DEUX TRIANGLES SEMBLABLES

ADJACENTS PAR UN SOMMET

ET

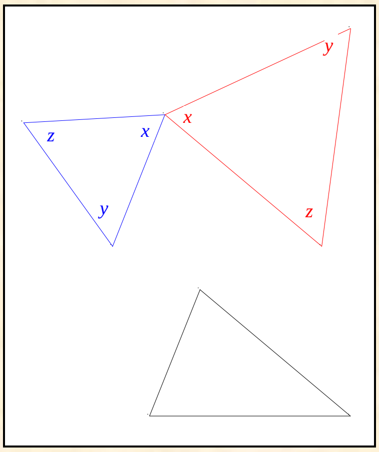
UN TRIANGLE

VARIATIONS ET GÉNÉRALISATIONS

†

Le thème d'un problème de Géométrie
est le motif
qui a inspiré le problémiste.

Jean-Louis AYME [1]



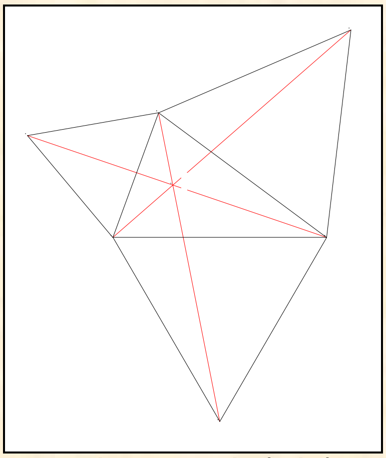
Résumé. L'auteur présente un thème intitulé *Deux triangles semblables adjacents…et un triangle* sous la forme d'une progression… Les situations envisagées proviennent de la banque de données de l'auteur. Des variations suivies de généralisations agrémentent cette recherche.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a theme entitled *Two similar adjacent triangles… and a triangle* in the form of a progression... Envisaged situations come from the database of the author. Variations followed by generalizations adorn this research.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

[1] Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 28/02/2014

Sommaire

A. LE MOTIF



Un triangle et trois triangles équilatéraux

Au printemps 1644, le père Marin Mersenne [2] entreprenait un pèlerinage à Rome. Aux étapes de Bologne, puis de Florence, il montrait aux savants de l'époque, "le problème de Fermat" qu'il emmenait avec lui dans ses bagages :

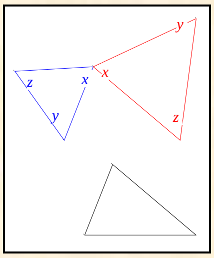
étant donné un triangle,
rechercher le point tel que
la somme de ses distances aux trois sommets,
est
minimale.

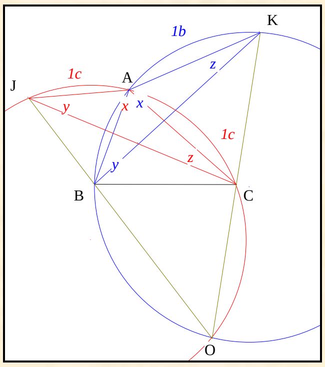
C'est ainsi que Bonaventure Cavalieri [3], Evangelista Torricelli [4] et Vincenzo Viviani [5] en prendront connaissance. La solution de Torricelli publiée en 1659 par son élève Viviani, avait pour point de départ la considération des trois triangles équilatéraux construits à l'extérieur sur les côtés du triangle et de leurs trois cercles circonscrits.

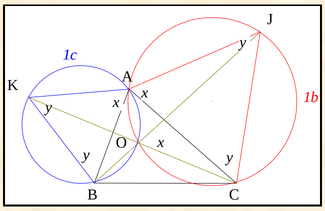
[2] Mersenne M. (1588-1648)
[3] Cavalieri B. (1598-1647)
[4] Torricelli E. (1608-1647)
[5] Viviani V. (1622-1703)

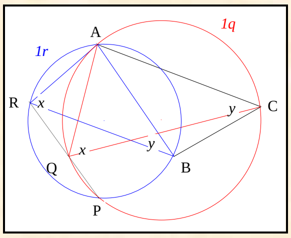
B. RÉSUMÉ DES FIGURES

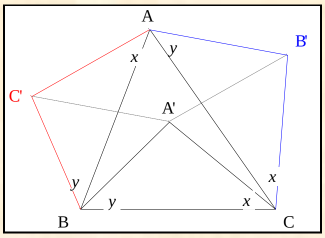
La réalisation d'un thème
passe par la fusion harmonieuse
des éléments qui le compose.
Les forces émises entre les différents éléments
doivent s'équilibrer
pour façonner un thème. [6]

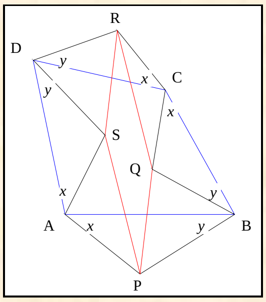


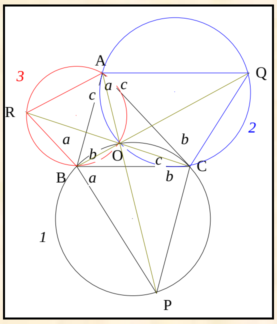


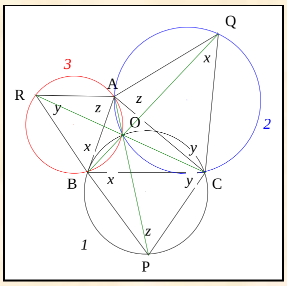


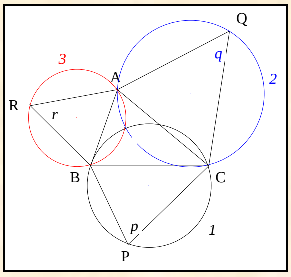


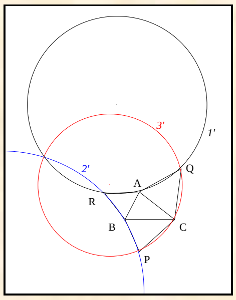




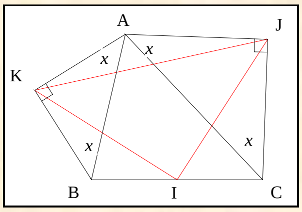


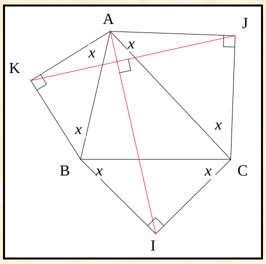


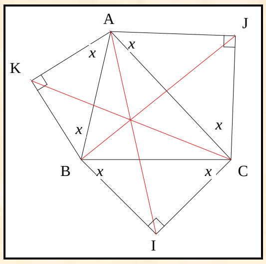


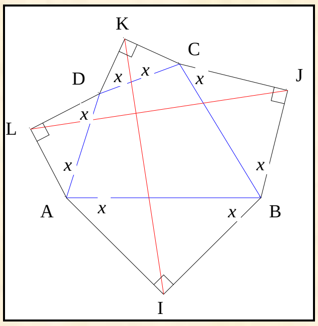


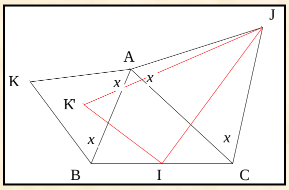
[6] Monica A. R.

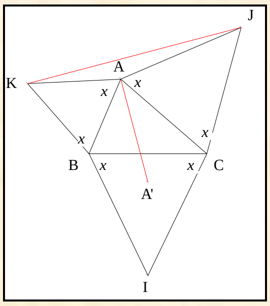

A
J
K
x
x
x
x
B
I
C

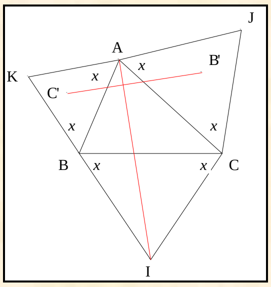

A
J
K
x
x
x
x
B
x
x
C
I

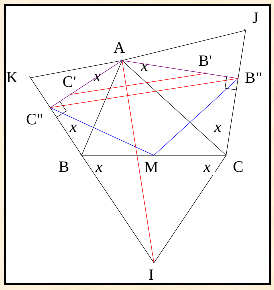

A
J
K
x
x
x
x
B
x
x
C
I

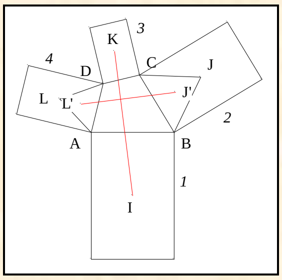

K
C
D
x
x
x
J
L
x
x
x
A
x
x
B
I

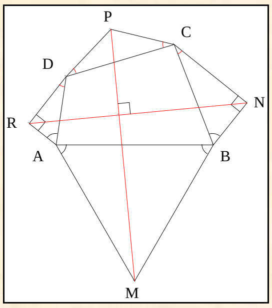

J
A
K
K'
x
x
x
x
B
I
C

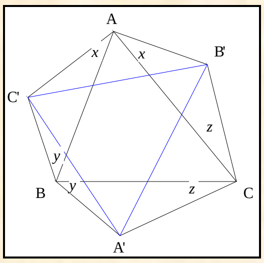

J
A
K
x
x
x
x
B
x
x
C
A'
I

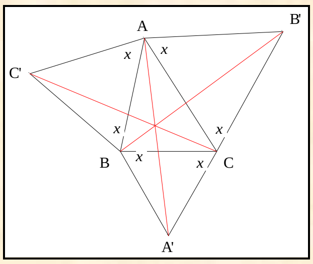

J
A
K
x
x
B'
C'
x
x
B
x
x
C
I

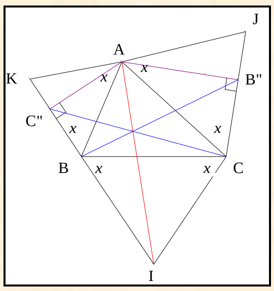

J
A
K
B'
C'
x
x
B"
C"
x
x
B
x
M
x
C
I

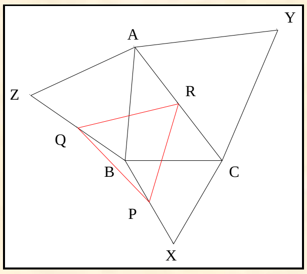

K
3
4
D
C
J
L
L'
J'
2
A
B
1
I

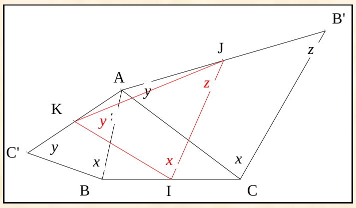

P
C
D
N
R
A
B
M

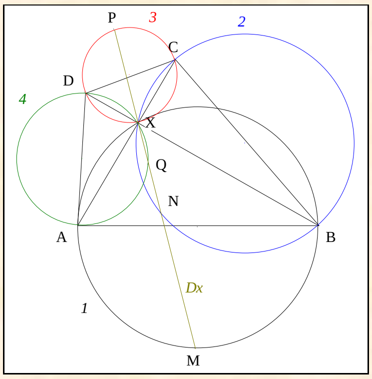

A
x
x
B'
C'
z
y
B
y
z
C
A'

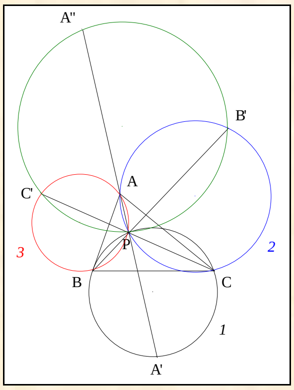

A
B'
C'
x
x
x
x
B
x
x
C
A'

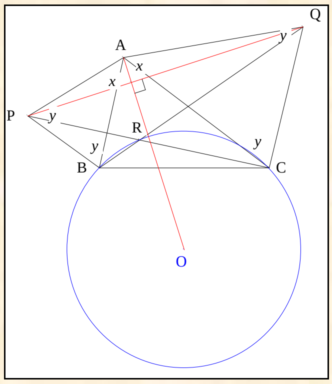

J
A
K
x
x
B"
C"
x
x
B
x
x
C
I

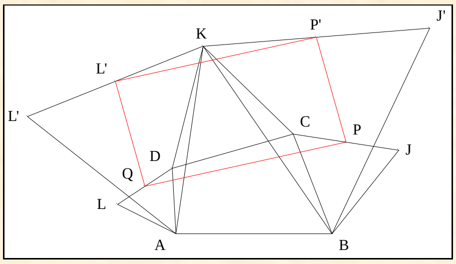

A
Y
Z
R
Q
B
C
P
X

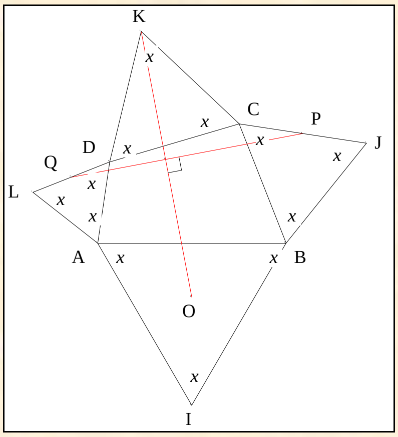

B'
J
A
z
y
K
y
z
C'
y
x
x
x
B
I
C

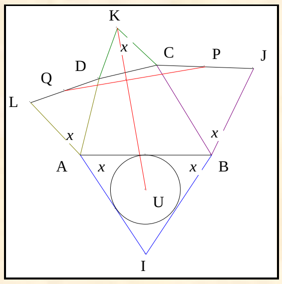

P
3
2
C
D
4
X
Q
N
A
B
Dx
1
M

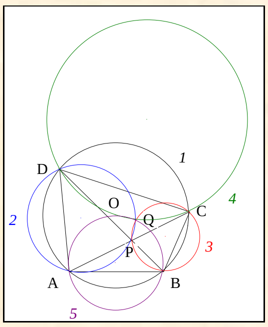

A"
B'
A
C'
3
P
2
B
C
1
A'

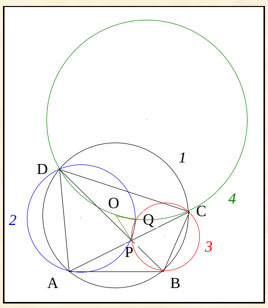

Q
A
x
y
x
P
y
R
y
y
B
C
O

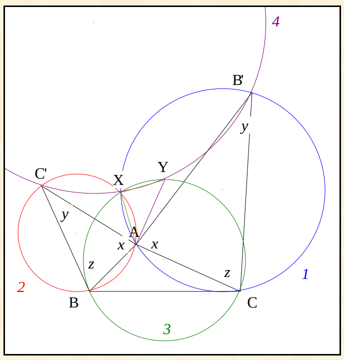

K'
P'
J'
L'
L'
K
C
P
J
D
Q
L
A
B

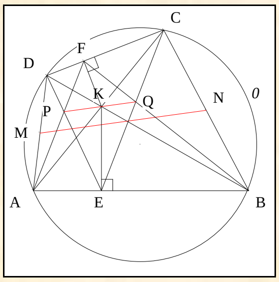

K
x
C
P
x
J
D
x
x
Q
x
L
x
x
x
A
x
x
B
O
x
I

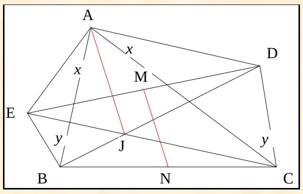

K
C
P
J
D
Q
L
x
x
A
x
x
B
U
I

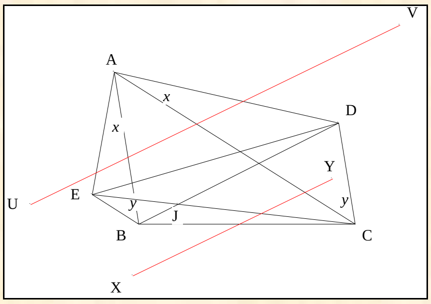

1
D
4
O
C
2
Q
3
P
A
B
5

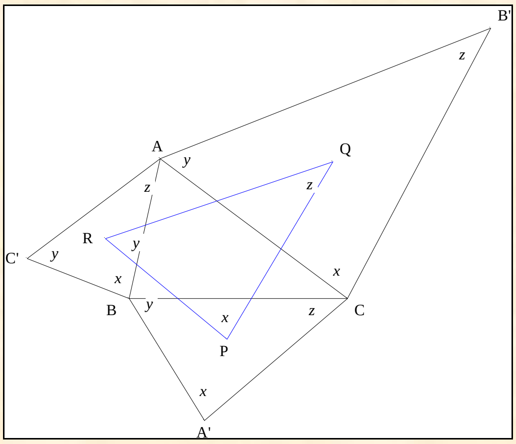

1
D
4
O
C
2
Q
3
P
A
B


4
B'
y
C'
X
Y
y
A
x
x
2
z
z
1
B
C
3


C
D
F
K
Q
N
0
P
M
A
E
B


A
x
D
x
M
E
y
J
y
B
N
C


V
A
x
D
x
Y
U
E
y
y
J
B
C
X


B'
z
A
Q
y
z
z
R
y
C'
y
x
x
B
y
x
z
C
P
x
A'

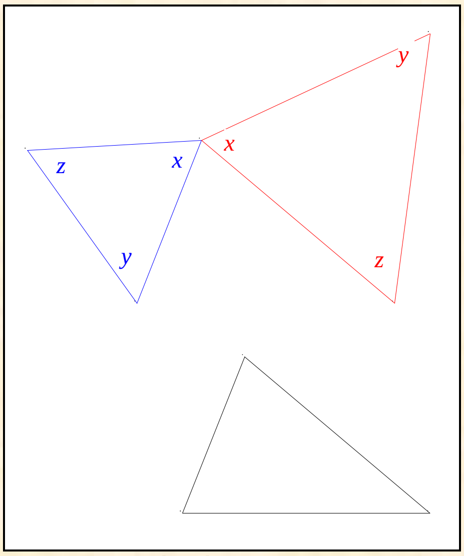
C. DEUX TRIANGLES SEMBLABLES

ADJACENTS PAR UN SOMMET

ET

UN TRIANGLE

1. Le point de vue de l'auteur

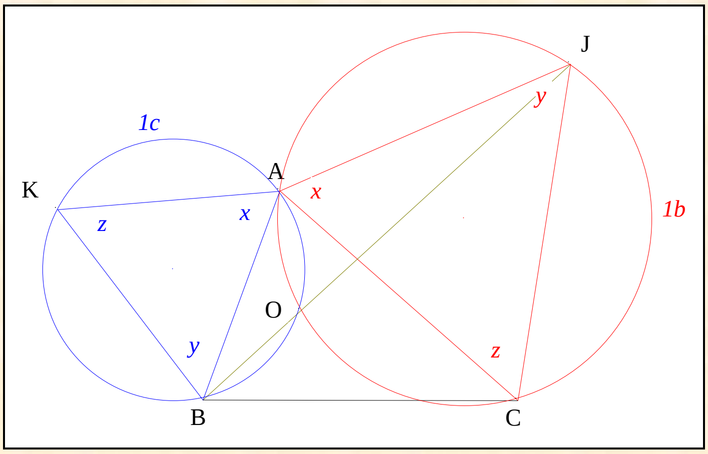


Deux triangles adjacents par un sommet
et
qui seront posés par adjacence par deux côtés
sur
un triangle

2. Cas : extérieur - extérieur

VISION

Figure :

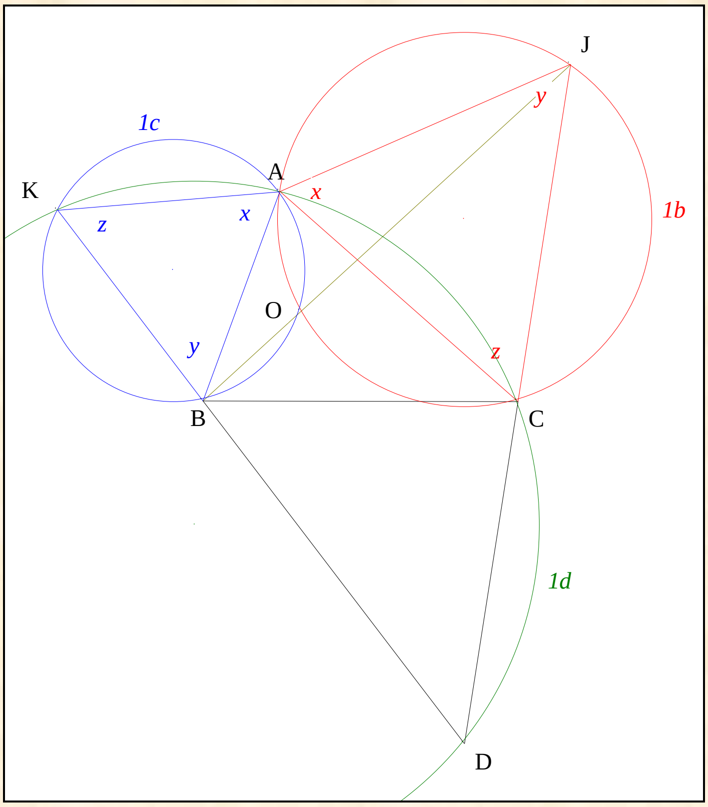


Traits : ABC un triangle,
ABK, AJC deux triangles semblables, extérieurs à ABC,
1b, *1c* les cercles circonscrits resp. à ABK, AJC
et O le second point d'intersection de *1b* et *1c*.

Donné : B, O et J sont alignés. [7]

Commentaire : par "semblable", nous sous-entendons "directement semblable".
Les sommets de ABK et AJC se correspondent dans cette relation.
Ces deux triangles semblables sont adjacent par le sommet A.
Par rapport à ABC, ils sont extérieurs.

VISUALISATION



- Notons D le point d'intersection de (KB) et (JC).

- <DKA étant égal à <JCA, le quadrilatère ACDK est cyclique.

- Notons *1d* ce cercle.

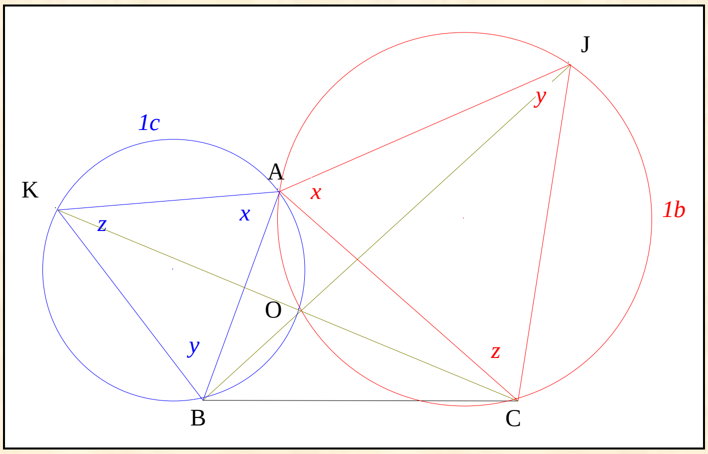
- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" [8],
appliqué au triangle BDJ et *1c*, *1d*, *1b* concourants en A, B, O et J sont alignés.

Scolies : **(1)** un second alignement

---

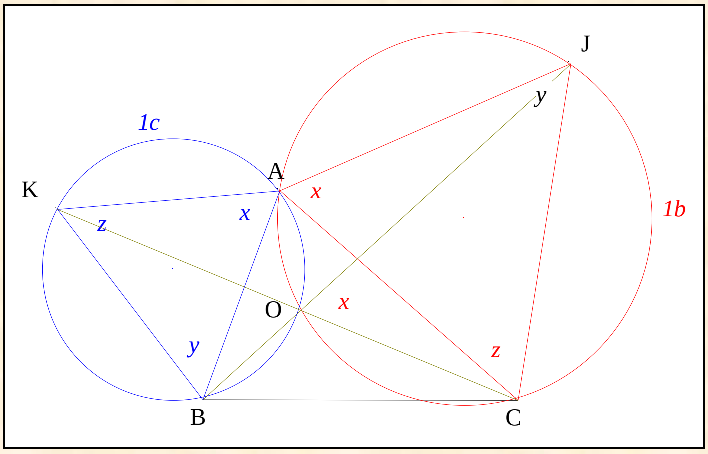
7 Descartes R.

8 Ayme Jean-Louis, Auguste Miquel…, G.G.G. vol. **13**, p. 4-7; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous démontrerions que C, O et K sont alignés.

(2) Deux angles égaux



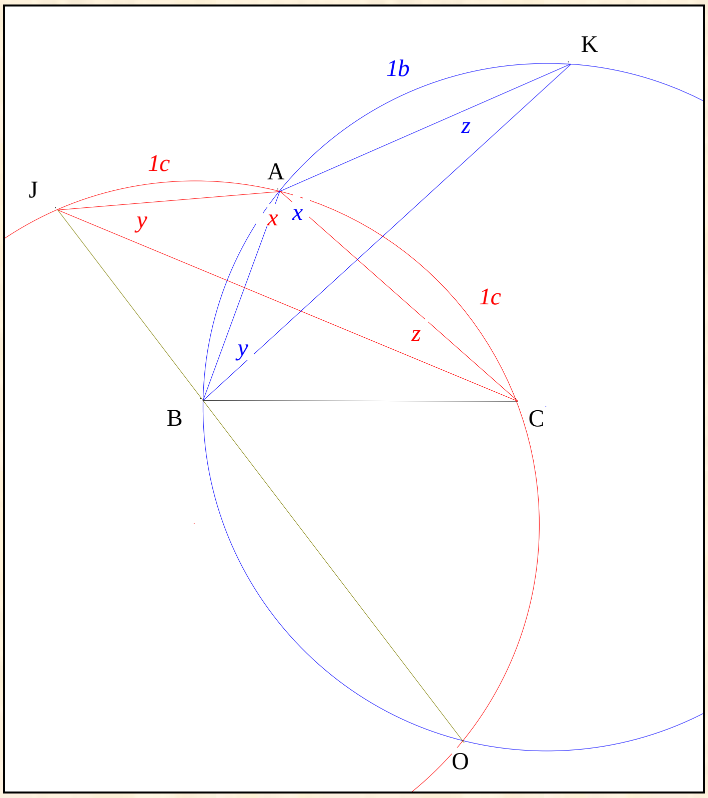
- **Conclusion :** d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <COJ = CAJ.

(3) *si*, ABK et ACJ sont A-isocèles, *alors*, BJ = CK.

