# **UN LEITMOTIF**

OR

#### THE SWITZERLAND TST (2006) THEMA

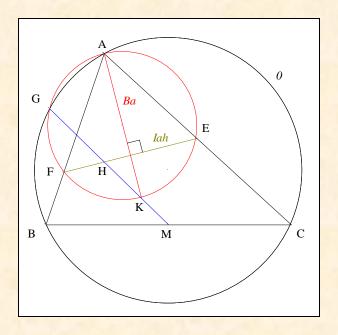
IN

#### **PROCESS**

+

Un motif géométrique répété au fil d'une série de problèmes analogues

# Jean-Louis AYME 1



## Résumé.

L'auteur présente un motif géométrique émergeant d'une série de problèmes analogues à celui problème 3 du TST de Suisse 2006. Inversement, ce motif pouvant engendrer des problèmes, devient un *leitmotiv*. Cet aspect gémellaire, motif-problèmes constitue *A Thema in Process*.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

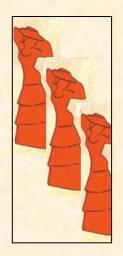
## Abstract.

The author presents a geometric pattern emerging from a series of problems similat to that problem **3** of the tST os Switzerland 2006. Conversely, this pattern that can generate problems, becomes a *leitmotif*. This twin aspect pattern-problems constitute *A Thema in Process*.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 31/07/2014; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Sommaire	
Point de vue ésotérique	
A. Motif ou Solution	4
B. Visualisation ou Résolution	5
1. Lazare N. M. Carnot	3
2. Thalès de Milet	
3. Archimède de Syracuse	
4. Une bissectrice	
5. Une parallèle à une bissectrice	
6. Quatre points cocycliques	
7. Quatre points cocycliques	
8. Cinq points cocycliques	
C. La série de l'auteur	14
1. Trois cercles coaxiaux	
2. Un cercle passant par G	
3. Thailand (2005)	
4. 2008 variation de Russie (2000)	
5. 26e M.O. Russie (2000)	
6. China Western MO (2009)	
7. Switzerland TST (2006)	
8. Problem 1, day 1, vietnamiese TST (2006); British Final ST-1 9. L'auteur	
10. Une bissectrice	
11. Beautiful collinearity	
12. Collinearity	
13. La tangente de l'auteur	
14. Une seconde tangente de l'auteur	
15. Deux parallèles	
<b>16.</b> Une parallèle à (BC)	
17. Une parallèle à (BC)	
D. Résultats collatéraux	27
1. Un alignement	
2. Concurrence	
3. Quatre points cocycliques	
4. Un exercice d'Oleg Faynsteyn	



# POINT DE VUE ÉSOTÉRIQUE

En s'offrant à un humble chercheur de vérité, elle prend le visage d'une figure géométrique et en retirant sa face aux arrogants chercheurs de malices, elle leur abandonne une configuration...

Le Géomètre a été fasciné par la vision d'une Semblance entourée d'un manchon de néant, voire la figure du problème 3 du TST de Suisse de 2003... Mais à trop vouloir la dévisager, elle s'est voilée... laissant apparaître ses traits essentiels et en disparaissant lui souffle un donné lapidaire ... La résolution commence et se termine par une visualisation mettant en œuvre une démarche homogène où seuls les théorèmes de la Géométrie synthétique sont mis en œuvre. <sup>2</sup>

La recherche du Géomètre ne s'arrête pas en si bon chemin. Ayant recensé une série de problèmes analogues entre eux, il assiste à l'émergence d'un charme qui ramène tout en dedans de lui et d'une radiance qui touche tout en dehors en dehors d'elle ; cette solution qui prend la forme d'un motif, illumine le champs de recherche du Géomètre et contribue comme un "leitmotif" à lui faire découvrir d'autres problèmes semblables.

