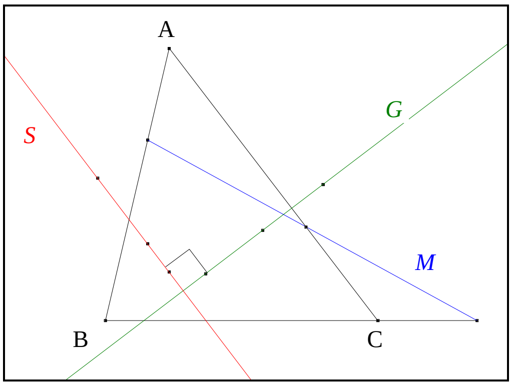
LA DROITE DE GAUSS

ET

LA DROITE DE STEINER

Jean-Louis AYME



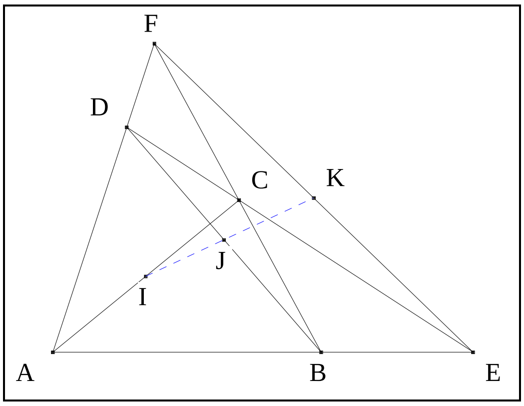
Résumé. Nous présentons une preuve synthétique concernant la perpendicularité des droites de Gauss *G* et de Steiner *S* d'un delta déterminé par un triangle ABC et d'une ménélienne *M*.
Les théorèmes cités en annexe peuvent être tous démontrés synthétiquement.

I. LA DROITE DE GAUSS (1777- 1855) [1]

VISION

Figure :

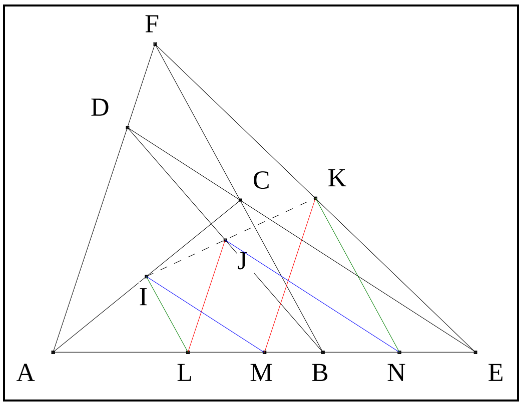
[1] Gauss K. F., *Monatscorrespond.* 22 (1810) 115.



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	E	un point de (AB),
	F	le point d'intersection de (AD) et (BC),
et	I, J, K	les milieux resp. de [AC], [BD], [EF].

Donné : C, D et E sont alignés *si, et seulement si*, I, J et K sont alignés.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [2]



- Notons L, M, N les milieux resp. de [AB], [AE], [BN].

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliquée au triangle ABC: (IL) // (BC) ;
  appliquée au triangle BEF: (BCF) // (NK) ;
  par transitivité de la relation //, (IL) // (NK).

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliquée au triangle ABD: (LJ) // (AD) ;
  appliquée au triangle AEF: (ADF) // (MK) ;
  par transitivité de la relation //, (LJ) // (MK).

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliquée au triangle AEC: (MI) // (EC) ;
  appliquée au triangle BED: (ECD) // (NJ) ;
  par transitivité de la relation //, (MI) // (NJ).

- **Conclusion :** d'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 1), I, J et K sont alignés.

Scolies : **(1)** la droite (IJK) est la gaussienne du delta déterminé par ABF et (ECD);

---

2 C'est le résultat de Gauss.

elle est appelée droite de Gauss en Allemagne, en Espagne et en Russie

(2) Suite à l'initiative de Steiner, la droite de Gauss est appelée en France, droite de Newton car celui-ci a su donner un sens géométrique à tous les points de cette droite

(3) Bérard O.[3] attire l'attention des géomètres sur le fait que ce résultat est le dual de celui de L'Huilier.

