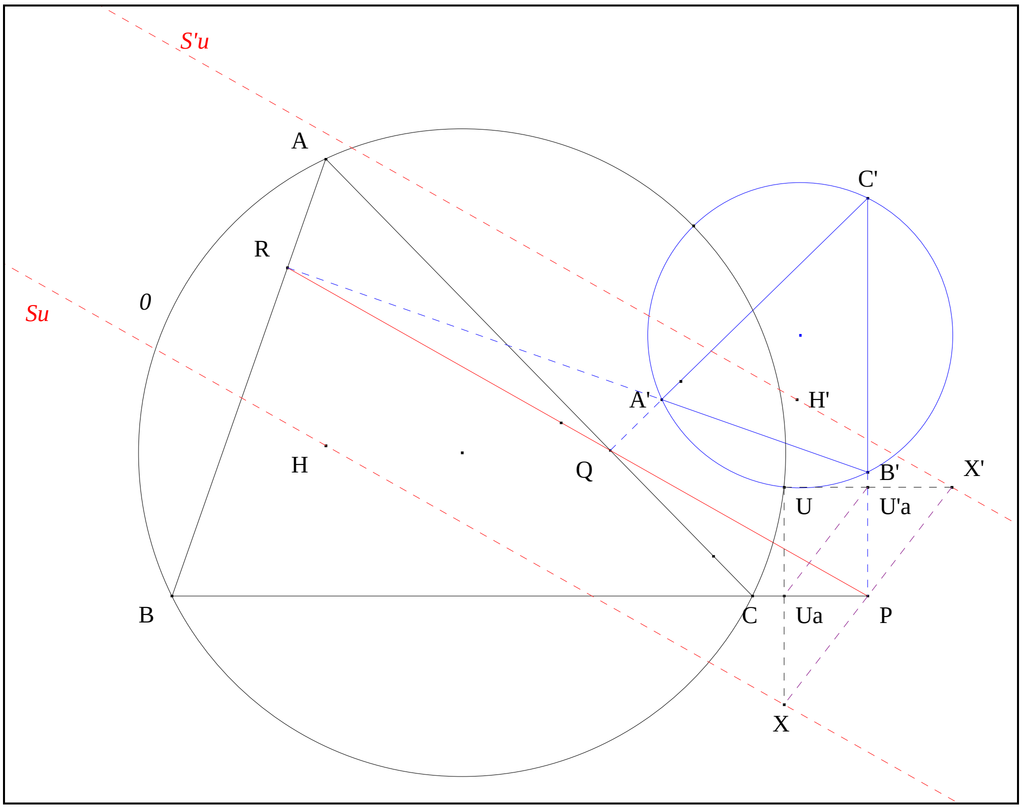
[6] Sondat P., Question 38, *L'intermédiaire des mathématiciens* (1894) 10.
Sondat P., Question 592, *L'intermédiaire des mathématiciens* tome II, (1895) 202.

(2) les triangles C'PQ et UUaUb sont perspectifs de centre C.

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 5), (PQ) // (UaUb).
- Notons *S*u la U-droite de Steiner de ABC.
- D'après "La droite de Steiner" (Cf. Annexe 6), **(1)** *S*u passe par H
  (2) (UaUb) // *S*u.
- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation //, (PQ) // *S*u.



- Notons *S*'u la U-droite de Steiner de A'B'C'.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (PQ) // *S*'u i.e. *S*'u // (PQ).
- **Conclusion partielle :** *S*u, *S*'u et (PQR) sont parallèles entre elles.



- Notons X, X' les symétriques de U resp. par rapport à (BC), (B'C').

- **Scolies :** **(1)** X est sur *S*u
  (2) X' est sur *S'*u.

- Le quadrilatère PXUaU'a ayant deux côtés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (PX) // (UaU'a) et PX = UaU'a.

- Le quadrilatère PX'U'aUa ayant deux côtés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (UaU'a) // (PX') et UaU'a = PX' ;
  par transitivité de la relation //, (PX) // (PX') et PX= PX'
  d'après le postulat d'Euclide, (PX) = (PX') ;
  il s'en suit que P est le milieu de [XX'].

- Par définition, (PQR) est l'axe médian de la bande de frontières *S*u et *S'*u.

- **Conclusion :** d'après l'axiome IIIb, T est le milieu de [HH'].

