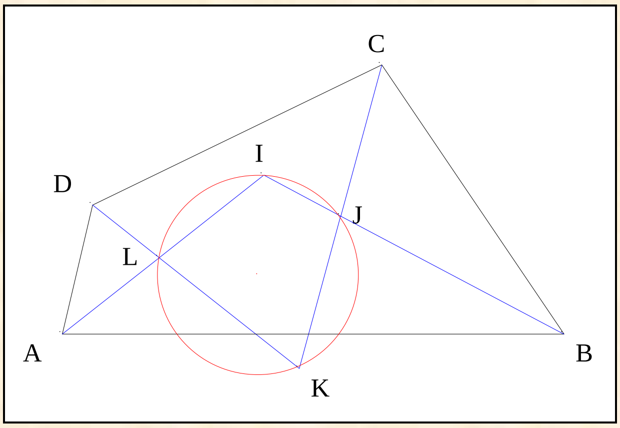
LE CERCLE DE LOUIS PUISSANT

GÉNÉRALISATION ET RÉFLEXION

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente le cercle de Louis Puissant suivi de la généralisation du russe Isaac Moisevitch Yaglom et d'une réflexion métaphysique de l'auteur qui prend comme point de départ une remarque du géomètre américain Ross Honsberger.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

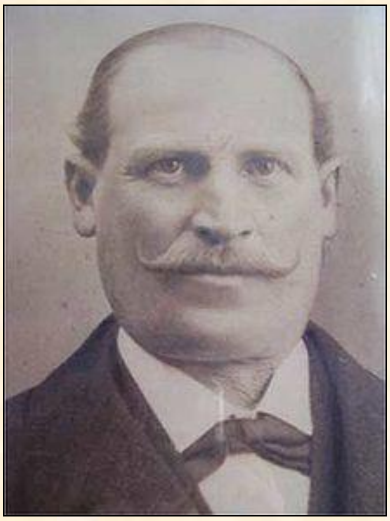
---

[1] St.-Denis, Île de la Réunion (France).

Sommaire

A. LOUIS PUISSANT

1. Une courte biographie de Louis Puissant



Louis P. Puissant est né le 22 septembre 1769 à la ferme de la Gatellerie, commune du Chatelet-en-Brie (Seine-et-Marne, France) dans une famille d'agriculteur.
Orphelin très jeune, il est recueilli par une famille de Château-Thierry.
Élève, puis étudiant studieux, il entre à la fin des ses études comme employé au Dépôt de la guerre où il est admis en qualité de colonel au corps des Ingénieurs géographes à l'armée des Pyrénées Occidentales en 1793. En 1796, il est appelé par Antoine-François Lomet, baron des Foucauds pour enseigner à l'École Centrale d’Agen (Lot-et-Garonne, France).
Entre 1798 et 1802, il publie un traité de *Géométrie analytique* inspiré par les séminaires de l'École polytechnique que dirigeait Monge comme l'ont fait durant cette période, Lacroix, Biot et Lefrançais.

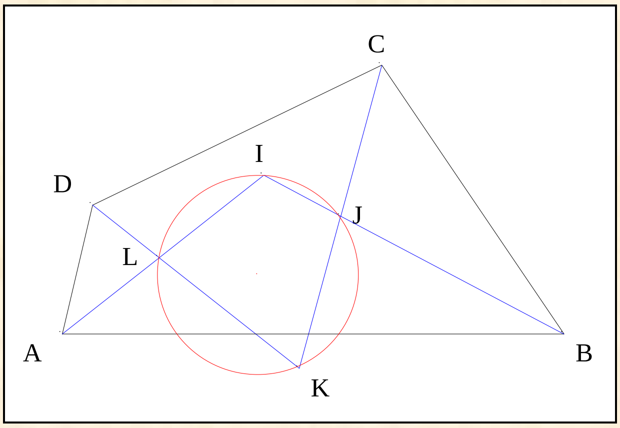
Entre octobre 1802 et août 1803, l'ingénieur géographe de première classe Louis Puissant est chargé du lever de la carte de l'île d'Elbe en Italie. En octobre 1803, il enseigne les mathématiques à l'École impériale militaire de Fontainebleau qui sera transférée en 1808 à Saint-Cyr où il y exercera jusqu'en 1809.
De 1809 à 1833, il dirige l'École de Géographie de Paris.
En 1810, il est élu membre de la Société Philomathique de Paris, décoré au titre de Chevalier de l'Ordre Royal et Militaire de Saint-Louis en 1814, puis de Chevalier de la Légion d'Honneur en 1821 et Officier en 1826. Il entre à l'Académie des Sciences, section géométrie le 3 novembre 1828.
Il décède le 8 janvier 1843 à Paris et est inhumé le 12 janvier au cimetière Montparnasse.

Rappelons que de son mariage avec Françoise Coutet, naîtra un fils, Louis (1793-1836), qui intégrera l'École polytechnique en 1811.

2. Le cercle de Puissant

VISION

Figure :

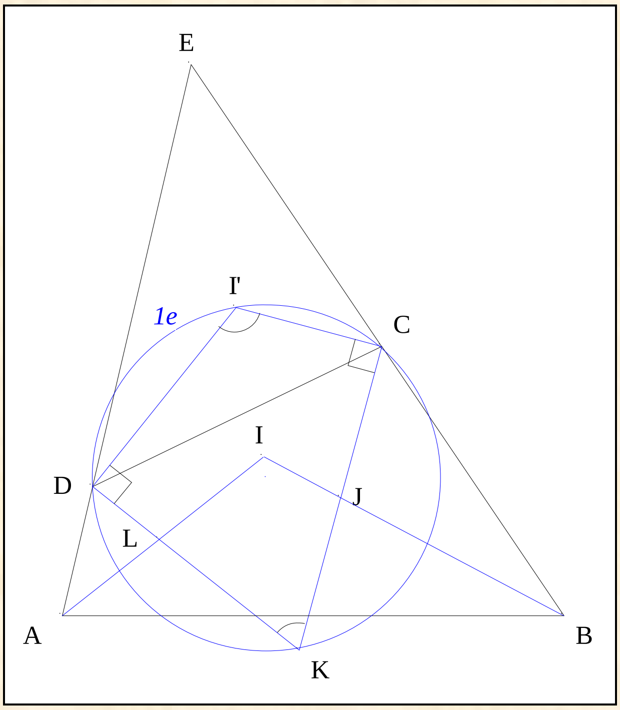


Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
et	I, J, K, L	les points d'intersection resp. des bissectrices des angles <DAB et <ABC, <ABC et <BCD, <BCD et <CDA, <CDA et <DAB.

