LE TRIANGLE SOMMITAL

DES

TRIANGLES SYMÉTRIQUE ET TANGENTIEL

Jean-Louis AYME

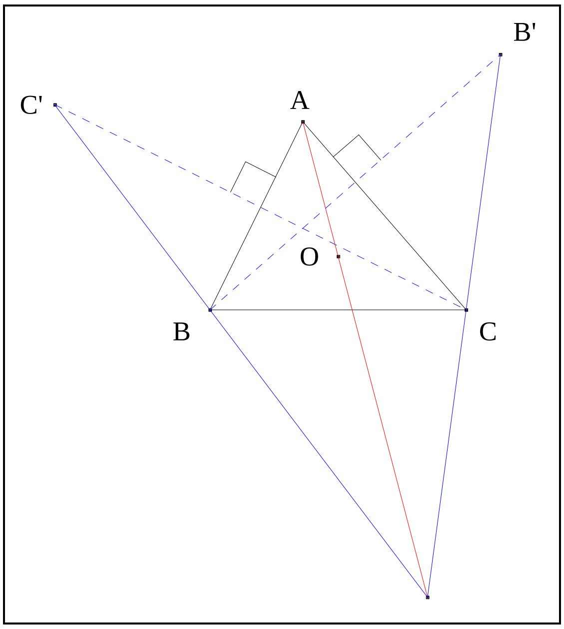
Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique d'un nouveau centre du triangle observé par l'auteur en 2007. Cette preuve prend pour point de départ, une parallèle à la droite d'Euler établie par Eugène Catalan, s'enchaîne sur un point de concours situé sur un cercle de Kosnita, précisé par Darij Grinberg, continue avec le résultat des époux Emelyanov publié en 2004 et se termine, en fin, sur ce nouveau centre, non répertorié chez ETC, en recourant au "cevian nests theorem".
Les théorèmes cités en annexe peuvent être tous démontrés synthétiquement.

EUGÈNE CHARLES CATALAN

1. Trois droites concourantes[1]

VISION

Figure :

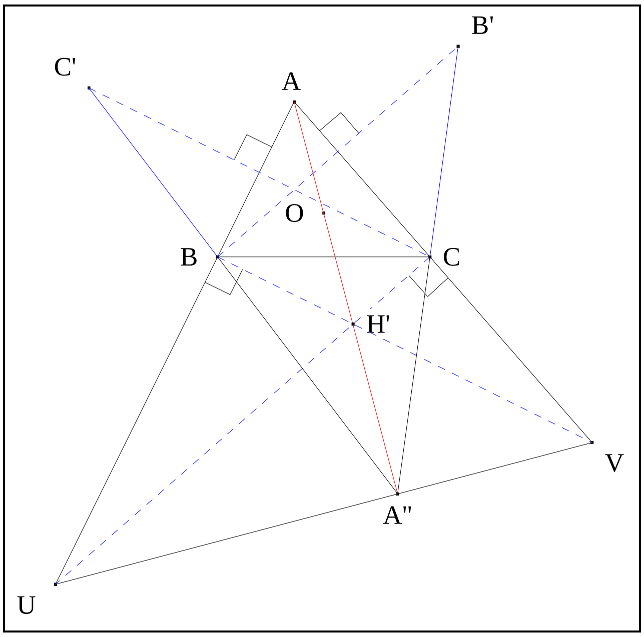


[1] Catalan E., Quelques théorèmes de géométrie élémentaire, *Journal de Mathématiques* III (1883) 61-62.

Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
et B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport (AC), (AB)

Donné : (BC'), (CB') et (AO) sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons U le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) élevée en C avec (AB),
  V le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) élevée en B avec (AC),
  H' l'orthocentre du triangle AUV
  et A" le point d'intersection de (AH') et (UV).

- **Scolies :** **(1)** O étant le milieu de [AH'], (AOH') passe par A".
  (2) A"CB est le triangle orthique de AUV

- D'après Feuerbach "Trois points alignés" (Cf. Annexe 1), **(1)** (BC') passe par A"
  (2) (CB') passe par A".

- **Conclusion :** (BC'), (CB') et (AO) sont concourantes.

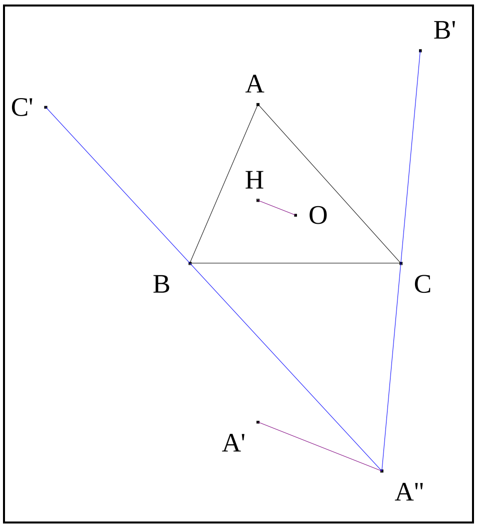
Note historique : ce résultat a été redécouvert par Darij Grinberg[2] et prouvé trigonométriquement.

