PEDAL - CEVIAN LINES

GO

THROUGH

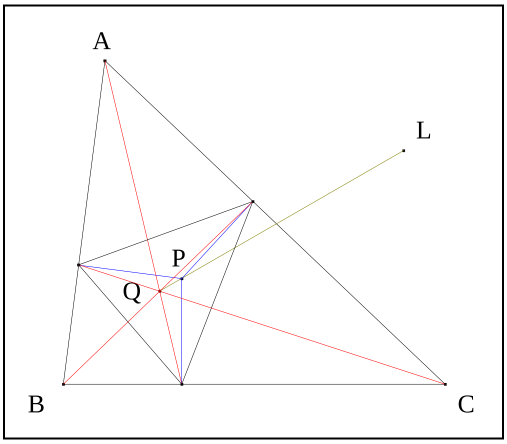
THE

de LONGCHAMPS's POINT

FIRST PURELY SYNTHETIC PROOF

†

Jean - Louis AYME



Résumé. Cet article qui est le dernier d'une série de trois, présente la première preuve synthétique montrant que

toute PC-droite d'un triangle passe par le point de de Longchamps de ce triangle.

Ce résultat considéré comme difficile est obtenu à partir d'une "fascinante figure" obtenue par l'auteur. D'intéressantes retombées sont présentées.
La recherche de l'auteur qui s'exprime entièrement dans cet article, dévoile au lecteur le chemin emprunté pour arriver au résultat souhaité et à d'autres tout aussi remarquables.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils vont tout particulièrement à Luis González[1] qui a su indirectement m'inspirer qu'une solution synthétique de ce résultat était possible.

Le vent souffle où il veut; tu entends sa voix, mais tu ne sais ni d'où il vient, ni où il va.[2]

1 voir C. 4. A propos de ce résultat et de Luis González.
2 Bible, Jean 3, 8.

Sommaire

Avertissement : les références indiquées sont celles trouvées par l'auteur et peuvent donc être modifiées.

A. PEDAL – CEVIAN POINT

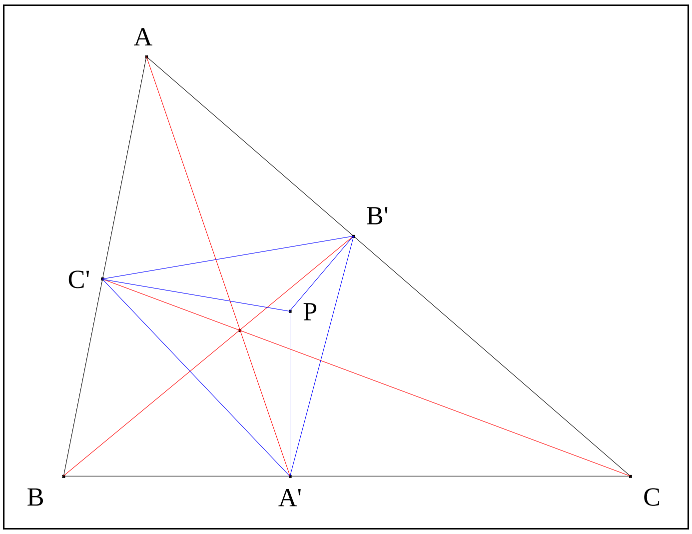
AND

PEDAL – CEVIAN LINE

1. Définition d'un PC-point

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle,
P un point
et A'B'C' le triangle P-pédal.

Définition : *si*, A'B'C' est un triangle cévien de ABC,
alors, P est "un point pédal-cevien de ABC".

Abréviation : pour faire court,
nous dirons que P est "un PC-point de ABC".[3]
et que Q, point de concours de (AA'), (BB') et (CC') est "le point de Ceva de P".

Commentaire : analytiquement, l'ensemble des PC-points d'un triangle est la cubique de Darboux[4] admettant O pour centre de symétrie.
En conséquence, un PC-point n'est pas en général constructible avec la règle et le compas.

Note historique : l'auteur a rencontré ce concept en lisant le livre de Ross Honsberger[5]. Il va de soi que sa conception a été envisagée par des géomètres du XIX-ème siècle dont Gaston Darboux.

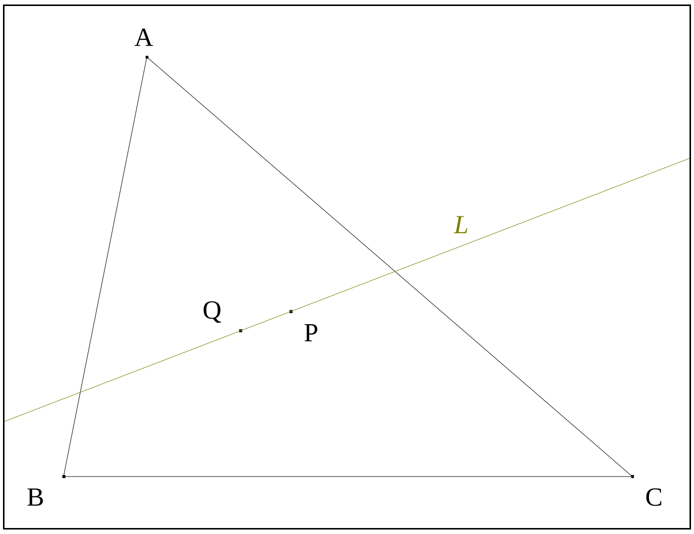
---

[3] En anglais, P is a pedal-cevian point...
[4] Darboux J. G. (1842-1917).
[5] Honsberger R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, MAA, New Mathematical Library (1995) p. 142-143.

2. Définition d'une PC-droite

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC,
Q le point de Ceva de P
et *L* la droite (PQ).

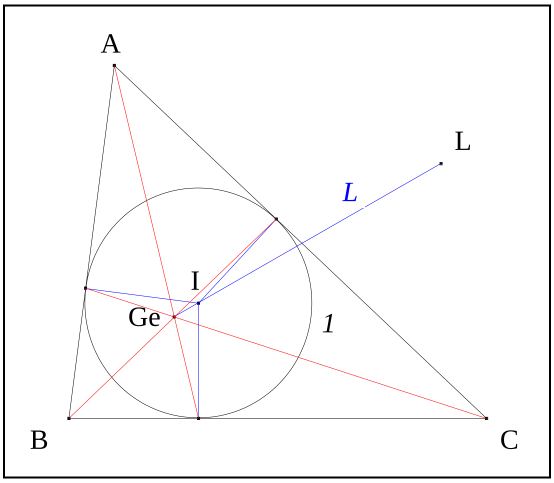
Définition : *L* est "la droite pédale-cévienne de P relativement à ABC".

