

THE SUPPA's CLOVER CONJECTURE

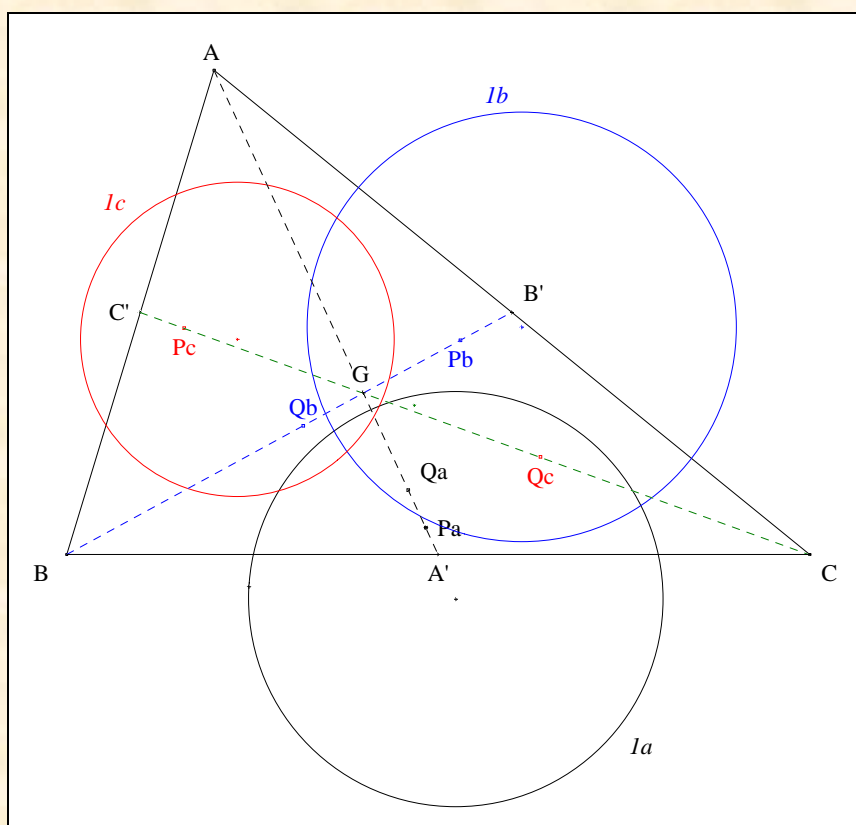
OU

LE THÉORÈME DU TRÈFLE

VAN LAMOEN * SUPPA * AYME

†

Jean - Louis AYME ¹



Résumé.

L'auteur présente une résolution synthétique d'une conjecture du géomètre italien Ercole Suppa qui apparaît comme une généralisation du cercle de van Lamoen. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements.

Ils vont tout particulièrement au professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) qui a relu et corrigé cet article ainsi que pour sa traduction en italien. Sa passion pour la Géométrie du Triangle mérite d'être remarquée par les Géomètres contemporains.

¹

St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/11/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract. The author presents a synthetically resolution of the Italian Ercole Suppa's conjecture which appears as a generalization of the van Lamoen's circle.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Aknowledgment. They go to the Professor Ercole Suppa of Teramo (Italy) who has reviewed and corrected this article as well as for his translation into Italian. His passion for the Geometry of the Triangle deserves to be noticed by the contemporary Geometers.

Sunto. L'autore presenta una risoluzione sintetica di una congettura del geometra italiano Ercole Suppa che appare come una generalizzazione del cerchio di van Lamoen.
Le figure sono tutte in posizione generale e tutti i teoremi citati possono dimostrati senteticamente.

Ringraziamenti. Essi vanno al Professor Ercole Suppa di teramo (Italia) che ha revisionato e corretto questo articolo nonché per la sua traduzione in italiano. La sua passione per la Geometria del Triangolo merita di essere notata dai Geometri contemporanei.

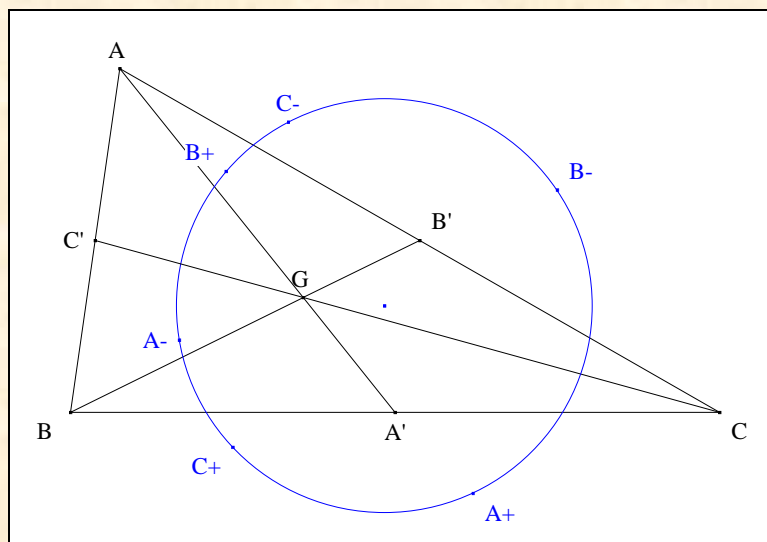
Sommaire	
A. Floor Michel van Lamoen	3
1. Le cercle de van Lamoen	
2. Une courte biographie de Floor van Lamoen	
3. Une application de l'auteur	
B. Première conjecture de Suppa	7
1. Lemme 1	
2. Lemme 2	
3. La conjecture de Suppa	
4. Une courte biographie d'Ercole Suppa	
C. Seconde conjecture de Suppa	15
1. Lemme 1	
2. Lemme 2	
3. La conjecture de Suppa	
4. Une courte biographie de Jean-Louis Ayme	
D. Annexe	26
1. Une symédiane comme axe radical	
2. Une généralisation de l'auteur	

A. FLOOR MICHEL van LAMOEN

1. Le cercle de van Lamoen

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 G le point médian de ABC,
 A'B'C' le triangle médian de ABC
 et A+, A-, B+, B-, C+, C- les centres des cercles circonscrits resp.
 aux triangles GCB', GC'B, GAC', GA'C, GBA', GB'A.

Donné : A+, A-, B+, B-, C+, C- sont cocycliques. ²

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur ³.

- Scolies :**
- (1) la figure de van Lamoen est connue, en anglais, sous "The Cevasix configuration" ; ce nom a été donné par Clark Kimberling.
 - (2) Le cercle passant par A+, A-, B+, B-, C+, C-, est "le cercle de van Lamoen de ABC"
 - (3) le centre de ce cercle est répertorié sous X₁₁₅₃ chez ETC ⁴.

² Lamoen (van) F. M., Problème **10830**, *Americam Mathematical Monthly* **107** (2000) 863 ; solution des éditeurs du *Monthly* **109**, 4 (2002) 396-397

³ Ayme J.-L., Le cercle de van Lamoen, G.G.G. vol. **2** ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

⁴ Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

2. Une courte biographie de Floor van Lamoen



5

Computer exploration is nice. Proving is even nicer ⁶

Floor Michel van Lamoen est né le 15 juillet 1966 à Leiden (Pays-Bas). Il grandit à Leeuwarden, puis quitte le Gymnasium de cette ville en 1984 pour aller étudier les sciences et la didactique à l'université d'Amsterdam. En août 1995, il enseigne l'informatique à St. Willibrord college à Goes. C'est dans cette ville qu'il rencontre Lyanne, sa future femme. Il se marie le 16 mai 1997 et devient père d'une fille, Nuriye, le 14 février 2000. Comme mathématicien, il est également rédacteur en chef du *Forum Geometricorum* ⁷, une revue internationale dans le domaine de la géométrie euclidienne classique. En avril 2009, la maison d'édition *Epsilon* publie son livre sur les cercles d'Archimède. Depuis le 11 mars 2010, il est également président d'une association au sein de la Mairie de Goes.

Sportif de haut niveau, il est un spécialiste du 5000m et du 20000m. Sa passion s'arrête en 2004 en raison d'une blessure chronique aux ischio-jambiers.

Note historique :

Floor van Lamoen de Goes (Pays-Bas) a trouvé ce résultat par ordinateur en 2000. Les nombreuses solutions analytiques réelles et complexes, aux calculs longs, menés avec *Mapple* ou *Mathematica*, n'ont pas été retenues par les rédacteurs du *Montly* ; ceux-ci ont proposés en 2002, leur propre solution qui, après analyse, est partiellement basée sur celle communiquée par van Lamoen. Notons que l'argument démonstratif principal repose sur l'hexagone de Catalan. La solution donnée par K. Y. Li en 2001 dans la revue *Mathematical Excalibur* ⁸ de Hong-Kong, a recours aux aires et aux rapports de Thalès. Darij Grinberg ⁹ dans son article intitulé "The Lamoen circle" affirme que

Der Beweis des Satzes von Lamoen ist ziemlich schwierig.

Sa démonstration trigonométrique légèrement différente de celle présentée dans *Excalibur*, utilise la notion d'angle et la loi des cosinus. En 2003, dans un message *Hyacinthos* ¹⁰, il affirme avoir redécouvert sans le savoir, ce résultat en août 2002, à l'aide d'un logiciel de Géométrie.