3. Cas : intérieur - intérieur

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
ABK, AJC deux triangles semblables, intérieurs à ABC,
1b, *1c* les cercles circonscrits resp. à ABK, AJC
et O le second point d'intersection de *1b* et *1c*.

Donné : B, O et J sont alignés. [9]

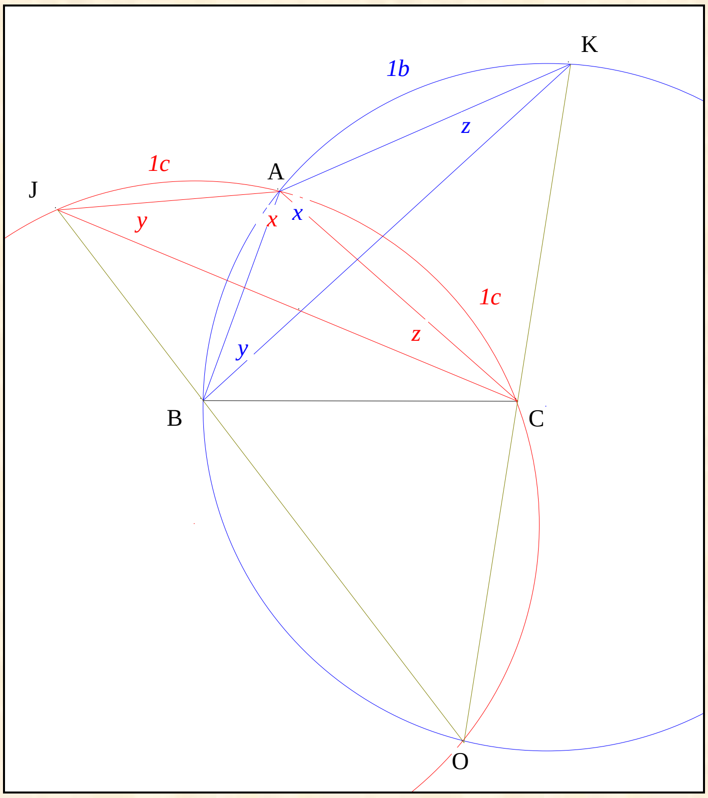
Commentaire : par "semblable", nous sous-entendons "directement semblable".
Les sommets de ABK et AJC se correspondent dans cette relation.
Ces deux triangles semblables sont adjacent par le sommet A.
Par rapport à ABC, ils sont intérieurs.

VISUALISATION

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous démontrerions que B, O et J sont alignés.

Scolie : un second alignement et deux angles supplémentaires

9 Descartes R.



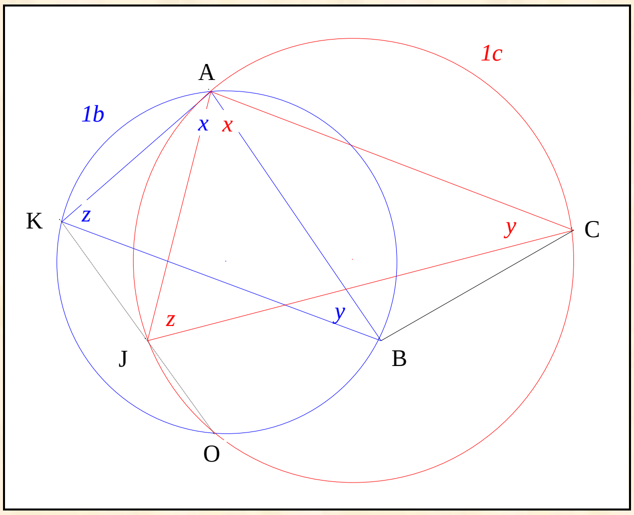
- **Conclusions :** **(1)** B, O et J sont alignés

  (2) <KOJ et <BAK sont supplémentaires.

4. Cas : extérieur - intérieur

VISION

Figure :



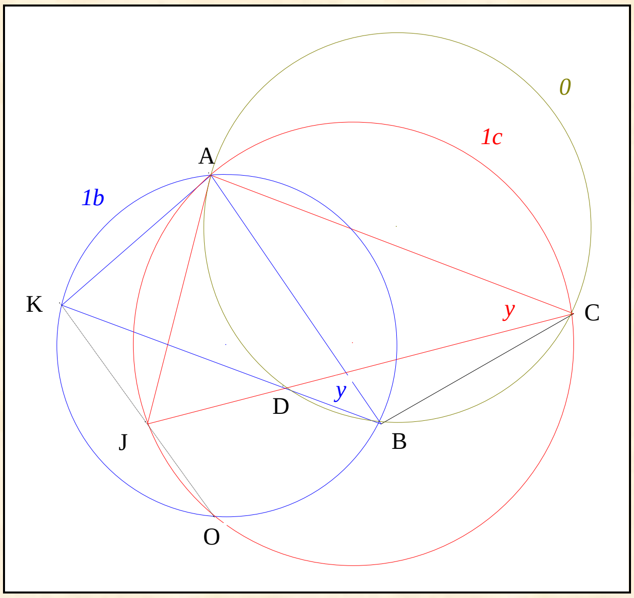
Traits : ABC un triangle,
ABK, ACJ deux triangles semblables resp. extérieur, intérieur à ABC,

	1b, *1c*	les cercles circonscrits resp. à ABK, ACJ
et	O	le second point d'intersection de *1b* et*1c*.

Donné : K, J et O sont alignés.

Commentaire : par "semblable", nous sous-entendons "directement semblable".
Les sommets de ABK et ACJ se correspondent dans cette relation.
Ces deux triangles semblables sont adjacent par le sommet A.
Par rapport à ABC, ils sont resp. extérieur, intérieur.

VISUALISATION



- Notons D le point d'intersection de (BK) et (CJ),
  et E le second point d'intersection de (AC) avec *1b*.

- Par hypothèse, <ABD = <ACD ;
  d'après Thalès "Le théorème de l'angle inscrit", A, B, C et D sont cocycliques.

- Notons *0* ce cercle.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" appliqué au triangle JDK avec *1c*, *0*, *1b* concourants en A, K, J et O sont alignés.

Scolie : nous observons le déplacement du triangle ABK au triangle ACJ dans la rotation de centre A et d'angle <BAC.

Note historique : René Descartes (1596-1650) et Jean Bernoulli (1667-1748) ont été des pionniers dans ce type de déplacement d'une figure.

Rappelons que la notion de centre d'une rotation a été introduite par Leonhard Euler [10] en 1777 et réexposée par Alexandre Joseph Hidulphe Vincent [11] en 1827.

5. Note historique

[12]

Hermann Schaal a écrit une note dans *Mathematikunterricht* **4** (1967) dans laquelle il dit que les résultats qu'il cite, ont été trouvé bien avant lui i.e. par Eduard Heis (18/02/1806 Cologne-30/06/1877 Münster) qui les découvrit en 1875.

Après ses études à l'Université de Bonn en 1827, Eduard Heis enseigne les mathématiques dans une école de Cologne, puis en 1832, à Aix-la-chapelle où il y reste jusqu'en 1852. Il est ensuite nommé en 1852 par le Roi Frederick William **IV**, à un poste de président de l'Académie de Münster et en devient le recteur en 1869.

D. LE PARALLÉLOGRAMME

DE

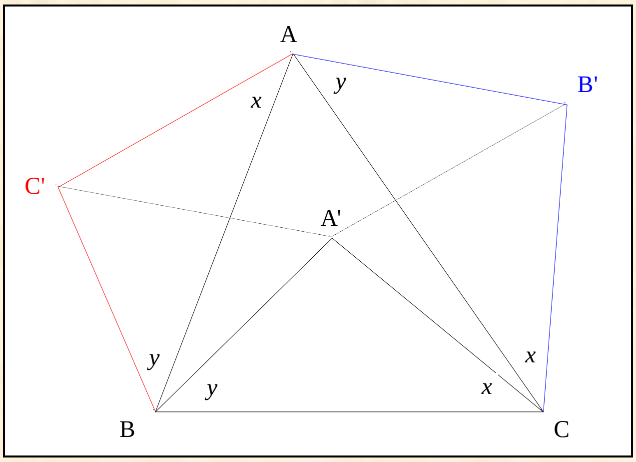
Hendricus Hubertus van AUBEL

1. Relativement au triangle

VISION

Figure :

[10] Euler L., *Nova acta Petropolis* **9** (1777)
[11] Vincent H., *Cours de géométrie* (1827)
[12] Heis Ed.



Traits :	ABC	un triangle,
	BCA'	un triangle intérieur à ABC,
	BAC'	un triangle semblable à BCA', extérieur à ABC
et	CAB'	un triangle semblable à CBA', extérieur à ABC.

Donné : le quadrilatère AC'A'B' est un parallélogramme. [13]

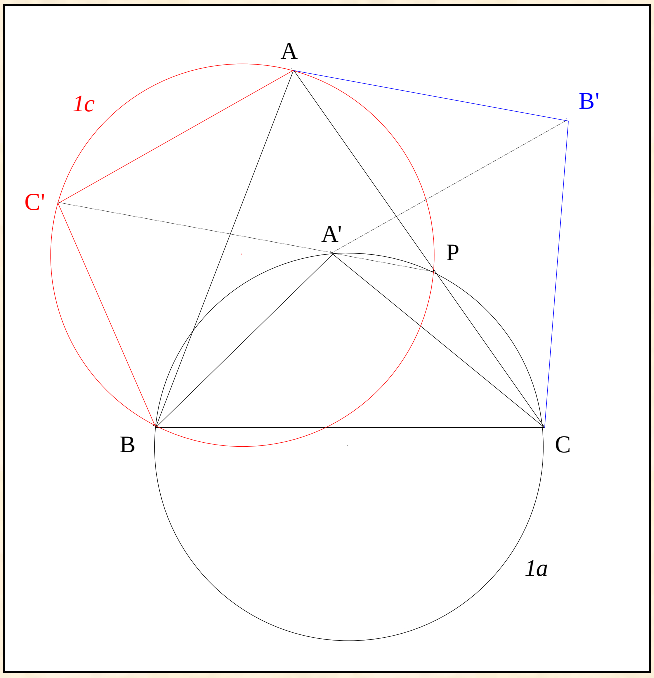
Commentaire : par "semblable", nous sous-entendons "directement semblable".

Les sommets de BCA' et BAC' se correspondent dans cette relation.
Ces deux triangles semblables sont adjacents par le sommet B.
Par rapport à ABC, ils sont resp. intérieur, extérieur.

Les sommets de CBA' et CAB' se correspondent dans cette relation.
Ces deux triangles semblables sont adjacents par le sommet C.
Par rapport à ABC, ils sont resp. intérieur, extérieur.

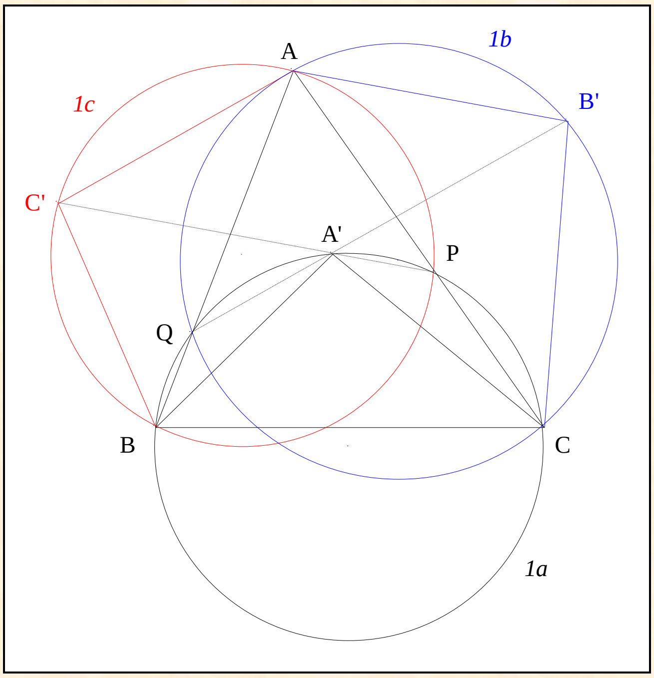
VISUALISATION

[13] Van Aubel H. H., Question **55**, *Mathesis*, tome **I** (1880) ;
Solution : Interdonato P., *Mathesis*, tome **I** (1881) 166-167



- Notons *1a*, *1c* les cercles circonscrits resp. à BCA', BAC'
  et P le second point d'intersection de *1a* et *1c*.

- **Conclusion partielle :** d'après **B. 4**, (CA) et (A'C') passent par P.



- Notons *1b* le cercle circonscrit à CAB'
  et Q le second point d'intersection de *1a* et *1b*.

- **Conclusion partielle :** d'après **B. 4**, (BA) et (A'B') passent par Q.

- Les cercles *1a* et *1b*, les points de base Q et C, les moniennes (A'QB') et (PCA) conduisent au théorème **0** de Reim; il s'en suit que (A'P) // (B'A).

- Les cercles *1a* et *1c*, les points de base P et B, les moniennes (A'PC') et (QBA), conduisent au théorème **0** de Reim; il s'en suit que (A'Q) // (C'A).

- **Conclusion :** le quadrilatère AC'A'B' ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme.

Scolies : **(1)** AC'A'B' est "le parallélogramme de H. H. van Aubel de ABC relativement aux…".

(2) Nous obtiendrons le même résultat en remplaçant dans les hypothèses, "intérieur" par "extérieur" et vice versa.

Archive :

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET J. NEUBERG

Ancien élève de l'École normale des sciences
Professeur ordinaire à l'Université de Gand
Docteur spécial en sciences mathématiques, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences
Professeur à l'Athénée royal
et à l'École des mines de Liège

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS

TOME PREMIER

ANNÉE 1881

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

1881

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN

×Question 55.

Si, sur les côtés BC, CA *d'un triangle* ABC, *on construit extérieurement et, sur le troisième côté* BA *intérieurement, les triangles* BB'C, CC'A, BA'A *semblables à un triangle donné, la figure* B'CC'A' *est un parallélogramme.*

(H. VAN AUBEL.)

Les triangles semblables BB'C, BA'A donnent

angle B'BA' = CBA, B'B : BC = A'B : BA ;

par conséquent, les triangles B'BA', CBA sont également semblables et l'inclinaison des côtés homologues A'B', AC est égale à l'angle A'BA qui, par hypothèse, est égal à C'CA. Donc les droites A'B', CC' sont parallèles. Un raisonnement analogue, appliqué à C'CA, A'BA fait voir que les droites CB', C'A' sont parallèles. Par suite, la figure B'CC'A' est un parallélogramme.

PIERRE INTERDONATO,
Élève de l'école des ingénieurs à Naples.

Des solutions des questions 55 et 56 nous ont été envoyées par MM. Rochetti, Pisani et Duyckaerts. M. Lambert, du collége de St Trond, les a résolu par la trigonométrie M. Pisani fait remarquer que la proposition 55 résulte de la proposition 56, si l'on fait coïncider deux sommets du quadrilatere.

NOTE. Construisons le parallélogramme BA'AA'', ayant pour centre le milieu M de AB, et soit N le centre du parallélogramme B'CC'A'. Dans le triangle CA'A'', les médianes CM, A''N se coupent mutuellement dans le rapport 2 : 1 ; mais ces droites sont aussi médianes des triangles

— 167 —

ABC, A''B'C'. Par conséquent : *Si, sur les côtés d'un triangle* ABC, *l'on construit les triangles semblables et semblablement orientés* BB'C, CC'A, AA''B, *les triangles* A''B'C', ABC *ont même centre de gravité.*

Plus généralement : *Si, sur les côtés d'un polygone plan* $A_1A_2\ldots A_n$, *on construit les triangles semblables et semblablement orientés* $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3\ldots A_nB_nA_1$, *les centres des moyennes distances des deux systèmes de points* $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ *coïncident*. En effet, soient α_i, β_i les distances des points A_i, B_i à un axe quelconque, et supposons la proposition vérifiée pour les polygones de $n-1$ côtés $A_1A_2\ldots A_{n-1}$, $B_1B_2\ldots B'_{n-1}$, B'_{n-1} étant le sommet du triangle $A_{n-1}B'_{n-1}A_1$ semblable à $A_1B_1A_2$. Nous aurons

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n-2}+\beta'_{n-1}.$$

La figure $A_nB_nB'_{n-1}B_{n-1}$ étant un parallélogramme, on a aussi

$$\alpha_n+\beta'_{n-1}=\beta_{n-1}+\beta_n,$$

d'où, en ajoutant, etc.

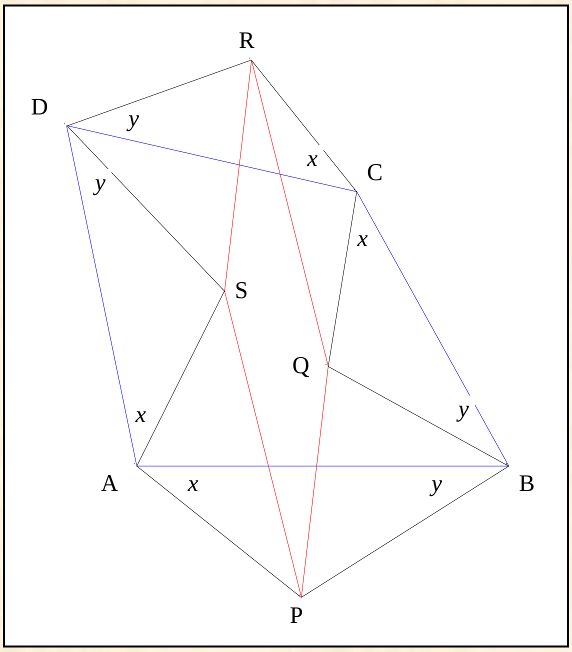
Dans la *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, p. 473, nous avions signalé la proposition précédente, ignorant qu'elle avait déjà été publiée, en 1877, par M. Laisant (Congrès du Havre). Elle nous avait été suggérée par un passage de l'*Aperçu historique* (p. 44), dans lequel Chasles mentionne la même proposition pour le cas où les points B divisent les côtés du polygone $A_1A_2\ldots A_n$ dans un même rapport. Quoi qu'il en soit, M. Resal (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, août 1881) vient, de nouveau, d'attirer l'attention des géomètres sur ce cas particulier, n'ayant, sans doute, aucune connaissance de la belle généralisation, due à M. Laisant. (J. N.)

[14]

2. Relativement au quadrilatère

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	BAP	un triangle extérieur à ABC,
	BCQ	le triangle semblable à BAP, intérieur à ABC,
	CDR	le triangle semblable à CBQ, extérieur à ABC

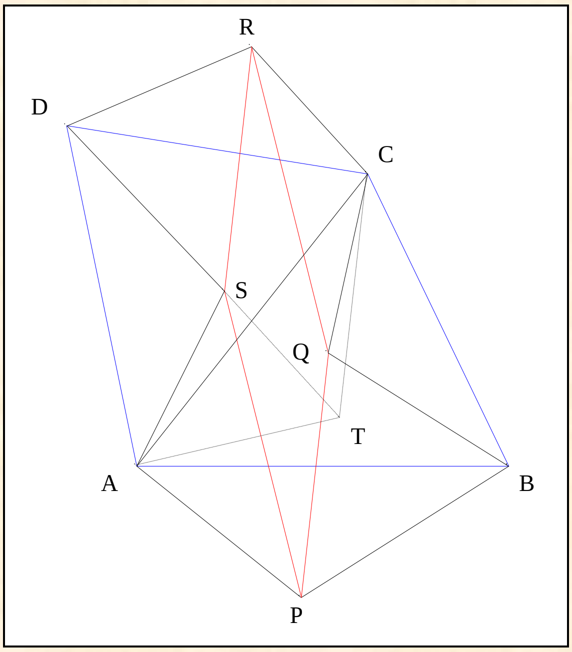
[14] Interdonato P., Question **55**, *Mathesis*, tome **I** (1881) 167

et DAS le triangle semblable à DCR, intérieur à ABC.

Donné : le quadrilatère PQRS est un parallélogramme. [15]

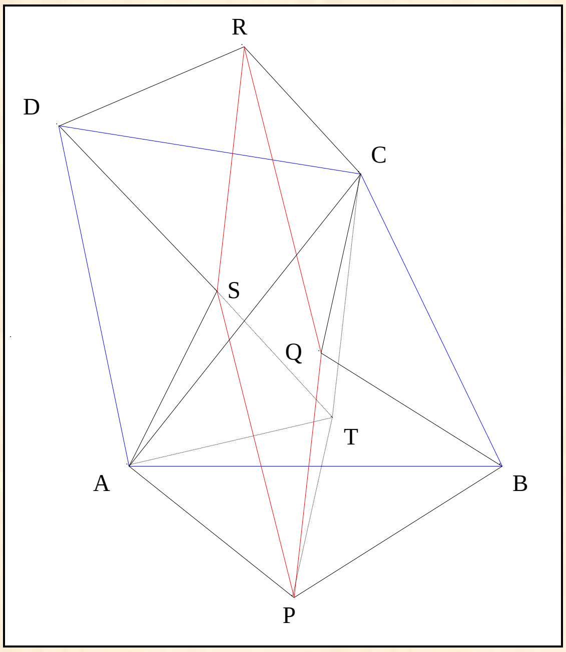
Commentaire : mutatis mutandis, il est le même que celui de **C. 1**.

VISUALISATION



- Considérons le triangle CDA et les triangles DAS et DCR.
- Notons ACT le triangle semblable à ADS, extérieur à CDA.
- D'après **C. 1**, le quadrilatère CRST est un parallélogramme ;
  en conséquence, (SR) // (CT) et SR = CT.

15 Van Aubel H. H., Question **56**, *Mathesis*, tome **I** (1880) ;
Solution : Interdonato P., *Mathesis*, tome **I** (1881) 167
Another parallelogram, AoPS du 28/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573259



- Considérons le triangle CAB et les triangles ABP, BCQ et CAT.

- D'après **C. 1.** Scolie **2**, le quadrilatère CTPQ est un parallélogramme ;
  en conséquence, (CT) // (PQ) et CT = PQ.

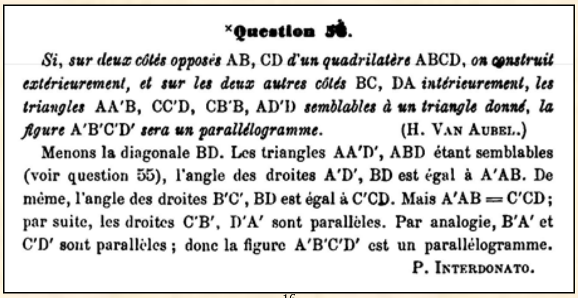
- Par transitivité des relations // et =, (SR) // (PQ) et SR = PQ.

- **Conclusion :** le quadrilatère PQRS ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme.

Énoncé traditionnel : *si,* sur deux côtés opposés AB, CD d'un quadrilatère, on construit extérieurement et sur les deux autres côtés BC, DA intérieurement, les triangles APB, CRD, CQB, ASD, semblables à un triangle donné,
alors, le quadrilatère PQRS sera un parallélogramme.

Scolie : PQRS est "le parallélogramme de H. H. van Aubel de ABCD relativement aux…".

Archive :



×**Question 56.**

Si, sur deux côtés opposés AB, CD *d'un quadrilatère* ABCD, *on construit extérieurement, et sur les deux autres côtés* BC, DA *intérieurement, les triangles* AA'B, CC'D, CB'B, AD'D *semblables à un triangle donné, la figure* A'B'C'D' *sera un parallélogramme.* (H. Van Aubel.)

Menons la diagonale BD. Les triangles AA'D', ABD étant semblables (voir question 55), l'angle des droites A'D', BD est égal à A'AB. De même, l'angle des droites B'C', BD est égal à C'CD. Mais A'AB = C'CD ; par suite, les droites C'B', D'A' sont parallèles. Par analogie, B'A' et C'D' sont parallèles ; donc la figure A'B'C'D' est un parallélogramme.

P. Interdonato.

[16]

[16] Solution : Interdonato P., Question **56**, *Mathesis*, tome **I** (1881) 167

E. LES POINTS

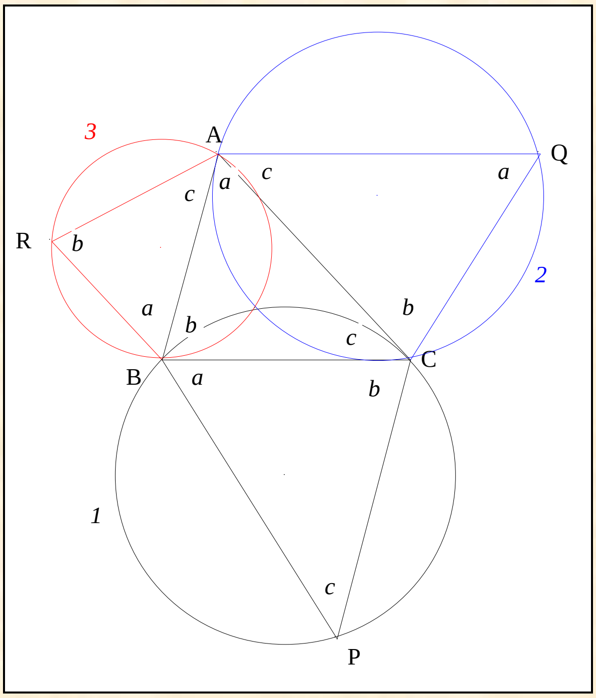
DE

BOURGET, CONWAY, GREITZER, GRINBERG

1. Le point de Justin Bourget

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
BCP, QCA, BRA trois triangles inversement semblables, extérieurs à ABC,
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. à BCP, QCA, BRA.

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants.[17]

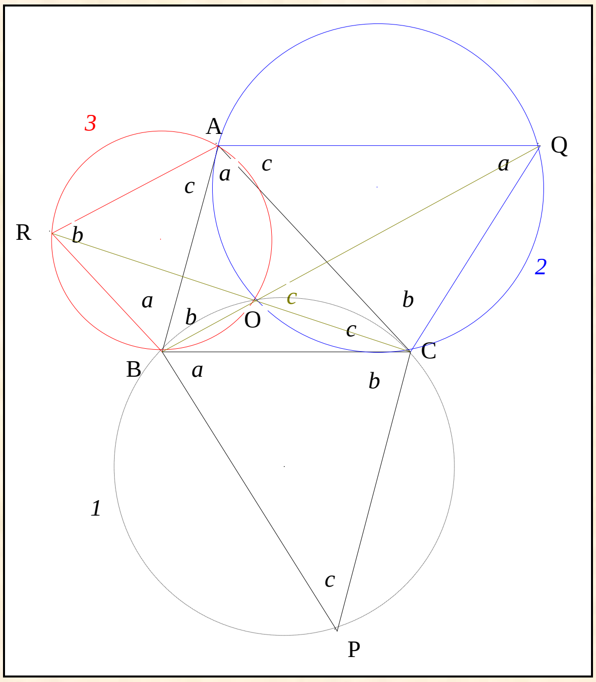
Commentaire : Les sommets de BCP, QCA, BRA et ABC se correspondent.
BCP, QCA, BRA sont extérieurs à ABC.

