LE CERCLE DE LESTER

PREMIÈRE PREUVE SYNTHÉTIQUE

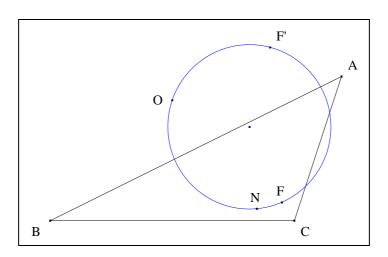
Jean-Louis AYME 1

Comment les géomètres du siècle précédent ont-ils pu manquer un tel cercle?

Résumé.

Nous présentons une preuve synthétique, peut être la première, du cercle de Lester. Elle prend pour point de départ, la fascinante figure de Cundy, s'intéresse à une remarquable symédiane, considère un cercle tangent à la droite d'Euler et se termine par le cercle de Lester. Les théorèmes cités en annexe peuvent être tous démontrés synthétiquement.

I. LE CERCLE DE JUNE A. LESTER 2



Traits: **ABC** un triangle scalène,

F, F' les premier, second points de Fermat de ABC

O, N les centres des cercles circonscrit, d'Euler de ABC. et

Donné: O, N, F et F' sont cocycliques.

Note historique: ce cercle a été découvert avec l'aide d'un ordinateur en 1996 par la canadienne June A.

Lester. Il a été popularisé

par Clark Kimberling³, le fondateur de ETC⁴, qui lui donna le nom de la chercheuse.

Janvier 2008.

Lester J. A., problème 19, Triangle III: Complex triangle functions, Aequationes Mathematicae 53 (1997) 4-35. http://thejuniverse.org/geometry/LC/

En 1996, June Lester en donne une preuve analytique en recourant aux birapports complexes.

En 2000, Bernard Gibert⁵ propose un schéma de démonstration à partir d'un problème plus général reposant sur l'hyperbole de Kiepert et cela sans donner la moindre preuve. Je suppose que les résultats ont été obtenus à partir de l'emploi des coordonnées trilinéaires.

"M un point de la droite d'Euler et *P*m la perpendiculaire à celle-ci en M. *P*m rencontre l'hyperbole de Kiepert en X1 et X2. Le cercle de diamètre [X1X2] passe par les deux points de Fermat. Lorsque M est le point médian G, ce cercle est tangent à la droite d'Euler; lorsque M est le milieu du segment joignant les centres des cercles circonscrit et d'Euler, on trouve le cercle de Lester".

La même année, M. Trott⁶ présente une preuve algébrique s'appuyant sur les bases de Groebner en utilisant le logiciel *Mathematica*.

En 2001, Ron Shail⁷ propose une preuve analytique basée sur l'utilisation des coordonnées cartésiennes et justifie l'utilisation d'un logiciel de calcul face à la complexité des expressions polynomiales à manipuler.

En 2003, Henry Martyn Cundy⁸ propose une preuve analytique basée sur les complexes et l'hyperbole de Kiepert.

La même année John Rigby⁹ propose une preuve de même nature mais ne nécessitant pas le recours à un logiciel de calcul.

En 2006, l'espagnol Nicholas Rosillo Fernandez¹⁰ en donne une preuve analytique assistée par ordinateur, en utilisant les coordonnées trilinéaires.

Sans en connaître l'année, une n-ième preuve analytique a été donnée par J. A. Scott¹¹ ainsi qu'une preuve projective par Michael Dufff¹² en passant d'une hyperbole à un cercle.

Les preuves synthétiques ont souvent été demandées par différents géomètres.

II. LA FASCINANTE FIGURE DE CUNDY

Kimberling C., Lester Circle, *Math. Teacher* 89 (1996) 26.

Encyclopedia of Triangle Centers.

Gibert B., Feuerbach, Kiepert, Lester and co, Message *Hyacinthos* # 1270 du 22/08/2000.