Donné : le quadrilatère IJKL est cyclique. [2]

VISUALISATION

[2] Puissant L., Géométrie analytique, *Correspondance sur l'École Polytechnique* **I** (1806) 191-193.

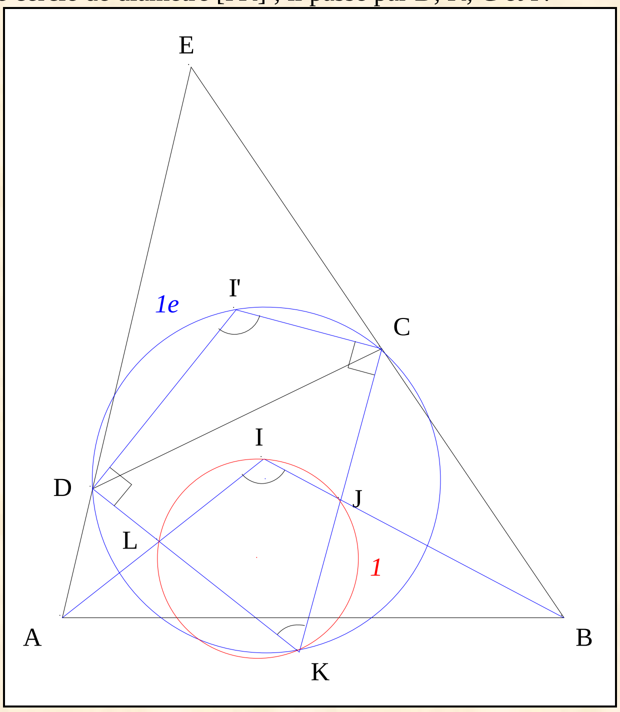


- Notons E le point d'intersection de (AD) et (BC),
  et I' le centre du triangle EDC.

- **Scolies :** **(1)** K est le E-excentre du triangle CDE
  (2) I est le centre du triangle ABE.

- D'après **C. 1.** Une cercle de Mention, D, K, C et I' sont cocycliques ;
  en conséquence, <CKD et <DI'C sont supplémentaires.

- Notons *1e* le cercle de diamètre [I'K] ; il passe par D, K, C et I'.



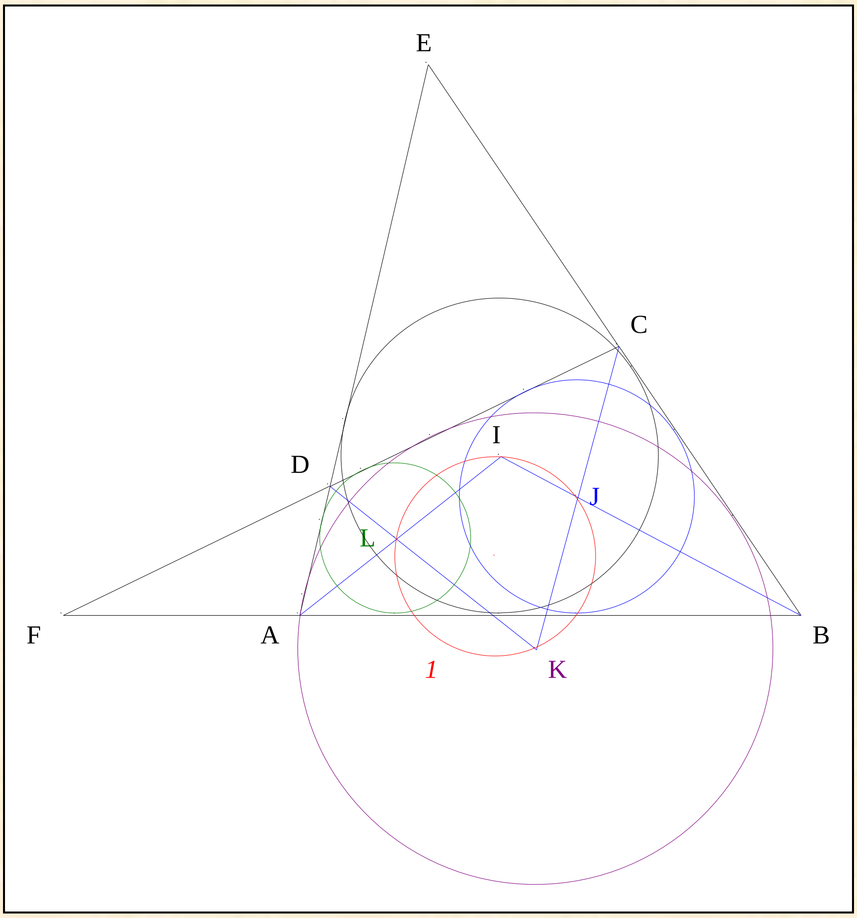
- D'après **C. 2.** Une sécante mouvante, <DI'C et <AIB sont égaux ;
  en conséquence, <CKD et <AIB sont supplémentaires

ou encore <JKL et <LIJ sont supplémentaires.

- **Conclusion :** le quadrilatère IJKL est cyclique.

- Notons *1* ce cercle.

Scolies : **(1)** natures géométriques de J et L

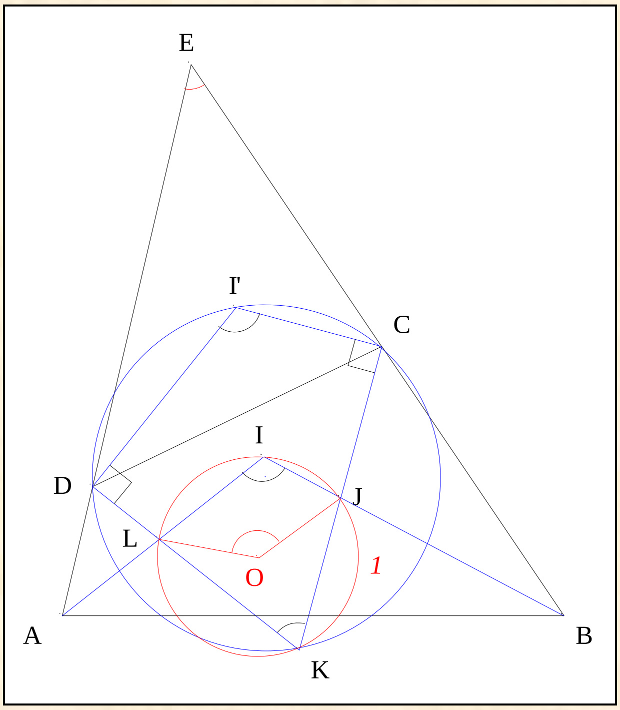


- Notons F le point d'intersection de (AB) et (CD).