ACQ et ARB sont semblables et adjacents par le sommet A ;
BAR et BPC sont semblables et adjacents par le sommet B ;
CBP et CQA sont semblables et adjacents par le sommet C ;

La somme des angles géométriques a + b+ c = 180°.

[17] Bourget J., Question **121**, *Journal de Mathématiques Élémentaires*, tome **3** (1879) 58-59
Solution de Thual, élève du lycée de Lorient

VISUALISATION



- Notons O le second point d'intersection de *2* et *3*.

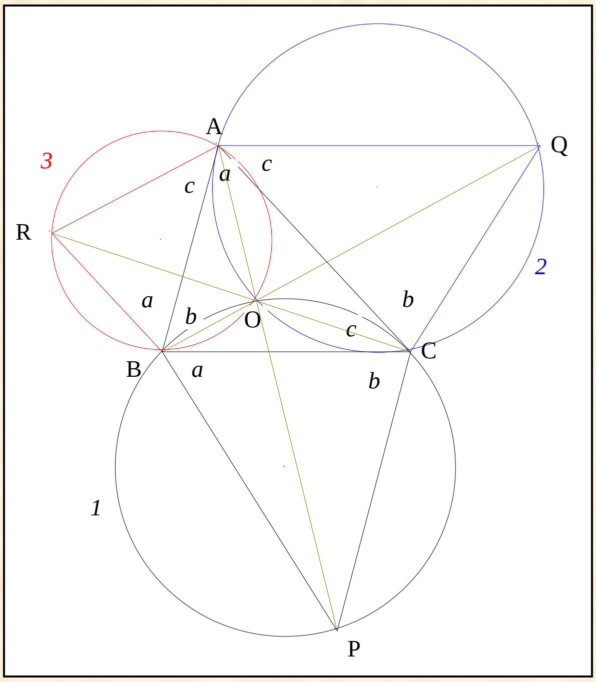
- D'après **C. 2.** Scolie **2**, **(1)** B, O et Q sont alignés
  (2) C, O et R sont alignés
  (3) <COQ = <CAQ (= c) ;

  en conséquence, le quadrilatère BPCO est cyclique
  ou encore, *1* passe par O.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont concourants en O.

Scolies : **(1)** O est "le point de Bourget de ABC…"

(2) Vision triangulaire



- D'après **C. 2.**, A, O et P sont alignés.

- **Conclusion :** (PA), (QB) et (RC) sont concourantes en O.

(3) Remarquons que <P + <Q + <Q = 180°.

(4) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

Une courte biographie de Justin Bourget :

Justin Bourget est né en 1822 à Savas (Ardèche, France).
Il obtient son doctorat ès sciences en 1852. Professeur à la faculté des sciences de Clermont-Ferrand (France), puis directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe, Justin Bourget est ensuite nommé recteur de l'académie d'Aix (1878-1882), puis de celle de Clermont-Ferrand (1882-1887). Il est surtout connu pour avoir en compagnie de Koehler, lancé en 1877 le *Journal de Mathématiques Élémentaires* et dirigé les *Nouvelles Annales de mathématiques* après la mort de son fondateur Olry Terquem.
Son fils est l'écrivain Paul Bourget.
Il décède à Clermont-Ferrand le 10 octobre 1887.

Archive :

— 58 —

QUESTION 121.

Solution par M. Thual, élève du Lycée de Lorient.

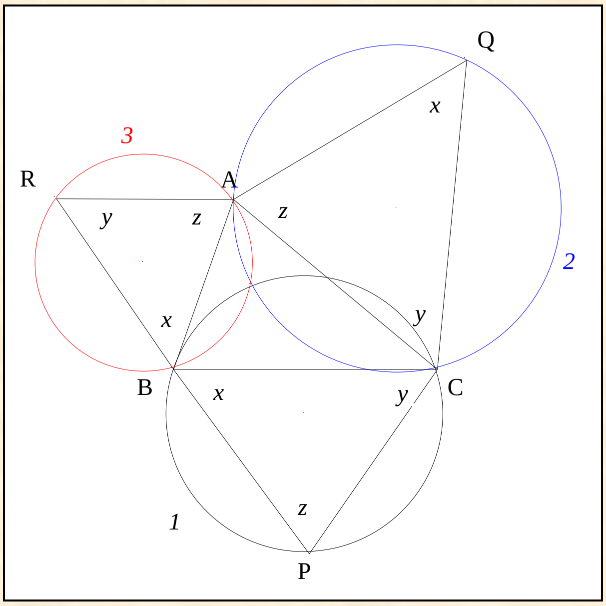
Étant donné un triangle ABC, sur chacun de ses côtés on construit extérieurement au triangle ABC des triangles semblables, de telle manière que chacun 'des angles adjacents à A soit égal à C; que chacun des angles adjacents à B soit égal à A; et que chacun des angles adjacents à C soit égal à B. Démontrer que les trois cercles circonscrits à ces triangles et les droites qui joi-gnent chacun des sommets du triangle ABC au sommet opposé se coupent en un même point O, tel que les angles OBC ; OBA, OAB sont égaux entre eux.

[18]

2. Le point de John Horton Conway

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	BCP	un triangle extérieur à ABC,
	BAR	un triangle semblable à BPC, extérieur à ABC
	CAQ	un triangle semblable à CPB, extérieur à ABC.
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits à BCP, CAQ, ABR.

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants.[19]

[18] Bourget J., Question **121**, *Journal de Mathématiques Élémentaires*, tome **3** (1879) 58-59
Three concurrent circles, AoPS du 28/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573262

[19] Conway J..

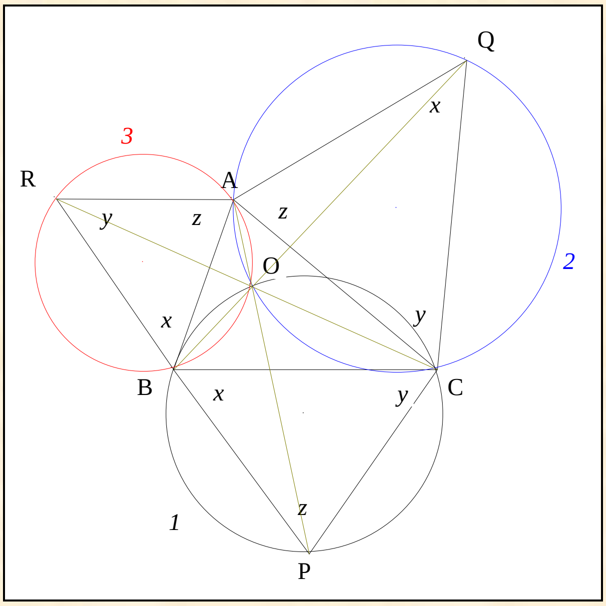
Commentaire : ce résultat est une généralisation de celui de Justin Bourget.

VISUALISATION

- **Conclusion :** la démarche étant identique qu'en **D. 1**, *1*, *2* et *3* sont concourants.
- Notons O ce point de concours.

Scolies : **(1)** O est "le point de Conway de ABC…"

(2) Un résultat



- **Conclusion :** (PA), (QB) et (RC) sont concourantes en O.

(3) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

Une courte biographie de John Hurton Conway :

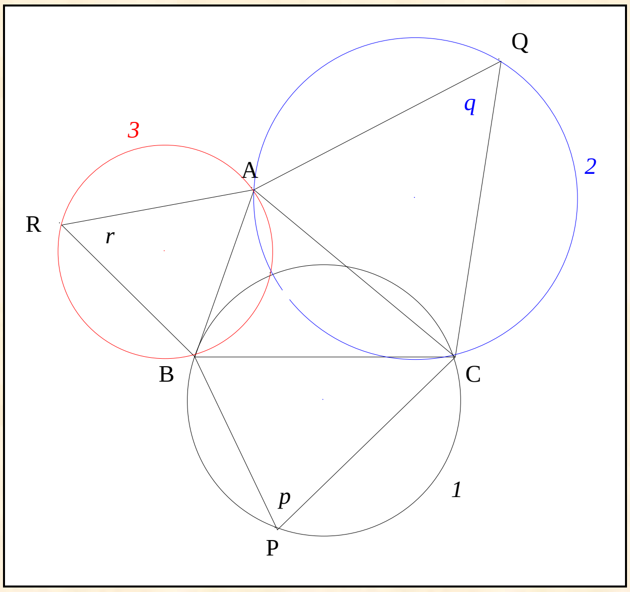
John Horton Conway est né le 26 décembre 1937 à Liverpool (Angleterre, Grande-Bretagne).
Étudiant en mathématiques à Cambridge
Il enseigne actuellement à l'université de Princeton (États-Unis).

Élève du Lycée Gonville et Caius à Cambridge, il obtient son Bachelor of Arts en 1959, puis son doctorat en 1964 ce qui lui permet d'obtenir un poste à l'université de Cambridge.
En 1981, il devient membre de la Royal Society.
Il quitte Cambridge en 1986 pour prendre en charge la chaire de John von Neumann à l'université de Princeton (New Jersey, États-Unis)

3. Le point de Samuel Greitzer

VISION

Figure :

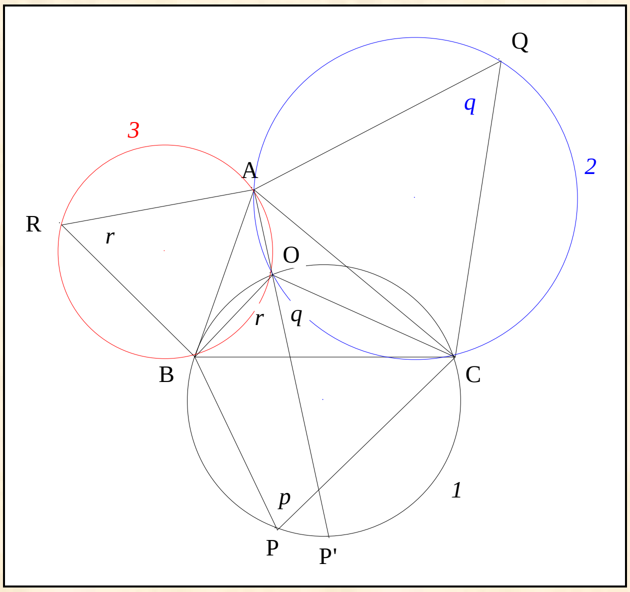


Traits : ABC un triangle,
PBC, QCA, RAB trois triangles extérieurs à ABC
et *1, 2, 3* les cercles circonscrits à PCB, QCA, RAB.

Donné : <P + <Q + <R = 180° *si, et seulement si,* *1, 2* et *3* sont concourants.

Commentaire : ce résultat est une généralisation de celui de John Horton Conway.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons O le second point d'intersection de *2* et *3*,
  et P' le second point d'intersection de (AO) avec *1*.

- Une chasse angulaire :

  * le quadrilatère AOBR étant cyclique, <BOP' = <BRA

  * le quadrilatère AOCQ étant cyclique, <P'OC = <AQC ;

  en conséquence, le quadrilatère BOCP est cyclique
  ou encore, *1* passe par O.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont concourants.

VISUALISATION SUFFISANTE

- **Conclusion :** la démarche étant identique à la précédente, <P + <Q + <R = 180°.

Scolie : le point O est "le point de Greitzer de ABC".

Note historique : ce résultat qui a fasciné le Dr. Samuel L. Greitzer, a donné l'idée à Greeg Patruno, auteur de l'article "Blib Alleys" dans la revue *Arbelos*[20] , d'appelé "Point de Greitzer", le point de concours des trois cercles de la situation traitée ci-avant.
Ce résultat a fait l'objet d'un Message *Hyacinthos* de Darij Grinberg [21].

Une courte biographie de Samuel L. Greitzer :

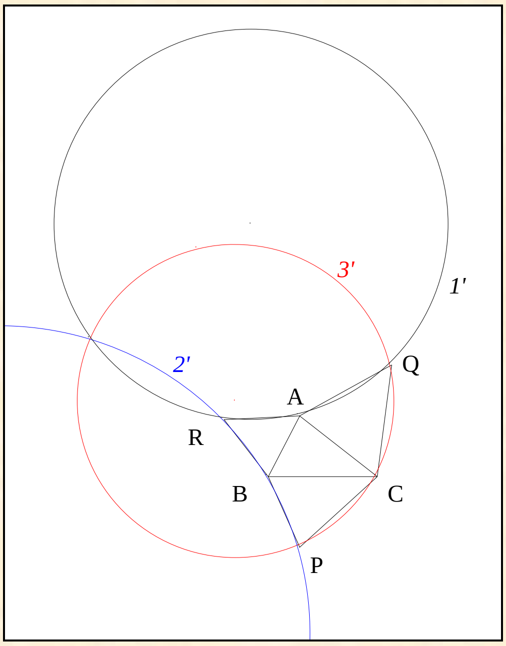
[20] *Arbelos*, Volume **5**, chapter **4**, p. 92
[21] Grinberg D., Message *Hyacinthos* du 07-08-03

Samuel L. Greitzer eqt né le 10 août 1905 en Russie.
En 1906, les parents de Samuel Greitzer quittent Odessa (Russie) pour émigrer aux États-Unis.
Professeur à l'université Yeshiva où il a obtenu son titre de docteur, puis à l'Institut Polytechnique de Brooklyn, il enseigne enfin, à l'université Rutgers. De 1974 à 1983, il est le coach de l'équipe américaine aux Olympiades Mathématiques nationales et internationales. De 1982 à 1987, il met son expérience au service de jeunes et talentueux mathématiciens désirant se perfectionner dans ce domaine, en publiant la revue *Arbelos*.
Il décède le 22 février 1988.

4. Le point de Darij Grinberg

VISION

Figure :



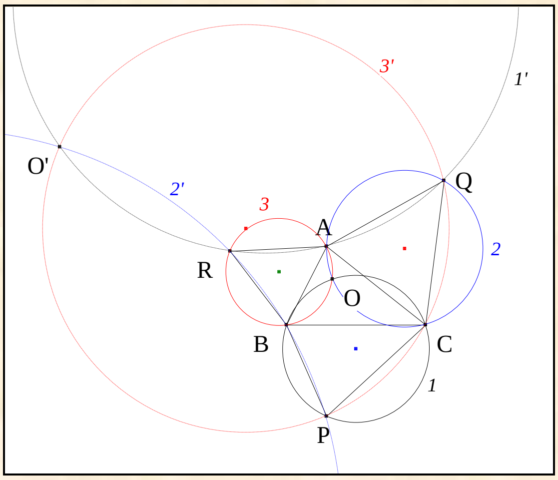
Traits :		ABC	un triangle,
		PBC, QCA, RAB	trois triangles extérieurs à ABC
	et	*1'*, *2'*, *3'*	les cercles circonscrits resp. à AQR, BRP, CPQ.

Donné : $<P + <Q + <R = 180°$ *si, et seulement si,* *1'*, *2'* et *3'* sont concourants.[22]

[22] Grinberg D., Message *Hyacinthos* du 07/08/2003
Three other concurrent circles, AoPS du 28/01/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573264

Commentaire : ce résultat est une variante de celui de Samuel L. Greitzer.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. à PBC, QCA, RAB.

- D'après **D. 3.** Le point de Greitzer, *1*, *2* et *3* sont concourants.

- Notons O le point de concours de *1*, *2*, *3*
  et O' le second point d'intersection de *1*' et *2*'.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles" [23]
  appliqué
  * au cercle de base *3*

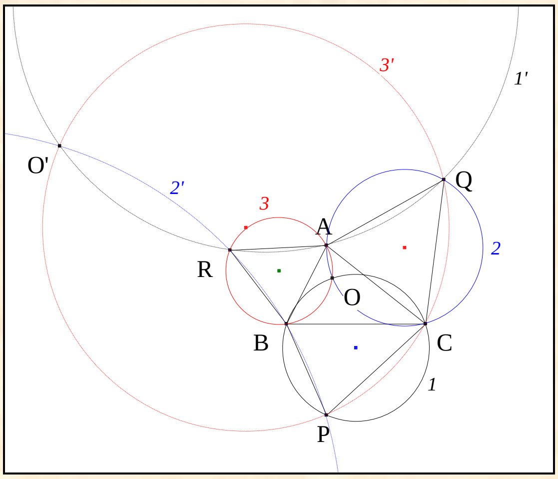
  et * aux quatre cercles intermédiaires *1*, *2*, *1*' et *2*',

  C, Q, O' et P sont cocycliques i.e. sont sur le cercle *3*'.

- **Conclusion :** *1*', *2*' et *3*' sont concourants.

VISUALISATION SUFFISANTE

[23] Ayme J.-L., Du théorème de Reim aux théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**, p. 8-13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons O' le point d'intersection de *1*', *2*', *3*',
  1, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. à PBC, QCA, RAB
  et O le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles" [24]
  appliqué
  * au cercle de base *3*'

  et * aux quatre cercles intermédiaires *1*, *2*, *1*' et *2*'

  O, A, R et B sont cocycliques i.e. sur le cercle *3*.

- **Conclusion :** d'après **D. 3.** Le point de Greitzer, <P + <Q + <R = 180°.

F. DEUX TRIANGLES ISOCELES, SEMBLABLES

ADJACENTS PAR UN SOMMET DE LEUR BASE

ET

UN TRIANGLE

I. JOSEPH NEUBERG

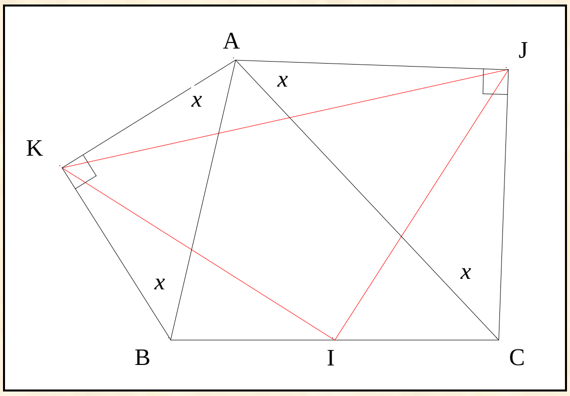
1. Le triangle rectangle-isocèle de Neuberg

VISION

Figure :

---

[24] Ayme J.-L., Du théorème de Reim aux théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**, p. 8-13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

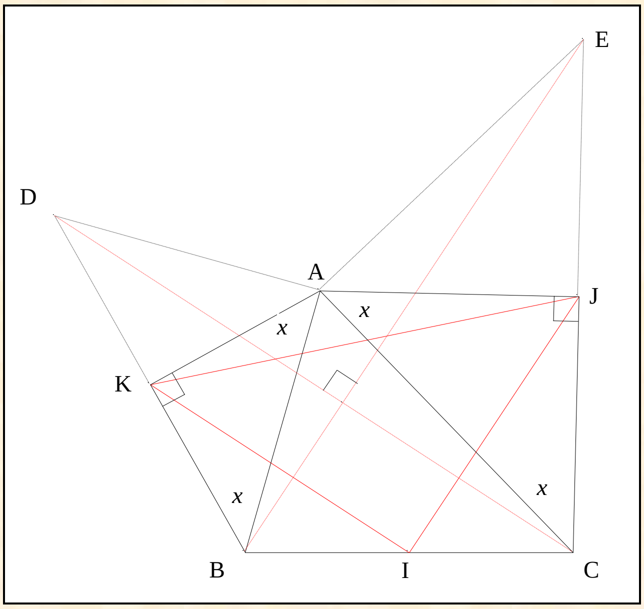


Traits : ABC un triangle,
I le milieu de [BC]
et JAC, KAB deux triangles resp. J, K-rectangle-isocèle, extérieurs à ABC.

Donné : le triangle IJK est I-rectangle-isocèle. [25]

Commentaire : une simple application.

VISUALISATION



- Notons D, E les symétriques de B, C resp. par rapport à K, J.
- **Scolies :** **(1)** les triangles ABD et ACE sont rectangles-isocèles en A et extérieurs à ABC

  (2) J est le milieu de [CE]

  (3) K est le milieu de [BD].
- D'après **C. 2.** scolie **2** et **3**, (BE) ⊥ (CD) et BE = CD

[25] Neuberg J.

- D'après Thalès "La droite des milieux",
  appliqué
  * au triangle BCE, (BE) // (IJ) et BE = 2.IJ
  * au triangle CBD, (CD) // (IK) et CD = 2.IK.
- La relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (IK) ⊥ (IJ)
  par substitution et par simplification par 2, IJ = IK.
- **Conclusion :** le triangle IJK est I-rectangle-isocèle.

Une courte biographie de Joseph Neuberg

Son nom est associé à ceux de Lemoine et de Brocard,
comme le troisième cofondateur de la géométrie moderne [26]

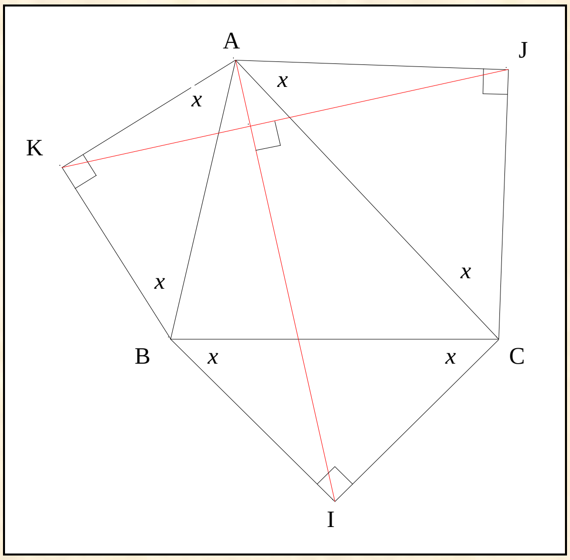
Joseph Jean Baptiste Neuberg est né à Luxembourg, le 30 octobre 1840.
Élève de l'Athénée de Luxembourg, puis de l'École normale de la faculté des sciences de Gand en 1859, il en sort diplômé en 1862.
Enseignant dans de nombreux collèges, il devient professeur de l'École normale de Nivelle de 1862 à 1865, puis de l'Athénée Royal d'Arlon de 1865 à 1867 et de l'École normale de Bruges de 1868 à 1878. Professeur à l'Athénée royal de Liège de 1878 à 1884, puis professeur à l'Université de Liège de 1884 à 1911, Joseph Neuberg enseigne les mathématiques... En 1906, il prend la nationalité belge et préside, à partir de 1911, l'Académie royale de Belgique. C'est avec Paul Mansion et Eugène Catalan qu'il fonde en 1874 la *Nouvelle correspondance de mathématique* qui sera publiée entre 1874 et 1880. C'est aussi avec Mansion qu'il édite en 1881, la célèbre revue *Mathesis*.
Très actif et dynamique dans le domaine de la Géométrie du triangle, l'érudit Neuberg influencé par les idées de Möbius, découvre de nombreux résultats mais n'ouvre aucune voie de recherche. Rapidement, il comprend la nécessité de fixer une certaine terminologie; c'est lui qui propose en particulier, le terme de médiatrice, de triangle complémentaire (médian), de contre-parallélogramme, nomme les cercles de Toricelli, introduit les centres isodynamiques, les droites et points isogonaux, le point de Lemoine...
Pour la petite histoire, Joseph Neuberg est né luxembourgeois et est devenu belge en 1906.
Il décède à Liège, le 22 mars 1926.

2. Deux droites perpendiculaires de Neuberg

VISION

[26] Court-Altshiller N.

Figure :

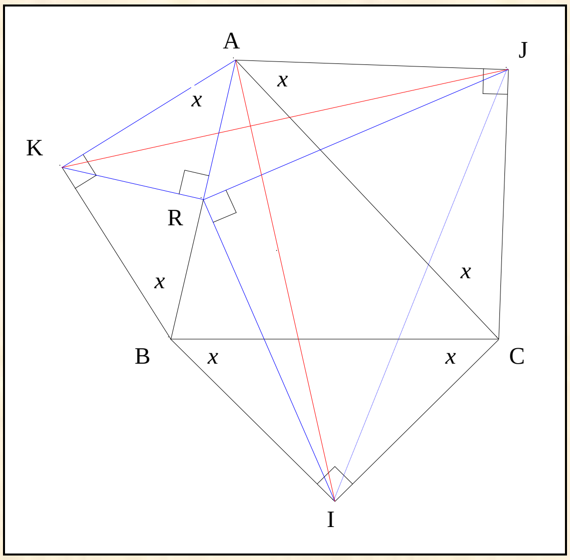


Traits : ABC un triangle,
et IBC, JCA, KAB trois triangles resp. I, J, K-rectangle-isocèle, extérieurs à ABC.

Donné : (IA) est perpendiculaires à (JK) et IA = JK. [27]

Commentaire : concourance et égalités.

VISUALISATION



- Notons R le milieu de [AB].
- **Scolie :** le triangle RAK est R-rectangle.

[27] Neuberg J..

- D'après **F. 1.** Le triangle rectangle-isocèle de Neuberg
  appliqué à CAB avec CBI et CAJ, le triangle RIJ est R-rectangle-isocèle.

- **Scolie :** les triangles RJI et RAK sont R-rectangles-isocèles

- D'après **C. 2.** scolie **2** et **3**
  appliqué au triangle RAJ avec RAK et RJI, $(AI) \perp (KJ)$ et $AI = KJ$.

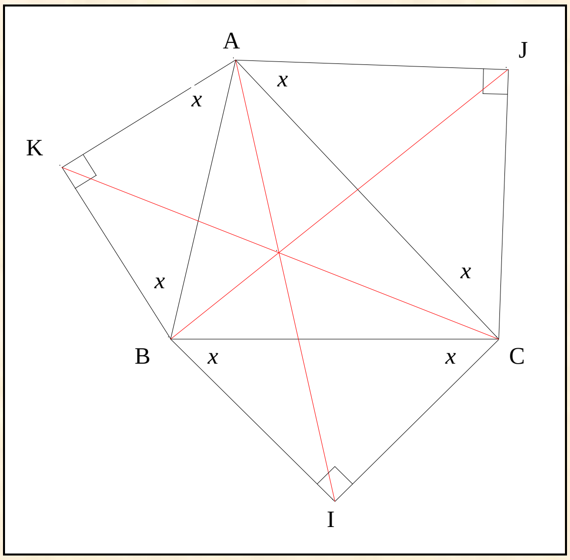
- **Conclusion :** (IA) est perpendiculaires à (JK) et IA = JK

Scolie : (IA) est la I-hauteur du triangle IJK.

