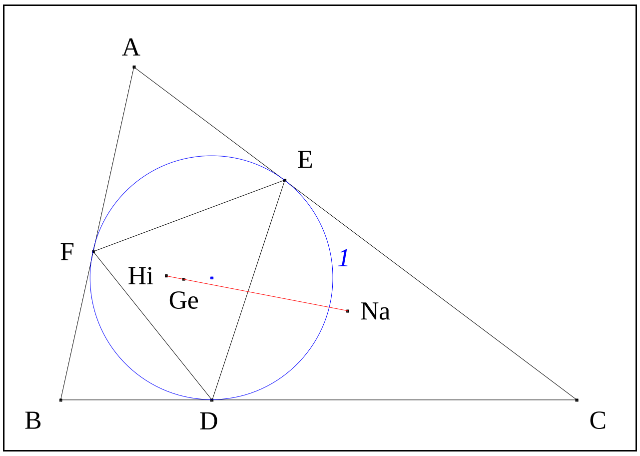
LES POINTS

DE

TANIJIRO KARIYA

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente les deux points de Tanijiro Kariya ainsi que des résultats épars concernant ces points.
Les figures [2] sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Je remercie l'ingénieur japonais Seiichi Kirikami ainsi que le professeur italien Ercole Suppa d'avoir activement contribué aux notes historiques.

Abstract. The author presents the two Tanijiro Kariya's points and scattered results regarding these points.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Acknowledgment. I thank the Japanese engineer Seiichi Kirikami and the Italian Professor Ercole Suppa to have actively contributed to the historical notes.

---

1 Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/06/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
2 Le triangle de départ ABC est acutangle sauf pour des cas de lisibilité des figures…

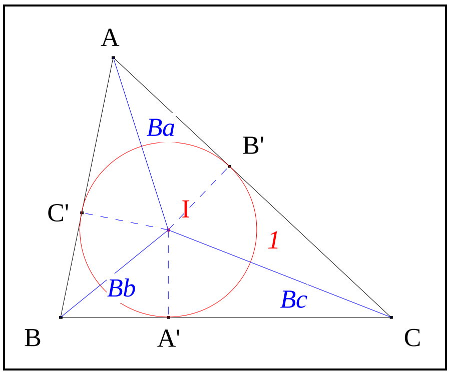
Sommaire

A. HISTORIQUE

1. Le cercle inscrit

VISION

Figure :



Finition : ABC a triangle,
Ba, *Bb*, *Bc* the A, B, C-internal bisectors of ABC,
I the point of concurs of *Ba*, *Bb*, *Bc*,
A', B', C' the feet of the perpendicular to BC, CA, AB through I
and *1* the circle centered at I and passing through A', B', C'.

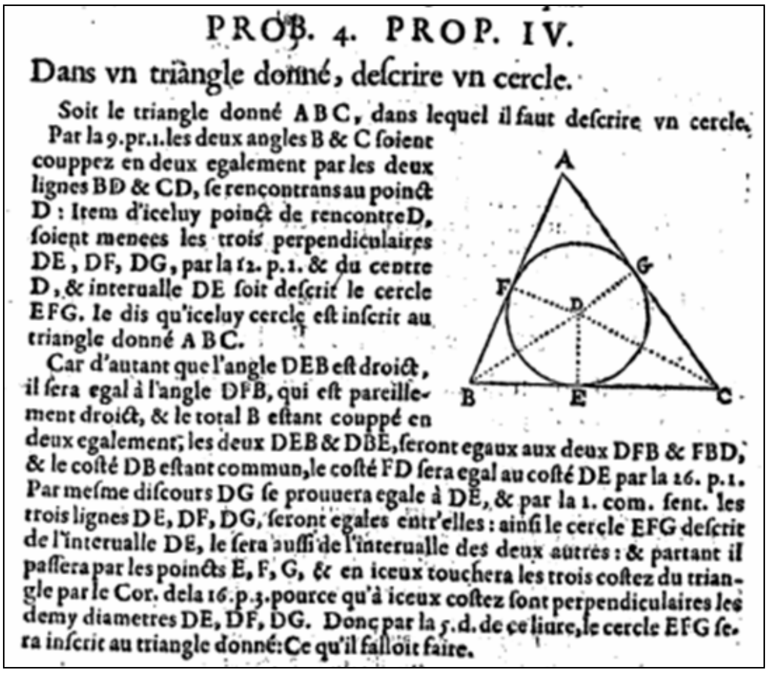
Definitions : **(1)** *1* is "the incircle of ABC"

(2) A'B'C' is "the intouch, contact, Gergonne triangle of ABC".

Note historique : selon le géomètre américain Nathan Altshiller-Court [3], le centre d'un triangle défini comme point de concours de ses bissectrices intérieures [4], était connu de l'École pythagorienne i.e. 600 ans environ avant J.-C..

Archive :

[3] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936)
[4] Euclide d'Alexandrie, *Éléments*, Livre **IV**, problème **4**, proposition **4**



PROB. 4. PROP. IV.

Dans vn triangle donné, deſcrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut deſcrire vn cercle. Par la 9.pr.1.les deux angles B & C ſoient couppez en deux egalement par les deux lignes BD & CD, ſe rençontrans au poinct D : Item d'iceluy poinct de rencontre D, ſoient menees les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. p.1. & du centre D, & interualle DE ſoit deſcrit le cercle EFG. Ie dis qu'iceluy cercle eſt inſcrit au triangle donné ABC.

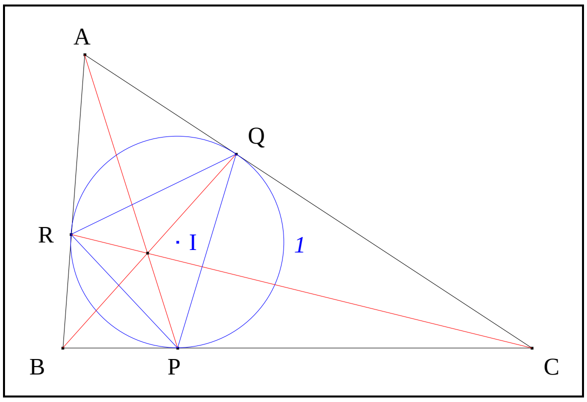
Car d'autant que l'angle DEB eſt droict, il ſera egal à l'angle DFB, qui eſt pareillement droict, & le total B eſtant couppé en deux egalement; les deux DEB & DBE, ſeront egaux aux deux DFB & FBD, & le coſté DB eſtant commun, le coſté FD ſera egal au coſté DE par la 26. p.1. Par meſme diſcours DG ſe prouuera egale à DE, & par la 1. com. ſent. les trois lignes DE, DF, DG, ſeront egales entr'elles : ainſi le cercle EFG deſcrit de l'interualle DE, le ſera auſſi de l'interualle des deux autres : & partant il paſſera par les poincts E, F, G, & en iceux touchera les trois coſtez du triangle par le Cor. de la 16.p.3. pource qu'à iceux coſtez ſont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5.d. de ce liure, le cercle EFG ſera inſcrit au triangle donné: Ce qu'il falloit faire.

Euclide d'Alexandrie récapitulant toutes les connaissances antérieures à son temps des ses *Éléments*, considère le cercle inscrit [5] à un triangle dans le Livre **IV.**

2. Le point de Gergonne

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*
et PQR le triangle de contact de ABC.

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes. [6]

[5] Du latin inscribere i.e. tracer, écrire dans

[6] Gergonne J. D., *Annales de Gergonne* **IX** (1818-19) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [7] vol. 3 von Nagel

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Ge, est "le point de Gergonne de ABC" et est répertorié sous X_7 chez ETC

(2) PQR est "le triangle de Gergonne de ABC"

(3) (AP) est la A-gergonnienne de ABC.

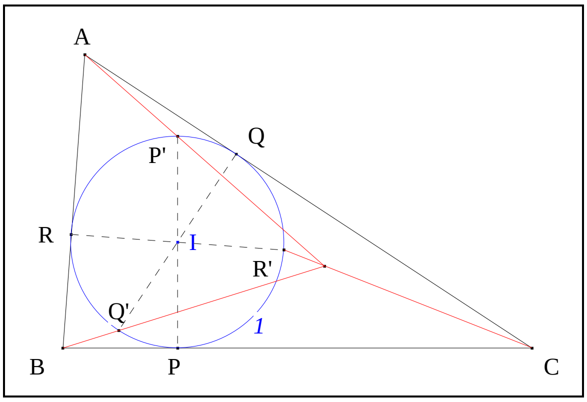
Énoncé traditionnel : *les gergonniennes d'un triangle sont concourantes.*

Note historique : Joseph Diaz Gergonne [8] a publié ce résultat en 1818.
Dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* datant de 1837, Michel Chasles signale que le "point de Gergonne" avait déjà été signalé par Jean de Céva dans le tome II de *De lineis rectic se invicem secantibus, statica constructio*, écrit en 1678.
Nous trouvons aussi une preuve de l'existence de ce point dans l'un des six articles publiés par Christian von Nagel.

3. Le point de Nagel

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
PQR le triangle de contact de ABC
et P'Q'R' le triangle I-symétrique de PQR.

Donné : (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes. [9]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [10]

[7] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p.4-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[8] Gergonne J., *Annales de Gergonne* **IX** (1818-19) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
[9] Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836) ;
Nagel (von) C. H., *Annales* de Gergonne **19** (1860) 354 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
[10] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p.8-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Na, est "le point de Nagel de ABC" et est répertorié sous X_8 chez ETC

(2) P'Q'R' est "le triangle de Nagel de ABC"

(3) (AP) est la A-nagelienne de ABC.

Note historique : la qualification de ce point de concours a été initié par l'historiographe Émile Vigarié. Nous trouvons une preuve métrique de l'existence de ce point dans l'un des six articles publiés par Christian von Nagel et aussi dans les livres de Peter Baptist [11].

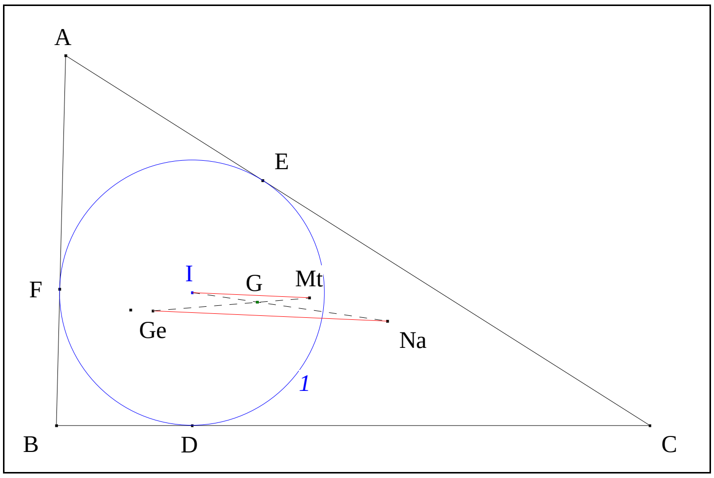
Énoncé traditionnel : *les nageliennes d'un triangle sont concourantes.*

B. LA LIGNE CENTRALE Na – Ge – Hi

1. Une parallèle à (NaGe)

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
G le point médian de ABC,
Mt le Mittenpunckt de ABC
et Ge, Na les points de Gergonne, Nagel de ABC.