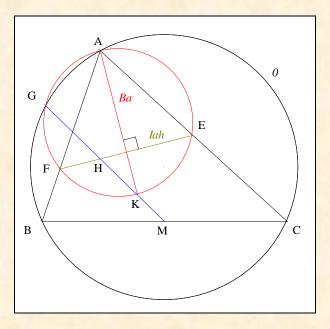
2

Ayme J.L., Thailand (2005) or Swiss TST (2006), G.G.G. vol. 19; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

## A. MOTIF OU SOLUTION

#### **VISION**

## Figure:



**Traits:** ABC un triangle acutangle tel que AB < AC,

0 le cercle circonscrit à ABC,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

G le point d'intersection de (MH) avec l'arc BAC,

Ba la A-bissectrice intérieure de ABC, K le point d'intersection de Ba et (HM),

*Iah* la A-isocélienne <sup>3</sup> de ABC passant par H

et E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB].

**Donné :** A, E, F, G et K sont cocycliques.

\_

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle

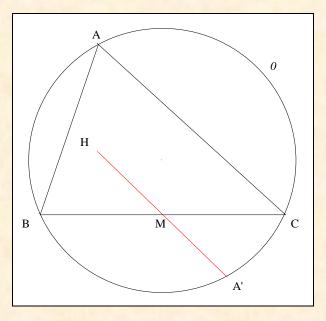
## B. VISUALISATION OU RÉSOLUTION

Commentaire : dans cette partie, les notations ne varient pas d'un énoncé à un autre.

#### 1. Lazare N. M. Carnot

#### **VISION**

# Figure:



**Traits:** ABC un triangle acutangle tel que AB < AC,

M le milieu de [BC],

0 le cercle circonscrit à ABC,

H l'orthocentre de ABC

et A' le symétrique de H par rapport à M.

**Donnés :** (1) A' est sur  $\theta$ 

(2) A' est l'antipôle de A relativement à 0.

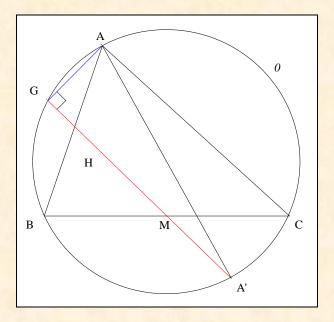
**Commentaire :** ce résultat de Lazare Carnot datant de 1801 se trouve dans le livre intitulé *De la corrélation des figures Géométriques* <sup>4</sup>.

## **2. Thalès de Milet** (624 av. J.-C. – 547 av. J.-C.)

**VISION** 

Figure:

Carnot L. N. M., De la corrélation des figures géométriques (1801), n° 142, p. 101



aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons le second point d'intersection de (MH) avec  $\theta$ . Traits:

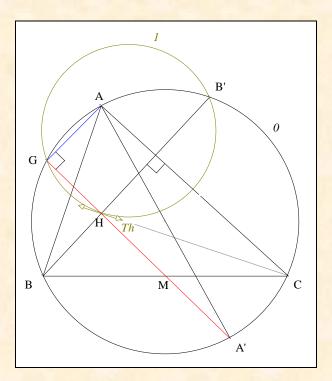
G

Donné: (AG) est perpendiculaire à (MH) en G.

Commentaire: triangle inscriptible dans un demi-cercle.

# 3. Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.)

# **VISION**



Traits: aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

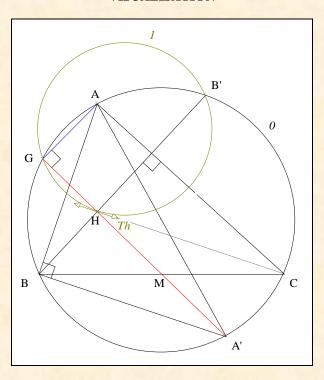
B' la circumtrace de la B-hauteur de ABC,

1 le cercle passant par G, H, B'

et Th la tangente à 1 en H.

**Donné :** Th est la C-hauteur de ABC.

#### **VISUALISATION**



- Notons Th la tangente à 1 en H.
- Les cercles *I* et *0*, les points de base G et B', les moniennes (HGA') et (HB'B), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", d'après l'axiome **IVa** des parallèles,
- Conclusion : d'après Archimède, Th est la C-hauteur de ABC.

4. Une bissectrice

VISION

Figure:

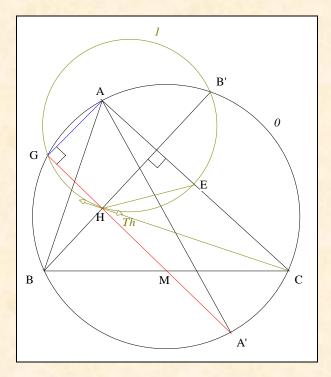
Th

Th

// (A'B).