2. Une parallèle à la droite d'Euler[3]

VISION

Figure :

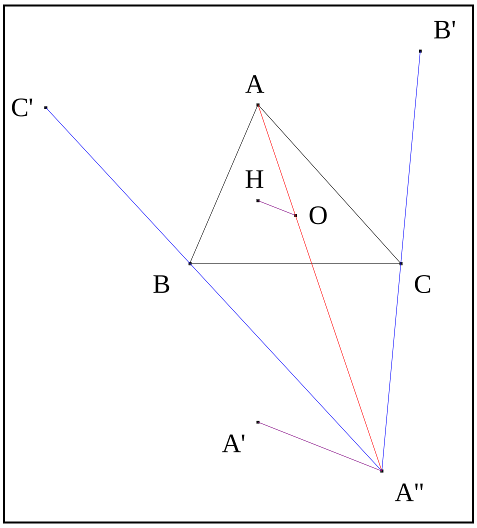
[2] Grinberg D., Euler Line parallels, Message *Hyacinthos* # 6515 du 09/02/2003.
[3] Catalan E., Quelques théorèmes de géométrie élémentaire, *Journal de Mathématiques* III (1883) 61-62.



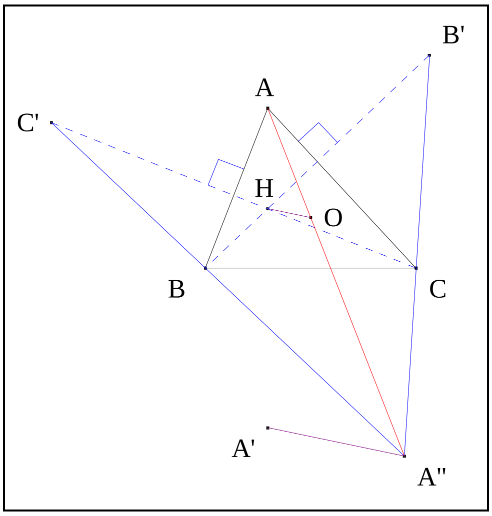
Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle symétrique de ABC
et A" le point d'intersection des droites (BC') et (B'C).

Donné : (A'A") et (OH) sont parallèles.

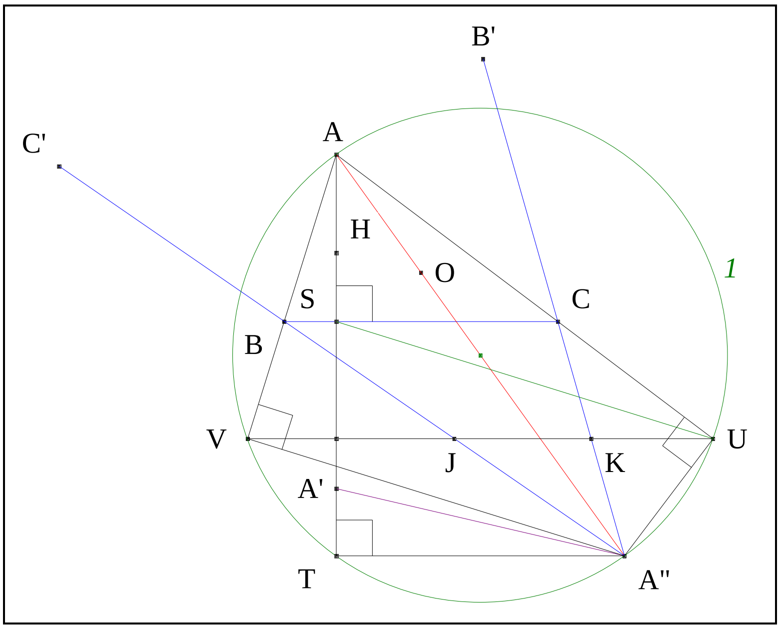
VISUALISATION



- D'après Catalan "1. Trois droites concourantes", (AA") passe par O.



- A étant le A"-excentre du triangle A"CB, (A"A) est la A"-bissectrice intérieure de A"CB.



- Notons U, V les pieds des perpendiculaires abaissées de A" resp. sur (CA), (CB),
  J, K les milieux de [A"B], [A"C],
  1 le cercle circonscrit AUV ; il passe par A" ;
  S le pied de la A-hauteur de ABC
  et T le second point d'intersection de la A-hauteur de ABC avec *1*.

- D'après Lascases "Six points alignés" (Cf. Annexe 2), U, V, J et K sont alignés.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A"T) ⊥ (AT) ;
  par définition d'une hauteur, (AT) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A"T) // (BC).