Trott M., A Proof or Lester's Circle Theorem; http://library.wolfram.com/demos/v3/GeometryProof.nb;

Applying Groebner basis to three Problems in Geometry, Mathematica in Education and Research 6 (1997) 15-28.

Shail R., A proof of Lester's theorem, *Mathical Gaette*. 85 (July 2001) 226-232.

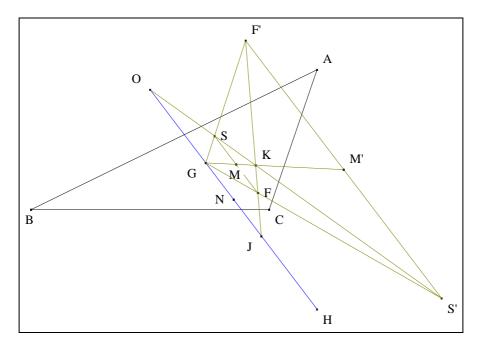
⁸ Cundy H. M., A journey round the triangle, Lester's circle, Kiepert's hyperbola and a configuration from Morley (July 2003).

Rigby J., A simple proof of Lester's theorem, *The Mathematical Gazette* (2003) 444-452.

Barroso R., Lester circle solve, Messsage *Hyacinthos* # 13562 du 05/07/2006.

Scott J. A., Two more proof of the Lester's theorem, *The Mathematical Gazette* (?) 553-556.

Duff M., The Mathematical Gazette, 89.85 (?) 505-506.



Traits: ABC un triangle,

G, H le point médian, l'orthocentre de ABC,

O, N les centres des cercles circonscrit, d'Euler de ABC,

K le point de Lemoine de ABC,

F, F' les premier, second points de Fermat de ABC,

S, S' les premier, second points isodynamiques de ABC,

M, M' les milieux de [FS], [F'S']
J le point crucial de Cundy.

Commentaire : toutes ces notations et tous les résultats de l'article "La fascinante figure de Cundy" seront utilisés dans ce qui suit.

La conviction de Cundy partagée par l'auteur :

en tombant sous le charme de cette fascinante figure découverte partiellement par Frank Morley et son fils Frank V., et complétée par Henry Martyn Cundy, celui-ci a la ferme conviction qu'elle peut dévoiler au géomètre qui la contemple, une preuve simple du cercle de June A. Lester.

L'observation de l'auteur :

et

Certains observent une configuration et ne voient rien, d'autres regardent la même figure et sont touchés par la Grâce

En regardant amicalement la fascinante figure de Cundy, l'auteur a reçu comme inspiration, une symédiane qui sera le germe invisible d'une preuve synthétique du cercle de Lester.

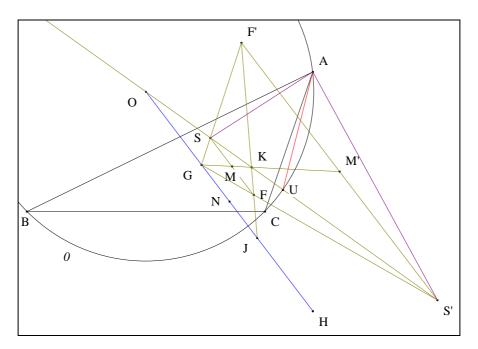
Ayant fait part de cette observation au géomètre américain Mark Tudosi, celui-ci m'a communiqué une série de résultats sans preuves, tirés du livre d'Efimov¹⁴. La considération de deux résultats dus à A. Boutin, m'a permis de prouver que (GK) est bien la G-symédiane du triangle GFF'.

Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. volume 2 (2008).

Efimov D., Novaia Geometria Treugolnika i.e. Modern Geometry of triangle (1902).

Note historique : en 1949, une exploitation métrique de la figure de Morley a été présentée par l'américain H. E. Fettis¹⁵ dans le *Monthly*.