- **Conclusion :** J est le centre du triangle BCF et L est le F-excentre du triangle ADF.

Énoncé traditionnel : les centres des cercles tangents à trois côtés d'un quadrilatère convexe sont cocycliques.

(2) Une importante chasse angulaire



- Notons O le centre de *1*.

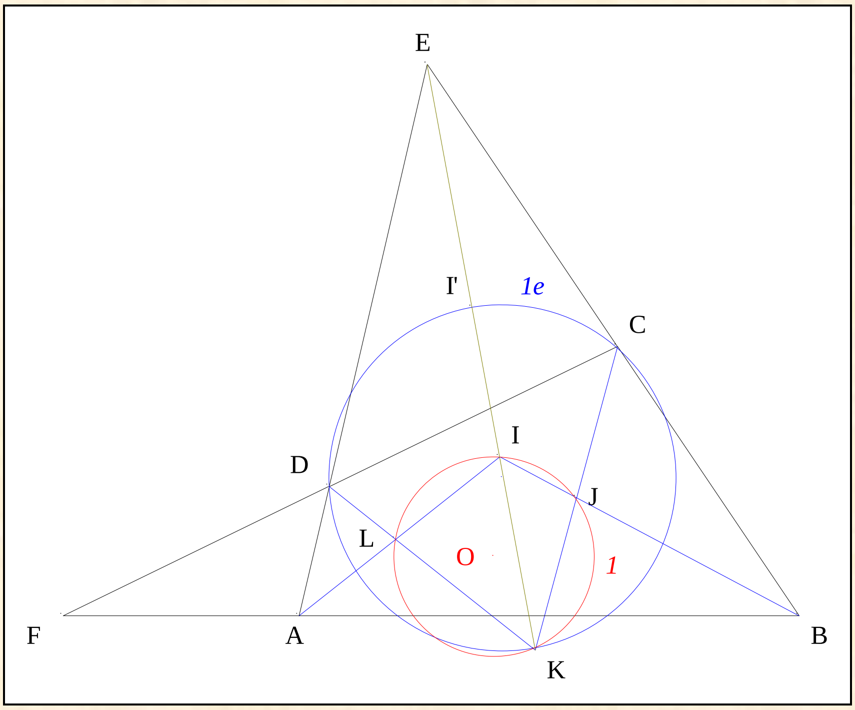
- Une chasse angulaire à Π près :
  d'après "Le théorème de l'angle au centre", <JOL = 2.<LIJ ;
  par une autre écriture 2.<LIJ = 2.<AIB ;
  d'après **C. 2.** L'angle I, <AIB = 1.d + 1/2.<AEB ;
  en conséquence, 2.<AIB = <AEB.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <JOL = <AEB.

Énoncé : l'angle de sommet le centre de *1* et de côtés passant par deux centres correspondant à deux droites est égal à Π près à l'angle de ces deux droites.

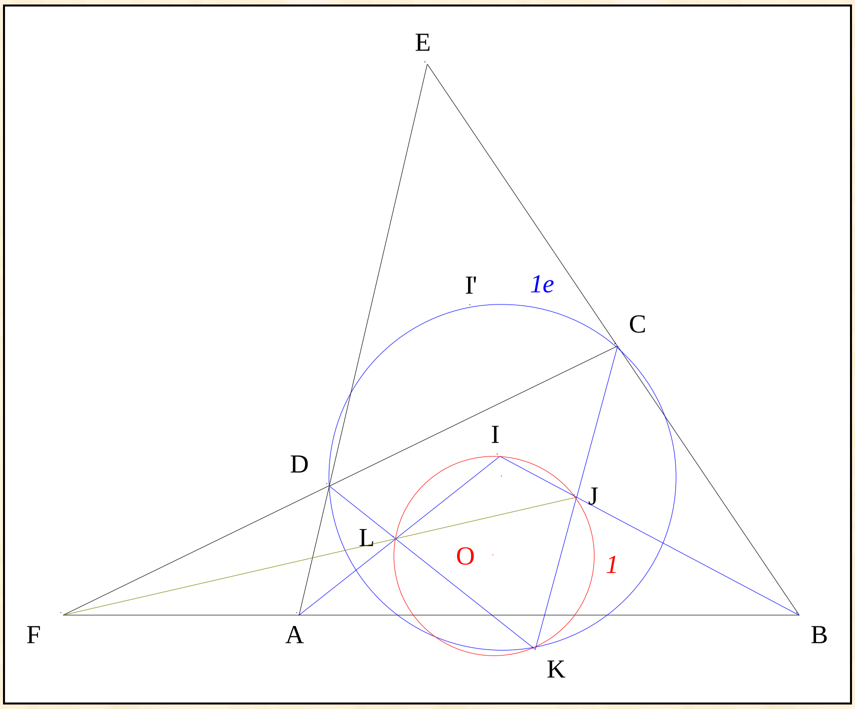
Commentaire : ce résultat sera réinvesti par la suite.

(3) Un alignement



- **Conclusion :** E, I', I, K et le centre de *1e* sont alignés.

(4) Avec le point F

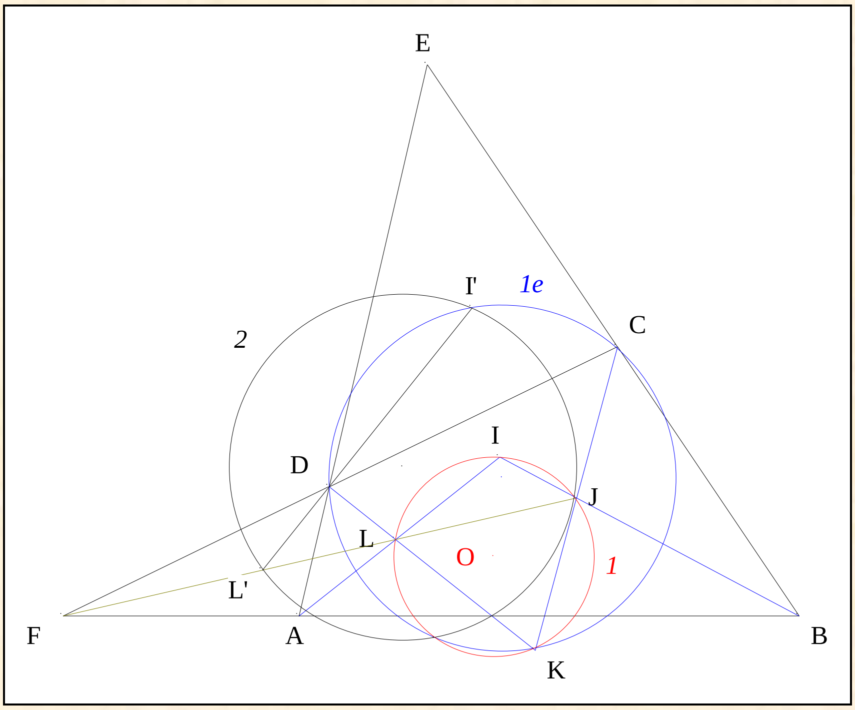


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  - * <KOI = <BFC
  - * F, L et J sont alignés.