Commentaires :

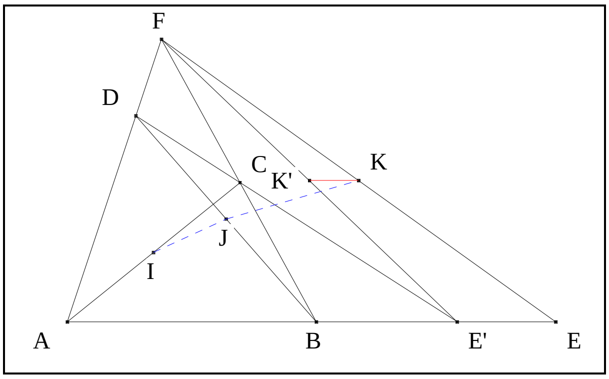
(1) cette visualisation utilise "La droite des milieux" comme lemme ce qui la rend plus fluide.

(2) L'auteur a écrit au sujet de la ponctuelle de Gauss, un livre[4] présentant trente techniques de démonstrations différentes au travers des cinq grandes méthodes de la Géométrie.

(3) La ponctuelle de Gauss est la première droite a avoir été mise en évidence dans un quadrilatère complet.

Note historique : Le célèbre historien Mackay[5] signale que ce résultat est de J. T. Connor[6].
Ce résultat apparaît aussi comme une particularisation d'une proposition de Newton[7] qu'il avait établi avant 1666 alors qu'il n'avait pas encore 24 ans. C'est dans la proposition XXVII qu'il utilise le fait que les centres des coniques tangentes à quatre droites appartiennent à une droite, la droite de Newton, passant par les milieux des trois diagonales.
Gauss redécouvrira en 1810, l'alignement de ces milieux à partir d'une propriété des cercles coaxiaux[8].
En 1811, le professeur de navigation à St.-Brieux, Rochat[9], enrichira la ponctuelle de Gauss de trois autres points remarquables par une démarche analytique.
En 1828, le géomètre de Berlin, Jacob Steiner propose dix questions, sans démonstration, dans les *Annales* de Gergonne. Le résultat précédent correspond à la sixième question.
Cette ponctuelle sera redécouverte au XIX-ième siècle par Bodenmiller.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde, en affirmant que C, D et E ne sont pas alignés.

- Notons E' le point d'intersection de (AB) et (CD)
  et K' le milieu de [E'F].

---

[3] Bérard O., *Annales de Gergonne* 3.
[4] Ayme J.-L., Méthodes et Techniques en Géométrie à propos de la droite de Newton, Ellipses, Paris, 2003.
[5] Mackay, *Edinburgh mathematical society proceeding* 9 (1890-1891).
[6] Connor J. T., *The Ladies' diary* (1795).
[7] Newton, proposition XXV, cor. 3, proposition XXVII, *Principes* vol. 1 (1687),
[8] Ayme J.-L., Schéma 28, *Méthodes et Techniques en Géométrie*, Ellipses, Paris (2003).
[9] Rochat, *Annales de Gergonne*, 1 (1811) 314.

- D'après la condition nécessaire, I, J et K' sont alignés.

- Par hypothèse, I, J et K sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, I, J, K et K' sont alignés.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle FE'E, (KK') // (ABE'E).

- La droite des milieux (IJKK') du quadrilatère ABCD étant parallèle à (AB),
  ABCD est un trapèze, ce qui est contradictoire.

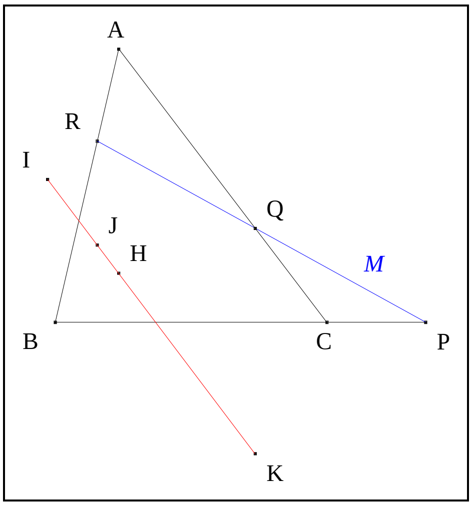
- **Conclusion :** C, D et E sont alignés.

