

# LES PENTAGRAMMES

## DE

## MIQUEL ET DE MORLEY

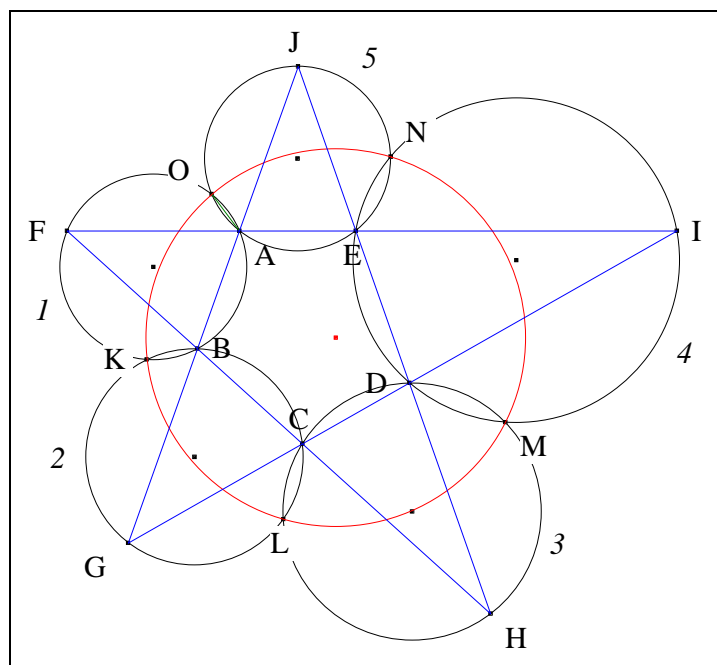
Jean-Louis AYME

**Résumé.** Nous présentons deux pentagrammes, l'un de Miquel, datant de 1838, l'autre de Morley datant de 1907. Les élégantes solutions présentées sont celles d'Henri Léon Lebesgue et de Tobias Dantzig.  
Les théorèmes cités en annexe peuvent être démontrés synthétiquement.

### LE PENTAGRAMME DE MIQUEL<sup>1</sup>

#### VISION

**Figure :**



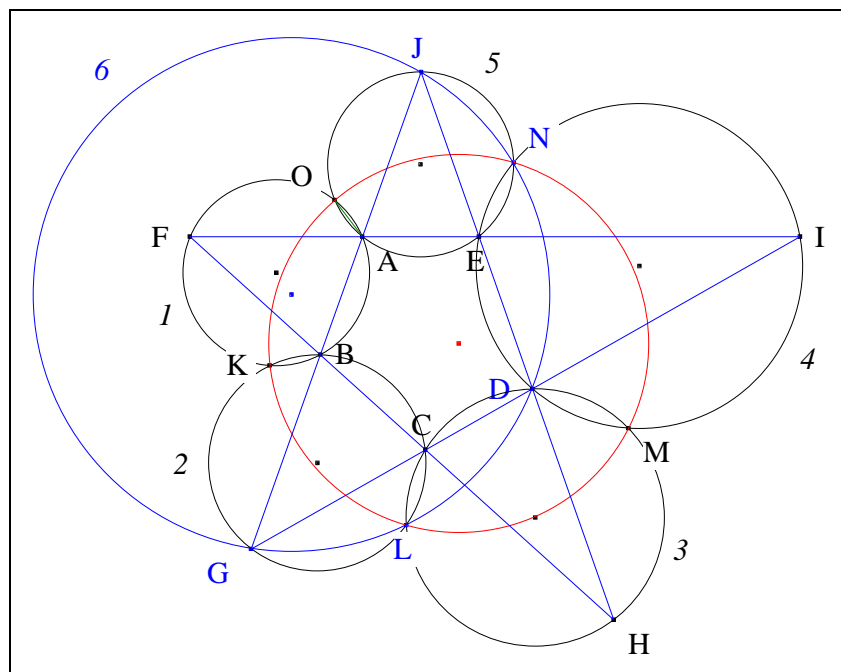
**Traits :** ABCDE un pentagone convexe,  
F, G, H, I, J le point d'intersection de (AE) et (BC), de (BA) et (CD), de (CB) et (DE),

<sup>1</sup> Miquel A., *Journal de Liouville*, vol. III (1838) 485.  
Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, vol. X (1844) 347.