(5) (FLJ) is perpendicular to (EIK) [3]

(6) Un résultat de l'auteur

[3] Bradley J., Problem 2978, *Crux Mathematicorum* **30** n° **7** (2004) 432 ;
Solution, *Crux Mathematicorum* **31** n° **7** (2004) 470-471 ;



- Notons L' le centre du triangle ADF
  et *2* le cercle passant par I', J, L'.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème du pivot"
  appliqué au triangle DL'L avec I' sur (DL'), J sur (L'L), K sur (DL),
  1e, *2* et *1* sont concourants.

3. Note historique

En 1806, le professeur Louis Puissant de l'École impériale militaire de Fontainebleau découvre un cercle qui aujourd'hui porte son nom et que relate le professeur de mathématiques Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) dans sa *Correspondance sur l'École polytechnique* **1** à la page 193 :

Si 4 cercles touchent chacun trois côtés d'un quadrilatère plan quelconque,
les centres de ces cercles seront toujours sur une même circonférence.

Le rédacteur J. N. P. Hachette précisait :

On invite MM les élèves de l'École polytechnique à donner la démonstration de ce théorème.

La première preuve[4] de nature angulaire a été donnée l'année suivante par un élève de l'École qui signa :

Solution par B. élève

Ce problème sera (re)découvert et donné sans preuve en 1828 par Jacob Steiner[5] dans les *Annales de Mathématiques* de Gergonne. Il faudra attendre l'année 1862 pour qu'une première preuve de nature angulaire soit proposée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* par de Jules Alexandre Mention[6] de retour de Russie.

---

4 B. élève, *Correspondance sur l'École Polytechnique* **VII** (janvier 1807) 228.

5 Steiner J. (1796-1863), Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet, *Annales de Mathématiques* de Gergonne **18** (1828) 302 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA.

6 Mention J. A., Démonstration d'un théorème de M. Steiner, *Nouvelles Annales de Mathématiques* série 2, **I** (1862) 16-20 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

En 1995, Ross Honsberger[7] dans son classique livre de Géométrie intitulé *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century*… remet en exergue le cercle de Louis Puissant.

4. La généralisation d'Isaac Moisevitch Yaglom [8]

4. 1. Un n-droite

Pour tout naturel n strictement supérieur à 2,
n droites distinctes d'un plan, notées *1*, *2*,…, *n*, sont dites en *position générale*
si, deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles
et *si*, trois quelconques d'entre elles ne sont pas concourantes.

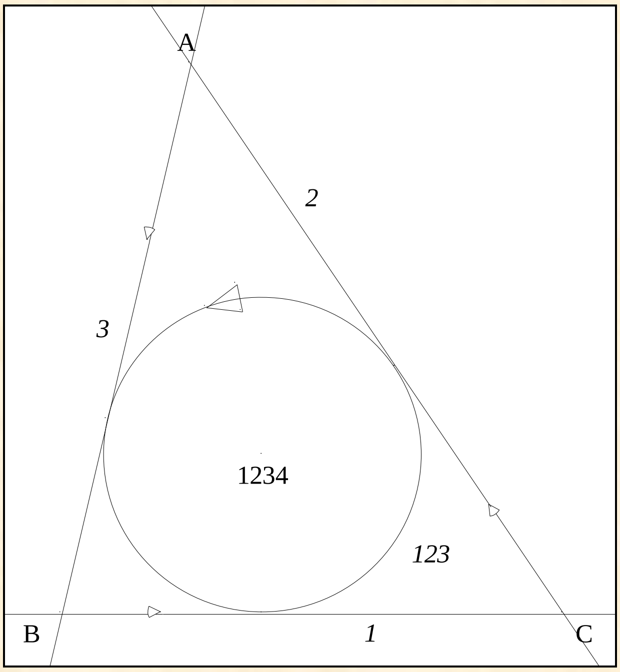
Sous ce point de vue, nous parlerons d'un "n-droite" que nous noterons (*12…n*).

4. 2. Un n-droite orienté

Pour tout naturel n strictement supérieur à 2 et pour tout n-droite,
un n-droite est dit *orienté*
si, chaque droite de ce n-droite est orientée.

Sous ce point de vue, nous parlerons d'un "n-droite orienté".

4. 3. Le cercle d'un 3-droite orienté



- Notons (*123*) un 3-droite orienté.

- Nous savons qu'il existe quatre cercles (inscrit et trois exinscrits) tangents à *1*, *2* et *3*,
  et que chacun de ces cercle peut-être orientés de deux façon différentes, l'une étant l'opposée de l'autre.

- Un 3-droite orienté permet de retenir qu'un seul de ces quatre cercles en lui attribuant une orientation

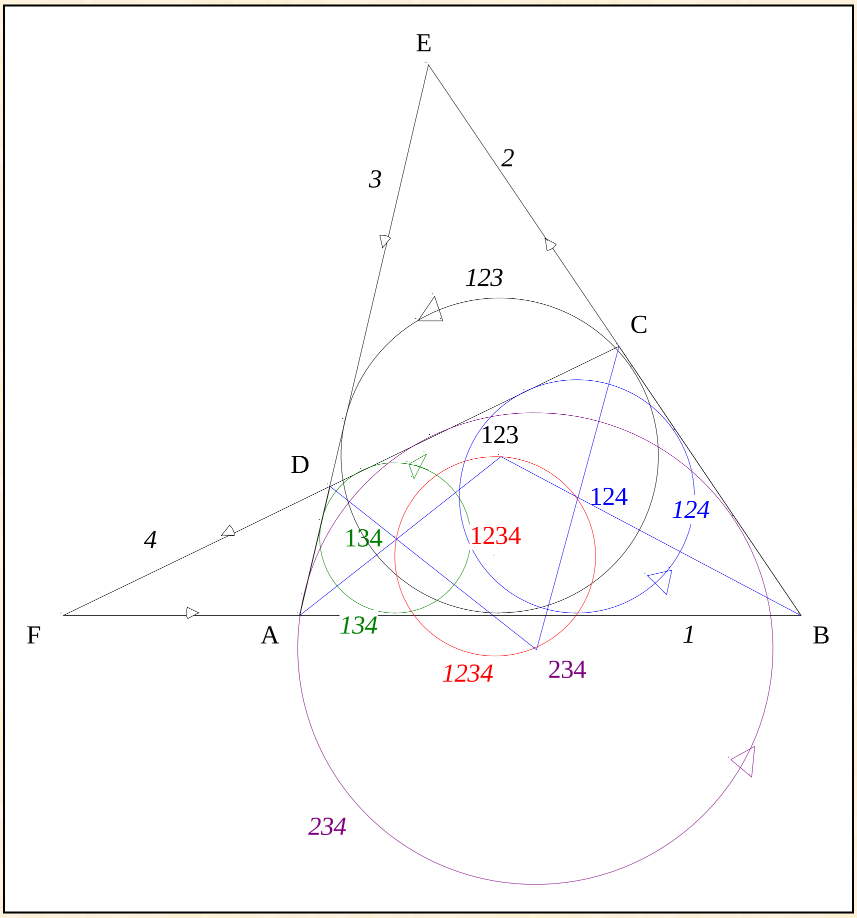
[7] Honsberger R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, New Mathematical Library (1995) 35.
[8] Yaglom I. M., Golovina, Problème 31, *Induccion en la Geometria*, Editions Mir, Moscou (1976) 90-91.