III. $\frac{KF}{KF'}$ OU LE PREMIER RAPPORT 16



- Scolie : nous admettons que la figure de Cundy reflète, dans les alignements, la position générale des points.
- Notons 0 le cercle circonscrit de ABC et U, V les points d'intersection de (OK) avec 0.
- D'après "La fascinante figure de Cundy, VI. 3."

 (FS) et (F'S') étant parallèles, $\frac{KF}{KF'} = \frac{KS}{KS'}.$
- D'après "La fascinante figure de Cundy, II. 2. scolie 4", la quaterne (O, K, S, S') étant harmonique, $\frac{KS}{KS'} = \frac{OS}{OS'}.$
- D'après "La fascinante figure de Cundy, II. 2. scolie 6", la quaterne (U, V, S, S') étant harmonique et O le milieu de [UV], $\frac{OS}{OS'} = \frac{US.US}{US'US'}.$
- D'après "La fascinante figure de Cundy, II. 2. scolie 6", (AU) étant la A-bissectrice intérieure du triangle ASS', $\frac{US}{US'} = \frac{AS}{AS'}.$

. .

Fettis H. E., The Fermat and the Hessian Points of the Triangle, Amer. Math. Monthly (1949) 74-78.

Routin A

• Par transitivité de la relation = et par substitution,

$$\frac{KF}{KF'} = \frac{AS.AS}{AS'.AS'} .$$

• Notons SaSbSc le triangle S-pédal de ABC et S'aS'bS'c le triangle S'-pédal de ABC.

• D'après "La fascinante figure de Cundy, IV. 2.",

SbSc = AS.sin < BACS'bS'c = AS'.sin < BAC.

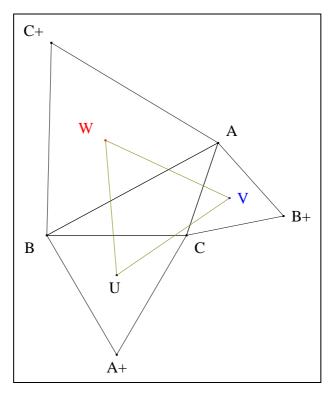
• Notons SbSc = a et S'bS'c = a'.

• Conclusion: $\frac{KF}{KF'} = \frac{a.a}{a'.a'}$.

Commentaire: K divise [FF'] dans le rapport des carrés des côtés des triangles S, S'-pédaux de ABC.

IV.
$$\frac{GF}{GF'}$$
 OU LE SECOND RAPPORT 17

1. Le premier triangle de Napoléon



Traits: ABC un triangle,

BA+C, CB+A, AC+B trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à ABC

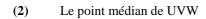
et U, V, W les centres de BA+C, CB+A, AC+B.

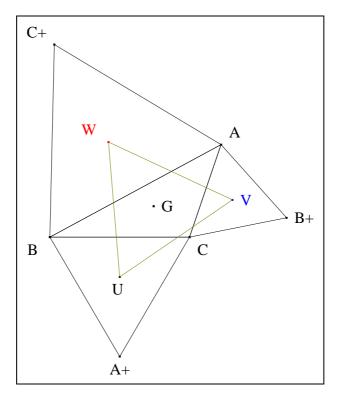
Donné : le triangle UVW est équilatéral.

Boutin A..

_

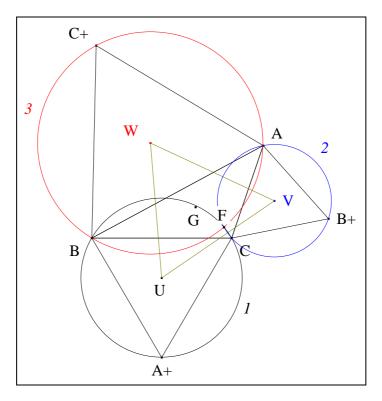
Scolies: (1) UVW est "le premier triangle de Napoléon relativement à ABC".





- Notons G le point médian de ABC.
- Conclusion : G est le point médian de UVW.