⁵ <http://home.wxs.nl/~lamoen/>

⁶ Floor's apothegm. Antreas Hatzipolakis ajoute : synthetic proving is the ultimate...

⁷ <http://forumgeom.fau.edu/>

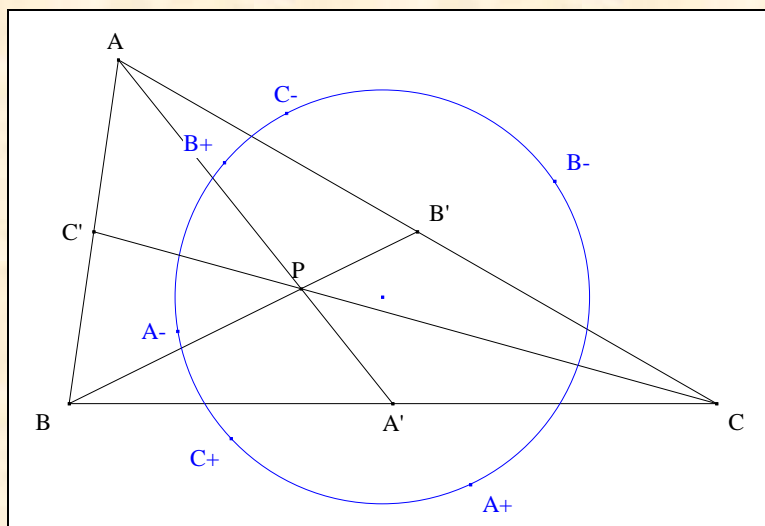
⁸ Li K. Y., Conclyclic problems, *Mathematical Excalibur* **6** (2001) Number 1, 1-2 ; available at http://www.math.ust.hk/mathematical_excalibur/

⁹ Grinberg D., The Lamoen circle ; <http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/>

¹⁰ Grinberg D., A proof of the Lamoen Circle Theorem, Message *Hyacinthos* # **6557** du 17/02/2003 ; <https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6557>

En 2005, Deoclecio Gouveia Mota Jr.¹¹ a proposé une preuve basée sur les transformations. En lui répondant, Nikolaos Dergiades¹² précise que cette preuve permet de situer le centre du cercle de Lamoen.

Une première réciproque a été envisagée en 2003 par Alexei Myakishev et de Peter Y. Woo¹³. La seconde ci-après a été présentée en 2004 par Minh Ha Nguyen¹⁴ :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC
et A+, A-, B+, B-, C+, C- les centres des cercles circonscrits resp.
aux triangles PCB', PC'B, PAC', PA'C, PBA', PB'A.

Donné : P est le point médian ou bien l'orthocentre de ABC
si, et seulement si,
A+, A-, B+, B-, C+, C- sont cocycliques.

¹¹ Gouveia Mota Jr. D., Lamoen Circle – Synthetic proof, Message *Hyacinthos* # **11095** du 14/03/2005 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/11095>

¹² Dergiades N., Lamoen Circle – Synthetic proof, Message *Hyacinthos* # **11097** du 14/03/2005 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/11097>

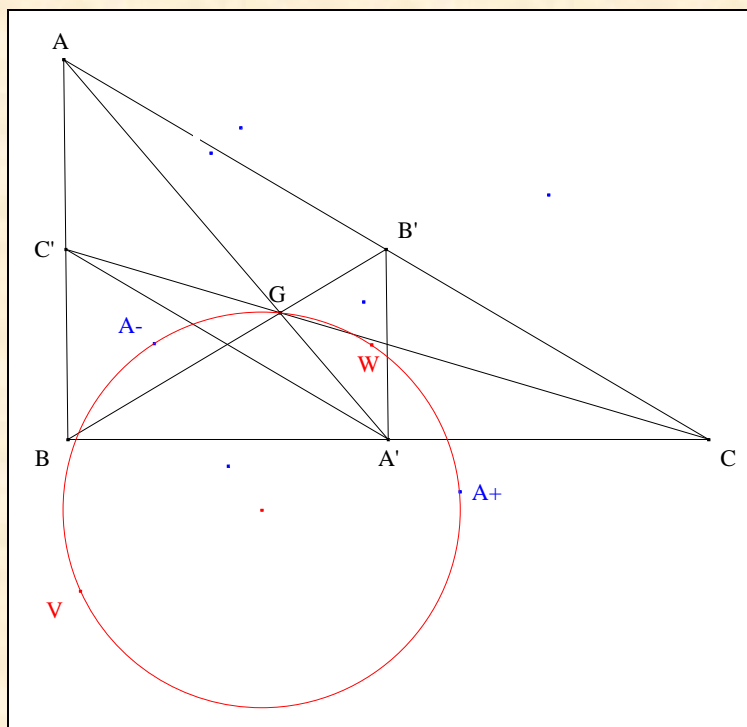
¹³ Myakishev A., Woo P. Y., On the Circumcenters of Cevian Configuration, *Forum Geometricorum* vol. **3** (2003) 57-63 ;
<http://forumgeom.fau.edu/>

¹⁴ Nguyen M. H., Another Proof of van Lamoen's Theorem and its converse, *Forum Geometricorum* vol. **5** (2005) 127-132 ;
<http://forumgeom.fau.edu/>

3. Une application de l'auteur

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 G le point médian de ABC,
 A'B'C' le triangle médian de ABC,
 et A+, A-, V, W les centres des cercles circonscrits
 resp. aux triangles GCB', GBC', GA'C', GB'A'.

Donné : A+, A-, V et W sont cocycliques.¹⁵

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur¹⁶.
 Cette preuve a sensibilisé le géomètre italien Ercole Suppa¹⁷ de Teramo qui a entrevue une agréable généralisation du cercle de van Lamoen.

¹⁵ Geometry Proof, AoPS du 02/12/2015 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1169266p5604260>
 Please prove this, AoPS du 23/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1294617_please_prove_this
 Quatre points cocycliques, *Les-Mathematiques.net* ;
<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1316177>
¹⁶ Ayme J.-L., Cinq points cocycliques, G.G.G. vol. 29 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
¹⁷ Suppa E., Four concyclic centers ; http://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Four_concyclic_centers.pdf

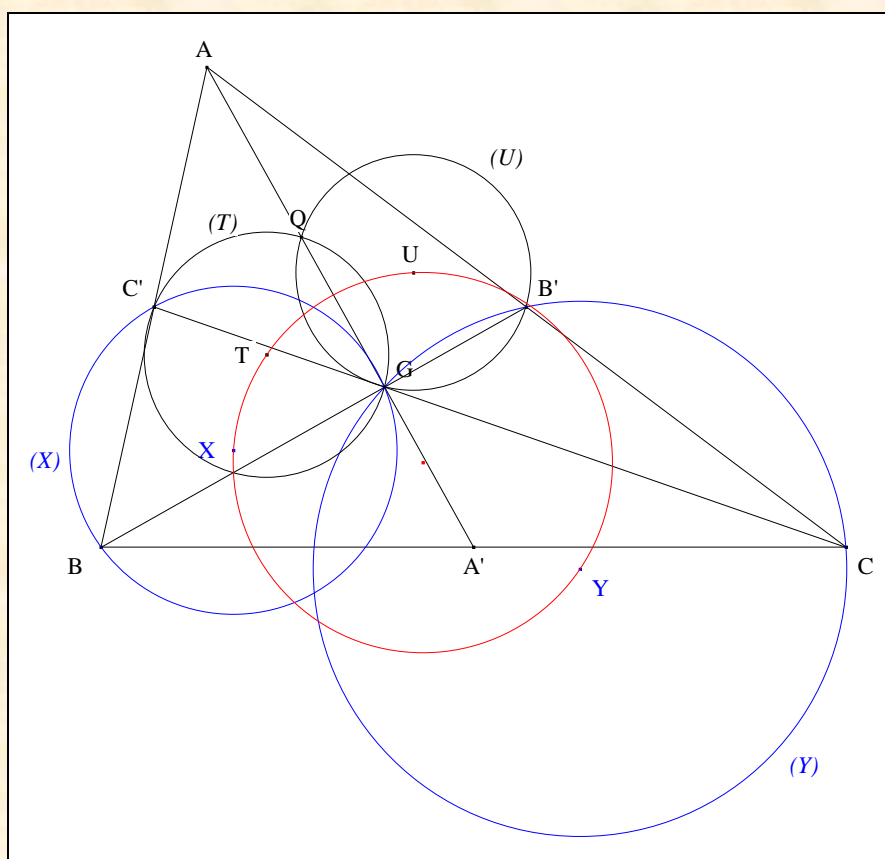
B. PREMIÈRE CONJECTURE DE SUPPA

RELACHEMENT DE LA CONTRAINTE SUR A

1. Lemme 1

VISION

Figure :

