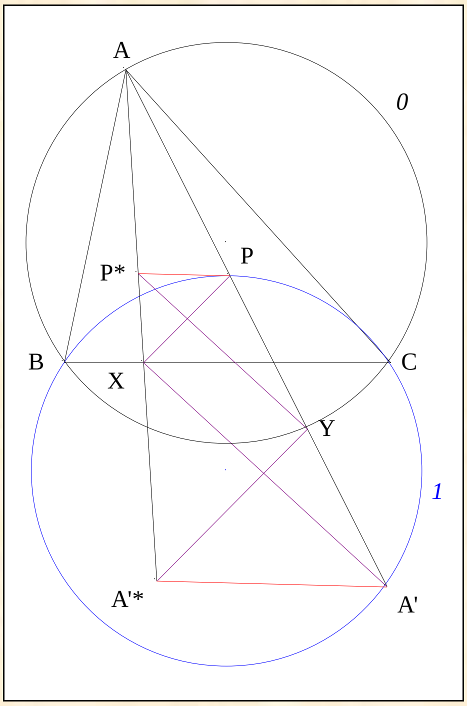
NOTE

LA DROITE D'EULER GÉNÉRALISÉE

UNE FRESQUE GÉOMÉTRIQUE

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Cet article présente une fresque historique concernant la droite d'Euler, de sa généralisation et de quelques conséquences remarquables.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This paper presents a historical fresco on the Euler's line, its generalization and some remarkable consequences.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/07/2015 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

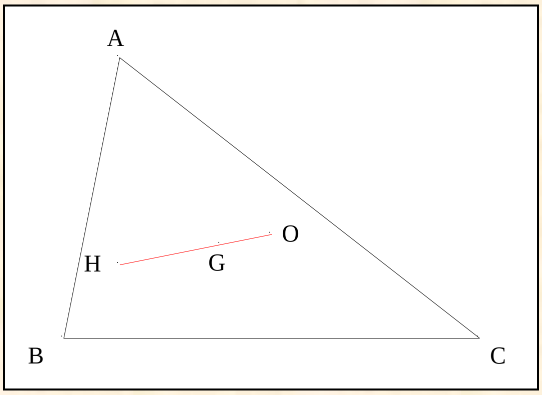
Sommaire

A. LEONHARD EULER

1. La ponctuelle d'Euler [2]

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	G	le point médian de ABC
et	H	l'orthocentre de ABC.

Donné : H, G et O sont alignés.

Scolie : H et O sont deux points isogonaux de ABC ce qui suggère une généralisation.

Note historique : suite à l'initiative de Joseph Neuberg, (HGO) est "la ponctuelle d'Euler de ABC". Rappelons qu'Euler qu'il a été le premier à faire d'un symbole un double usage en désignant par A aussi bien le sommet que l'angle attaché à celui-ci dans un triangle.

Commentaire : Leonhard Euler a été le premier géomètre à avoir eu l'intuition de regrouper ces trois points centraux du triangle sur une droite ; cette démarche allait donner à la future "géométrie du triangle", le premier moule d'une synthèse d'un ordre plus élevé dont la nature allait être expliquée par ses successeurs.

[2] Euler L., Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* **11** (1765) 114
Euler L., *Opera Omnia* **XXVI**, éd. Andr. Speiser, Zürich (1953) 139-157 et surtout 149 ; ce traité fut présenté à l'Académie de St-Petersbourg le 21 décembre 1763 en style ancien

2.. Une courte biographie de Leonhard Euler

[3]

Le Cyclope mathématique [4]

Leonhard Euler est né en Suisse, à Bâle, le 15 avril 1707.
L'année suivante, il quitte cette ville pour aller à Riehen où son père devient le pasteur calviniste du lieu.
Son père, Paul Euler qui avait étudié les mathématiques avec Jacques Bernoulli (1654-1705), commet pour ainsi dire, "l'erreur" de les enseigner à son fils et devient ainsi le premier maître de Léonhard.
Après des études de philosophie, Euler décide de se consacrer entièrement aux mathématiques. Élève de Jean Bernoulli (1667-1748), l'un des frères de Jacques, il se lie d'amitié avec ses fils Nicolas (1695-1726) et Daniel (1700-1782), puis quitte dans sa vingtième année, sa famille pour aller les rejoindre à St. Petersburg pour occuper un poste d'assistant à l'Académie de cette ville où ils professaient les mathématiques depuis 1725.
Les premières années de son séjour en Russie sont difficiles, mais le départ inattendu de Daniel pour la Suisse en 1733, lui permet de devenir professeur à son tour et d'améliorer ainsi son quotidien.
La même année, il épouse une compatriote, la fille du peintre Gsell dont la famille s'était établie en Russie depuis de nombreuses années. Les enfants naissent les uns après les autres et à 33 ans, en pleine force de l'âge, il perd son œil droit.
En 1741, il accepte l'invitation du roi de Prusse, Frédéric le Grand, pour aller travailler à l'Académie de Berlin. Il y demeurera pendant 25 ans avant de retourner en 1766, en Russie où Catherine **II** lui offre une maison pour ses 13 enfants. Sa vue continue de baisser et il se voit contraint d'écrire sur une ardoise pour faire ses calculs.
En 1771, le feu détruit sa maison, mais il a le temps de sauver tous ses manuscrits.
A 69 ans, il devient veuf et l'année suivante, il se remarie avec la demi-sœur de sa femme.
Il décède le 7 septembre 1783, à 76 ans, alors qu'il buvait du thé avec des amis laissant à la postérité une œuvre constituée de 45 volumes et plus de 700 articles.

Pour terminer, rappelons qu'un des fils de Leonhard, Jean-Albert, né à Saint-Pétersbourg en 1734, mort en 1800, entra à l'Académie de Berlin à l'âge de vingt ans, fut professeur de physique à Saint-Pétersbourg et secrétaire de l'Académie des Sciences de cette ville. Ses principaux Mémoires ont été publiés dans les *Recueils* de Berlin, de Munich et de Göttingen.

[3] Portrait de 1753 par Emanuel Handmann
Cette représentation indique des problèmes de la paupière droite et un possible strabisme. L'œil gauche semble en bonne santé, mais il a été plus tard affecté par une cataracte

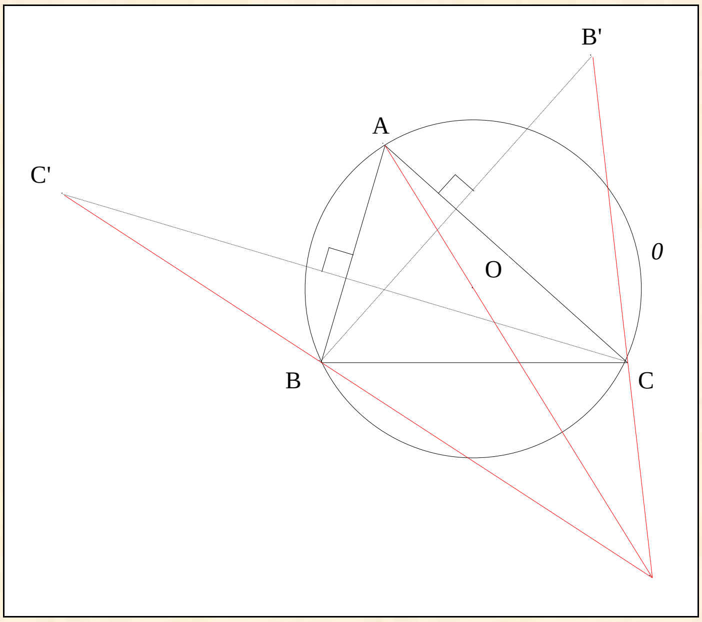
[4] Surnom donné par Frédéric le Grand qui, tout en faisant allusion à la perte de son œil droit, soulignait son œuvre cyclopéenne dans le domaine mathématique

B. EUGÈNE-CHARLES CATALAN

1. Trois droites concourantes [5]

VISION

Figure :

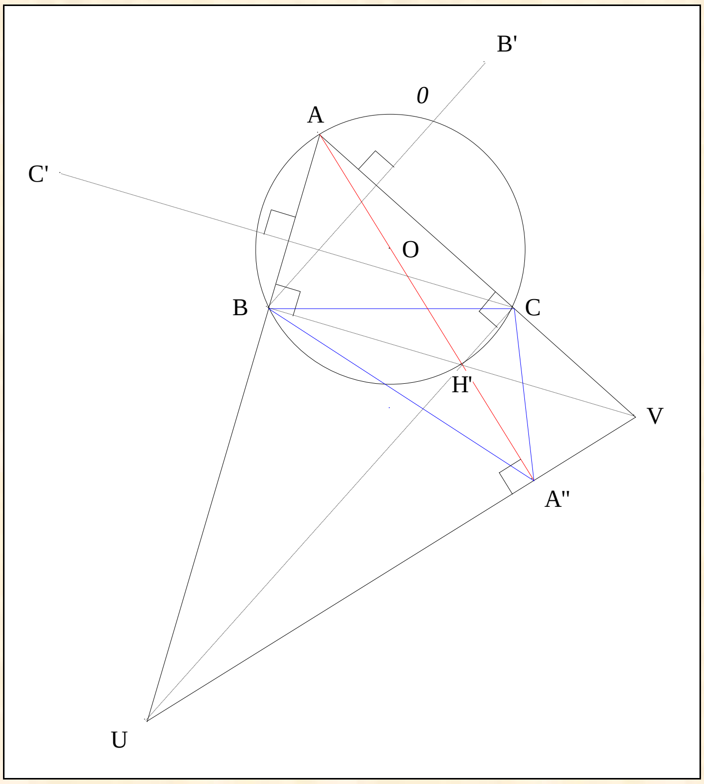


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*
et	B', C'	les symétriques de B, C resp. par rapport à (CA), (AB).

Donné : (B'C), (C'B) et (AO) sont concourantes.

VISUALISATION

[5] Catalan E., Quelques théorèmes de géométrie élémentaire, *Journal de Mathématiques* **III** (1883) 61-62
Three concurrent lines, AoPS du 03/07/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1110003_three_concurrent_lines

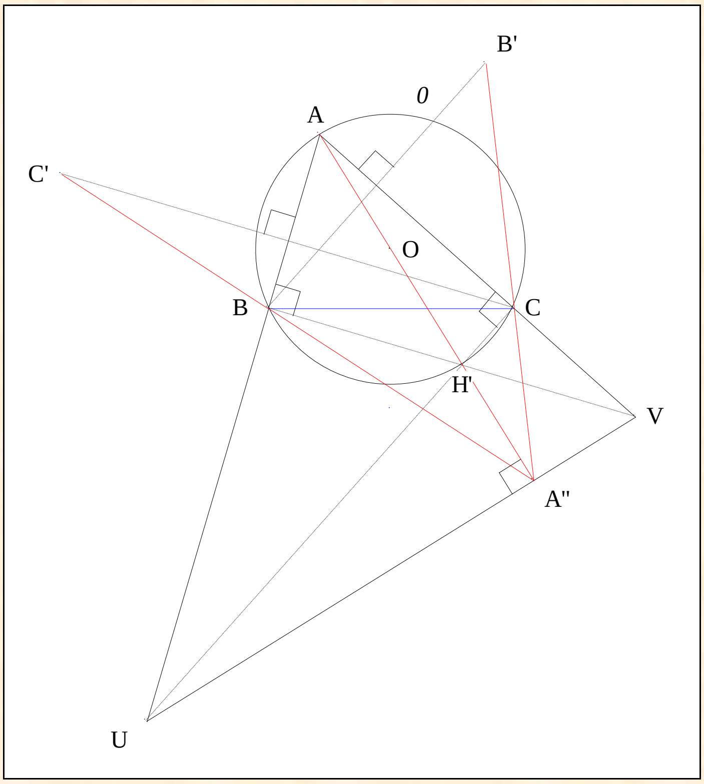


- Notons H' l'antipôle de A relativement à *0*,
  U le point d'intersection de (CH) et (AB),
  V le point d'intersection de (BH) et (AC),
  et A" le point d'intersection de (AH') et (UV).

- **Scolies :** **(1)** O est le milieu de [AH']

  (2) H' est l'orthocentre du triangle AUV

  (3) A"CB est le triangle orthique de AUV



- D'après Karl Feuerbach [6], **(1)** C' est sur (A"B)

  (2) B' est sur (A"C).

- **Conclusion :** (B'C), (C'B) et (AO) sont concourantes.

Note historique : ce résultat a été redécouvert par Darij Grinberg [7] et prouvé trigonométriquement.