⊥ (AB).

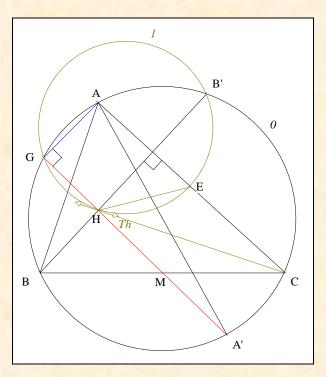
 $(A'B) \perp (AB)$ 



aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons le point d'intersection de [AC] avec I. Traits:

Donné: (HE) est la H-bissectrice intérieure du triangle HB'C.

# **VISUALISATION**



- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" 5, EH = EB'.
- Une chasse angulaire :

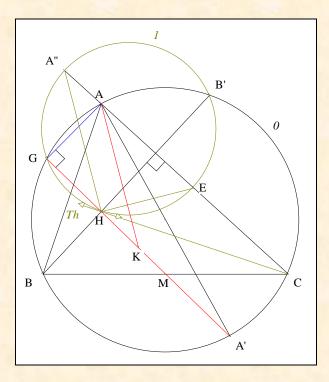
Carnot, n° 142, De la corrélation des figures géométriques (1801) 101

- \* le triangle EB'H étant H-isocèle, <EHB' = <HB'E
- \* d'après "Le théorème de la tangente", <HB'E = <CHE
- \* par transitivité de la relation =, <EHB' = <CHE.
- Conclusion : (HE) est la H-bissectrice intérieure du triangle HB'C

# 5. Une parallèle à une bissectrice

## **VISION**

# Figure:



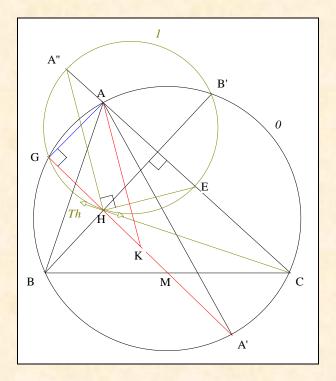
**Traits:** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

A" le second point d'intersection de la perpendiculaire à (HE) avec 1

et K le point d'intersection de la A-bissectrice intérieure de ABC avec (HM).

**Donné :** (AK) est parallèle à (HA").

# VISUALISATION



• D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" 6, en conséquence,

(AE) est la médiatrice de [HB'] ; le centre de *1* est sur (AC). <sup>7</sup>

• D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",

A" est sur (AE).

• Scolies:

- **(1)**
- (HE) est la A-bissectrice extérieure du triangle HBC
- (2) (HA") est la A-bissectrice intérieure du triangle HBC
- Conclusion: par culture géométrique 8, (AK) // (HA").

Scolie: (AK) \(\perp \) (HE). 9

6. Quatre points cocycliques

**VISION** 

Figure:

6

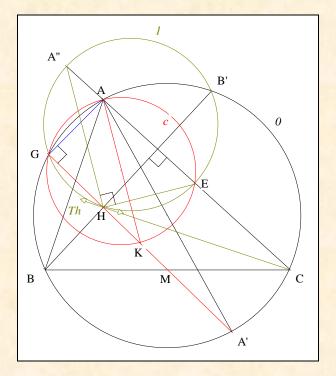
<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Carnot, n° **142**, De la corrélation des figures géométriques (1801) 101

Ayme J.-L., A center on a side of a triangle, AoPS du 18/07/2014;

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=598460

Ayme J.-L., La ponctuelle (MH), G.G.G. vol. 7, p. 45-47; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Ayme J.-L., Perpendicular to a bisector, AoPS du 18/07/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=598467



**Traits:** les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

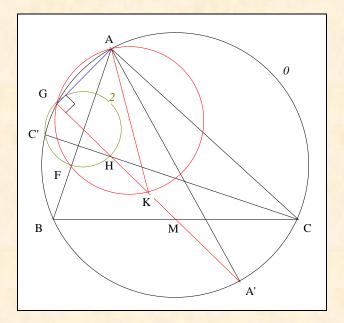
**Donné:** A, G, E et K sont cocycliques.