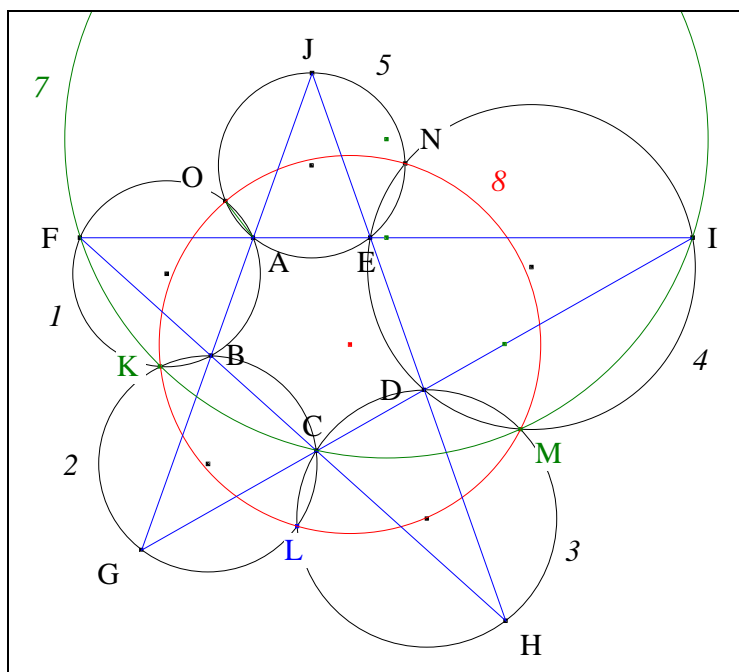
de (DC) et (EA), de (ED) et (AB),  
 1, 2, 3, 4, 5 les cercles circonscrits des triangles FBA, GCB, HDC, IED, JAE,  
 et K, L, M, N, O les seconds points d'intersection de 1 et 2, de 2 et 3, de 3 et 4, de 4 et 5,  
 de 5 et 1.

**Donné :** K, L, M, N et O sont cocycliques.

### VISUALISATION



- Notons 6 le cercle circonscrit au triangle DJG.
- D'après Miquel "Le théorème du pivot", appliqué à DJG relativement à
  - (1) la ménélienne (BCH), L en est le point de Miquel
  - (2) la ménélienne (AEI), N en est le point de Miquel ;
 en conséquence, 6 passe par L et N.
- **Scolie :** L et N ne sont pas alignés avec K et O.
- **Conclusion partielle :** d'après Lebesgue "Le théorème des cinq cercles" (Cf. Annexe 1) appliqué à la droite (GBAJ) et aux cercles 6, 2, 1, 5, L, K, O et N sont cocycliques.



- Notons  $7$  le cercle circonscrit au triangle CIF.
- D'après Miquel "Le théorème du pivot", appliqué à CIF relativement à
  - (1) la ménélienne (DEH), M en est le point de Miquel
  - (2) la ménélienne (ABG), K en est le point de Miquel ;
 en conséquence,  $7$  passe par M et K.
- **Scolie :** M et K ne sont pas alignés avec O et N.
- **Conclusion partielle :** d'après Lebesgue "Le théorème des cinq cercles" (Cf. Annexe 1) appliqué à la droite (FAEI) et aux cercles  $7$ ,  $1$ ,  $5$  et  $4$  K, O, M et N sont cocycliques.
- **Conclusion :** K, L, M, N et O sont cocycliques.
- Notons  $8$  ce cercle.

**Énoncé traditionnel :** si, l'on circonscrit les triangles formés par chacun des côtés d'un pentagone convexe et les prolongements des côtés adjacents  
 alors, les cinq points d'intersection de ces cercles sont sur une même cercle.