2. Un point sur un cercle de Kosnitza [8]

VISION

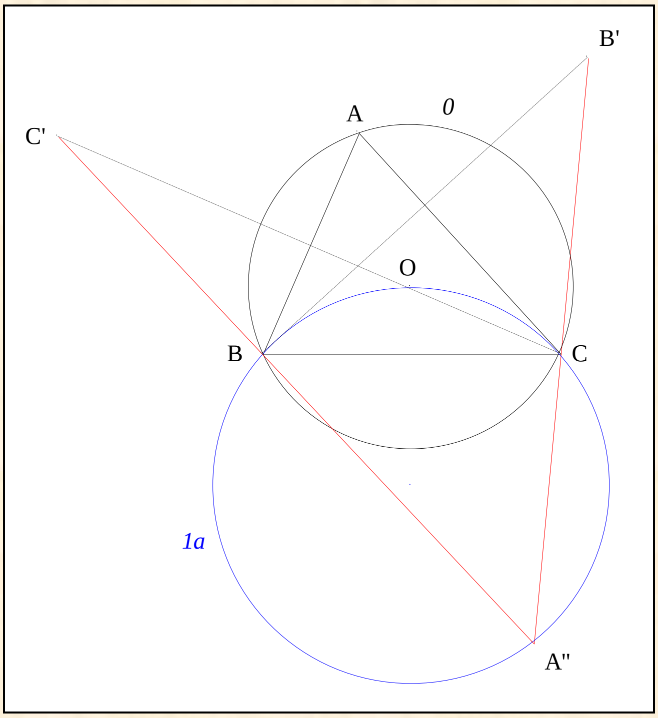
Figure :

---

6 Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822), chapitre **2**

7 Grinberg D., Euler Line parallels, Message *Hyacinthos* # **6515** du 09/02/2003 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6515

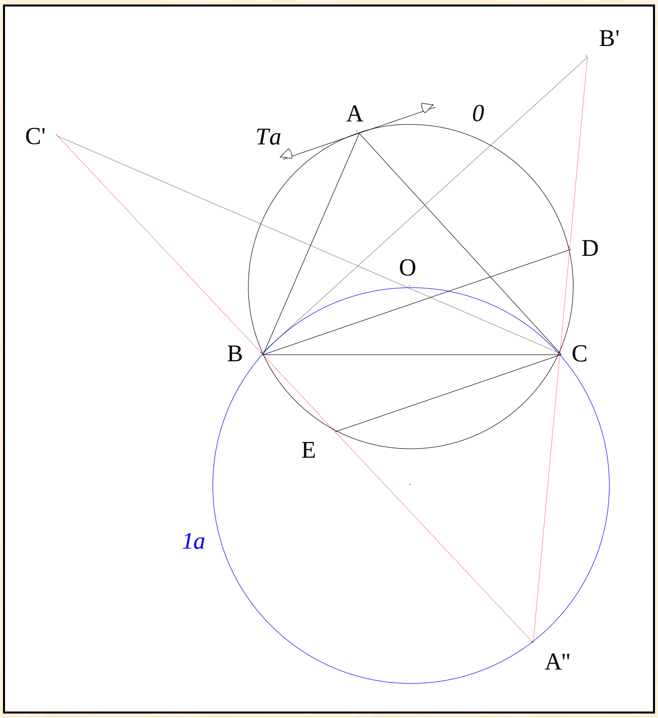
8 Grinberg D.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de ce cercle,
B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à (CA), (AB),
A" le point d'intersection de (BC') et (CB'),
et *1a* le cercle circonscrit au triangle OBC.

Donné : A" est sur *1a*.

VISUALISATION

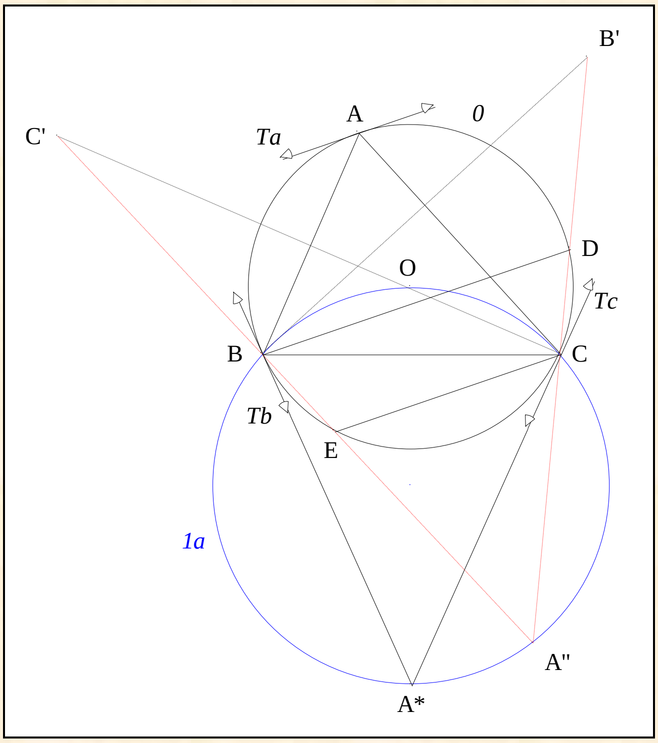


- Notons D, E les seconds points d'intersection resp. de (CB'), (BC') avec *0*
  et *Ta* la tangente à *0* en A.

- Par définition de B' et C', (CA) est la C-bissectrice intérieure du triangle BCD ;
  en conséquence, (BD) // *Ta*.

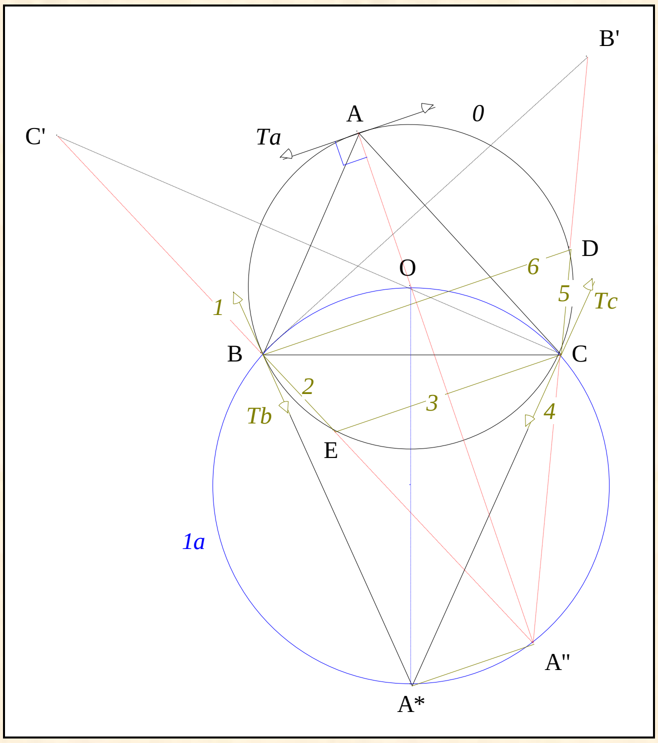
- Mutatis mutandis, *Ta* // (CE).

- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation //, (BD) // (CE).



- Notons *Tb*, *Tc* les tangentes à *1a* resp. en B, C
  et A* le point d'intersection de *Tb* et *Tc*.

- **Scolie :** A* est sur *1a*.



- D'après **B.** Catalan **1.**, A, O et A" sont alignés.

- D'après "L'équivalence d'Aubert", **(1)** (A*A") est la pascale de l'hexagone dégénéré *Tb* EC *Tc* DB

  (2) (A*A") // (BD).

- Nous avons : (BD) // *Ta* ;
  par transitivité de la relation //, (A*A") // *Ta* ;
  par définition d'une tangente *Ta* ⊥ (AO) ;
  en conséquence, (A*A") ⊥ (AOA").

- **Scolie :** *1a* est le cercle de diamètre [OA*].

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle rectangle inscriptible dans un demi-cercle", A" est sur *1*.

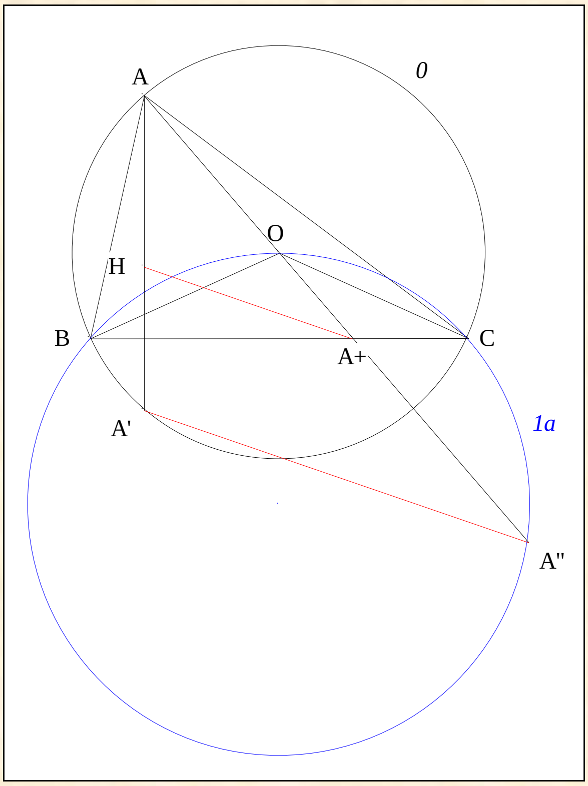
Scolie : *1a* est "le A-cercle de Kosnita de ABC".

3. Une parallèle à une droite de Steiner [9]

VISION

Figure :

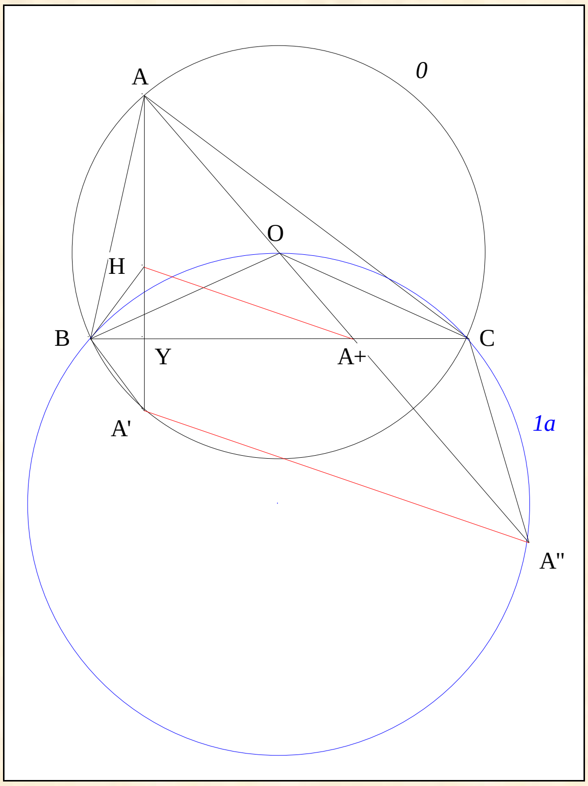
[9] Ayme J.-L., Two parallels, AoPS du 02/07/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1109576_two_parallels



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
H l'orthocentre de ABC,
A' la circumtrace de (AH),
1a le A-cercle de Kosnitza de ABC
et A" le second point d'intersection de (AO) avec *1a*.

Donné : (A'A") est parallèle à (HA+).

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (HA+) est une droite de Steiner

  (2) O et H sont deux points isogonaux de ABC.

- Par une chasse angulaire, **(1)** les triangles AHB et ACA" sont semblables ; en conséquence, AB.AC = AH.AA"

  (2) les triangles ABA' et AA+C sont semblables ; en conséquence, AB.AC = AA'.AA+.

- **Conclusion partielle :** AH/AA' = AA+/AA".

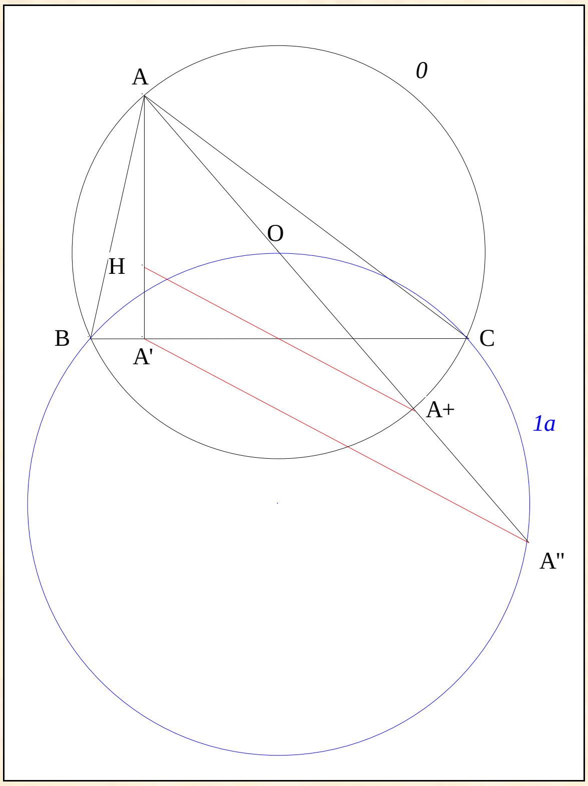
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports", (A'A") est parallèle à (HA+).