2. Le premier point de Fermat



Traits: ABC un triangle,

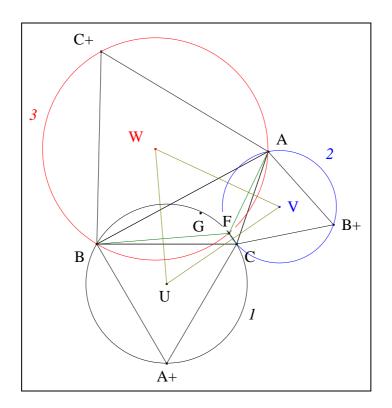
BA+C, CB+A, AC+B trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à ABC 1, 2, 3 les cercles circonscrits resp. de BA+C, CB+A, AC+B.

Donné : 1, 2 et 3sont concourants.

et

Scolies : (1) ce point de concours, noté F, est le premier point de Fermat ; il est répertorié sous X_{13} chez ETC.

(2) Le triangle F-symétrico de UVW



• D'après le théorème de la médiatrice,

(VW) est la médiatrice de [FA]

(WU) est la médiatrice de [FB] (UV) est la médiatrice de [FC].

• Conclusion: par définition, ABC est le triangle F-symétrico de UVW.

Note historique:

au printemps 1644, le père Marin Mersenne¹⁸ entreprenait un pèlerinage à Rome. Aux étapes de Bologne, puis de Florence, il montrait aux savants de l'époque, "le problème de Fermat" qu'il emmenait avec lui dans ses bagages :

étant donné un triangle, rechercher le point tel que la somme de ses distances aux trois sommets, est minimale.

C'est ainsi que Bonaventure Cavalieri¹⁹, Evangelista Torricelli²⁰ et Vincenzo Viviani²¹ en prendront connaissance. La solution de Toricelli publiée en 1659 par son élève Viviani, avait pour point de départ la considération des trois triangles équilatéraux construits à l'extérieur sur les côtés du triangle et de leurs trois cercles circonscrits.

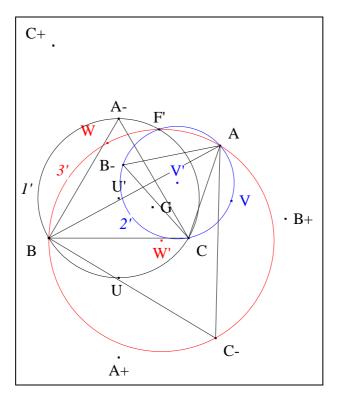
3. Le second point de Fermat

Mersenne M. (1588-1648).

Cavalieri B. (1598-1647).

Torricelli E. (1608-1647).

²¹ Viviani V. (1622-1703).



Traits: ABC un triangle,

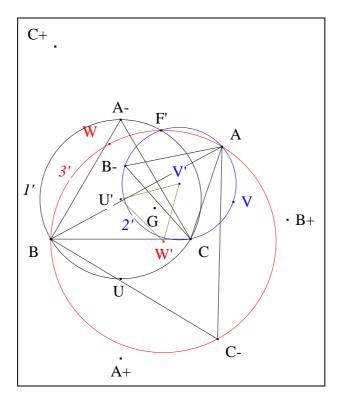
BA-C, CB-A, AC-B trois triangles équilatéraux adjacents intérieurement à ABC 1', 2', 3' les cercles circonscrits resp. de BA-C, CB-A, AC-B.

et

Donné: 1', 2' et 3' sont concourants.

Scolies: (1) ce point de concours, noté F', est le second point de Fermat ; il est répertorié sous X₁₄ chez ETC.