# **VISUALISATION**

• Conclusion partielle : le cercle *1*, les points de base E et G, les moniennes naissantes (A''EA) et (HGK), conduisent au théorème 0'' de Reim ; en conséquence, E, G, A et K sont cocycliques.

# 7. Quatre points cocycliques

VISION



aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons la circumtrace de la B-hauteur de ABC, Traits:

C'

le cercle passant par G, H, C'

et le point d'intersection de [AB] avec 2.

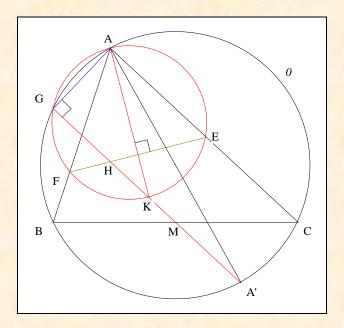
Donné: A, G, E et K sont cocycliques.

# **VISUALISATION**

• Conclusion: mutatis mutandis, nous montrerions que F, G, A et K sont cocycliques.

8. Cinq points cocycliques

**VISION** 



**Traits:** les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

**Donné:** A, G, E, F et K sont cocycliques.

# VISUALISATION

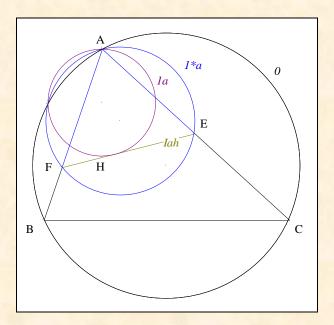
• Conclusion: d'après B. 6 et 7, A, G, E, F et K sont cocycliques.

# C. LA SÉRIE DE L'AUTEUR

## 1. Trois cercles coaxiaux

#### **VISION**

# Figure:



ABC Traits:

un triangle acutangle, le cercle circonscrit à ABC, Н l'orthocentre de ABC,

Iah la A-isocélienne 10 de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de Iah resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF

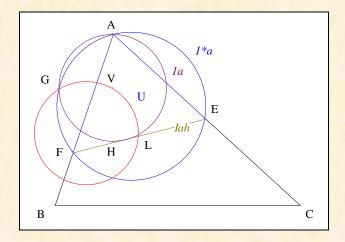
le cercle de diamètre [AH]. et 1a

Donné: 0, 1\*a et 1a sont coaxiaux.

# 2. Un cercle passant par G

**VISION** 

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle



H l'orthocentre de ABC,

*Iah* la A-isocélienne <sup>11</sup> de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF,

U le centre de 1\*a,

*la* le cercle de diamètre [AH]

V le centre de 1a,

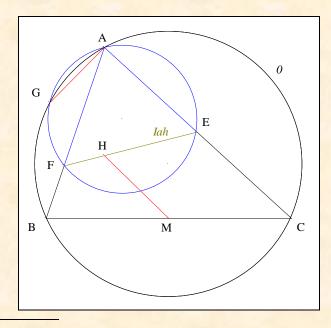
G le second point d'intersection de 1a et 1\*a, L le second point d'intersection de (EF) avec 1a.

**Donné :** U, V, L et G sont cocycliques. 12

**Commentaire :** penser au A-cercle de Morley relativement à 1a et 1\*a.

#### 3. Thailand (2005)

#### **VISION**



Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle

Four concyclic points, AoPS du 28/07/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=599896

0 le cercle circonscrit à ABC,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

*Iah* la A-isocélienne <sup>13</sup> de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

I\*a le cercle circonscrit au triangle AEF
 G le second point d'intersection de I\*a et 0.

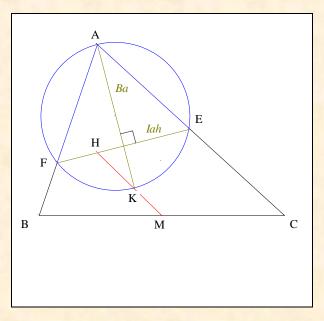
**Donné:** (MH) est perpendiculaire à (AG). <sup>14</sup>

#### 4. 2008 variation de Russie (2000)

#### **VISION**

#### Figure:

et



Traits: ABC un triangle acutangle,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC, Iah la A-isocélienne de ABC,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

Ba la perpendiculaire à *Iah* issue de A le point d'intersection de Ba et [HM].