4. Une parallèle à une seconde droite de Steiner [10]

VISION

Figure :

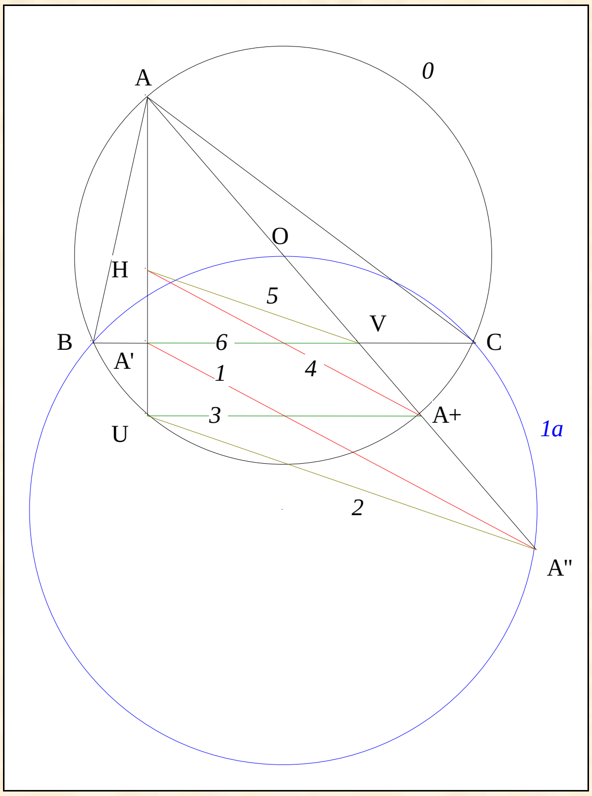
[10] Ayme J.-L., Two parallels again, AoPS du 03/07/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1109980_two_parallels_again



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A'	le pied de la A-hauteur de ABC,
	1a	le A-cercle de Kosnitza de ABC
et	A", A+	les seconds points d'intersection de (AO) resp. avec *1a*, *0*.

Donné : (A'A") est parallèle à (HA+).

VISUALISATION



- Notons U la circumtrace de (AH)
  et V le pied de (AO).

- D'après **B. 3.**, (HV) // (UA").

- O et H étant deux points isogonaux de ABC, (A'V) // (UA+).

- **Conclusion :** d'après Pappus "Le petit théorème" [11]
  appliqué à l'hexagone A'A"UA+HVA', (A'A") est parallèle à (HA+).

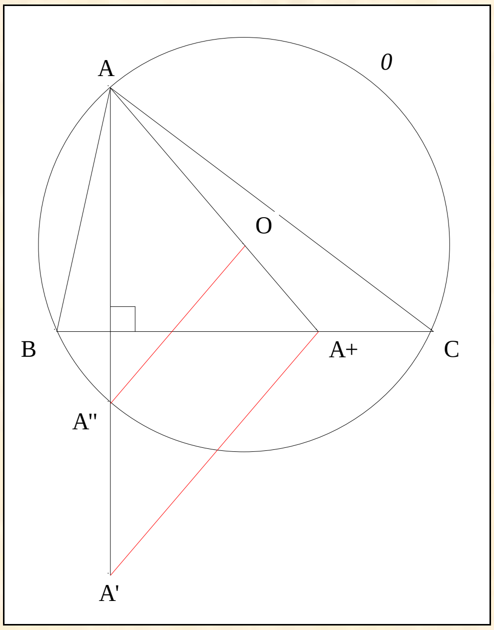
5. Une parallèle à une droite passant par O [12]

VISION

Figure :

[11] Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **7**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

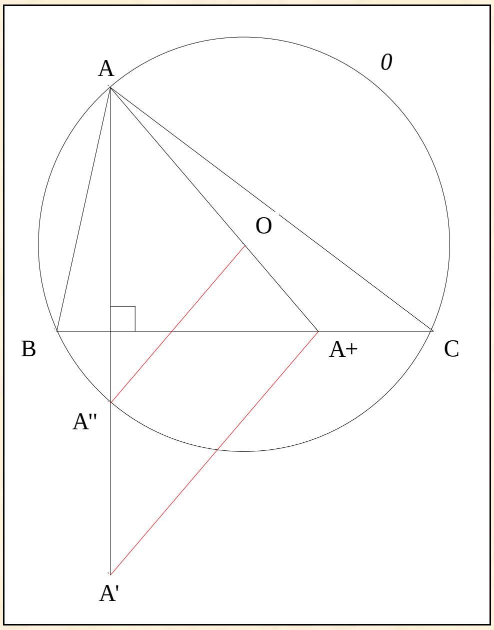
[12] Ayme J.-L., A very easy one, AoPS du 03/07/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1109996_a_very_easy_one



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
A' le symétrique de A par rapport à (BC),
A" la circumtrace de la A-hauteur de ABC
et A+ le point d'intersection de (AO) et (BC).

Donné : (OA") est parallèle à (A+A').

VISUALISATION

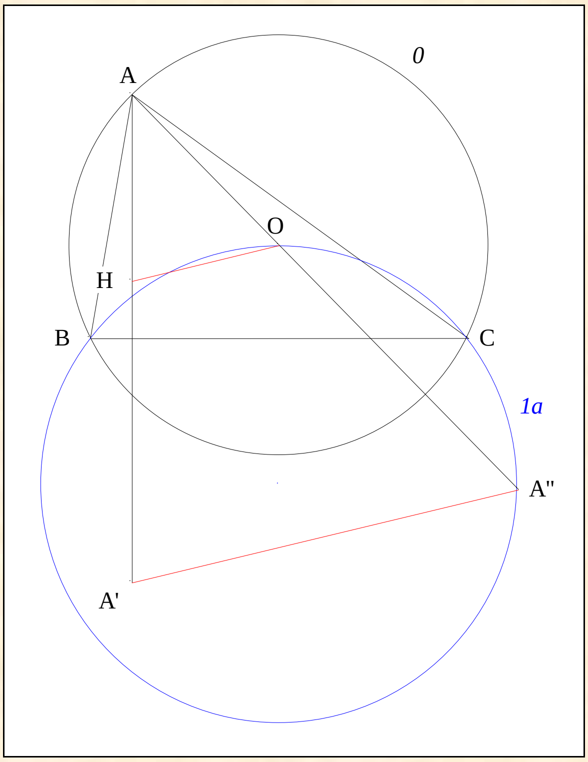


- **Scolie :** les triangles OAA" et A+AA' sont resp. O, A+-isocèles et homothétiques.
- **Conclusion :** (OA") est parallèle à (A+A').

6. Une parallèle à la droite d'Euler [13]

VISION

Figure :

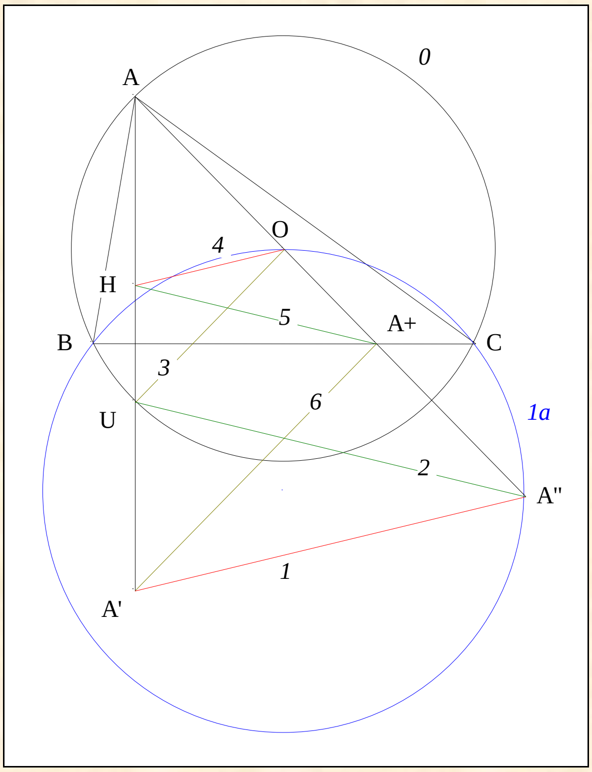


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
H l'orthocentre de ABC,
A' le symétrique de A par rapport à (BC),
1a le A-cercle de Kosnitza
et A" le second point d'intersection de (AO) avec *1a*.

Donné : (A'A") est parallèle à (OH).

VISUALISATION

[13] Catalan E., Quelques théorèmes de géométrie élémentaire, *Journal de Mathématiques* **III** (1883) 61-62
A parallel to the Euler's line, AoPS du 03/07/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1109997_a_parallel_to_the_eulers_line



- Notons U la circumtrace de (AH)
  et A+ le point d'intersection de (AO) et (BC).

- D'après **B. 3.**, (HA+) // (UA")
  d'après **B. 5.**, (OU) // (A+A').

- **Conclusion :** d'après Pappus "Le petit théorème" [14]
  appliqué à l'hexagone A'A" UOHA+A', (A'A") est parallèle à (OH).

Commentaire : Eugène Catalan a été semble-t-il, le premier à trouver une droite parallèle à la droite d'Euler, ce qui n'est pas commun.

[14] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **7**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

7. Une courte biographie d'Eugène-Charles Catalan

Un géomètre sans patrie, un républicain sans république [15]

Eugène-Charles Catalan, est né le 30 mai 1814, à Bruges, en Belgique alors que cette ville appartenait à la France.
A 12 ans, il entre à "l'École royale gratuite de dessin et de mathématiques en faveur des arts mécaniques", à Paris. Par concours, il devient trois ans plus tard, répétiteur de Géométrie dans cette même école, tout en restant élève.
En 1833, il est élève de Joseph Liouville à l'École Polytechnique et en est exclus l'année suivante à cause de ses idées non-conformistes ; réintégré par la direction de l'École, il termine ses études en 1835. Il quitte Paris pour aller s'installer à Châlons-sur-Marne où il enseigne les mathématiques. Avec l'aide personnelle de Liouville, il obtient en 1838, un poste de lecteur en géométrie descriptive à l'École Polytechnique, mais sa carrière s'interrompt brutalement à cause de son engagement politique à gauche. En 1865, il finit par trouver un poste de professeur émérite à l'Université de Liège. C'est à partir de ce moment qu'il commence à publier. Il écrit plusieurs livres dont le *Manuel du candidat à l'École Polytechnique*, les *Éléments de Géométrie* et le classique *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaires* (première édition en 1852). C'est dans l'un de ces livres qu'il précise l'expression "figure inscrite au cercle et non dans le cercle" en s'appuyant sur le sens du mot "inscrit" qui signifie "être à l'intérieur, dans l'objet considéré".
En 1879, il s'intéresse à l'hexagone de Taylor; l'histoire nous apprend qu'il a été devancé par *Eutaris*, anagramme de Restiau du collège Chaptal, qui avait déjà publié en 1877, un article à ce sujet dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires*.
Il décède à Liège, le 14 février 1894 à six heures du matin d'une pneumonie aigue.

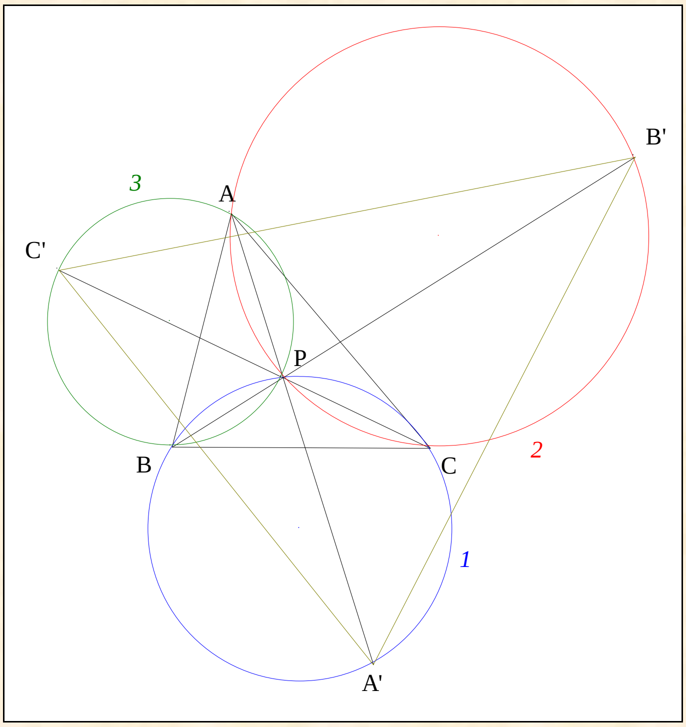
[15] Jongmans F., *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, Républicain sans république*

C. PAUL YIU

1. Définition d'un triangle P-cerclecévien

VISION

Figure :



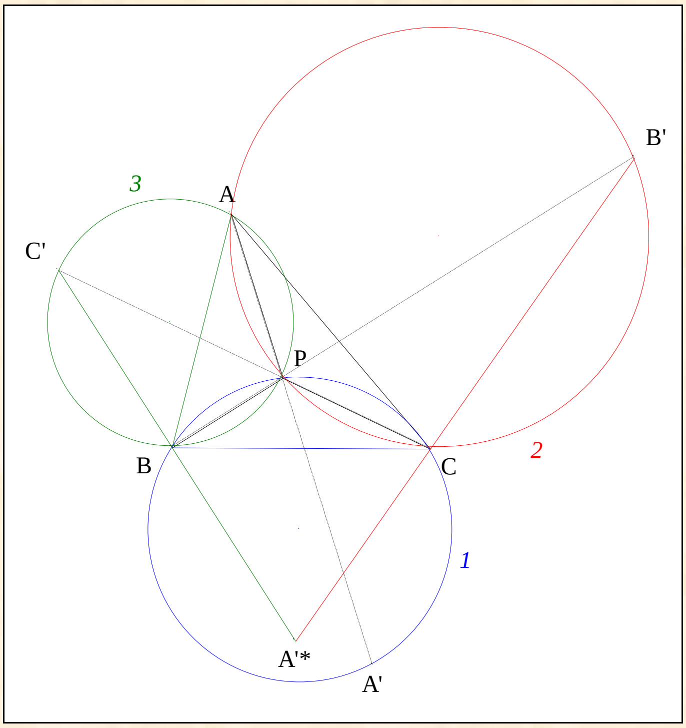
Finition :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB
et	A', B', C'	les seconds points d'intersection de (AP), (BP), (CP) resp. avec *1*,*2*, *3*.