Donné : (NaGe) est parallèle à (IMt).

[11] Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie,* Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992) 74-76 ; Historische Anmerkungen zu Gergonne-und-Nagel-punkt, *Sudhoffs Archiv für Geschichte der Medezin und der Naturwissenschaften* **71**, **2** (1987) 230-233

VISUALISATION

- D'après Christian von Nagel [12], **(1)** Ge, G et Mt sont alignés

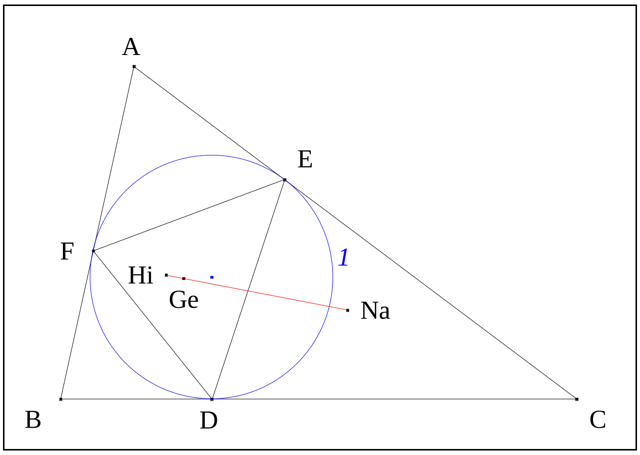
  (2) G est le premier tiers-point de [MtGe] à partir de Mt
- D'après Christian von Nagel [13], **(1)** Na, G et I sont alignés

  (2) G est le premier tiers-point de [INa] à partir de I.
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports", (NaGe) est parallèle à (IMt).

2. L'alignement Na – Ge - Hi

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	Hi	l'orthocentre de DEF
et	Ge, Na	les points de Gergonne, Nagel de ABC.

Donné : Na, Ge et Hi sont alignés. [14]

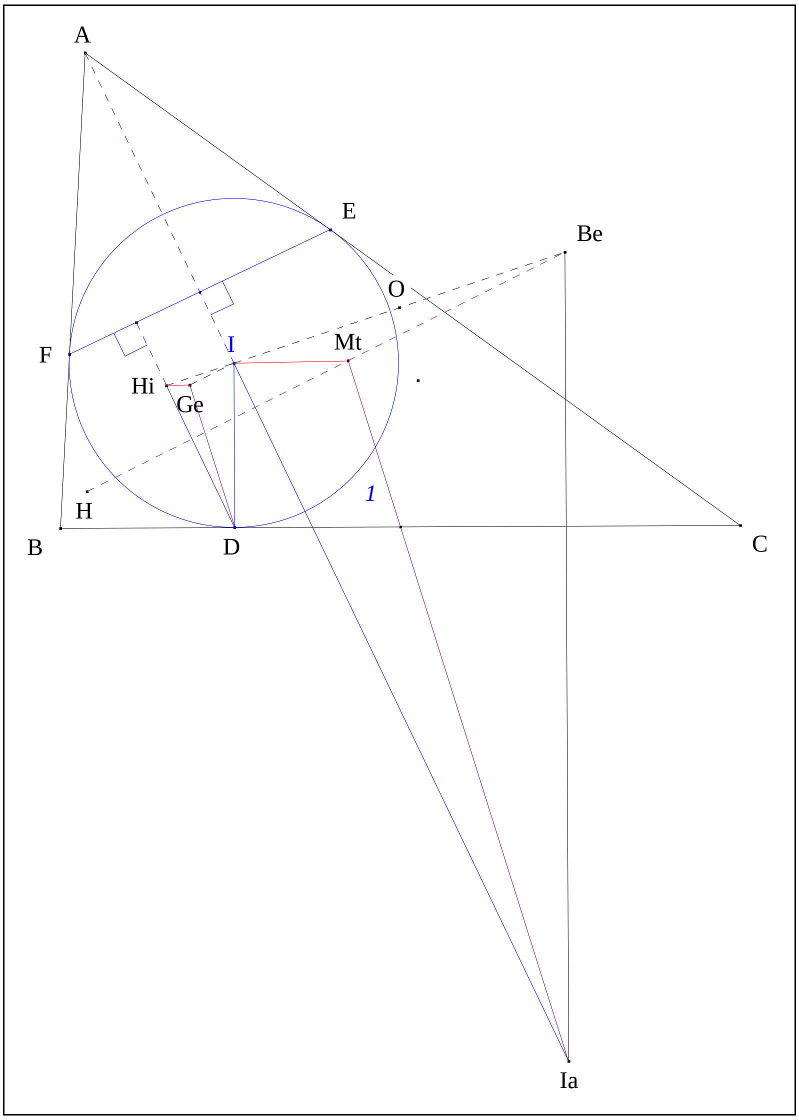
VISUALISATION

---

12 Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p.18-21 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

13 Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p.12-14 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

14 Three collinear points, AoPS du 07/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1223938_three_collinear_points
La droite (GeNa), *Les–Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1250881



* Notons aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
  O le centre du cercle circonscrit à ABC
  et Be le point de Bevan de ABC.

* D'après Antoine Gob [15], Hi, I et O sont alignés
  d'après Christian von Nagel [16], I, O et Be sont alignés
  d'après l'axiome d'incidence **Ia**, Hi, I et Be sont alignés.

* **Scolies :** **(1)** (DI) // (IaBe)

  (2) (DHi) // (IaI)

  (3) Cf. **U.** Appendice

* Le triangle DIHi étant homothétique au triangle IaIBe
  et Ge étant l'homologue de Mt, (IMt) // (HiGe) ;
  par transitivité de //, (NaGe) // (HiGe) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (NaGe) = (HiGe).

---

[15] Ayme J.-L., Droite de Simson de pôle Fe, G.G.G. vol. **3**, p.12-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h365545p2010456

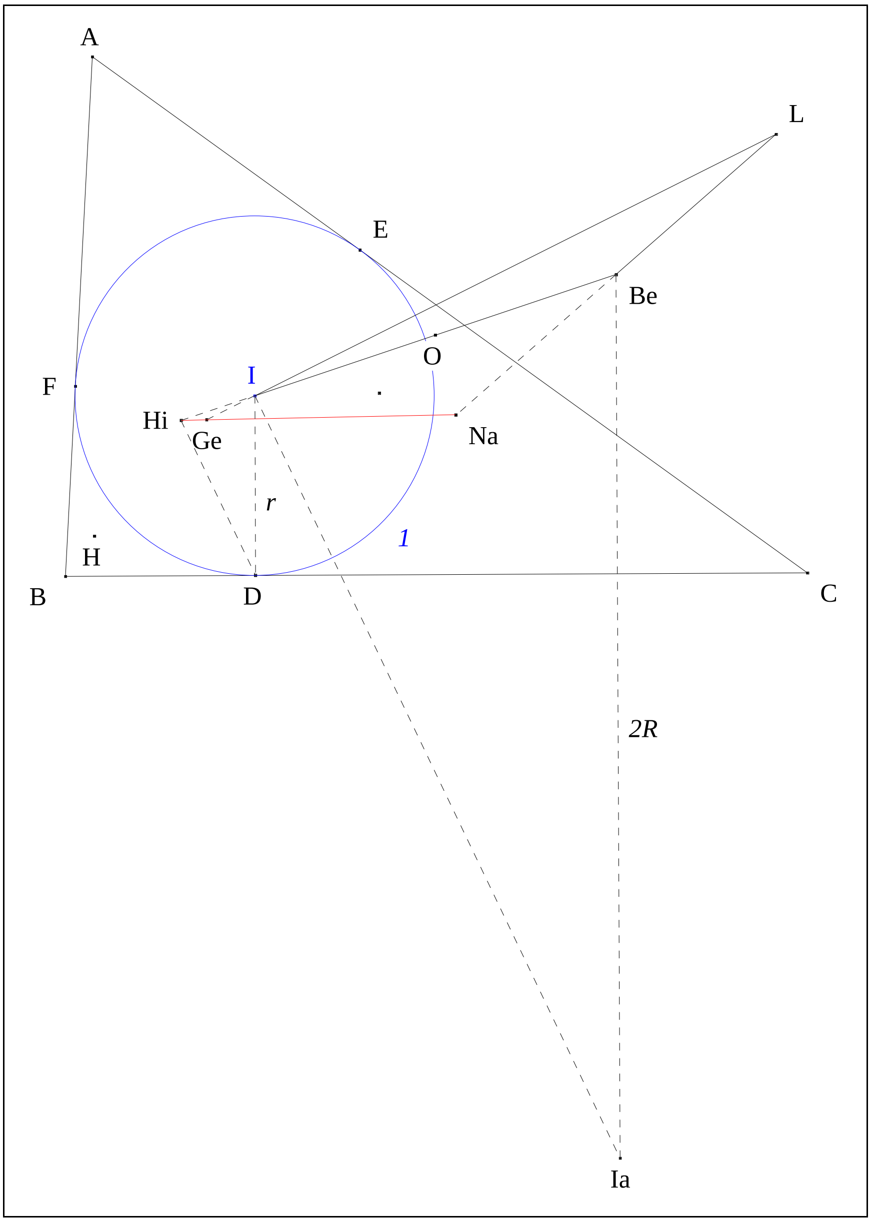
[16] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p.24-25 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- **Conclusion :** Na, Ge et Hi sont alignés.

3. Une formule de l'auteur

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

0 le cercle circonscrit à ABC,

R, r les rayons resp. de *0*, *1*

et L le point de De Longchamps de ABC.

Donné : GeL/GeI = (4R+2r)/r. [17]

[17] Ayme J.-L., A ratio with three center, AoPS du 10/04/2016 ;

VISUALISATION

- D'après "La voilette de la Dame Géométrie" [18], Be est le milieu de [NaL].

- D'après Benjamin Bevan [19],
  0 étant le cercle d'Euler du triangle excentral de ABC, BeIa = 2R.

