COLLECTION MATHÉMATIQUE

AUTOUR

DE

TROIS CERCLES COAXIAUX

À

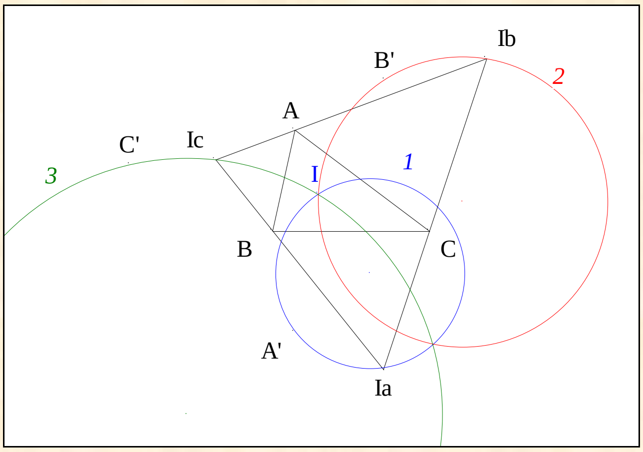
POINTS DE BASE

†

Jean-Louis AYME [1]

III.

LA TECHNIQUE DU SECOND POINT DE BASE



Résumé. Cette *Collection* présente différentes techniques permettant de montrer que trois cercles sont coaxiaux à points de base. Chaque technique relate plusieurs situations qui s'appuient sur un résultat suivi d'applications directes, puis d'exemples variés glanés par l'auteur au cours de ses lectures.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This *Collection* presents various techniques to show that three circles are coaxial with two basis points. Each technique describes several situations that rely on a result followed by direct applications, and varied examples gleaned by the author during his readings.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan indien, France), le 29/08/2015 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

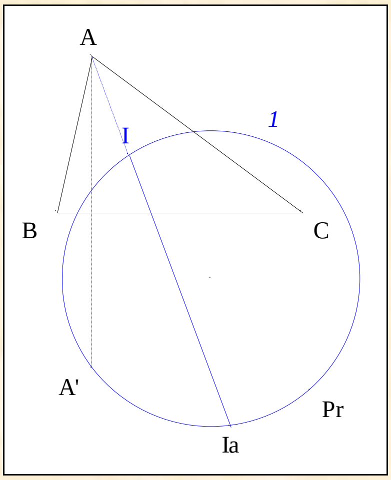
Sommaire

RÉCAPITULATION

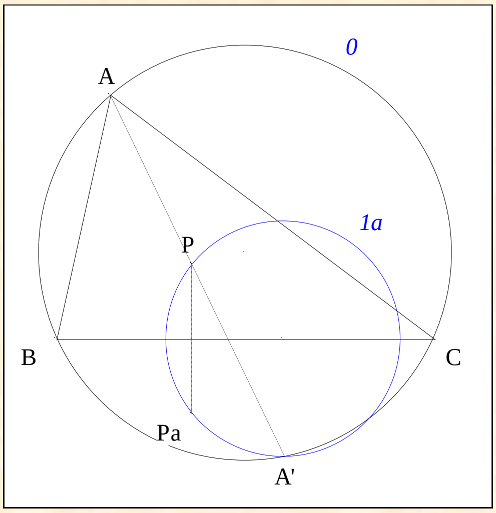
EN

IMAGES

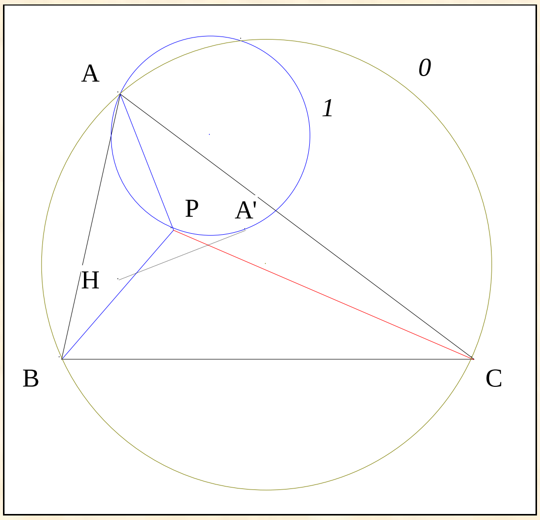
DES QUATRE SITUATIONS



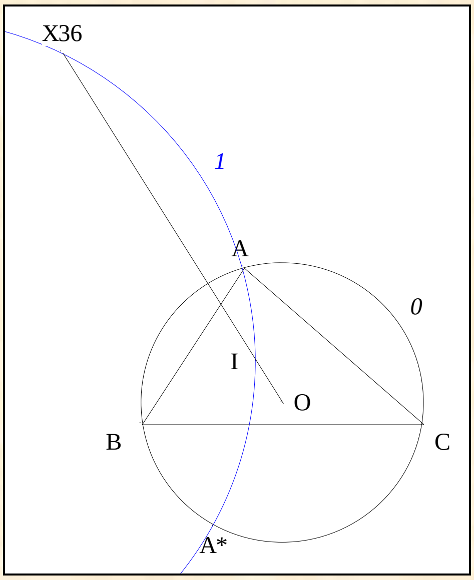
A.



B.



C.



D.

III. TECHNIQUE

DU

SECOND POINT DE BASE

Commentaire : connaissant un point de base, cette technique revient à en chercher le second.

A. TRIANGLE SYMÉTRIQUE

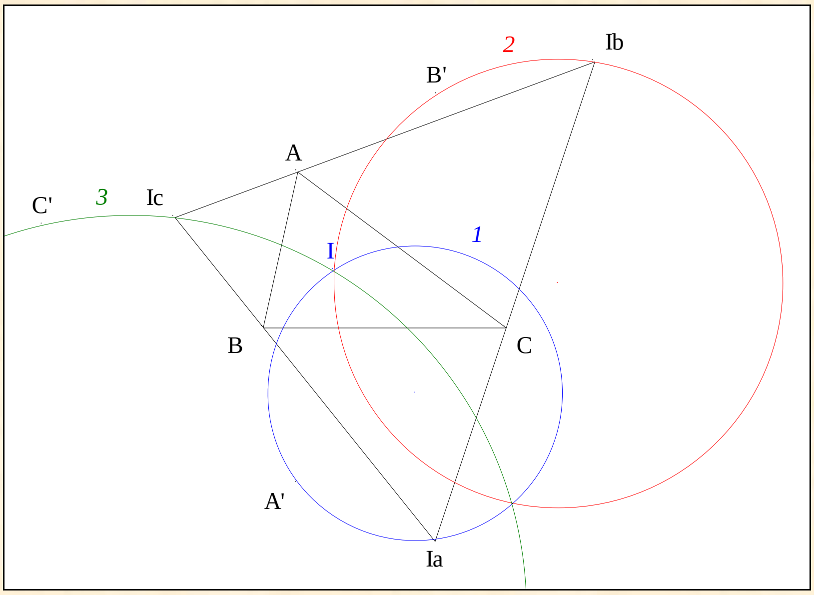
ET

CORDES DE MENTION

1. Le résultat d'un anonyme

VISION

Figure :



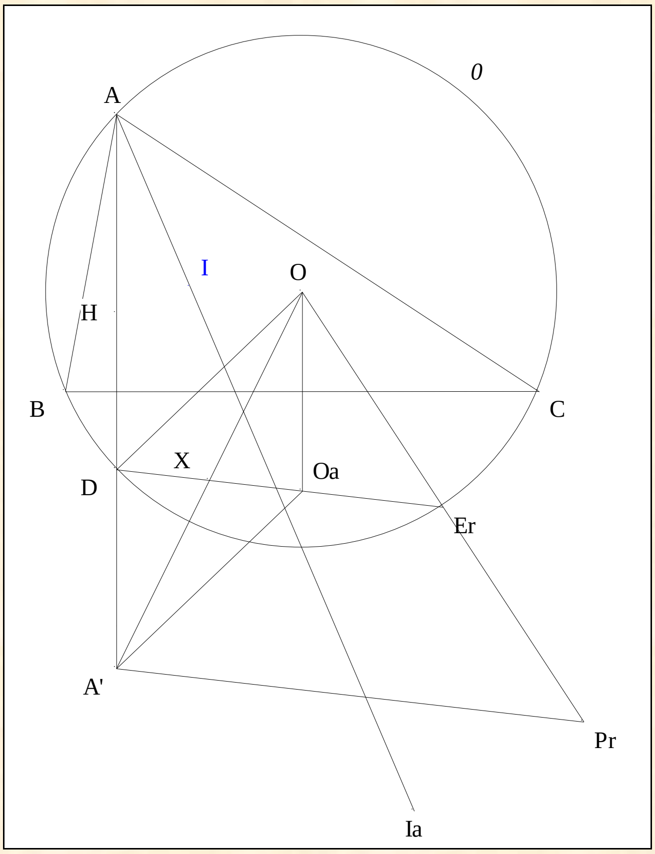
Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle symétrique de ABC,
IaIbIc le triangle excentral de ABC
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles A'IaI, B'IbI, C'IcI.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [2]

[2] Coaxal circles again ?, AoPs du 07/12/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616652
Coaxal circles again…, AoPS du 07/12/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616675

Commentaire : [IIa], [IIb], [IIc] sont les A, B, C-cordes de Mention.