Commentaire : cette réciproque peut mise en valeur est souvent utile dans certaine situation.

II. LA DROITE DE STEINER (1796 - 1863) [10]

VISION

Figure :

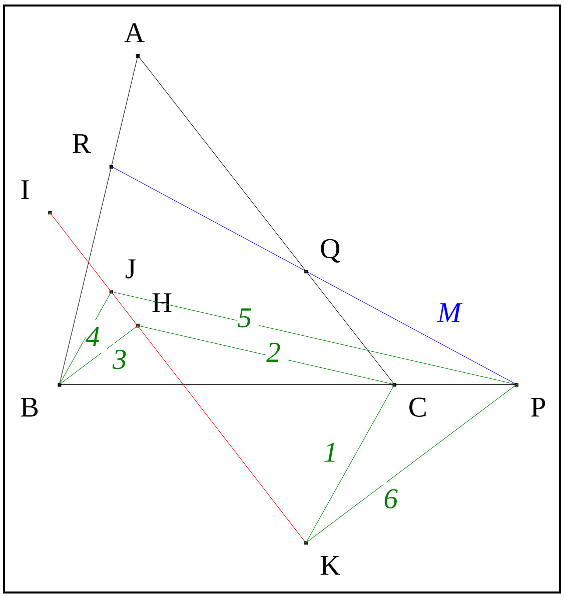


Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne,
	P, Q, R	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	I, J, K, H	les orthocentres resp. des triangles ARQ, BPR, CPQ, ABC.

Donné : I, J, K et H sont alignés.

VISUALISATION

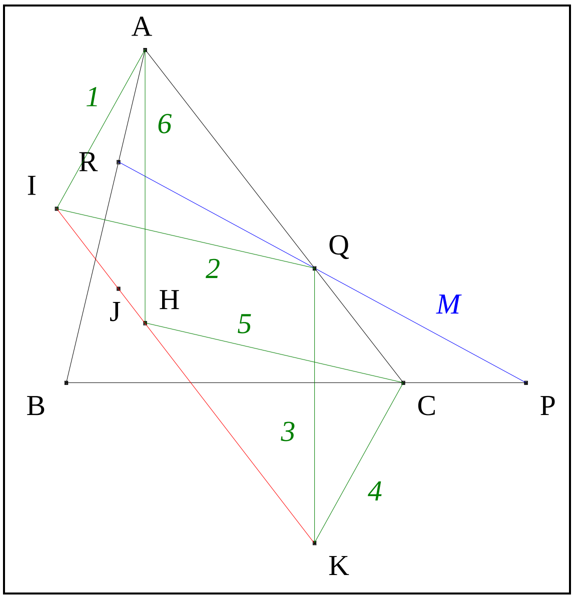
[10] Steiner J., *Annales de Gergonne*, 18 (1827-28) 302-304, proposition 4 ;
reprinted in *Gesammelte Werke*, 2 volumes, edited by Weierstrass K. (1881) ; Chelsea reprint.
Steiner J., *Journal* de Crelle 2 (1827) 97.



- Par définition d'une hauteur, (BH) ⊥ (AC) et (AC) ⊥ (PK);
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BH) // (PK).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CH) // (PJ) et (CK) // (BJ).

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à l'hexagone KCHBJPK, J, K et H sont alignés.



- Par définition d'une hauteur, (AH) ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (QK);
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AH) // (QK).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CH) // (QI) et (AI) // (CK).

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à l'hexagone AIQKCHA, I, K et H sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, I, J, K et H sont alignés.

Énoncé traditionnel : les quatre orthocentres des quatre triangles formés par quatre droites qui se coupent deux à deux, sont alignés.