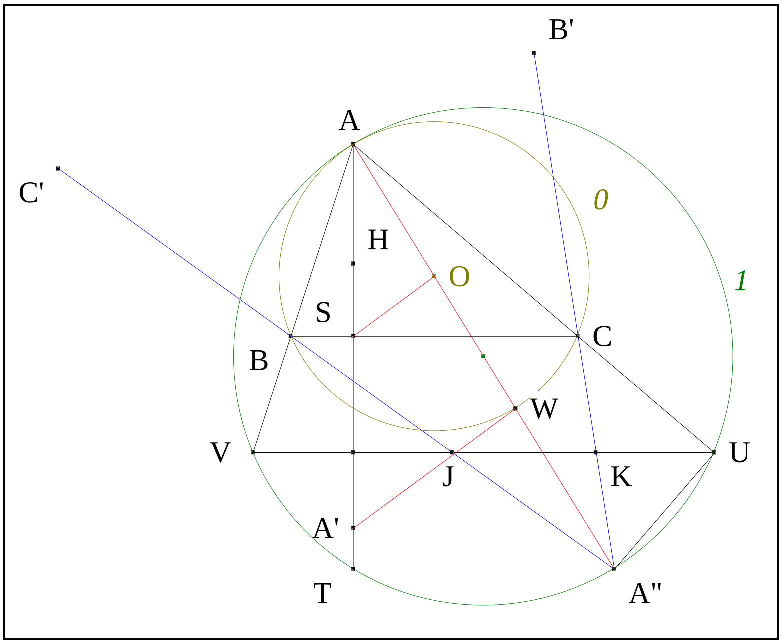
- D'après Thalès "la droite des milieux" appliquée au triangle A"BC, (BC) // (UJKV) ;
  par transitivité de la relation //, (A"T) // (UV) ;
  en conséquence, (UJKV) est l'axe médian de la bande de frontières (A"T) et (BC).

- D'après l'axiome de passage IIIb, (UV) passe par le milieu de [ST].

- Nous avons : (UV) // (A"T) ;

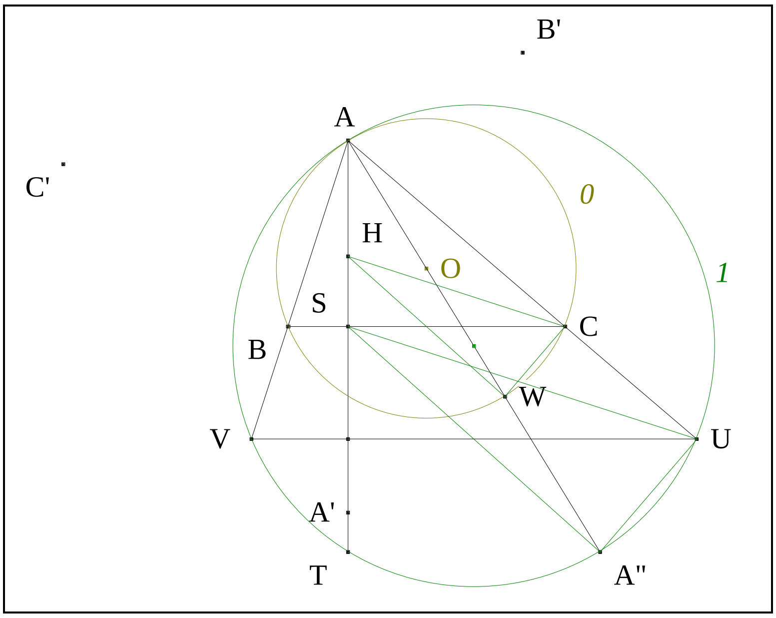
	(A"T) ⊥ (AT) ;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,	(UV) ⊥ (AT) ;
en conséquence,	(UV) est la médiatrice de [ST] ;
il s'en suit que	T est le symétrique de S par rapport à (UV).

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 3)
  S est l'orthocentre du triangle AVU ;
  en conséquence, (US) est la U-hauteur de AVU.



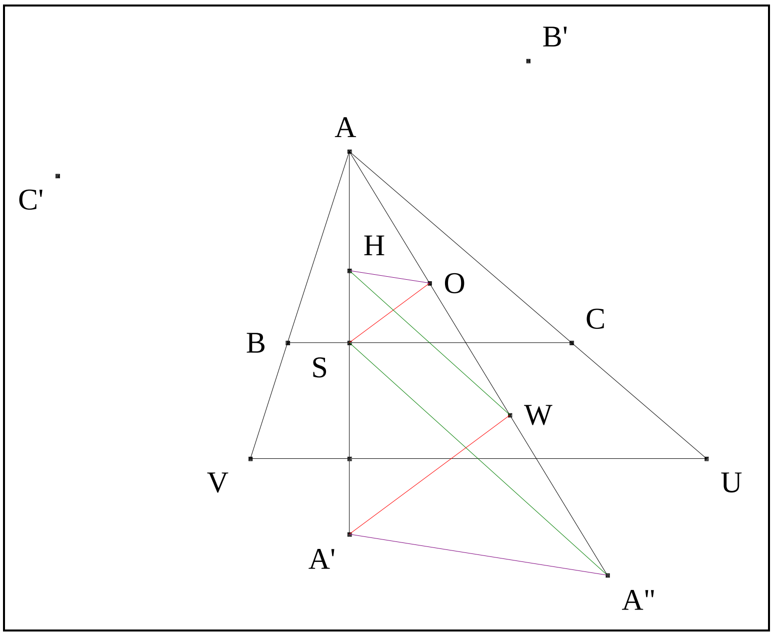
- Notons *0* le cercle circonscrit de ABC
  et W le second point d'intersection de (AO) avec *0*.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AA'W, (SO) // (A'W).