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  O le centre de *0*,
  Oa le symétrique de O par rapport à (BC),
  H l'orthocentre de ABC,
  D le symétrique de H par rapport à (BC),
  X le point d'intersection de (OA') et (DOa),
  Er l'antipoint d'Euler [3] de ABC
  et Pr le point de Parry [4] de ABC ;

- **Scolies :** **(1)** Er est le milieu de [OPr]

  (2) D, X, Oa et Er sont alignés.

- Une chasse segmentaire :

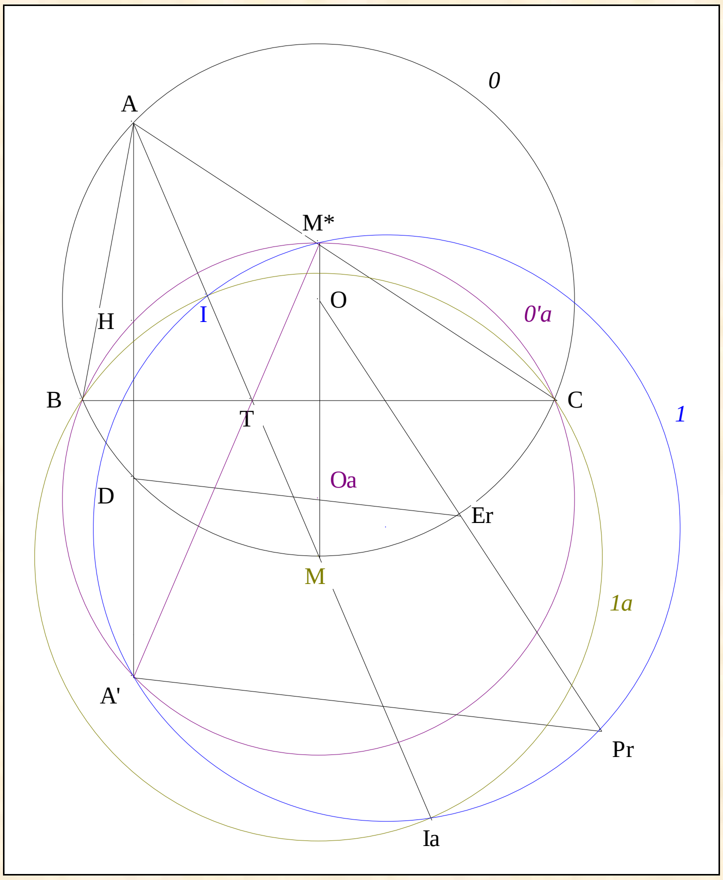
  * d'après Carnot, OOa = AH et (OOa) // (AH))
  * par hypothèse, AH = A'D et (AH) // (A'D)
  * par transitivité de = et //, OOa = A'D et (OOa) // (A'D).
  * en conséquence, le quadrilatère ODA'Oa étant un parallélogramme, X est le milieu de [OA'].

---

3 Ayme J.-L., Euler reflexion point ou l'antipoint d'Euler, G.G.G. vol. **25** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

4 Ayme J.-L., Symétrique d'une droite par rapport aux côtés d'un triangle, G.G.G. vol. **17**, p. 25-27 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle OA'Pr, (DEr) // (A'Er).



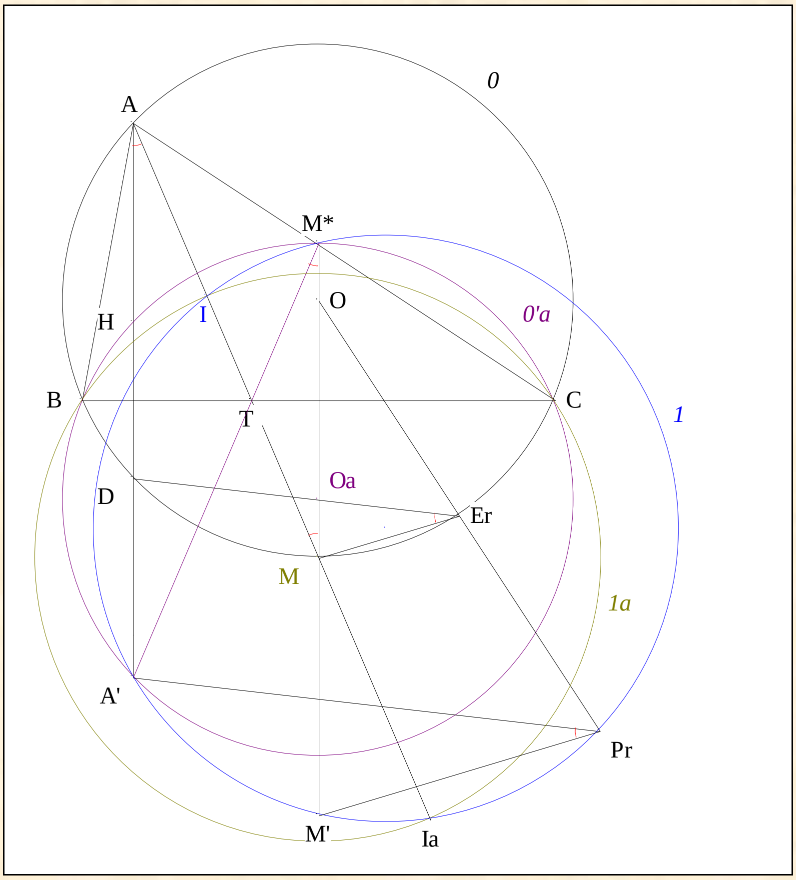
- Notons M le milieu de [IIa],
  M* le symétrique de M par rapport à (BC),
  T le point d'intersection de (AM) et (BC)
  0'a le symétrique de *0* par rapport à (BC) ; il passe par H, M*, A' et a pour centre Oa ;
  et *1a* le A-cercle de Mention de ABC ; il passe par B, I, C et a pour centre M.

- Le quadrilatère AOOaA' étant un trapèze isocèle, (A'M*) passe par T.

- **Conclusion partielle :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [5]
  appliqué à *0'a*, *1a* et *1*, M* est sur *1*.

- **Commentaire :** nous devons montrer que Pr est sur *1*.

[5] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons M' le symétrique de O par rapport à M.

- **Scolie :** par un calcul segmentaire, nous montrerions que M' est sur *1*.

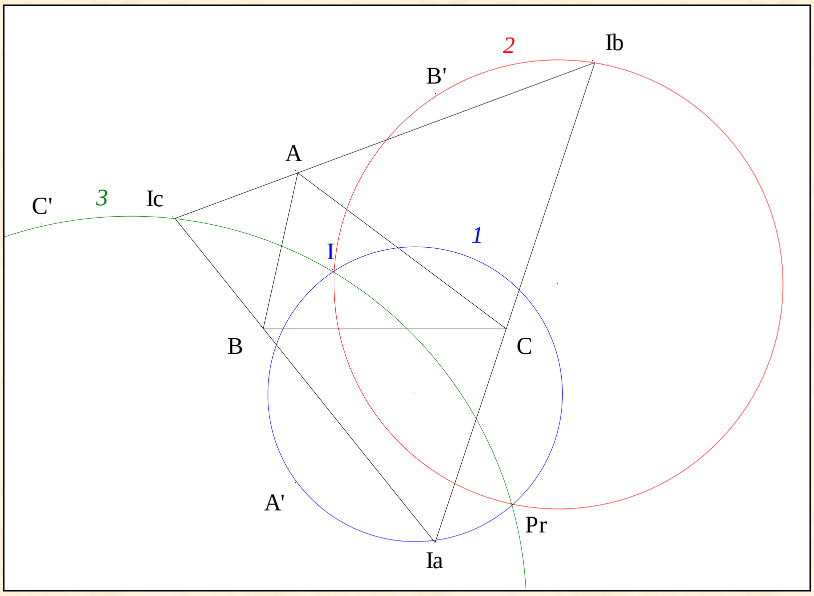
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle OM'Pr, (M'Pr) // (MEr).

- Une chasse angulaire :

*****	"angles à côtés parallèles",	<A'PrM' **=** <DErM
*	"angles incrits",	<DErM = <DAM
*	"angles alternes-internes",	<DAM = <M*MA
*	autre écriture,	<M*MA = <M*MT
*	symétrie d'axe (BC),	<M*MT = <TM*M
*	autre écriture,	<TM*M = <A'M*M'
*	transitivité de la relation =,	<A'PrM' **=** <A'M*M'.

- **Conclusion partielle :** Pr est sur *1*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que Pr est sur *2*
  Pr est sur *3*.