- **(2)** Une preuve synthétique basée à partir du premier point de Fermat, s'appuie sur les cercles de Schoute (Cf. Annexe 1).
- **(3)** Un triangle équilatéral

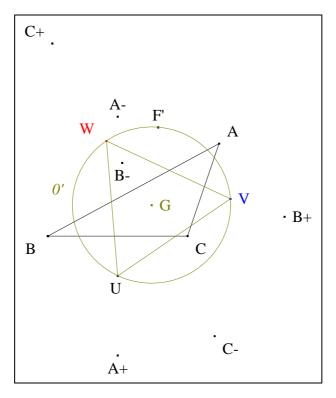


- Notons U', V', W' les centres de BA-C, CB-A, AC-B.
- Conclusion : le triangle U'V'W' est équilatéral.
 - (4) U'V'W' est "le second triangle de Napoléon relativement à ABC".
 - (5) G est le point médian de U'V'W'.

Note historique : reprenant l'idée de Toricelli, mais en remplaçant "extérieur" par "intérieur", Henri Brocard²² obtenait le "second point de Fermat".

4. Le cercle circonscrit du premier triangle de Napoléon

VISION



Traits: ABC un triangle,

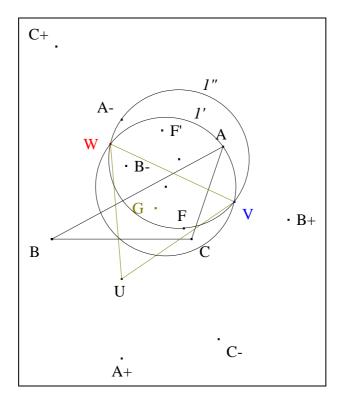
le premier triangle de Napoléon, le cercle circonscrit de UVW UVW

et le second point de Fermat.

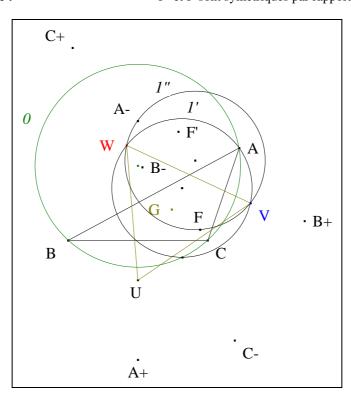
Donné: F' est sur 0'.

VISUALISATION

• Scolie: d'après IV. 1. scolie 2, G est le centre de 0'.



- Notons 1'le cercle circonscrit à AVW,
 - le premier point de Fermat
 - 1" le cercle circonscrit à FVW. et
- d'après IV. 2. scolie 2, ABC est le triangle F-symétrico de UVW • Scolie:
- Conclusion partielle: 1" et 1' sont symétriques par rapport à (VW).



- 2' 2" • Notons le cercle circonscrit à BWU,
 - le cercle circonscrit à FWU,

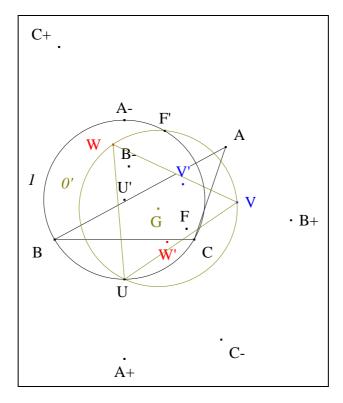
3' le cercle circonscrit à CUV,

3" le cercle circonscrit à FUV

et 0 le cercle circonscrit à ABC.

Mutatis mutandis, nous montrerions que
 2" et 2' sont symétriques par rapport à (WU).
 3" et 3' sont symétriques par rapport à (UV).

• **Conclusion partielle :** d'après "Les cercles de Schoute"²³ (Cf. Annexe 1) appliqué à UVW et à F, I'', I'' et I'' étant concourants en F, I', I' et I' concourent sur I'.



- Notons 1, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles UBC, UCA, UAB; ils passent resp. par A-, B-, C-.
- **Scolie :** d'après IV. 3., 1, 2 et 3 sont concourants en F'.
- D'après la technique d'accentuation 24 , 1, 2 et 3 concourent sur 0'.
- **Conclusion**: F' est sur 0'.

Note historique : ce résultat final est donné par Roger Arthur Johnson²⁵.

Une généralisation en a été donnée par Floor van Lamoen²⁶ et Jean-Pierre Ehrmann²⁷.