- Nous avons : (CH) // (US) et (WC) // A"U).

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 4) appliqué aux triangles perspectifs CHW et USA de centre A, (HW) // (SA") .



- **Conclusion :** d'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 5) appliqué à l'hexagone A'A"SOHWA', (A'A") et (OH) sont parallèles.

Commentaire : Catalan semble avoir été le premier géomètre à trouver une droite parallèle à la droite d'Euler. Ce résultat a été redécouvert par Darij Grinberg[4] et prouvé barycentriquement par Floor van Lamoen[5].

Notons qu'une preuve basée sur les triangles semblables a été proposée par Parry, Fox et Rigby[6].

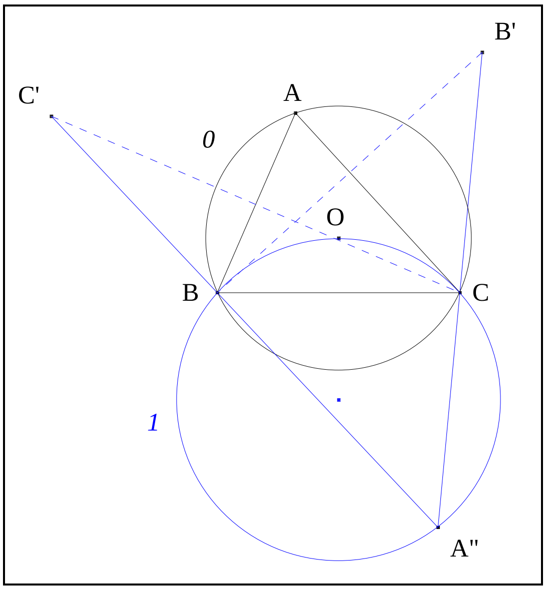
DARIJ GRINBERG [7]

Cinq points cocycliques

VISION

Figure :

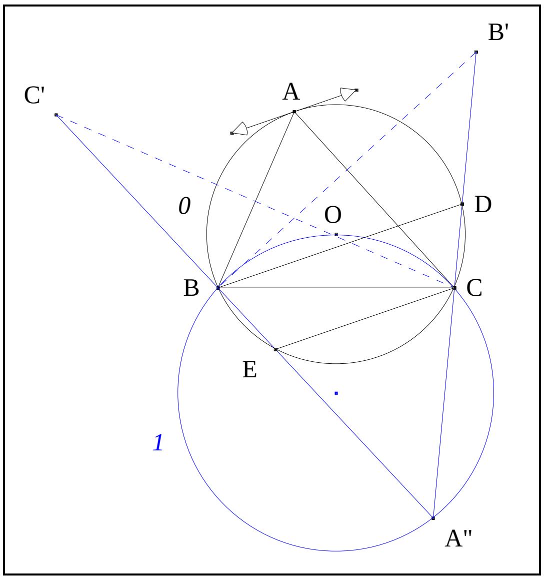
[4] Grinberg D., Euler Line parallels, Message *Hyacinthos* # 6515 du 09/02/2003.
[5] Lamoen (van) F., Euler Line parallels, Message *Hyacinthos* # 6516 du 09/02/2003.
[6] Parry C. F., Fox M. D., Rigby J., Solution of Problem 84.C, *Mathematical Gazette* 84, p. 526-528.
[7] Grinberg D., Euler Line parallels, Message *Hyacinthos* # 6515 du 09/02/2003.



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	B', C'	les symétriques de B, C resp. par rapport à (CA), (AB),
	A"	le point d'intersection de (BC') et (B'C)
et	*1*	le A-cercle de Kosnita.

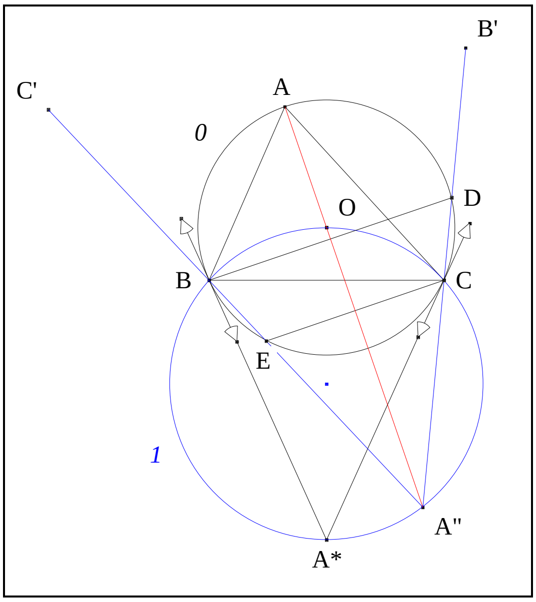
Donné : A" est sur *1*.