Définition : A'B'C' est le triangle P-cerclecévien de ABC.

2. Isogonal d'un sommet d'un triangle P-cerclecévien

VISION

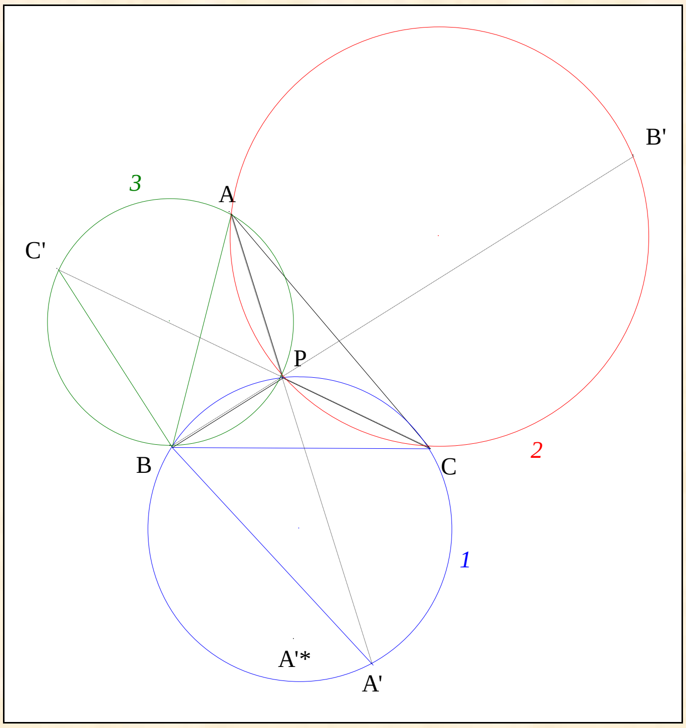
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles PBC, PCA, PAB,
	A', B', C'	les seconds points d'intersection de (AP), (BP), (CP) avec *1*,*2*, *3*
et	A'*	l'isogonal de A' relativement à ABC.

Donné : A'* est le point d'intersection de (BC') et (CB').

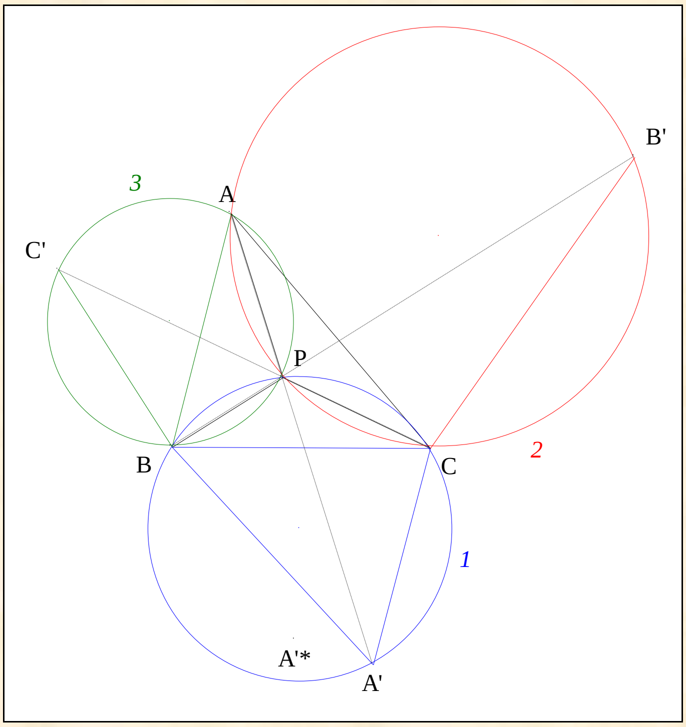
VISUALISATION



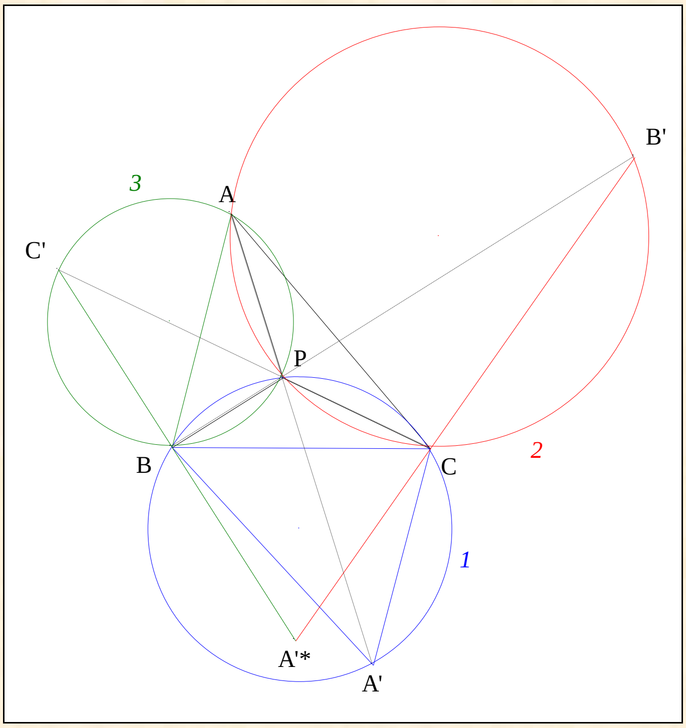
- **Scolie :** par définition, A' est un sommet du triangle P-cerclecévien de ABC.

- D'après Möbius "Un triangle de Möbius" appliqué à *1* et *3*, <A'BA = <CBC' ;
  en conséquence, <A'BC = <ABC'.

- **Conclusion partielle :** (BC') est la B-isogonale de (BA') relativement à ABC.

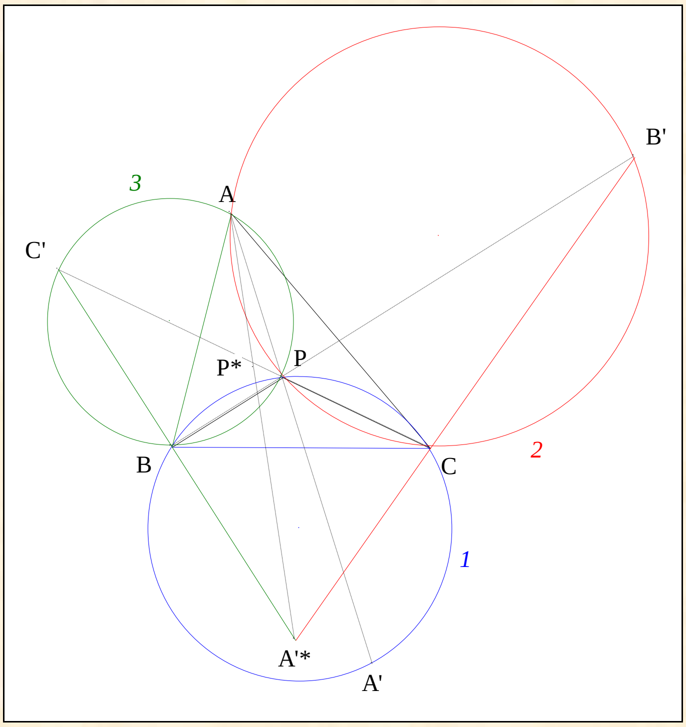


- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CB') est la C-isogonale de (CA') relativement à ABC.



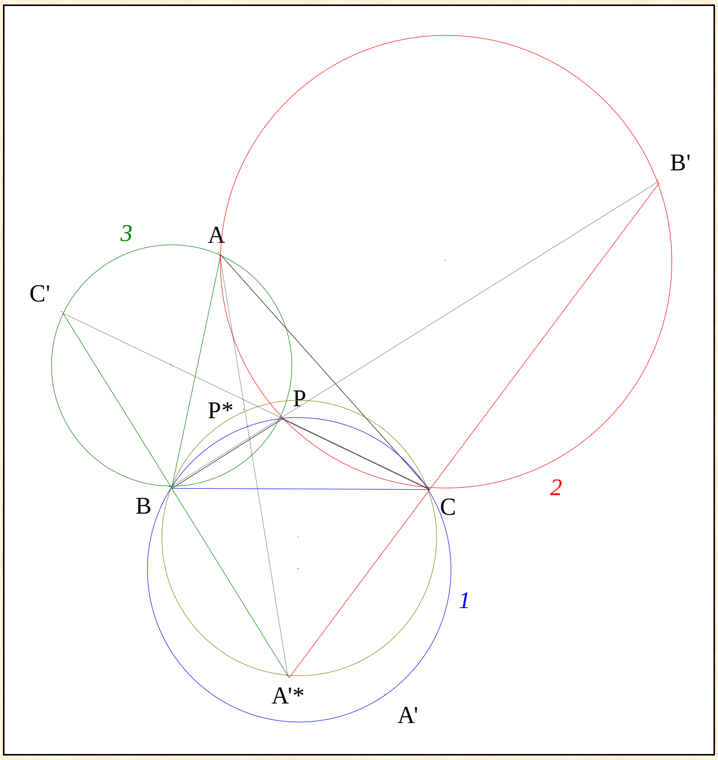
- **Conclusion :** d'après Mathieu "Points isogonaux", A'* est le point d'intersection de (BC') et (CB').

Scolies : **(1)** une troisième droite



- Notons P* l'isogonal de P relativement à ABC.
- Par hypothèse, A'* est l'isogonal de A' relativement à ABC.
- **Conclusion :** d'après Mathieu "Points isogonaux", (AP*) passe par A'*.

(2) Quatre points cocycliques



- Une chasse angulaire : <BPC = <BA'C ;
  d'après "le théorème 180" appliqué à BP*C, <BP*C = - (<P*CB + <CBP*)
  par définition de l'isogonalité = - (<ACP + <PBA)
  = - (<ACB +-<PCB) + (<CBA - <CBP)
  = - (<ACB + <CBA) + (<PCB + <CBP)
  = <BAC - <BPC.

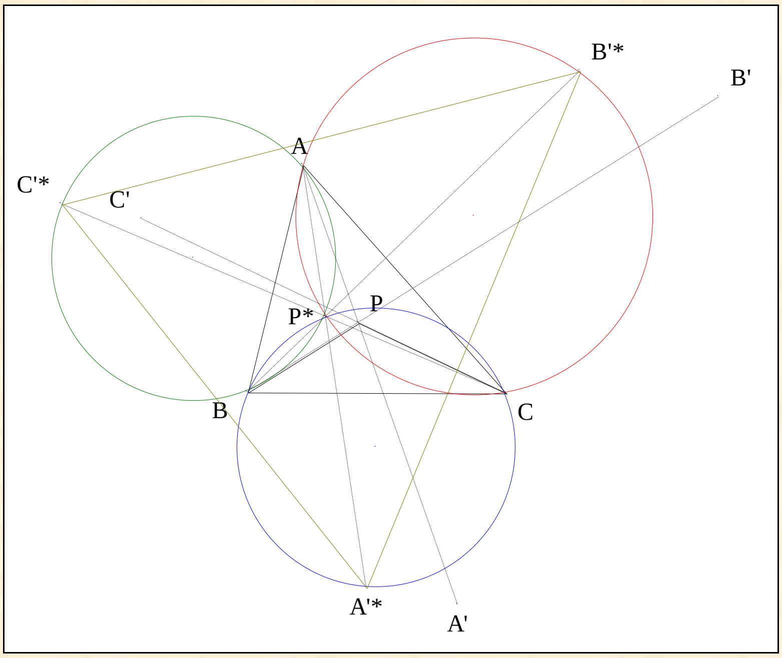
- Mutatis mutandis, nous montrerions que <BA'*C = <BAC - <BA'C.

- Nous avons : <BPC = <BA'C.

- D'où : <BP*C = <BA'*C.

- **Conclusion :** A'*, C, P* et B sont cocycliques.

(3) Un second triangle cerclecévien [16]



- Mutatis mutandis, nous montrerions que B'*, A, P* et C sont cocycliques.
  C'*, B, P* et A sont cocycliques.

- **Conclusion :** A'*B'*C'* est le triangle P*-cerclecévien de ABC.