- Appliquons le théorème de Ménélaüs
  au triangle ILBe
  et la ménélienne (GeNaHi) : (GeI/GeL).(NaL/NaBe).(HiBe/HiI) = (GeI/GeL).2. (2R + r)/r.

- **Conclusion :** GeL/GeI = (4R+2r)/r.

---

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1225537_a_ratio_with_three_centers
Ayme J.-L., Une formule concernant trois centres, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1251147

18 Ayme J.-L., La voilette de la Dame Géométrie, G.G.G. vol. **26** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

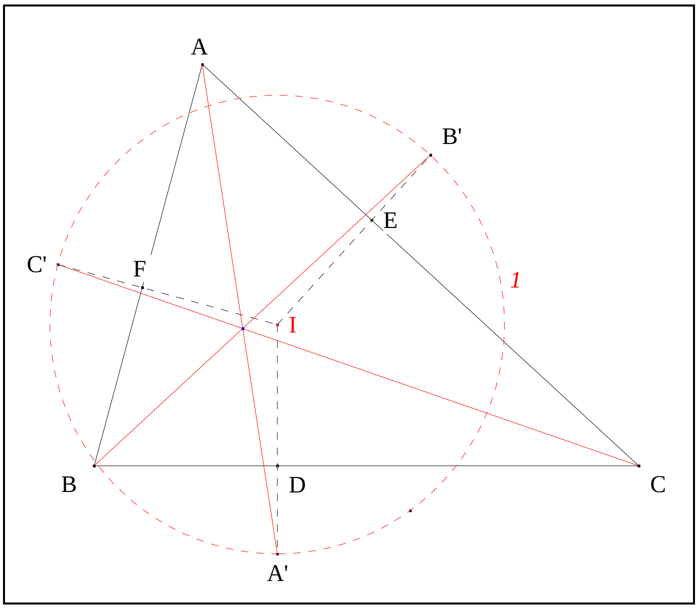
19 Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p.25 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

C. LES POINTS DE TANIJIRO KARIYA

1. Le premier point de Kariya

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
1 un cercle de centre I,
k le rayon de *1*
et A', B', C' les points d'intersection de *1* resp. avec [ID[, [IE[, [IF[.

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. [20]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [21].
Précisons que celle-ci a recours au théorème de Carl Friedrich Andreas Jacobi [22].
Rappelons que celle présentée par T. Kariya est élémentaire, longue et peu élégante.

Scolies : **(1)** nous noterons Kr ce point de concours

(2) Kr est "le premier point de Kariya de ABC"

ou plus précisément "le k-point de Kariya de ABC".

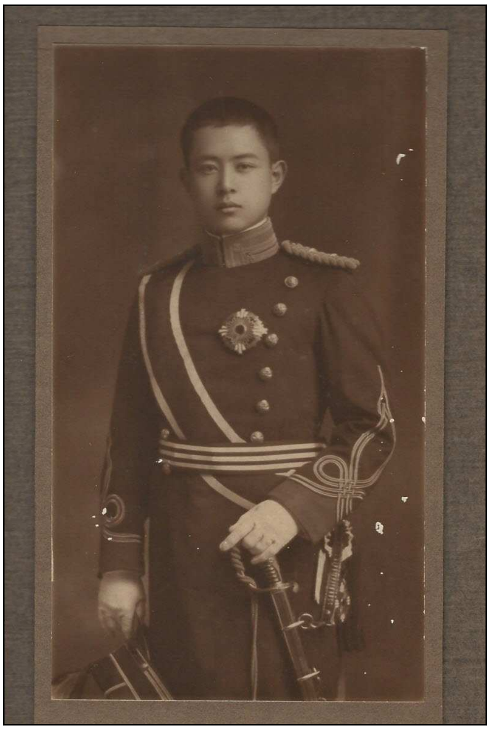
---

20 J. Kariya, Un problème sur le triangle, *L'Enseignement mathématique*, **6** (15/03/1904) 130–132, 236, 406
Revista de matematicas de Santiago du Chili (1905) p. 439
Grinberg D., Message *Hyacinthos* # **10504** du 20/09/2004 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/10504
Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. **2**, p. 9-10 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

21 Ayme J.-L., Le théorème de Jacobi, G.G.G. vol. **5**, p. 22-23 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

22 Jacobi C. F. A., De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognis, Naumburg (1825)

Une très courte biographie de Tanijiro Kariya



23

The mechanical engineer Seiichi Kirikami de Tokio (Japan) wrote :

> As for the information of Tanijiro Kariya, see the attached word. His information is based on a book *Great Dictionary of Geometry* [24] written in Japanese by Shiko Iwata. His personal name is Tanijiro.
> On Oct 8, 1901, he became a professor of probability and statistics at the Army's cannon engineering school.

Seiichi Kirikami wrote :

> I posted the request of the picture of Tanijiro Kariya in FACEBOOK and obtained the following.

From: 高窪 正明 <m.takakubo@gmail.com>
Date: 2016-06-06 21:45 GMT+09:00
Subject: 写真
To: seiichikirikami@gmail.com

桐上 様、

昨日、義兄（刈屋信幸）から、写真を二葉手渡されましたので、
pdfファイルにして、添付しました。共に、撮影時期が、不明ですが、

23 from Mr. Masaaki Takakubo, who discussed the dates of the pictures with his brother-in-law :
the picture of Tanijiro Kariya in his official attire infer that it was taken at the ceremony when he became a professor of the Army's school of cannon engineering.
So they infer that it was taken in 1901 instead of "circa 1900"

24 *Great Dictionary of Geometry*, No.**4**, Appendix **2**, edited by Shiko Iwata (1983) Maki Shoten

１ページ目の他人次郎正装の写真は、恐らく、1900年頃と推定しています。2ページ目の家族写真では、後列の眼鏡の男性が、他人次郎で、前列右端の少年が、信幸の亡父（1907年生まれ）で、6歳位と思われ、撮影時期を1913年頃と推定しています。他に、刈屋点を報告した論文（フランス語）の別刷りも保存されていました。何せ古い写真で、ファイルの画質も良くないものの、Professeur Jean-Louis Ayme の期待に添えると良いのですが。

高窪

A translation of the email of Mr. Masaaki Takakubo

Dear Mr. Kirikami,
Yesterday I received 2 pictures of Tanijiro Kariya from my brother-in-law (Sinkô Kariya). When they are taken exactly is unknown.
I infer that 1st picture of Tanijiro Kariya with the official attire is take perhaps circa 1900. 2nd picture of his family shows him with glasses at rear row. A boy at the right of front row is the late father (born in 1907) of Nobuyuki, perhaps 6 ages. This picture is perhaps taken circa1913. As they are very old ones and of not so good quality, I am afraid that it may not match what Professeur Jean-Luis Ayme wants.

(Also the paper of Kariya point written in French is preserved.)

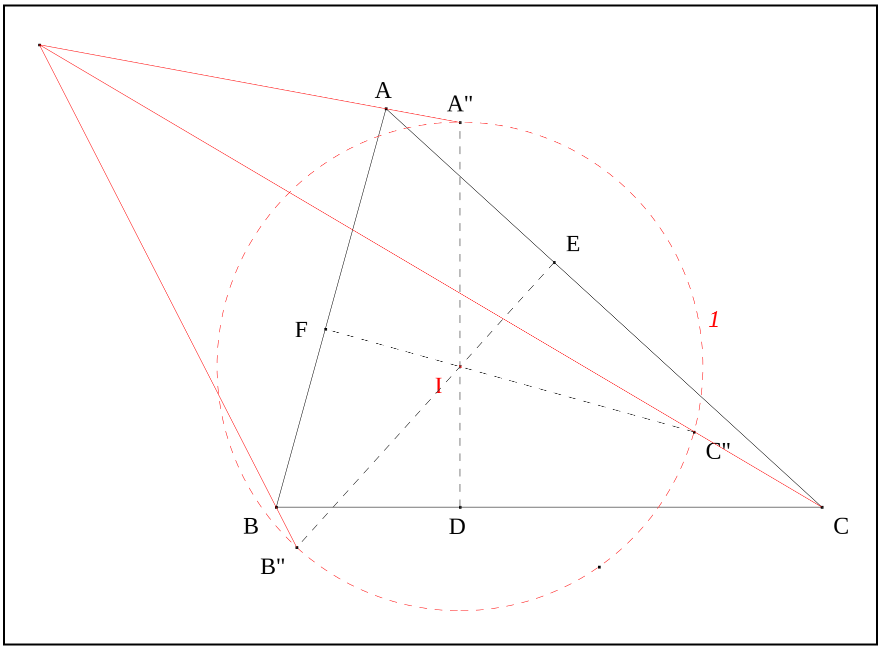
[25]

[25] from Mr. Masaaki Takakubo, who discussed the dates of the pictures with his brother-in-law :
The picture of the family of Tanijiro Kariya infer that it was taken at the 1st anniversary of birth of the 3rd daughter. She was born in the autumn of 1914.
So this infer that it was taken in the autumn of 1915 instead of "circa1913"

2. Le second point de Kariya

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	D'E'F'	le triangle I-symétrique de DEF
	1	un cercle de centre I,
	k	le rayon de *1*
et	A", B", C"	les points d'intersection de *1* resp. avec [ID' [, [IE' [, [IF' [.

Donné : (AA"), (BB") et (CC") sont concourantes.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [26].
Précisons que celle-ci a recours au théorème de Carl Friedrich Andreas Jacobi [27].

Scolies : **(1)** nous noterons Kr' ce point de concours

(2) Kr' est "le second point de Kariya de ABC"

ou encore "l'antipoint de Kariya de ABC"

(3) en algébrisant, Kr' est "le (-k)-point de Kariya de ABC".

[26] Ayme J.-L., Le théorème de Jacobi, G.G.G. vol. **5**, p. 22-23 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[27] Jacobi C. F. A., De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, Naumburg (1825)

3. Note historique :

II. — Dans le N° du 15 mars 1904 de *L'Enseignement mathématique*, t. VI, p. 130-132, M. J. Kariya (Tokio) énonce la proposition suivante :

« Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC ; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés, BC, CA, AB. Si l'on prend sur les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O, les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point. »

Ce théorème a donné lieu à plusieurs lettres et communications dont le résumé se trouve dans le numéro suivant (p. 236-239, mai 1904).

Sa démonstration se déduit immédiatement du théorème précédent en transformant par figures polaires réciproques ; il suffit de transformer la figure par rapport au cercle circonscrit et l'on obtient pour théorème corrélatif précisément celui de M. Kariya.

le résultat de T. Kariya de Tokio (Japon) a eu un succès retentissent dès sa parution le 15 novembre 1904 et a provoqué aussi une vive polémique…

Parmi toutes ces réactions, citons celles de Barbarin de Bordeaux, de Demoulin de Gand, d'Harold Hiltonde Bangor, de Daniels de Fribourg (Suisse), de Franke de Berlin, de P. Faure de Paris, de Cantoni de Mantoue et de Neuberg [28].