VISUALISATION



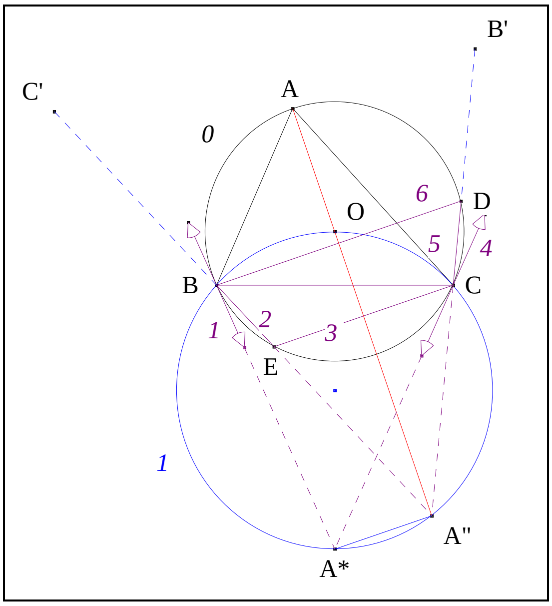
- Notons D, E les seconds points d'intersection de (CB'), (C'B) avec *0*
  et Ta la tangente à *1* en A.

- Par définition de B' et C',
  (CA) est la C-bissectrice intérieure du triangle BCD ; il s'en suit que (BD) // Ta
  (BA) est la B-bissectrice extérieure du triangle BCE ; il s'en suit que Ta // (CE) ;
  par transitivité de la relation //, (BD) // (CE).



- Notons Tb, Tc les tangentes à *1* resp. en B, C
  et A* le point d'intersection de Tb et Tc.

- D'après Catalan 1.Trois droites concourantes, A, O et A" sont alignés.



- D'après L'équivalence d'Aubert (Cf. Annexe 6),

  (1) (A*A") est la pascale de l'hexagone dégénéré, cyclique TbECTcDB

  (2) (A*A") // (BD).

- Nous avons : (BD) // Ta ;
  par transitivité de la relation //, (A*A") // Ta ;
  par définition d'une tangente Ta ⊥ (AO) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A*A") ⊥ (AOA").

- **Scolie :** le A-cercle de Kosnita est le cercle de diamètre [OA*].

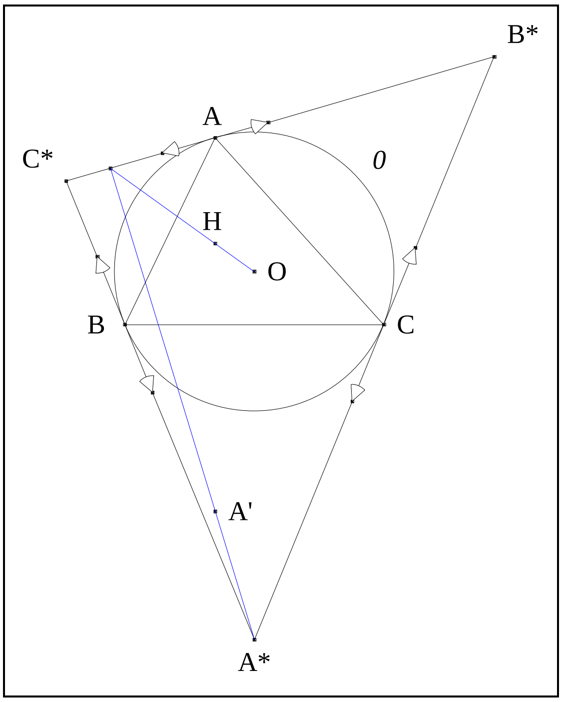
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle rectangle inscriptible dans un demi cercle", A* est sur *1*.

LEV ET TATIANA EMELYANOV [8]

Trace de la droite d'Euler sur le triangle tangentiel

VISION

Figure :

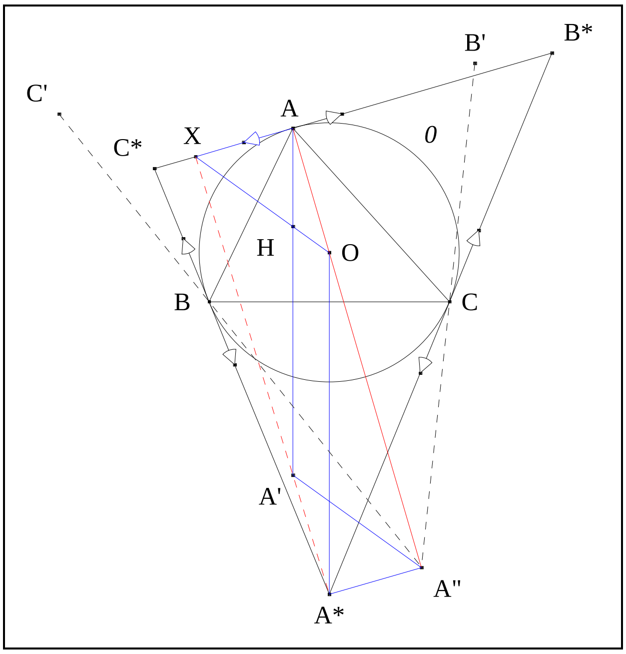


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	1	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A'	le symétrique de A par rapport à (BC),
et	A*B*C*	le triangle tangentiel de ABC.