**Note historique :** Miquel a découvert en 1938 ce résultat à partir d'une idée de Catalan. La présente visualisation s'inspire de celle de Lebesgue<sup>2</sup>. Pour terminer, rappelons cette récente anecdote : lors d'une rencontre du président chinois Jiang Zemin avec des étudiants de Macau en 2001, celui-ci leur a posé ce problème<sup>3</sup>.

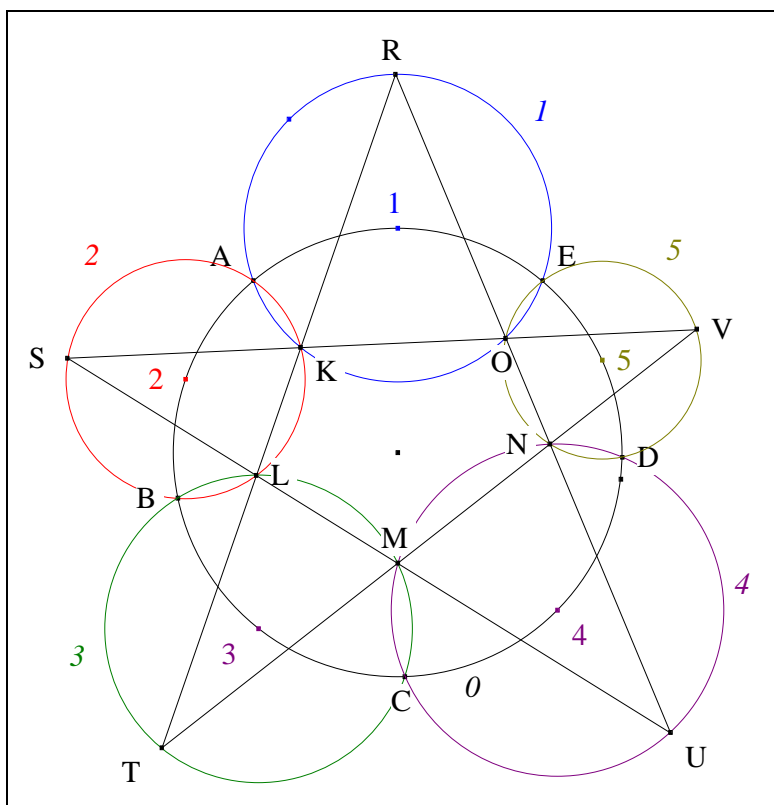
**Commentaire :** les centres des cercles  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$  et  $5$  ne sont pas nécessairement sur  $8$ .

<sup>2</sup> Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916).  
<sup>3</sup> Revue, *Mathematical Excalibur* vol. 6, 1 (2001) 1-2.