Abréviation : pour faire court, nous dirons que *L* est "la PC-droite de P".

3. Exemple : la PC-droite d'Hermès-Soddy

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
Ge le point de Gergonne de ABC,
L la droite (IGe)
et L le point de de Longchamps de ABC.

Donné : la PC-droite *L* de I passe par L.[6]

Scolies : **(1)** *L* est "la droite d'Hermès-Soddy de I".

(2) L est l'orthocentre du triangle antimédian de ABC

(3) L est répertorié sous X_{20} chez ETC.[7]

Commentaire : ce résultat[8] et son extraversion ont été proposés sur le site *Mathlinks* en 2008.

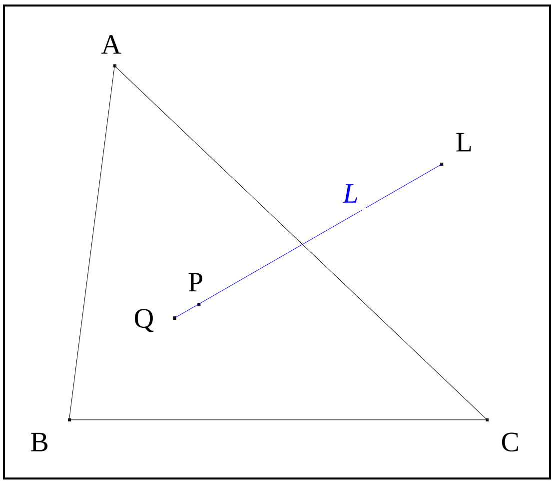
4. La conjecture

VISION

Figure :

---

[6] Ayme J.-L., La droite d'Hermès-Soddy ou l'alignement Ge-I-L, G.G.G. vol. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[7] Kimberling C., Encyclopedia of triangle Centers (ETC) ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.
[8] Armpist (Tudosi M.), 4 concurrent lines, *Mathlinks* du 23/12/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=246672.



Traits : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC,
Q le point de Ceva de P,
L la PC-droite de P
et L le point de de Longchamps de ABC.

Donné : *L* passe par L.

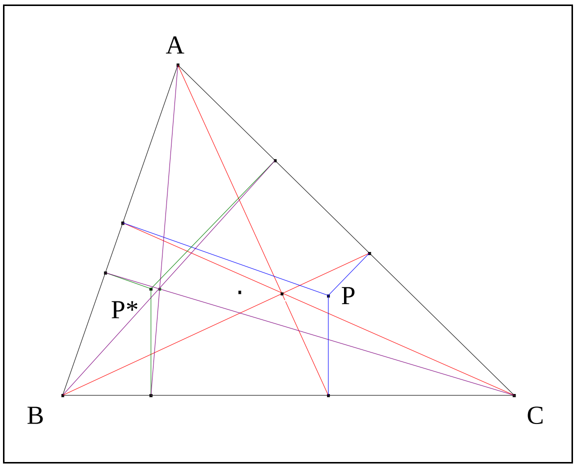
Commentaire : la plupart des preuves connues à ce jour sont analytiques.

B. L'APPROCHE

1. Isogonal d'un PC-point

VISION

Figure :

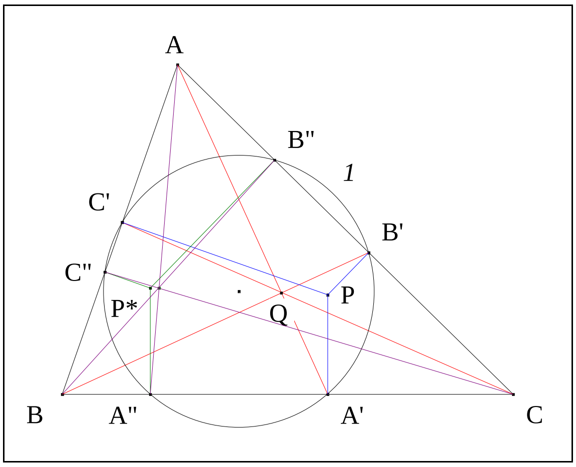


Traits : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC

et P* l'isogonal de P relativement à ABC.

Donné : P* est un PC-point de ABC.[9]

VISUALISATION



- Notons A'B'C' le triangle P-pédal de ABC,
  Q le point de Céva de P,
  1 le cercle circonscrit à A'B'C'
  et A", B", C" les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB).

- **Scolie :** l'isogonal d'un point P en position générale est unique.

- D'après "Le P-cercle de Mathieu" (Cf. Appendice 1), le triangle A"B"C" est pédal.

- D'après "Le M-cercle de Terquem"[10] (Cf. Annexe 1), A"B"C" est cévien.

- **Conclusion :** P* est un PC-point de ABC.

Énoncé traditionnel : l'isogonal d'un PC-point est un PC-point.

2. PC-droite d'un PC-point

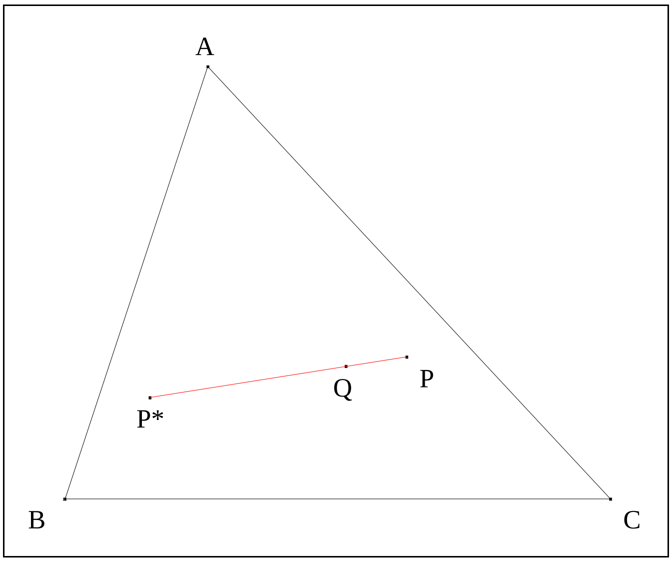
VISION

Figure :

---

9 Honsberger R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, MAA, New Mathematical Library (1995) 143.
Pedals and cevians, *Mathlinks* du 10/12/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=150&t=178427.