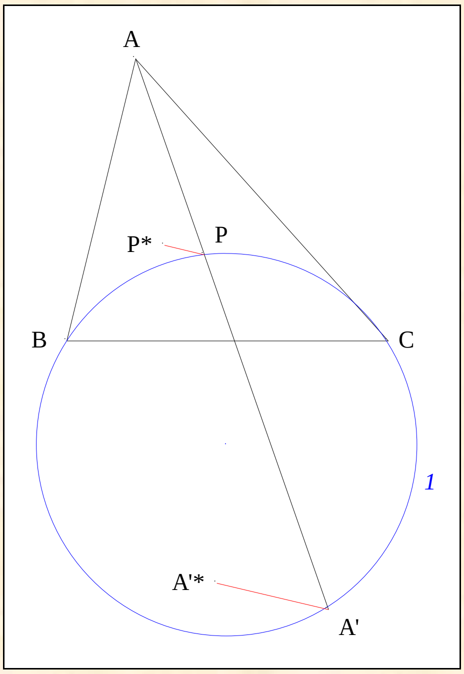
---

16 Ehrmann J.-P., Generalizing "On the Kosnita Point and the Reflection Triangle", Message *Hyacinthos* # **7417** du 03/08/2003 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/topics/7417

3. Une généralisation de la droite d'Euler

VISION

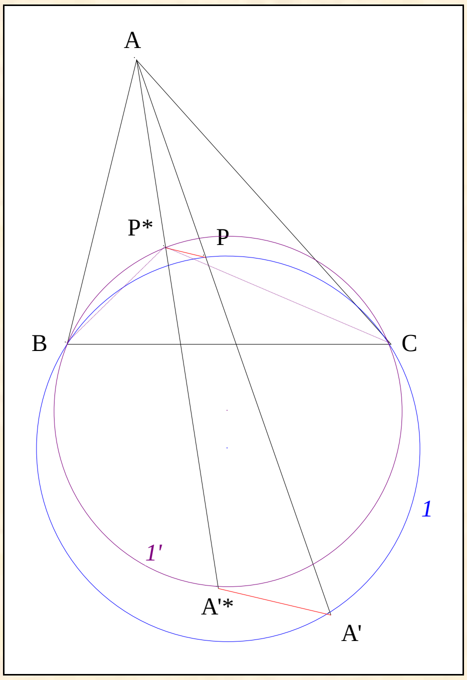
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	1	le cercle circonscrit au triangle PBC,
	A'	le second point d'intersection de (AP) avec *1*
et	A'*	l'isogonal de A' relativement à ABC.

Donné : (A'A'*) est parallèle à (P*P).

VISUALISATION



- D'après **C. 2.** scolie **2**, P*, B, A'* et C sont cocycliques.

- Notons *1'* ce cercle.

- Une chasse angulaire :

  * par isogonalité, <PAB = <CAP* = <CAA'*

    <ABP = <P*BC

  * angle inscrit, <P*BC = <P*A'*C

  * aitre écriture, <P*A'*C = <AA'*C

  * transitivité de =, <ABP = <AA'*C.

- Les triangles PAB et CAA'* étant semblables, $\frac{PA}{AB} = \frac{CA}{AA'^*}$.

- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que

  les triangles P*AC et BAA' sont semblables ; en conséquence, $\frac{BA}{AA'} = \frac{P^*A}{AC}$.

- Par multiplication membre à membre de ces deux égalités, $\frac{PA}{AA'} = \frac{P^*A}{AA'^*}$.

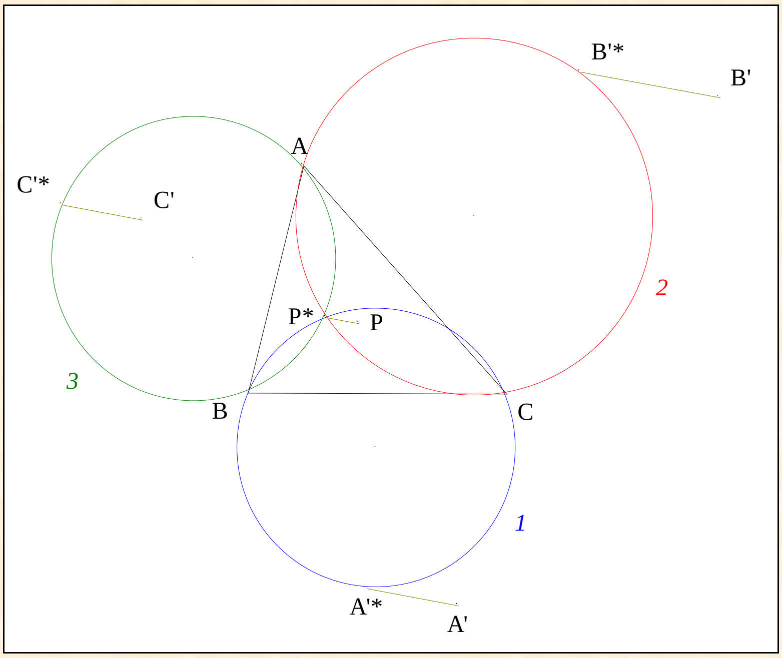
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports", (A'A'*) est parallèle à (P*P).

Commentaire : la visualisation ci avant est celle de Darij Griberg [17].

[17] Grinberg D, Generalization "On the Kosnita and Reflection Triangle", Message *Hyacinthos* du 03/08/2003

Note historique : en septembre 2004, Antreas Hatzipolakis [18] proposait la conjecture particulière précédente en considérant le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle, puis le point médian et le point de Lemoine d'un triangle, puis le centre du triangle.
Le même jour, Paul Yiu[19] s'apercevant que chaque point du couple envisagé était le l'isogonal de l'autre, étendait le résultat d'Hatzipolakis aux couples de points isogonaux d'un triangle.

Scolies : **(1)** vision triangulaire



- Notons *2, 3* les cercles circonscrits resp. aux triangles PCA, PAB,
  B', C' les seconds points d'intersection de (BP), (CP) resp. avec *2, 3*
  et B'*, C'* les isogonaux de B', C' relativement à ABC.

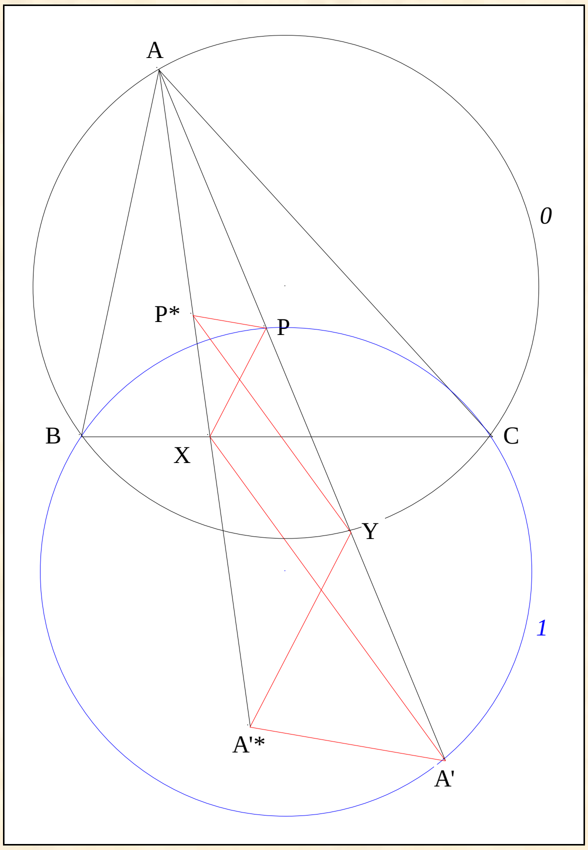
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B'*) et (P*P) sont parallèles
  (C'C'*) et (P*P) sont parallèles.

- **Conclusion :** (A'A'*), (B'B'*), (C'C'*) et (P*P) sont parallèles entre elles.

(2) La "petite figure" de Pappus

[18] Hatzipolakis A., Reflections, Message *Hyacinthos* # **10528** du 24/09/2004 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/10528

[19] Yiu P., Reflections, Message *Hyacinthos* # **10534** du 24/09/2004 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/10534



- Notons X le point d'intersection de (AP*) et (BC),
  0 le cercle circonscrit de ABC
  et Y le second point d'intersection de (AP) avec *0*.

- Une chasse angulaire :

  * par isogonalité, <BAX = <YAC

  * angle inscrit, <CBA = <CYA.

- Les triangles ABX et AYC étant semblables, $\frac{AB}{AY} = \frac{AX}{AC}$.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  les triangles AP*C et ABA' sont semblables ; en conséquence, $\frac{AP*}{AB} = \frac{AC}{AA'}$.

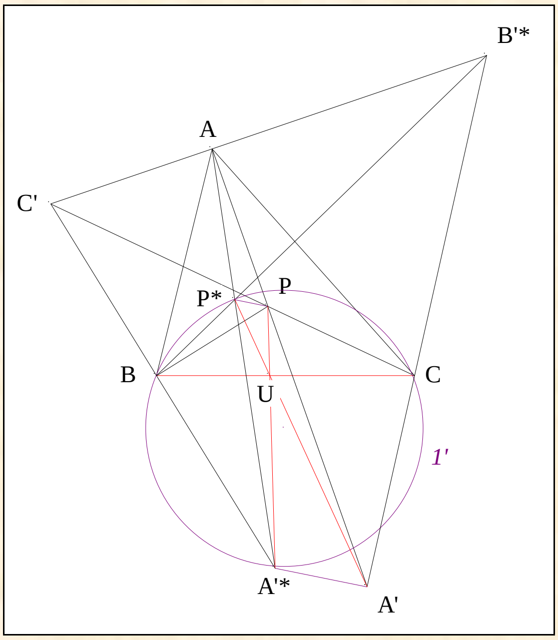
- Par multiplication membre à membre de ces deux égalités, $\frac{AP*}{AY} = \frac{AX}{AA'}$ i.e. $\frac{AP*}{AX} = \frac{AY}{AA'}$.

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Rapports", (XA') est parallèle à (P*Y).

- D'après Pappus "Le petit théorème" [20]
  appliqué à l'hexagone sectoriel PP*YA'*A'XP, (PX) est parallèle à (YA'*).

[20] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

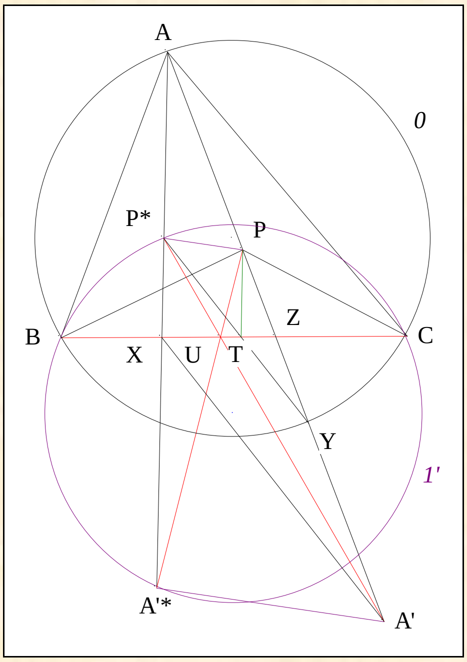
(3) Une parallèle à (AP*)



- D'après **C. 2.**, **(1)** C', A et B'* sont alignés

  (2) A', C et B'* sont alignés.

- D'après Desargues "Le théorème faible" [21],
  (C'AB'*) est l'arguésienne des triangles perspectifs BA'*P* et CPA' ;
  en conséquence, (BC), (A'*P) et (P*A') sont concourantes.



- Notons Z, T les points d'intersection de (BC) resp. avec (APY), (P*Y).

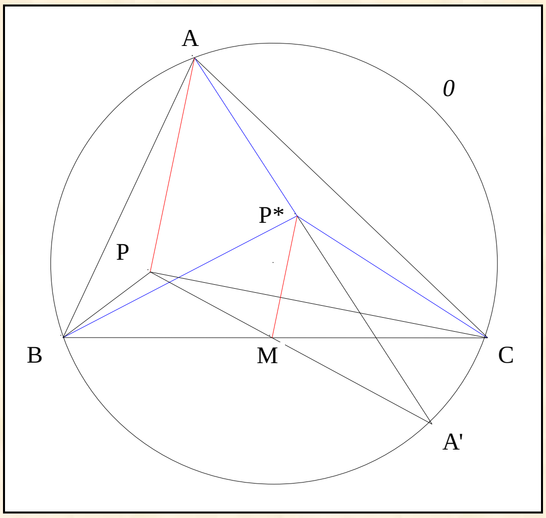
- D'après Desargues "Le théorème faible" [22],
  U est le centre de perspective des triangles A'*A'X et PP*T ;

[21] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 40 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[22] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 40 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ces deux triangles ayant deux côtés correspondants parallèles, (A'*X) // (PT).

- **Conclusion :** (PT) est parallèle à (AP*).

(4) Une parallèle à (AP)



Traits : ABC un triangle,
P un point,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A' le second point d'intersection de (AP*) avec *0*
et M le point d'intersection de (PA') et (BC).

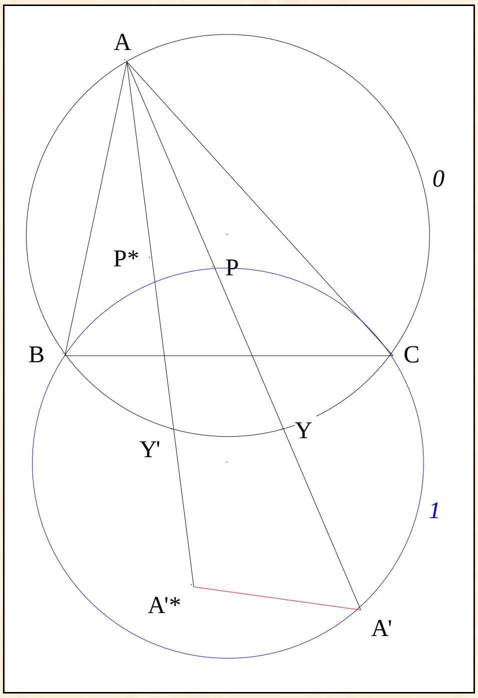
Conclusion : (P*M) est parallèle à (AP).