Scolies: (1) GF' = GU.

(2) Mutatis mutandis, nous montrerions que
F est sur le cercle circonscrit du second triangle de Fermat U'V'W';
ayant pour centre G, GF = GU'.

Ayme J.-L., Les points jumeaux de Pieter Hendrik Schoute, G.G.G. volume 2 (2008).

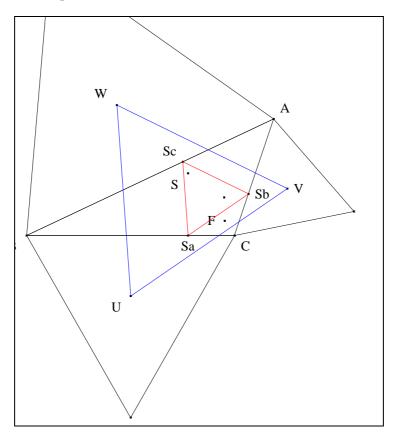
Ayme J.-L., Les points jumeaux de Pieter Hendrik Schoute, G.G.G. volume 2 (2008).

Johnson R. A., Advanced Euclidean Geometry, Dover, New York, 1960 (from 1929 original), n° 354 e, p. 220.

van Lamoen F., Some direles, Message *Hyacinthos* # 3774 du 08/09/2001...

Ehrmann J.-P., Some dircles, Message *Hyacinthos* # 3795 du 10/09/2001.

5. Deux triangles homothétiques



Traits: ABC un triangle,

UVW le premier triangle de Napoléon relativement à ABC,

S le premier point de Hesse de ABC,

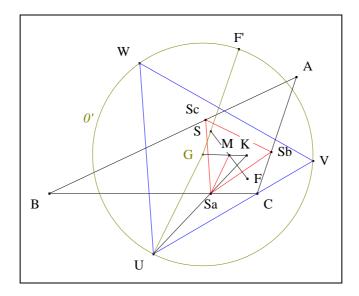
SaSbSc le triangle S-pédal de ABC

et F le premier point de Fermat de ABC.

Donné : UVW est homothétique à SaSbSc ²⁸.

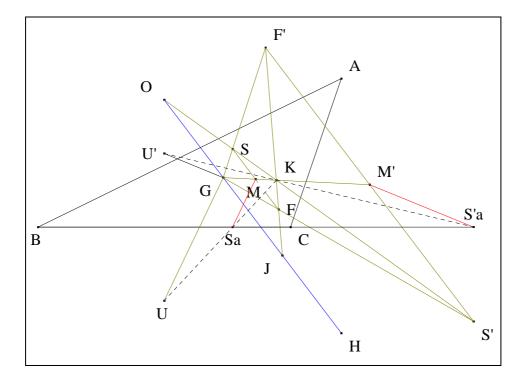
Scolies : (1) d'après "La fascinante figure de Cundy, IV. 3., K est le centre d'homothétie de UVW et SaSbSc, de U'V'W' et S'aS'bS'c.

(2) Le rapport $\frac{GU}{GU'}$



• Nous avons:

$$\frac{GU}{MSa} = \frac{KG}{KM}.$$



• Mutatis mutandis

$$\frac{GU'}{M'S'a} = \frac{KG}{KM'};$$

en conséquence,

$$\frac{GU}{GU'} = \frac{MSa}{MS'a} \cdot \frac{KM'}{KM}.$$

- Scolies :
- $\begin{tabular}{ll} \textbf{(1)} & M \end{tabular} \begin{tabular}{ll} M \end{tabular} \begin{tabular}{ll} \textbf{(sas)} & \textbf{(resp. S'aS'bS'c)}. \end{tabular}$
- (2) D'après le théorème d'al Kaschi,

SbSc = MSa.
$$\sqrt{3}$$

S'bS'c = MS'a.
$$\sqrt{3}$$
.

$$(3) \qquad \frac{KM'}{KM} = \frac{KF'}{KF}.$$

• Par substitution,
$$\frac{GU}{GU'} = \frac{SbSc}{S'bS'c} \cdot \frac{KF'}{KF}.$$

• Notons
$$SbSc = a$$
 et $S'bS'c = a'$.