qui coïncide aux points de contact avec l'orientation des tangentes.

- Le cercle retenu est noté *123* et son centre 123.

- Par homogénéité avec la suite,
  nous dirons qu'un 3-droite orienté conduit à "un cercle de Puissant", noté encore P_3.

4. 4. Le cercle de Puissant d'un 4-droite orienté ou l'hypothèse de départ d'un raisonnement par récurrence



- En considérant le 4-droite orienté (*1234*) ci-dessus,
  nous retrouvons le cercle de Puissant *1234* de centre 1234.

- Comme pour chaque droite, il y a deux orientations, un 4-droite conduit à seize 4-droite orienté.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que les seize 4-droite orienté conduisent à 16 cercles.

- Globalement, un 4-droite orienté conduit à un cercle.

- Notons P_4 ce cercle.

- Sachant qu'un 4-droite orienté conduit à quatre 3-droite orienté,
  P_4 passe par les centres des cercles de ces quatre 3-droite orienté.

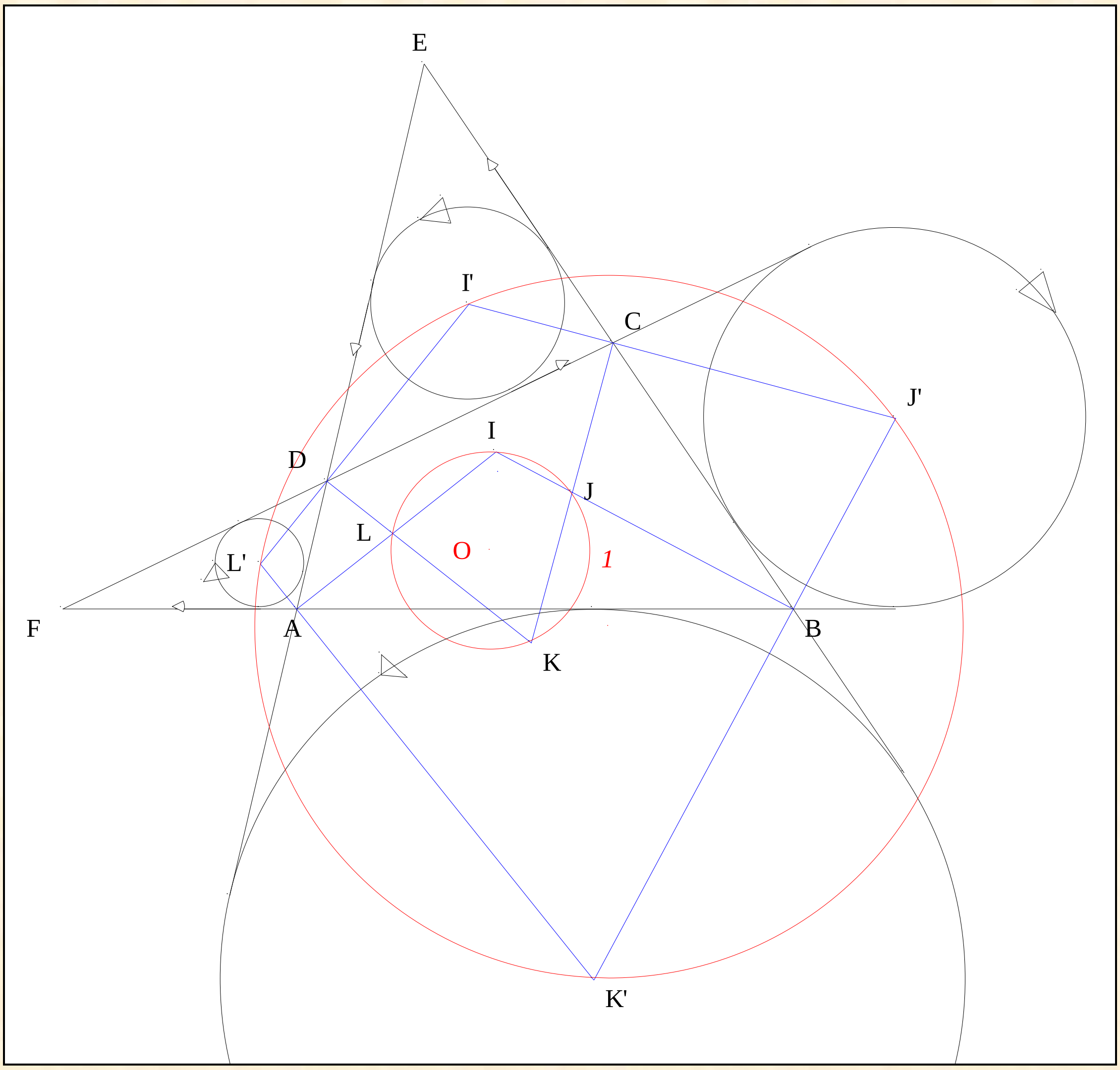
- **Hypothèse de départ :** la proposition [le cercle d'un 4-droite orienté **existe**] est vraie.

Scolies : **(1)** c'est "le cercle de Puissant du 4-droite orienté".

(2) Une observation sur la figure ci-dessus

- Étant en position générale, trois de ces centres sont cocycliques, par exemple 234 , 134 , 124.
- Observons que *2* et *3* sont prises conjointement ou bien alternativement.
- Rappelons que l'angle de sommet 1234 et de côtés passant par 124 et 134
  est égal à Π près
  à l'angle des droites *2* et *3*.