**Donné:** A, E, F et K sont cocycliques. 15

#### 5. 26e M.O. Russie (2000)

et

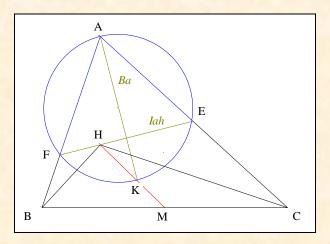
#### **VISION**

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle HM is perpendicular to a common chord, AoPS du 02/06/2011;

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=409570

Line through orthocenter and cyclic quadrilateral, AoPS du 14/05/2008 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=204811

# Figure:



ABC Traits: un triangle acutangle,

M le milieu de [BC], Η l'orthocentre de ABC,

la H-bissectrice extérieure du triangle HBC, Iah

E, F les points d'intersection de Iah resp. avec [AC], [AB],

la A-bissectrice intérieure de ABC Ва K le point d'intersection de Ba et [HM],

A, E, F et K sont cocycliques. 16 Donné:

## Archive:

Russia All-Russian Olympiad 2000
Grade 10
Day 1
In an acute scalene triangle $ABC$ the bisector of the acute angle between the altitudes $AA_1$ and $CC_1$ meets the sides $AB$ and $BC$ at $P$ and $Q$ respectively. The bisector of the angle $B$ intersects the segment joining the orthocenter of $ABC$ and the midpoint of $AC$ at point $R$ . Prove that $P$ , $B$ , $Q$ , $R$ lie on a circle.

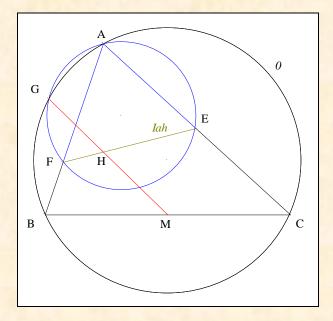
# 6. China Western MO (2009)

## **VISION**

Figure:

16

<sup>26</sup>e M.O. Russie (2000) day **1**, 10th grade, problem **3** P, B, Q, R lie on a circle, AoPS du 25/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1722706



0 le cercle circonscrit à ABC,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

*Iah* la A-isocélienne <sup>18</sup> de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

et G le point d'intersection de (MH) avec l'arc BAC.

**Donné:** A, E, F et G sont cocycliques. 19

#### Archive:

China Western Mathematical Olympiad 2009
Day 1
Let $H$ be the orthocenter of acute triangle $ABC$ and $D$ the midpoint of $BC$ . A line through $H$ intersects $AB, AC$ at $F, E$ respectively, such that $AE = AF$ . The ray $DH$ intersects the circumcircle of $\triangle ABC$ at $P$ . Prove that $P$ , $P$ are concyclic.

20

## 7. Switzerland TST (2006)

**VISION** 

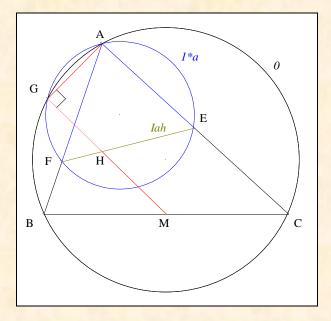
Figure:

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle

China Western MO (2009) day 1, problem 3

Equipment are cyclic AoPS du 25/02/2013

Four points are cyclic, AoPS du 25/02/2012; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2611020



0 le cercle circonscrit à ABC,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

*lah* la A-isocélienne <sup>21</sup> de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF, le second point d'intersection de 1\*a et 0.

**Donné:** (MH) est perpendiculaire à (AG) en G. <sup>22</sup>

#### Archive:

et

# Switzerland Team Selection Test 2006

#### Day 3

2 Let  $\triangle ABC$  be an acute-angled triangle with  $AB \neq AC$ . Let H be the orthocenter of triangle ABC, and let M be the midpoint of the side BC. Let D be a point on the side AB and E a point on the side AC such that AE = AD and the points D, H, E are on the same line. Prove that the line HM is perpendicular to the common chord of the circumscribed circles of triangle  $\triangle ABC$  and triangle  $\triangle ADE$ .