Rapidement ce résultat a été considéré par la communauté des géomètres comme une redécouverte d'un théorème de

* Émile Hyacinthe Lemoine [29] datant de 1889 :

si, d'un point M *d'un triangle* ABC
on abaisse des perpendiculaires MX, , MZ *sur les côtés* BC, CA, AB
et que l'on prenne sur ces droites des longueurs XA', YB', ZC' *inversement proportionnelles aux longueurs* MX, MY, MZ, [30]
les trois droites AA', BB', CC' *se coupent en un même point* L.

* Auguste Boutin [31] de 1890 :

A', B', C' *étant les points de contact du cercle inscrit avec les côtés de* ABC,
si l'on porte dans le même sens sur IA', IB', IC' *les longueurs* IA", IB", IC" = l,
les droites AA", BB", CC" *sont concourantes.*

* Virginio Retali [32] de Milan (Italie) en 1896

XIII. — Lettre de M. V. Retali (Milan) :
Le théorème que M. Kariya (Tokio) croit nouveau a été établi par moi en 1896, dans le *Periodico di Matematica* (Roma, XI, p. 71). La démonstration est celle même donnée par M. Harold Hilton dans sa note parue dans *l'Ens. math.* (1904, p. 237).

Le professeur Ercole Suppa de Terano (Italie) écrit :

In attachment I am sending the pages 70 and 71 of *Periodico di Matematica* 1896,

---

28 Neuberg J., *Mathesis* (1905) 117-118
29 Lemoine E. H., Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences A.F.A.S., Paris (1889) 197-222
30 MX.MA' = MY.MB' = MZ.MC'
31 Boutin A., Sur un groupe de quatre coniques remarquables,
Journal de Mathématiques Spéciales sér. 3, 4 (1890) 104-107, 124-127
Boutin A., Problèmes sur le triangle, *Journal de Mathématiques Spéciales* sér. 3, **4** (1890) p. 265-269
32 Retali V., *Periodico di Matematica*, Rome **11** (1896) 71

with article requested.

267*. *Se si costruiscono i punti simmetrici* I', I'', I''' *del centro* I *del cerchio inscritto in un triangolo* ABC *rispetto ai lati* BC, CA, AB, *le rette che congiungono questi punti ordinatamente con* A, B, C *concorrono in un punto.*

(S. Catania).

Dimostrazione del Sig. G. *Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli.

Siano A', B', C' i punti in cui AI', BI'', CI''' tagliano i lati BC, CA, AB del triangolo e conducansi da A' ed I' le perpendicolari AD', $A'E'$ ed $I'D$, $I'E$ ad AB, AC. È chiaro che si avrà $D'A' : A'E' = DI' : I'E$, ma $BA' = D'A' : \text{sen } B$, $A'C = A'E' : \text{sen } C$, onde

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{D'A'}{A'E'} \cdot \frac{\text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{DI'}{I'E} \cdot \frac{\text{sen } C}{\text{sen } B}.$$

Rimane ora a trovare il valore del rapporto $DI' : I'E$. Osservando per l'ipotesi che i due angoli $I'BA$, $I'CA$ sono rispettivamente eguali a $B + \frac{1}{2}B$ e $C + \frac{1}{2}C$, si deduce subito $DI' = BI' \cdot \text{sen } \frac{3}{2}B$, $I'E = I'C \text{ sen } \frac{3}{2}C$, onde

$$\frac{DI'}{I'E} = \frac{BI'}{I'C} \cdot \frac{\text{sen } \frac{3}{2}B}{\text{sen } \frac{3}{2}C} = \frac{BI}{IC} \frac{\text{sen } \frac{3}{2}B}{\text{sen } \frac{3}{2}C} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}C \text{ sen } \frac{3}{2}B}{\text{sen } \frac{1}{2}B \text{ sen } \frac{3}{2}C},$$

— 71 —

per cui finalmente

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\text{sen } C \text{ sen } \frac{1}{2}C \text{ sen } \frac{3}{2}B}{\text{sen } B \text{ sen } \frac{1}{2}B \text{ sen } \frac{3}{2}C}$$

e analogamente

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\text{sen } A \text{ sen } \frac{1}{2}A \text{ sen } \frac{3}{2}C}{\text{sen } C \text{ sen } \frac{1}{2}C \text{ sen } \frac{3}{2}A}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{\text{sen } B \text{ sen } \frac{1}{2}B \text{ sen } \frac{3}{2}A}{\text{sen } A \text{ sen } \frac{1}{2}A \text{ sen } \frac{3}{2}B}$$

Moltiplicando queste tre relazioni membro a membro segue

$$\frac{BA'}{B'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,$$

cosicché pel teorema di Ceva, le tre rette AI', BI'', CI''' concorrono in un punto.

Dimostrazione del Sig. Prof. V. *Retali* a Milano.

I due triangoli ABC e $I'I''I'''$ sono polari reciproci rispetto al cerchio di centro I e raggio eguale a $r\sqrt{2}$, se r è il raggio del cerchio inscritto, essi sono dunque omologici.

Osservazione. Se sopra i raggi I_1, I_2, I_3 che vanno ai punti di contatto, a partire da questi punti e nel medesimo senso si staccano tre segmenti eguali $11'$, $22'$, $33'$, i due triangoli ABC e $1'2'3'$ sono omologici.

* Dr. H. A. W. Speckman [33] d'Arnheim (Pays-Bas) en 1903.

Pour terminer, rappelons qu'Émile Lemoine et Auguste Boutin ne se sont pas opposés au désir de T. Kariya d'attribuer son nom à ces points et disons qu'il arrive fréquemment, dans les recherches sur la *Géométrie du triangle*, qu'un géomètre redécouvre un résultat déjà connu.

4. Cas particuliers

- Notons k le rayon de *1*.
- Résultats : k =0 Kr = Kr' = I

[33] Speckman H.A.W., *Mathesis* (1903) 265

k = 1	Kr	est le point de Gergonne répertorié sous X_7 chez ETC
	Kr'	est le point de Nagel répertorié sous X_8 chez ETC
k = 2	Kr	est point de Gray [34] répertorié sous X_{79} chez ETC
k est ∞	Kr = Kr' = H,	H étant l'orthocentre de ABC.

5. Deux généralisations

Lemoine explicitly states and proves on page 202 the following: *Let ABC be a triangle, M a point in its plane, and X, Y, Z the projections of M on BC, CA, AB, respectively. If A′, B′, C′ are points on the half-lines MX, MY, and MZ, respectively, such that* $MX \cdot MA' = MY \cdot MB' = MZ \cdot MC'$, *then AA′, BB′, CC′ are concurrent.* Auric gave in 1915 another generalization of Kariya's Theorem: A. Auric, "Généralisation du théorème de Kariya," *Nouvelles annales de mathématiques* 4e série **15** (1915) 222–225. The statement is the same as Lemoine's Theorem except that the assumption $MX \cdot MA' = MY \cdot MB' = MZ \cdot MC'$ is replaced by $MX/MA' = MY/MB' = MZ/MC'$.

<u>**Theorem 3**</u> (de Boutin - 1890)

Let O be the center of the circumscribed circle to the triangle ABC and A', B', C' its projections on the sides BC, CA, AB. Consider the points A'', B'', C'' such that $\frac{OA'}{OA''} = \frac{OB'}{OB''} = \frac{OC'}{OC''} = k,\ k \in R^*$. Then the lines AA'', BB'', CC'' are concurrent (The point of Franke – 1904).

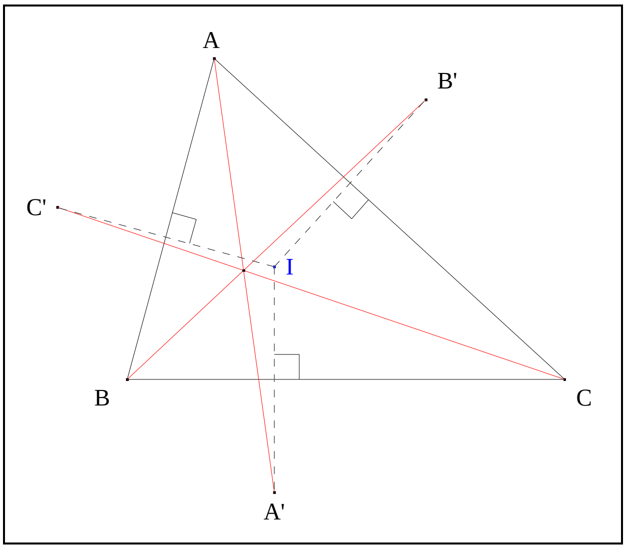
[34] Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. **2** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

D. LES POINTS DE STEVE GRAY

1. Le point de Gray (k = 2)

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC
et	A', B', C'	les symétriques de I resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes. [35]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [36].

Scolie : ce point de concours, noté Gra, est "le point de Gray de ABC" ;
il est noté répertorié sous X_{79} chez ETC [37].
C'est aussi le "(2) point de Kariya de ABC".

Note historique : Darij Grinberg a attribué ce point à Steve Gray en précisant que celui-ci l'a découvert en cherchant autre chose et qu'il a énoncé, sans preuve, sa découverte dans *Geometry-research* du 19-09-01.
Ce résultat a été reproposé 2011 comme problème dans *The American Mathematical Monthly*.

---

35 Grinberg D., Gray point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # **6491** du 19/09/2001 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6491

36 Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. **2** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

37 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X79

Triangle Center $X(79)$

11554 [2011, 178]. *Proposed by Zhang Yun, Xi'an Jiao Tong University Sunshine High School, Xi'an, China.* In triangle ABC, let I be the incenter, and let A', B', C' be the reflections of I through sides BC, CA, AB, respectively. Prove that the lines AA', BB', and CC' are concurrent.

Now we give the two solutions to Problem 11554, both based on Ceva's Theorem.

(1) This solution is possibly new (less elegant than the second one, but a bit shorter). Let P be the intersection of AA' and BC, and let Q be the intersection of AI and BC. Applying Menelaus' Theorem twice (once for $\triangle APQ$ and transversal IA', once for $\triangle AIA'$ and transversal BC), we find that $BP/PC = (a^2+c^2-b^2+ca)/(b^2+a^2-c^2+ab)$. Since the numerator is obtained from the denominator by the cyclic permutation $a \to b \to c \to a$, the conclusion follows from Ceva's Theorem.