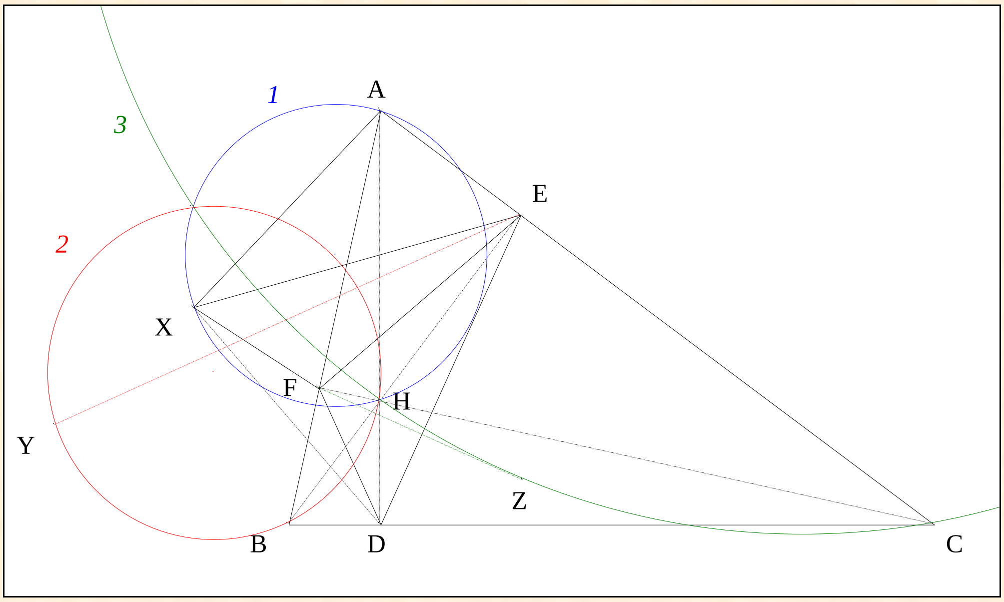
- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

EXEMPLE

1. Le résultat de Cosmin Pohoata

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	DEF	le triangle orthique de ABC,

XYZ le triangle symétrique de DEF,
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles XAH, YBH, ZCH.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [6]

VISUALISATION

- Réinterprétons l'énoncé en partant du triangle orthique DEF :

  * H est le centre de DEF

  * A est le D-excentre de DEF

  * d'après **III. A. 1**, *1*, *2*, *3* passent par le point de Parry de DEF.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

[6] Pohoata C., AwesomeMath, Problem O**294**, p. 4 ; https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/mr_1_2014_problems.pdf
Solution analytique de Lasaosa D., p. 25 ; https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/mr_1_2014_solutions.pdf

B. TRIANGLES P-SYMÉTRIQUE

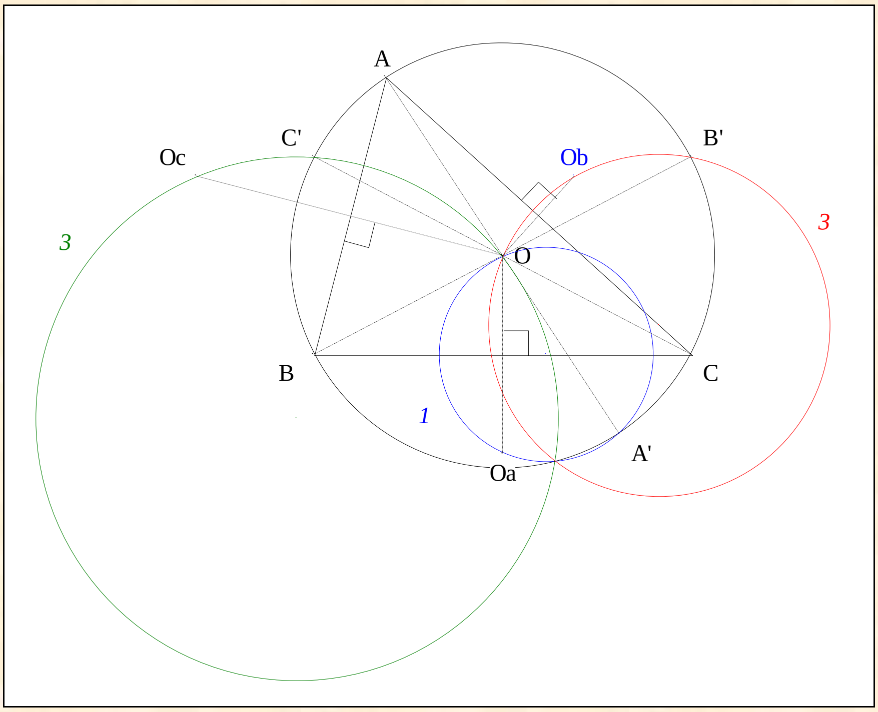
ET

P-CIRCUMCÉVIEN

1. Le résultat de Nguyen Lam Minh

VISION

Figure :



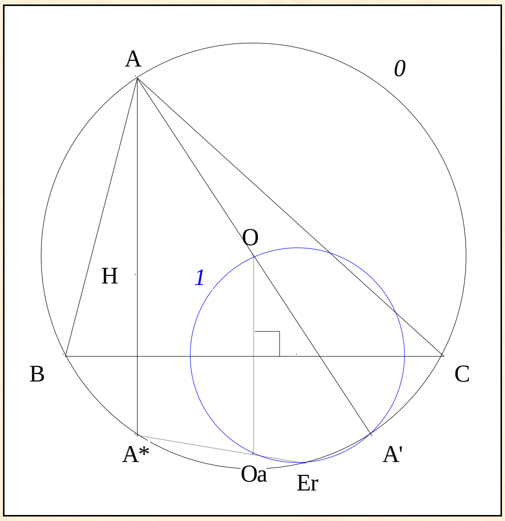
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
Oa, Ob, Oc le symétrique de O resp. par rapport à (BC), (CA), (AB),
A'B'C' le triangle O-circumcévien de ABC
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits des triangles OOaA', OObB', OOcC'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.[7]

VISUALISATION

---

[7] Nguyen Lam Minh, **4** concurrent circles, AoPS du 28/11/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=314688
coaxial, AoPS du 28/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=441644
Problem **450**, *Mathematical Excalibur*, vol. **19**, n° **2** (sept.-oct. 2014) ; http://www.math.ust.hk/excalibur/v19_n1.pdf



- Notons H l'orthocentre de ABC,
  A* le symétrique de H par rapport à (BC)
  et Er le second point d'intersection de *0* et *1a*.

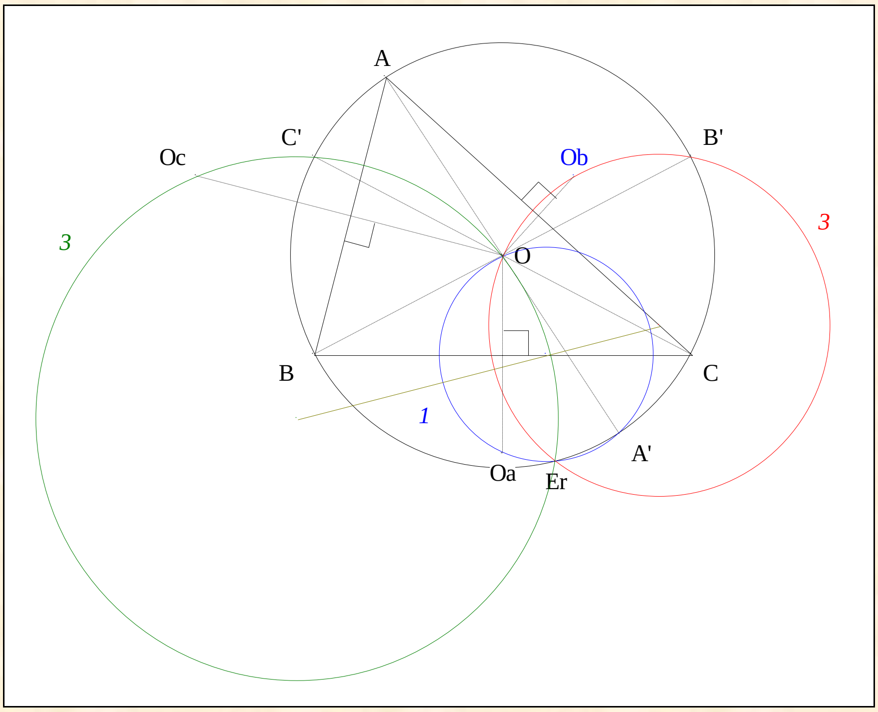
- D'après Carnot "Symétrique de H par rapport à un côté", A* est sur *0*.

- **Scolie :** (AA*) // (OOa).

- Les cercles *0* et *1a*, les points de base A' et Er, la monienne (AA'O), les parallèles (AA*) et (OOa), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, A*, Er et Oa sont alignés.

- D'après "Euler reflexion point" [8], Er est l'antipoint d'Euler de ABC.

- **Conclusion partielle :** *1a* passe par Er.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1b* passe par Er

[8] Ayme J.-L., Euler reflexion point, G.G.G. vol. **25**, p. 2-3 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

1c passe par Er.

