CULTURE GÉOMÉTRIQUE 6

UNE MID – PERPENDICULAIRE

PASSANT

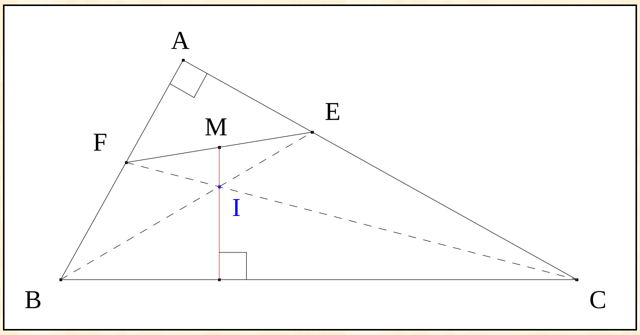
PAR

LE CENTRE

D'UN

TRIANGLE RECTANGLE

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente un problème concerna.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a problem concerning .
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Sommaire

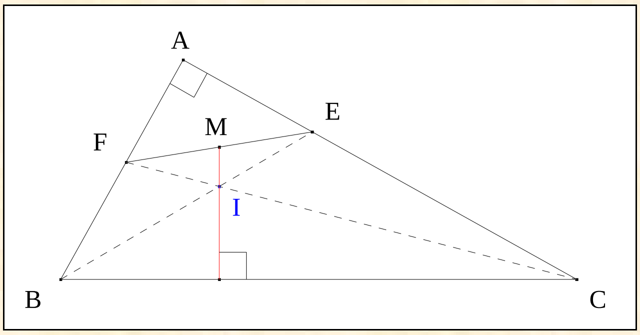
[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan indien, France), le 31/08/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

LE PROBLÈME

Virgil Nicula

VISION

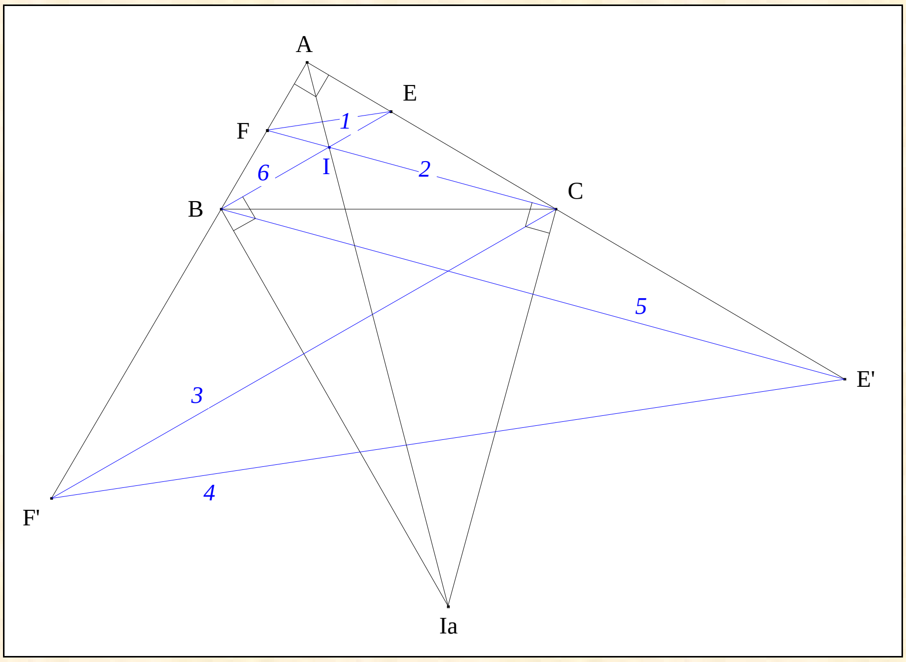
Figure :



Traits : ABC un triangle A-rectangle,
I le centre du cercle inscrit à ABC,
E, F les pieds de B, C-bissectrices intérieures de ABC
et M le milieu de [EF].

Donné : (MI) est perpendiculaire à (BC). [2]