(3) Rappelons la situation étudiée par Darij Grinberg [9]
où les quatre cercles considérés sont qualifiés "d'excercles du quadrilatère ABCD".



- Notons I', L' les centres resp. des triangles CDE, DAF
  et J', K' les F, E-excentres resp. des triangles BCF, ABE.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que I', J', K' et L' sont cocycliques.
- Même chasse angulaire qu'en **A. 2.** Scolie 2.

---

9 Grinberg D., *A tour around Quadrilateral Geometry* ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/.

4. 5. L'hypothèse d'hérédité

- Notons n un naturel supérieur ou égal à 4
  et (*123…n*) un n-droite orienté.

- Supposons que la proposition [le cercle de (*123…n*) existe] est vraie.

- Notons *123…n* ce cercle
  et 123…n son centre.

- Considérons une nouvelle droite orientée.

- Notons *n+1* cette droite orientée telle que (*123…n+1*) soit un (n+1)-droite orienté.

- Ce (n+1)-droite orienté conduit en omettant chaque fois une droite à (n+1) n-droites orientés.

- Par hypothèse, chaque n-droite orienté conduisant à un cercle de Puissant,
  nous avons (n+1) cercles de Puissant et en conséquence (n+1) centres.
  Par exemple,

(*123…n*)	conduit au cercle	*123…n*	de centre 123…n
(*23…n, n+1*)	conduit au cercle	*23…n(n+1)*	de centre 23…n(n+1)
(*13…n, n+1*)	conduit au cercle	*13…n(n+1)*	de centre 13…n(n+1)
…			

- Nous devons montrer que ces (n+1) centre sont cocycliques.

- Étant en situation générale, trois de ces centres sont cocycliques ;
  par exemple 123…n , 23…n(n+1) , 13…n(n+1).

- Notons P_{n+1} ce cercle.

- Rappelons que l'angle de sommet 123…n et
  de côtés passant par 23…n(n+1) et 13…n(n+1)
  est égal à Π près
  à l'angle des droites *1* et *2*.

- Considérons le n-droite orienté (*124…n, n+1*) qui conduit au cercle *124…n(n+1)* de centre 124…n(n+1).

- Une chasse angulaire à Π près :

  l'angle de sommet 124…n(n+1) et
  de côtés passant par 23…n(n+1) et 123…n
  est égal à Π près
  à l'angle des droites *1* et *(n+1)*.

  L'angle de sommet 124…n(n+1) et
  de côtés passant par 123…n et 13…n(n+1)
  est égal à Π près
  à l'angle des droites *(n+1)* et *2*.

  Par addition, l'angle de sommet 124…n(n+1) et
  de côtés passant par 23…n(n+1) et 13…n(n+1)
  est égal à Π près
  à l'angle des droites *1* et *2*.

  En conséquence, 124…n(n+1) est sur P_{n+1}.

- Mutatis mutandis,

nous montrerions que les n-4 centres restant sont sur P_{n+1} ;
en conséquence la proposition [le cercle de ($123...n(n+1)$) existe] est vraie.

- **Conclusion :** n'ayant rencontré aucune contrainte sur le choix de n, l'hypothèse d'hérédité

[$\forall$ n $\geq$ 4, [le cercle de $123...n$ existe $\Rightarrow$ le cercle de $123...n(n+1)$ existe]] est vraie.

4. 6. Le cercle de Puissant d'un n-droite orienté

- D'après "Le théorème de récurrence", la proposition [$\forall$ n $\geq$ 4, le cercle de $123...n$ existe] est vraie.
- Nous dirons que c'est "le cercle de Puissant du n-droite orienté".

5. Note historique :

En 1911, Jacques Salomon Hadamard[10] semble être le premier à généraliser le cercle de Puissant en considérant les bissectrices extérieures.
En 1976, Isaac Moisevitch Yaglom[11] (1921-1988) généralise le cercle de Puissant au cas d'un n-droite orienté.
En 2004, Darij Grinberg[12] reconsidère la situation d'Hadamard (Cf. p. 11), précise le centre du cercle de Puissant et envisage le cas particulier où le quadrilatère est circonscriptible dans un article non publié.
En 2010, l'auteur[13] rappelle la généralisation de Yaglom sur le site *Mathlinks*.

B. UNE RÉFLEXION MÉTAPHYSIQUE

L'auteur propose une réflexion qui n'engage que lui-même…

1. Figures et formes

En géométrie du triangle, la notion de figure qui regroupe points, droites et cercles est plus étroite que celle de forme en morphologie qui peut être statique, dynamique, ou ni l'une ni l'autre i.e. une ramification.

Depuis la plus haute Antiquité, les hommes ont cherché un langage à la fois universel et synthétique, et leurs recherches les ont amenés à découvrir des images, des symboles qui expriment, en les réduisant à l'essentiel, les réalités les plus riches et les plus complexes. Les images et les symboles parlent ; ils ont un langage mais le langage symbolique absolu est celui des figures géométriques. Les figures géométriques sont comme une structure, la charpente de la réalité... Mais ces formes, bien que réduites à l'état de squelette, ne sont pas mortes pour autant, car elles représentent des réalités vivantes dans l'homme et dans l'univers. C'est pourquoi pour pouvoir les interpréter nous devons les vivifier, leur insuffler l'esprit ; elles ne signifient rien tant que nous nous contentons de les étudier extérieurement à nous.[14]

Les figures géométriques peuvent devenir le miroir de notre conscience

Pour un géomètre sensible à la forme, la figure qui lui apparaît dans une **vision** est celle d'un Sujet qu'on appelait autrefois "être" géométrique. En dévoilant ses **traits** essentiels à son regard amical, le Sujet lui laisse

---

10 Hadamard J. S. (1865-1963), Problème 66, *Leçons de géométrie élémentaire* **I**: *Géométrie plane*, Paris (1911) 73.
11 Yaglom I. M., Golovina, Problème 31, *Induccion en la Geometria*, Editions Mir, Moscou (1976) 90-91.
12 Grinberg D., *A tour around Quadrilateral Geometry* ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/.
13 Ayme J.-L., A nice recurrence, *Mathlinks* du /12/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=383262
14 Extraits de Omraam Mikhaël Aïvanhov.

gracieusement entrevoir une illumination, voire un théorème. Comme cela est souvent le cas, le géomètre réagit d'une façon belliqueuse en aiguisant son regard qui devient binoculaire. Agressé visuellement, le généreux Sujet se voile dans une figure sans expression en abandonnant un **donné** inerte à la raison du géomètre.