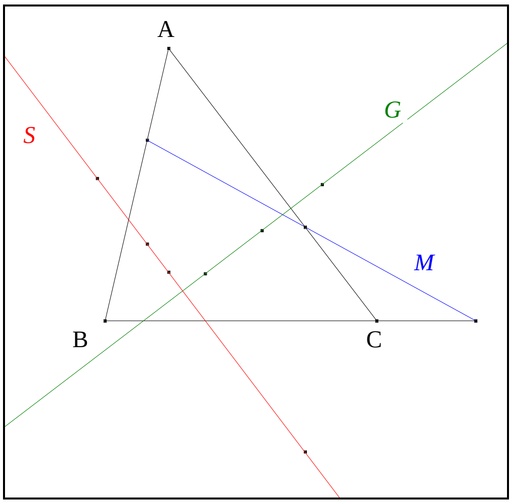
Note historique : En 1828, le géomètre de Berlin, Jacob Steiner propose dix questions, sans démonstration, dans les *Annales* de Gergonne. Le résultat précédent correspond à la quatrième question.
L'année suivante, Franz Heinen en donne une démonstration analytique dans le *Journal* de Crelle[11]. En 1870, L. Millet, professeur au lycée de Laval, attribue ce résultat à Paul Aubert, professeur à Rennes, dans son ouvrage intitulé *Principales méthodes de la Géométrie moderne* à la page 176.
Plus tard, Bodenmiller attribuera ce résultat à William Gallatly.
La preuve présentée s'inspire de celle de Darij Grinberg et d'Atul Dixit[12], qui date de 2004.

Scolie : (IJKH) est la droite de Steiner ou la droite orthocentrique ou encore la droite d'Aubert du delta déterminé par ABC et *M*.

III. *G* EST PERPENDICULAIRE À *S* [13]

VISION

Figure :

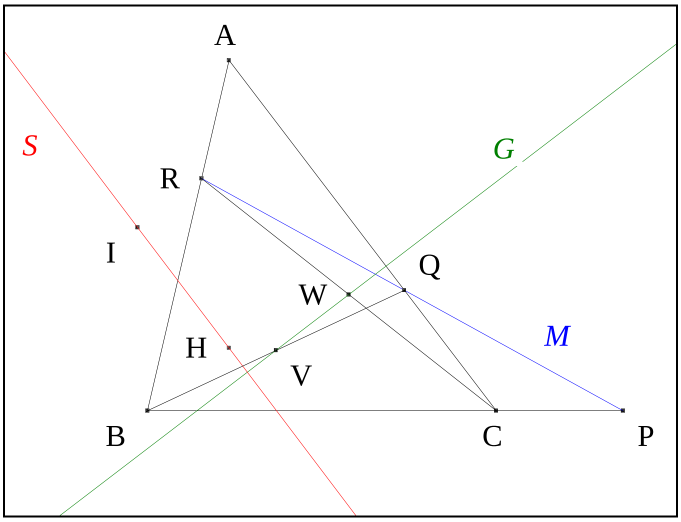


Traits : ABC un triangle,
M une ménélienne de ABC,
et *S* , *G* les droites resp. de Steiner, de Gauss du delta déterminé par ABC et *M*.

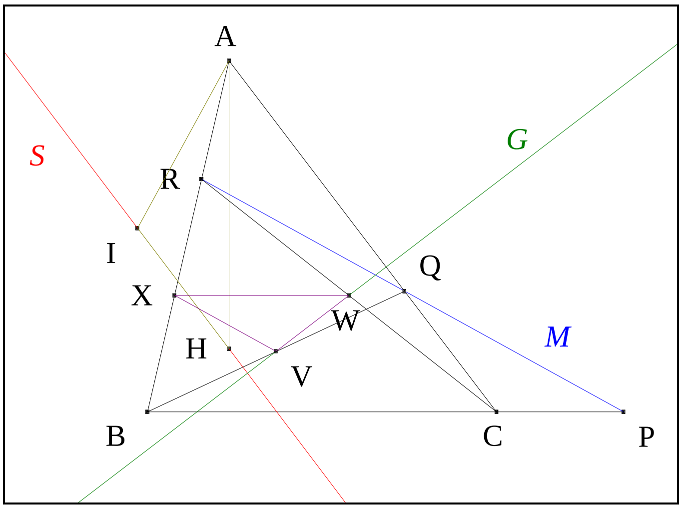
Donné : *G* est perpendiculaire à *S*.