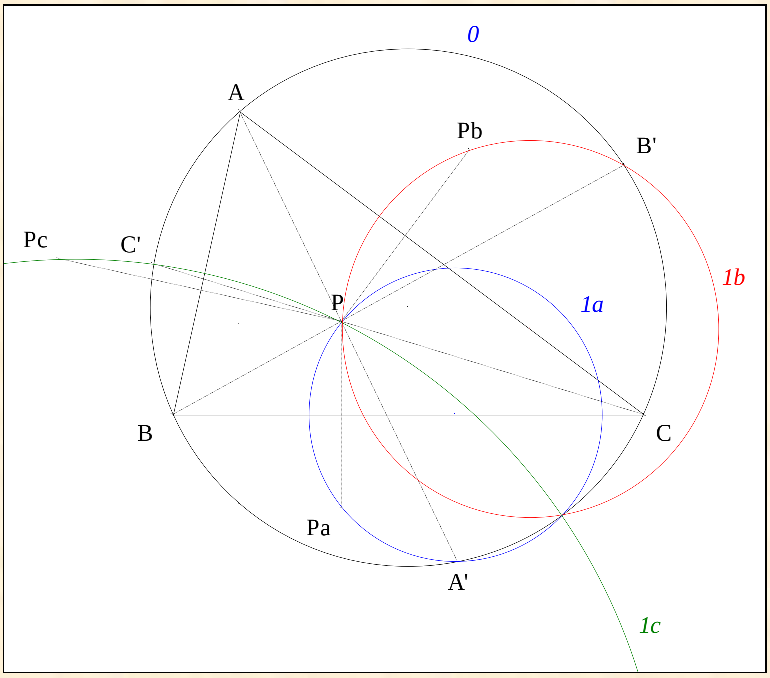
- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

GÉNÉRALISATION

1. Luis Gonzalez et Cosmin Pohoata

VISION

Figure :

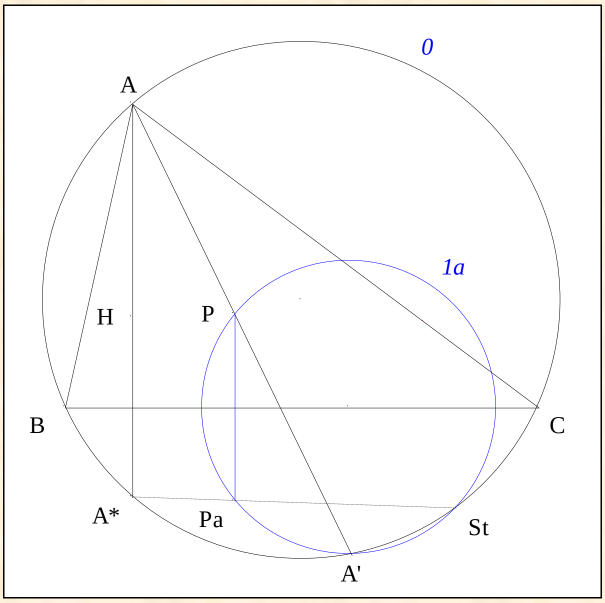


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point,
	Pa, Pb, Pc	le symétrique de P resp. par rapport à (BC), (CA), (AB),
	A'B'C'	le triangle P-circumcévien de ABC
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits des triangles PPaA', PPbB', PPcC'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.[9]

VISUALISATION

[9] Luiz Gonzalez and Cosmin Pohoata, On the Intersections of the Incircle and the Cevian Circumcircle of the Incenter, *Forum Geometricorum*, Volume **12** (2012) 141–148, 144 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201211.pdf
Ayme J.-L., Coaxal circles, AoPS du 07/12/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616638
Ayme J.-L., Coaxal again, AoPS du 17/02/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=625580



- Notons H l'orthocentre de ABC,
  A* le symétrique de H par rapport à (BC)
  et St le second point d'intersection de *0* et *1a*.

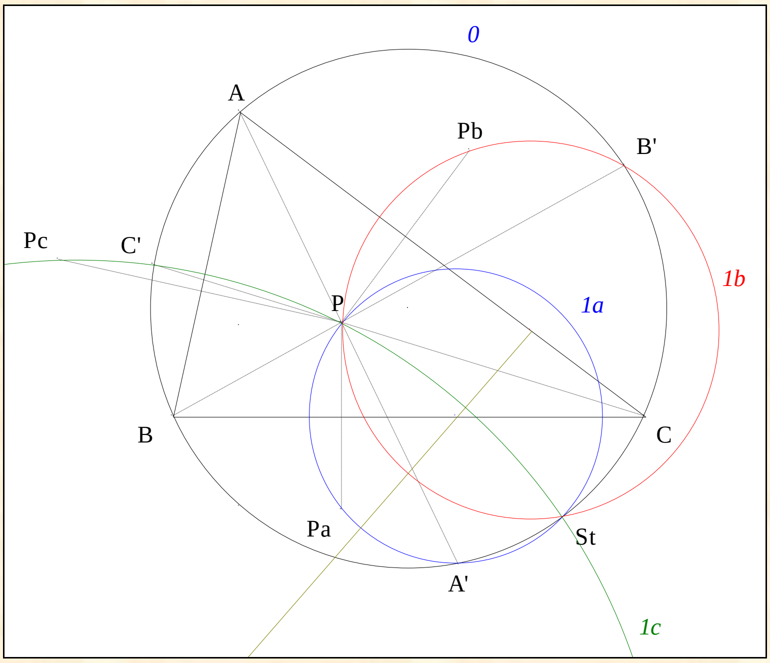
- D'après Carnot "Symétrique de H par rapport à un côté", A* est sur *0*.

- **Scolie :** (AA*) // (PPa).

- Les cercles *0* et *1a*, les points de base A' et St, la monienne (AA'P), les parallèles (AA*) et (PPa), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, A*, St et Pa sont alignés.

- D'après Jakob Steiner [10], St est l'antipoint de Steiner de ABC.

- **Conclusion partielle :** *1a* passe par St.



[10] Ayme J.-L., Une droite et un triangle, G.G.G. vol. **17**, p. 5-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1b* passe par St
  1c passe par St.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

C. TRIANGLE H-SYMÉTRIQUE

PAR RAPPORT

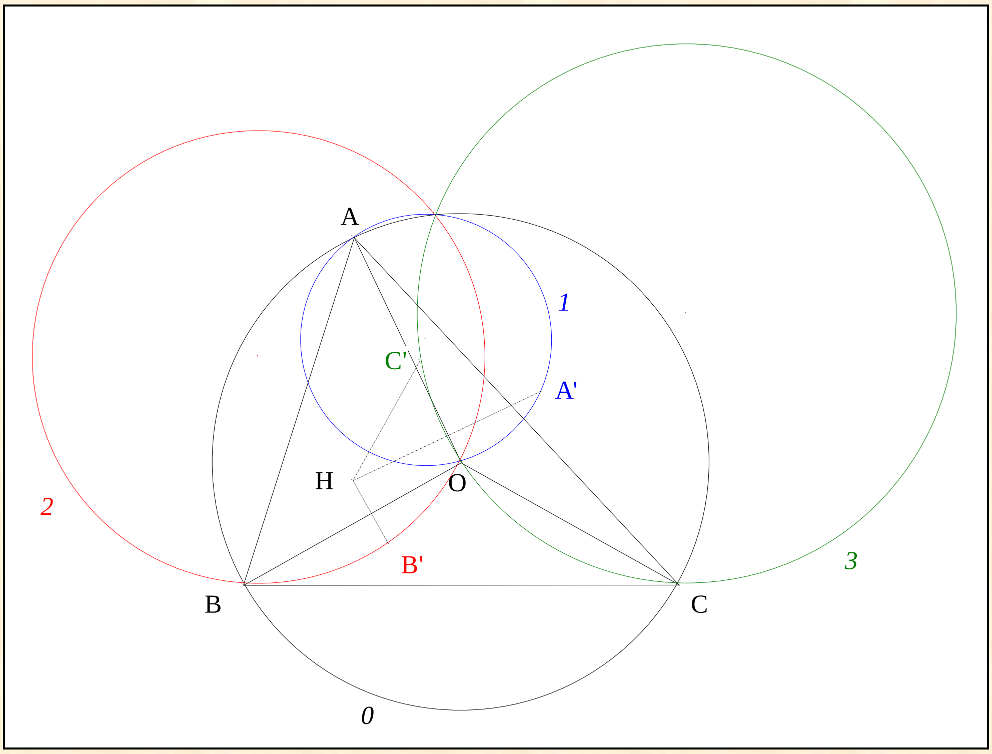
AUX

P-SEGMENTS DE CEVA

1. Le résultat d'Auguste Boutin où P est en H

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A', B', C'	les symétriques de H resp. par rapport à [AO], [BO], [CO] [11]
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles OAA', OBB', OCC'.