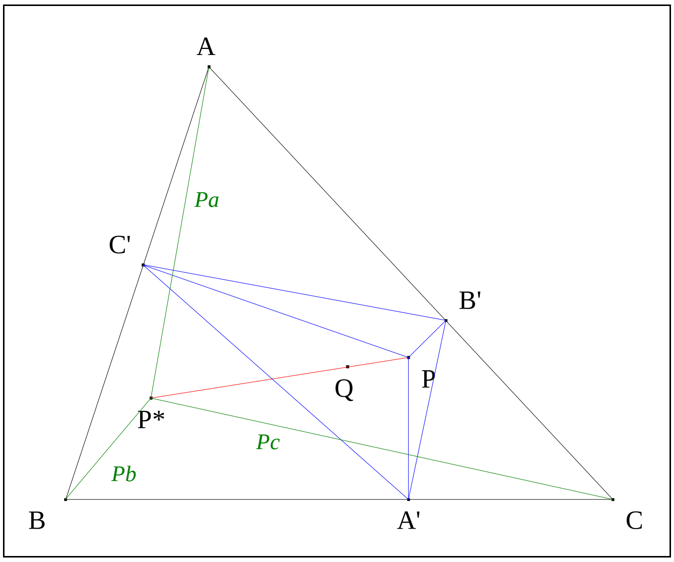
10 Ayme J.-L., A new point on Euler line, G.G.G., vol. 5, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



Traits : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC,
Q le point de Céva de P,
et P* l'isogonal de P relativement à ABC.

Donné : P, Q et P* sont alignés.[11]

VISUALISATION



- Notons A'B'C' le triangle P-pédal de ABC
  et *Pa*, *Pb*, *Pc* les perpendiculaires issues de A, B, C resp. sur (B'C'), (C'A'), (A'B').

- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 2),
  Pa, *Pb*, *Pc* sont resp. les A, B, C-isogonales resp. de (AP), (BP), (CP) relativement à ABC.

- D'après "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 3), *Pa*, *Pb*, *Pc* sont concourantes en P*.

- ABC et A'B'C' étant orthologiques, **(1)** P* est le pôle d'orthologie de ABC relativement à A'B'C'
  (2) P est le pôle d'orthologie de A'B'C' relativement à ABC.

[11] van Lamoen F., *Hyacinthos*.

- ABC et A'B'C' sont perspectifs de centre Q.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Sondat"[12], P, Q et P* sont alignés.

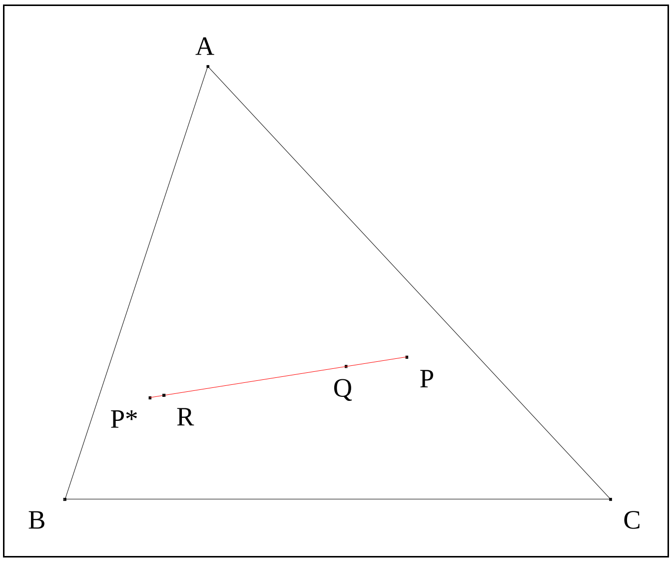
Énoncé traditionnel : la PC-droite d'un PC-point passe par l'isogonal de ce point.

Commentaire : nous venons de montrer l'alignement de trois points et le désir de l'auteur ne veut pas s'arrêter en si bon chemin. Il veut aller plus loin pour découvrir que cet alignement est plus riche encore.

3. Cinq point alignés

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC,
Q le point de Céva de P,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
et R le point de Ceva de P*.

Donné : P, Q, P* et R sont alignés. [13]

VISUALISATION

- **Scolie :** la relation "est l'isogonal de " étant symétrique, P est l'isogonal de P*.

- D'après B. 2. La PC-droite d'un PC-point, P, Q et P* sont alignés.

---

12 Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G., vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

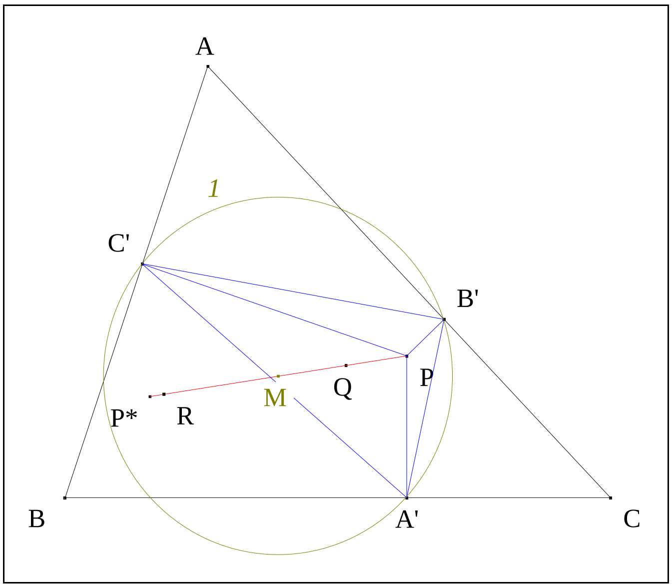
13 van Lamoen F., *Hyacinthos*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que P*, R et P sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, P, P*, Q et R sont alignés.