Énoncé traditionnel : *si*, les côtés correspondants de deux triangles perspectifs sont perpendiculaires deux à deux
alors, l'axe de perspective passe par le milieu du segment joignant les orthocentres de ces deux triangles

Note historique : ce résultat de Pierre Sondat datant de 1894 a été qualifié "d'élaboré" par Roger Arthur Johnson[7]. Il a été résolu l'année suivante par Romuald Witwinski[8] professeur à l'École Militaire du Génie (Varsovie, Pologne), par l'Ingénieur au corps des Ponts et

[7] Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960. (from 1929 original) p. 259.
[8] Witwinski R., *L'intermédiaire des mathématiciens*, (1) 2 (1895) 202.

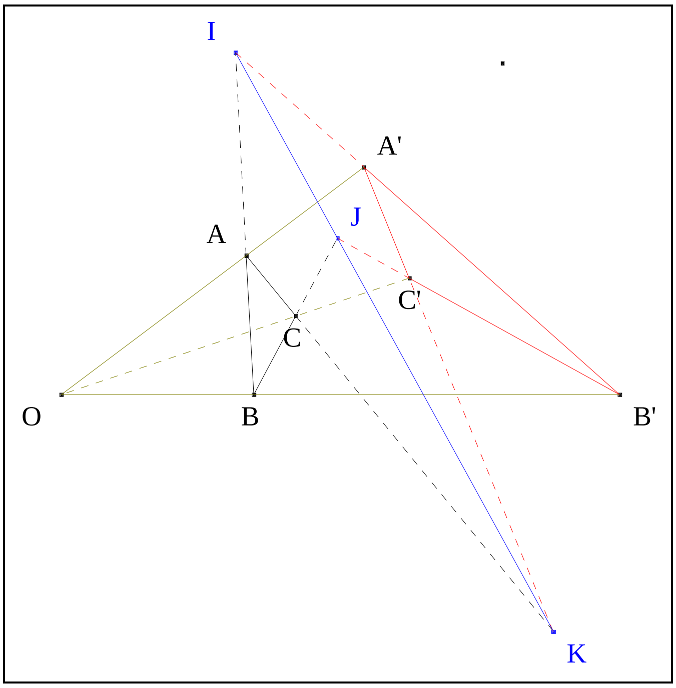
Chaussées E. Harens, par L. Meurice et par Joseph Neuberg[9]. En 1896, Vaclav Jerabek[10] de Brünn (actuellement Brno, république Tchèque) propose une nouvelle preuve. La démonstration de Witwinski est reproduite en 1925 par Neuberg[11] dans *Mathesis*.
Ce résultat de Sondat a été signalé en 1906 par l'historien allemand Max Simon[12], puis rappelé en 2003 par Darij Grinberg[13], proposé en 2009 sur le site *Mathlinks* [14] et résolu par Vladimir Zajic[15] plus connu sous le pseudonyme de "Yetti".

IV. UNE TRÈS COURTE BIOGRAPHIE

Pierre Sondat a été élève au collège d'Annecy, puis professeur au lycée de cette même ville d'Annecy (France) et est connu pour avoir publiés quelques articles remarquables dans les *Nouvelles Annales* de 1875 à 1880.

V. ANNEXE

1. Le théorème des deux triangles



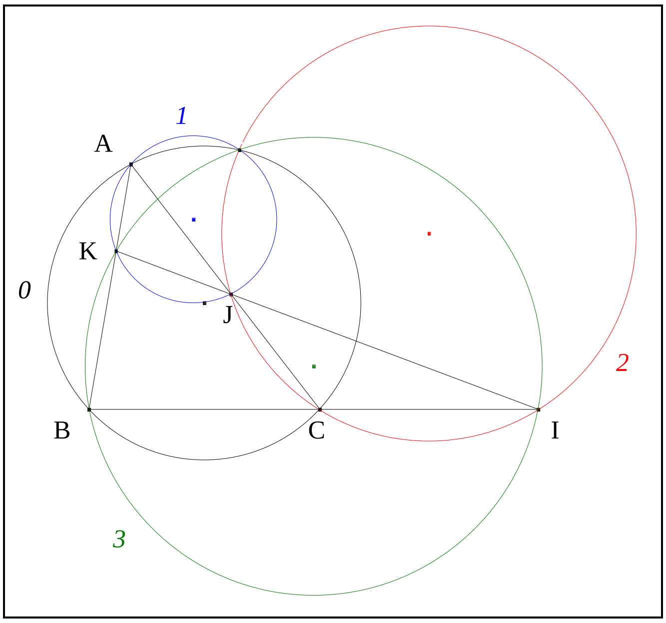
Hypothèses : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
O le point de concours de (AA') et (BB'),