[11] les O-segments de Ceva relativement à ABC

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [12]

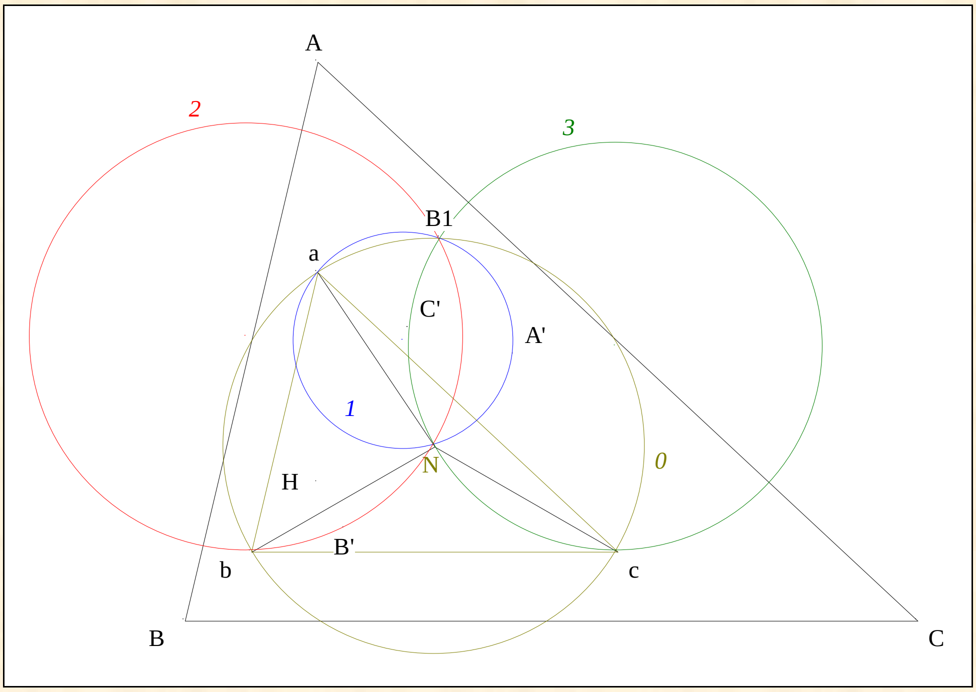
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [13]

APPLICATIONS DIRECTES

1. Le premier point de Boubals

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
abc le triangle d'Euler de ABC,
0 le cercle circonscrit à abc,
N le centre de *0*,
H l'orthocentre de ABC,
A', B', C' les symétriques de H par rapport à (aN), (bN), (cN)
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits aux triangles NaA', NbB' et NcC'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [14]

Commentaire : H est l'orthocentre de abc et N joue le rôle de O.
Une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [15]

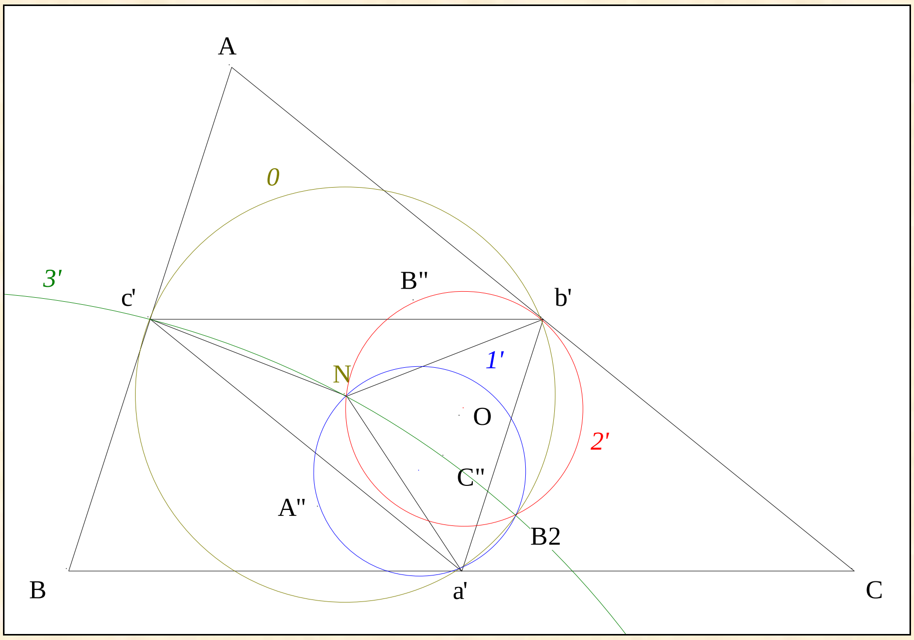
---

12 Boutin Aug., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 215-216
13 Ayme J.-L., Les points de G.C. Boubals, G.G.G. vol. **12**, p. 5-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
14 Boubals J. C., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) Question **193**
Solution de Boutin Aug., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 215-216
15 Ayme J.-L., Les points de G.C. Boubals, G.G.G. vol. **12**, p. 7-8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

2. Le second point de Boubals

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	a'b'c'	le triangle médian de ABC,
	0	le cercle circonscrit à a'b'c',
	N	le centre de *0*,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	A", B", C"	les symétriques de O resp. par rapport à (a'N), (b'N), (c'N)
et	*1'*, *2'*, *3'*	les cercles circonscrits aux triangles Na'A", Nb'B" et Nc'C".

Donné : *1'*, *2'* et *3'* sont coaxiaux. [16]

Commentaire : O est l'orthocentre de a'b'c' et N joue le rôle de O.
Une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [17]

---

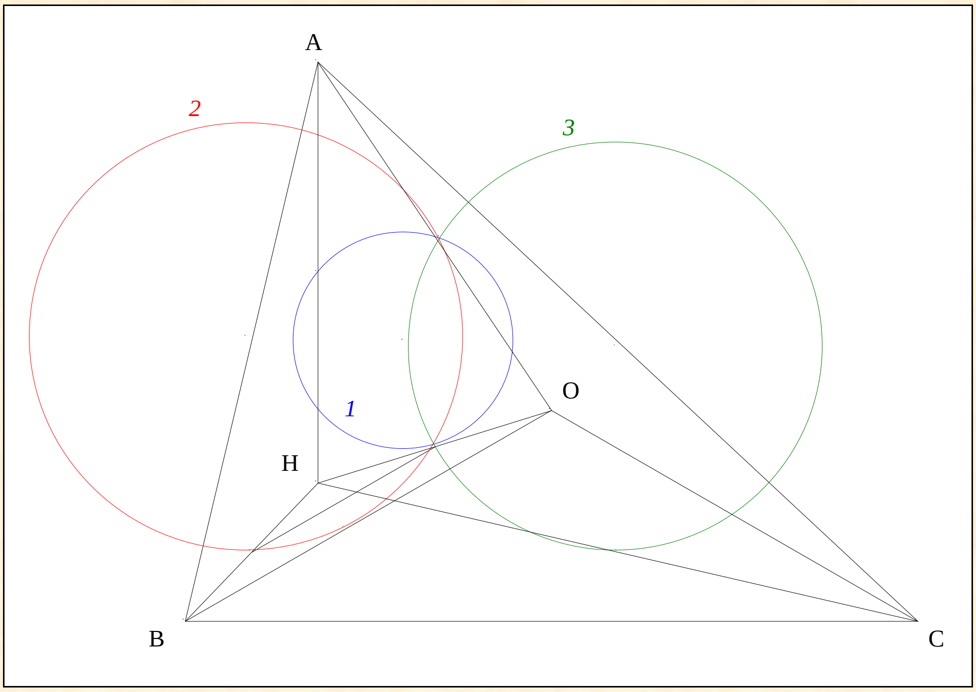
[16] 1891

[17] Ayme J.-L., Les points de G.C. Boubals, G.G.G. vol. **12**, p. 9-10 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

3. Les cercles d'Euler des triangles AHO

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
H l'orthocentre de ABC,
et *1*, *2*, *3* les cercles d'Euler des triangles AHO, BHO et CHO.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [18]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [19]

Scolie : *1*, *2*, *3* passent par le milieu de [OH] et le point de Jerabek X de ABC [20].