Commentaire : mutatis mutandis…

4. Un résultat fructueux de l'auteur

VISION

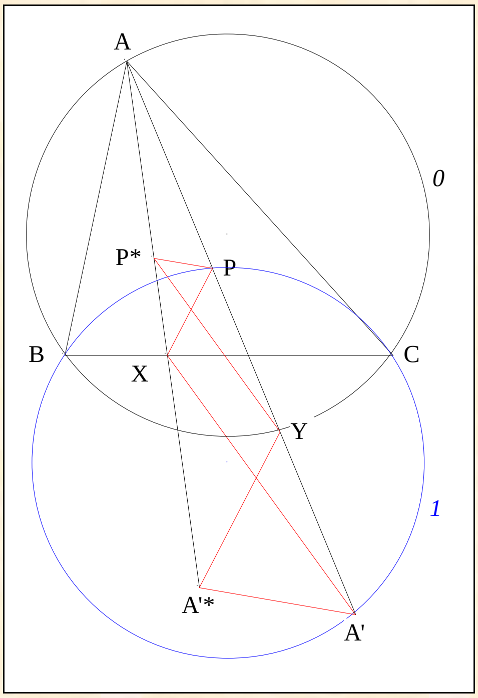
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
1 le cercle circonscrit au triangle PBC,
A' le second point d'intersection de (AP) avec *1*
A'* l'isogonal de A' relativement à ABC,
0 le cercle circonscrit de ABC
et Y, Y' les seconds points d'intersection de (AP), (AP*) avec *0*.

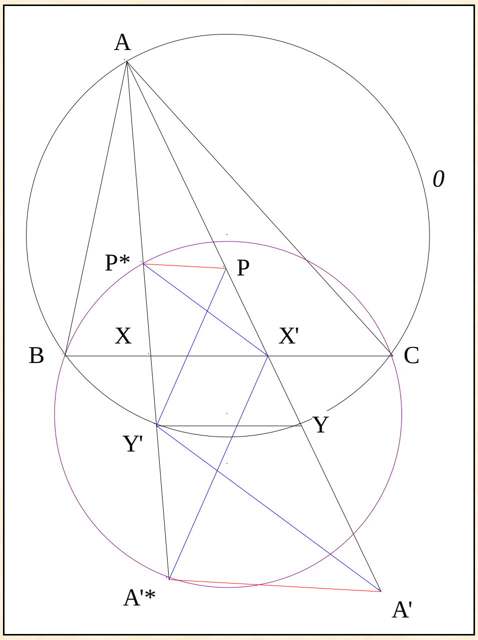
Donné : YP/YA' = Y'A'*/Y'P*.

VISUALISATION



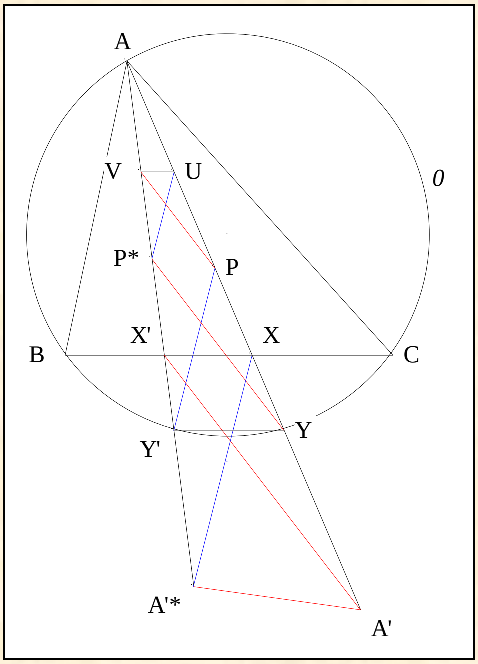
- Notons X le point d'intersection de (AP*) et (BC).

- D'après **C. 3.** Scolie **2**, le quadrilatère PXA'A'*YP* a tous ses côtés opposés parallèles.



- Notons X' le point d'intersection de (AP*) et (BC),
  et *1'* le cercle circonscrit au triangle P*BC.

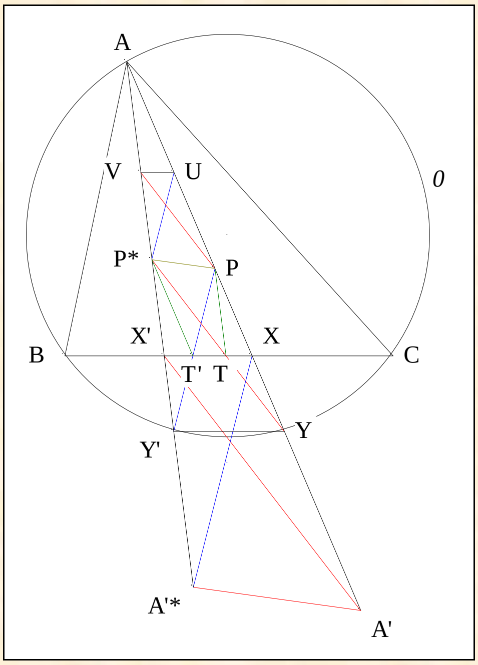
- Par symétrie
  de la relation "est isogonal à", le quadrilatère P*X'A'*A'Y'P a tous ses côtés opposés parallèles.



- Notons U le point d'intersection de la parallèle à (PY') issue de P* avec (AP)
  et V le point d'intersection de la parallèle à (P*Y) issue de P avec (AP*).

- P* étant l'isogonal de P relativement à ABC, (BC) // (YY') ou encore (XX') // (YY').

- D'après Pappus "Le petit théorème" [23]
  appliqué à l'hexagone sectoriel UP*YY'PVU, (YY') // (UV) ;
  par transitivité de =, (XX') // (UV).



- Notons T, T' les points d'intersection de (BC) resp. avec (P*Y), (PY').

- D'après **C. 3.** Scolie **3**, (PT) // (AP*X') et (P*T') // (APX).

- Les triangles PTX et P*X'T' étant homothétiques, PT/ P*X' = PX/P*T'.

- Une chasse de rapports :

  * d'après Thalès, YP/YA' = P*V/P*X'

  * PTP*V étant un parallélogramme, P*V/ P*X' = PT/P*X'

  * PTX et P*X'T' étant homothétiques, PT/P*X' = PX/P*T'

  * PUP* T' étant un parallélogramme, PX/P*T' = PX/PU

  * d'après Thalès PX/PU = Y'A'*/Y'P*

- **Conclusion :** par transitivité de =, YP/YA' = Y'A'*/Y'P*.

5. Une courte biographie de Paul Yiu

[23] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Suite à l'obtention de son B. A. à l'université de Hong Kong en 1975, puis du M. Phi en 1978, Paul Yiu soutient son Ph. D. à l'université de la Colombie Britannique (Canada) en 1985.
En 1990, il est nommé professeur au Florida Atlantic University de Boca Raton (Floride, Etats-Unis) et développe en 2003 le site *Forum Geometricorum* [24].

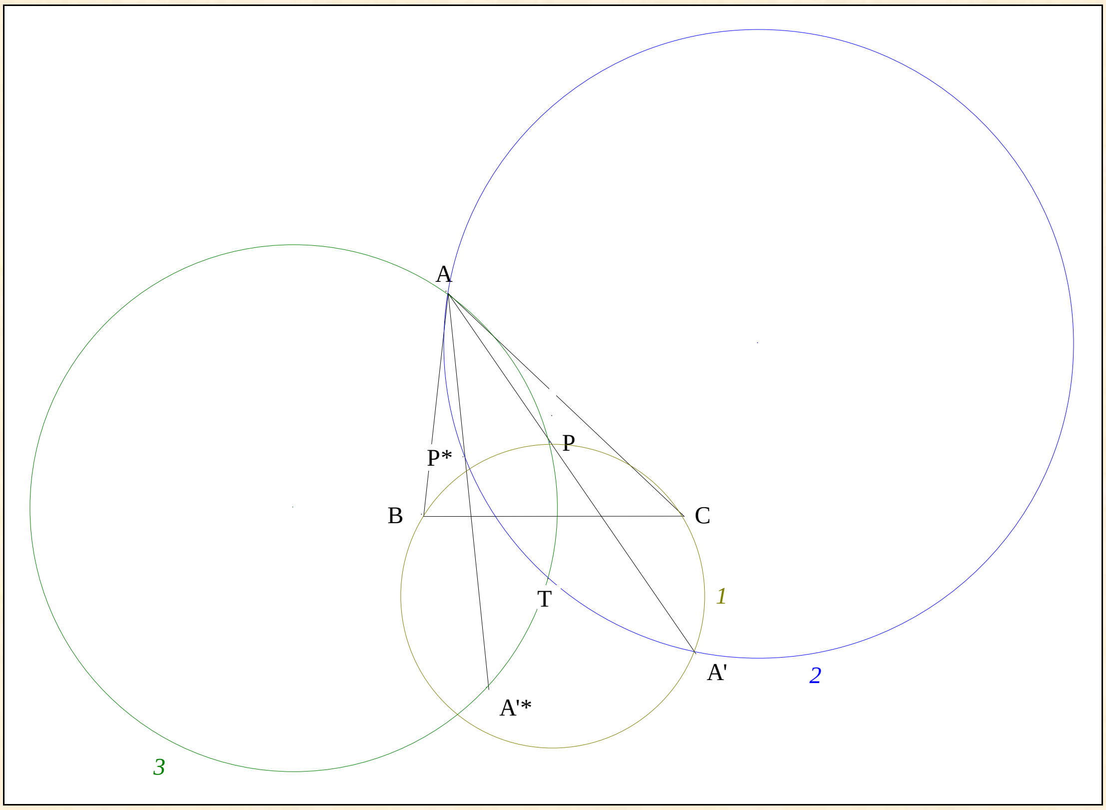
[24] http://forumgeom.fau.edu/index.html

D. JEAN-LOUIS AYME

1. Une symédiane [25]

VISION

Figure :



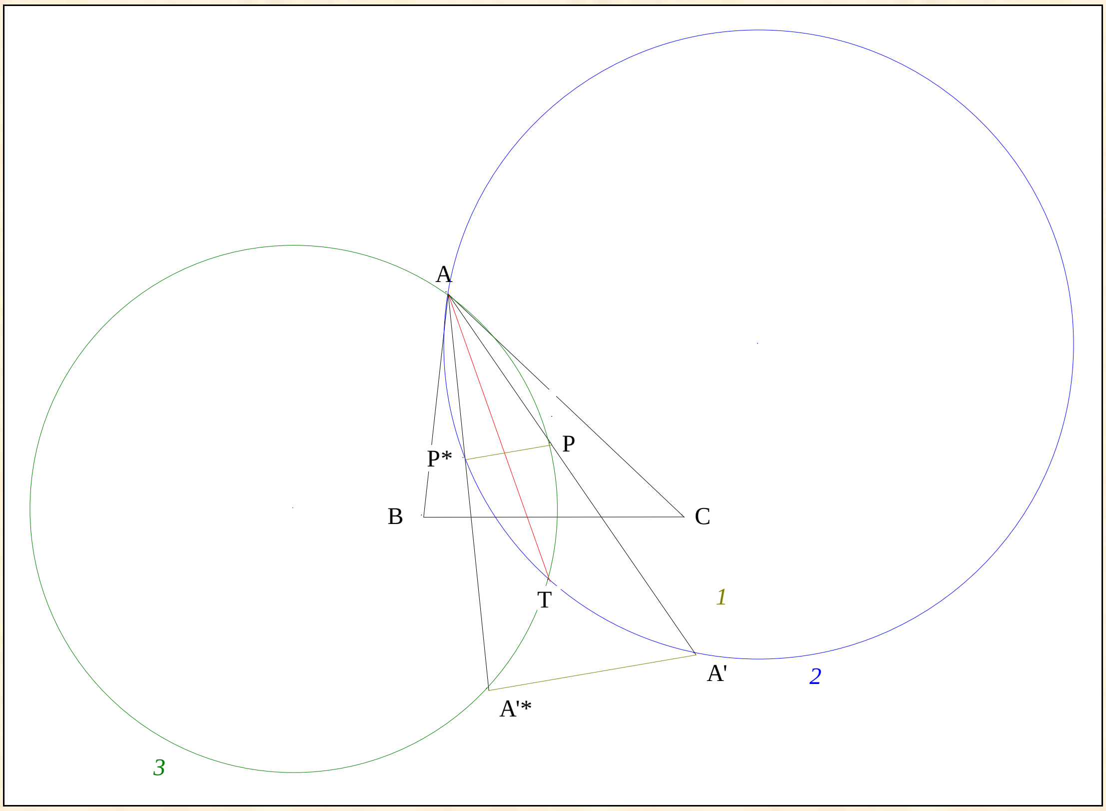
Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	1	le cercle circonscrit au triangle PBC,
	A'	le second point d'intersection de (AP) avec *1*,
	A'*	l'isogonal de A' relativement à ABC,
	2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles AP*A', APA'*
et	T	le second point d'intersection de *2* et *3*.

Donné : (AT) est la A-symédiane de ABC.