[9] Harens E., Meurice L., Neuberg J., Démonstrations géométriques d'un théorème de Sondat, *Mathesis* 15 (1895) 265-267.
[10] Jerabek V., Sur les triangles à la fois semblables et homologiques, *Mathesis* (1896) 81-83.
[11] Neuberg J., Sur un théorème de P. Sondat, *Mathesis* 39 (1925) 371-371.
[12] Simon M., *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert*, Leipzig, Teubner (1906) 172.
[13] Grinberg D., Neuberg in JFM II, Message *Hyacinthos* # 8116 du 03/10/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/8116.
[14] Sondat' theorem, *Mathlinks* du 25/02/2009 ;http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=260799.
[15] Yetti, An old result but very hard, *Mathlinks* du 14/11/2007 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=160490.

et   I, J, K   le point d'intersection de (AB) et (A'B'), de (BC) et (B'C'), de (CA) et (C'A').

Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.

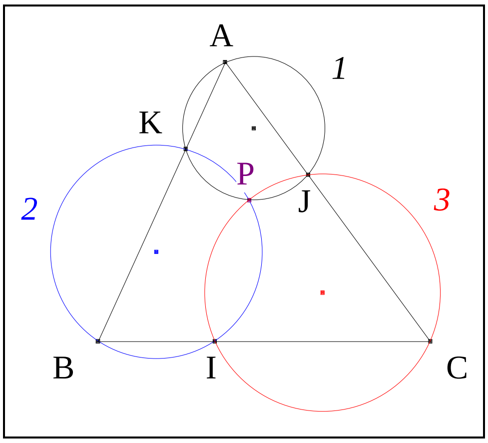
2. Le point de Miquel-Wallace[16]



Traits : ABC un triangle,
I, J, K trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB),
0 le cercle circonscrit à ABC,
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

Donné : I, J et K sont alignés *si, et seulement si,* *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

3. Le théorème du pivot[17]



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles sécants deux à deux,
K, P les points d'intersection de *1* et *2*,
I l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
J l'un des points d'intersection de *3* et *1*,

---

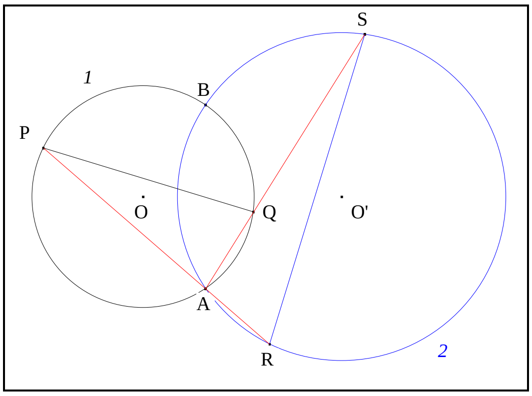
16 Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.

17 Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.

	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

4. Deux cordes orthogonales

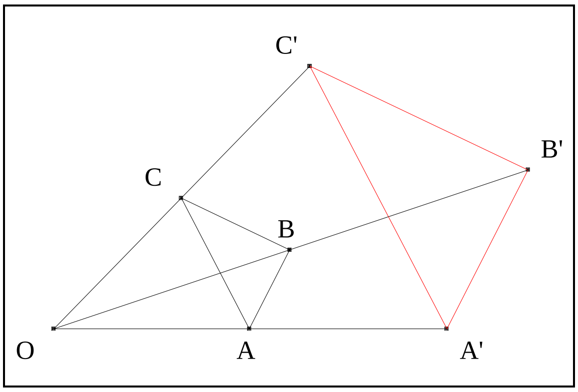


Traits :

	1, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres de *1*, de *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	[PQ]	une corde de *1*,
et	R, S	les seconds points d'intersection de (PA), (PB) avec *2*.

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux *si, et seulement si,* [PQ] et [RS] sont perpendiculaires.