---

[18] Boubals J.C., *Journal de Mathématiques Elémentaires* p. 193
Solution de Boutin, *Journal de Mathématiques Elémentaires* **91**, p. 215
Euler's circles of AHO, AoPS du 15/03/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1063244_eulers_circles_of_aho

[19] Ayme J.-L., Les points de G.C. Boubals G.G.G. vol. **12**, p. 8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

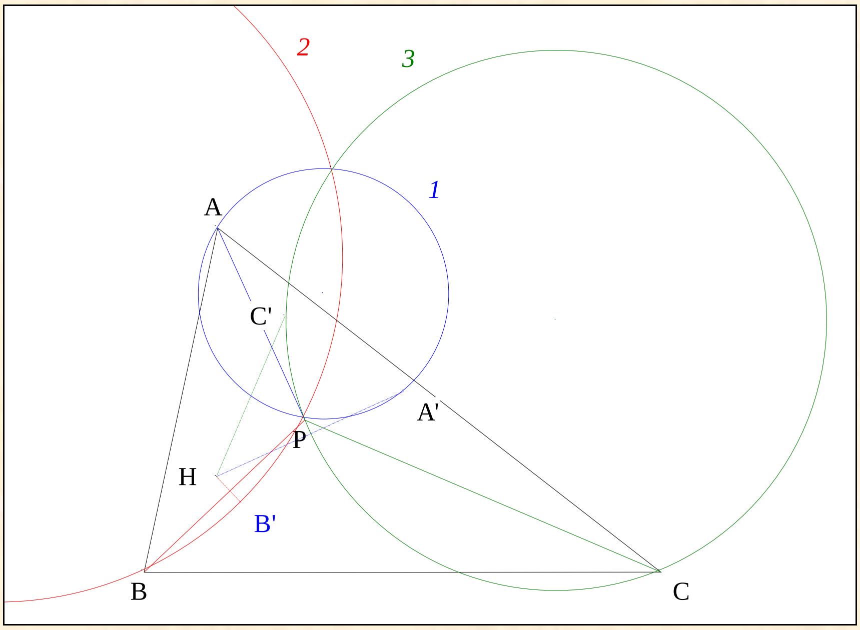
[20] Nguyen van Linh ; http://nguyenvanlinh.wordpress.com/page/11/
X est l'antipôle de X

GÉNÉRALISATION

1. Avec un point P

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	P	un point
	A', B', C'	les symétriques de H resp. par rapport à [AP], [BP], [CP] [21]
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAA', PBB', PCC'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

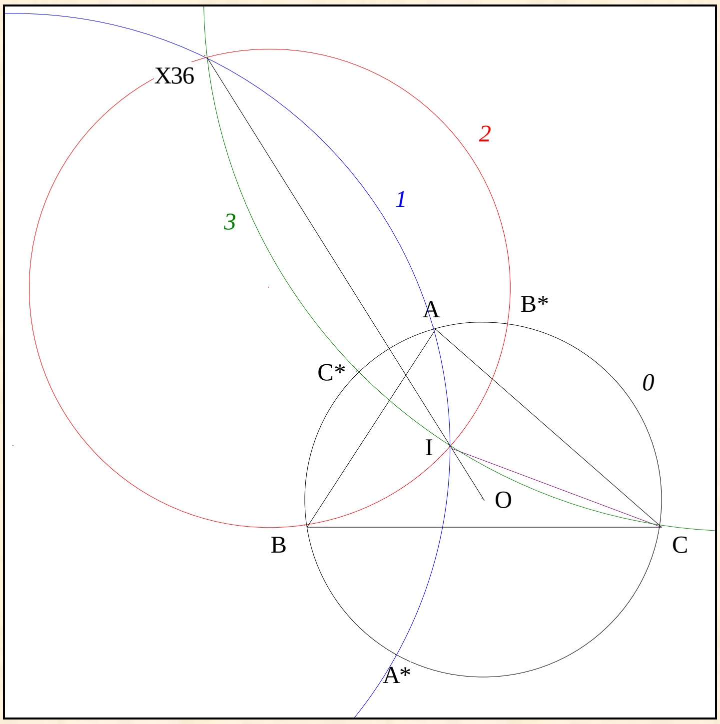
Commentaire : la preuve est similaire à celle en **C. 1.** Le résultat d'Auguste Boutin.

[21] les P-segments de Ceva relativement à ABC

D. UNE SITUATION DE L'AUTEUR

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A*, B*, C* les A, B, C-point de Longchamps de ABC,
1 le cercle passant par A, I, A*,
2 le cercle passant par B, I, B*
et *3* le cercle passant par C, I, C*.

Donné : *1*, *2*, *3* se recoupent en un second point [22].

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur. [23]
Une autre approche peut être envisagée en considérant que (AA*) passe par le centre de similitude externe des cercles inscrit et circonscrit à ABC. [24]

[22] Ayme J.-L., A conjecture with mixtilinear incircles, *Mathlinks* (14/11/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=239593 ;
Ayme J.-L., Message *Hyacinthos* # **16960** du 14/11/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/16960

[23] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **II**, G.G.G. vol. **4**, p. 33 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

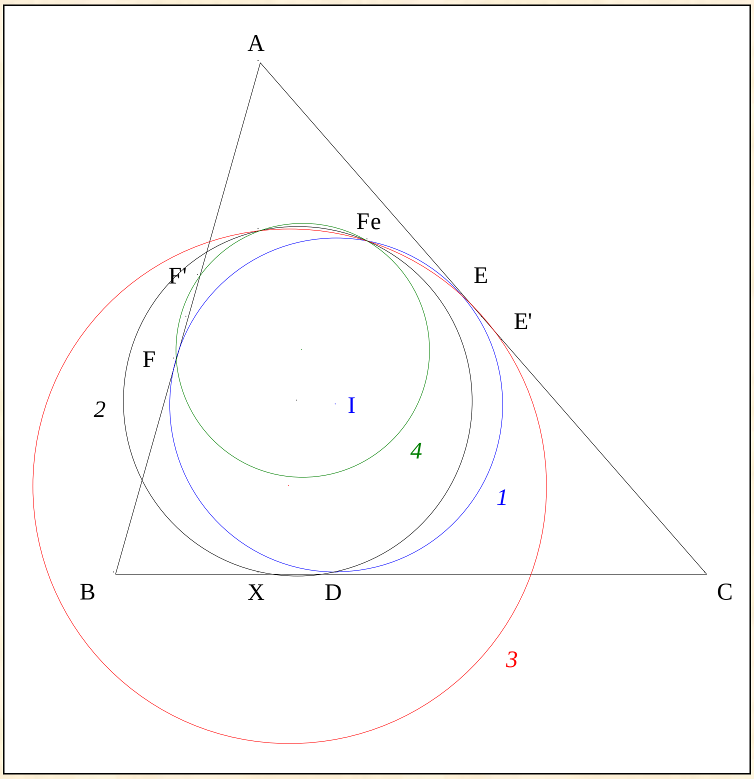
[24] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4**, p. 22-24 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

E. SITUATIONS NON CENTRALES

1. Un résultat avec le point de Feuerbach

VISION

Figure :

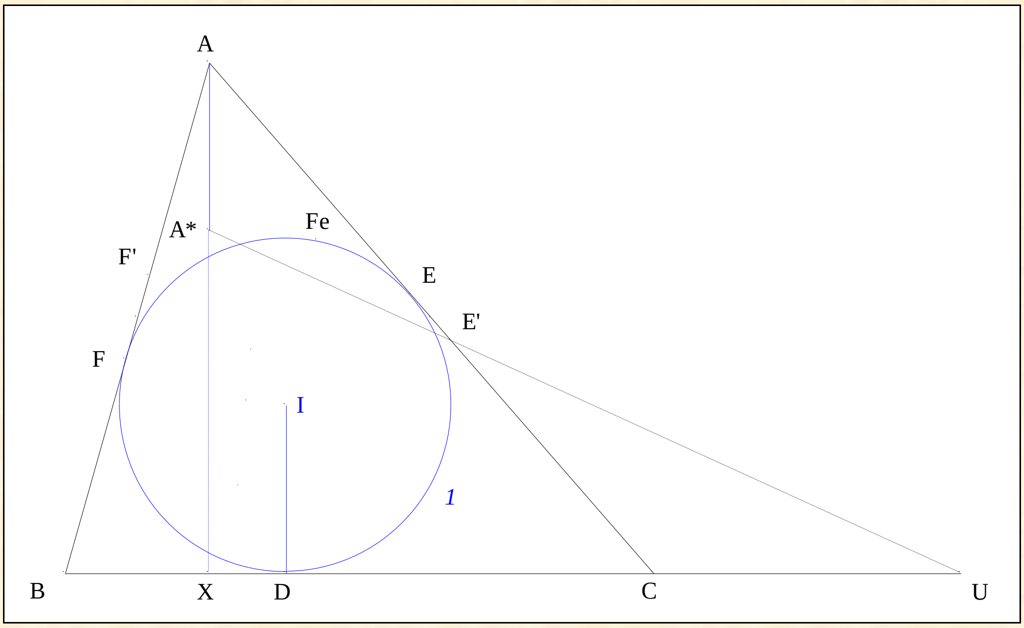


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
E', F' les isotomes de E, F relativement à [AC], [AB],
Fe le point de Feuerbach de ABC,
X le pied de la A-hauteur de ABC
et *2*, *3*, *4* les cercles circonscrits resp. aux triangles FeDX, FeEE', FeFF'.