(2) The second solution is much more elegant, and is possibly due to the Romanian geometer Gheorghe Titeica (it appears as Problem 1138 in his book *Problems of Geometry* (in Romanian)). Let the parallel to BC passing through A' intersect AB and AC in A_1 and A_2, respectively. Construct similarly the points B_1, B_2, C_1, and C_2. By symmetry, $A'A_1 = C'C_2$, $A'A_2 = B'B_1$, and $B'B_2 = C'C_1$. Let P be the intersection of AA' and BC, let Q be the intersection of BB' and AC, and let R be the intersection of CC' and AB. Thales' Theorem implies $BP/PC = A_1A'/A'A_2$, $CQ/QA = B_1B'/B'B_2$, and $AR/RB = C_1C'/C'C_2$. It follows that

$$\frac{BP}{PC}\,\frac{CQ}{QA}\,\frac{AR}{RB} = \frac{A_1A'}{A'A_2}\,\frac{B_1B'}{B'B_2}\,\frac{C_1C'}{C'C_2} = 1,$$

and the conclusion follows from Ceva's Theorem.

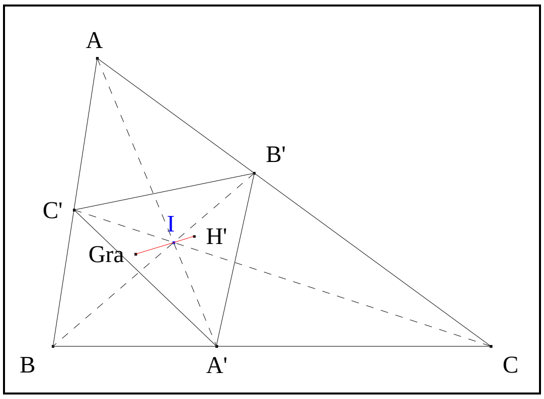
Final notes: (i) Nowadays the point J of concurrence in Problem 11554 is sometimes called "Gray's point" after Steve Gray who noted a seemingly new property, namely that the line IJ is parallel to the Euler line OH of $\triangle ABC$.

(ii) The point J is called $X(79)$ in Kimberling's *Encyclopedia of Triangle Centers*, available at http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

2. L'alignement Gra – I – X_{500}

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle incentral de ABC,
	H'	l'orthocentre de A'B'C'
et	Gra	le point de Gray de ABC.

Donné : Gra, I et H' sont alignés.

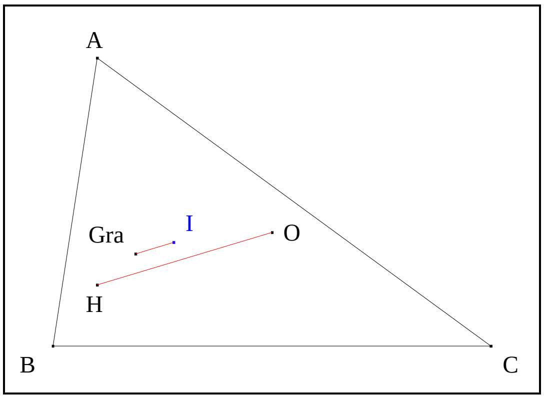
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [38].

Scolie : H' est répertorié sous X_{500} chez ETC [39].

3. La droite de Gray

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	E	la droite d'Euler de ABC,
	I	le centre de ABC,
et	Gra	le point de Gray de ABC

Donné : (IGra) est parallèle à *E*.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [40].

4. L'antipoint de Gray (k = -2)

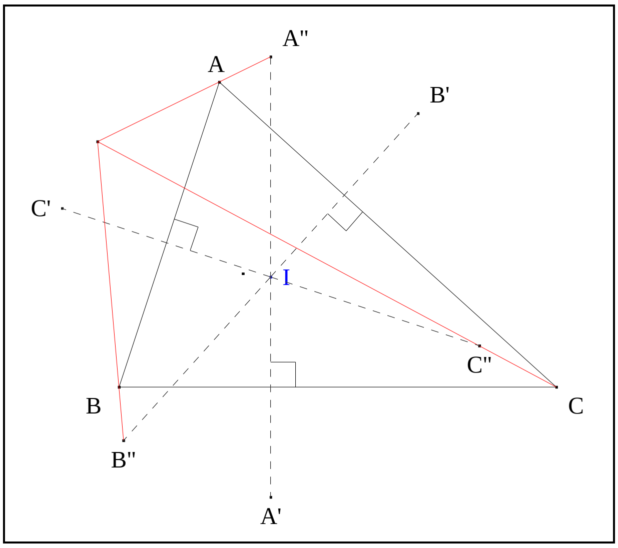
VISION

Figure :

38 Grinberg D., Gray point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # **6491** du 19/09/2001 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6491

39 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X79

40 Ayme J.-L., La droite de Gray, G.G.G. vol. **2**, p. 14-15 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
A', B', C' les symétriques de I resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
et A", B", C" les symétriques de A', B', C' par rapport à I.

Donné : (AA"), (BB"), (CC") sont concourantes.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.
Précisons que celle-ci a recours au théorème de Carl Friedrich Andreas Jacobi [41].

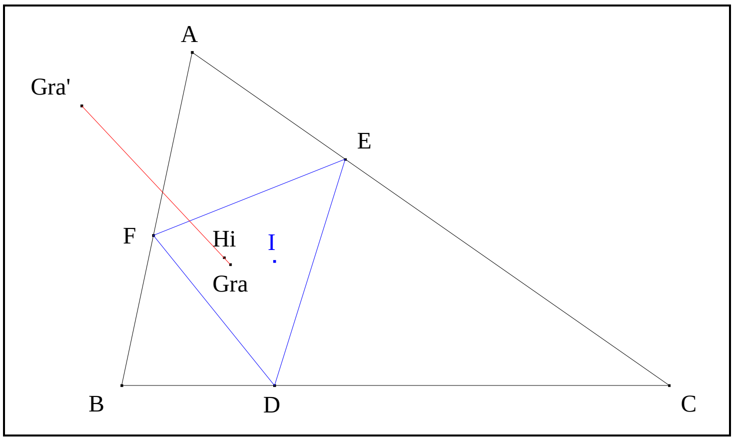
Scolie : ce point de concours, noté Gra', est "l'anti-point de Gray de ABC" ;
C'est aussi le "(-2) point de Kariya de ABC".

5. L'alignement Gra' – Gra - Hi

VISION

Figure :

[41] Jacobi C. F. A., De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, Naumburg (1825)
Ayme J.-L., Le théorème de Jacobi, G.G.G. vol. **5**, p. 22-23 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

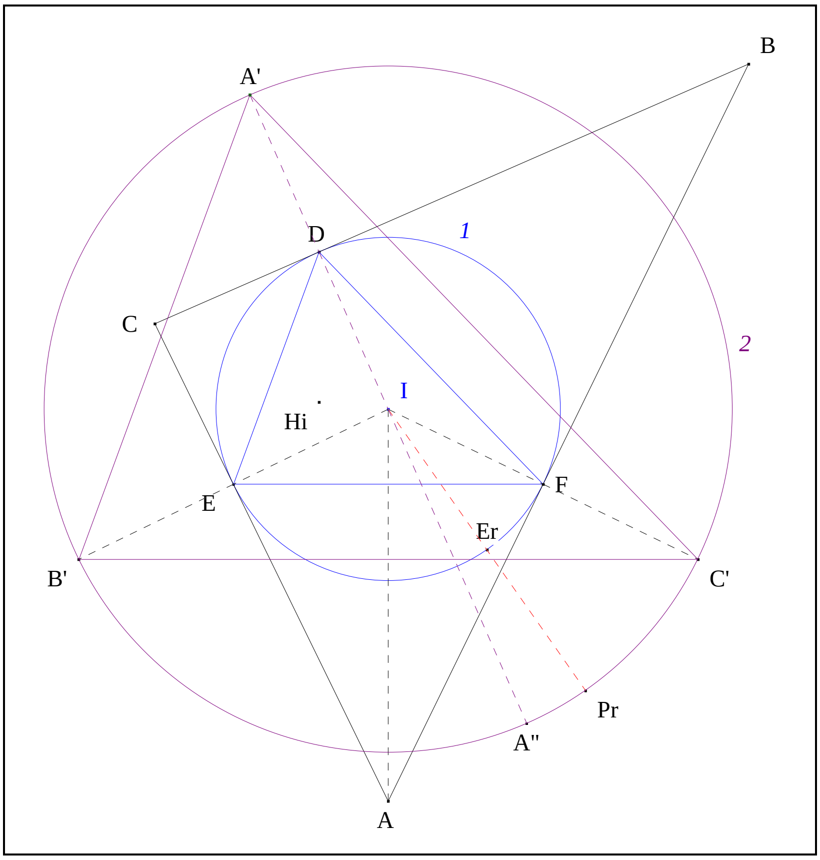


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
Hi l'orthocentre de DEF
Gra le point de Gray de ABC,
et Gra' l'antipoint de Gray de ABC,

Donné : Gra', Gra et Hi sont alignés. [42]

VISUALISATION

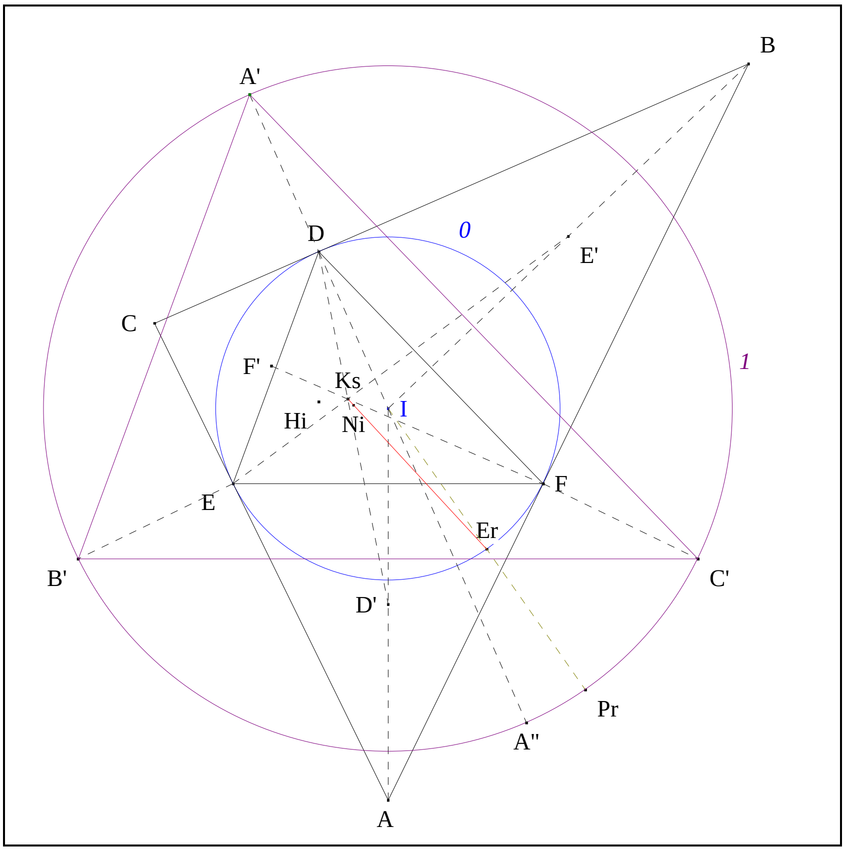
- Pour plus de visibilité et de compréhension, présentons la figure sous un autre regard plus parlant.