2. La symétrie

De manière générale, la **symétrie** au sens moderne renvoie à l'existence, dans une figure sans expression quelconque, d'une opération géométrique qui ne modifie ni celle-ci, ni sa structure i.e. où l'ordre, l'ordonnance et la mise en proportion de ses éléments, répond à un ensemble de règles définies par son groupe de symétries.

Pour l'architecte romain Marcus Vitruvius Pollio, plus connu sous le nom de Vitruve qui vécut au Ier a. J.-C., la symétrie au sens primitif et non dévié dans une figure géométrique est

une proportion
qui implique
le recours à un module et à une "raison de progression" pour régler la correspondance entre les parties,
et qui résulte d'une beauté universelle et rationnelle en elle-même

La symétrie au sens ancien est une proportion que les grecs associaient l'eurhythmie qui veut dire "bon rhythme" ou "beau rhythme". En considérant une relation de mesures établies d'après un rhythme adopté, les grecs donnaient un sens à l'unité harmonique.
Rappelons que ce sens ancien se perdit à la fin du XVIIème au profit du sens moderne.

3. L'intéressante remarque de Ross Honsberger

En 1995, Ross Honsberger écrivait à la page 35 d'*Episodes in Nineteenth and Twentieth Century …*,

> *When you consider all the irregular shapes a quadrilateral can take,*
> *it really is quite remarkable that the midpoints of the sides always generate a figure with as much order as a parallelogram.*
> *Another instance of regularity emerging from even the most eccentric quadrilateral is the following result :*
>
> *the four angle-bisectors of a quadrilateral always determine a cyclic quadrilateral.*

Dans une correspondance privée, le professeur-ingénieur de la 75ème promotion de l'ESPCI[15], Alain Levelut a attiré mon attention sur le fait que le principe de Curie que je ne connaissais pas, pouvait s'appliquer à une telle situation.

4. Le principe de symétrie de Curie

Lorsque certaines causes produisent certains effets,
les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits

ou le principe contre-apposé

lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie,
cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui leur ont donné naissance

Ce principe a été énoncé en 1894 par Pierre et Jacques Curie après avoir observé les propriétés des champs électromagnétiques.

---
[15] École Supérieures de Physique et de Chimie Industrielle.

Ce principe a été étudié par Jean Sivardière en 1995 dans son énorme livre de 880 pages, intitulé *La symétrie en Mathématiques, Physique et Chimie*.
Appliquée aux figures "sans expression" de la Géométrie du triangle, Jean Sivardière traduit le principe de symétrie de Curie de la façon suivante :

une figure déduite d'une première figure ne peut pas être moins symétrique que la figure initiale si la transformation ne brise pas la symétrie

Dans tous les cas,

la symétrie du résultat (l'effet)
est supérieure
à la symétrie de la figure de départ (la cause)

Ou en évoquant le concept de groupe,

Le groupe de symétrie de la cause
est inclus ou est un sous-groupe
du groupe de symétrie de l'effet

5. Les causes

Généralement on entend par ***cause*** d'un fait ce qui le produit ou du moins participe à sa production. Donner les causes d'un fait revient à le rendre intelligible en répondant à la question :

pourquoi ce fait a-t-il lieu ?

La donnée des causes peut donc être conçue comme l'*explication* du fait par excellence.

Il faut cependant distinguer causalité, cause et déterminisme.

La causalité, c'est le rapport de cause à effet. C'est aussi un principe, philosophique, d'après lequel tout phénomène a une cause, d'après lequel la cause précède le phénomène.

Tout a une cause,
et, dans les mêmes conditions,
la même cause est suivie du même effet

Dans l'implication logique il n'y a, à strictement parler, aucune relation causale.

La cause est une notion, universelle, désignant ce qui produit l'effet.

Le déterminisme est soit un principe, soit une notion.
Le principe de déterminisme dit que tous les phénomènes naturels sont liés les uns aux autres par des relations invariables appelées lois, sans qu'il faille chercher la cause.
La notion de déterminisme désigne l'ensemble des conditions nécessaires pour un phénomène.

Pour l'auteur, l'investigation philosophique d'un géomètre sensible à l'Art consiste à apprendre, comprendre et se laisser prendre par une figure "sans expression et sans attirance" redevenue l'espace d'un instant une "figure rayonnante et charmante" entourée d'un manchon de néant, afin de co-n-naître le rôle qu'elle remplit. Dans cette vision intime, un Sujet de recherche aux traits harmonieux s'offre au regard du géomètre. Au premier froncement de sourcil du géomètre, le Sujet se sentant agressé visuellement s'évanouit en se figeant dans une figure "inerte" ayant moins de symétrie, tout en abandonnant généreusement au géomètre un résultat ayant plus de symétrie qui, peut être, lui laissera le désir de poursuivre une recherche extérieure et intérieure.

La cause n'est pas seulement ce qui précède l'effet, mais ce qui fait qu'un être existe

6. Les champs morphiques et la causalité formative

Dans les années 90, le biologiste et physicien anglais Ruppert Sheldrake postule qu'à chaque forme et par conséquence à chaque figure "inerte", correspond un champ "morphique" qui, par l'harmonie de sa radiance et de son charme" non matériels s'étendant dans l'espace et se prolongeant dans le temps, influe sur le champ morphique de toutes les figures "inertes'.

Lorsque l'harmonie d'une figure apparemment "inerte" s'est offerte au regard du géomètre, elle aura pour effet d'influencer plus tard le champ morphique d'une figure "inerte" similaire dont l'harmonie s'en trouvera probablement renforcée et augmentée en entrant en résonnance morphique.

7. Début d'une réflexion de l'auteur

Nos cinq sens extérieurs,
nous enferme dans un piège rationnel si fort
qu'il plonge dans un sommeil artificiel
toute source de connaissances intérieures

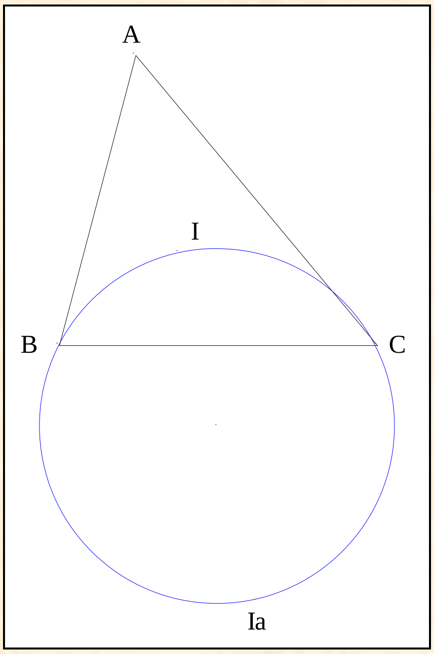
Pour dépasser et éclaircir cette apparente opposition entre les savants de l'extérieur et les Sachant de l'intérieur, le géomètre qui saura prendre du temps, pourra dans un second **T**emps, s'identifier à un anonyme chercheur qui cherche et qui, en se cherchant, réalise que la science des effets qu'il développe dans son "labo", se conjoint à la Science des Causes qui enveloppe l'oratoire de ses pensées. Alors, il pourra de lui-même s'impliquer davantage dans cette aventure qui lui est offerte et découvrir en chemin, son propre "lab-oratoire".