Donné : (A'A*), (B*C*) et (OH) sont concourantes.

VISUALISATION

[8] Emelyanov L. et Emelyanova T., A note on the Schiffler point, *Forum Geometricorum* 3 (2003) 113-116.



- **Scolie :** (OH) est la droite d'Euler de ABC.

- Notons B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à (CA), (AB),
  A" le point d'intersection de (BC') et (B'C)
  et X le point d'intersection de (OH) et (B*C*).

- D'après Grinberg "Cinq points cocycliques", (A*A") ⊥ (AOA") ;
  par définition d'une tangente, (AOA") ⊥ (B*C*) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A*A") // (B*C*).

- D'après Catalan 2. Une parallèle à la droite d'Euler, (OH) // (A'A").

- Nous avons, (OA*) ⊥ (BC) ;
  par définition d'une hauteur, (BC) ⊥ (AA') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OA*) // (AA').

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 5) appliqué à l'hexagone AXOA*A"A'A,
  X, A' et A* sont alignés.

- **Conclusion :** (A'A*), (B*C*) et (OH) sont concourantes.

Note historique : dans leur note de 2003, Lev et Tatiana Emelyanov proposent une solution barycentrique du lemme 4 qui correspond au résultat ci-dessus.
Dans leur article[9] de 2004, ils partent d'un triangle, considèrent le triangle de contact de celui-ci et proposent le théorème 1 qui correspond au résultat présenté. Leur preuve de nature trigonométrique, a recours aux rapports et aux aires.
Dans un message Hyacinthos, Darij Grinberg[10] propose une preuve synthétique basée sur l'utilisation de rapports.

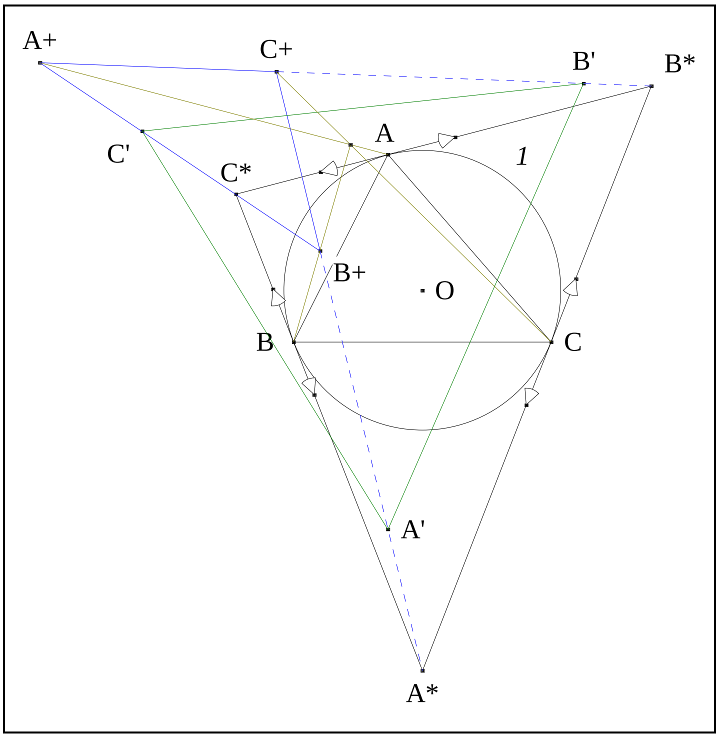
L'AUTEUR [11]

---

9 Emelyanov L. et Emelyanova T., On the Intercepts of the OI-Line, *Forum Geometricorum* 4 (2004) 81-84.
10 Grinberg D., For Lev and Tatiana Emelyanov, Message *Hyacinthos* # 7256 du 13/06/2003.

VISION

Figure :