VISUALISATION

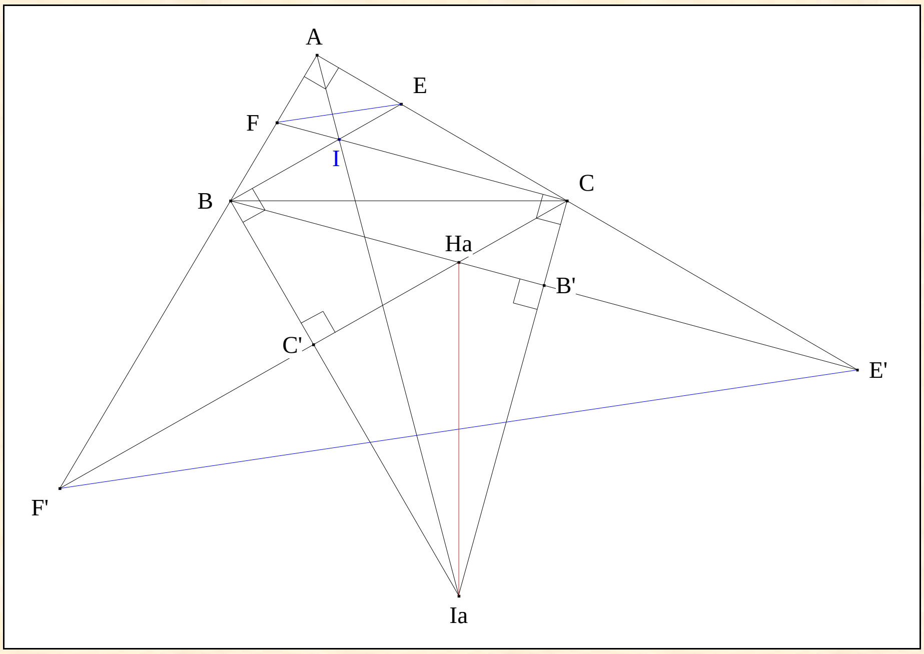


- Notons Ia le A-excentre de ABC,
  E' le point d'intersection de la parallèle à (CF) issue de B avec (AC)
  et F' le point d'intersection de la parallèle à (BE) issue de C avec (AB).

[2] Perpendicularity in a right-angled triangle, AoPS du 01/09/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c4t48f4h1299267_perpendicularity_in_a_rightangled_triangle

- D'après Pappus "Le petit théorème" [3]
  appliqué à l'hexagone sectoriel EFCF'E'BE, (EF) // (E'F').

- D'après Simon L'Huilier "Un excentre", A, I et Ia sont alignés.



- Notons Ha le point d'intersection de (BE') et (CF').

- Par construction de Ia, (CIa) ⊥ (CF) ;
  (CF) // (BE') ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (CIa) ⊥ (BE').

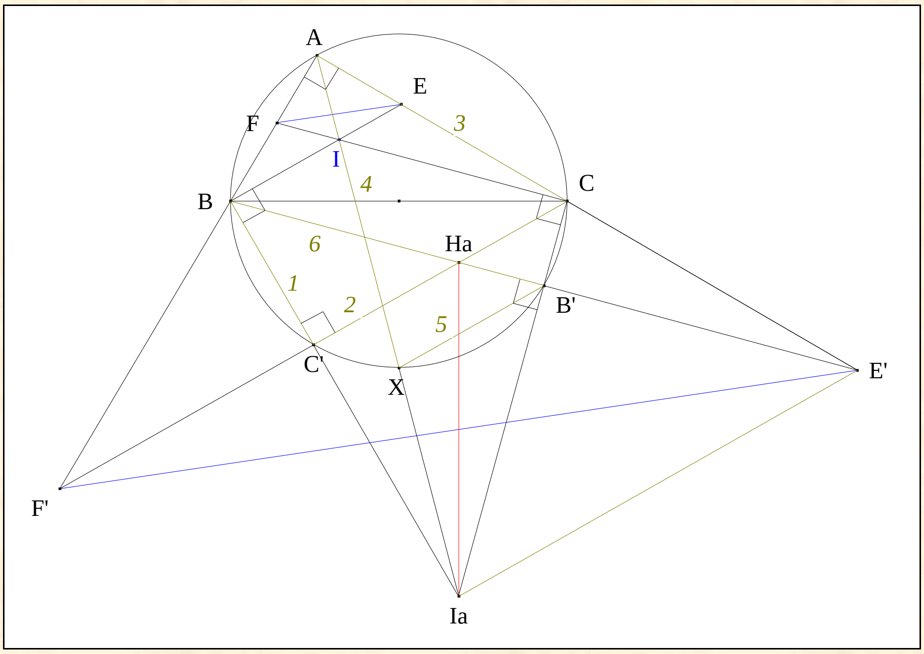
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BIa) ⊥ (CF').

- D'après Archimède "L'orthocentre", Ha est l'orthocentre du triangle IaBC.

- **Conclusion partielle :** par définition d'une hauteur, (IaHa) ⊥ (BC).

- Notons B', C' les points d'intersection resp. de (BE') et (CIa), (CF') et (BIa).