[42] Property of Kariya point, AoPS du 02/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h612271

- Notons *1* le cercle inscrit à ABC,
  A', B', C' les symétriques de I resp. par rapport à (BC), (CA), (AB),
  2 le cercle circonscrit à A'B'C',
  A", B", C" les symétriques de A', B', C' par rapport à I,
  Er l'antipoint d'Euler de DEF
  et Pr le point de Parry de DEF.

- **Scolies** [43]**:**
  (1) Er est sur *1*
  (2) Pr est sur *2*
  (3) *1* et *2* sont concentriques
  (4) Er est le milieu de [IPr]
  (5) Er est le point de Feuerbach de DEF [44].



- Notons D', E', F' les milieux resp. de [IA], [IB], [IC],
  Ks le point de Kosnitza de DEF
  et Ni le centre du cercle d'Euler de DEF.

- **Scolie :** Ni est le milieu de [IHi].

- ABC étant le triangle tangentiel de DEF,
  D', E', F' sont les centres des cercles circonscrits resp. aux triangles IEF, IFD, IDE.

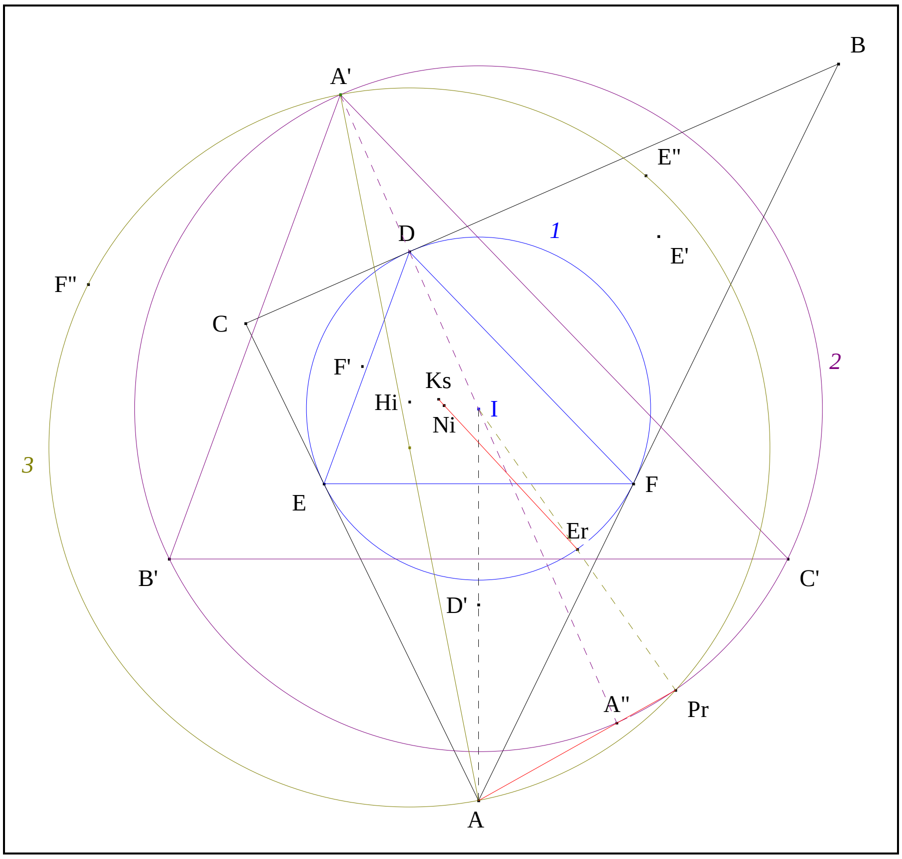
- D'après "Le point de Kosnitza" [45], (DD'), (EE') et (FF') concourent en Ks.

[43] Ayme J.-L., Symétrique d'une droite par rapport à un côté d'un triangle, G.G.G. vol. **17**, p. 3-4, 25-27 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[44] Ayme J.-L., Droite de Simson de pôle Fe relativement au triangle de contact ; G.G.G. vol. **7**, p. 16-17 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[45] Ayme J.-L., Le point de Konitza, G.G.G. vol. **26**, p. 4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- **Conclusion partielle :** d'après "Le point de Kosnitza" [46], Ks, N et Er sont alignés.



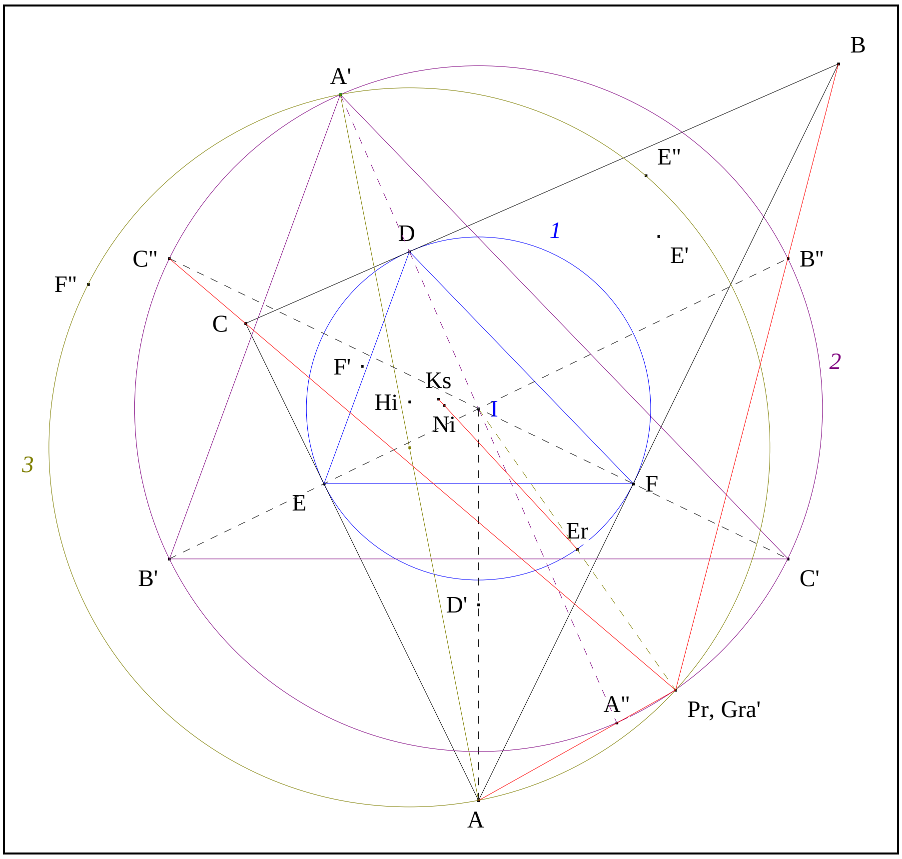
- Notons E", F" les symétriques de E, F resp. par rapport à (DF), (DE)
  et *3* le cercle de diamètre [AA'].

- D'après "Le premier résultat de Jean-Pierre Ehrmann" [47], *3* passe par Pr.

- **Conclusion partielle :** (A'A) et (A'A") étant deux droites diamétrales resp. de *3*, *2*, (AA") passe par Pr.

---

[46] Ayme J.-L., Le point de Konitza, G.G.G. vol. **26**, p. 65 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[47] Ayme J.-L., Symétrique d'une droite par rapport à un côté d'un triangle, G.G.G. vol. **17**, p. 29-31 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

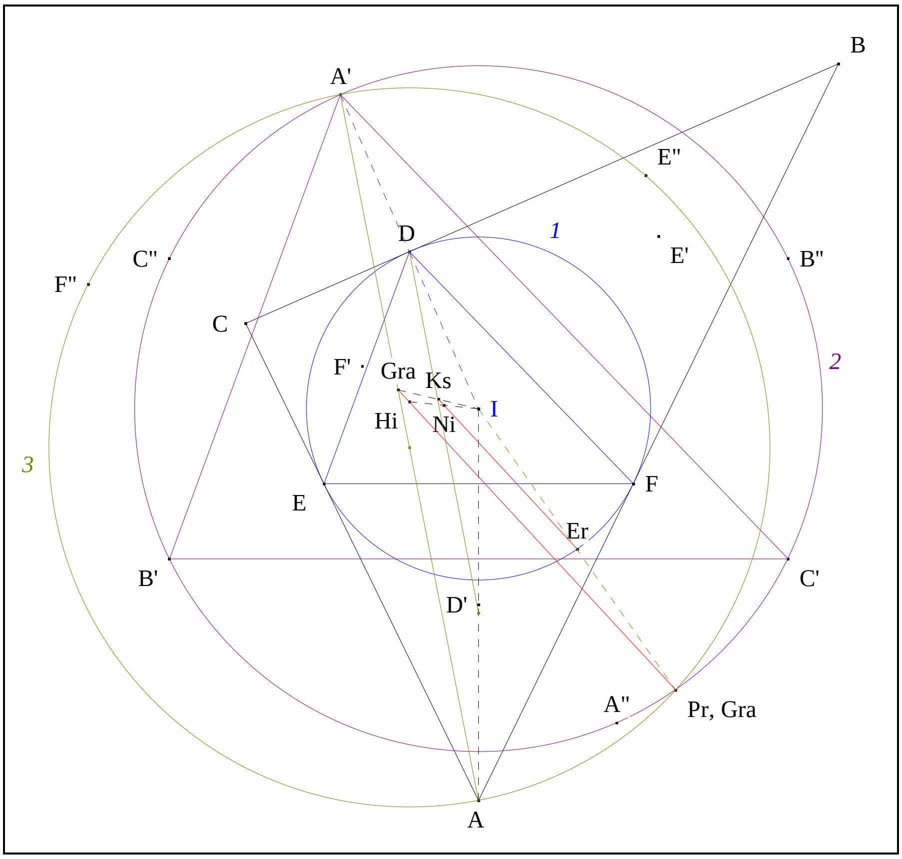


- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que * (BB") passe par Pr

  * (CC") passe par Pr.