VISUALISATION

[11] Heinen, *Crelle* 3 (1828) 290.
[12] Dixit A. and Grinberg D., Orthopoles and Pappus Theorem, *Forum Geometricorum* vol. 4 (2004) 53-59.
[13] Steiner J., *Annales de Gergonne*, 18 (1827-28) 302-304, proposition 7.



- Notons P, Q, R les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
  I, H les orthocentres resp. des triangles ARQ, ABC
  et V, W les milieux resp. de [BQ], [CR].



- Notons X le milieu de [BR].

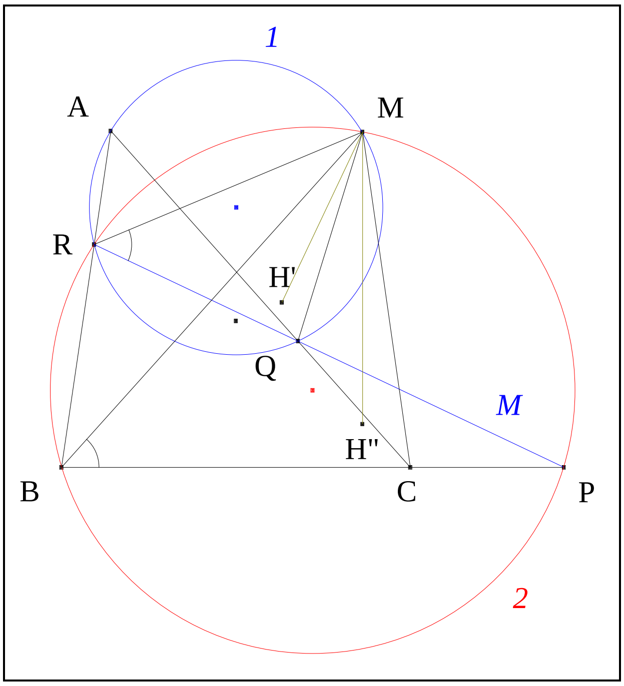
- Considérons les triangles AIH et XVW.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle RBC, (XW) // (BC) et BC = 2. XW ;
  par hypothèse, (BC) ⊥ (AH) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (XW) ⊥ (AH).

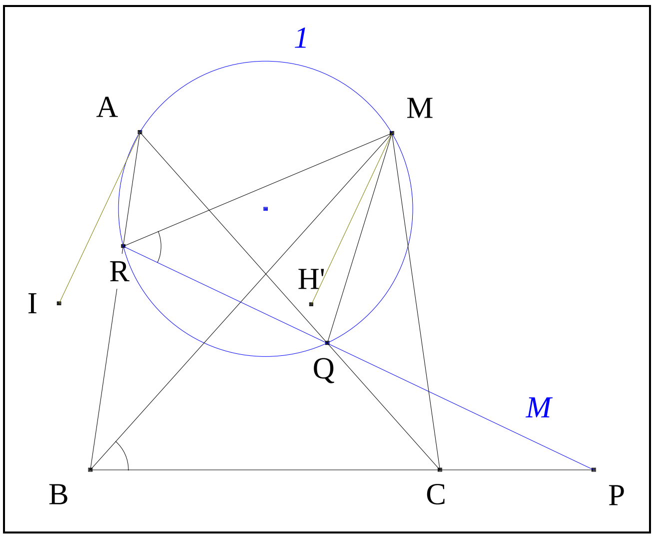
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle RBQ, (XV) // (RQ) et RQ = 2. XV ;
  par hypothèse, (RQ) ⊥ (AI) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (XV) ⊥ (AI).

