

DIOPHANTE

UNE AFFAIRE D'ANGLES D1855 ¹

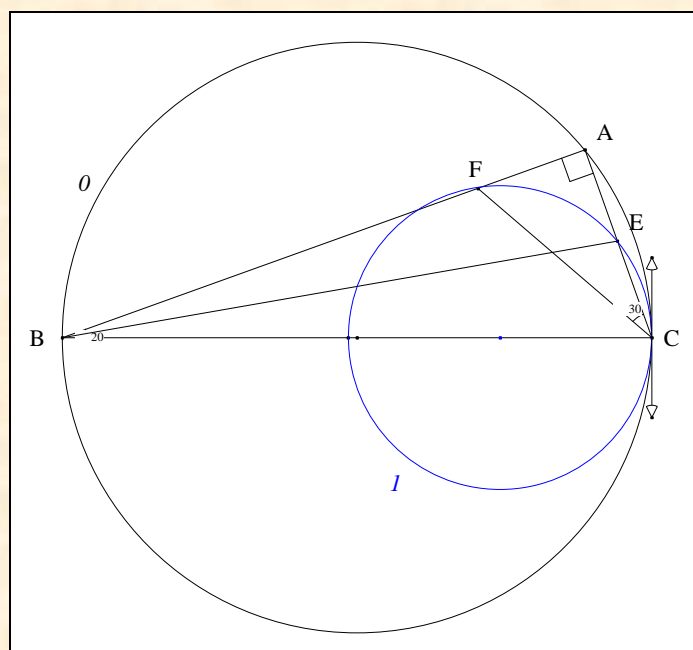
proposé

par

Jean-Louis AYME

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle A-rectangle tel que $\angle ABC = 20^\circ$,
O le cercle circonscrit à ABC,
F le point de [AB] tel que $\angle ACF = 30^\circ$,
I le cercle tangent à O en C passant par F
et E le second point d'intersection de I avec (CA).

Donné : (BE) est la B-bissectrice intérieure de ABC.

VISUALISATION MÉTRIQUE

¹

Ayme J.-L., A bisector, AoPS du 02/11/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1538680_a_bisector
Fondanaiche P., *Diophante* ; <http://www.diophante.fr/problemes-par-themes/geometrie/d1-geometrie-plane-triangles-et-cercles/3943-d1855-une-affaire-d-angles>

- Une chasse segmentaire et trigonométrique :

- * $b = a \cdot \sin 20$
- * $CF = b / \cos 20 = a \cdot \tan 20$
- * $CT = \frac{1}{2} \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \tan 20$ $\angle CUT = 50^\circ$
- * $CU = CT / \sin 50 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sin 20 / (\cos 30 \cdot \sin 50)$
- * $CX = 2 \cdot CU = a \cdot \sin 20 / (\cos 30 \cdot \sin 50)$
- * $CE = CX \cdot \sin 20 = a \cdot \sin^2 20 / (\cos 30 \cdot \sin 50)$ $AC = a \cdot \sin 20$
- * $AE = AC - CE = a \cdot \sin 20 [1 - \sin 20 / (\cos 30 \cdot \sin 50)]$
- * $AB/CB = \cos 20$
- * $AE / EC = (\cos 30 \cdot \sin 50) / \sin 20 - 1$

Vérification de l'égalité $AE / EC = AB/CB$

- * $(\cos 30 \cdot \sin 50) / \sin 20 = 1 + \cos 20$
- * $\frac{1}{2} \cdot [\sin 80 + \sin 20] / \sin 20 = 2 \cdot \cos^2 10$
- * $\frac{1}{2} \cdot [2 \cdot \sin 40 \cdot \cos 40 + \sin 20] / \sin 20 = 2 \cdot \cos^2 10$
- * $2 \cdot \cos 20 \cdot \cos 40 + \frac{1}{2} = 2 \cdot \cos^2 10$
- * $\cos 60 + \cos 20 + \frac{1}{2} = 2 \cdot \cos^2 10$
- * $\frac{1}{2} + \cos 20 + \frac{1}{2} = 2 \cdot \cos^2 10$
- * $1 + \cos 20 = 2 \cdot \cos^2 10$

- **Conclusion :** (BE) est la B-bissectrice intérieure de ABC.