Donné : *2*, *3* et *4* sont coaxiaux. [25]

VISUALISATION

[25] Three coaxial circles, AoPS du 12/06/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1100909_three_coaxial_circles

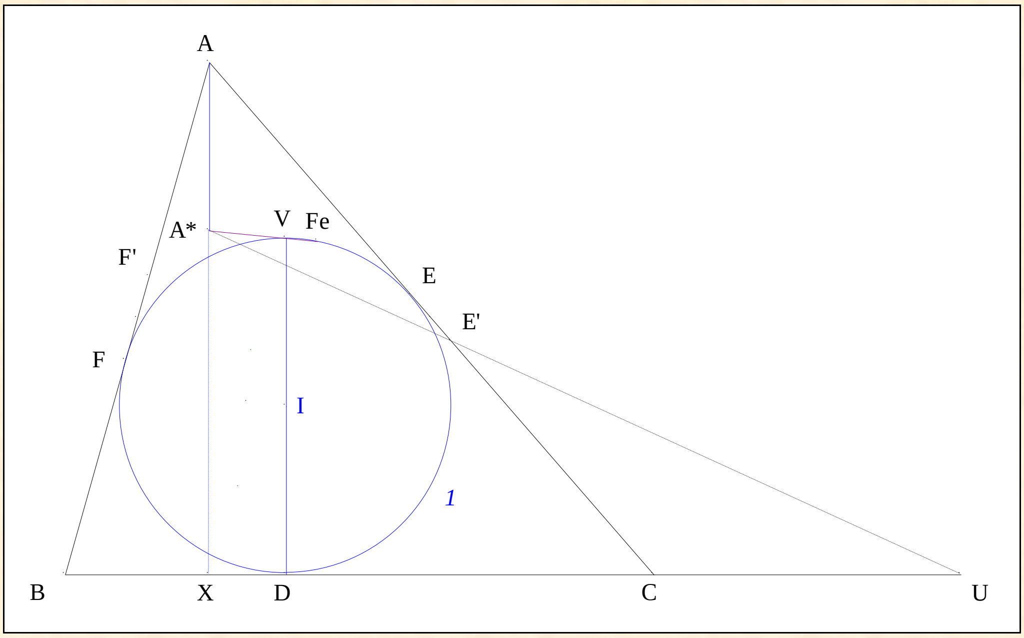


- Notons *1b*, *1c* les B, C-excercle de ABC,
  U le point de contact de *1b* avec (BC)
  et A* le point d'intersection de (E'U) et (AX).

- **Scolies :** **(1)** E' est le point de contact de *1b* avec (AC)

  (2) F' est le point de contact de *1c* avec (AB)

- Par culture géométrique [26], AA* = ID.



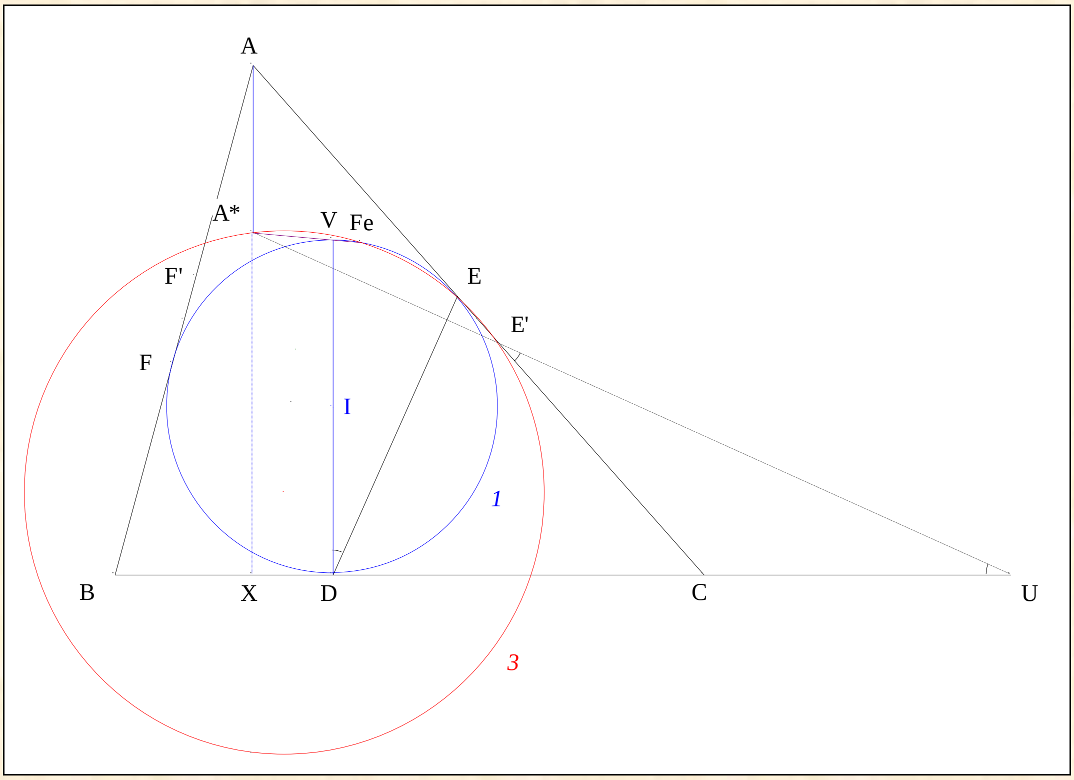
- Notons V l'antipôle de D relativement à *1*.

- D'après Antreas Hatzipolakis [27], (A*V) passe par Fe.

---

[26] Ayme J.-L., La ponctuelle (MI), G.G.G. vol. **7**, p. 31 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Inradius and altitude, AoPS du 08/01/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h69096p405300

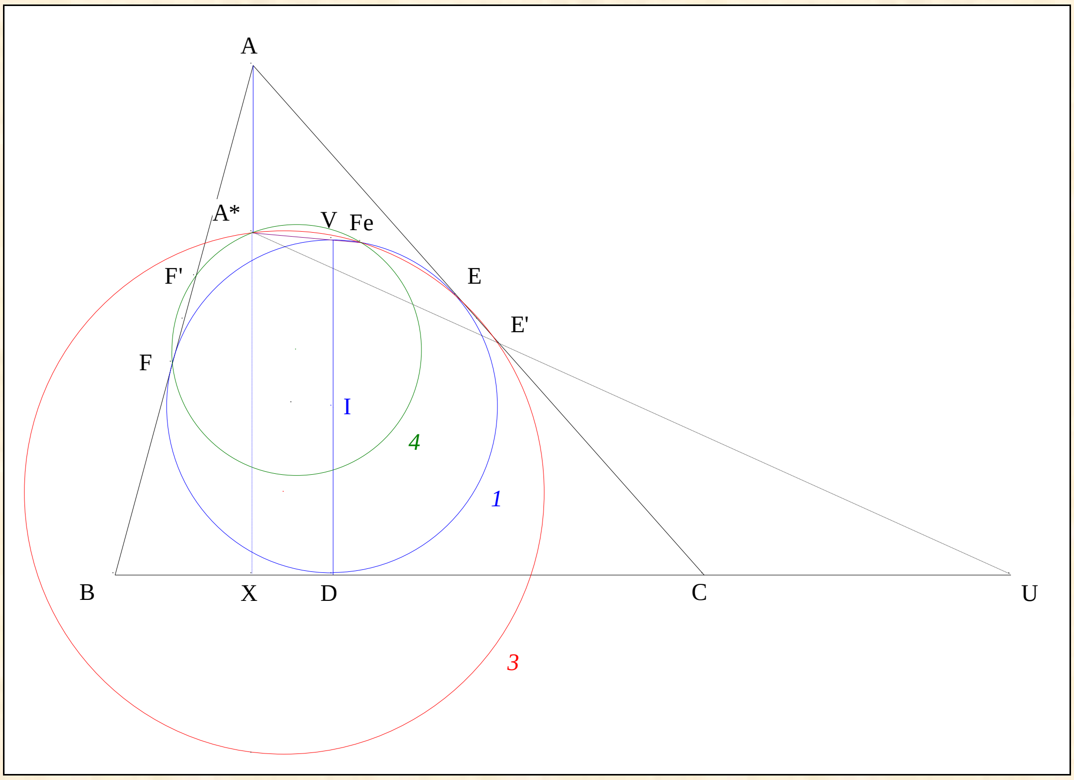
[27] Ayme J.-L., Symétrique de (OI)…, G.G.G. vol. **4**, p. 17 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