• D'après III.,
$$\frac{KF'}{KF} = \frac{a'.a'}{a.a}$$

• Par substitution,
$$\frac{GU}{GU'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{a' \cdot a'}{a \cdot a} .$$

• Conclusion :
$$\frac{GU}{GU'} = \frac{a'}{a} .$$

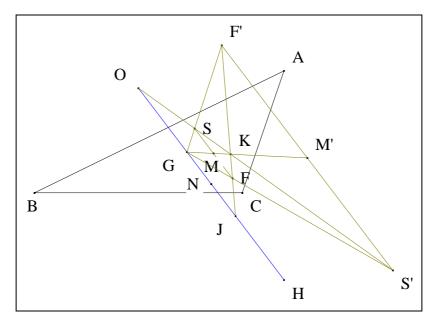
6. Le rapport
$$\frac{GF}{GF'}$$

• d'après IV. 4. scolie 1, 2
$$\frac{GF}{GF'} = \frac{GU'}{GU} .$$

• Conclusion: d'après IV. 5.,
$$\frac{GF}{GF'} = \frac{a}{a'}$$

Commentaire: GF et GF' sont proportionnels au rapport des côtés des triangles S, S'-pédaux de ABC.

V. LA SYMÉDIANE OBSERVÉE



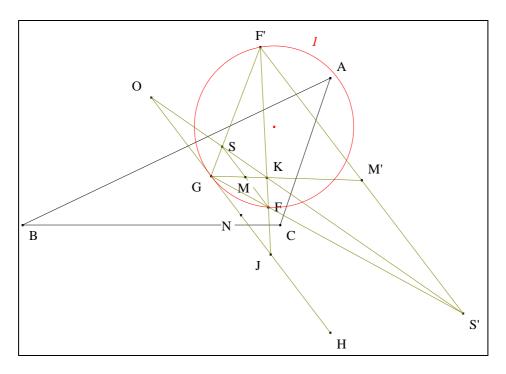
• Par substitution des deux résultats de A. Boutin (III. et IV. 6.),

$$\frac{KF}{KF'} = (\frac{GF}{GF'})^2.$$

• Scolie : K divise [FF'] dans le rapport des carrés des côtés du triangle GFF'.

Conclusion: K est le pied de la G-symédiane du triangle GFF'.²⁹

VI. UN CERCLE TANGENT À LA DROITE D'EULER



• Scolies: (1) (OG) est la droite d'Euler de ABC

(2) (FS) est parallèle à (OG).

• Le milieu M de [FS] étant sur la G-symédiane de GFF', (FS) est une G-antiparallèle de GFF'. 30

• Notons 1 le cercle circonscrit à GFF'.

• Conclusion: 1 est tangent à (OG) en G.

Note historique : l'auteur a redécouvert ce cercle tangent en G qui avait été déjà signalé par Bernard

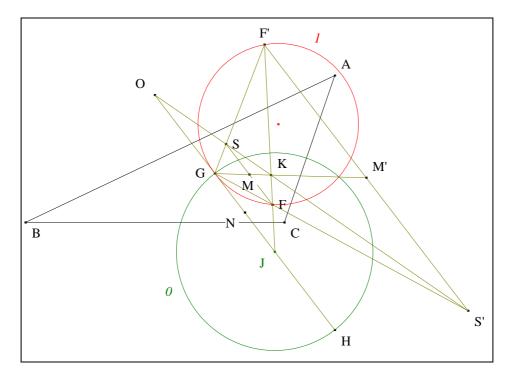
Gibert³¹ en 2000

Scolie: le cercle de diamètre [HG] ou le cercle orthocentroïdal

Casey J., A Sequel to the first six books of the Elements of Euclid, Dublin (1888), cor. 3, p. 171.