Énoncé traditionnelle : un PC-point et son isogonal partage la même PC-droite.

Scolie : un cinquième point en alignement



- Notons *1* le cercle circonscrit à A'B'C'
  et M sont centre.

- D'après "Le P-cercle de Mathieu" (Cf. Appendice 1), M est le milieu de [PP*].

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, P, P*, Q, R et M sont alignés.

Énoncé traditionnel : la PC-droite de deux PC-points isogonaux
passe par
le milieu de ces deux points.

Note historique : cet alignement de cinq points a été étudié en 2003 au sein du groupe *Hyacinthos*.[14]

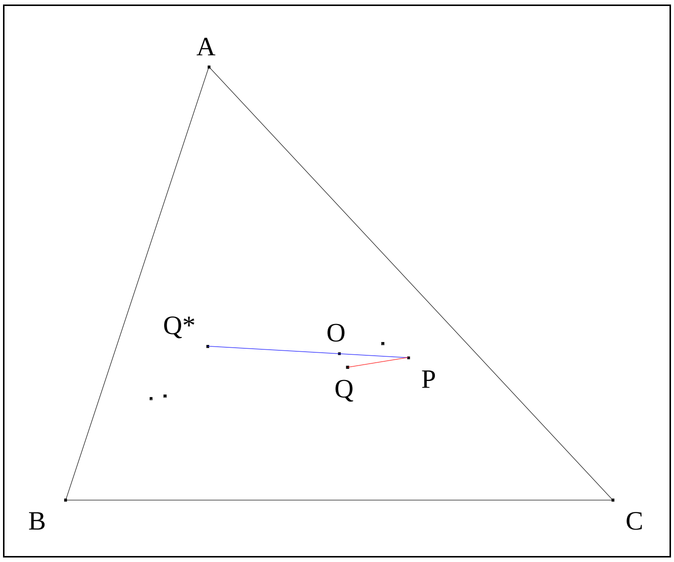
Commentaire : le désir de l'auteur ne veut toujours pas s'arrêter en si bon chemin. Il veut aller plus loin pour découvrir d'autre alignement.

4. Isogonal du point de Ceva d'un PC-point

VISION

[14] Grinberg D., Darboux and a line with 5 points Generalized, Message # 6664 *Hyacinthos* du 06/03/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
P un PC-point,
Q le point de Ceva de P,
et Q* l'isogonal de Q.

Donné : Q*, O et P sont alignés.[15]

Scolies : **(1)** (PQ*) est "la droite pédale cévienne-isogonale de P relativement à ABC".

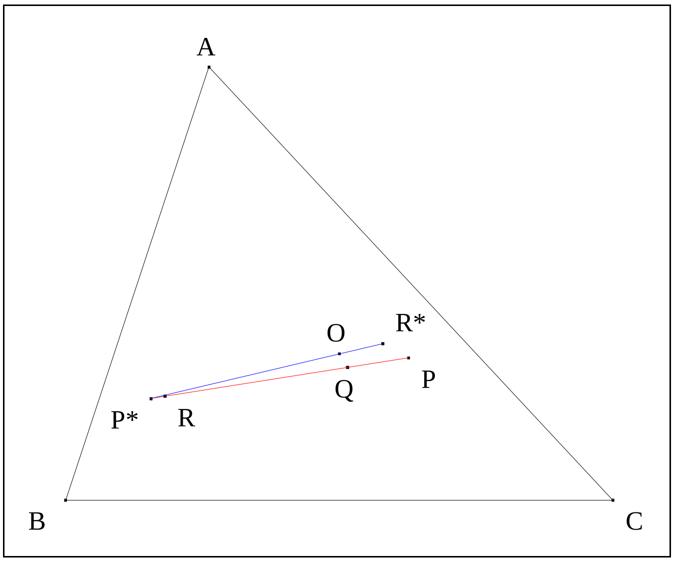
(2) Pour faire court, nous dirons que (PQ*) est "la PC*-droite de P".

Énoncé traditionnel : la PC*-droite d'un PC-point d'un triangle
passe par
le centre du cercle circonscrit de ce triangle.

Scolies : **(1)** un troisième alignement

---

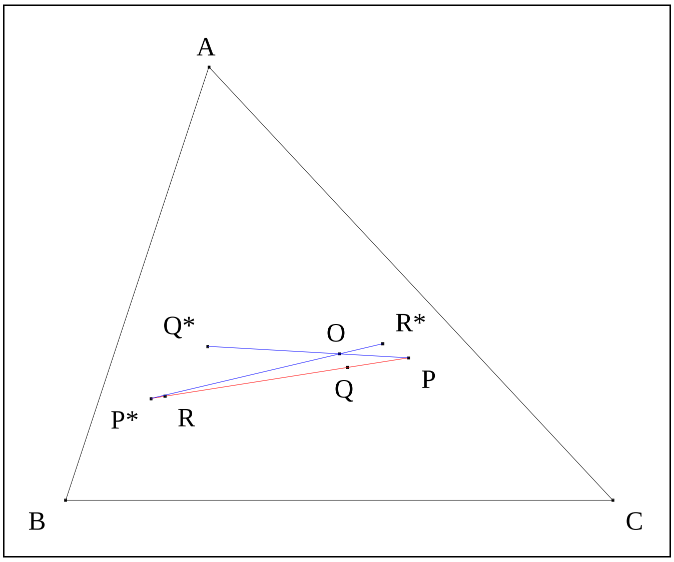
15 Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le Marquis Giovani Ceva, G.G.G., vol. 6, p. 27 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



- Notons P* l'isogonal de P,
  R le point de Ceva de P*
  et R* l'isogonal de R.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que R*, O et P* sont alignés.