VISUALISATION

---

[25] Ayme J.-L., 17/02/2006 ;
Isogonality in a trapezium, *Mathlinks* du 19/11/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=175434



- D'après **C. 3.**, (A'A'*) // (PP*).

- **Conclusion :** d'après "The first Ayme's generalization" [26], (AY) est la A-symédiane de ABC.

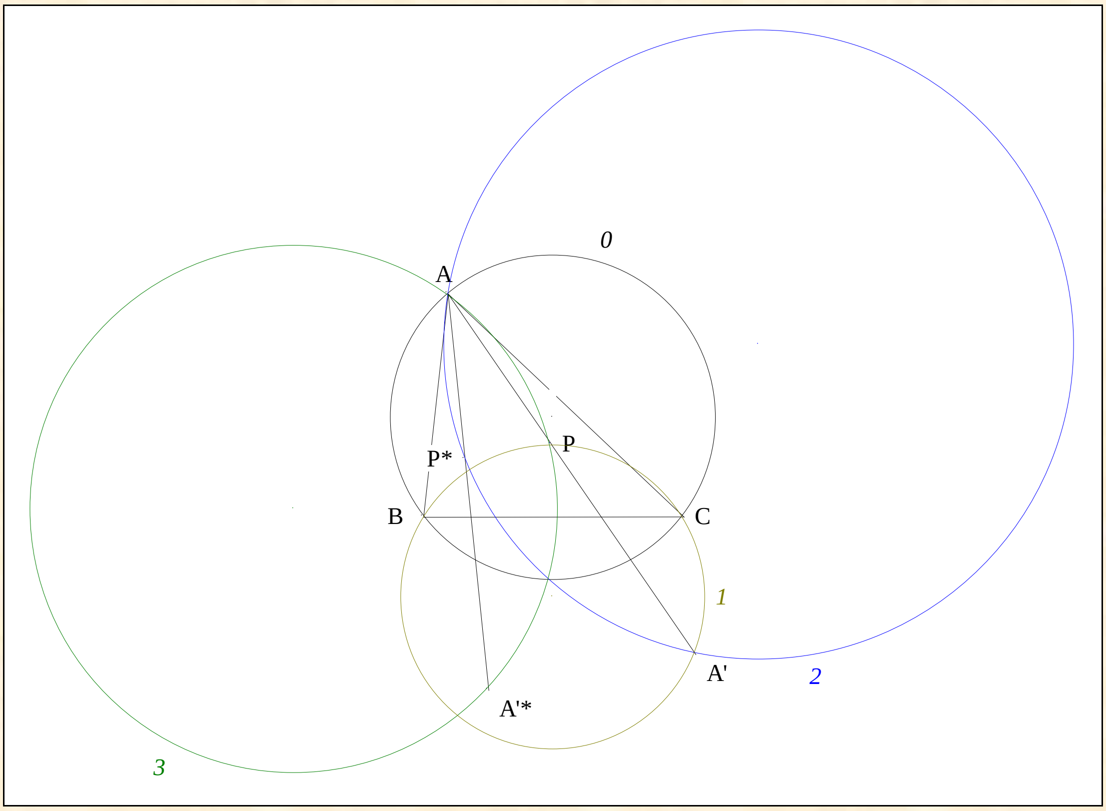
2. Trois cercles coaxiaux

VISION

Figure :

---

[26] Ayme J.-L., 17/02/2006
Vittas K., Isogonality in a trapezium, *Mathlinks* du 19/11/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=175434

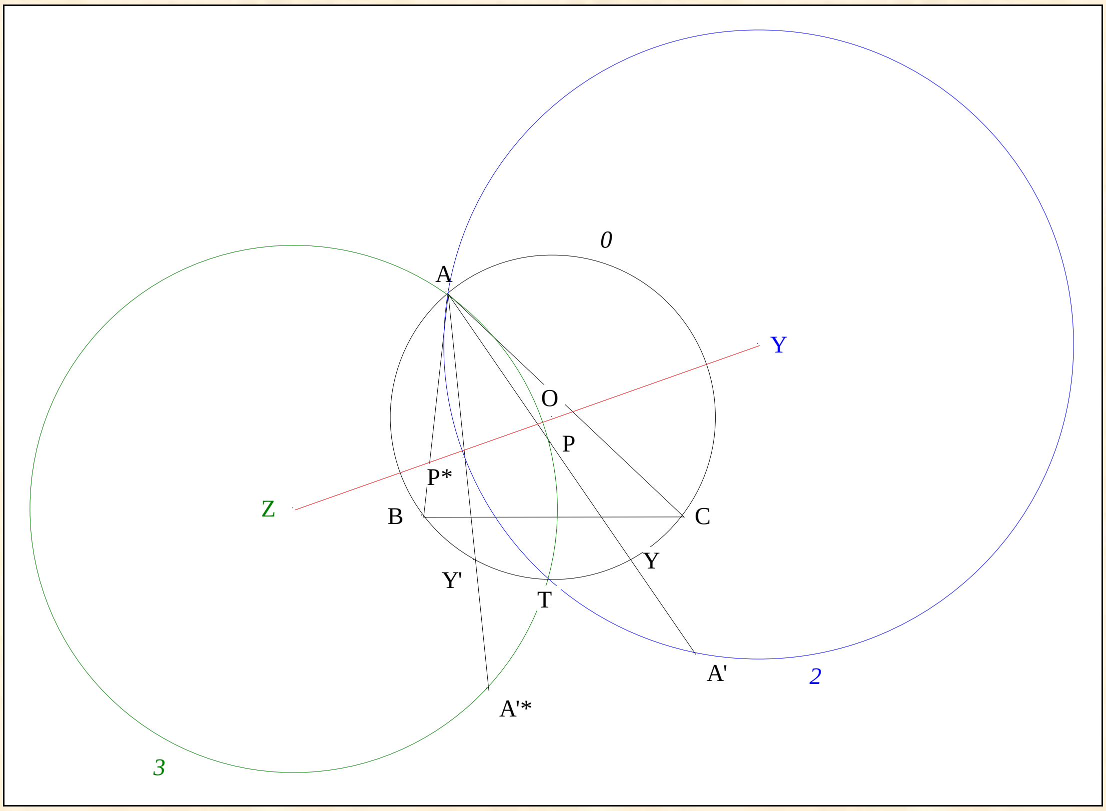


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
1 le cercle circonscrit au triangle PBC,
A' le second point d'intersection de (AP) avec *1*,
A'* l'isogonal de A' relativement à ABC,
et *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AP*A', APA'*

Donné : *0*, *2* et *3* sont coaxiaux [27].

VISUALISATION

[27] Ayme J.-L., Three collinear points, AoPS du 14/07/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1114469_three_collinear_point



- Notons Y, Y' les seconds points d'intersection de (AP), (AP*) avec *0*
  et T le second point d'intersection de *2* et *3*.

- D'après **C. 4.** , YP/YA' = Y'A'*/Y'P*.

- D'après "Le cercle des rapports constants" [28], *0* passe par T.

- **Conclusion :** *0*, *2* et *3* sont coaxiaux.

Scolie : un alignement remarquable

- Notons O, Y, Z les centres resp. de *0*, *2*, *3*.

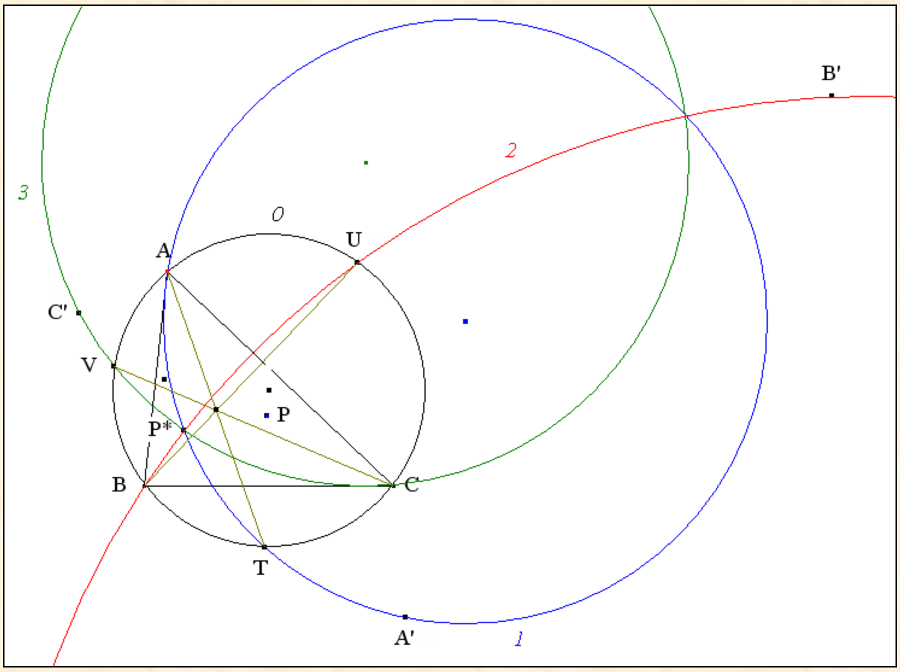
- **Conclusion :** Y, O et Z sont alignés.

3. Trois droites concourantes

VISION

Figure :

[28] Ayme J.-L., The midcircle theorem, G.G.G. vol. **25**, p. 25-26 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
A'B'C' le triangle P-cerclecévien de ABC,
1, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles AP*A', BP*B', CP*C'
et T, U, V les seconds points d'intersection de *0* resp. avec *1, 2, 3.*

Donné : (AT), (BU) et CV) sont concourantes.

VISUALISATION

- **Scolie :** (AT), (BU) et CV) sont resp. les A, B, C-symédianes de ABC.
- **Conclusion :** d'après "Le point de Lemoine" [29], (AT), (BU) et CV) sont concourantes.
- Notons K ce point de concours.

4. L'auteur

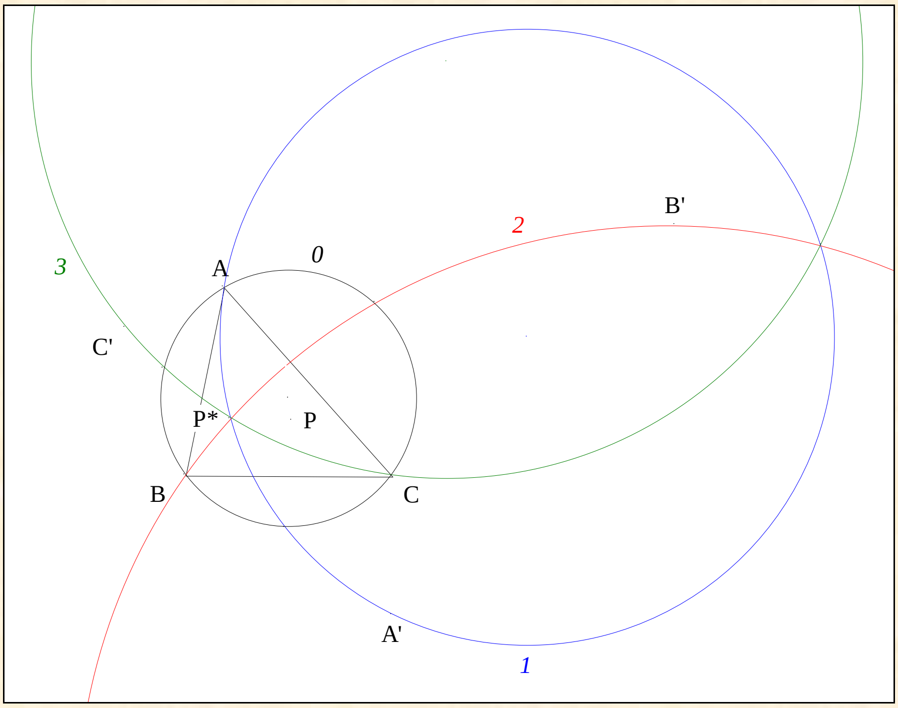
[29] Lemoine E. (1873)

E. NGO QUANG DUONG

1. Trois cercles coaxiaux [30]

VISION

Figure :

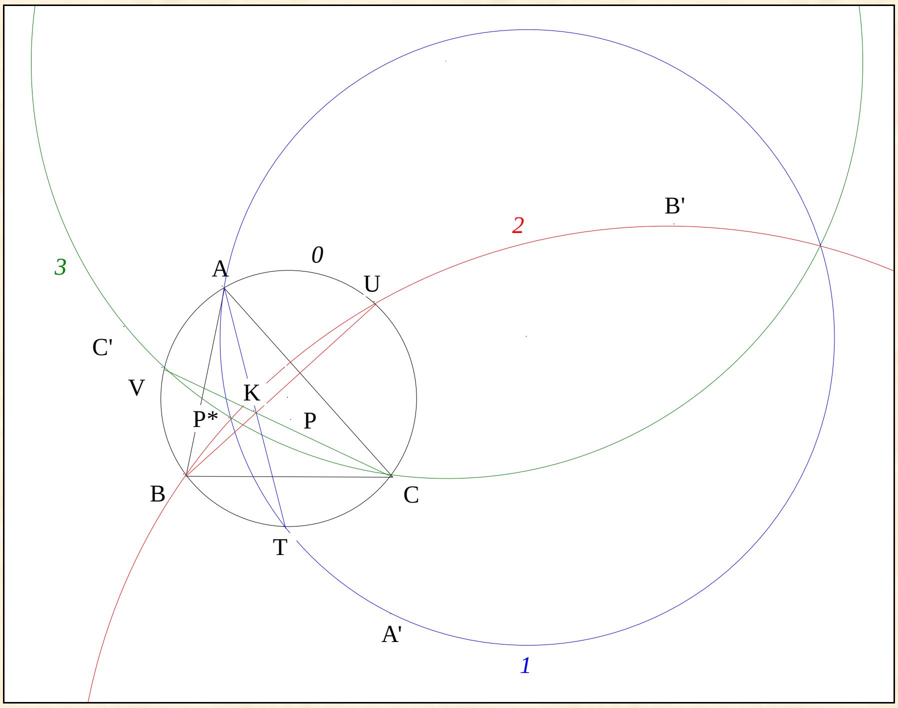


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	A'B'C'	le triangle P-cerclecévien de ABC
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AP*A', BP*B', CP*C'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

VISUALISATION

[30] Ngo Quang Duong, Generalization of Musselman's theorem, *Anopolis* du 14/06/2015 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Anopolis/conversations/topics/2648?from=trending
Quelques cercles, *Les-Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1108941



- Notons T, U, V les seconds points d'intersection de *0* resp. avec *1*, *2*, *3*
  et K le point de Lemoine de ABC.