- D'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", <IAH = <VXW

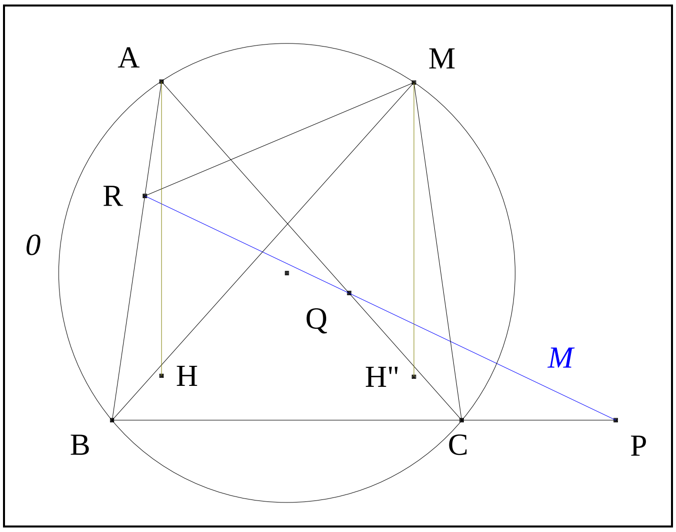
- **Conclusion partielle :** $\frac{XV}{XW} = \frac{RQ}{BC}$.



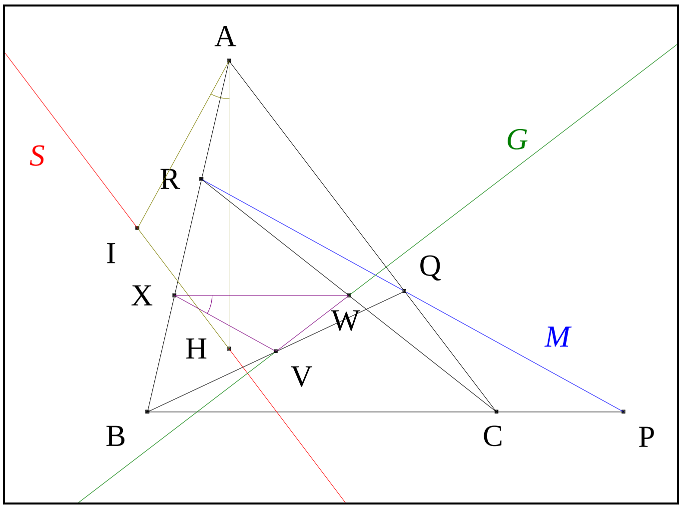
- Notons *1*, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles ARQ, BPR.
- Notons M le second point d'intersection de *1* et *2*.
- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe 3), <RMQ = <BMC.
- D'après le théorème de "l'angle inscrit", <MRQ = <MRP = <MBP = <MBC.
- Par définition, les triangles MRQ et MBC sont semblables.
- Notons H', H" les orthocentres resp. de MRQ, MBC.
- En conséquence, $\frac{RQ}{BC} = \frac{MH'}{MH''}$.
- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation =, $\frac{XV}{XW} = \frac{MH'}{MH''}$.



- D'après "Un parallélogramme" (Cf. Annexe 4) appliqué aux triangles MRQ et ARQ, MH' = AI.



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC.
- D'après "Le point de Miquel" (Cf. Annexe 2), *0* passe par M.
- D'après "Un parallélogramme" (Cf. Annexe 4) appliqué aux triangles MBC et ABC, MH" = AH.
- Par substitution, $\frac{XV}{XW} = \frac{AI}{AH}$.



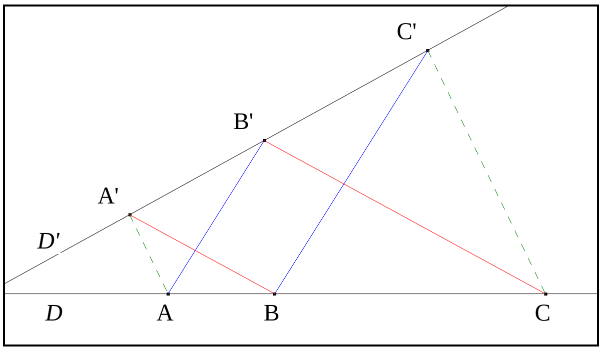
- Les triangles AIH et XVW ayant un angle égal compris entreux deux côtés proportionnels, sont semblables ; en conséquence, (VW) ⊥ (IH).
- **Conclusion :** *G* est perpendiculaire à *S*.

Commentaire : généralement, cette perpendicularité est présentée à partir des faisceaux de cercles et du concept de puissance d'un point par rapport à un cercle. Selon Ch. Gudermann[14], Bodenmiller aurait choisi cette démarche.