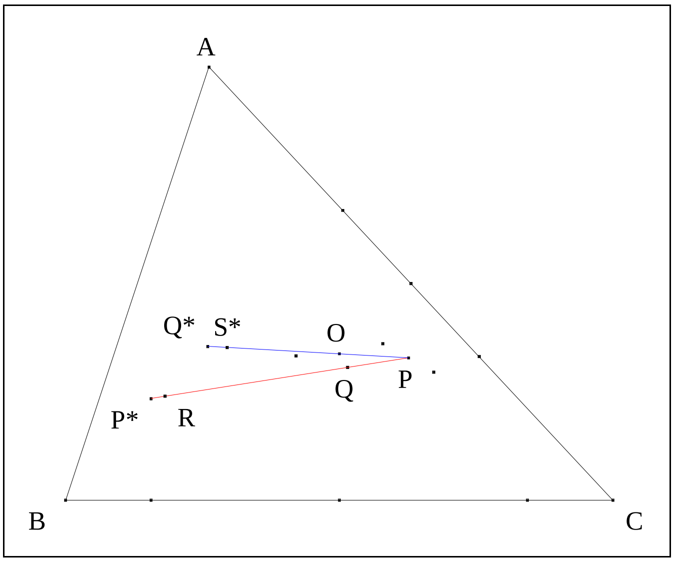
(2) Les trois alignements



5. Isotomcomplément du point de Ceva d'un PC-point

VISION

Figure :



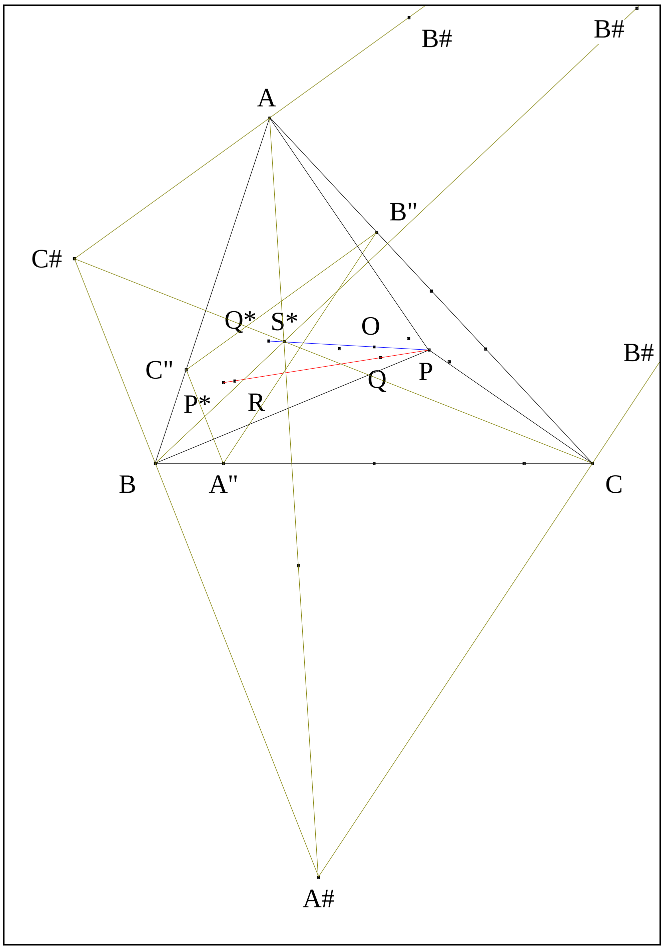
Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	P	un PC-point,
	Q	le point de Ceva de P,
	Q*	l'isogonal de Q,
	P*	l'isogonal de P,
	R	le point de Ceva de P*
et	S*	l'isotomcomplément[16] de R.

Donné : Q*, O, P et S* sont alignés.[17]

VISUALISATION

16 i.e. le complement de l'isotomique de R.

17 Ayme J.-L., With the isotomcomplement, *Mathlinks* du 05/08/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=360366.



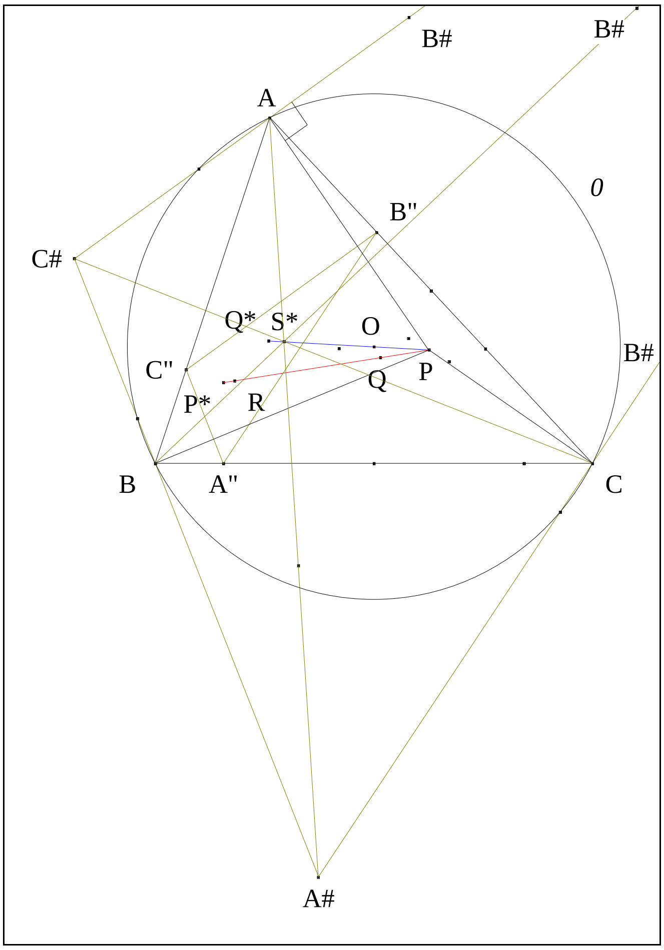
* Notons A"B"C" le triangle P*-pédal
  et A#B#C" le triangle P-antipedal.

* Par définition d'un triangle antipédal, (B#C#) ⊥ (PA) ;
  d'après Vigarié "isogonales et perpendiculaires" (Cf. Annexe 2), (PA) ⊥ (B"C") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (B#C#) // (B"C").

* Mutatis mutandis, nous montrerions que (C#A#) // (C"A")
  (A#B#) // (A"B") ;
  en conséquence, A"B"C" et A#B#C# sont homothétiques.

* ABC et A"B"C" étant en perspective de centre R, ABC et A#B#C# sont perspectifs.

* D'après Grinberg "Isotomcomplément 2" (Cf. Appendice 3), S* en est le centre de cette perspective.



- ABC et A#B#C# sont orthologiques.