# LE PENTAGRAMME DE MORLEY <sup>4</sup>

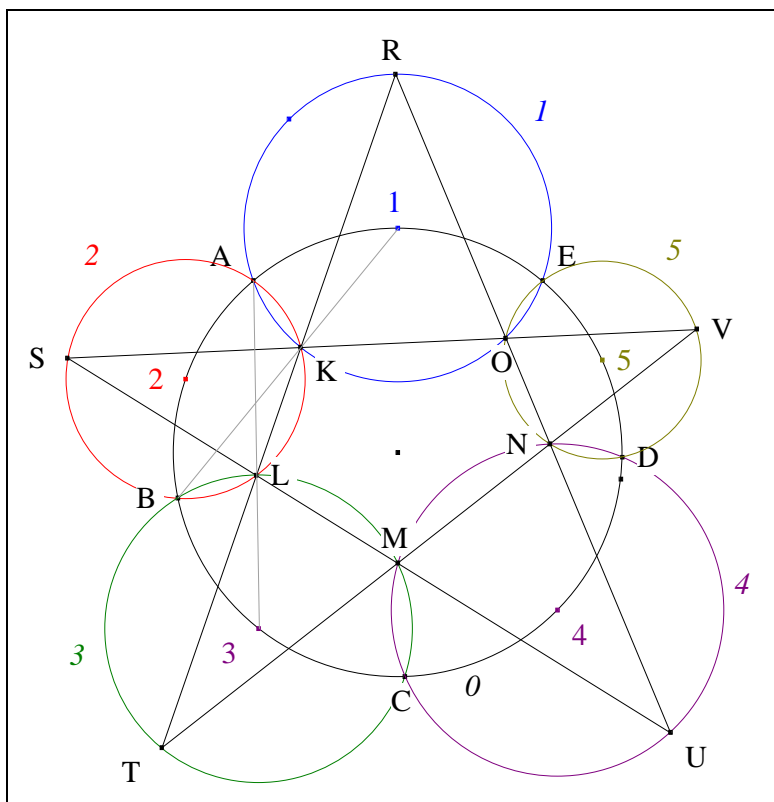
## VISION

Figure :



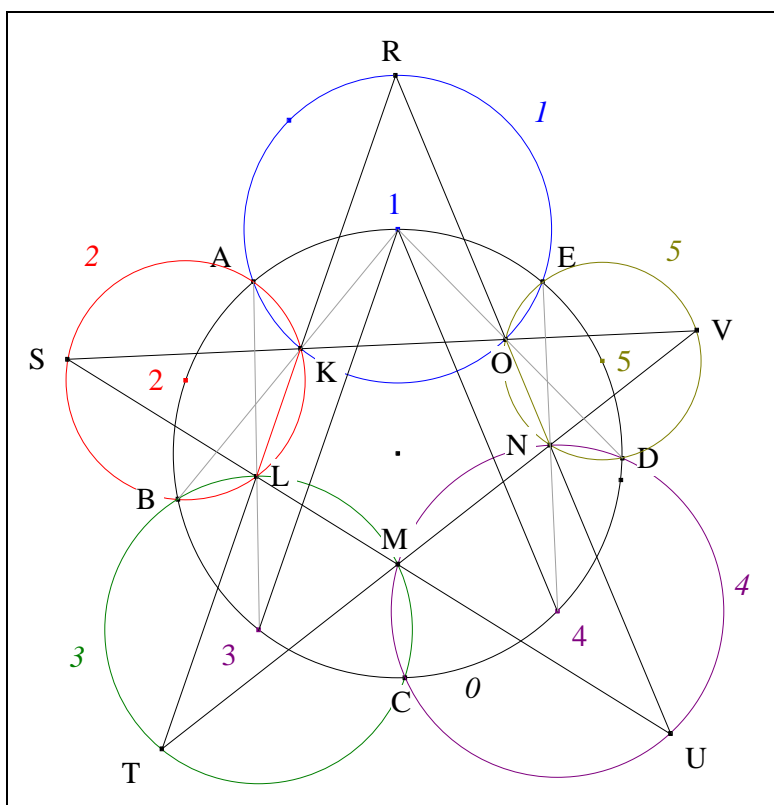
- Traits :**
- $O$  un cercle,
  - $1, 2, 3, 4, 5$  une chaîne fermée de cinq cercles sécants sur  $O$  et centrés sur  $O$ ,
  - $1, 2, 3, 4, 5$  les centres de  $1, 2, 3, 4, 5$ ,
  - $A, B, C, D, E$  les points d'intersection sur  $O$  de  $1$  et  $2$ , de  $2$  et  $3$ , de  $3$  et  $4$ , de  $4$  et  $5$ , de  $5$  et  $1$ ,
  - $K, L, M, N, O$  les seconds points d'intersection de  $1$  et  $2$ , de  $2$  et  $3$ , de  $3$  et  $4$ , de  $4$  et  $5$ , de  $5$  et  $1$ ,
- et
- $R, S, T, U, V$  le point d'intersection de  $(KL)$  et  $(NO)$ , de  $(LM)$  et  $(OK)$ , de  $(MN)$  et  $(KL)$ , de  $(NO)$  et  $(LM)$ , de  $(OK)$  et  $(MN)$ .
- Donné :** le point  $R$  (resp.  $S, T, U, V$ ) est sur  $1$  (resp.  $2, 3, 4, 5$ ).