5. Le théorème faible de Desargues



Hypothèses :

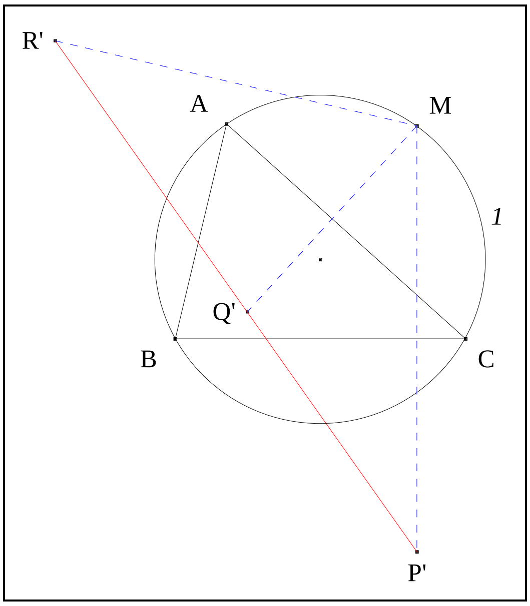
	ABC	un triangle,		
et	A'B'C'	un triangle tel que	(1)	(AA') et (BB') soient concourantes en O
			(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
			(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

6. La droite de Steiner[18]

---

[18] Steiner J..



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	1	le cercle circonscrit à ABC,
	M	un point,
et	P', Q', R'	les symétriques de M resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : M est sur *1* *si, et seulement si*, P', Q' et R' sont alignés.

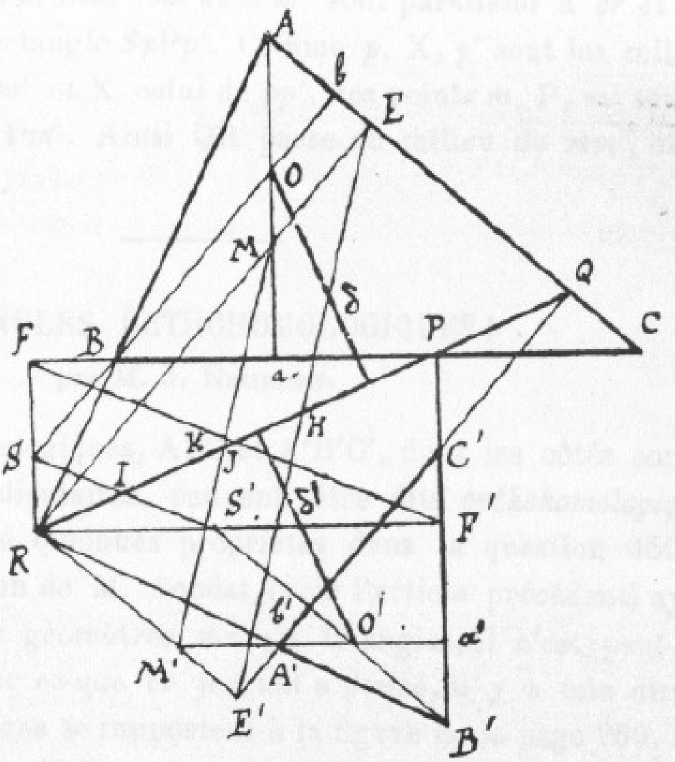
VI. ARCHIVES

DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UN THÉORÈME
de M. Sondat;

I. *Démonstration* de M. E. Haerens, Ingénieur au corps des Ponts et Chaussées, détaché à l'École du Génie civil de Gand. Dans la question 592 de l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1895, t. II, p. 202), M. P. Sondat demande une démonstration géométrique du théorème suivant :

« Si deux triangles homologiques ABC, A′B′C′ ont leurs côtés perpen-
« diculaires, l'axe d'homologie divise en deux parties égales la distance
« des deux orthocentres. »

Soient P, Q, R les points où l'axe d'homologie coupe respectivement les côtés des deux triangles et O, O′ les deux orthocentres. La question revient évidemment à démontrer que les orthocentres sont à égale distance de la transversale PQR.



Du point R abaissons les perpendiculaires RE, RE′ sur les côtés AC, A′C′ des triangles ; elles seront respectivement parallèles aux hauteurs correspondantes Bb, B′b'. De même, abaissons sur les côtés BC, B′C′ les perpendiculaires RF, RF′ lesquelles seront respectivement parallèles aux hauteurs correspondantes Aa, A′a'. Désignons par M, S les points de rencontre des hauteurs Aa, Bb avec les perpendiculaires RE, RF et par M′, S′ les points correspondants dans le second triangle.