3. Trois droites concourantes de Neuberg

VISION

Figure :



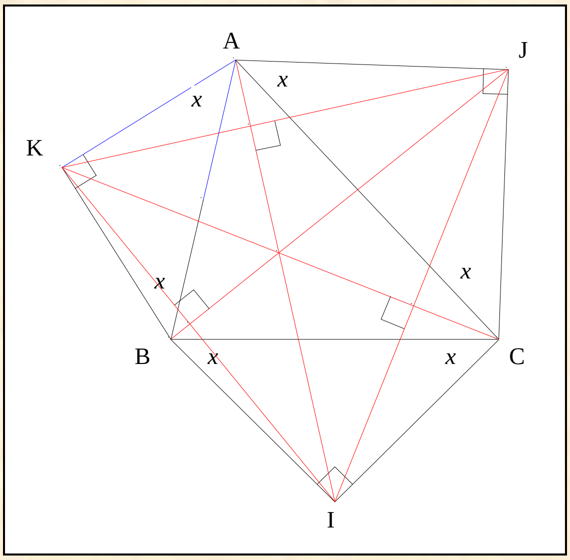
Traits : ABC un triangle,
et BCI, CAJ, ABK trois triangles resp. I, J, K-rectangle-isocèle, extérieurs à ABC.

Donné : (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes. [28]

Commentaire : concourance et égalités.

VISUALISATION

[28] Neuberg J..



- D'après **F. I. 2.** Deux droites perpendiculaires de Neuberg, (IA) est la I-hauteur du triangle IJK.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (JB) est la J-hauteur du triangle IJK
(KC) est la K-hauteur du triangle IJK.

- **Conclusion :** d'après Archimède, (AI), (BJ) et (CK) sont concourent à l'orthocentre du triangle IJK.

Scolies : **(1)** IA = BJ = CK

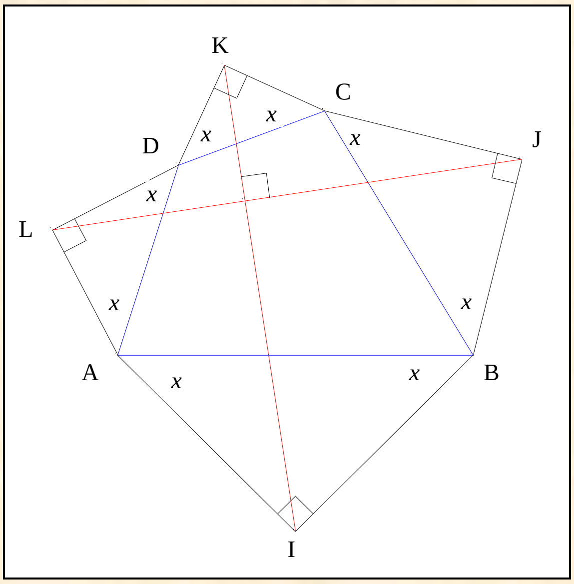
(2) I est l'orthocentre de IBC.

II. ÉDOUARD COLLIGNON

1. La figure de Collignon

VISION

Figure :

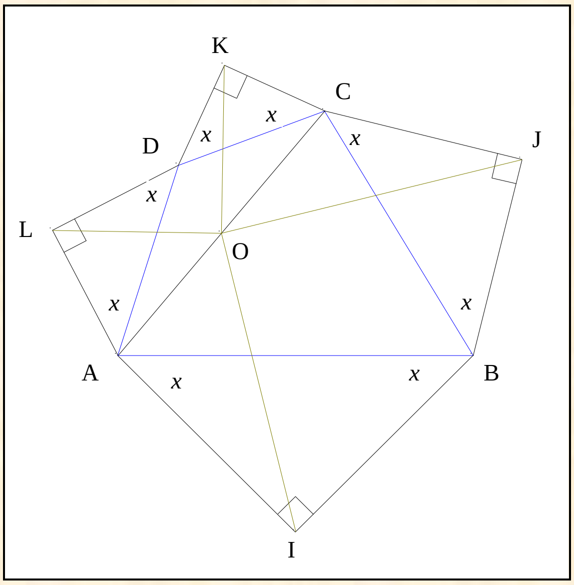


Traits :	ABCD	un quadrilatère
et	IAB, JBC, KCD, LDA	quatre triangles I, J, K, L-rectangle-isocèle, extérieurs à ABCD.

Donnés : (IK) est perpendiculaire à (JL) et IK = JL. [29]

Commentaire : une généralisation à un quadrilatère.

VISUALISATION

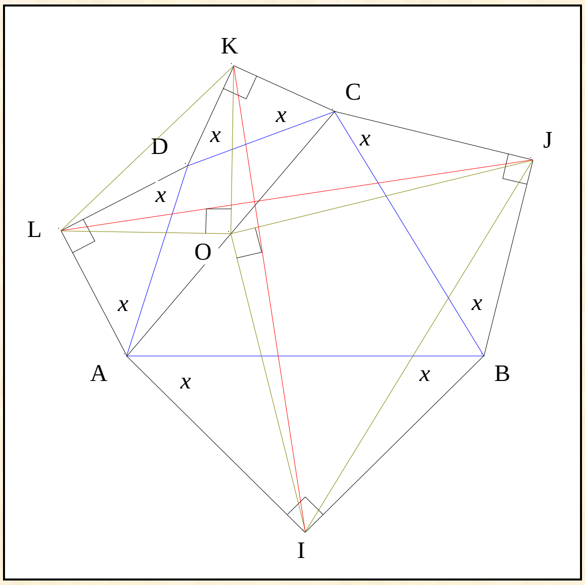


- Notons O le milieu de [AC].

- D'après **F. I. 1.** Le triangle rectangle de Neuberg
  appliqué au
  * triangle BAC avec IAB et JCB, (OI) $\perp$ (OJ) et OI = OJ

[29] Collignon Ed.

* triangle DAC avec KCD et LAD, (OL) ⊥ (OK) et OL = OK.



- **Conclusion :** d'après **C. 2.** scolie **2** et **3**, appliqué au triangle OJK avec JOI et KOL,
(IK) est perpendiculaire à (JL) et IK = JL.

Énoncé traditionnel :

sur les côtés d'un quadrilatère ABCD,
on construit à l'extérieur des triangles rectangles isocèles ;
les diagonales sont égales et orthogonales.

Note historique : cette figure a été revendiquée dans la revue de *L'AFAS* de 1893, par Joseph Neuberg qui, au passage, l'attribue aussi à H. H. van Aubel [30].

Une courte biographie d'Édouard Collignon

Édouard Collignon est né le 28 mars 1831 à Laval (Mayenne, France).
Fils de Charles Etienne Collignon et de Louise Caroline Lesage, il entre en 1849 à l'École Polytechnique.
En 1854, il est envoyé en mission en Belgique, Hollande et aux Îles britanniques.
De 1857 à 1862, il construit les voies ferrées Saint-Petersburg-Varsovie et Moscou-Nijni-Novgorod.
Répétiteur, puis professeur en 1873 de mécanique à Polytechnique et de mécanique appliquée aux Ponts, il est aussi en 1875 professeur d'analyse et de mécanique à l'École préparatoire aux Ponts ; il renonce à cette dernière activité lors de sa nomination en 1879 comme inspecteur de l'École des ponts.
Membre de la Société philomathique de Paris, de la Société mathématique de France, il est également membre fondateur de l'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS).
Il décède le 11 août 1913.

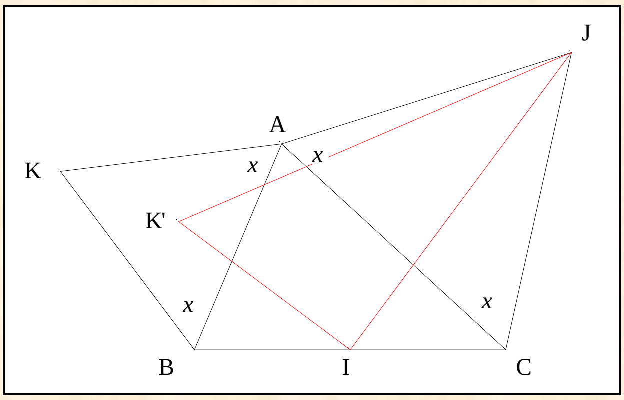
[30] Van Aubel H. H., Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque, *Nouvelle Correspondance Mathématique* **4** (1878) 40-44

III. L'AUTEUR

1. Le triangle rectangle de l'auteur

VISION

Figure :

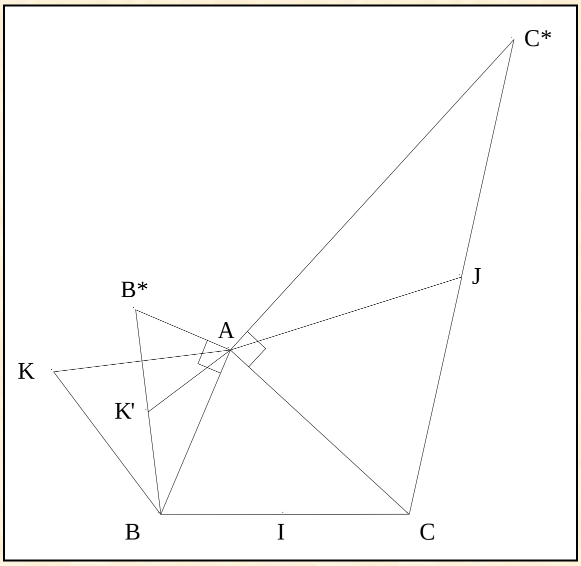


Traits : ABC un triangle,
JAC, KAB deux triangles J, K-isocèles, semblables, extérieurs à ABC,
K' l'orthocentre de ABK
et I le milieu de [BC].

Donné : le triangle IJK' est I-rectangle [31].

Commentaire : ce résultat est une généralisation du triangle rectangle-isocèle de Joseph Neuberg.

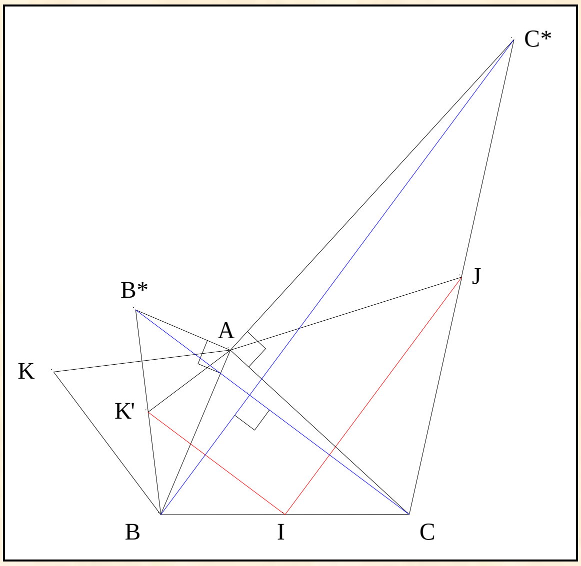
VISUALISATION



[31] A right-angle triangle, AoPS du 28/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573265

- Notons B*, C* les symétriques de B, C resp. par rapport à K', J.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle" et par hypothèse,
  les triangles ABB* et ACC* sont A-rectangles et semblables.



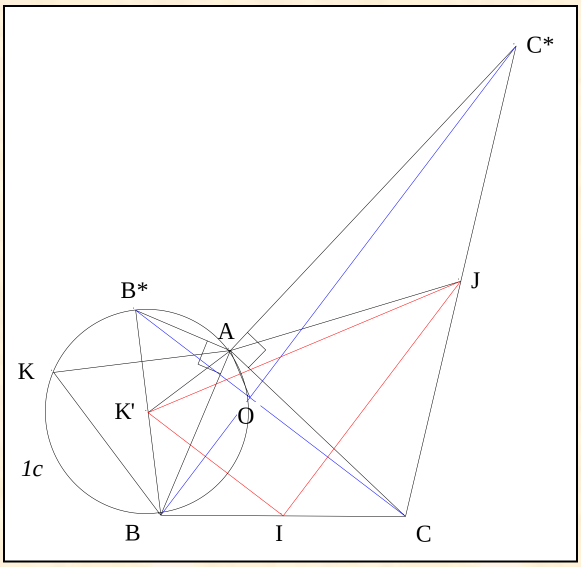
- D'après **C. 2.** scolie **2**
  appliqué au triangle ABC avec BAB* et CAC*, (BC*) ⊥ (CB*).

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au
  * triangle BCC*, (BC*) // (IJ)
  * triangle CBB*, (CB*) // (IK').

- La relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (IJ) ⊥ (IK').

- **Conclusion :** le triangle IJK' est I-rectangle.

Scolie : deux angles égaux

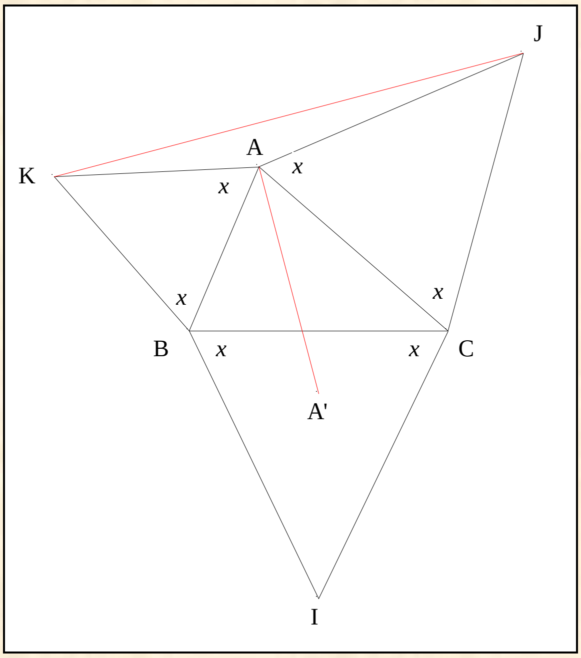


- Notons O le point d'intersection de (BC*) et (CB*),
  et *1c* le cercle de diamètre [BB*] ; il passe par A et O.
- Nous avons : K'A = K'O ;
- Mutatis mutandis, JA = JO ;
  En conséquence, (JK') est la médiatrice de [AO].
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que <K'JI = <ABK' (= <AC*C).
- **Conclusion :** <IK'J = <C*CA (= <JCA = x).

2. Deux droites perpendiculaires

VISION

Figure :

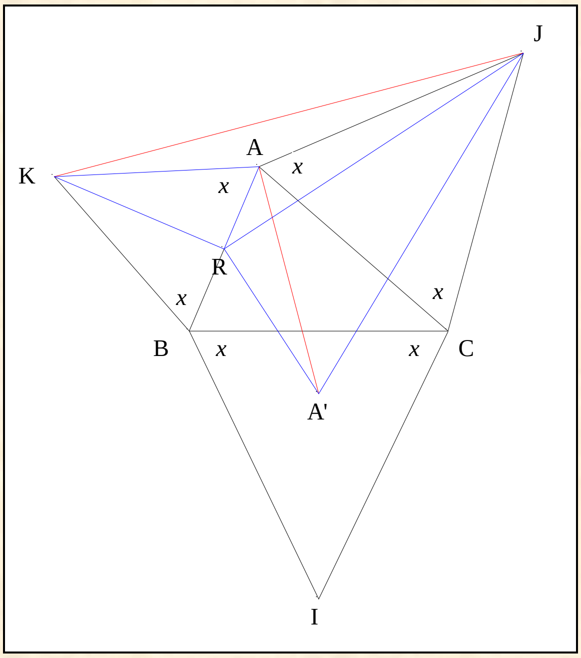


Traits : ABC un triangle,
IBC, JCA, KAB trois triangles I, J, K-isocèles, semblables, extérieurs à ABC
et A' l'orthocentre de IBC.

Donné : (AA') est perpendiculaire à (JK).

Commentaire : ce résultat généralise celui de Joseph Neuberg en **F. I. 2.**

VISUALISATION



- Notons R le milieu de [AB].

- **Scolie :** le triangle RAK est R-rectangle.

- D'après **F. III. 1.** Le triangle rectangle de l'auteur, le triangle A'RJ est R-rectangle et semblable à ARK.

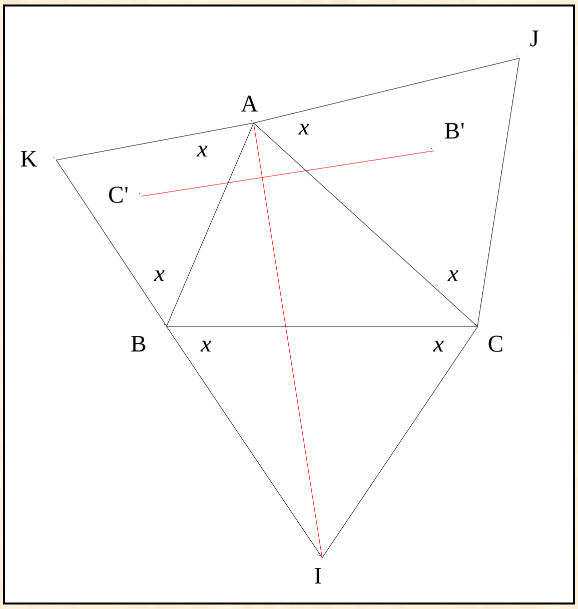
- D'après **C. 2.**, appliqué au triangle ARJ avec ARK et JRA', (AA') ⊥ (JK).

- **Conclusion :** (AA') est perpendiculaire à (JK).

3. La variante de Darij Grinberg

VISION

Figure :

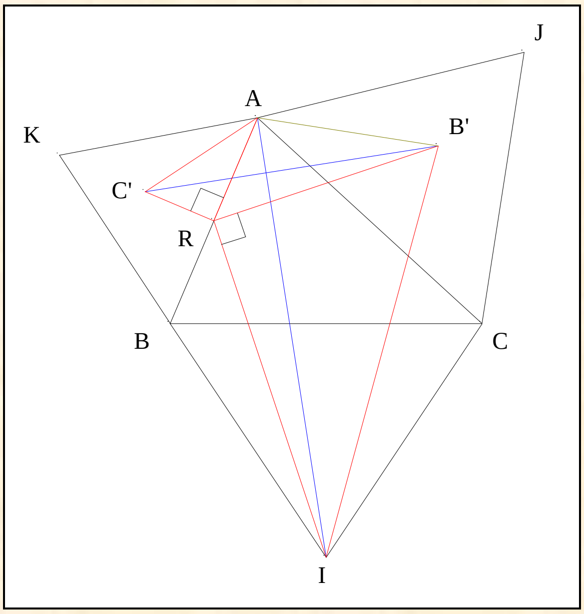


Traits : ABC un triangle,
IBC, JCA, KAB trois triangles I, J, K-isocèles semblables, extérieurs à ABC
et B', C' les orthocentres resp. de JCA, KAB.

Donné : (AI) est perpendiculaire à (B'C').[32]

Commentaire : ce résultat est une variante de celui de Joseph Neuberg.

VISUALISATION



- Notons R le milieu de [AB].

[32] Grinberg D., Complementary Kiepert triangles, Message *Hyacinthos* # **8604** du 09/11/2003
Two perpendicular lines, AoPS du 28/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573289

- **Scolie :** le triangle RAK est R-rectangle.

- D'après **F. III. 1.** Le triangle rectangle de l'auteur, appliqué à CAB avec IBC et JCA, le triangle RIB' est R-rectangle et semblable à RAC'.

- D'après **C. 2.**, appliqué au triangle RAB' avec ARC' et RIB', (AI) ⊥ (B'C').

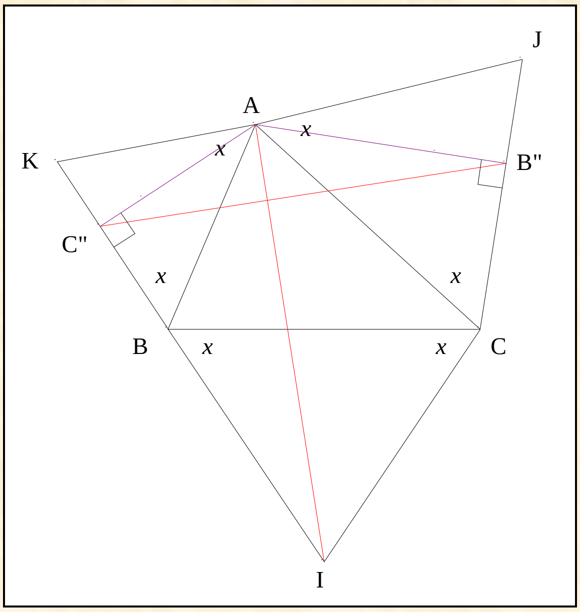
- **Conclusion :** (AI) est perpendiculaire à (B'C').

Note historique : la preuve de Darij Grinberg est de nature vectorielle.

4. L'auteur

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
IBC, JCA, KAB trois triangles I, J, K-isocèles semblables, extérieurs à ABC
et B", C" les pieds des A-hauteurs resp. de JCA, KAB.

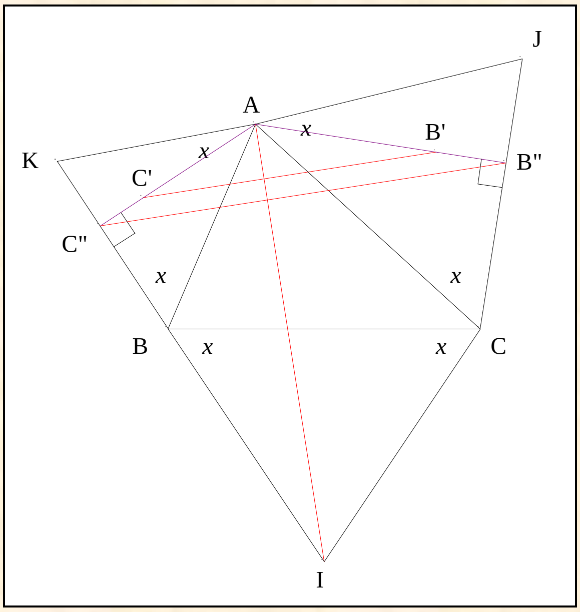
Donné : (AI) est perpendiculaire à (B"C").[33]

Commentaire : ce résultat est une généralisation de celui de Darij Grinberg.

---

[33] Ayme J.-L;, Two perpendiculars, AoPS du 30/01/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573620

VISUALISATION



- Notons B', C' les orthocentres resp. de JCA, KAB.

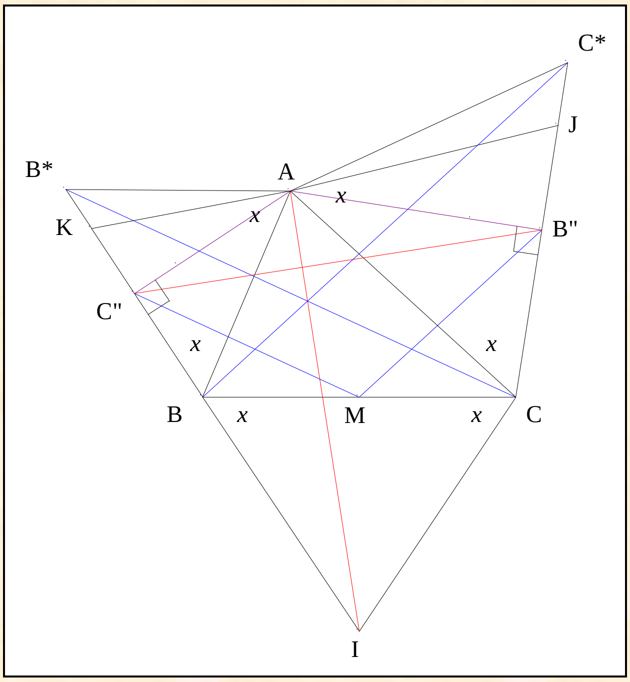
- D'après (AI) ⊥ (B'C')

- JCA et KAB étant semblables, B' divise [AB"] dans le même rapport que C' au regard de [AC"].

- D'après Thalès "Rapports", (B'C') // (B"C") ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (AI) ⊥ (B"C").

- **Conclusion :** (AI) est perpendiculaire à (B"C").

Scolie :



- Notons M le milieu de [BC],
  B* le symétrique de B par rapport à C"
  et C* le symétrique de C par rapport à B".

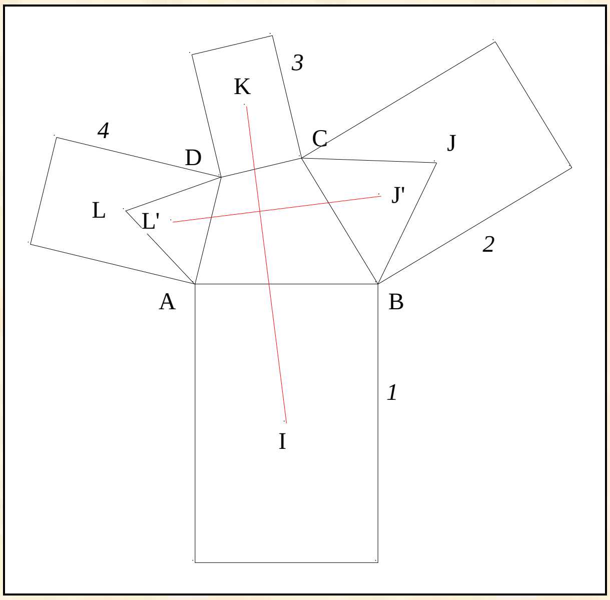
- D'après **C. 2.** Scolie **3**, BC* = CB*.

- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux", MB" = MC".