- P est le pôle d'orthologie de ABC relativement à A#B#C#.

- Notons *0* le cercle circonscrit de ABC
  et P# le point de Mathieu de P relativement à A#B#C#.

- **Scolies :** **(1)** *0* est le P-cercle de Mathieu de ABC
  (2) O est le milieu de [PP#].

- D'après "Le théorème de Sondat"[18] appliqué à ABC et A#B#C#, P, P# et S* sont alignés ;
  en conséquence, P, O, P# et S* sont alignés.

- D'après B. 3. Cinq points alignés, P, O et Q* sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, Q*, O, P et S* sont alignés.

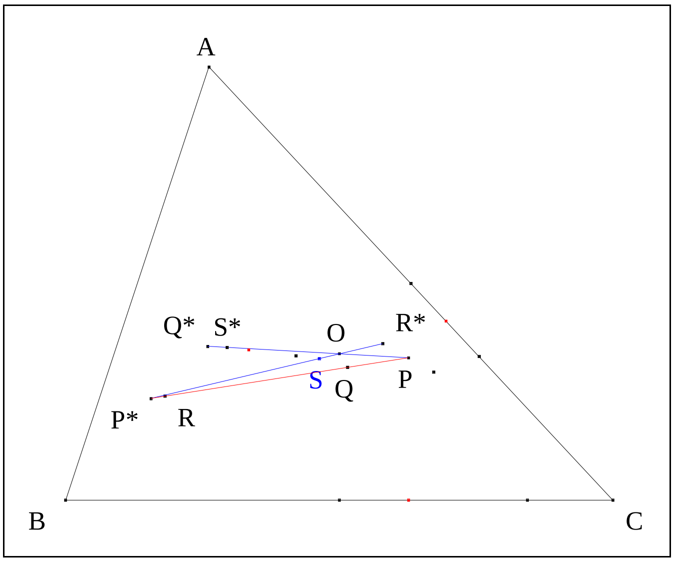
Énoncé traditionnel : la PC*-droite d'un PC-point
passe par
l'isotomcomplément du point de Ceva de son isogonal.

Commentaire : dans l'article intitulé *Ménélaüs d'Alexandrie et le Marquis Giovani Ceva* [19],

[18] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[19] Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le Marquis Giovani Ceva, G.G.G., vol. 6, p. 27 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

l'auteur a seulement montré que l'isogonal S* de l'isotomcomplément S de Q est sur (OP).
Il reste donc à montrer que S* représente le même point dans l'article cité et le présent article.

Scolies : **(1)** un second alignement



- Notons S l'isotomcomplément de Q.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que R*, O, P* et S sont alignés.

(2) S et S* sont isogonaux (Cf. Appendice 4)

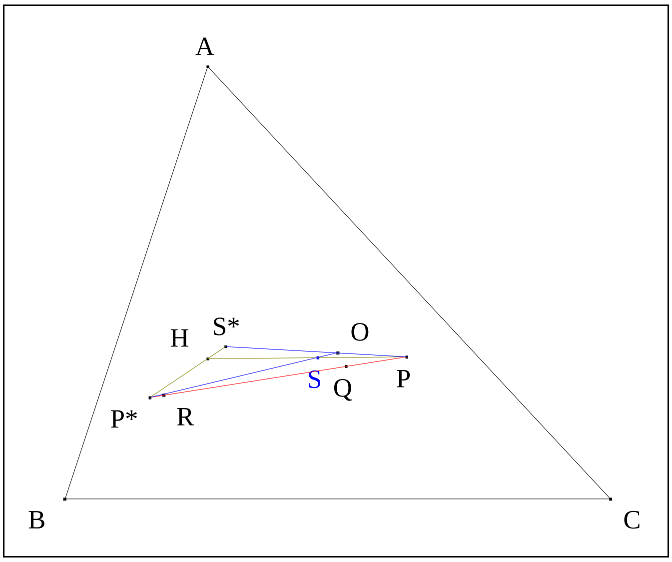
Énoncé traditionnel : la PC*-droite d'un PC-point
passe par
l'isogonal de l'isotomcomplément de son point de Ceva.

Commentaire : en position générale, l'isogonal d'un point étant unique,
S* représente le même point dans l'article cité précédemment et le présent article.

6. Application du théorème d'Otto Hesse ou "la fascinante figure de l'auteur"

VISION

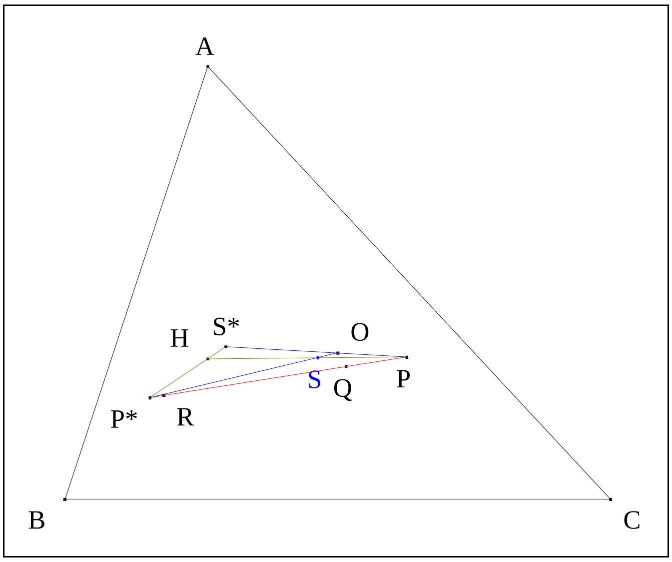
Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
P un PC-point,
Q le point de Ceva de P,
S l'isotomcomplément de S,
P* l'isogonal de P,
R le point de Ceva de P*,
S* l'isotomcomplément de R
et H l'orthocentre de ABC.

Donné : (SP) et (S*P*) se coupent en H. [20]

VISUALISATION



- D'après B. 5. L'isotomcomplément du point de Ceva d'un PC-point, (SP*) et (S*P) se coupent en O.

- **Scolies :** **(1)** H est l'isogonal de O
(2) S et P*ont resp. pour isogonaux S*, P.

[20] Observation de Jean-Pierre Ehrmann.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Hesse"[21], (SP) et (S*P*) se coupent en H.