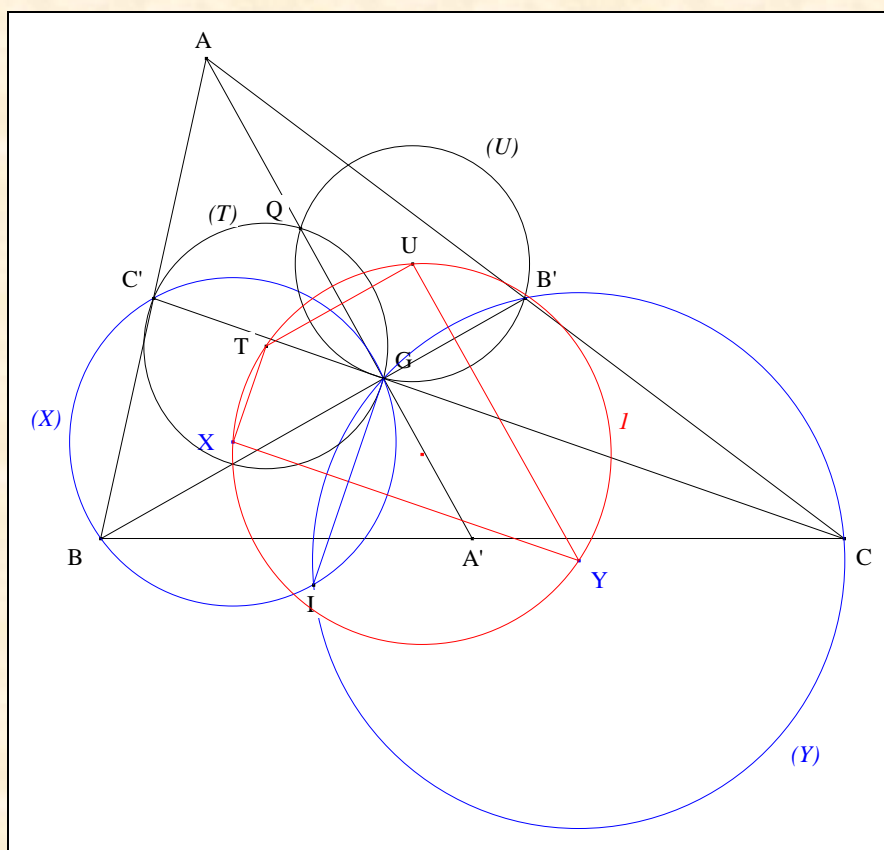


Traits : ABC un triangle,
 G le point médian de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC ,
 Q un point de (AA')
 et $(T), (U), (X), (Y)$ les cercles circonscrits resp. aux triangles GQC', GQB', GBC', GCB' .

Donné : T, U, X et Y sont cocycliques.¹⁸

¹⁸ Suppa E., communication privée du 9/10/2016

VISUALISATION

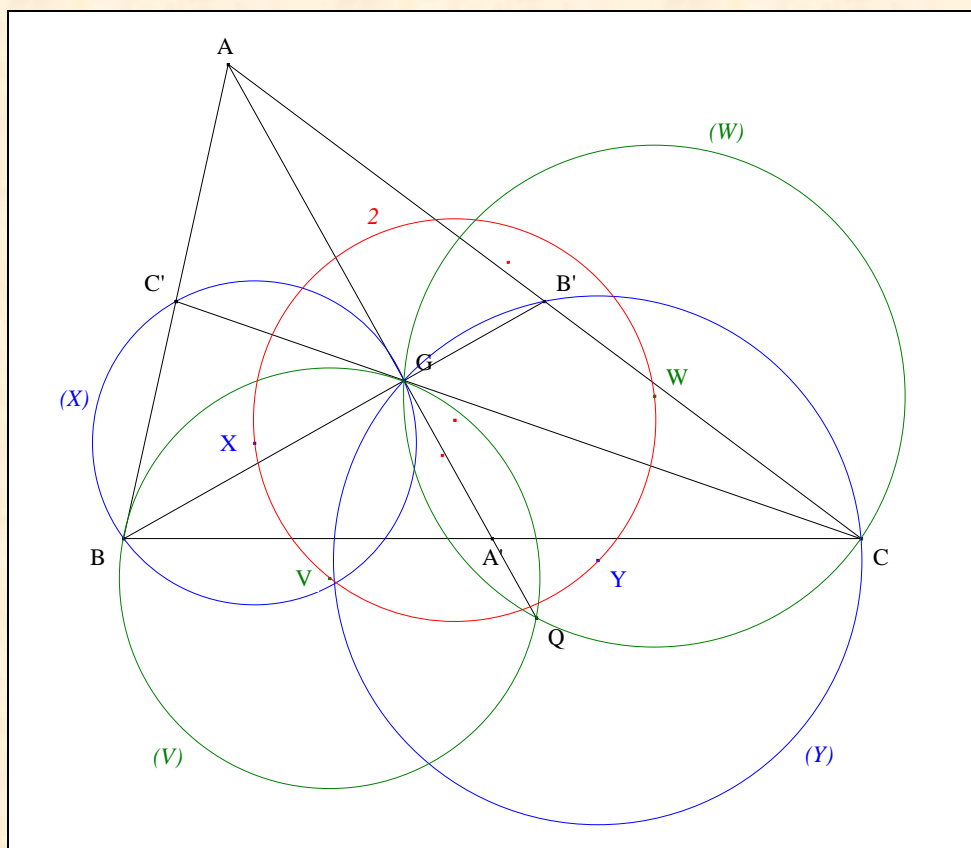


- Notons I le second point d'intersection de (X) et (Y).
- D'après l'auteur (Cf. **D.** Annexe **2.**), (GI) est la G-symédiane du triangle GBC.
- Une chasse angulaire à Π près :
 - * par "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle XTU = \angle AGC'$
 - * par "Angles opposés", $\angle AGC' = \angle A'GC$
 - * par isogonalité, $\angle A'GC = \angle BGI$
 - * par "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle BGI = \angle UYX$
 - * par transitivité de $=$, $\angle XTU = \angle UYX$.
- **Conclusion :** T, U, X et Y sont cocycliques.
- Notons I ce cercle.

2. Lemme 2

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 G le point médian de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC ,
 Q un point de (AA')
 et $(X), (Y), (V), (W)$ les cercles circonscrits resp. aux triangles GBC', GCB', GQB, GQC .

Donné : X, Y, V et W sont cocycliques.¹⁹

VISUALISATION

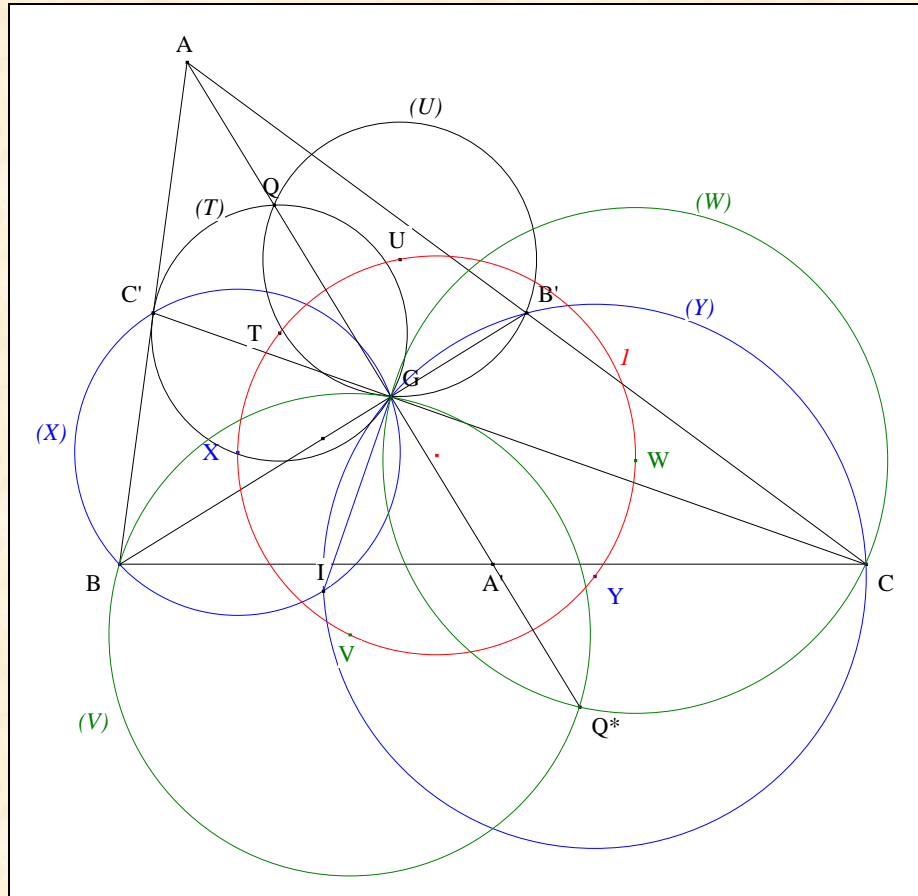
- Mutatis mutandis, nous montrerions que X, Y, V et W sont cocycliques
- Notons 2 ce cercle.