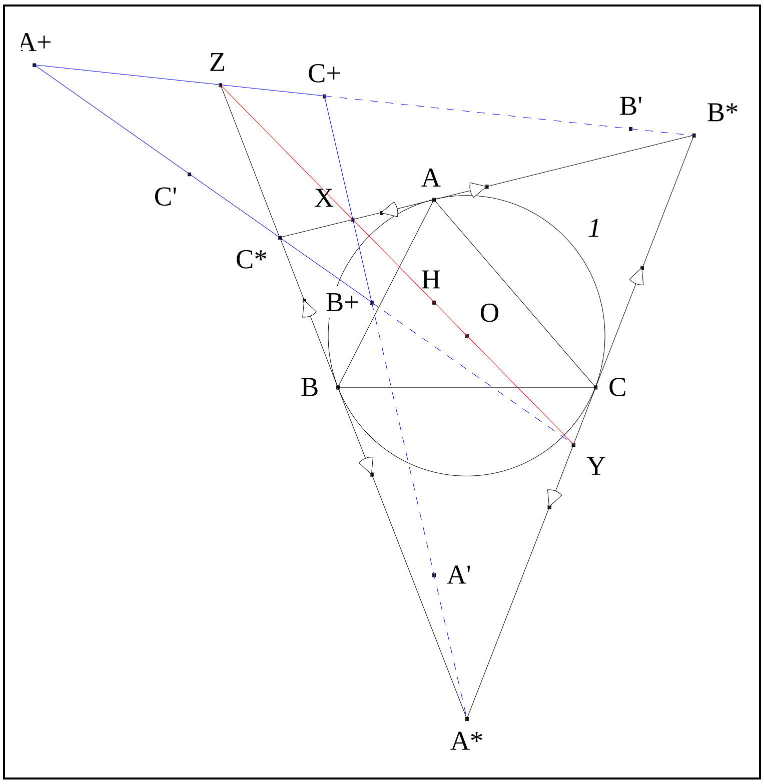


Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle circonscrit à ABC,
	A'B'C'	le triangle symétrique de ABC,
	A*B*C*	le triangle tangentiel de ABC
et	A+, B+, C+	les points d'intersection de (B*B') et (C*C'), de (C*C') et (A*A'), de (A*A') et (B*B').

Donné : (A+A), (B+B) et (C+C) sont concourantes.

VISUALISATION

[11] Ayme J.-L., A result, Message *Hyacinthos* # 15743 du 31/10/2007.



- **Scolie :** A+B+C+ est le triangle sommital de A'B'C' et A*B*C*.

- Notons H l'orthocentre de ABC,
  X, Y, Z les traces de (OH) sur (B*C*), (C*A*), (A*B*)
  et K le point de Lemoine de ABC.

- D'après Emelyanov "Trace de la droite d'Euler sur le triangle tangentiel", (A*A') passe par X
  (B*B') passe par Y
  (C*C') passe par Z.

- Par définition, A+B+C+ est en perspective avec A*B*C* ; axe (XYZ) ;
  par construction, A*B*C* est inscrit dans A+B+C+.

- Par définition, ABC est inscrit dans A*B*C* ;
  A*B*C* est en perspective avec ABC ; centre K.

- D'après Dötll "The cevian nests theorem"[12], A+B+C+ est en perspective avec ABC.

- **Conclusion :** par définition, (A+A), (B+B) et (C+C) sont concourantes.

Énoncés

en français : le triangle sommital des triangles symétrique et tangentiel d'un triangle,
est en perspective avec ce triangle.

en anglais : the vertex triangle of the symmetric and the tangential triangle of a triangle,
is perspective with this triangle.

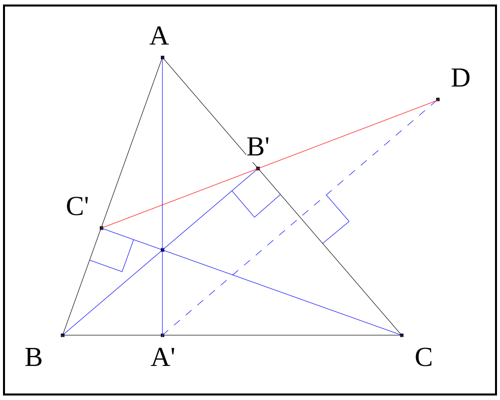
---

[12] Ayme J;-L., the cevian nests theorem, G.G.G. volume (2008).

Note historique : Francisco Javier Garcia Capitan[13], Paul Yiu[14] et Quang Tuan Bui ont confirmé que ce nouveau centre n'est pas répertorié chez ETC. Clark Kimberling[15], l'éditeur d'ETC en a demandé les coordonnées barycentriques pour l' inclure prochainement dans sa base de données. Ces coordonnées ont été calculées à l'aide d'un logiciel par Yiu et Garcia Capitan.

ANNEXE

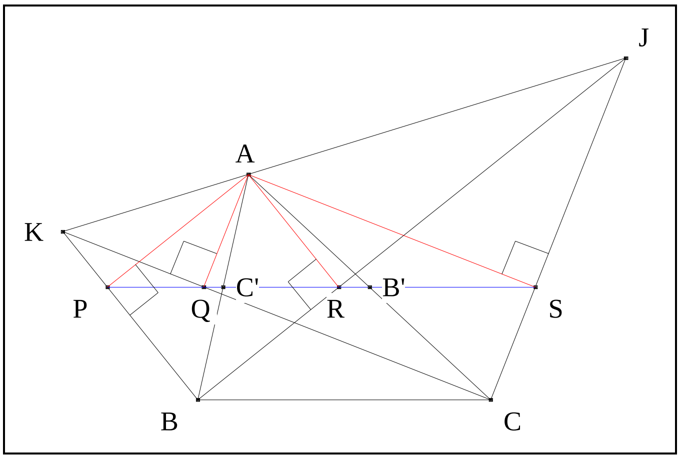
1. Trois points alignés[16]



Traits : ABC un triangle,
B', C' les pieds des B, C-hauteurs de ABC,
A' un point de (BC)
et D le symétrique de A' par rapport à (AC).