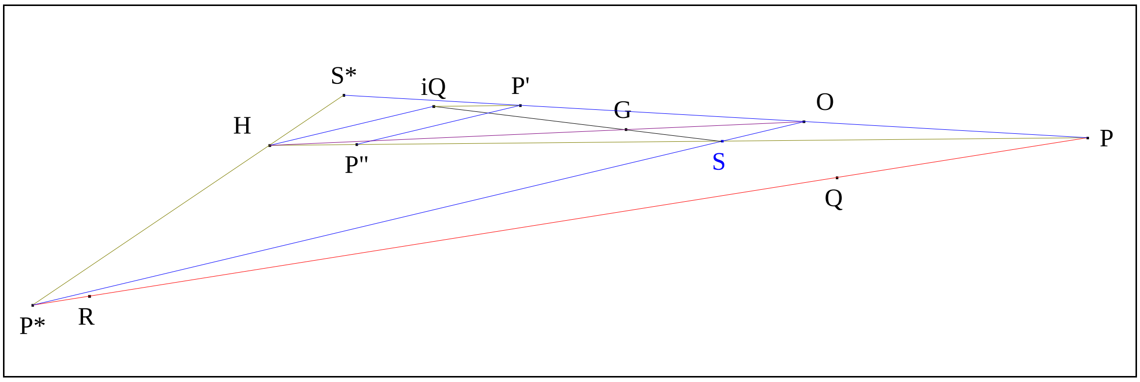
Commentaire : la figure obtenue ci-dessus a fait penser à l'auteur à "la fascinante figure de Cundy" qui lui avait permis de résoudre synthétiquement le cercle de Lester.

C. LA PREUVE DE L'AUTEUR

1. Deux parallèles remarquables

VISION

Figure :

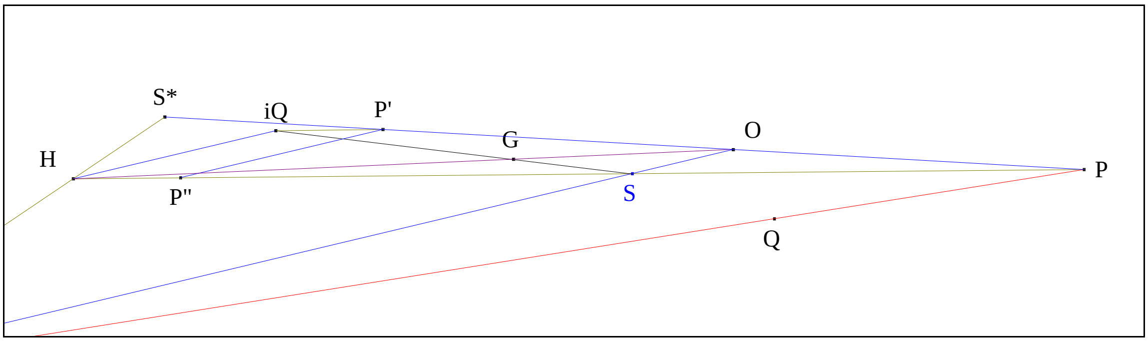


Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
P un PC-point,
Q le point de Ceva de P,
iQ l'isotomique de Q,
S l'isotomcomplément de Q,
P* l'isogonal de P,
R le point de Ceva de P*,
S* l'isotomcomplément de R,
H l'orthocentre de ABC,
et P' le symétrique de P par rapport à O.

Donné : (iQP') est parallèle à (PSH).

VISUALISATION

---
21 Ayme J.-L., Le théorème de Jacobi, G.G.G., vol. 5, p. 2 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



- Notons G le point médian de ABC
  et P" le symétrique de P par rapport à S.

- **Scolie :** S est le complément de iQ.

- Par définition du complément d'un point, S, G et iQ sont alignés dans le rapport 1:2.

- D'après "La droite d'Euler"[22], O, G et H sont alignés dans le rapport 1:2.

- D'après Thalès, (iQH) // (SO) et iQH = 2.SO.
- D'après Thalès "la droite des milieux" appliqué au triangle PP'P", (SO) // (P"P') et 2.SO = P'P".

- Par transitivité des relations // et =, (iQH) // (P'P") et iQH = P'P".

- Le quadrilatère HP"P'iQ ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (iQP') // (HP").

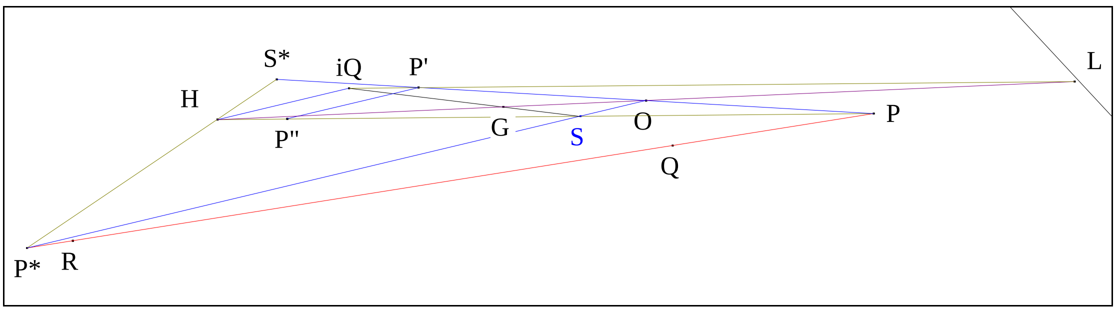
- D'après B. 6. Une application du théorème de Hesse, P, S et H sont alignés ;
  en conséquence, P, S, H et P" sont alignés.

- **Conclusion :** (iQP') est parallèle à (PSH).