¹⁹ Suppa E., communication privée du 9/10/2016

3. La conjecture de Suppa

VISION

Figure :



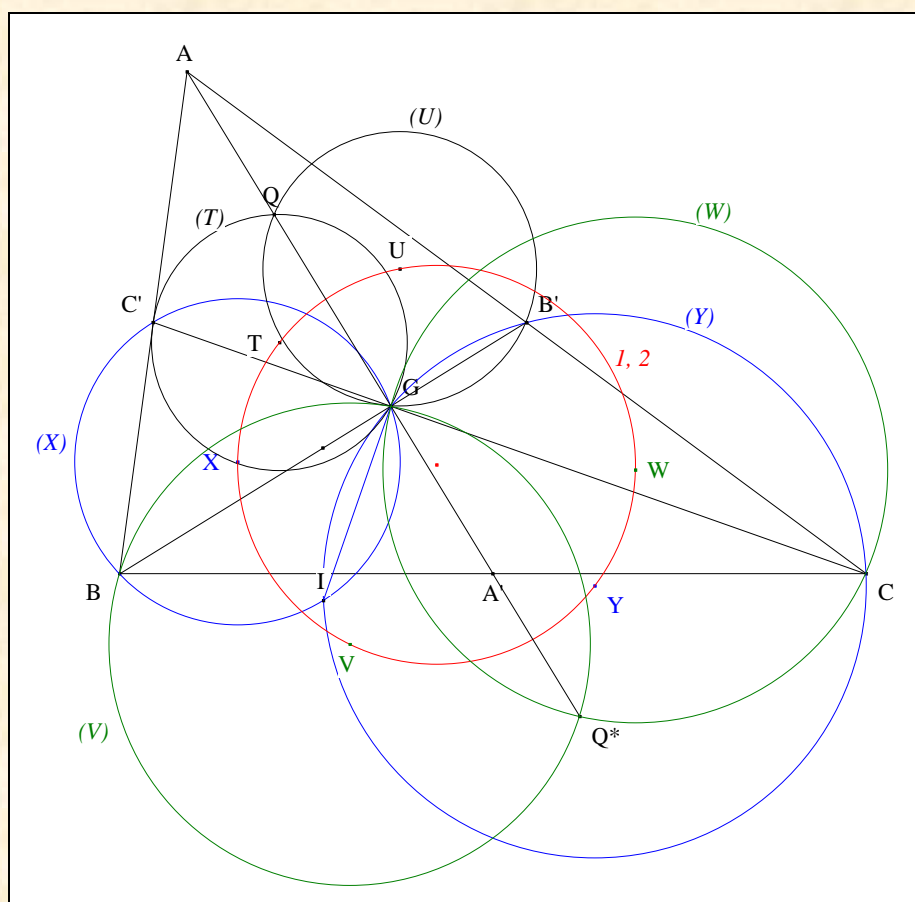
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons,
et Q^* l'isotome de A par rapport à $[A'Q]$
 $(V), (W)$ les cercles circonscrits resp. aux triangles GQ^*B, GQ^*C .

Donné : V et W sont sur I .²⁰

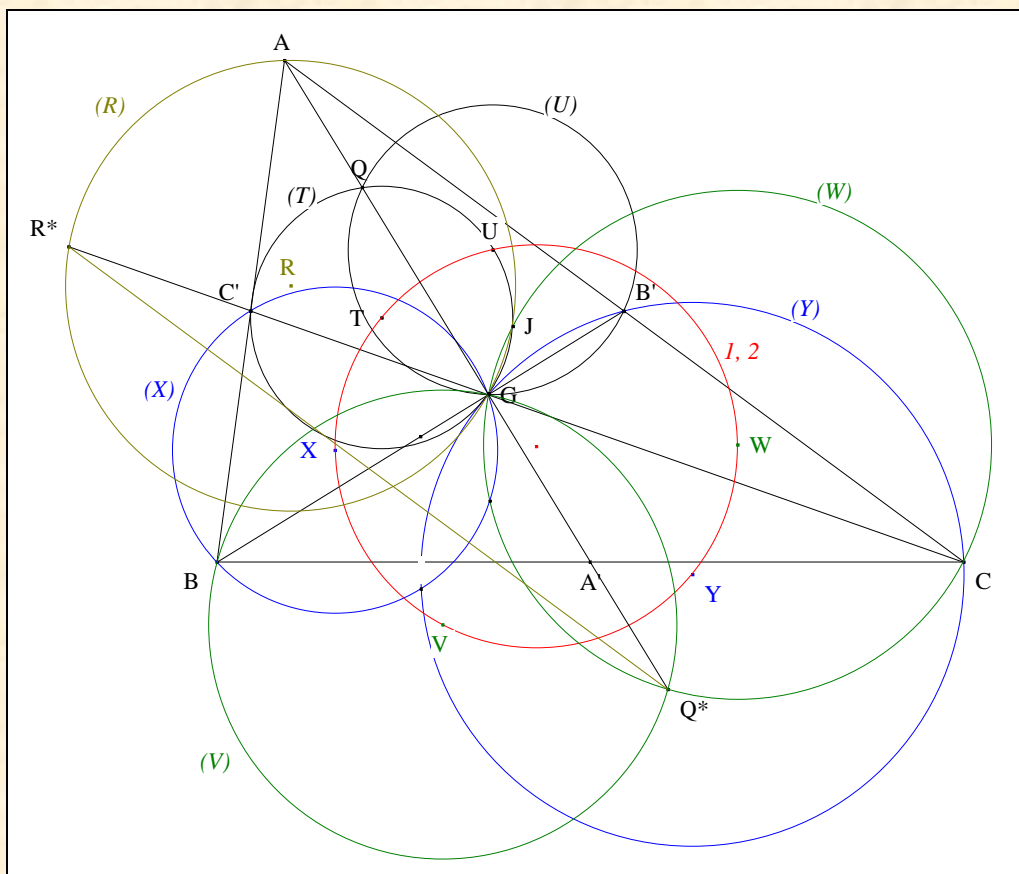
VISUALISATION

²⁰

Suppa E., communication privée du 19/10/2016



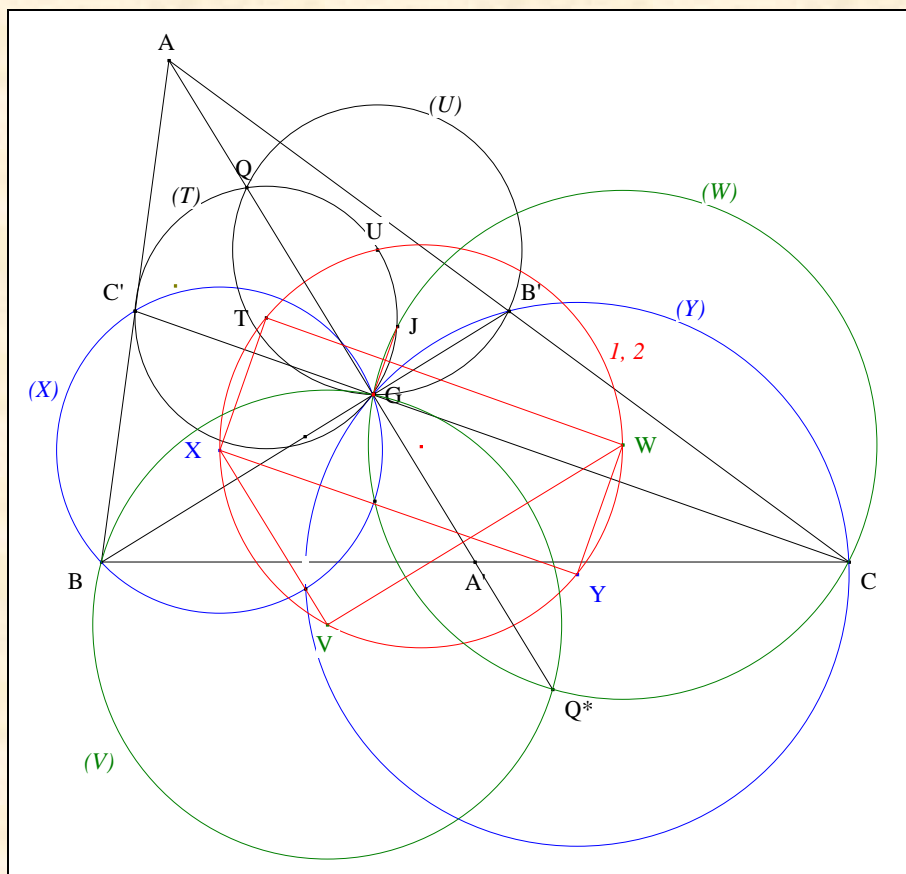
- D'après **B. 1**, X, Y, T et U sont cocycliques sur 1 .
- D'après **B. 2**, X, Y, V et W sont cocycliques sur 2 .



- Notons R^* le point d'intersection de la parallèle à (AC) issue de Q^* avec (CC') ,
 et (R) le cercle circonscrit au triangle GR^*A
 et J le second point d'intersection de (R) et (W) .
- D'après l'auteur (Cf. **D. Annexe 2.**), (GJ) est la G-symédiane du triangle GAC.
- **Scolies :**
 - (1) $AQ = A'Q^*$
 - (2) $QQ^* = AA'$
 - (3) $(A'C') \parallel (AC)$.
- Notons $P_R(Q)$ la puissance de Q par rapport à (R).
- Une chasse de rapport de puissance :

*	$P_R(Q) / P_W(Q) = (QG.QA) / (QG.QQ^*)$	$= QA / QQ^*$	$= A'Q^* / A'A$
*	$P_R(C') / P_W(C') = (C'G.C'R^*) / (C'G.C'C)$		$= C'R^* / C'C$
*	d'après Thalès "Rapports",	$A'Q^* / A'A$	$= C'R^* / C'C$
*	en conséquence,	$P_R(Q) / P_W(Q)$	$= P_R(C') / P_W(C')$. ²¹
- **Conclusion partielle :** (T) passant par G, (T) passe par J.