# 8. Problem 1, day 1, vietnamiese TST (2006); British FST-1

#### **VISION**

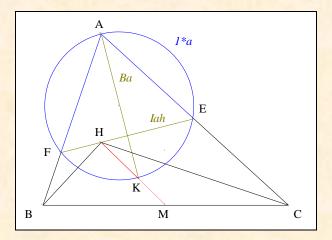
-

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle

Switzerland, Team Selection Test Day 3 (2006);

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=164&cid=227&year=2006 Hard to approach it!, AoPS du 25/05/2006; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=89098

## Figure:



Traits: ABC un triangle acutangle,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

*lah* la H-bissectrice extérieure du triangle HBC,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF, Ba la A-bissectrice intérieure de AEF

et K le second point d'intersection de Ba avec 1\*a.

**Donné :** (HK) passe par M. <sup>23</sup>

Commentaire : ce problème a été considéré comme difficile.

#### **Archive:**

#### Vietnam Team Selection Test 2006

Given an acute angles triangle ABC, and H is its orthocentre. The external bisector of the angle  $\angle BHC$  meets the sides AB and AC at the points D and E respectively. The internal bisector of the angle  $\angle BAC$  meets the circumcircle of the triangle ADE again at the point K. Prove that HK is through the midpoint of the side BC.

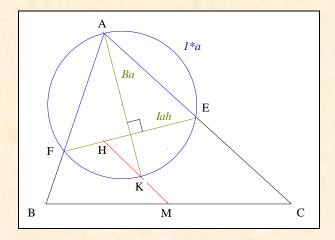
#### 9. L'auteur

VISION

Figure:

23

Problem 1, day 1, vietnamiese TST 2006, AoPS du 17/04/2006; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=486150 Line trough midpoint of a side and orthocenter, AoPS du 30/07/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=595847



M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

Ba la A-bissectrice intérieure de ABC, lah la perpendiculaire à Ba issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF

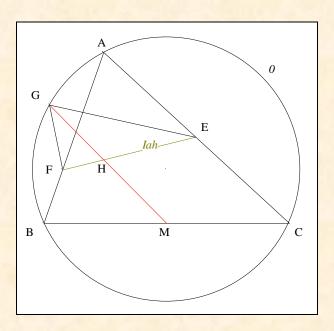
et K le second point d'intersection de Ba et 1\*a.

**Donné :** K est sur (HM).

#### 10. Une bissectrice

## **VISION**

# Figure:



Traits: ABC un triangle acutangle,

0 le cercle circonscrit à ABC,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC, Iah la A-isocélienne 24 de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de Iah resp. avec [AC], [AB]

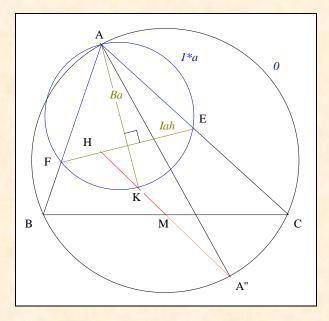
le second point d'intersection de la demi-droite [MH) avec 0. G et

Donné: (GM) est la G-bissectrice intérieure du triangle GEF. 25

## 11. Beautiful collinearity

#### **VISION**

## Figure:



Traits: ABC un triangle acutangle,

le cercle circonscrit à ABC,

M le milieu de [BC], l'orthocentre de ABC, Η

la A-bissectrice intérieure de ABC, Ва

la perpendiculaire à Ba issue de H, Iah

E, F les points d'intersection de Iah resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF,

K le second point d'intersection de Ba et 1\*a,

et Α" l'antipôle de A relativement à 0.