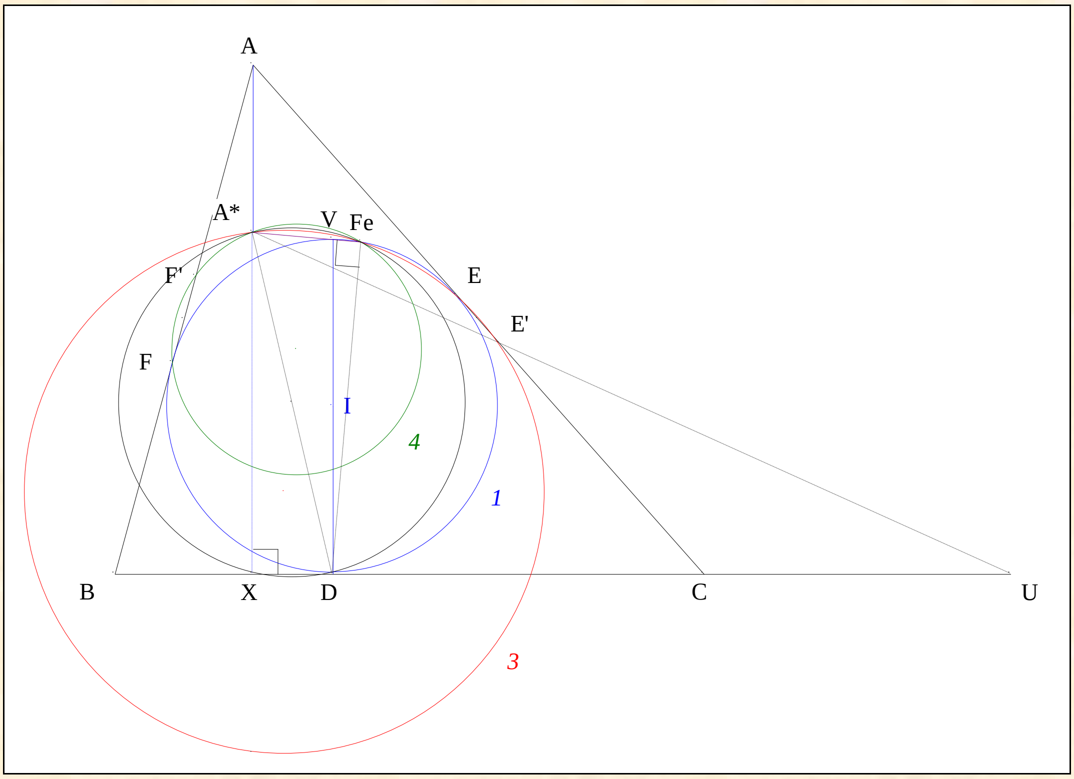
- Notons Y le point d'intersection de (DE) et (AX).

- Une chasse angulaire à **Π** près :

*	"Angles opposée",	<AE'A* = <CE'U
*	le triangle CE'U étant C-isocèle,	<CE'U = <E'UC
*	"Angles à côtés perpendiculaires",	<E'UC = <EDV
*	"Quadrilatère cyclique",	<EDV = <VFeE
*	autre écriture,	<VFeE = <A*FeE
*	transitivité de la relation,	<AE'A* = <A*FeE
*	en conséquence,	A* est sur *3*.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que A* est sur *4*.



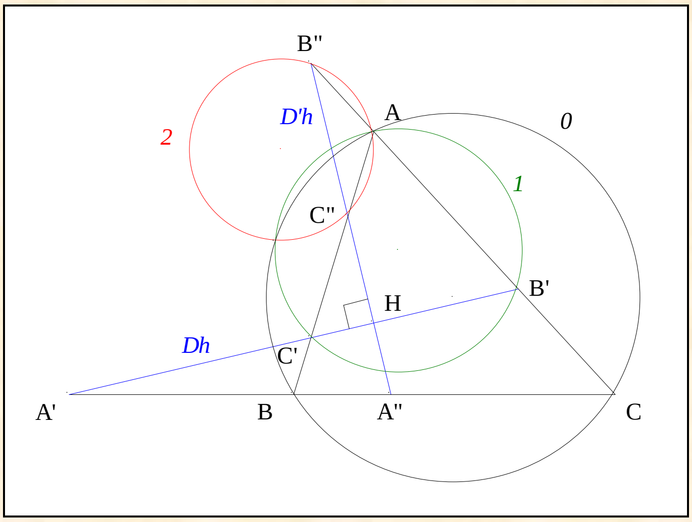
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle",
  X et Fe sont sur le cercle de diamètre [A*D] ;
  En conséquence, A* est sur 2

- **Conclusion :** *2*, *3* et *4* sont coaxiaux.

2. Un résultat de l'auteur inspiré de la figure de Droz-Farny

VISION

Figure :



Traits :		ABC	un triangle acutangle,
		H	l'orthocentre de ABC,
		Dh	une droite passant par H,
		A', B', C'	les points d'intersection de *Dh* resp. avec (BC), (CA), (AB),
		D'h	la droite perpendiculaire à *Dh* en H,
		A", B", C"	les points d'intersection de *D'h* resp. avec (BC), (CA), (AB)
	et	*0, 1, 2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles ABC, AB'C', AB"C".

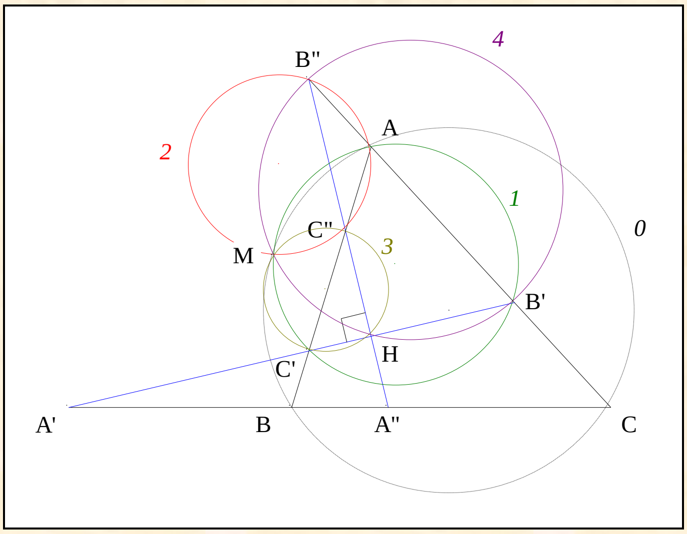
Donné : *0*, *1* et *2* sont coaxiaux. [28]

VISUALISATION

- **Scolie :** *0*, *1* et *2* passent par A.

---

[28] Ayme J.-L., (mars 2005)
Ayme J.-L., Three coaxal circles, AoPS du 08/12/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616790
Trois cercles coaxiaux, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8

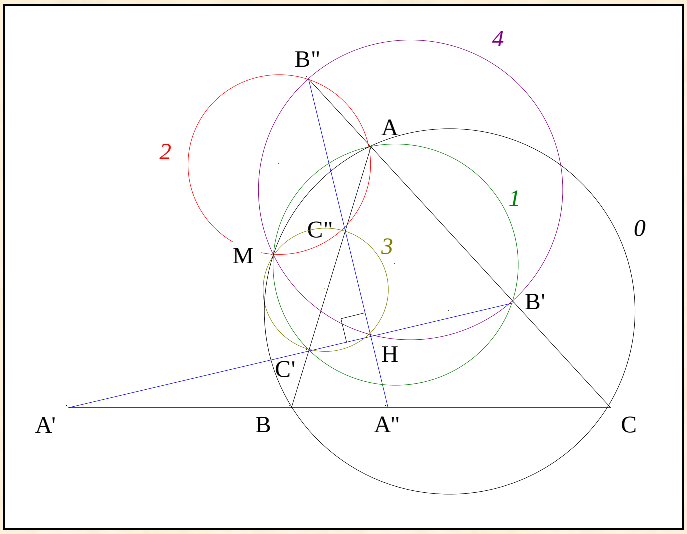


- Notons 3, 4 les cercles circonscrits resp. aux triangles C'C"H, B'B"H.

- D'après "Le point de Miquel-Wallace" [29] appliqué au triangle AC'B' et à la ménélienne (HB"C"), *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants.

- Notons M ce point de concours.

- **Scolie :** *1* et *2* passent par M.

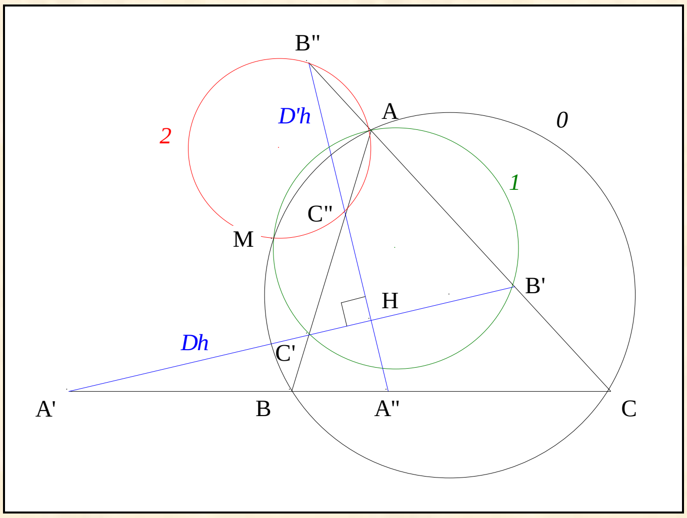


- D'après "La droite de Droz-Farny" [30], *0* passe par M.

---

29 Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. Vol. **13**, p. 12-13 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

30 Ayme J.-L., *Forum Geometricorum* (Etats-Unis) **4** (2004) 219-224 ; http://forumgeom.fau.edu/
Ayme J.-L., La droite de Droz-Farny, G.G.G. Vol. **10** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- **Conclusion :** *0*, *1* et *2* sont coaxiaux.