²¹ Coolidge, J.L., *A Treatise on the Geometry of the Circle and the Sphere*, theorem **11**, p. 103, Cambridge, 1914
 Altshiller-Court N., *College Geometry*, theorem **475**, p. 212-213, Barnes & Noble, Richmond, 1936



- Une chasse angulaire à Π près :

*	X, Y, V et W sont sur 2,	$\angle WYX = \angle WVX$
*	par "Angles à côtés perpendiculaires",	$\angle WVX = \angle B'GA$
*	par isogonalité,	$\angle B'GA = \angle CGJ$
*	par "Angles à côtés perpendiculaires",	$\angle CGJ = \angle TWY$
*	par Angles à côtés parallèles,	$\angle TWY = \angle XTW$
*	par transitivité de =,	$\angle WYX = \angle XTW$

- **Conclusion partielle :**

T est sur 2.

- **Conclusion :** V et W sont sur 1.

Scolie : 1 est une faible A-généralisation du cercle de van Lamoën relativement à ABC.

4. Une courte biographie d'Ercole Suppa



Ercole Suppa was born February 25, 1958 in Teramo (Italy). He graduated in Mathematics in 1981 at the University of Aquila. Taught applied mathematics in a I.T.C. for programmers. He is currently a mathematics and physics teacher at the high school A.Einstein of Teramo. Since 1997 he has dedicated himself to the preparation of young participants in the Math Olympiads and has developed along with his wife, also a professor of mathematics, a website entirely dedicated to math competitions ²².

In 2001 he published the book *The geometrical problem from compass to Cabri* ²³ in collaboration with his colleague and friend Italo D'Ignazio who transmitted him a great passion for synthetic geometry.

Enthusiast of problem solving, sent numerous several solutions to geometric problems to various magazines and has set up a website devoted to elementary geometry ²⁴.

²² <http://www.rotupitti.it>

²³ D'Ignazio I, Suppa E., *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri*, Interlinea Editrice, Teramos, 2001 ; ISBN 88-85426-16-1

²⁴ <http://www.esuppa.it>

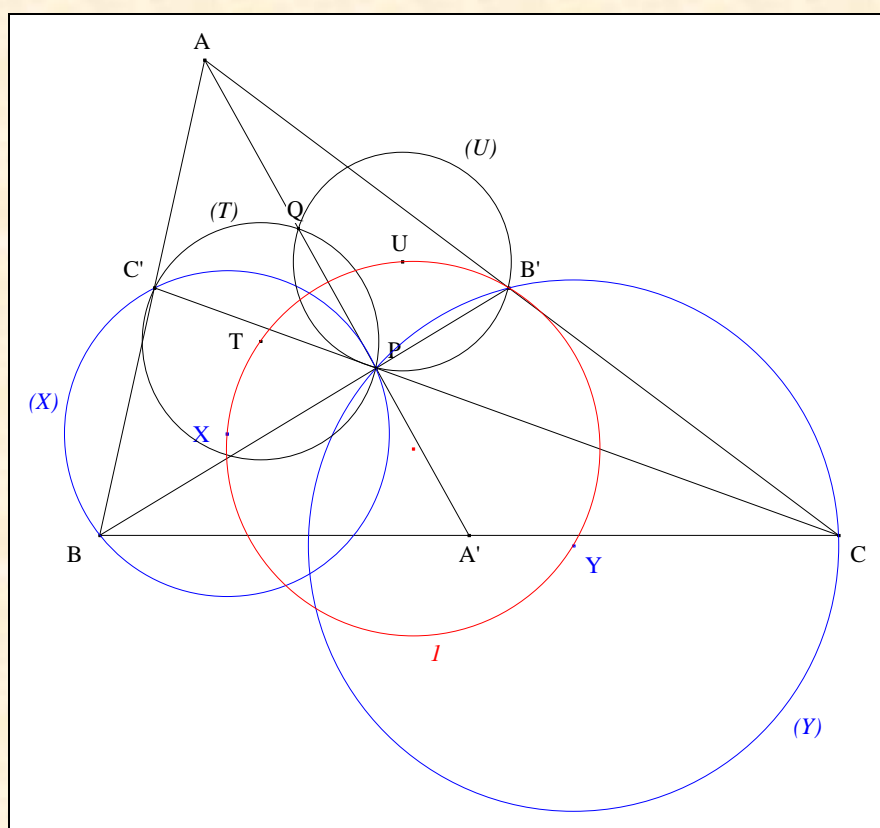
C. SECONDE CONJECTURE DE SUPPA

RELACHEMENT DE LA CONTRAINTE SUR G

1. Premier lemme

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 A' le milieu de [BC],
 P un point de (AA'),
 B', C' les points d'intersection resp. de (PB) et (AC), (PC) et (AB),
 Q un point de (AA')
 et (T), (U), (X), (Y) les cercles circonscrits resp. aux triangles PQC', PQB', PBC', PCB'.

Donné : T, U, X et Y sont cocycliques.

Commentaire : la preuve synthétique se calque sur celle de **B. 1.**

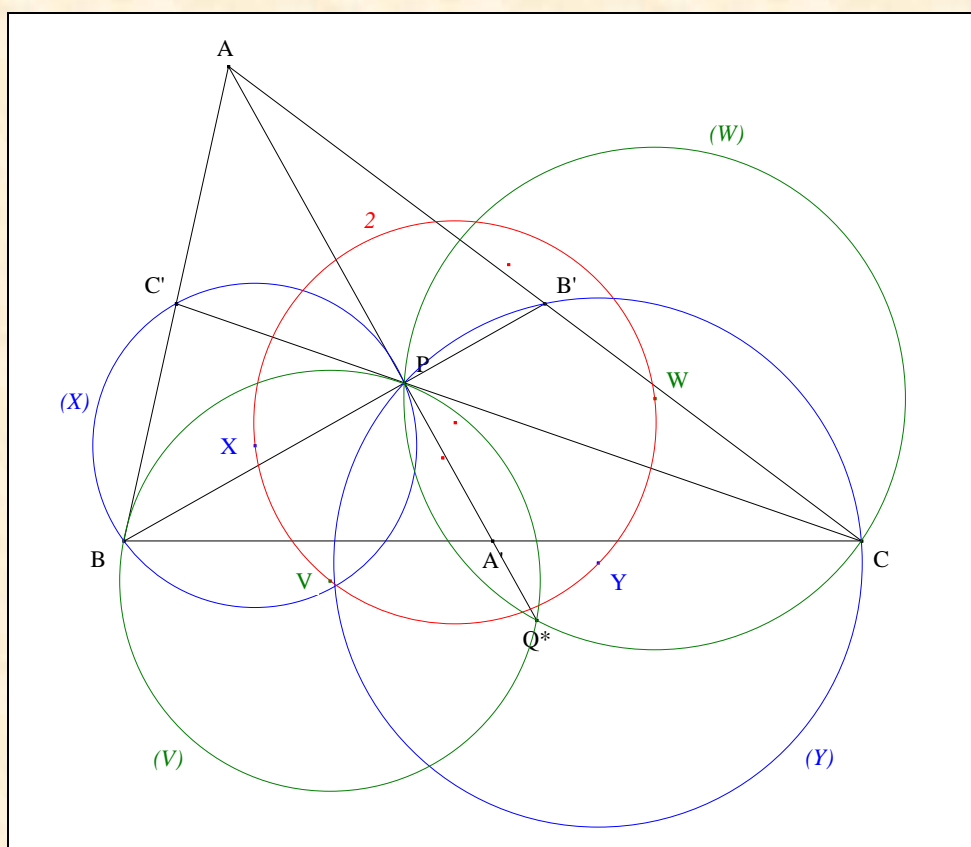
Une preuve synthétique différente en a été donnée le 09 octobre 2016 par Ercole Suppa.²⁵

Scolie : notons I ce cercle.

2. Second lemme

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 A' le milieu de $[BC]$,
 P un point de (AA') ,
 B', C' les points d'intersection resp. de (PB) et (AC) , (PC) et (AB) ,
 Q^* un point de (AA') ,
 et $(X), (Y), (V), (W)$ les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC', PCB', PQ^*B, PQ^*C .

Donné : X, Y, V et W sont cocycliques.