## VISUALISATION



- D'après "Un cercle de Morley" (Cf. Annexe 2) appliqué

(1) à 1, 2 et 0,                      B, K et 1 sont alignés  
 (2) à 2, 3 et 0,                      A, L et 3 sont alignés.



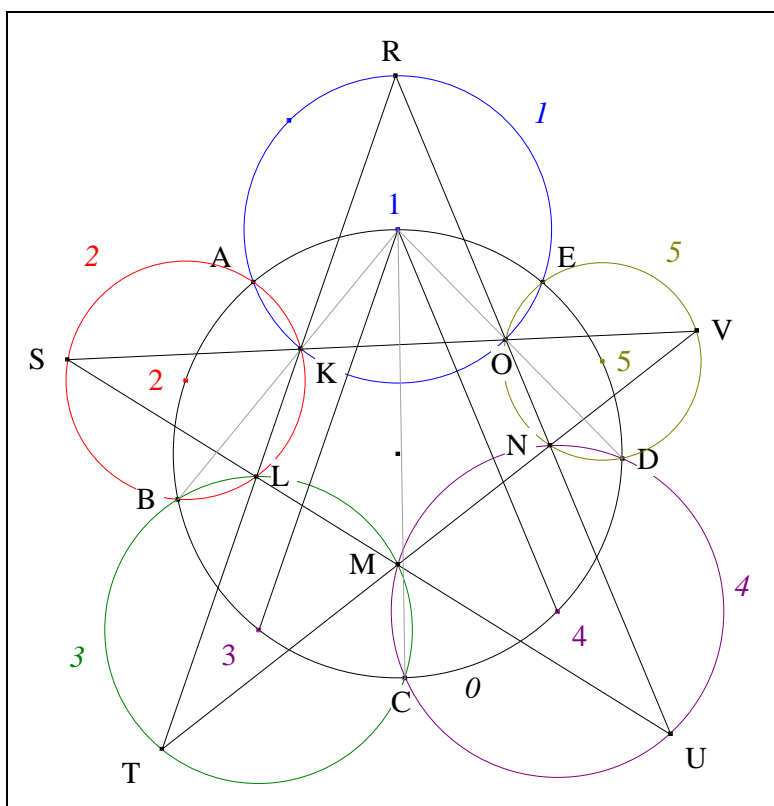
- Les cercles 2 et 0, les points de base A et B, les moniennes (LA3) et (KB1),

conduisent au théorème 0 de Reim ;  
il s'en suit que

(LK) // (31).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que

(NO) // (41).



- **Scolies :** (13) est la bissectrice intérieure de  $\angle B1C$   
(14) est la bissectrice intérieure de  $\angle C1D$ .

- Une chasse angulaire :

d'après le théorème "angles à côtés parallèles",  
par transitivité de la relation = et par substitution,

$$\begin{aligned}\angle K1O &= \angle B1D ; \\ \angle B1D &= 2 \angle 314 ; \\ \angle 314 &= \angle KRO ; \\ \angle K1O &= 2 \angle KRO.\end{aligned}$$

- **Conclusion partielle :** d'après le théorème "angle inscrit, angle au centre", R est sur  $l$ .

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que S, T, U, V sont resp. sur 2, 3, 4, 5.