5. Une généralisation de H. H. van Aubel

VISION

Figure :



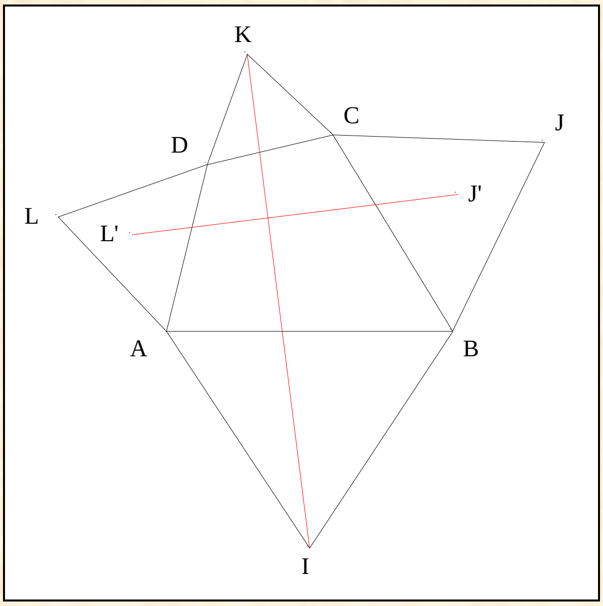
Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
1 un rectangle adjacent par [AB], extérieur à ABCD,
2 le rectangle semblable à *1*, adjacent par [BC], extérieur à ABCD,
3 le rectangle semblable à *1*, adjacent par [CD], extérieur à ABCD,
4 le rectangle semblable à *1*, adjacent par [DA], extérieur à ABCD,
I, J, K, L les centres resp. de *1*, *2*, *3*, *4*
et J', L' les orthocentres resp. des triangles JCB, LAD.

Donné : (IK) est perpendiculaire à (J'L'). [34]

Commentaire : ce résultat est une généralisation de la figure de Collignon (**Cf. F. II. 1.**);

VISUALISATION

[34] van Aubel H., Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque, *Nouvelle Correspondance Mathématique* **4** (1878) 40-44



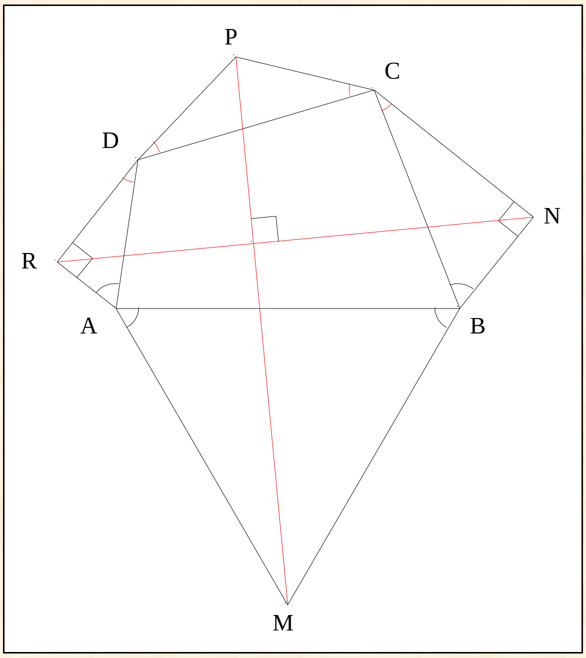
- **Scolie :** les triangles IAB, JBC, KCD et LDA sont I, J, K, L-isocèles, semblables, extérieurs à ABCD.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (IK) est perpendiculaire à (J'L').

6. Une généralisation de Virgil Nicula

VISION

Figure :



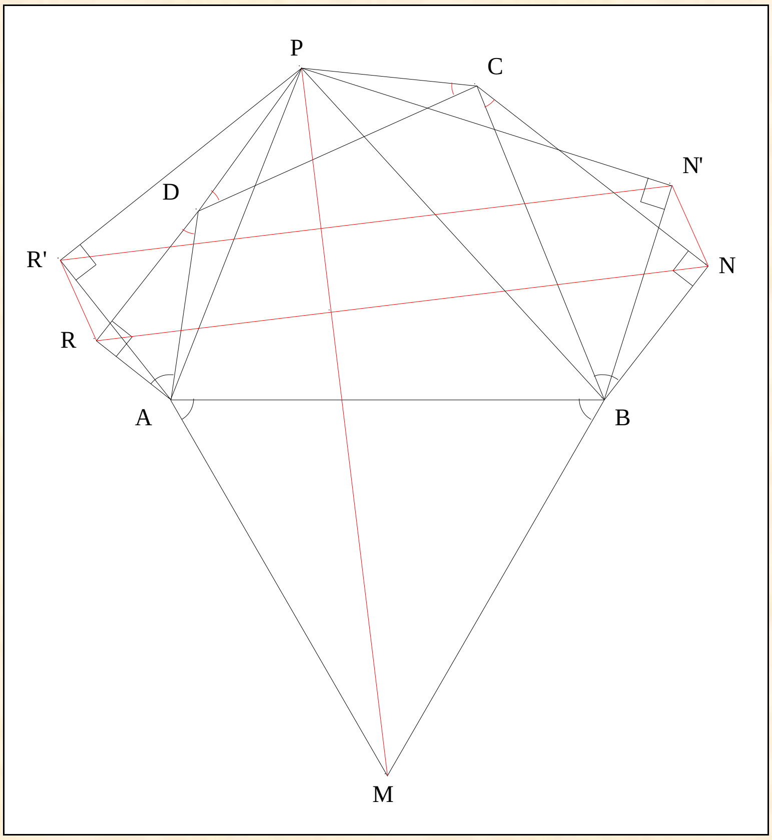
Traits : ABCD		un quadrilatère convexe,
	MAB, PCD	deux triangles resp. M, P-isocèles, extérieurs à ABCD,
et	NBC, RDA	deux triangles resp. N, R-rectangles, extérieurs à ABCD
		tels que <MBA = <NBC = <RAD

<NCB = <PCD = <RDA.

Donné : (PM) est perpendiculaire à (NR). [35]

Commentaire : Virgil Nicula *I am only a metrical proof for this extension.*

VISUALISATION



- Notons N'BC, R'DA deux triangles resp. N', R'-rectangles, semblables à NBC, extérieurs à ABCD
- D'après **F. III. 4.**, (PM) ⊥ (R'N').
- D'après **H. III. 1.**, le quadrilatère RNN'R' est un parallélogramme ;
  en conséquence, (R'N') // (RN) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (PM) ⊥ (RN).
- **Conclusion :** (PM) est perpendiculaire à (NR).

Scolies : **(1)** *si,* <NBC = 60°, *alors,* nous retrouvons **F. III. 4.** L'auteur

(2) *si,* <NBC = 45°, *alors,* nous retrouvons **F. II. 1.** La figure de Collignon

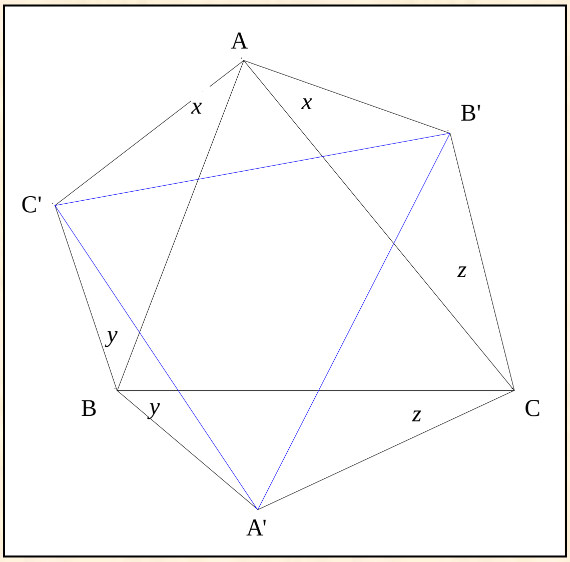
[35] Nicula V., Outside of a triangle, AoPS du 19/06/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=353593

G. LUDWIG KIEPERT

1. Un triangle jacobien

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
et	A'CB, B'AC, C'BA	trois triangles extérieurement à ABC comme indiqué sur la figure.

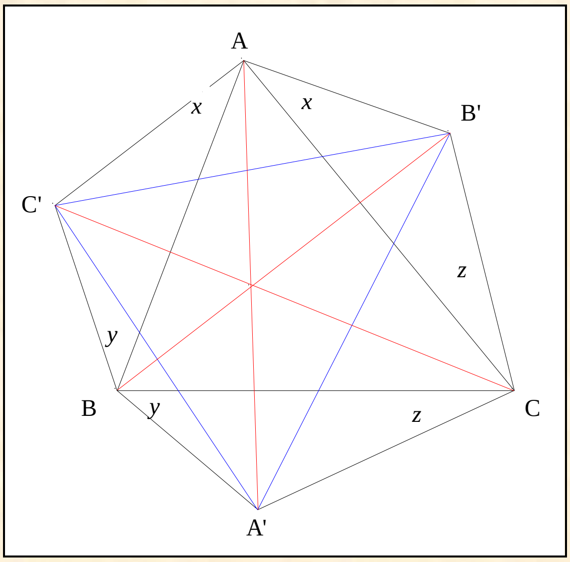
Finition : A'B'C' est "un triangle jacobien [36] ou encore isogonal relativement à ABC".

2. Le théorème de Jacobi

VISION

Figure :

[36] En référence à Jacobi



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle jacobien relativement à ABC.

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. [37]

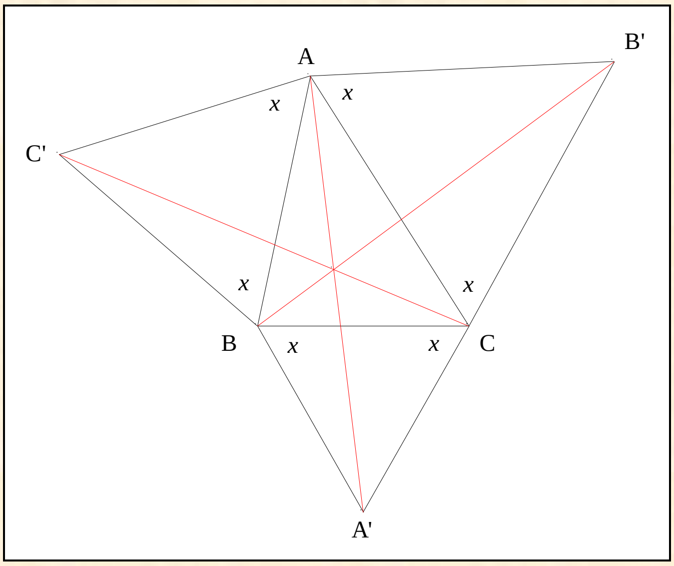
Commentaire : une preuve de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [38]
ce résultat est aussi connu sous "le théorème de Fermat-Toricelli généralisé" ou encore sous le nom anglais "Isogonal theorem".
La solution classique met en jeu le théorème de Céva dans sa version métrique.

3. Le théorème de Kiepert

VISION

Figure :

[37] Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825)
[38] Ayme J.-L., Le théorème de Jacobi, G.G.G. vol. **5** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
From Robson technicque to Morley's trisector theorem, G.G.G. vol. **10**, p. 18 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABC un triangle
et A'CB, B'AC, C'BA trois triangles A', B', C'-isocèles, semblables, extérieurs à ABC.

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. [39]

Commentaire : ce résultat peut être vu comme une application du théorème de Jacobi.

Scolies : **(1)** le résultat reste inchangé lorsqu'on remplace dans l'énoncé "extérieur" par "intérieur"

(2) en notant φ l'angle de base des triangles isocèles,
A'B'C' est "le φ-triangle de Kiepert de ABC".

Note historique : en 1868, Émile Lemoine [40] pose ce problème :

construire un triangle,
connaissant les sommets des triangles équilatéraux construits sur les côté.

Une solution est donnée par Ludwig Kiepert en 1869 alors qu'il était doctorant à Berlin sous la direction de Karl Weierstrass.
Sa solution de nature barycentrique contient le résultat démontré et de plus, il envisage la situation où l'un des sommets se déplace :

le point de concours des droites décrit une conique,
l'hyperbole de Kiepert,
passant par
le point médian, par l'orthocentre et le point de Fermat du triangle.

Archive :

---

[39] Kiepert L., Solution de la question **864**, *Nouvelles annales de Mathématiques* 2e série, **8** (1869) 40-42 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[40] Lemoine E., Question **864**, *Nouvelles annales de Mathématiques* 2e série, **7** (1868) 191 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

Question 864.

(voir 2e série, t. VII, p. 191);

PAR M. KIEPERT,

Étudiant en Mathématiques, à Berlin.

L'auteur démontre ensuite le théorème suivant par des considérations empruntées à la géométrie analytique :

1° Si sur les côtés AB, CA, BC d'un triangle on construit des triangles isocèles semblables ABC_1, ACB_1,

(42)

CBA_1, les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au même point ;

[41]

Une courte biographie de Ludwig Kiepert

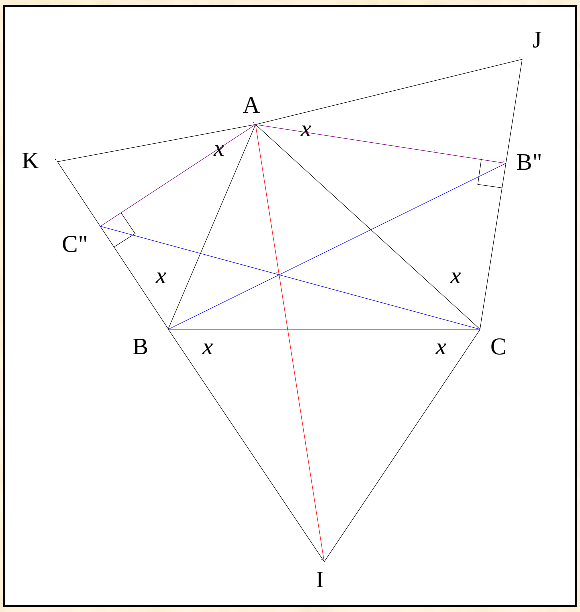
Friedrich Wilhelm August Ludwig Kiepert est né le 6 octobre 1846 à Breslau (Basse-Silésie, Allemagne).
Fils du pasteur protestant Ludwig Kiepert à Breslau qui décèdera un an après la naissance de son fils, Ludwig grandi sans frères et sœurs.
En 1856, il commence ses études de mathématiques à l'Université de Breslau. Après son arrivée à l'Université Humboldt à Berlin, il est fortement influencé par Karl Weierstraß et obtient son doctorat en 1870.
Grâce à Weierstrass, il suit en 1871 un programme de conférences privées à l'Université Albert-Ludwig de Fribourg en Brisgau où il enseignera l'année suivante.
À l'âge de 29 ans, il épouse Anna Betz, avec qui il aura deux enfants.
En 1877, Kiepert professe les mathématiques pendant deux ans à l'Université technique de Darmstadt, puis devient en 1879 professeur de mathématiques supérieures à l'Université technique de Hanovre, où il deviendra recteur de 1901 jusqu'en 1904.
Avec son ami Félix Klein, il fonde en 1895 le premier Institut d'Allemagne à la Georg-August-Universität de Göttingen, où tous les domaines de l'assurance sont enseignés.
Il décède le 5 septembre 1934 à Hanovre (Basse-Saxe, Allemagne).

[41] Kiepert L., Solution de la question **864**, *Nouvelles annales de Mathématiques* 2e série, **8** (1869) 40-42 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

4. L'auteur

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	IBC, JCA, KAB	trois triangles I, J, K-isocèles semblables, extérieurs à ABC
et	B", C"	les pieds des A-hauteurs resp. de JCA, KAB.

Donné : (BB"), (CC") et (AI) sont concourantes. [42]

Commentaire : une application.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après **G. 2.** Le théorème de Jacobi, (BB"), (CC") et (AI) sont concourantes.

[42] Ayme J.-L;, Two perpendiculars, AoPS du 30/01/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573620

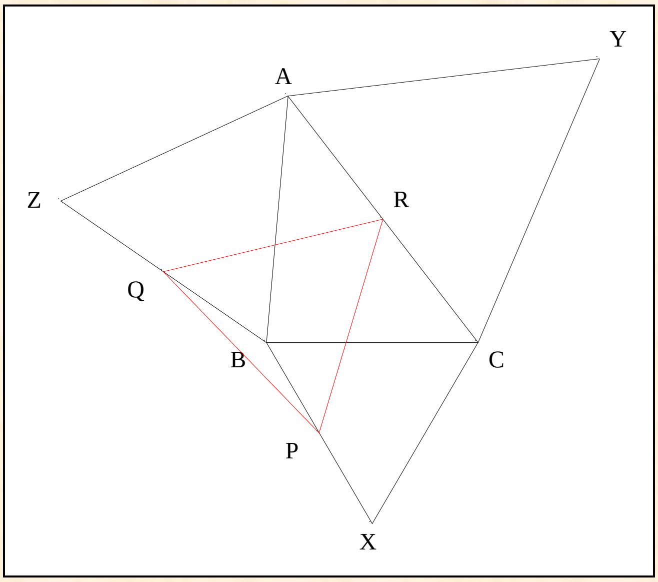
H. DIVERS

I. TROIS TRIANGLES SEMBLABLES

1. Un triangle équilatéral

VISION

Figure :

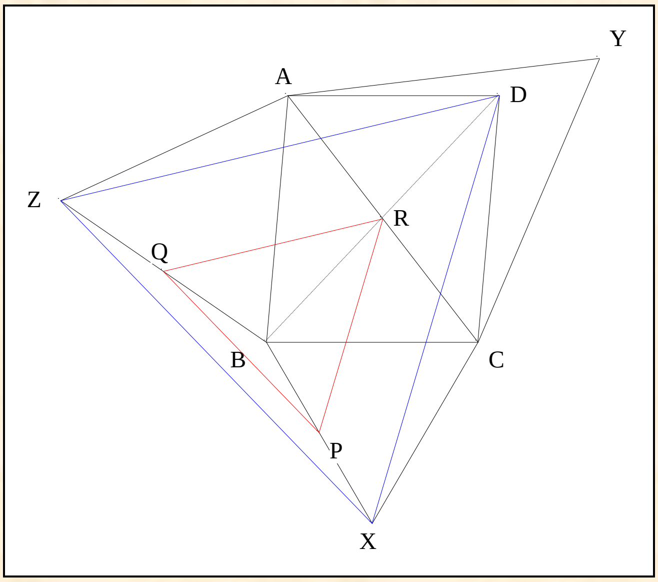


Traits :	ABC	un triangle,
	XCB, YAC, ZBA	trois triangles X, Y, Z-équilatéraux, extérieurs à ABC
et	P, Q, R	les milieux resp. de [BX], [BZ], [AC].

Donné : le triangle PQR est équilatéral. [43]

VISUALISATION

[43] An equilateral triangle, AoPS du 28/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573290



- Notons D le point tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

- **Scolie :** R est le milieu de [BD].

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au
  * triangle BXZ, (PQ) // (XZ) et 2.PQ = XZ
  * triangle BZD, (QR) // (ZD) et 2.QR = ZD
  * triangle BDX, (RP) // (DX) et 2 .RP = DX.

- D'après "Le théorème c.a.c"
  les triangles BXZ, ADZ et CXD sont égaux ; en conséquence, XZ = ZD = XD.

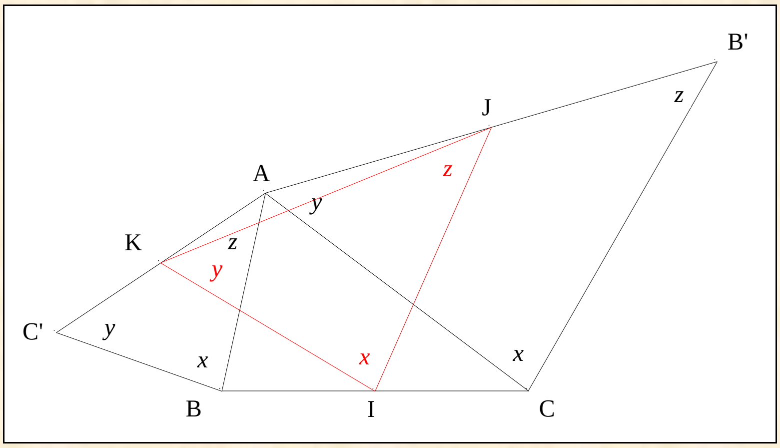
- Par substitution et simplification, PQ = QR = RP.

- **Conclusion :** le triangle PQR est équilatéral.

2. L'auteur

VISION

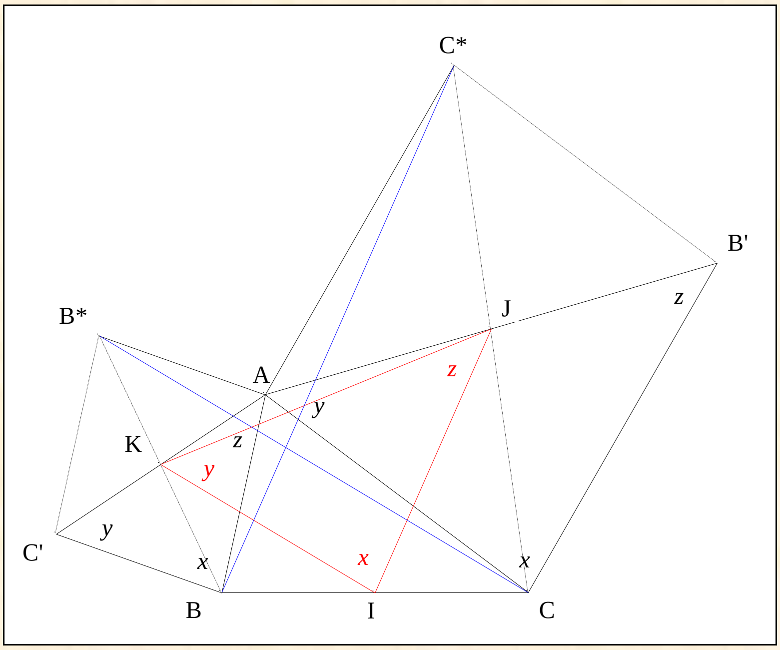
Figure :



Traits : ABC un triangle,
CAB', BC'A deux triangles semblables, extérieurs à ABC
et I, J, K les milieux resp. de [BC], [AB'], [AC']

Donné : le triangle IJK est semblable à CB'A. [44]

VISUALISATION



- Notons B*, C* les symétriques de B, C resp. par rapport à K, J.
- D'après Thalès "La droite des milieux", (IK) // CB*) et (IJ) // (BC*).
- **Scolies :** les quadrilatères ABC'B* et ACB'C* sont deux parallélogrammes.
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que <JIK = x.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que <IKJ = y
  <KJI = z.

---

44 Ayme J.-L., Three similar triangles, AoPS du 02/02/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=574092

- **Conclusion :** le triangle IJK est semblable à CB'A

II. USA TST (2006) PROBLEM 6

1. Deux segments égaux

VISION

Figure :

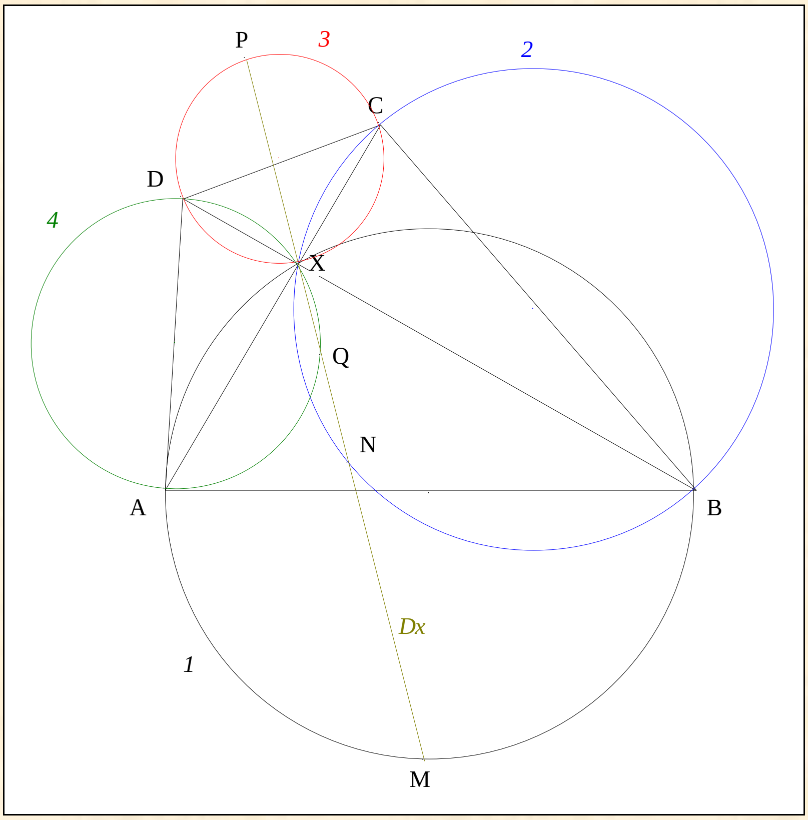
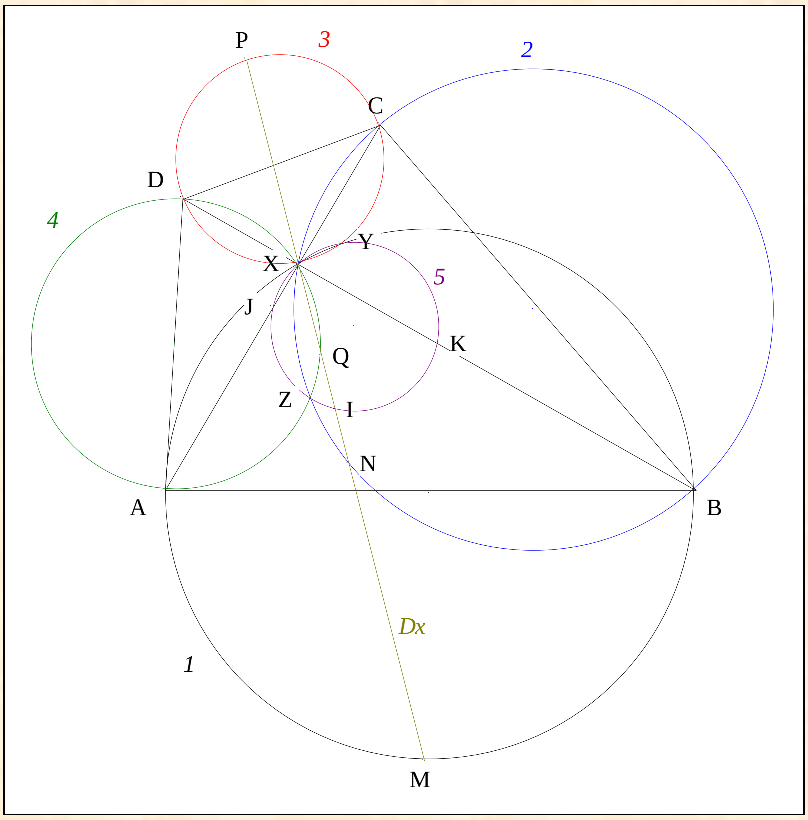


Figure : ABCD un quadrilatère convexe,
X le point d'intersection de [AC] et [BD],
1, 2, 3, 4 les cercles circonscrits resp. aux triangles XAB, XBC, XCD, XDA,
Dx une droite passant par X
et M, N, P, Q les seconds points d'intersection de *Dx* resp. avec *1, 2, 3, 4*.