Commentaire : la preuve synthétique se calque sur celle de **B. 2.**

²⁵

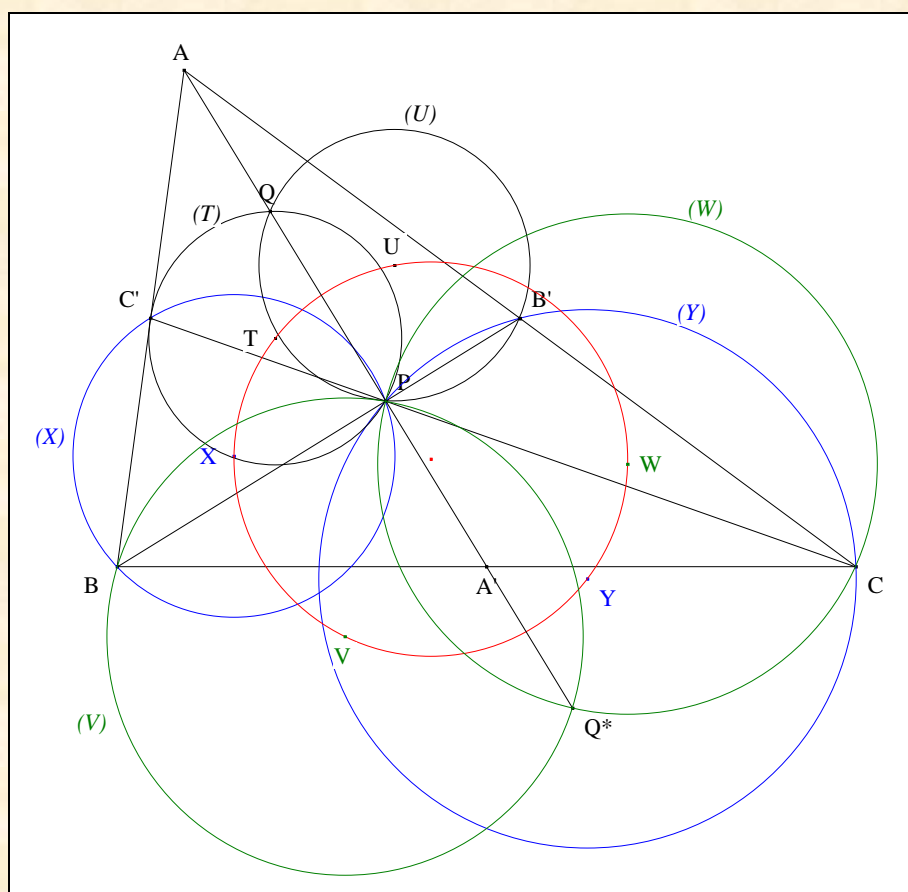
Suppa E., Four concyclic centers ; http://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Four_concyclic_centers.pdf

Scolie : notons 2 ce cercle.

3. La conjecture de Suppa

VISION

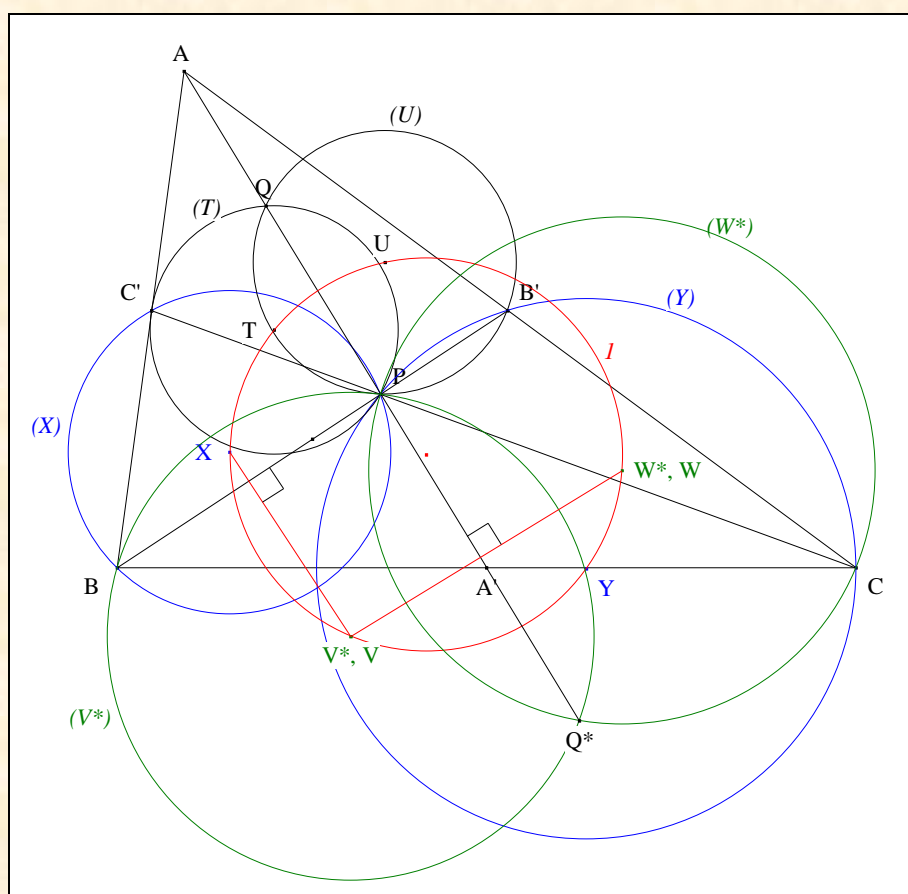
Figure :



Traits :	ABC A' P B', C' Q Q* et (T), (U), (X), (Y), (V), (W)	un triangle, le milieu de [BC], un point de (AA'), les points d'intersection resp. de (PB) et (AC), (PC) et (AB), un point de (AA'), un second point de (AA') distinct de Q les cercles circonscrits resp. aux triangles PQC', PQB', PBC', PCB', PQ*B, PQ*C.
-----------------	--	---

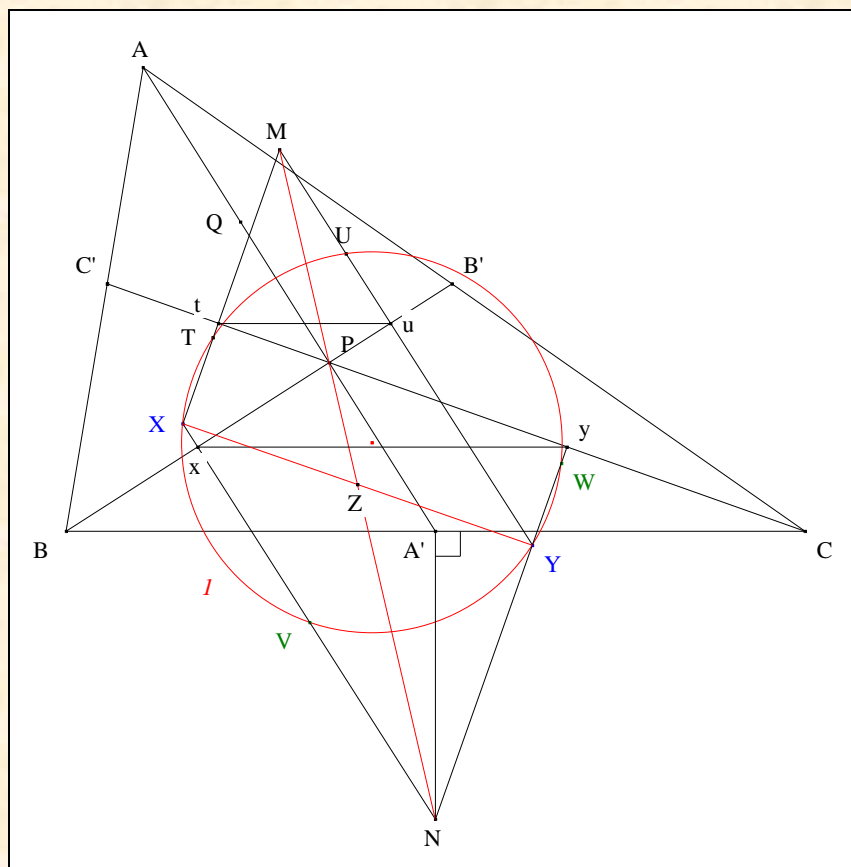
Donné : position de Q* pour que T, U, X, Y, V et W soient cocycliques.

VISUALISATION DE L'AUTEUR



- D'après **C. 1**, T, U, X et Y sont cocycliques sur I .
 - Notons

V^*	le second point d'intersection de la perpendiculaire à (PB) issue de X avec I ,
W^*	le second point d'intersection de la perpendiculaire à (PA') issue de V^* avec I ,
(V^*)	le cercle de centre V^* passant par P
et (W^*)	le cercle de centre W^* passant par P .
 - **Conclusion partielle :** (V^*) et (W^*) se coupent en un second point Q^* sur (PA') .
 - **Scolies :**
 - (1) V^* et V sont confondus
 - (2) W^* et W sont confondus.
- Commentaire :** nous devons rechercher la position de Q^* .