- **Conclusion partielle :** Pr est l'antipoint de Gray de ABC.

- Notons Gra' le point Pr.

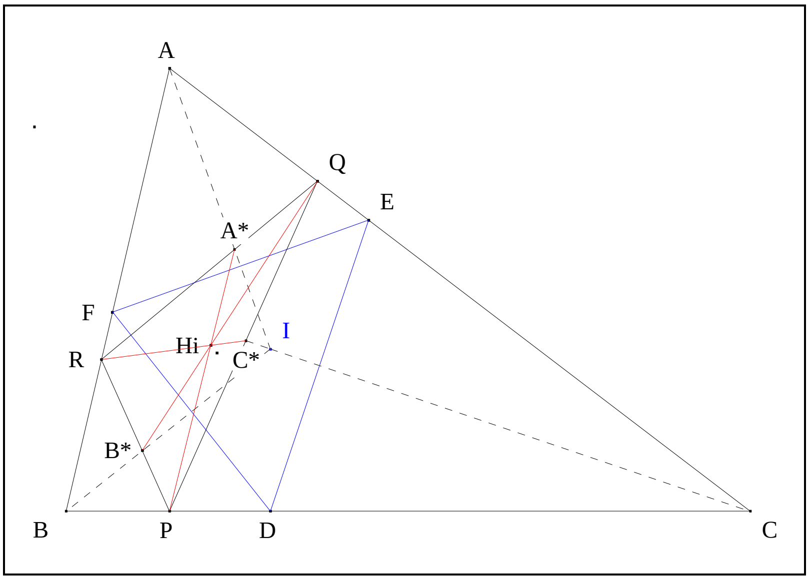


- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle IAA', (DD') // (AA').
- D'après **D. 1.** Le point de Gray, (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
- Notons Gra ce point de concours.
- A'B'C' étant homothétiques à DEF (centre I, rapport 2), Ks est le milieu de [IGra].
- **Conclusion :** Gra', Gra (i.e. Pr) et Hi sont alignés.

6. Parlons de Hi

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
PQR le triangle orthique de ABC,
A*, B*, C* les points d'intersection de (AI) et (EF), (BI) et (ED), (CI) et (DE),
DEF le triangle de contact de ABC
et Hi l'orthocentre de DEF.

Donné : (PA*), (QB*) et (RC*) concourent en Hi. [48]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [49]

Scolies : **(1)** Hi est le cross-cevian point de H et I relativement à ABC

(2) Hi est répertorié sous X_{65} chez ETC [50].

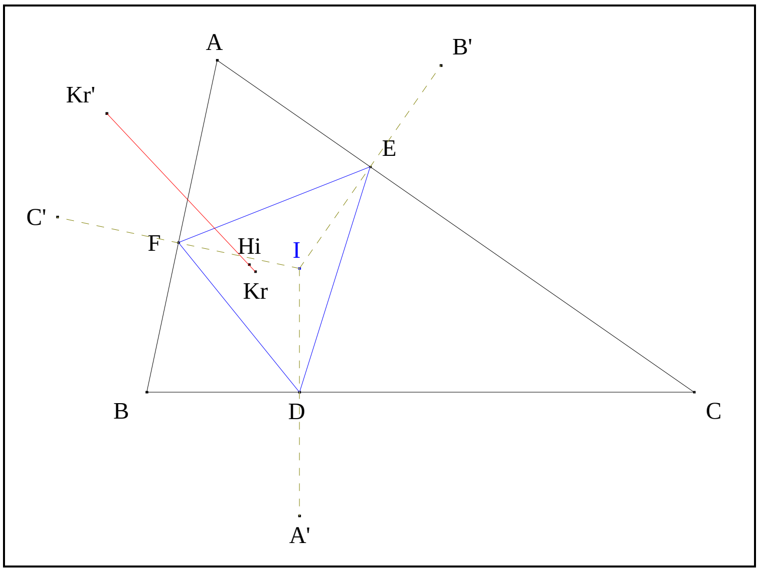
48 Property of Kariya point, AoPS du 02/1/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h612271
49 Ayme J.-L., The cross-cevian point, G.G.G. vol. **3**, p. 26-29 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
50 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X79

E. L'ALIGNEMENT Kr – Kr' – Hi

1. Le résultat

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	Hi	l'orthocentre de DEF,
	A', B', C'	trois points de [ID[, [IE[, [IF[tels que IA' = IB' = IC',
	Kr	le point de Kariya de ABC
et	Kr'	l'antipoint de Kariya de ABC.

Donné : Kr', Kr et Hi sont alignés. [51]

Commentaire : l'auteur, après de longue recherches, n'a pas trouvé de preuve synthétique de ce résultat… Une preuve mettant en jeu l'hyperbole de Feuerbach et une involution entre Kr et Kr' conduit au résultat.

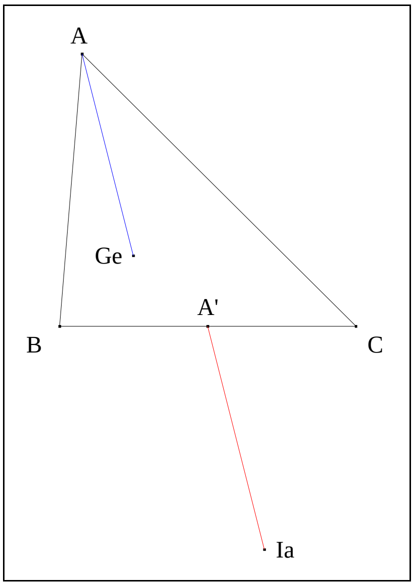
[51] Property of Kariya point, AoPS du 02/1/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h612271
Points de Kariya, une preuve par homographie, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1251781

U. APPENDICE

1. Parallèle à une gergonnienne

VISION

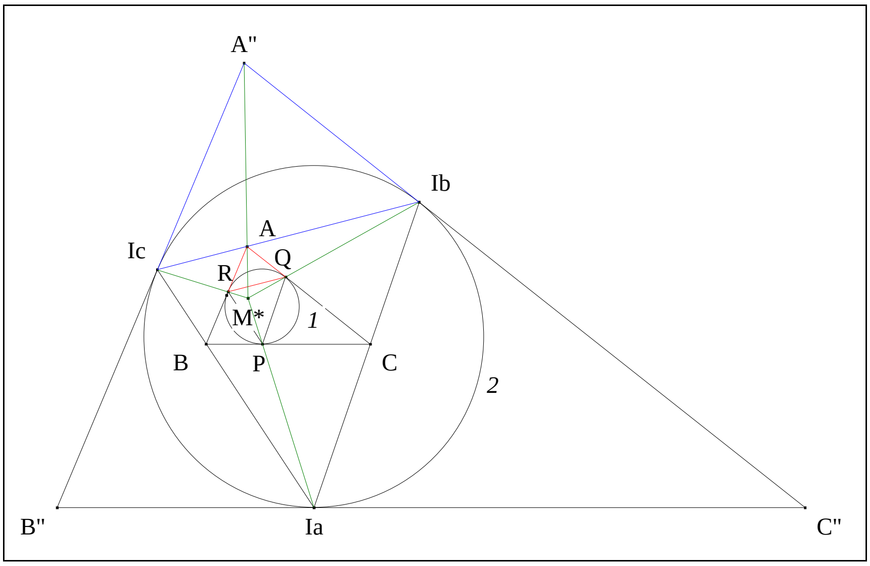
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	Ge	le point de Gergonne de ABC,
	Ia	le A-excentre de ABC
et	A'	le milieu de [BC].

Donné : (A'Ia) est parallèle à (AGe).

VISUALISATION



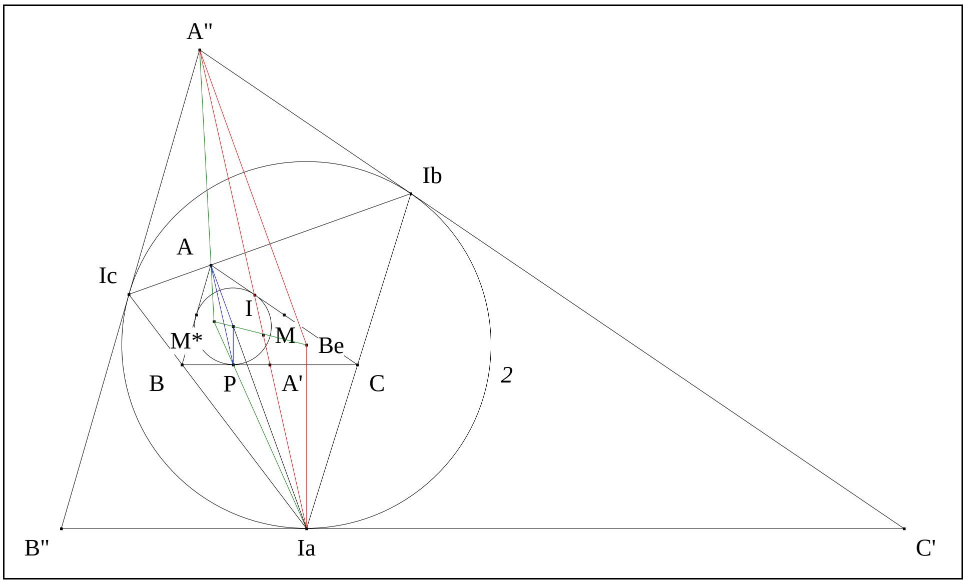
- Notons PQR le triangle de contact de ABC,
  IaIbIc le triangle excentral de ABC
  et A"B"C" le triangle tangentiel de IaIbIc.

- D'après Döttl "Triangles de contact et excentral", (IaP), (IbQ) et (IcR) sont concourantes.

- Notons M* ce point de concours,
  et *1*, *2* les cercles circonscrits resp. à PQR, à IaIbIc.

- Les triangles tangentiels ABC, A"B"C" des triangles homothétiques PQR, IaIbIc sont homothétiques.

- **Conclusion partielle :** d'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué au triangles homothétiques A'IcIb et ARQ de centre M*,
  M*, A et A" sont alignés.



- Notons I, Be les centres resp. de *1*, de *2*.

- D'après L'Huilier "Un excentre", A, I et Ia sont alignés.

- Nous avons : (AIa) ⊥ (IbIc) ;
  Be étant le centre de A"B"C", (IbIc) ⊥ (A'Be) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (AIa) // (A"Be).