C. APPENDICE

1. Un cercle de Mention

VISION

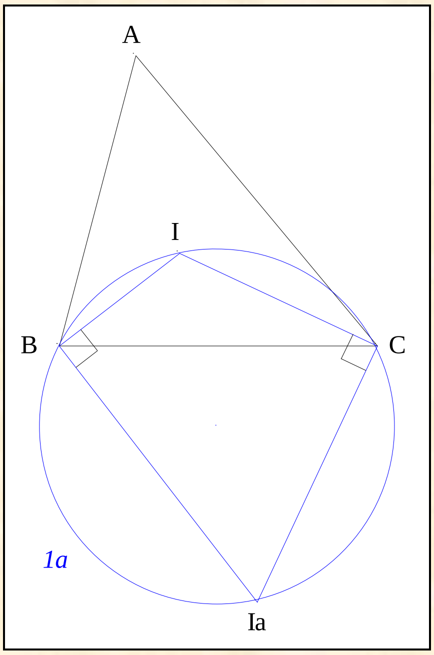
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
et Ia le A-excentre de ABC.

Donné : B, C, I et Ia sont cocycliques.[16]

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** I est le point d'intersection des B, C-bissectrices intérieures de ABC
  (2) Ia est le point d'intersection des B, C-bissectrices extérieures de ABC.
- Nous savons que (BIa) $\perp$ (BI) et (CIa) $\perp$ (CI).
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle rectangle inscriptible dans un demi cercle",

[16] L'Huilier S..

B, C, I et Ia sont cocycliques.

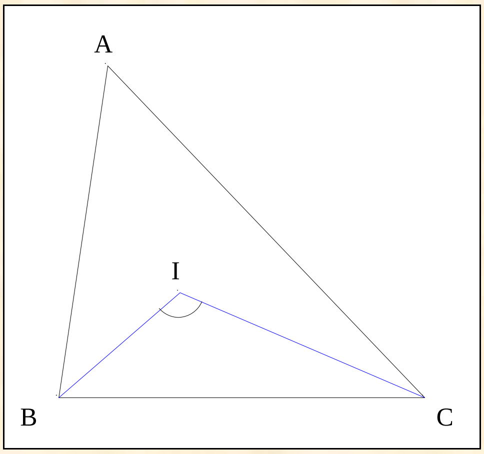
- Notons *1a* ce cercle.

Scolie : *1a* est "le A-cercle de Mention de ABC".

2. L'angle I

VISION

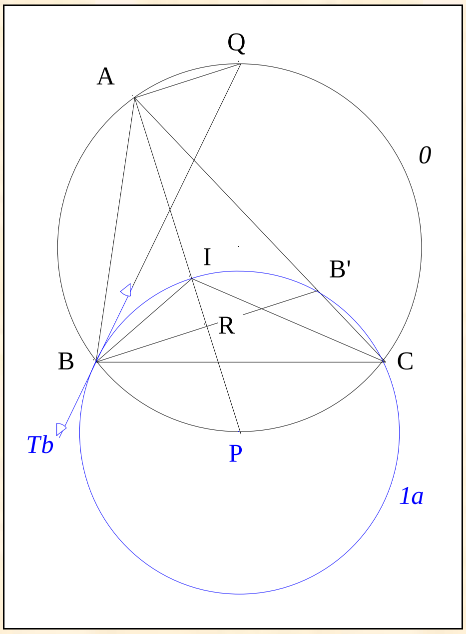
Figure :



Traits : ABC un triangle,
et I le centre de ABC.

Donné : <BIC = 1.d + 1/2.<BAC.

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  P le second point d'intersection de (AI) avec *0*,
  1a le A-cercle de Mention,
  Tb la tangente à *0* en B,
  Q l'antipôle de P relativement à *0*,
  B' le second point d'intersection de (AC) avec *1a*
  et R le point d'intersection de (AI) et (BB').

- Les cercles *1a* et *0*, les points de base B et C, les moniennes (BBQ) et (B'CA), conduisent au théorème **2** de Reim ; il s'en suit que (BB') // (QA) ;
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (QA) ⊥ (AIP) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BB')⊥ (AIP).

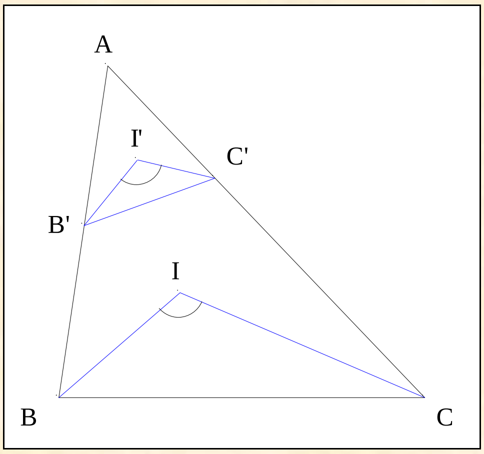
- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BIC = <BB'C ;
  Nous savons que le triangle RB'A est R-rectangle ;
  <BB'C étant un angle extérieur à RB'A; <BB'C = 1.d + 1/2.<BAC.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <BIC = 1.d + 1/2.<BAC.

3. Une sécante mouvante

VISION

Figure:



Traits: [Ax[, [Ay[deux demi-droites d'origine A,
D, *D*' deux sécantes à [Ax[, [Ay[,
B, C les points d'intersection de *D* resp. avec [Ax[, [Ay[,
B', C' les points d'intersection de *D*' resp. avec [Ax[, [Ay[
et I, I' les centres resp. des triangles ABC, AB'C'.

Donné: <BIC = <B'I'C'.

VISUALISATION

- D'après **C. 2.** L'angle I,
  * <BIC = 1.d + 1/2.<BAC
  * <B'IC' = 1.d + 1/2.<BAC .

- **Conclusion :** par symétrie et transitivité de la relation =, <BIC = <B'I'C'.