Donné : MN = PQ.

Commentaire : une application du cercle des milieux.

VISUALISATION



- Notons I, J, K les seconds points d'intersection de (PM), (AC), (BD) avec *5*
  Y, Z les seconds points d'intersection resp. de *1* et *3*, *2* et *4*,
  et *5* le cercle des milieux de *1* et *3* ; il passe par I, J, K, X, Y et Z. [45]

- Nous avons : **(1)** IM = IP
  (2) JA = JC
  (3) KB = KD.

- D'après "The midcircle theorem", *5* est le cercle des milieux de *2* et *4* ;
  en conséquence, I est le milieu de [QN] i.e. IN = IQ.

- Par soustraction membre à membre, IM – IN = IP –IQ.

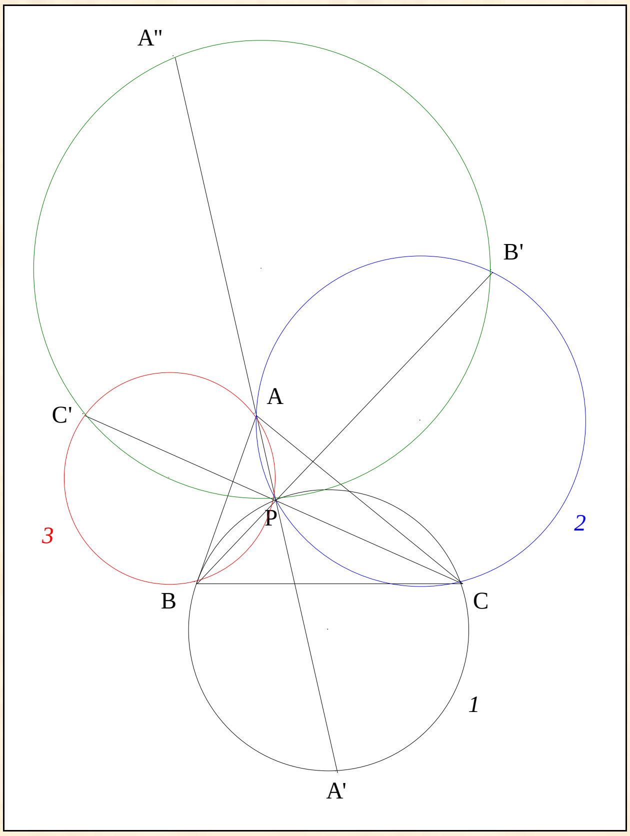
- **Conclusion :** MN = PQ.

2. Un milieu - Quatre points cocycliques

VISION

Figure :

[45] Ayme J.-L., The midcircle theorem ou le cercle des milieux et des rapports constants, G.G.G. vol. **25** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



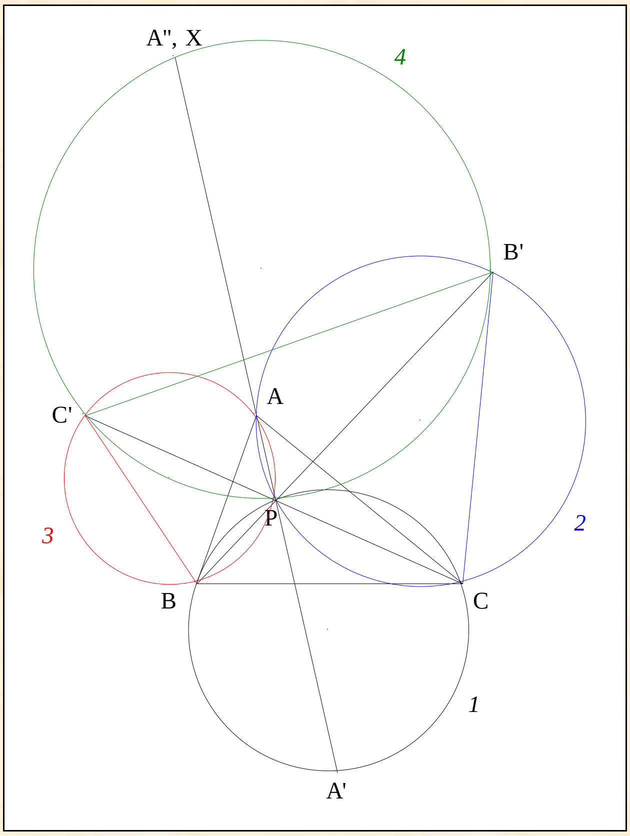
Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB,
	A', B', C'	les seconds points d'intersection de (AP), (BP), (CP) resp. avec *1*, *2*, *3*
et	A"	un point de (AP).

Donné : A est le milieu de [A'A"]
si, et seulement si,
A", B', C' et P sont cocycliques. [46]

Commentaire : bien que l'approche soit différente, les triangles AB'C et ABC' sont semblables (Cf. scolie **1**).

VISUALISATION NÉCESSAIRE

[46] Grinberg D., Two variable perspectors, Message *Hyacinthos* # **10322** du 30/08/2004
A vertex is midpoint, AoPS du 28/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573291



- **Hypothèse :** A est le milieu de [A'A"]

- Notons *4* le cercle circonscrit au triangle PB'C'
  et X le second point d'intersection de (APA') avec *4*.

- D'après **H. 1.** Deux segments égaux
  appliqué au quadrilatère BCB'C', AA' = AX ;
  en conséquences, **(1)** A est le milieu de [A'X]
  (2) A" et X sont confondus.

- **Conclusion :** A", B', C' et P sont cocycliques.

VISUALISATION SUFFISANTE

- **Hypothèse :** A", B', C' et P sont cocycliques.

- Notons *4* le cercle circonscrit au triangle PB'C'.

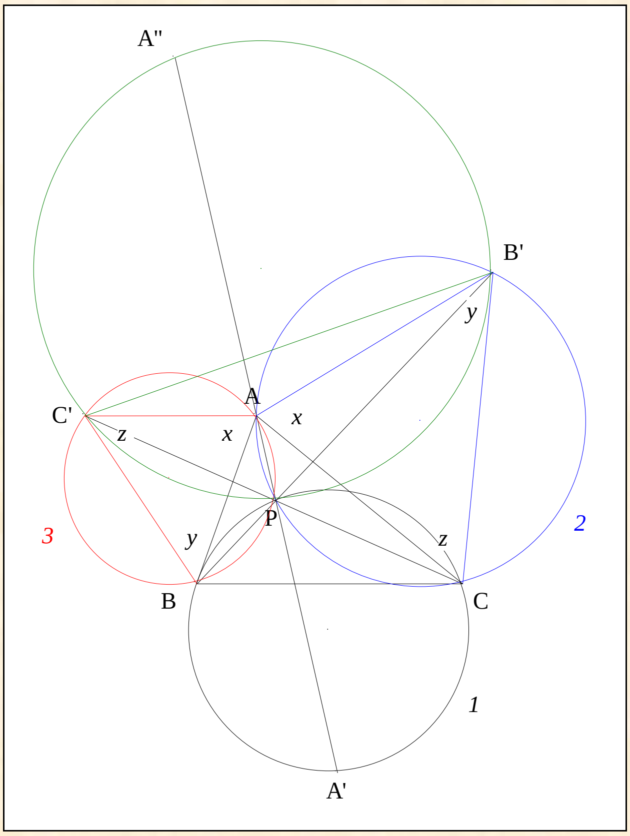
- **Scolie :** A" est le second point d'intersection de (APA') avec *4*.

- D'après **H. 1.** Deux segments égaux
  appliqué au quadrilatère BCB'C', AA' = AX ;

- **Conclusion :** A est le milieu de [A'A"]

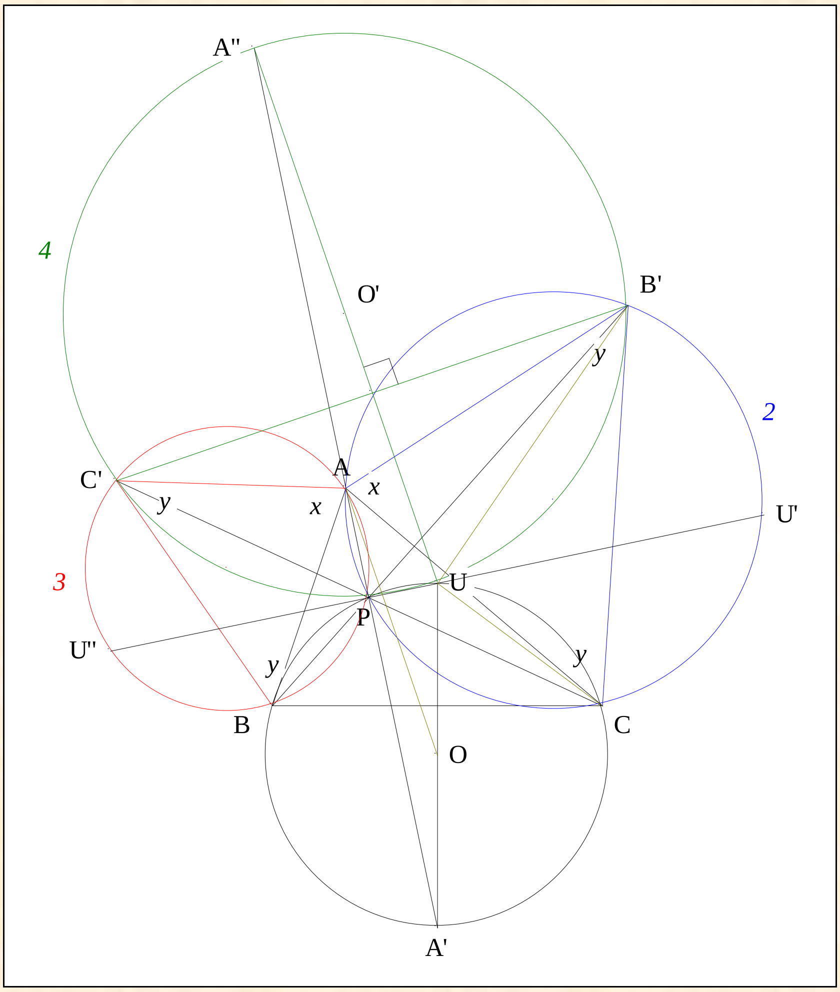
Note historique : la solution de Darij Grinberg est purement angulaire.

Scolies : **(1)** deux triangles semblables



- **Conclusion :** par une chasse angulaire, nous montrerions que les triangles AB'C et ABC' sont semblables.

(2) Le cas particulier : AB'C et ABC' sont de plus A-isocèles



- Par une chasse angulaire, nous montrerions que (PA') est la P-bissectrice intérieure de PBC
  (PA") est la P-bissectrice intérieure de PB'C'.

- Notons U le second point d'intersection de *1* et *4*,
  U', U" les seconds points d'intersection de (PU) resp. avec *2*, *3*

- En considérant le triangle UB'C,
  mutatis mutandis, nous montrerions que
  * U est le milieu de [U'U"]
  * (PU) est la P-bissectrice intérieure de PB'C i.e.
    (PU) est la P-bissectrice extérieure de PBC.

- Notons O, O' les centres resp. de *1*, *4*.

- Sachant que (PA') et (PU) sont perpendiculaires,
  * U, O et A' sont alignés
  * U, O' et A" sont alignés.

et O, O' les centres resp. de *1*, *4*.

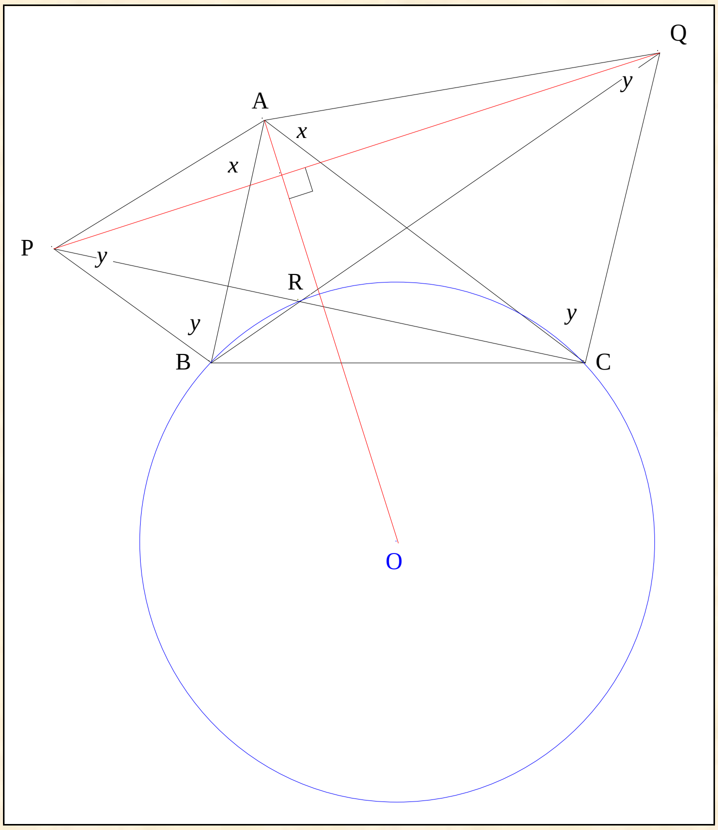
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle UA'A", (AO) // (AU) ;
  nous savons que (AU) $\perp$ (B'C') ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (AO) $\perp$ (B'C').

- **Conclusion :** (AO) est perpendiculaire à (B'C').

3. USA TST 2006, Problem 6

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	PAB, QAC	deux triangles A-isocèles, semblables, extérieurs à ABC,
	R	le point d'intersection de (BQ) et (CP),
et	O	le centre du cercle circonscrit au triangle BCR.

Donné : (AO) est perpendiculaire à (PQ). [47]

Commentaire : ce résultat apparaît comme un cas particulier de la situation précédente.
La preuve est présentée dans **H. 2.** Scolie **2**.

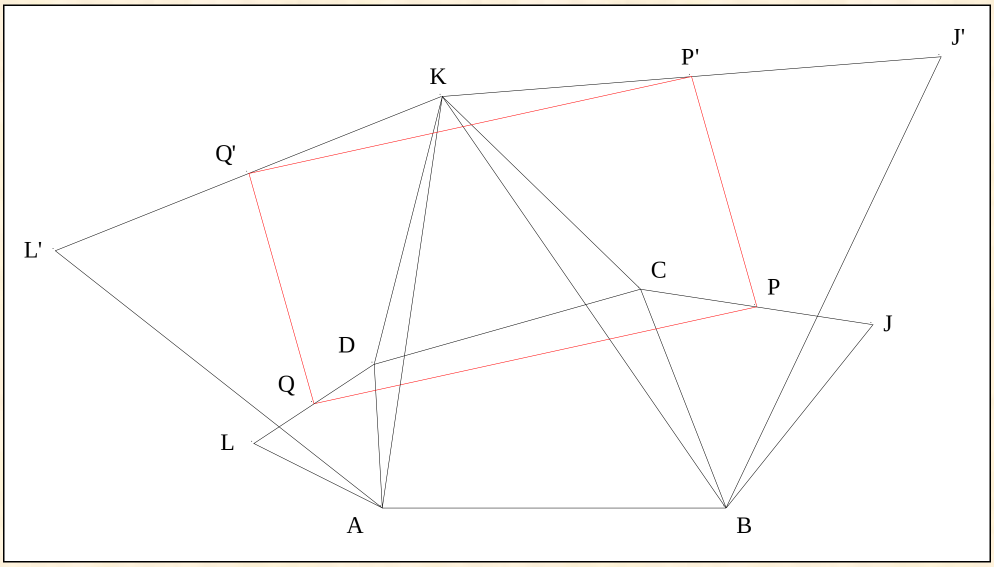
III. KHAZAKHSTAN NMO (2010) 10 grade PROBLEM 5

1. Le parallélogramme de l'auteur

VISION

[47] a triangle and two triangles are constructed outside of it, AoPS du14/05/2007
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=148830

Figure :

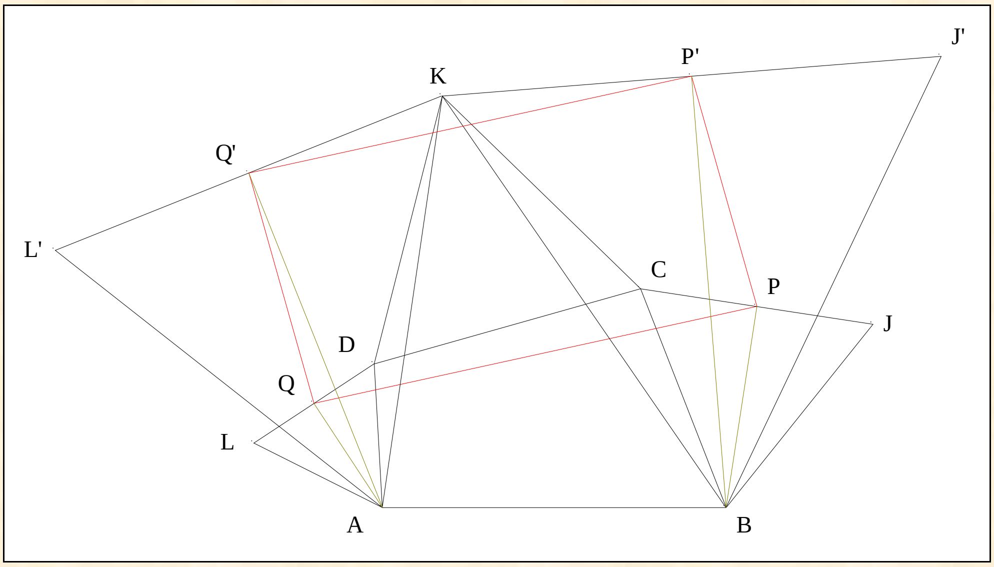


Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	JBC, KCD, LAD	trois triangles équilatéraux, extérieurs à ABCD,
	J'BK, L'AK	deux triangles équilatéraux, extérieurs à KAB,
	P, Q	les points milieux resp. de [CJ], [DL]
et	P', Q'	les points milieux resp. de [KJ'], [KL'].

Donné : le quadrilatère PQQ'P' est un parallélogramme. [48]

Commentaire :

VISUALISATION



[48] Ayme J.-L., Only a conjecture, AoPS du 26/01/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=572980
Un joli parallélogramme, *Les Mathématiques.net* du 26/01/2014 ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,900193

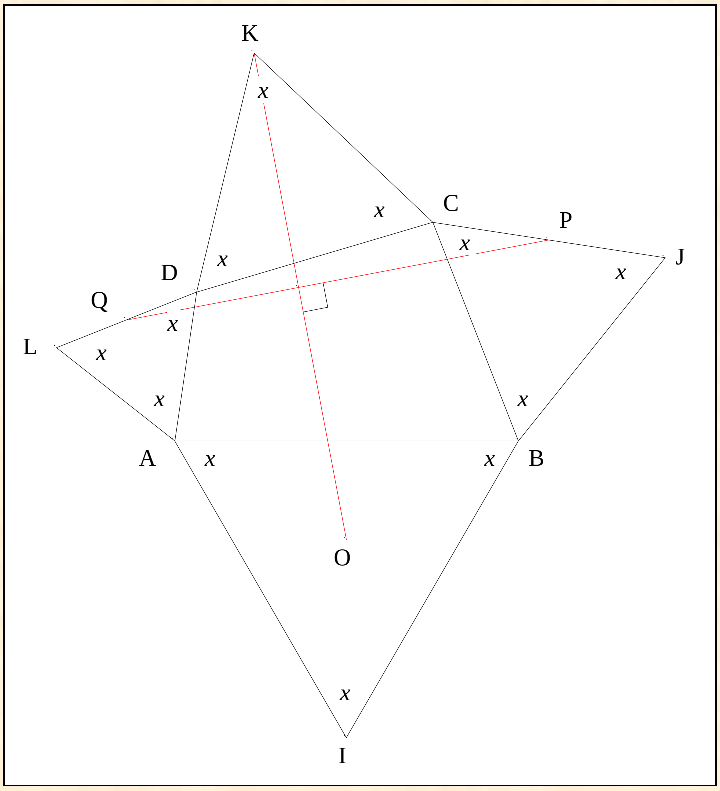
- Les triangles BCK et BPP' étant semblables de rapport √3/2, PP' = CK.√3/2.
- Les triangles ADK et AQQ' étant semblables de rapport √3/2, QQ' = DK.√3/2.
- Par hypothèse, DK = CK ; en conséquence, PP' = QQ'.
- Par une chasse angulaire à **Π** près, nous montrerions que (PP') // (QQ').
- **Conclusion :** le quadrilatère PQQ'P' ayant deus côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme

Scolie : (CD) ⊥ (PP').

2. Problem 5

VISION

Figure :



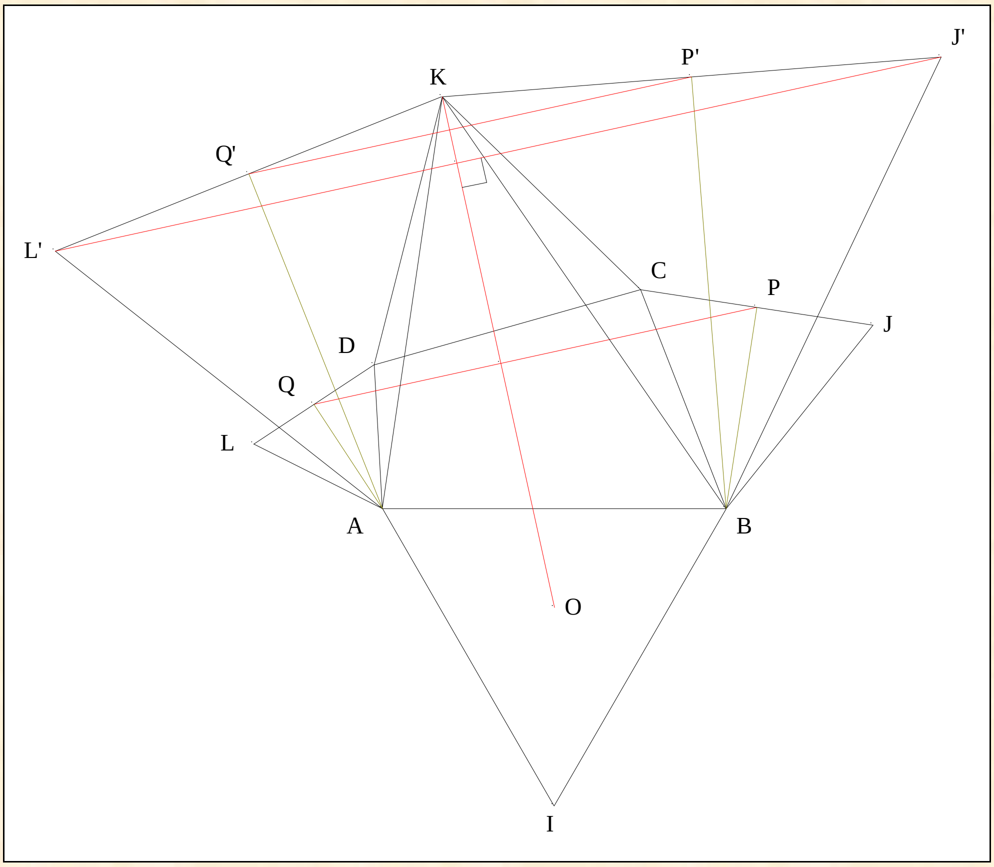
Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
IAB, JBC, KCD, LDA quatre triangles équilatéraux, extérieurs à ABCD,
P, Q les points milieux resp. de [CJ], [DL]
et O le centre du cercle circonscrit à IAB.

Donné : (PQ) est perpendiculaire à (KO). [49]

[49] Kazakhstan NMO 2010 10 grade P 5, AoPS du 05/09/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=365345
Two orthogonal lines, AoPS du 18/06/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=353548

Commentaire : une application du parallélogramme de l'auteur.

VISUALISATION



- Les notations sont les mêmes qu'en **H. III. 1**.

- D'après **H. III. 1**, (PQ) // (P'Q').
  d'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle KJ'L', (P'Q') // (J'L') ;
  par transitivité de la relation //, (PQ) // (J'L').

- D'après **H. II. 3.**, (J'L') ⊥ (AO).

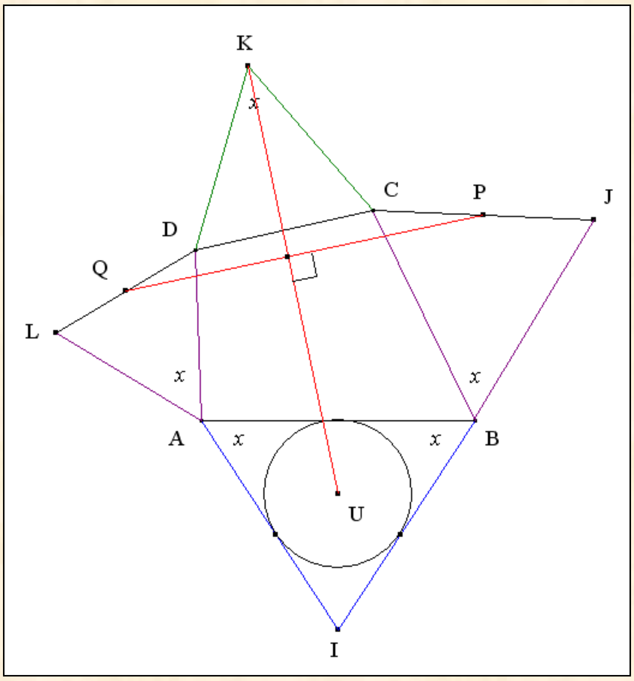
- D'après l'axiome des perpendiculaires **IVa**, (PQ) ⊥ (AO).

- **Conclusion :** (PQ) est perpendiculaire à (KO).