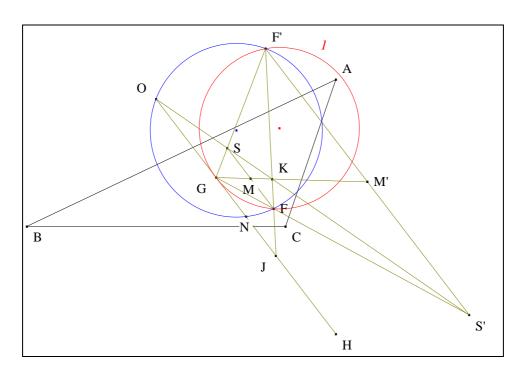
Gibert B., Feuerbach, Kiepert, Lester and co, Message *Hyacinthos* # 1270 du 22/08/2000.

Altshiller-Court Nathan, *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936) n° 564b, p. 249.



- Notons 0 le cercle de centre J passant par G.
- Conclusion: par définition, 0 est orthogonal à 1.

VII. LE CERCLE DE LESTER



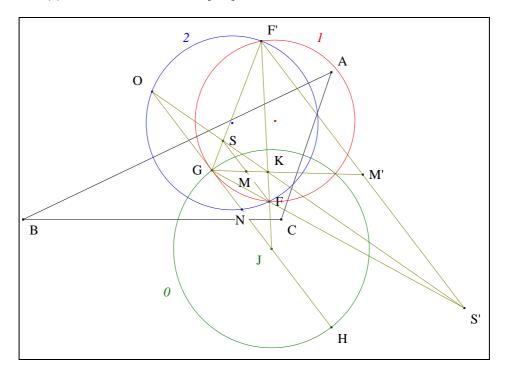
- 1 étant tangent à (OG) en G,
- $JF.JF^{\prime}=JG^{2}.$
- Scolie: la quaterne (O, N, G, H) est harmonique

• J étant le milieu de [GH], $JG^2 = JN.JO$; par transitivité de la relation =, JN.JF' = JN.JO.

• Conclusion: F, F', N et O sont cocycliques.

Scolies : (1) ce cercle est "le cercle de Lester de ABC".

(2) le cercle de diamètre [HG] ou le cercle orthocentroïdal

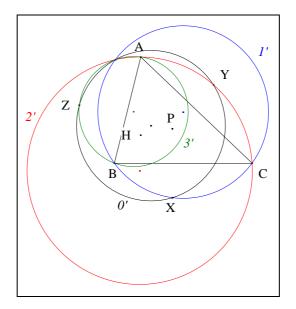


- Notons 2 le cercle de Lester de ABC.
- Conclusion: d'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 2), 0 est orthogonal à 2.

Remerciements: je suis reconnaissant à Mark Tudosi pour son aide fructueuse.

ANNEXE

1. Les cercles de Schoute³²



Traits: ABC un triangle,

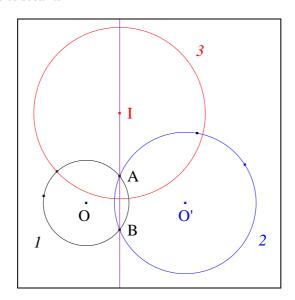
H l'orthocentre de ABC, P un point distinct de H,

X, Y, Z les symétriques de P par rapport aux droites (BC), (CA), (AB), 0', 1', 2', 3' les cercles circonscrits aux triangles XYZ, XBC, YCA, ZAB.

Donné : 1', 2' et 3' concourent sur 0'.

2. Axe radical de deux cercles sécants³³

et



Traits: 1, 2 deux cercles sécants,

O, O' les centres de 1, 2,

A, B les points d'intersection de 1 et 2,

3 un cercle orthogonal à 2

et I le centre de 3.

Donné : I est sur la droite (AB) si, et seulement si, 3 est orthogonal à 2.