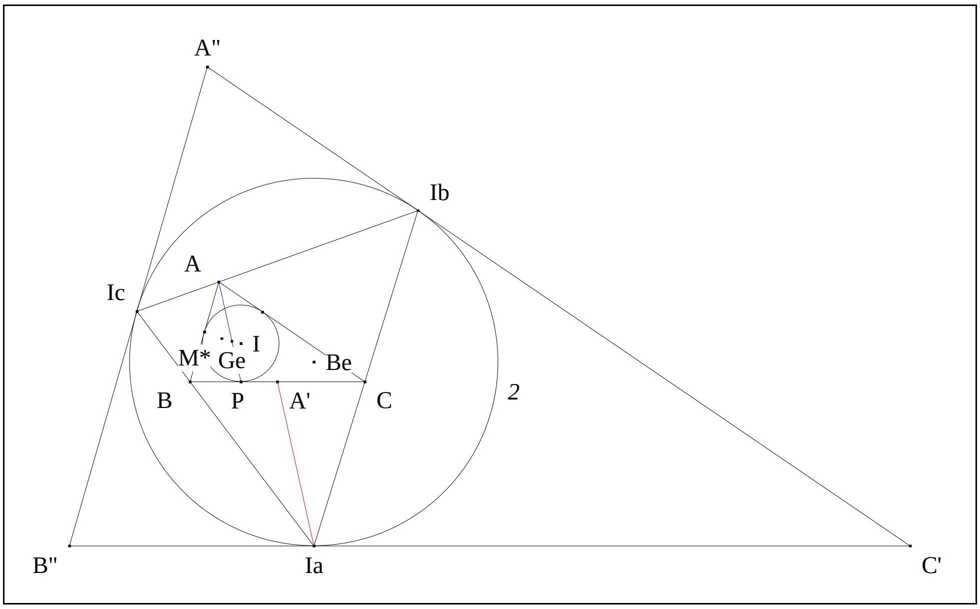
- Nous avons : (IP) ⊥ (BC) ;
  d'après "Le point de Bevan", (BC) ⊥ (BeIa) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (IP) // (BeIa).

- D'après Döttl "Triangles de contact et excentral", M*, I et Be sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué au triangles API et A"IaBe en perspective de centre M*,
  (AP) et (A"Ia) sont parallèles.

- D'après "La figure de Chasles", (IaA") est la Ia-symédiane de IaIbIc.

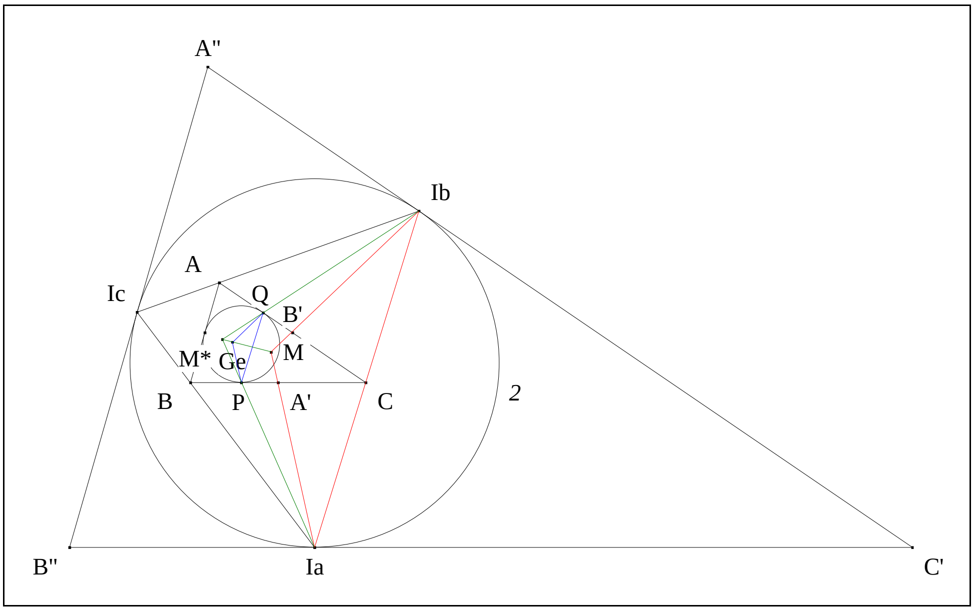
- D'après Boutin "Milieu d'un segment", (IaA") passe par A'.



- D'après "Le point de Gergonne", (AP) passe par Ge.

- **Conclusion :** (A'Ia) est parallèle à (AGe).

Scolies : **(1)** trois points alignés



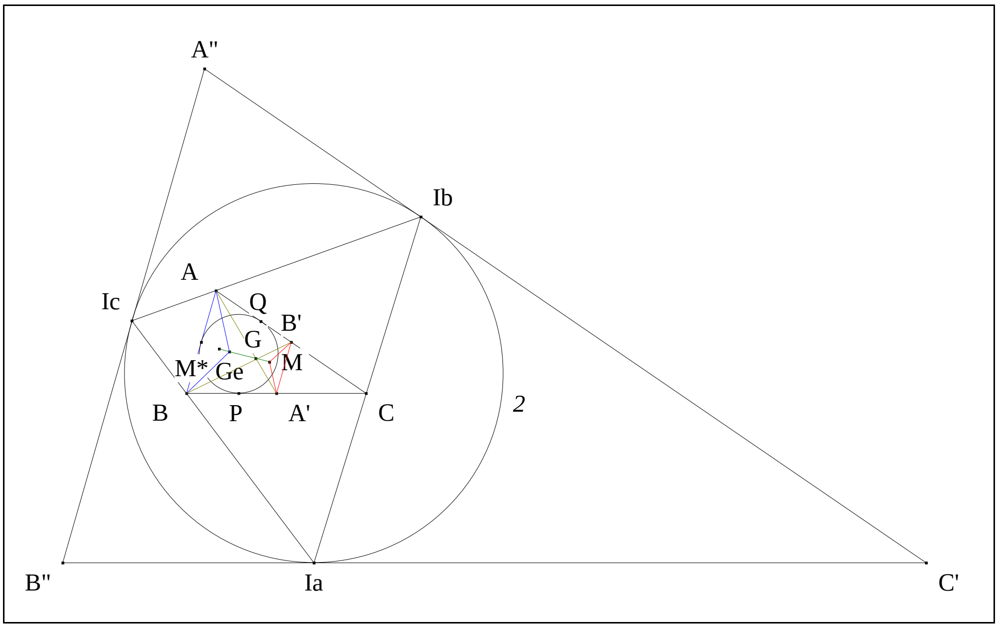
- D'après Nagel "Der Mittenpunckt", (IaA'), (IbB') et (IcC') sont concourantes au Mittenpunck de ABC.

- Notons M ce point de concours.

- Nous avons :
  - * M*, P et Ia sont alignés
  - * M*, Q et Ib sont alignés.

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" appliqué au triangles homothétiques GePQ et MIaIb, M*, Ge et M sont alignés.

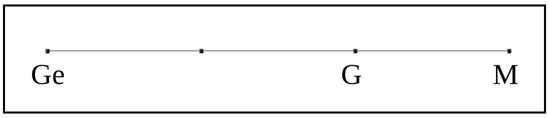
(2) le point médian de ABC



- Notons G le point médian de ABC.
- Les droites (AA') et (BB') se coupent en G.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" appliqué au triangles homothétiques AGeB et A'MB', Ge, G et M sont alignés (avec M*).

Note historique : Peter Baptist[52] signale que ce résultat a été trouvé par von Nagel.

(3) Une relation

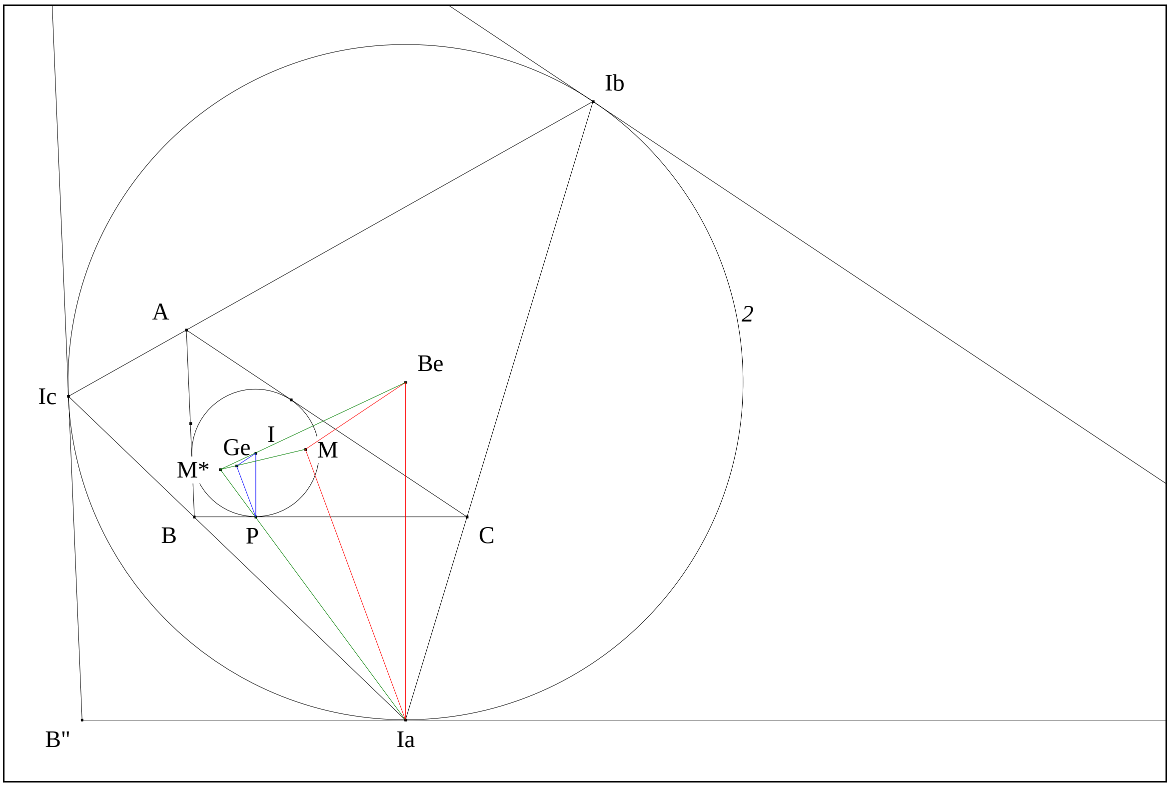


- D'après Archimède "le point médian", G est le premiers tiers-point de [AA'] à partir de A'.
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports" appliqué à la bande de frontières (AGe) et (A'M), G est le premiers tiers-point de [GeM] à partir de M.

(4) M est le point complémentaire de Ge
ou encore
Ge est le point anticomplémentaire de M.

(4) Deux droites parallèles

[52] Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992).



- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué au triangles GePI et MIaBe en perspective de centre M*,
  (IGe) et (BeM) sont parallèles.