14 Gudermann Ch., *Analytische Sphärik*, Köln (1830) 138.

ANNEXE

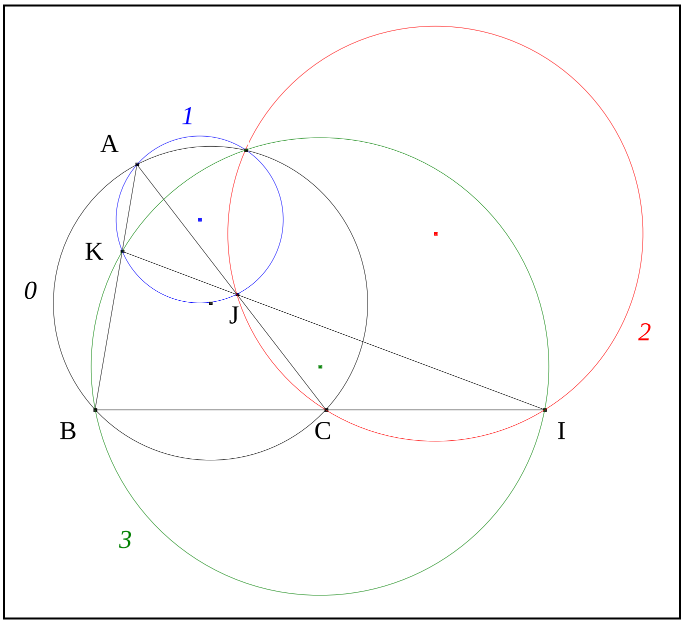
1. Le petit théorème de Pappus[15]



Traits :	*D*, *D'*	deux droites,
	A, B, C	trois points pris dans cet ordre sur *D*,
	B'	un point
et	A', C'	deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

2. Le point de Miquel[16]



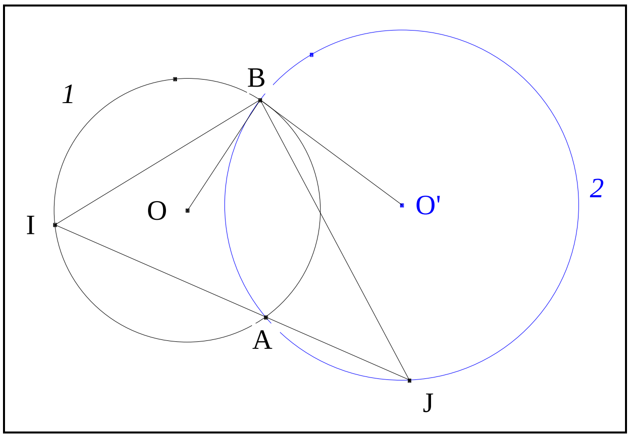
Traits :	ABC	un triangle,
	I, J, K	trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC,
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

Donné : *si,* I, J et K sont alignés *alors,* *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

15 Pappus, *Collections* Livre VII.

16 Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.

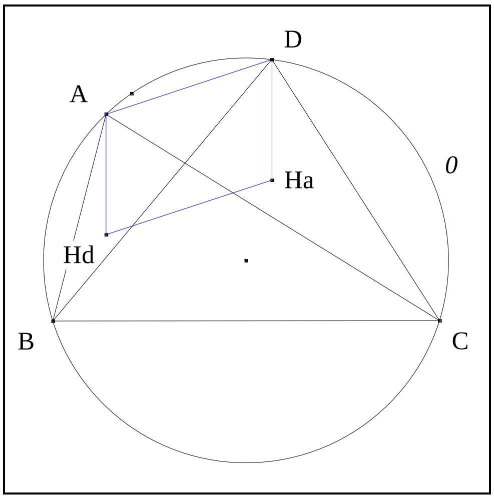
3. Un triangle de Möbius[17]



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
et (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

4. Un parallélogramme[18]



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
D un point de *0*,
et Hd, Ha les orthocentres resp. des triangles ABC, DBC.

Donné : le quadrilatère AHdHaD est un parallélogramme.

---

[17] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.
[18] *Arbelos*, mars 1987.