Donné : A' est le pied de la A-hauteur de ABC
si, et seulement si,
B', C' et D sont alignés.

2. Six points alignés[17]



---

13 Garcia Capitan F. J., About your result, Message *Hyacinthos* # 15752 du 31/10/2007.

14 Yiu P., About your result, Message *Hyacinthos* # 15750 du 31/10/2007.

15 Kimberling C., About your result, Message *Hyacinthos* # 15749 du 31/10/2007.

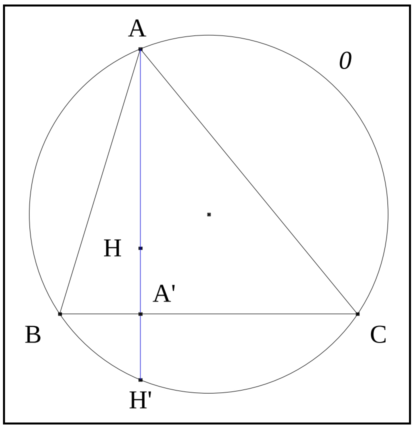
16 Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822), chapitre 2.

17 Lascases Arth., Question 477, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171.

Traits :		ABC	un triangle,
		B', C'	les milieux de [CA], [AB],
		J, K	les points B, C-excentraux de ABC
	et	P, Q, R, S	les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BK), (CK), (BK), (CK).

Donné : P, Q, R, S, B' et C' sont alignés.

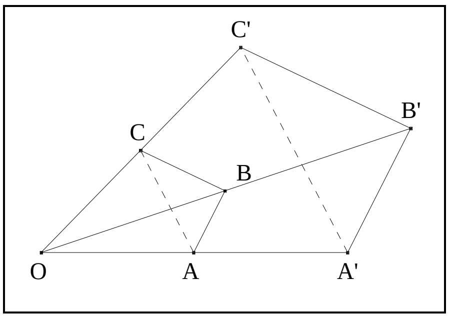
3. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté[18]



Traits :		ABC	un triangle acutangle,
		H	l'orthocentre du triangle,
		A'	le pied de la hauteur de ABC en A,
		0	le cercle circonscrit à ABC
	et	H'	le pied de la hauteur de ABC en A sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

4. Le théorème faible de Desargues



Traits :		ABC	un triangle,		
	et	A'B'C'	un triangle tel que	**(1)**	(AA') et (BB') soient concourantes en O
				(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
				(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

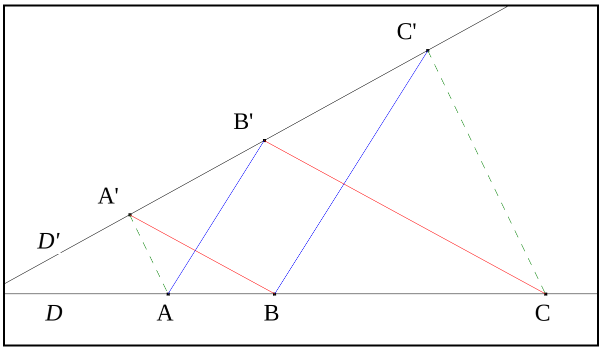
Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

5. Le petit théorème de Pappus[19]

---

[18] Carnot, n° 142, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101.

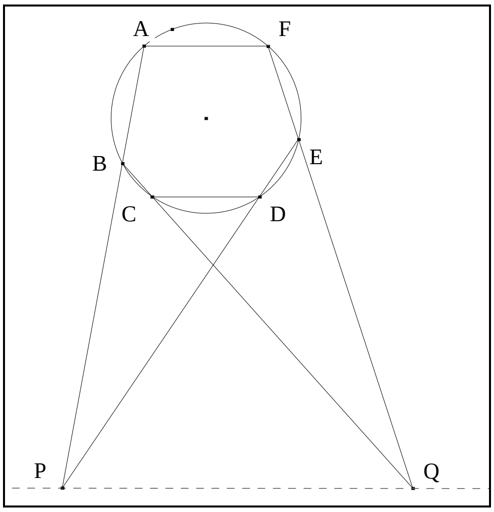
[19] Pappus, *Collections* Livre VII.



Traits :		*D*, *D'*	deux droites,
		A, B, C	trois points pris dans cet ordre sur *D*,
		B'	un point
	et	A', C'	deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

6. L'équivalence d'Aubert[20]



Traits :		*1*	un cercle,
		ABCDE	un pentagone inscrit dans *1*,
		F	un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
	et	P, Q	les points d'intersection de (AB) et (DE), de (BC) et (EF).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* (PQ) et (AF) sont parallèles.

[20] La condition nécessaire est de Paul Aubert.