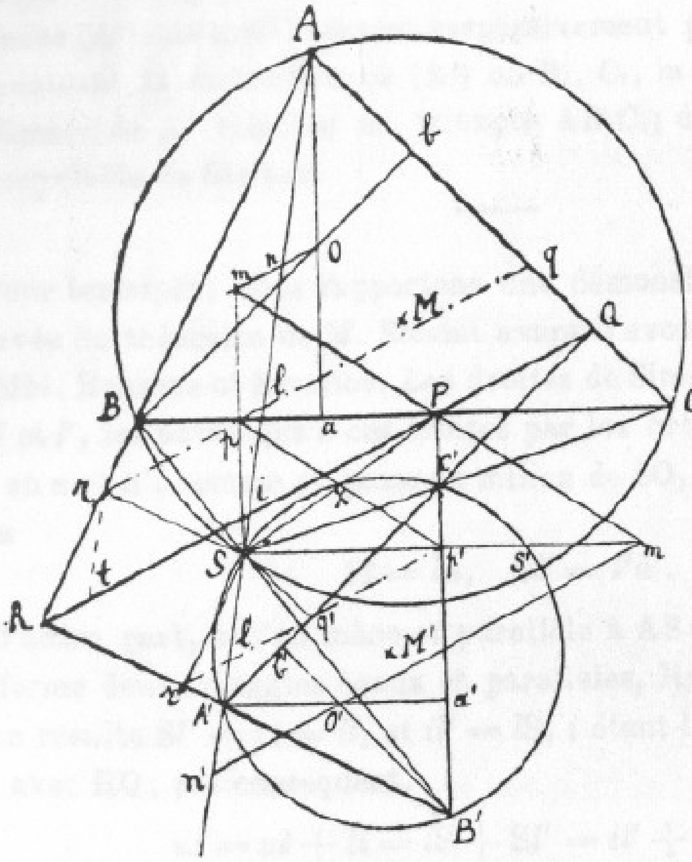
Les triangles RAM, RA′M′ sont semblables comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires et il en est de même, et pour la même raison, des triangles AME, A′M′E′ ; on aura donc la relation

$$\frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{RM'}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A'M'}} = \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{M'E'}}.$$

Conséquemment, les droites EE′, MM′ sont parallèles entre elles. On en conclut que la diagonale RQ du rectangle REQE′, coupant la seconde diagonale EE′ en deux parties égales, coupera également la droite MM′ en deux parties égales. Donc les points M et M′ sont à égale distance de la transversale PQR (Nous ne traçons pas ces distances afin de ne pas surcharger la figure).

On démontre d'une manière toute semblable que les deux points S et S′ sont à égale distance de la transversale PQR (Il suffit de considérer les deux groupes de triangles semblables RSB, RS′B′ et RBF, RB′F′, et le rectangle RFPF′).

Or, la distance du point O à la transversale PQR est égale à la somme des distances des deux points M et S à la même transversale ; en effet, la figure RSOM est un parallélogramme. De même, la distance du point O′ à la droite PQR est égale à la somme des distances des points M′, S′ à la même droite ; en effet, la figure RS′O′M′ est aussi un parallélogramme. Donc, les deux sommes sont égales puisque les termes qui les composent sont respectivement égaux. C.Q.F.D.



II. *Démonstration par* M. Meurice. Une transversale quelconque coupe les côtés du triangle ABC aux points P, Q, R. Les perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés correspondants forment un triangle A′B′C′. Il faut démontrer que la droite QR passe au milieu de la distance des orthocentres O, O′ des triangles ABC, A′B′C′.

Les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point S. Si la transversale QR se déplace parallèlement à elle-même, les points

A′, B′, C′ décrivent des droites passant respectivement par A, B, C; donc le triangle A′B′C′ reste inscrit à trois droites fixes SA, SB, SC. Les perpendiculaires Sp, Sq, Sr abaissées de S sur BC, CA, AB sont les directions des côtés d'un triangle A′B′C′ qui se réduit au point S; on en conclut que leurs pieds p, q, r sont en ligne droite et que S appartient à la circonférence ABC. A cause du rôle symétrique des deux triangles ABC, A′B′C′, S est aussi sur la circonférence circonscrite au triangle A′B′C′ et ses projections p', q', r' sur B′C′, C′A′, A′B sont sur une droite parallèle à QR (*).

D'après un théorème connu les droites qr, $q'r'$ passent respectivement au milieu de SO et de SO′. Donc, si on prolonge Sp de $pm = Sp$ et Sp' de $p'm' = Sp'$, les droites Om et $O'm'$ sont parallèles à qr et QR. Soit X le centre du rectangle $SpPp'$. Comme p, X, p' sont les milieux des droites Sm, SP, Sm' et X celui de pp', les points m, P, m' sont en ligne droite et $mP = Pm'$. Ainsi QR passe au milieu de mm', et par suite au milieu de OO′.