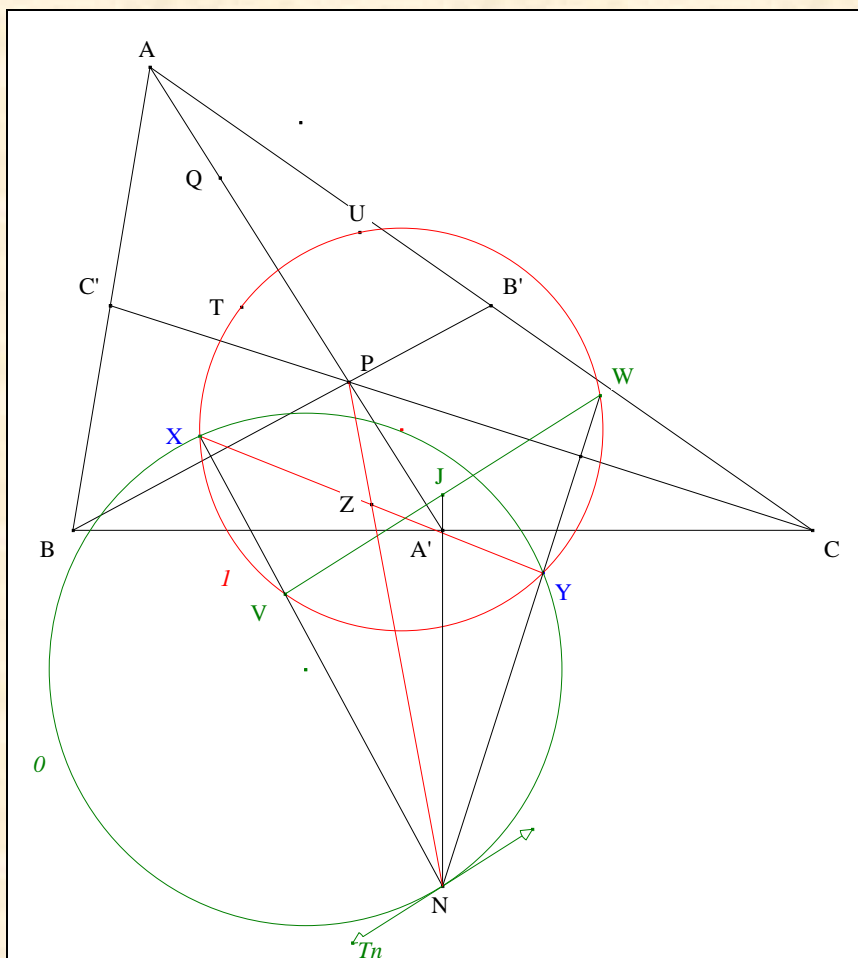
- Notons M, N les points d'intersection resp. de (XT) et (YU) , (XV) et (YW) ,
 et x, y, t, u les milieux resp. de $[PB]$, $[PC]$, $[PC']$, $[PB']$
 Z le point d'intersection de (XY) et (PN) .
- D'après Desargues "Le petit théorème" ²⁶
 appliqué aux triangles homothétiques Mtu et Nyx , M, P et N sont alignés.
- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, Z est sur (MN) .
- Le quadrilatère $MXNY$ étant un parallélogramme, Z est le milieu de $[XY]$.
- N étant le centre du cercle circonscrit au triangle PBC , $(NA') \perp (BC)$.
- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" ²⁷, (NA') est la N -symédiane du triangle NXY .

²⁶

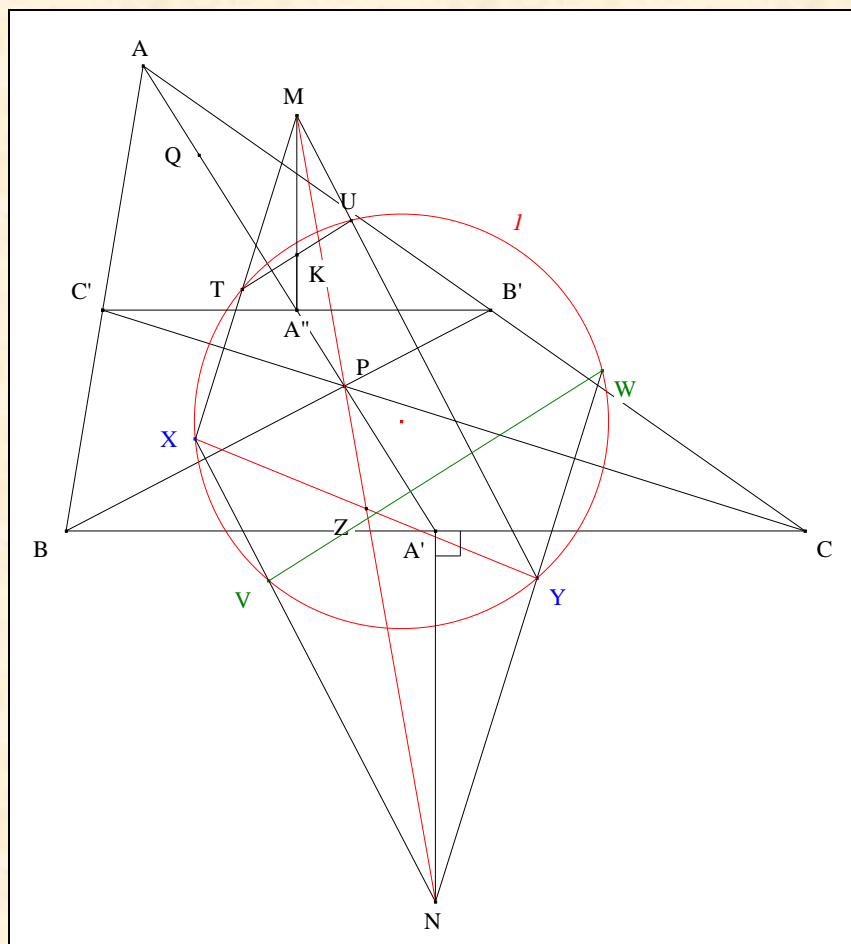
Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus..., G.G.G. vol. 6, p. 40-44 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

²⁷

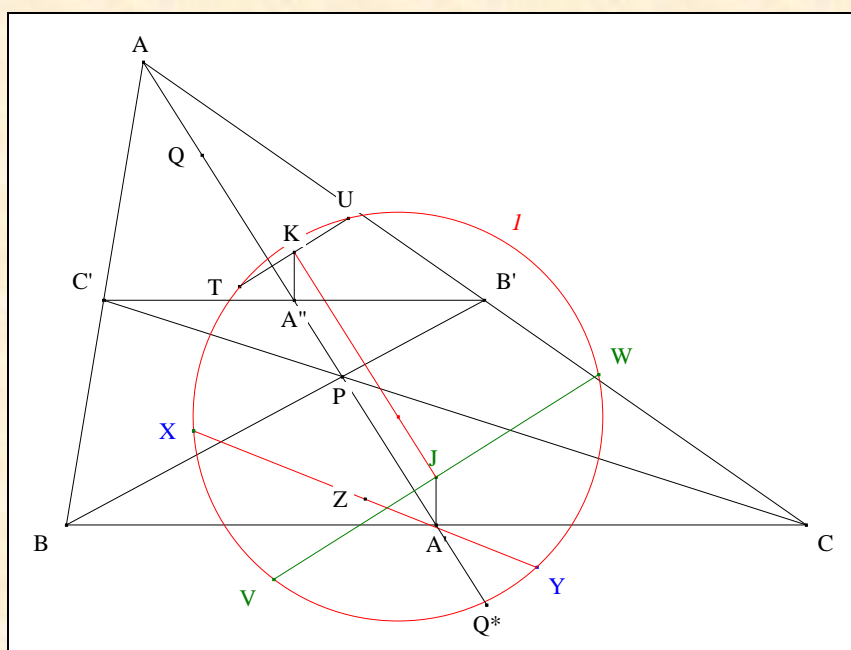
Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-?



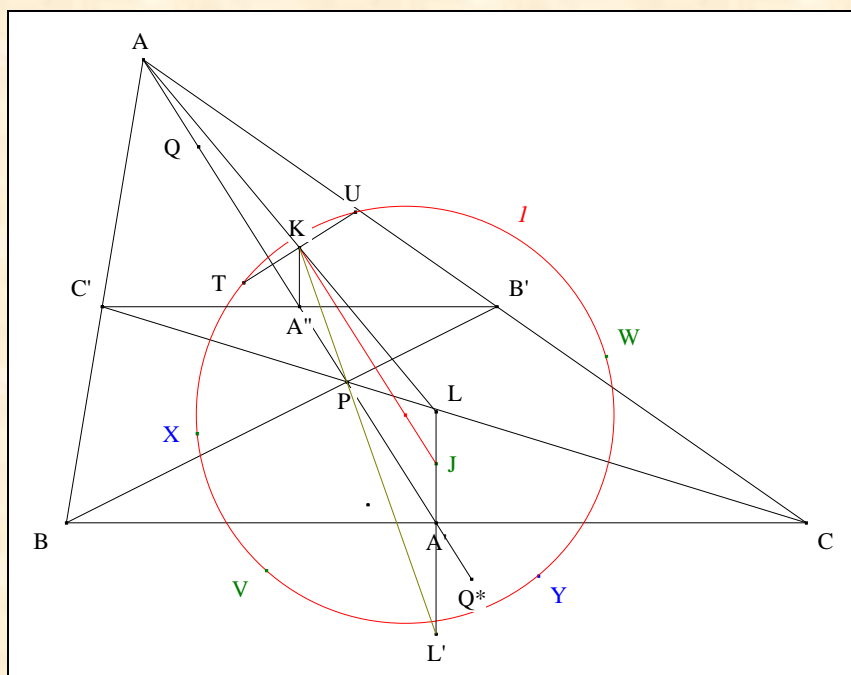
- Notons J le milieu de $[VW]$
 O le cercle circonscrit au triangle XYZ
 et Tn la tangente à O en N .
- Les cercles O et I , les points de base X et Y , les moniennes (NXV) et (NYW) , conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que $Tn \parallel (VW)$.
- **Conclusion partielle :** (NA') passe par J .