Donné: (HKM) passe par A". 26

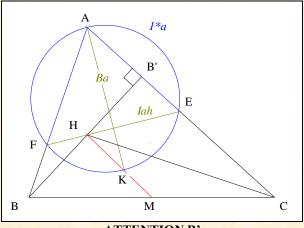
## 12. Collinearity

## **VISION**

<sup>24</sup> Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle

<sup>25</sup> Ayme J.-L., A bissector, AoPS du 27/07/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=599779 26

Beautiful collinearity, AoPS du 01/06/2009; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1512816



ATTENTION B'

Traits: ABC un triangle acutangle,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

Ba la A-bissectrice intérieure de ABC, le pied de la C-hauteur de ABC,

la H-bissectrice intérieure du triangle CHB',

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF

K le second point d'intersection de Ba et 1\*a.

**Donné :** H, K et M sont alignés. <sup>27</sup>

Commentaire : ce problème posé en 2006 apparaît comme une réciproque de celui donné à la 26e O.M. de

Russie en 2000.

## 13. La tangente de l'auteur

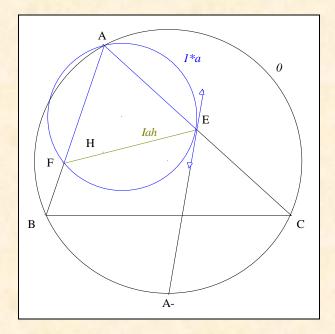
et

**VISION** 

Figure:

-

Collinear problem # 6, Mathlinks du 26/07/2010; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=358736



ABC Traits: un triangle acutangle,

le cercle circonscrit à ABC,

l'orthocentre de ABC, Η

la A-isocélienne 28 de ABC issue de H, Iah

E, F les points d'intersection de Iah resp. avec [AC], [AB],

1\*a le cercle circonscrit au triangle AEF,

Tela tangente à 1\*a en E

et Ale second A-perpoint de ABC.

Donné: Te passe par A-. 29

## 14. Une seconde tangente de l'auteur

## **VISION**

# Figure:

G E Iah F Η K C В M

<sup>28</sup> Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle Ayme J.-L., A tangent, AoPS du 27/07/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=599784

H l'orthocentre de ABC,

*Iah* la A-isocélienne <sup>30</sup> de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

le cercle de diamètre [AH],

M le milieu de [BC],

G le second point d'intersection de (MH) avec 1a,

Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,

K le second point d'intersection de *Ba* et (MH),

le cercle passant par G, H, E

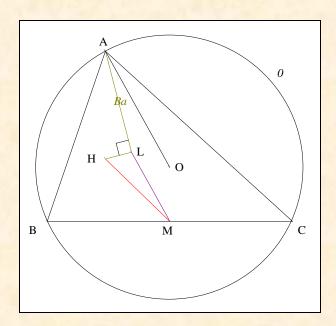
et Te la tangente à I en E.

**Donné:** Te passe par K.<sup>31</sup>

#### 15. Deux parallèles

#### **VISION**

## Figure:



Traits: ABC un triangle acutangle,

0 le cercle circonscrit à ABC,

O le centre de 0,
M le milieu de [BC],
H l'orthocentre de ABC,

Ba la A-bissectrice intérieure de ABC

et L le pied de la perpendiculaire à Ba issue de H.

**Donné:** (ML) est parallèle à (AO). 32

Commentaire : penser à appliquer "le petit théorème" de Pappus.

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle Ayme J.-L., Three concurrent lines, *Mathlinks* du 15/06/2010;

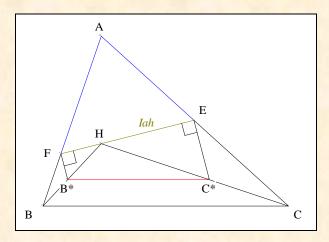
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&p=1909959

Parallel to AO, AoPS du 16/07/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=598138

# 16. Une parallèle à (BC)

## **VISION**

#### Figure:



Traits: ABC un triangle acutangle,

H l'orthocentre de ABC,

*Iah* la A-isocélienne <sup>33</sup> de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

et B\*, C\* les points d'intersection des perpendiculaires à (EF) en E, F resp. avec (HB), (HC).