3. Une généralisation de Virgil Nicula

VISION

Figure :



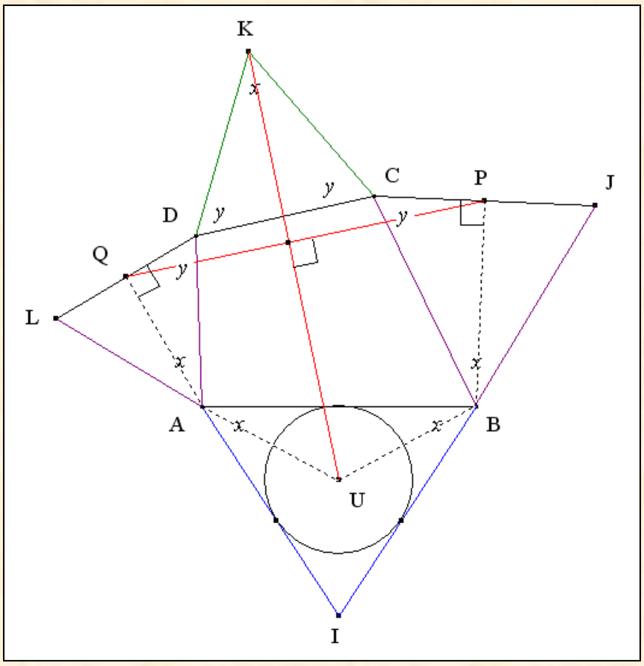
Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
IAB, un triangle I-isocèle, extérieur à ABCD,
JBC un triangle B-isocèle, extérieur à ABCD,
KCD un triangle K-isocèle, extérieur à ABCD,
LDA un triangle A-isocèle, extérieur à ABCD
tels que <IAB = <JBC = <DKC = <LAD,
P, Q les points milieux resp. de [CJ], [DL]
et U le centre du cercle inscrit à IAB avec les indications notées sur la figure.

Donné : (PQ) est perpendiculaire à (KU).[50]

Commentaire : une application de la figure de Virgil Nicula.

VISUALISATION

[50] Nicula V., Two orthogonal lines, AoPS du 19/07/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=353548



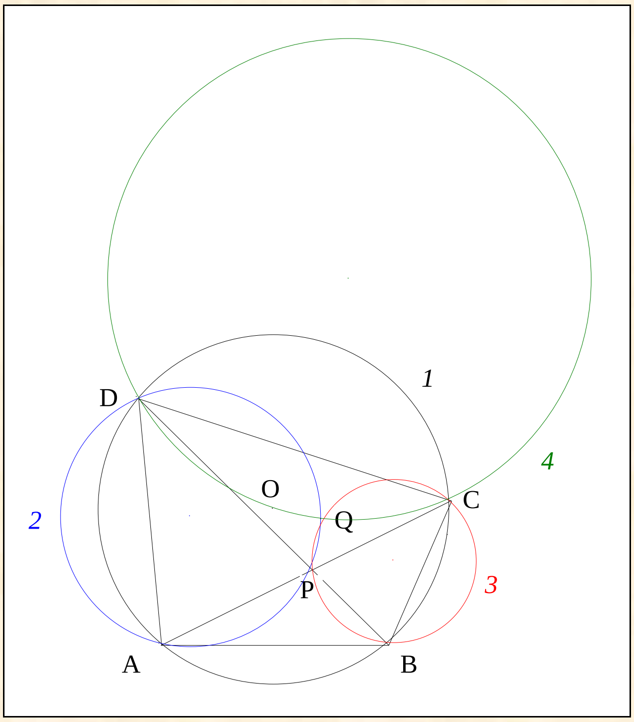
- **Conclusion :** d'après **F. III. 6.** Une généralisation de Virgil Nicula, (PQ) est perpendiculaire à (KU).

IV. RUSSIE (1999)

1. Cercle passant par le centre d'un cercle

VISION

Figure :

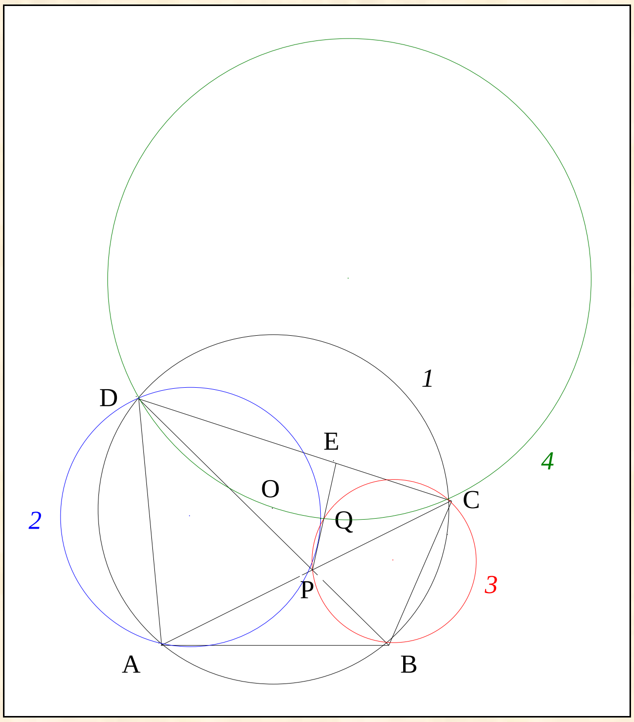


Traits : ABCD un quadrilatère cyclique,
1 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *1*,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
2, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles PDA, PBC
et *4* le cercle circonscrit au triangle QCD.

Donné : *4* passe par O.

Commentaire : le quadrilatère ABCD est cyclique et les triangles PBC et PAD sont semblables.

VISUALISATION



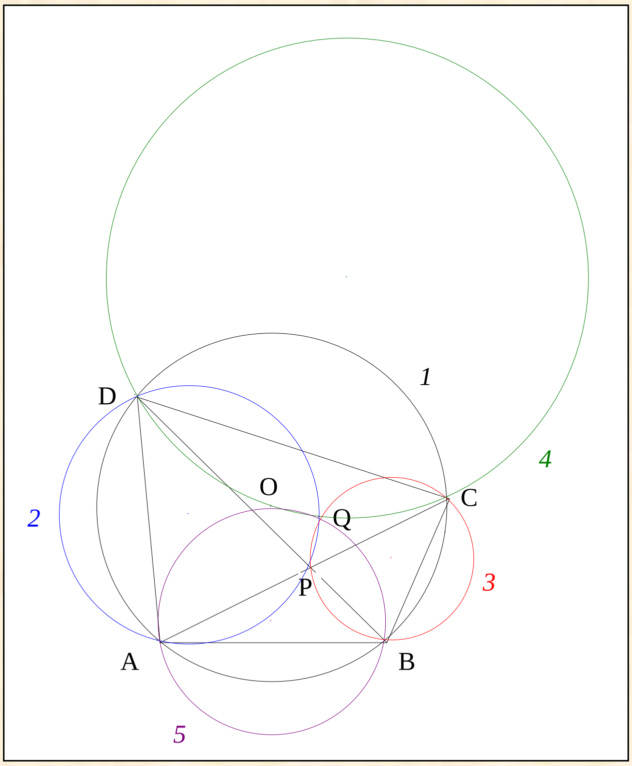
- Notons E le point d'intersection de (PQ) et (CD).

- Une chasse angulaire à **Π** près :

  * le quadrilatère PQDA étant cyclique, <DAP = <DQE i.e. <DAC = <DQE
  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <DAC = <DBC
  * le quadrilatère PBCQ étant cyclique, <PBC = <EQC i.e. <DBC = <EQC
  * par addition membre à membre, 2.<DAC = <DQE + <EQC = <DQC.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de l'angle au centre", *4* passe par O.

Scolie : un autre cercle passant par O

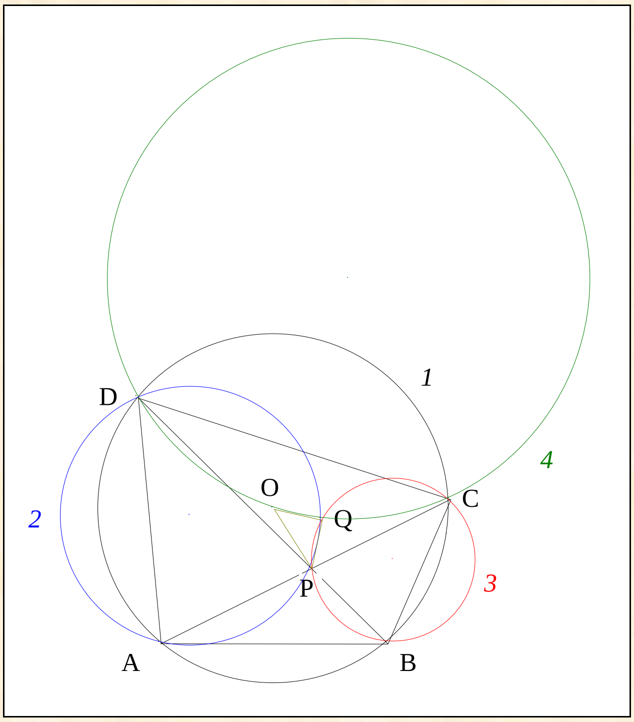


- Notons *5* le cercle passant par A, B et Q.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *5* passe par O.

2. Un triangle rectangle

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère cyclique,
1 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *1*,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles PDA, PBC
et *4* le cercle circonscrit au triangle QCD.

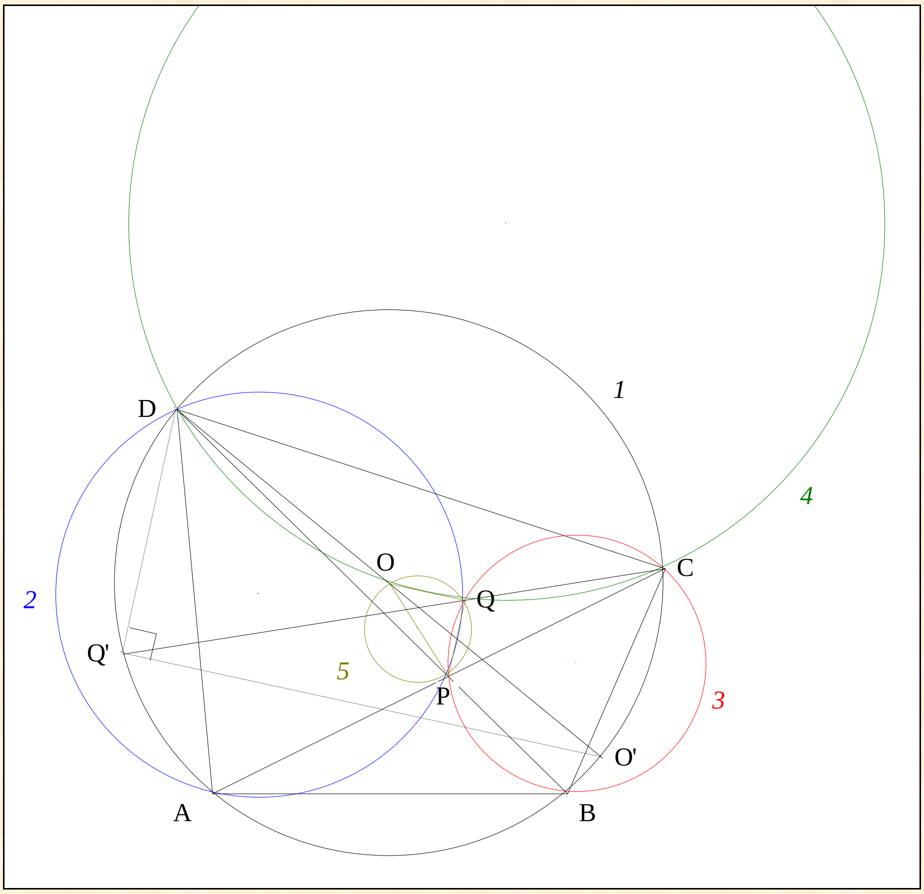
Donné : le triangle QOP est Q-rectangle. [51]

Commentaire : le quadrilatère ABCD est cyclique et les triangles PBC et PAD sont semblables.

VISUALISATION

---

[51] Russie (1999)
IMO Shortlist



- Notons 5 le cercle circonscrit à QOP,
  et O', Q' les seconds points d'intersection de (DO), (CQ) avec *1*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (Q'O') ⊥ (Q'D).

- Les cercles *1* et *4*, les points de base D et C, les moniennes (ODO') et (QCQ'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (Q'O') // (QO).

- Les cercles *1* et *3*, les points de base C et B, les moniennes (Q'CQ) et (DBP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (Q'D) // (QP).

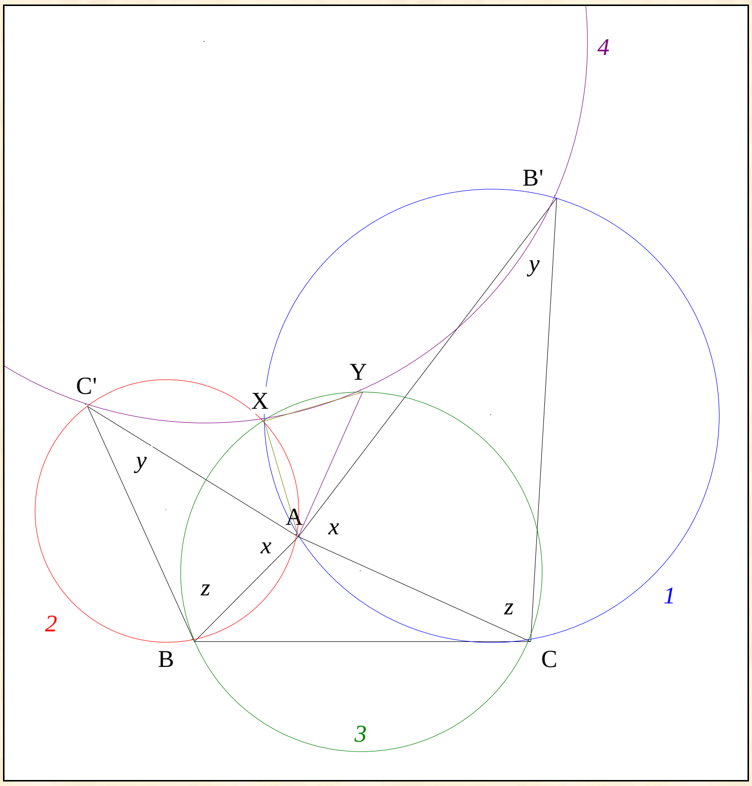
- La relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (QO) ⊥ (QP).

- **Conclusion :** le triangle QOP est Q-rectangle.

3. IMO Shortlist

VISION

Figure :



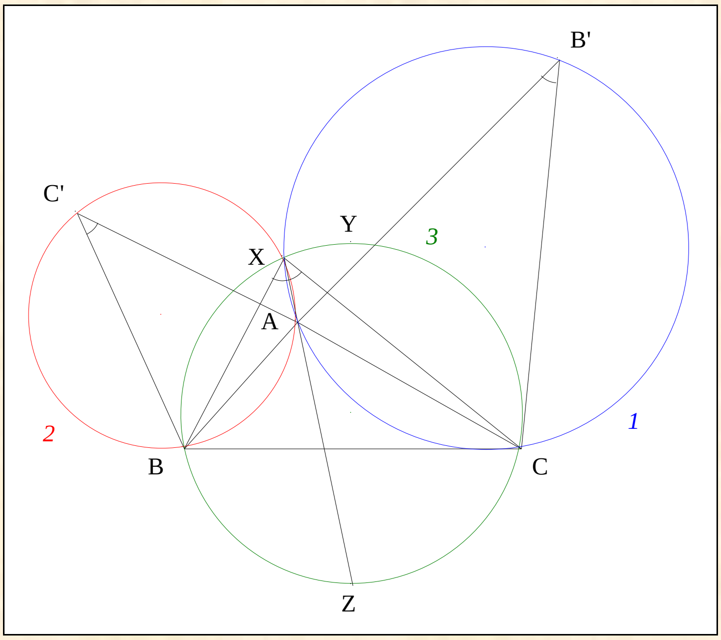
Traits : ABC un triangle,
B'AC, C'AB deux triangles semblables, extérieurs à ABC,
1, *2* les cercles circonscrits resp. à B'AC, C'BA,
X le second point d'intersection de *1* et *2*,
3 le cercle passant par B, C, X,
4 le cercle passant par B', C', X
et Y le second point d'intersection de *3* et *4*.

Donné : le triangle XYA est X-rectangle. [52]

Commentaire : le quadrilatère ABCD n'est pas cyclique et les triangles ABC' et ACB' sont semblables.

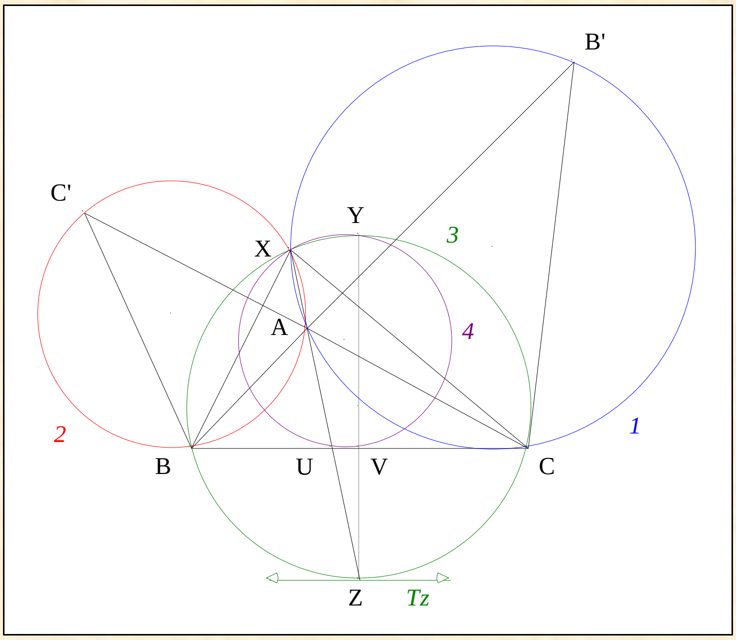
VISUALISATION

[52] IMO Shortlist
Another right angle triangle, AoPS du 28/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573303



- Par hypothèse, <AB'C = <BC'A ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <AB'C = <AXC
  <BC'A = <BXA ;
  par substitution, <AXC = <BXA ;
  en conséquence, (XA) est la X-bissectrice intérieure du triangle XBC.

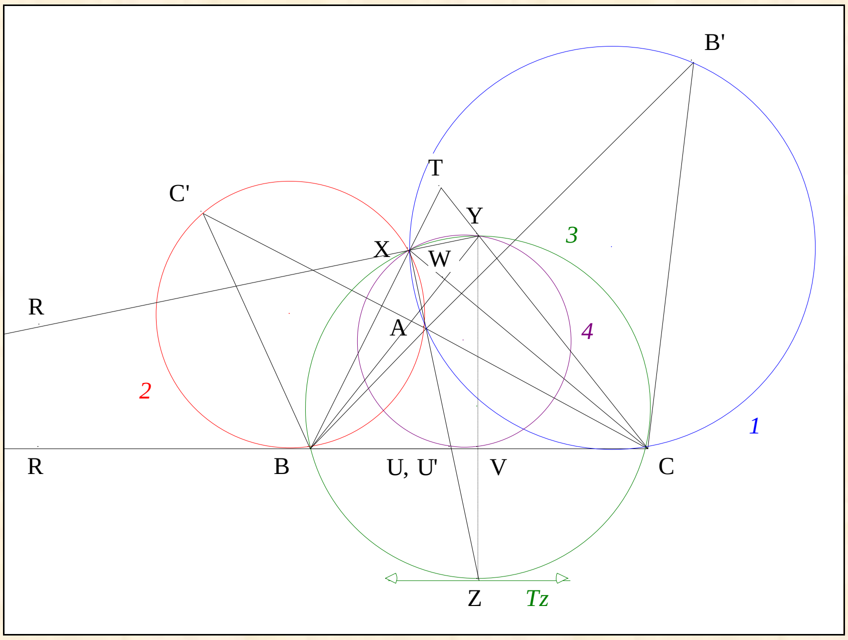
- Notons Z le second point d'intersection de (XA) avec *3*.



- Notons *Tz* la tangente à *3* en Z,
  U le point d'intersection de (XAZ) et (BC),
  4 le cercle passant par X, Y, U
  et V le second point d'intersection de (BUC) avec *4*.

- **Scolie :** (UV) // *Tz*.

- Les cercles *4* et *3*, les points de base X et Y, la monienne (UXZ), les parallèles (UV) et *Tz*, conduisent au théorème **1'** de Reim ; en conséquence, V, Y et Z sont alignés.



- Notons T, W, R, U' les points d'intersection de (BX) et (CY), (BY) et (CX), (XY) et (BC), (TW) et (BC).

- D'après Euclide "Une quaterne harmonique", le quaterne (B, C, U, R) est harmonique.

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" appliqué au quadrilatère XWYT, la quaterne (B, C, U', R) est harmonique ;
en conséquence, U et U' sont confondus.

- D'après Altshiller-Court "Quatre points cocycliques" [53], V est le milieu de [BC] ;
en conséquence, (YZ) $\perp$ (BC).

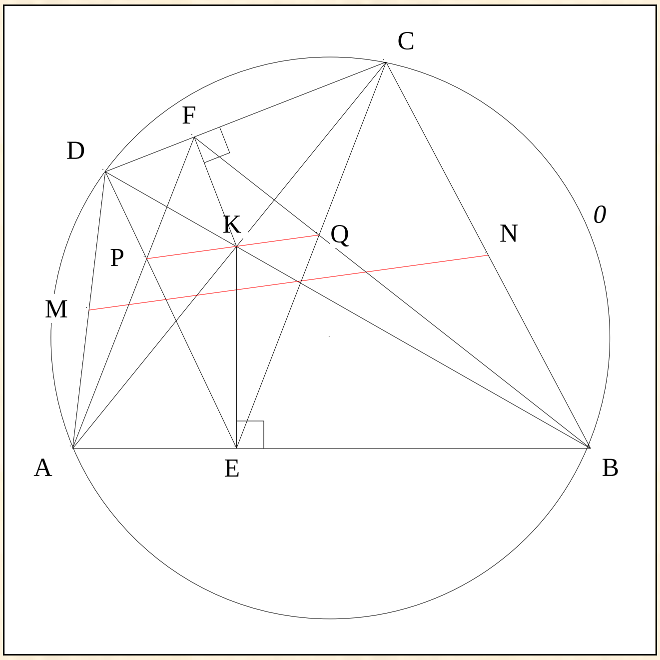
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
(AX) et (XY) sont perpendiculaires.

V. 41st IMO TST

VISION

Figure :

[53] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Richmond (1923) 247, exercice **5**
Ayme J.-L., Two parallel tangent theorems, G.G.G. vol. **11**, p. 21-23 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



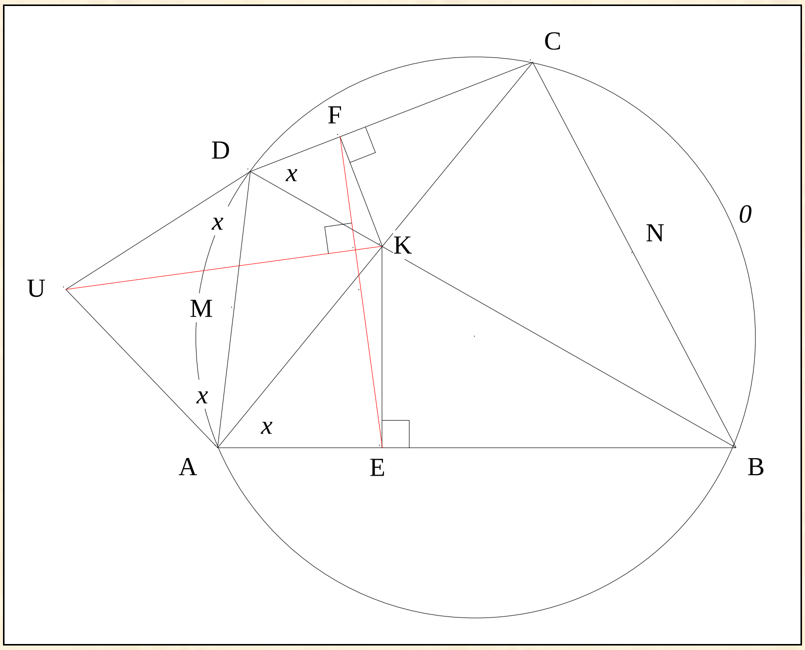
Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	K	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	E, F	les pieds des perpendiculaires à (AB), (CD) issue de K,
	P, Q	le point d'intersection de (AF) et (DE), (BF) et (CE),
et	M, N	les milieux resp. de [AD], [BC].

Donné : (MN) est parallèle à (PKQ). [54]

Commentaire : une parallèle à la droite de Gauss-Newton.

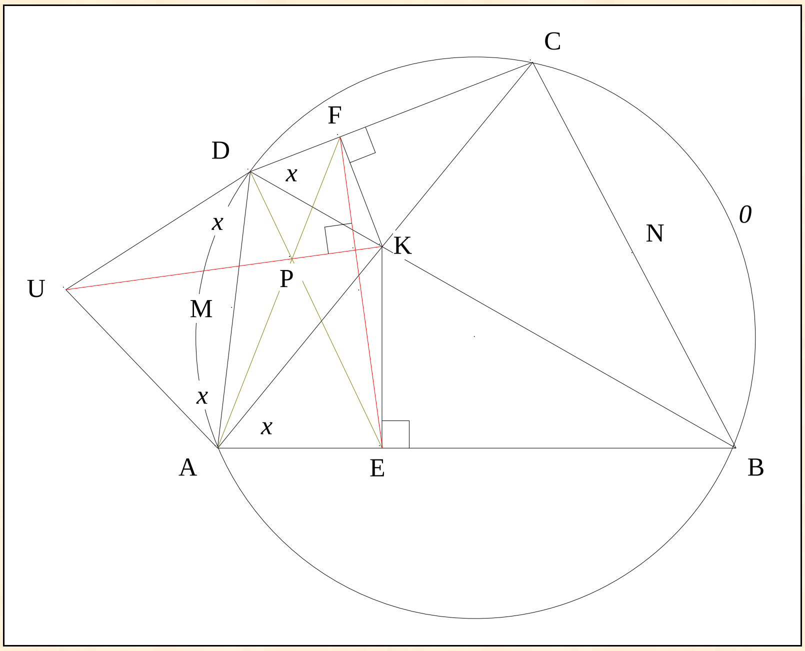
VISUALISATION

[54] Geometry Problem—**41**st IMO Team Selection Test, AoPS du 21/04/2004 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=12098
From USA TST 2000/2, AoPS du 17/08/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=296040
tst-USA, 2000, AoPS du 23/01/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=326960
Prove that MN // PQ, AoPS du 31/12/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=569256



- Notons UAD le triangle U-isocèle, extérieur à ABCD tel que <DAU = <BAK.