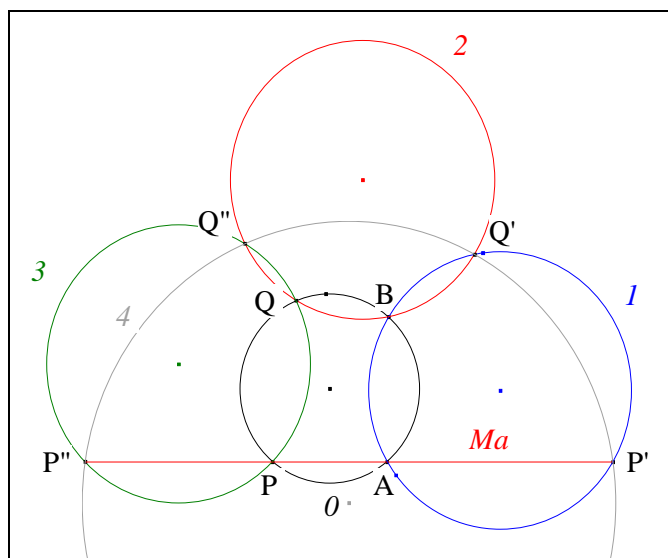
**Note historique :** dans un papier lu par le professeur H. S. White lors de la rencontre Columbus de l'*American Mathematical Society*, le 30 décembre 1915, celui-ci mentionne un théorème de Frank Morley qu'il avait donné dans le mémoire intitulé "On Reflexive Geometry" en 1907.  
La solution présentée est celle de Tobias Dantzig<sup>5</sup> de l'université d'Indiana (États-unis).

## ANNEXE

<sup>5</sup>

Dantzig T., Elementary proof of a theorem due to F. Morley, *American Mathematical Monthly*, vol. 23, 7 (1916) 246-248.

## 1. Le théorème des cinq cercles de Lebesgue



**Traits :**

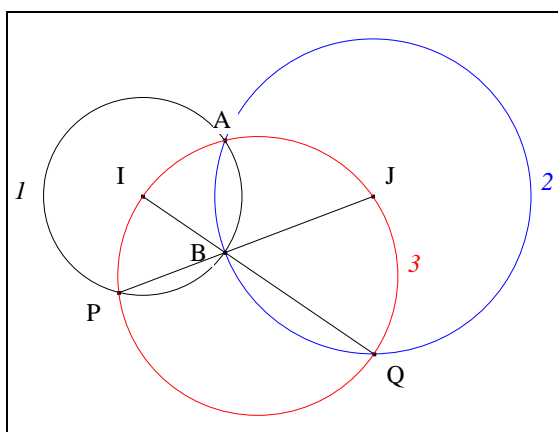
- $0, 1$  deux cercles sécants,
- $A, B$  les points d'intersection de  $0$  et  $1$ ,
- $Ma$  une droite passant par  $A$ ,
- $P, P'$  les seconds points d'intersection de  $Ma$  resp. avec  $0, 1$ ,
- $3$  un cercle passant par  $P$ ,
- $P'', Q$  les seconds points d'intersection de  $3$  resp. avec  $Ma, 0$ ,
- $4$  un cercle passant par  $P'$  et  $P''$ ,
- et  $Q', Q''$  les seconds points d'intersection de  $4$  resp. avec  $1, 3$ .

**Donné :**

- si,*  $Q'$  ou  $Q''$  n'est pas alignés avec  $Q$  et  $B$
- alors,*  $B, Q, Q'$  et  $Q''$  sont cocycliques.

**Commentaire :** ce résultat est la réciproque de celui présenté dans l'article "Du théorème de Reim au théorème des six cercles"<sup>6</sup>.

## 2. Un cercle de Morley<sup>7</sup>



**Traits :**

- $1, 2$  deux cercles sécants,
- $I, J$  les centres respectifs de  $1, 2$ ,

<sup>6</sup> Ayme J.-L., Du théorème de Reim au..., G.G.G. volume (2008).

<sup>7</sup> Ayme J.-L., Les cercles de Morley,..., G.G.G. volume (2008).

A, B    les deux points d'intersection de  $l$  et  $2$ ,  
 P, Q    deux points resp. de  $l$ ,  $2$   
 et  $3$     le cercle passant par A, P, Q.

**Donné :**    les points I, B, Q d'une part, et J, B, P d'autre part, sont alignés  
               *si, et seulement si,*  
                $3$  passe par I et J.