**Donné :** (B\*C\*) est parallèle à (BC). 34

**Commentaire :** une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur <sup>35</sup>.

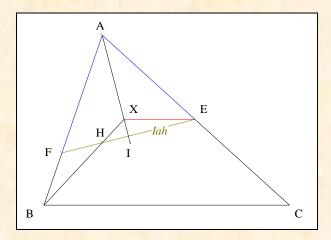
## 17. Une parallèle à (BC)

**VISION** 

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle

Parallel lines in a triangle, *Mathlinks* du 25/07/2010;

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=358736 Ayme J.-L., La ponctuelle (MH), G.G.G. vol. **7**, p. 47-50; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



H l'orthocentre de ABC,

*lah* la A-isocélienne <sup>36</sup> de ABC issue de H,

E, F les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],

I le centre de ABC

et X le point d'intersection de (AI) et (BH).

**Donné :** (EX) est parallèle à (BC). 37

Commentaire : une preuve synthétique met en œuvre le cercle de diamètre [AH] suivi du théorème

"Hexagramma mysticum" de Pascal.

# C. RÉSULTATS COLLATÉRAUX

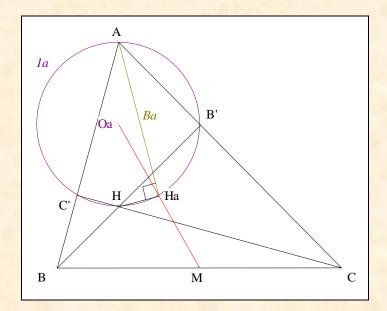
## 1. Un alignement

**VISION** 

Figure:

\_

Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle



H l'orthocentre de ABC,

B', C' les pied des B, C-hauteurs de ABC, Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,

Ha le pied de la perpendiculaire à *Ba* issue de H,

M le milieu de [BC],

la le cercle de diamètre [AH]

et Oa le centre de 1a.

**Donné :** Oa, Ha et M sont alignés. 38

**Commentaire**: une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur <sup>39</sup>.

## 2. Concurrence

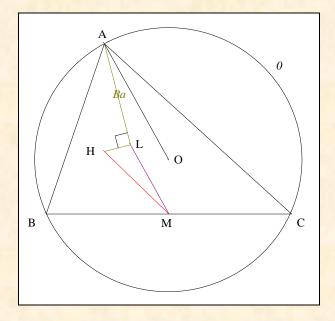
**VISION** 

Figure:

38

Tudosi M., Ivory Coast 1976 [projections from H on bisectors of <CAB], Mathlinks du 13/01/2005;

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=23523 Ayme J.-L., La ponctuelle (MH), G.G.G. vol. 7, p. 44-45; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



0 le cercle circonscrit à ABC,

M le milieu de [BC], H l'orthocentre de ABC,

les pieds de B, C-hauteurs de ABC

et G le point d'intersection de la demi-droite [MH) avec 0.

**Donné:** (AG), () et (BC) sont concourantes. 40

#### 3. Quatre points cocycliques

#### VISION

# Figure:

A P P C

Traits: ABC un triangle,

et

H l'orthocentre de ABC, M le milieu de [BC],

P le pied de la perpendiculaire à (AM) issue de H, L le pied de la A-bissectrice intérieure de ABC Q le pied de la perpendiculaire à (AL) issue de H.

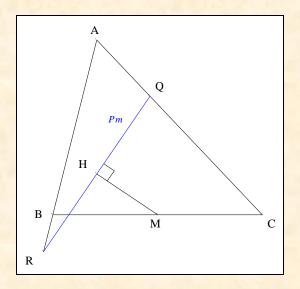
Concurrence problem, AoPS du 12/07/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=597577

**Donné:** L, M, P et Q sont cocycliques. 41

# 4. Un exercice d'Oleg Faynsteyn

#### **VISION**

## Figure:



Traits: ABC un triangle acutangle,

H l'orthocentre de ABC, M le milieu de [BC],

Pm la perpendiculaire à (MH) en H

et Q, R les points d'intersection de Pm resp. avec (AC), (AB).

**Donné :** H est le milieu de [QR]. 42

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur 43.

Ayme J.-L., Four concyclic points, AoPS du 16/05/2014;

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=589644 Faynsteyn O., *Elemente der Mathematik*, problem **1180**;

solution, Elemente der Mathematik vol. **58**, **1** (2003)

Ayme J.-L., La ponctuelle (MH), G.G.G. vol. 7, p. 6-7; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/