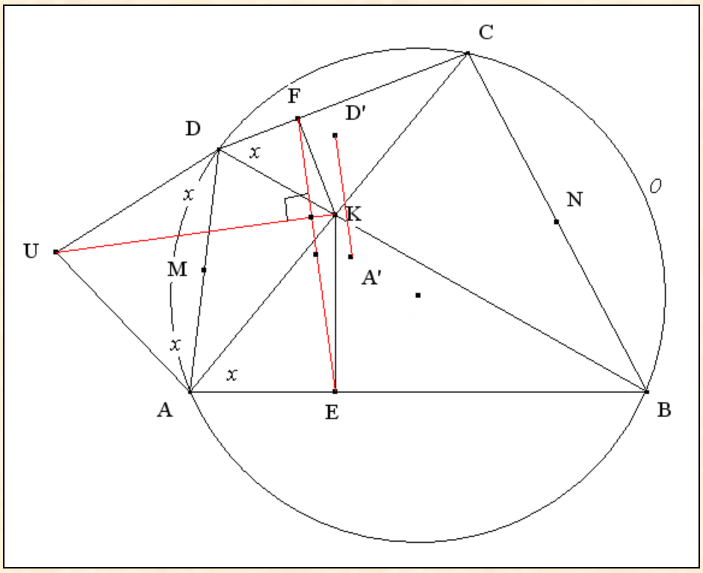
- D'après **F. III. 4.**
  appliqué au triangle KDA et aux triangles KDC, KAB et UAD, (KU) ⊥ (EF).



- Notons P le point d'intersection de (AF) et (DE).

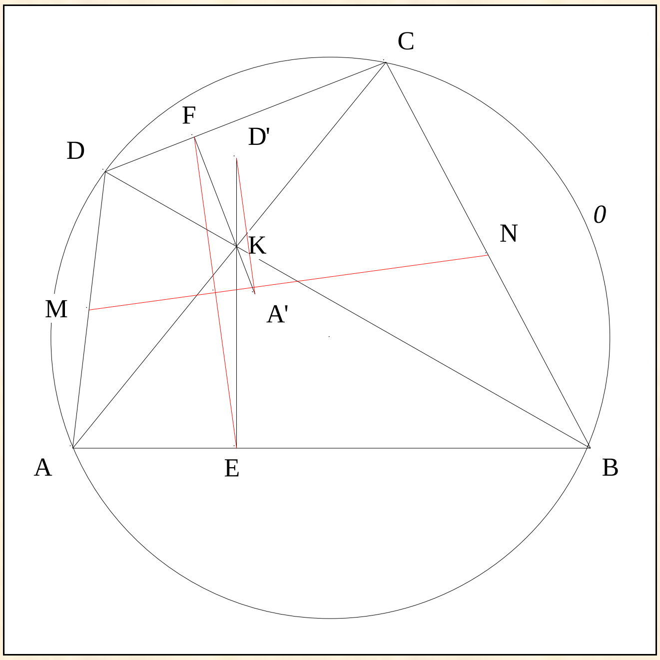
- D'après **G. 4.**
  appliqué à KDA et à KDC, KAB et UAD, (AF), (DE) et (KU) sont concourantes en P.

- **Conclusion partielle :** P, K et U sont alignés.



- Notons A', D' les orthocentres resp. de KDC, KAB.

- D'après **F. III. 4.** (EF) // (A'D') ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (KU) ⊥ (A'D').



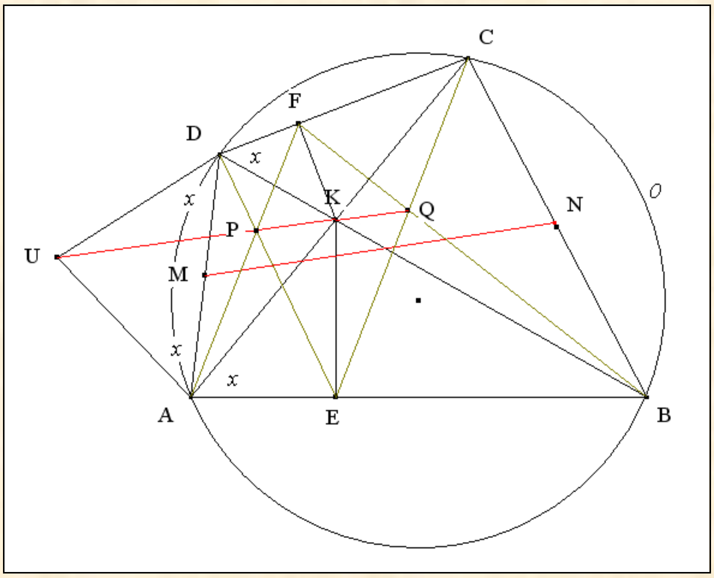
- **Scolies :** **(1)** (A'D') est la droite de Steiner du quadrilatère complet ABDC
  (2) (MN) est la droite de Gauss-Newton du quadrilatère complet ABDC.

- D'après Jakob Steiner [55], (A'D') ⊥ (MN) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (KU) // (MN).

- **Conclusion partielle :** (MN) est parallèle à (KU).

---

55 Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- D'après Pappus "La proposition **139**" [56]
  (PKQ) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel FACEDBF.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence, U, P, K et Q sont alignés.

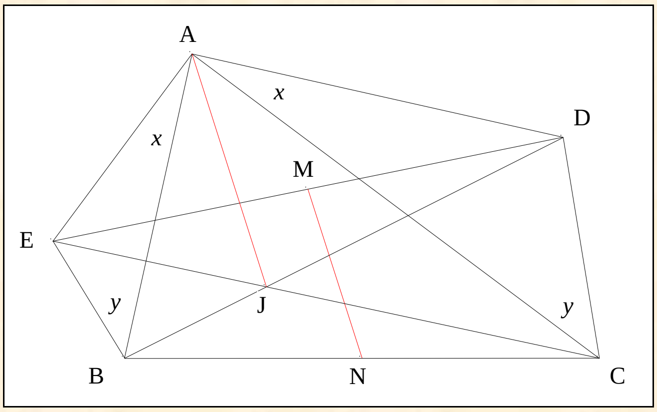
- **Conclusion :** (MN) est parallèle à (PKQ).

VI. PCHP FROM WENWUGUANGHUA

1. Le problème

VISION

Figure :



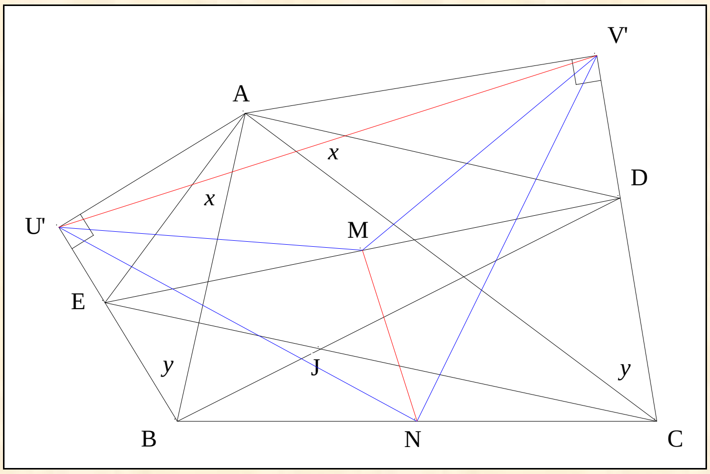
Traits : ABC un triangle,
DAC, EAB deux triangles semblables, extérieurs à ABC,
M, N les milieux resp. de [DE], [BC]

[56] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **4**, p. 9-15 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

et J le point d'intersection de (BD) et (CE).

Donné : (AJ) est parallèle à (MN). [57]

VISUALISATION

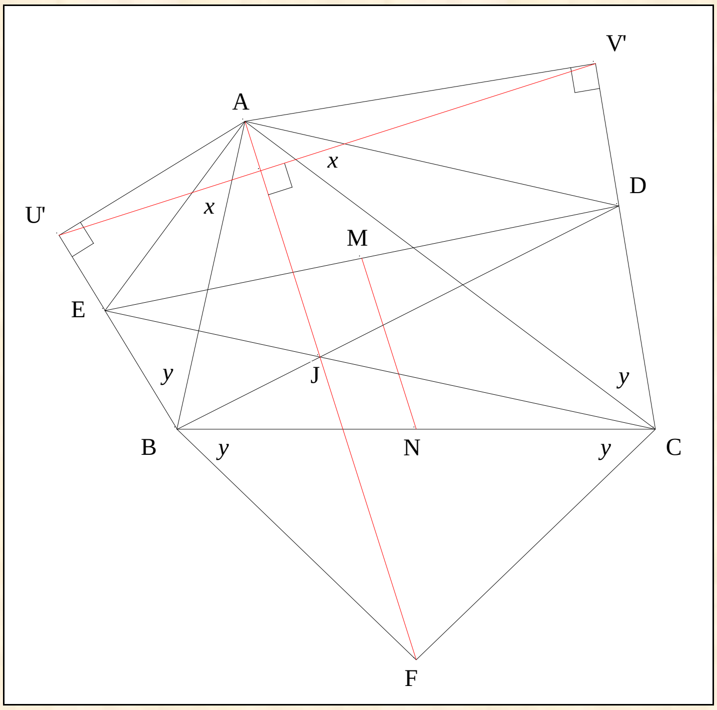


- Notons U', V' les pieds des A-hauteurs resp. de EAB, DAC.

- **Scolies :** **(1)** AEU', ADV' sont deux triangles U', V'-rectangles, semblables, extérieurs à ABC
  (2) ABU', ACV' sont deux triangles U', V'-rectangles, semblables, extérieurs à ABC.

- D'après **F. III. 4.** scolie, MU' = MV' et NU' = NV'.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de la médiatrice", (MN) ⊥ (U'V').



- Notons FBC le triangle F-isocèle, extérieur à ABC tel que <FBC = <EBA.

---

[57] WenWuGuangHua Mathematics Workshop in China,
Parallels, AoPS du 05/02/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=519631

- D'après **G. 2.** Le théorème de Jacobi, A, J et F sont alignés.

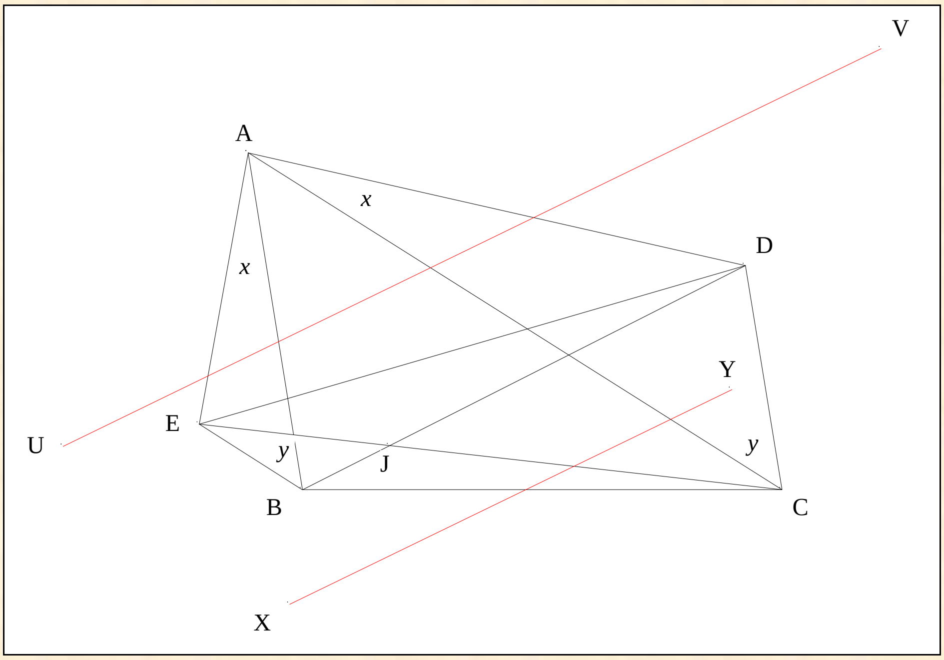
- D'après **F. III. 4.**, (U'V') ⊥ (AJ) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (MN) // (AJ).

- **Conclusion :** (AJ) est parallèle à (MN).

2. L'auteur

VISION

Figure :



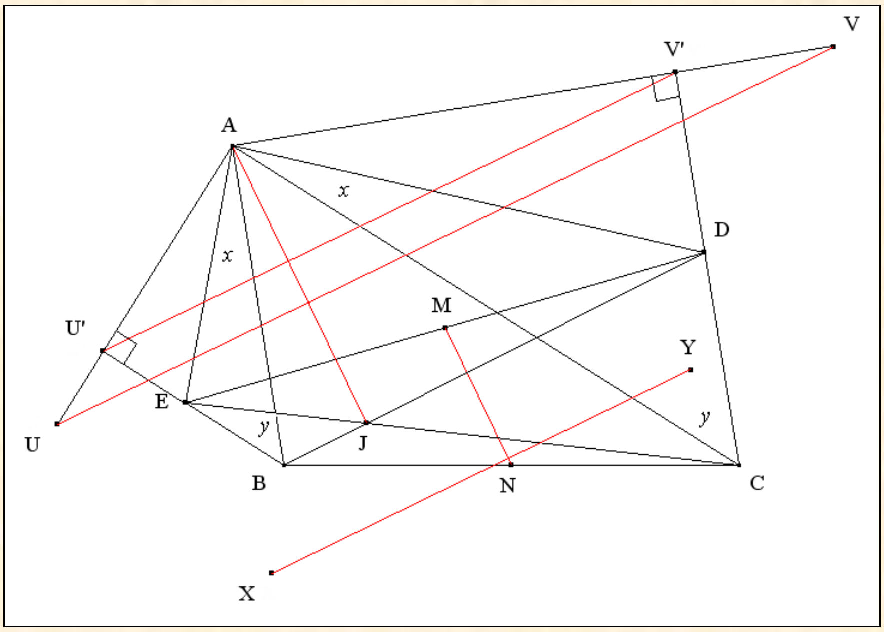
Traits : ABC un triangle,
DAC, EAB deux triangles semblables, extérieurs à ABC,
U, V les orthocentres resp. de EAB, DAC
J le point d'intersection de (BD) et (CE),
et X, Y les orthocentres resp. des triangles BJE, CJD.

Donné : (XY) est parallèle à (UV). [58]

Commentaire : deux surprenantes parallèles.

VISUALISATION

58 Two nice parallels, AoPS du 31/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573780



- Notons M, N les milieux resp. de [DE], [BC]
  et U', V' les pieds des A-hauteurs resp. de EAB, DAC.

- D'après "La droite de Gauss-Newton" [59], (XY) ⊥ (MN) ;
  d'après **H. VI. 1.** (MN) // (AJ) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (XY) ⊥ (AJ).

- D'après **H. VI. 1.** (AJ) ⊥ (U'V') ;
  d'après **F. III 4.** (U'V') // (UV) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (AJ) ⊥ (UV).

- D'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (XY) // (UV).

- **Conclusion :** (XY) est parallèle à (UV).

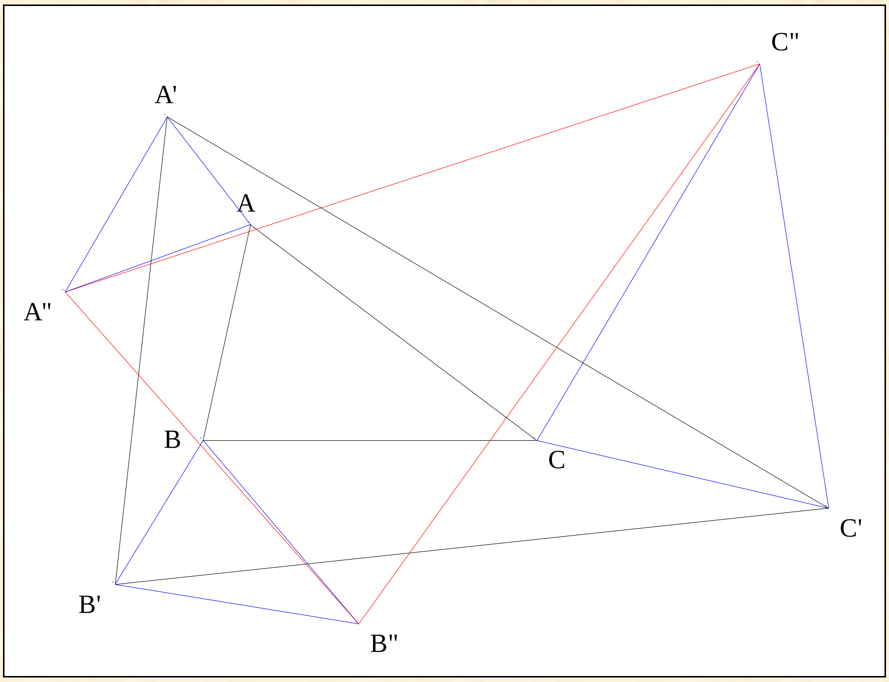
VII. GRAND ORAL X (1963)

1. Le théorème de Petersen-Schoute

VISION

Figure :

[59] Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle semblable à ABC
et AA'A", BB'B", CC'C" trois triangles semblables entre eux.

Donné : A"B"C" est semblable à ABC.

Commentaire : la preuve peut être lue dans *Geometry revisited*. [60]

Note historique : dans *Geometry revisited* , H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer mentionnent un

very beautiful theorem

consacré aux similitudes qu'ils attribuent au Danois Julius Petersen (1839-1910) et au Hollandais P. H. Schoute (1846-1913) mais dont ils ne donnent que deux cas particuliers. Cette référence est reproduite sur divers sites internet sans jamais aucune indication de l'énoncé général. Le "théorème de Petersen-Schoute" est même mentionné comme *missing topic* sur Wikipedia (english).

Une coute biographie de Julius Petersen


61

60 Coxeter H.S.M. and Greitzer S.L., *Geometry revisited*, MAA (1967) 99-100
61 O'Connor J.J. and Robertson E.F., The MacTutor History of Mathematics archive ;

Julius Petersen est né le 16 juin 1839 à Sorø (Danemark)
Fils du teinturier Jens Petersen et d'Anna Cathrina Wiuff, il fréquente une école privée à Sorø, puis en 1849, entre comme externe à l'Academy School de Sorø. Son intérêt pour les mathématiques commence au lycée où il essaye déjà de résoudre le célèbre problème de la trisection de l'angle avec la règle et le compas.
En 1854, il quitte cette école par manque de moyen financier de la part de ses parents et rejoint son oncle à Kolding (Jutland) pour y travailler comme apprenti épicier. A la mort de son oncle l'année suivant, celui-ci lui laisse de l'argent ce qui lui permet d'entrer au College of Technology de Copenhague en 1856.
En 1860, il réussit ses examens de génie civil et, dans la même année, soumet à l'Université un essai sur l'histoire et les propriétés de la cycloïde.
De 1859 à 1871, il enseigne dans une prestigieuse école privée et en 1862 passe l'examen d'entrée à l'Université de Copenhague et il commence ses études de mathématiques.
La même année, il épouse Kirstine Bertelsen de deux ans son aînée avec qui il aura deux fils et une fille.
En 1866, il obtient sa maîtrise de mathématiques et en 1871 son doctorat.
Nommé doyen du College of Technology à Copenhague, puis professeur de mathématiques à l'Université de Copenhague en 1877, il occupera ce poste durant toute sa carrière.
Petersen a également enseigné à l'école d'officiers de l'armée de 1881 à 1887.
Il décède le 5 août 1910 à Copenhague (Danemark).

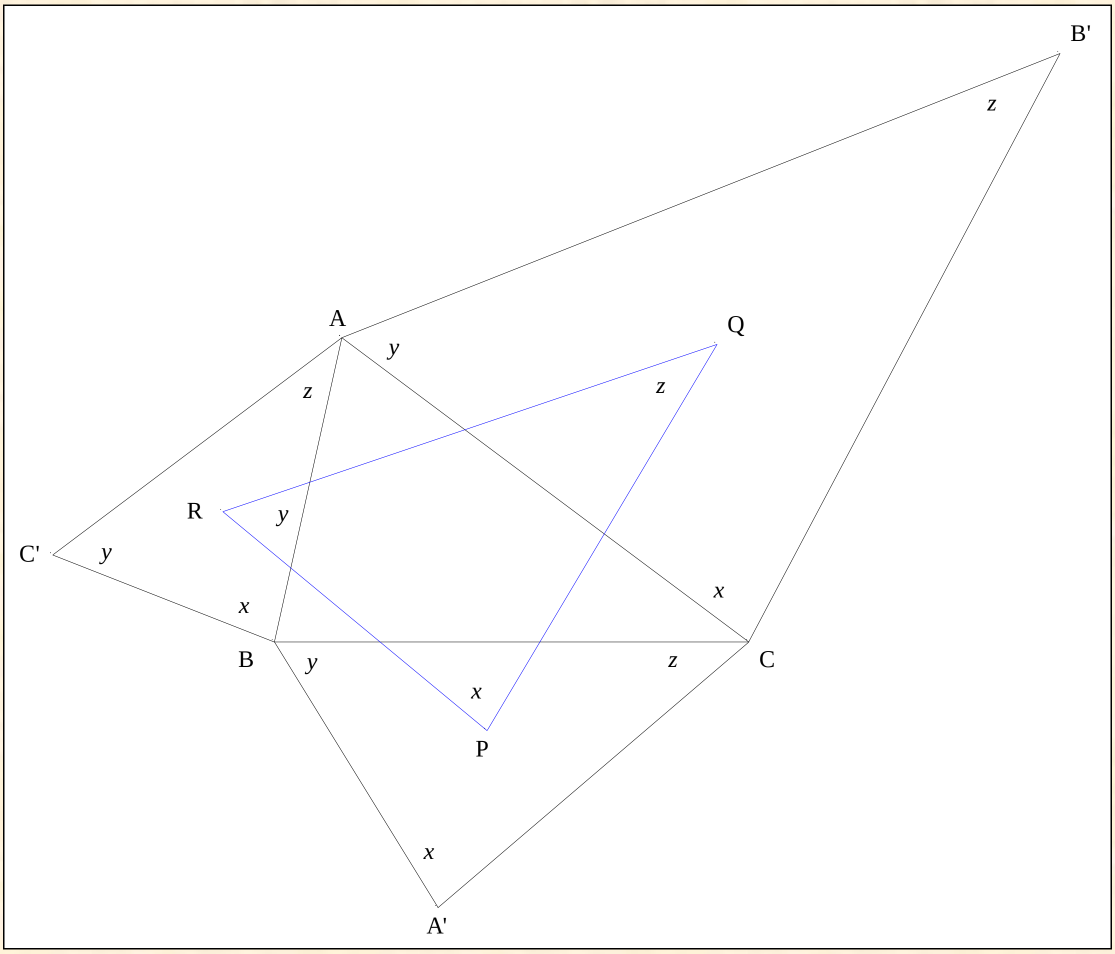
2. X (1963)

VISION

Figure :

---

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html



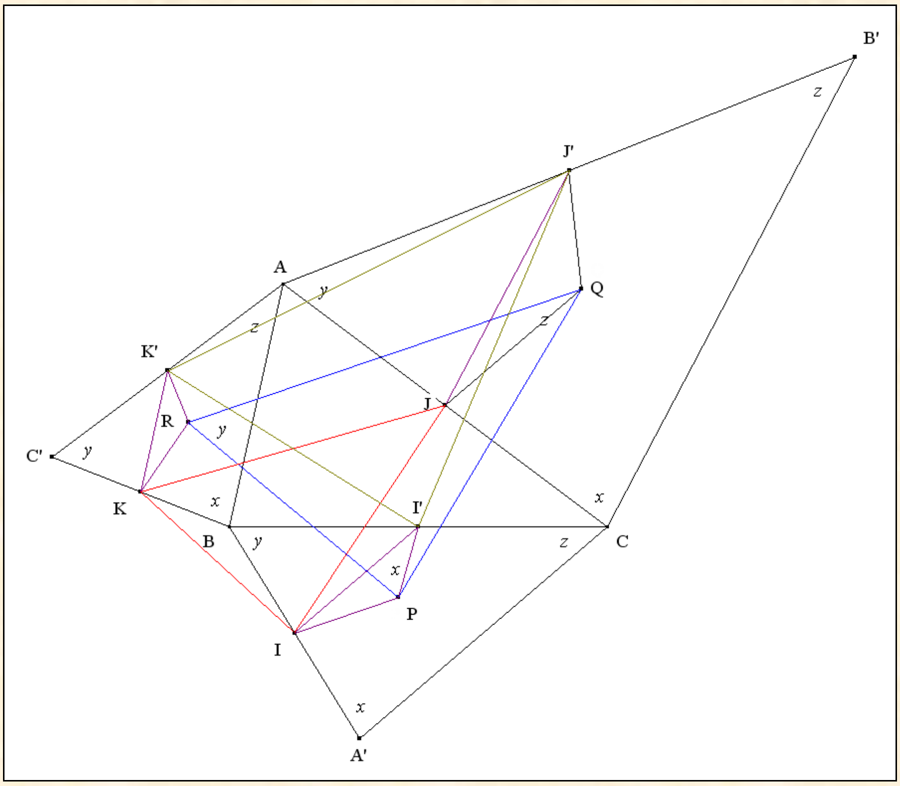
Traits :	ABC	un triangle,
	A'BC	un triangle extérieur à ABC,
	CAB', BC'A	deux triangles semblables à A'BC, extérieurs à ABC,
et	P, Q, R	les points médians resp. de A'BC, CAB', BC'A

Donné : le triangle PRQ est semblable à A'BC. [62]

Commentaire : une application.

VISUALISATION

[62] *Les Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,689332,689332#msg-689332
Two similar triangles, AoPS du 29/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=573467



- Notons I, J, K les milieux resp. de [A'B], [AC], [BC']
  et I', J', K' les milieux resp. de [BC], [AB'], [AC'].

- D'après **H. I. 2.**, **(1)** les triangles IJK et BAC' sont semblables
  (2) les triangles I'J'K' et CB'A sont semblables.

- **Scolies :** **(1)** les triangles IJK et I'J'K' sont semblables
  (2) les triangles PII', QJJ' et RKK' sont semblables.

- D'après **H. VII. 1.**, le triangle PRQ est semblable à IJK.

- **Conclusion :** le triangle PRQ est semblable à A'BC.