- **Scolie :** d'après **D. 3.**, (AT), (BU) et CV) sont concourantes en K.

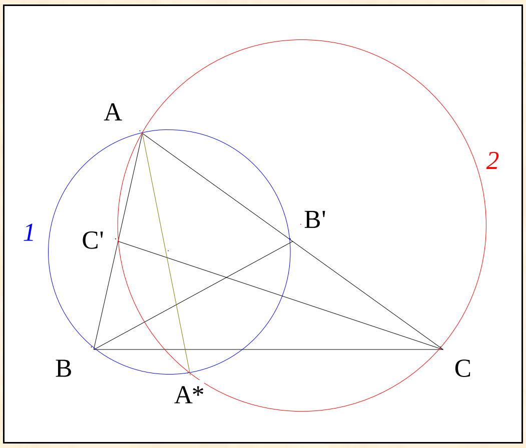
- **Conclusion :** d'après **F. 3.**, en remplaçant P par K et Q par P*, *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

F. APPENDICE

1. A Milorad Stevanovic's result

VISION

Figure :

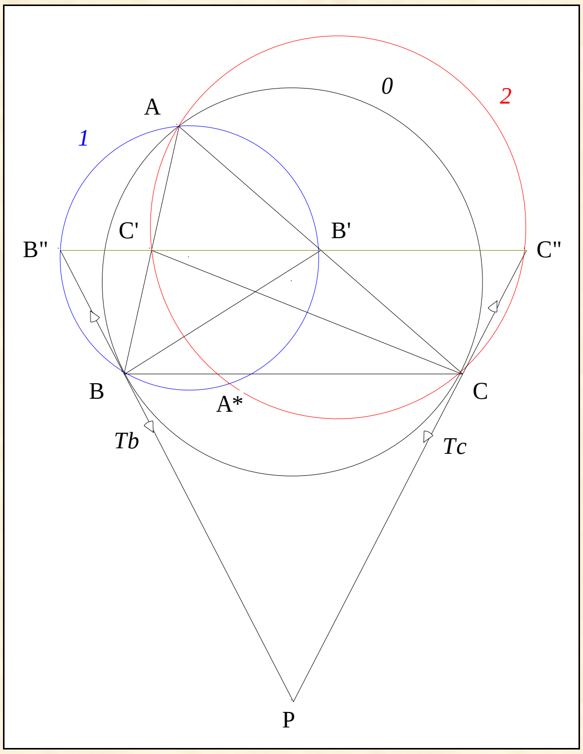


Features :	ABC	a triangle,
	B', C'	the midpoints of CA, AB resp.,
	1	the circle passing through A, B, B',
	2	the circle passing through A, C, C'
and	A*	the second point of intersection *1* and *2*.

Given : AA* is the A-symmedian of ABC. [31]

VISUALIZATION

[31] Stevanovic M., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **10904** du 20/11/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10904

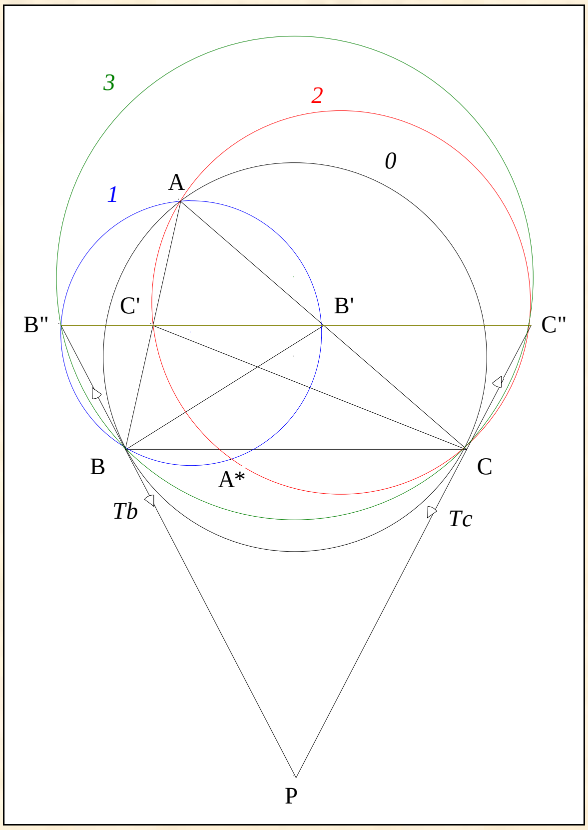


• Note	*0*	the circumcircle of ABC,
	Tb, *Tc*	the tangents to *0* at B, C resp.,
	P	the point of intersection of *Ta* and *Tb*,
and	B", C"	the second points of intersection of BP with *1*, CP with *2*.

- The circles *1* et *0*, the basic points B and A, the monians B"BB and B'AC,
  lead to Reim's theorem **3** ; consequently, B"B' // CB ;
  according to "The midpoint theorem" applied to the triangle ABC, CB // B'C' ;
  by transitivity of the relation //, B"B' // B'C' ;
  according to "The Euclide's postulate", B', C' and B" are collinear.

- Mutatis mutandis, we would prove B', C' and C" are collinear.

- **Partial conclusion :** according to the incidence axiom Ia, B', C', B" and C" are collinear.



- We have : the triangle PCB is P-isoceles ;
  consequently, the quadrilateral BCC"B" is an isosceles trapezim ;
  hence B, C, C" et B" are concyclic.

- Note 3 this circle.

- According to "The three chordals theorem" [32]
  applied to *1*, *2* and *3*, AA* goes through P.

- **Conclusion :** according to **A. 3.** and **4.**, AA* is the A-symmedian of ABC.

Note historique : ce résultat signalé par Milorad Stevanovic en 2004 a été résolu par Khoa Lu Nguyen[33]. Une généralisation en a été proposée par Barry Wolk[34].

Remark : A* is the Miquel's point
of the delta determined by
the triangle ACC' and the menelian BB'.

---

32 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

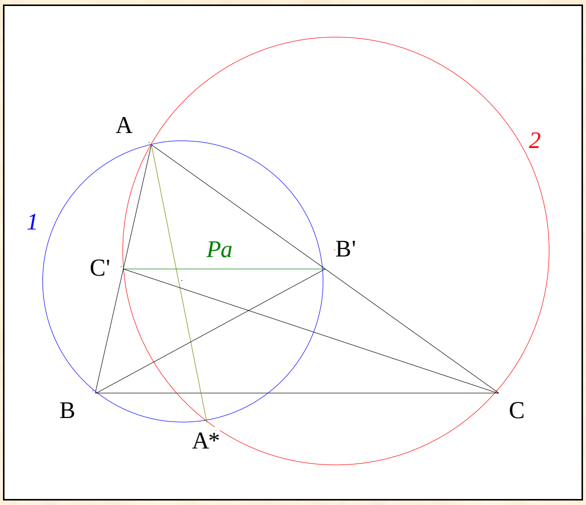
33 Nguyen K. L.., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **10905** du 22/11/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10905.

34 Wolk B., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **10931** du 06/12/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10931.

2. The first Ayme's generalization

VISION

Figure :



Traits :	ABC	a triangle,
	Pa	a parallel to BC,
	B', C'	the points of intersection of *Pa* with CA, AB resp.,
	1	the circle passing through A, B, B',
	2	the circle passing through B, C, C'
et	A*	the second point of intersection *1* and *2*.

Given : AA* is the A-symmedian of ABC. [35]

VISUALISATION

- **Conclusion :** according to **B. V. 3.**
  mutatis mutandis, we would prove that AA* is the A-symmedian of ABC.

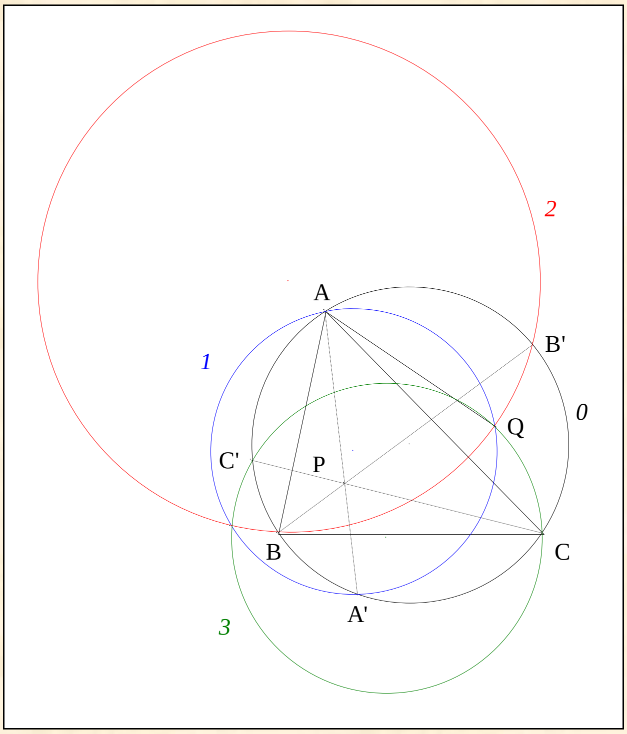
Remark : A* is the Miquel's point
of the delta determined by
the triangle ACC' and the menelian BB'.

[35] Ayme J.-L., 17/02/2006
Isogonality in a trapezium, *Mathlinks* du 19/11/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=175434

3. Le résultat de Quang Tuan Bui

VISION

Figure :

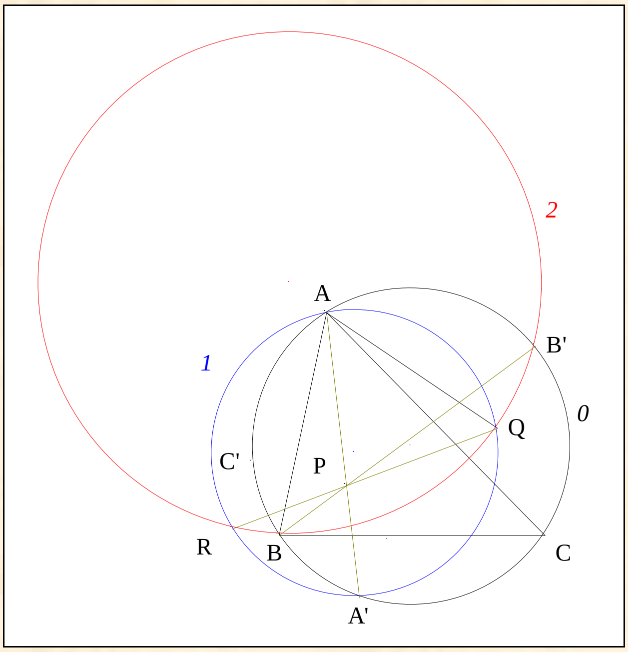


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-circumcévien de ABC,
	Q	un point
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'Q, BB'Q, CC'Q.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [36]

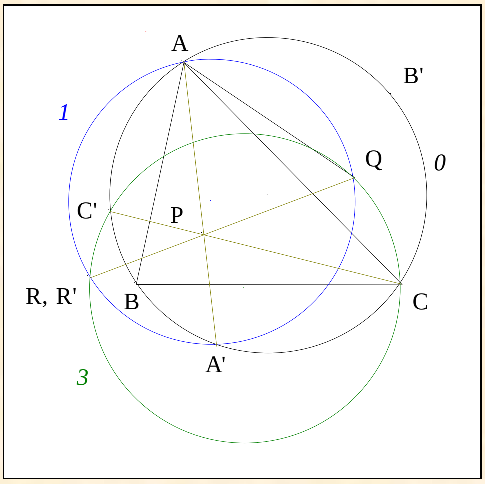
VISUALISATION

[36] Bui Q. T., Funny Conjugate, Message *Hyacinthos* # **13625** du 11/07/2006 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/13625



- Notons R le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [37] appliqué à *0*, *1* et *2*, (PQ) passe par R.



- Notons R' le second point d'intersection de *1* et *3*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [38] appliqué à *0*, *1* et *3*, (PQ) passe par R' ;
  en conséquence, R et R' sont confondus.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

---

37 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

38 idem