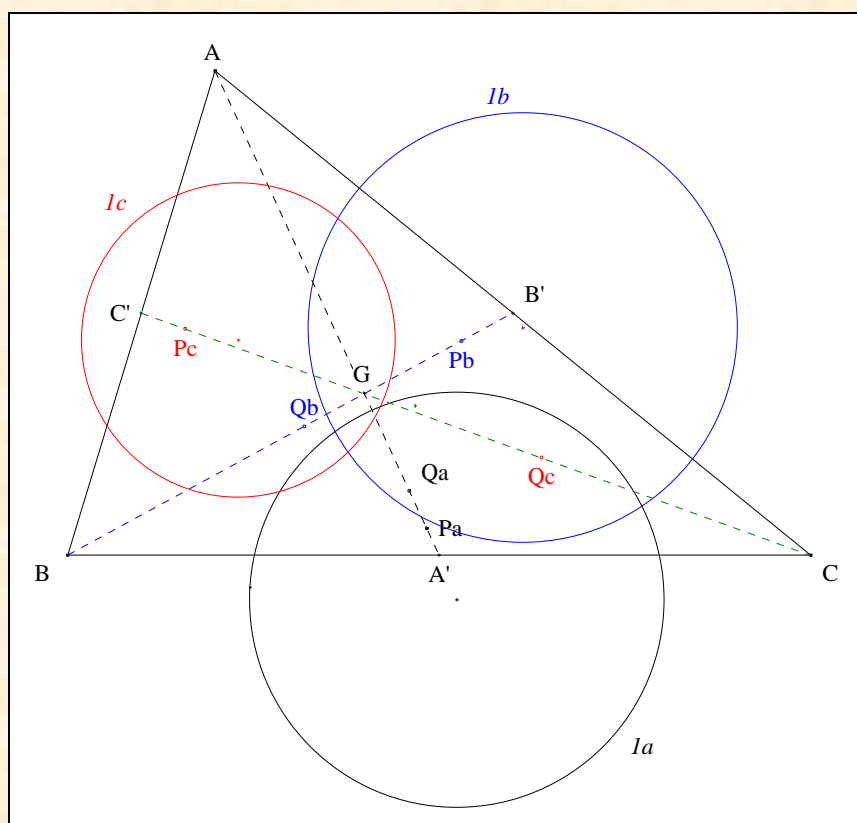
- Notons A'', K les milieux resp. de $[B'C']$, $[TU]$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - (1) $(MA'') \perp (B'C')$
 - (2) (MA'') est la M-symédiane du triangle MXU
 - (3) K est sur (MA'') .



- **Scolie :** (JK) // (AP).
- **Conclusion partielle :** $QQ^* = 2.JK.$

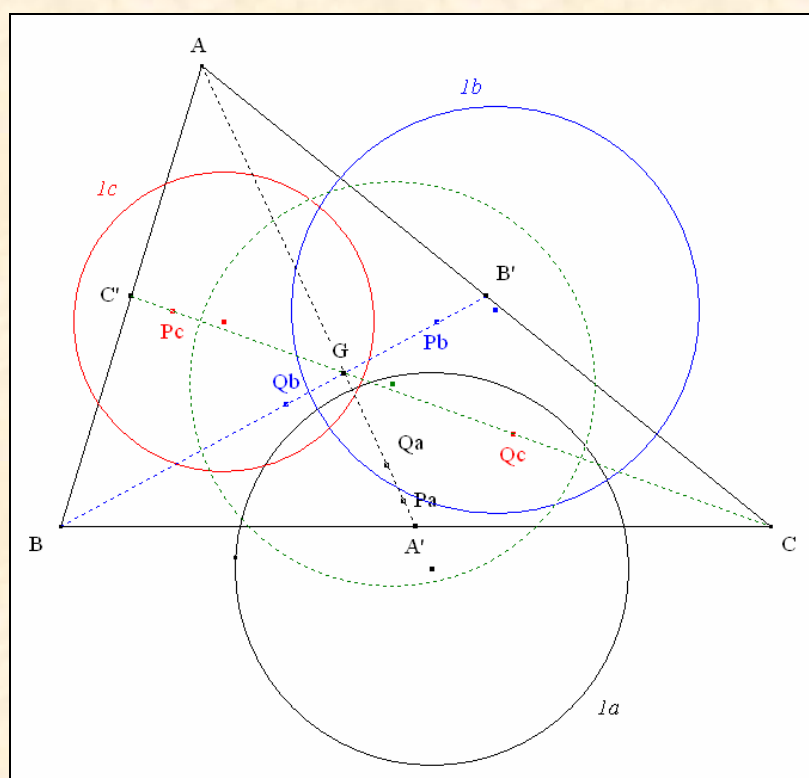


- Notons L, L' les points d'intersection de $(A'J)$ resp. avec $(AK), (KP)$.
- Une première chasse de rapports :
 - * les triangles $AA''K$ et $AA'L$ étant semblables, $AA''/A'L = AA''/AA'$
 - * les triangles $AB'C'$ et ABC étant semblables, $AA''/AA' = B'C'/BC$
 - * les triangles $PB'C'$ et PBC étant semblables, $B'C'/BC = PA''/PA'$
 - * les triangles $PA''K$ et $PA'L$ étant semblables, $PA''/PA' = A''K/A'L$
 - * par transitivité de $=$, $A''K/A'L = A''K/A'L'$
 - * en conséquence, $A'L = A'L'$ i.e. A' est le milieu de $[LL']$.



P devient Pa et Q devient Qa

(5) vision particulière



lorsque Pa, Pb, Pc sont en G et que Qa, Qb, Qc sont resp. en A, B, C,

les cercles $1a$, $1b$ et $1c$ se confondent avec le cercle de van Lamoën.

Terminologie :

l'auteur a associé à cette vision triangulaire l'image d'un trèfle.
Ainsi la conjecture d'Ercole Suppa est devenu "le théorème du trèfle" ou en anglais "the Suppa's clover theorem".

4. Une courte biographie de Jean-Louis Ayme



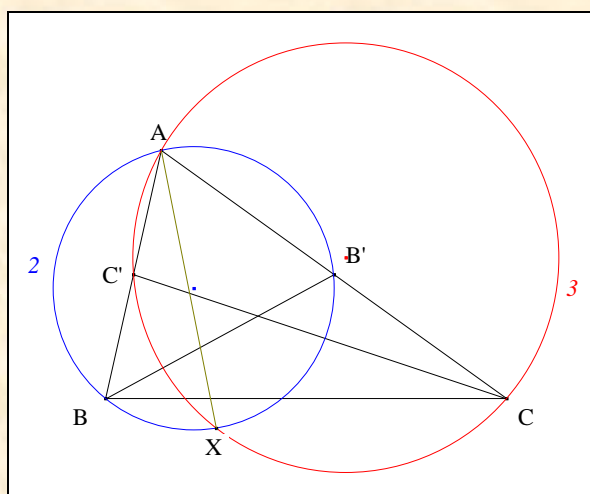
Jean-Louis Ayme, Docteur-Agrégé de Mathématiques, a suivi toute sa scolarité en Allemagne, puis en France. Après avoir été élève du Prytanée national militaire de La Flèche (Sarthe, France) où René Descartes séjourna de 1607 à 1614, puis de l'Ecole des officiers de l'armée de l'Air de Salon-de-Provence, il rejoint la faculté des Sciences de Marseille avant de devenir professeur de Mathématiques.

Il enseigne alors en France, puis l'étranger i.e. en Tunisie, Afghanistan, Maroc, Afrique-du-Sud, Canada et, enfin, à l'île de la Réunion située dans l'océan indien.

Sa passion pour la Géométrie lui a permis de publier un livre intitulé *Méthodes et Techniques en Géométrie*²⁸ ainsi que de diriger le site *Geometry * Géométrie * Geometria*²⁹.

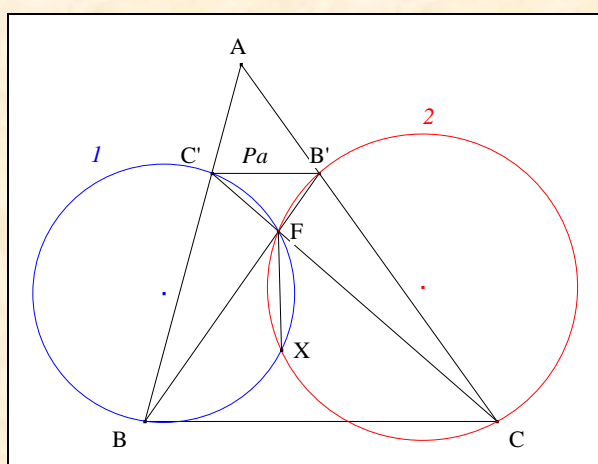
²⁸ Ayme J.-L., *Méthodes et Techniques en Géométrie, A propos de la Droite de Newton*, Ellipses, Paris, 2003 ; ISBN 2-7298-1585-6
²⁹ <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

D. ANNEXE

1. Une symédiane comme axe radical ³⁰

Traits : ABC un triangle,
 B', C' les milieux resp. de [CA], [AB],
 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles ABB', BCC'
 et X le second points d'intersection de 1 et 2.

Donné : (AX) est la A-symédiane de ABC.

2. Une généralisation de l'auteur ³¹

Traits : ABC un triangle,
 Pa une A-parallélienne de ABC,
 B', C' les points d'intersection de Pa resp. avec (CA), (AB),
 F le point d'intersection de (BB') et (CC'),
 1, 2 les cercles circonscrits des triangles BFC', CFB'
 et X le second points d'intersection de 1 et 2.

Donné : (FX) est la F-symédiane de FBC.

³⁰ Stevanovic M., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # 10904 du 20/11/2004 ;
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10904>

³¹ Ayme J.-L., 17/02/2006