[3] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

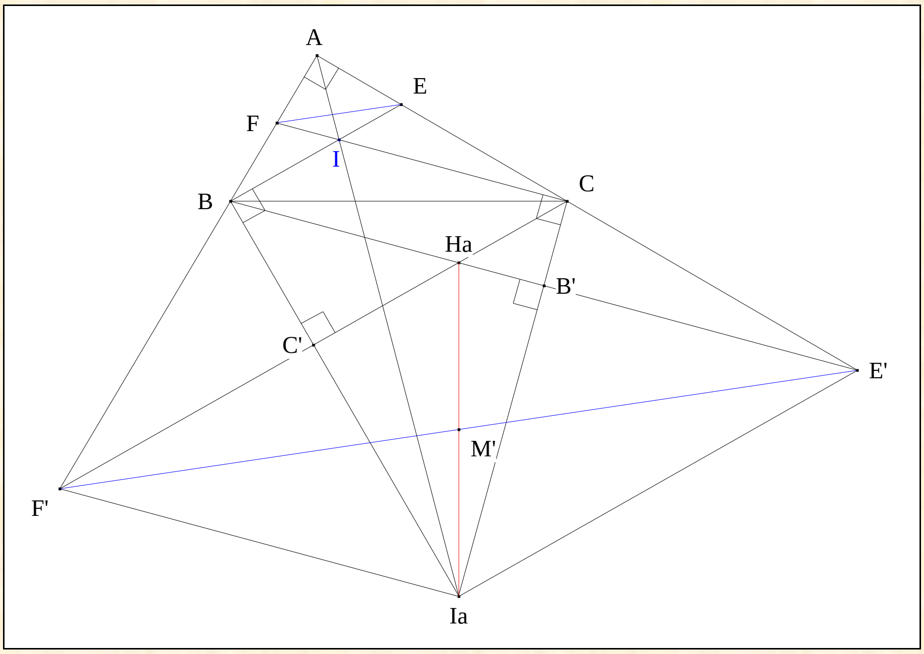


- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC ; il passe par B' et C' ;
  et X le second point d'intersection de (AI) avec 0.

- D'après "La parallèle de Mention" [4], (B'X) // (BE) ;
  par construction, (BE) // (CC') ;
  par transitivité de la realtion //, (B'X) // (CC').

- D'après Aubert-Pascal "Hexagramma mysticum" [5]
  appliqué à l'hexagone cyclique BC'CAXB'B **(1)** (IaE') en est la pascale

  (2) (IaE') // (CC'F').



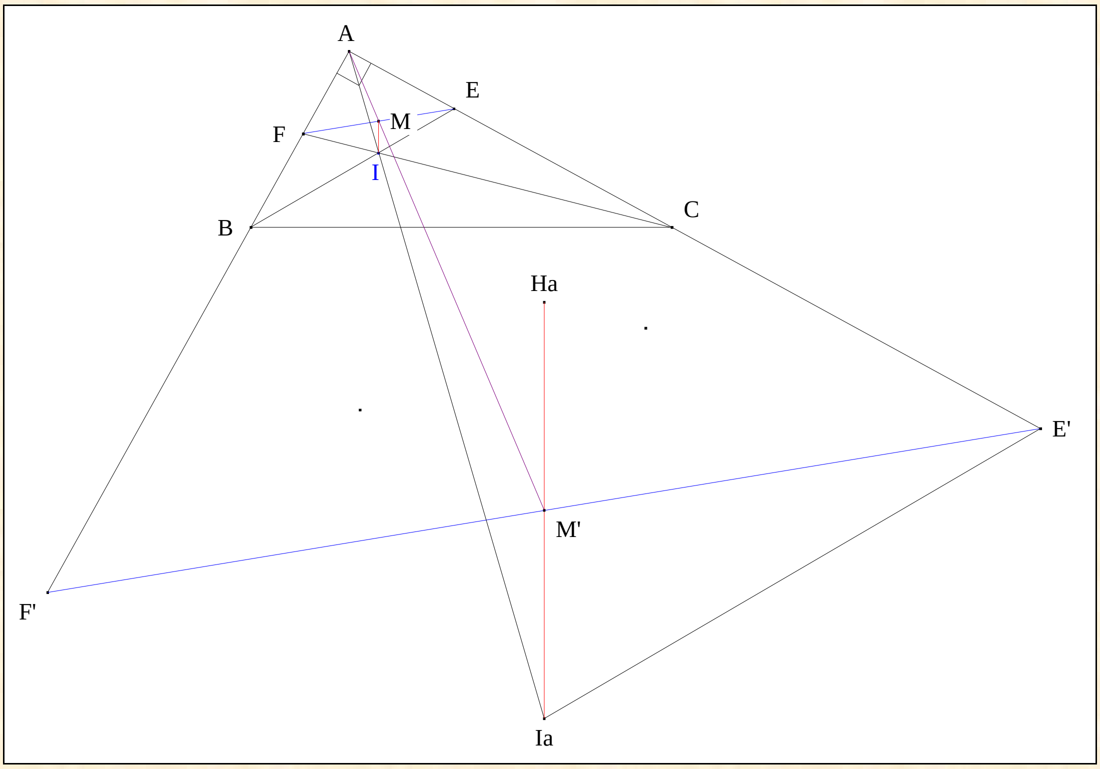
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IaF') // (BB'E').

---

4 Ayme J.-L., Deux résultats de Jules Alexandre Mention, G.G.G. vol. **25**, p. 6-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
5 Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- Notons M' le point d'intersection de (IaHa) et (E'F').

- **Conclusion partielle :** le quadrilatère HaF'IaE' étant un parallélogramme, M' est le milieu de [E'F'].



- D'après Thalès "Le trapèze complet" appliqué au trapèze EFF'E', A, M et M' sont alignés.

- D'après Desargues "Le théorème faible" [6]
  appliqué aux triangles perspectifs MIE et M'IaE' de centre A, (MI) // (M'Ia) ;
  nous avons : (M'Ia) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (MI) ⊥ (BC).

- **Conclusion :** (MI) est perpendiculaire à (BC).

6 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 40-44 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/