2. La PC-droite de P'

VISION

Figure :



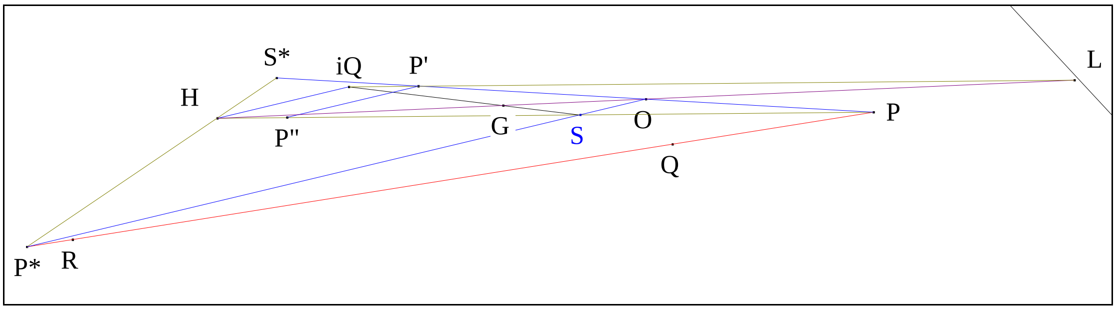
Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
P un PC-point,

22 Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy , G.G.G., vol. 2, p. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

	Q	le point de Ceva de P,
	iQ	l'isotomique de Q,
	S	l'isotomcomplément de Q,
	P*	l'isogonal de P,
	R	le point de Ceva de P*,
	S*	l'isotomcomplément de R,
	H	l'orthocentre de ABC,
	P'	le symétrique de P par rapport à O
et	L	le point de de Longchamps de ABC.

Donné : (P'iQ) passe par L.

VISUALISATION



- **Scolie :** L étant l'orthocentre du triangle antimédian de ABC est le symétrique de H par rapport à O.

- Le quadrilatère HPLP' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu O, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (P'L) // (HP).

- D'après C. 1. Deux parallèles, (HP) // (iQP') ;
  par transitivité de la relation //, (P'L) // (iQP') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (P'L) = (iQP') ;
  en conséquence, P', iQ et L sont alignés.

- D'après "Symétrique d'un PC-point par rapport au centre du cercle circonscrit" (Cf. Appendice 5),
  P' est un PC-point admettant iQ pour point de Ceva.

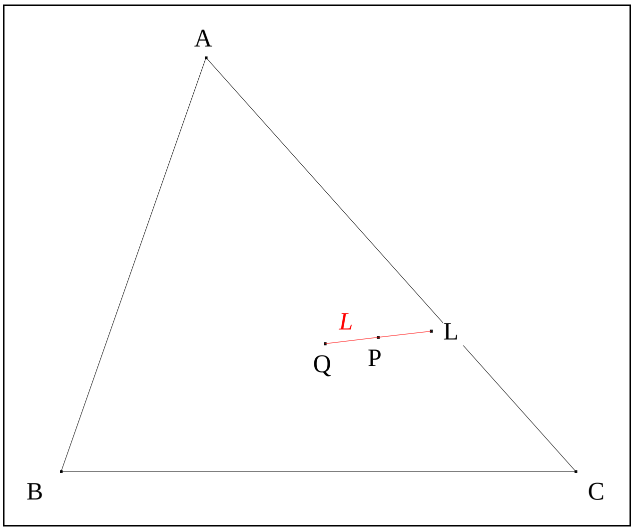
- **Conclusion :** (P'iQ) passe par L.

Énoncé traditionnel : la PC-droite du symétrique d'un PC-point d'un triangle par rapport au centre du cercle circonscrit de ce triangle passe par le point de de Longchamps du triangle.

3. La preuve par "symétrie" de l'auteur

VISION

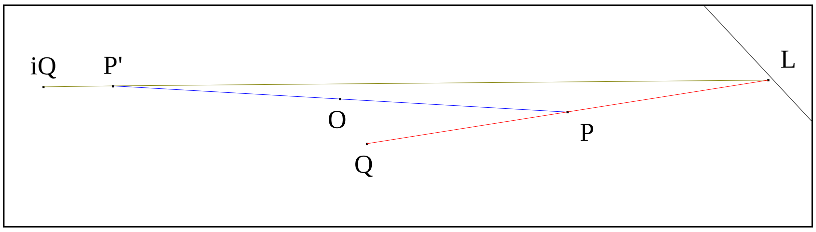
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC,
Q le point de Ceva de P
L la PC-droite de P
et L le point de de Longchamps de ABC.

Donné : *L* passe par L.

VISUALISATION

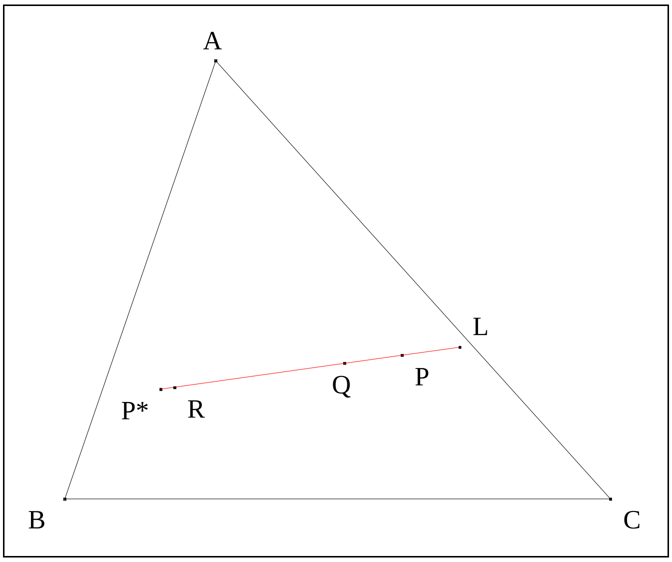


- Notons iQ l'isotomique de Q
  et P' le symétrique de P par rapport à O.

- D'après C. 2. La PC-droite de P', (P'iQ) passe par L.

- **Conclusion :** en reprenant toute notre démarche à partir du PC-point P',
  nous montrerions que *L* passe par L.

Scolie : un alignement remarquable



- Les hypothèses et notations sont les mêmes que les précédentes.

- **Conclusion :** P, Q, P*, R et L sont alignés.

Énoncé traditionnel : toute PC-droite d'un triangle passe par le point de de Longchamps de ce triangle.

4. A propos de ce résultat et de Luis González

Luis Alfredo González est né à Maracaibo (Zulia, Vénézuela) en 1985.
Étudiant à l'Université de Zulia, il obtient en 2010 son diplôme d'Ingénieur-Pétrole. Parallèlement à ses études, il est passionné par la Géométrie du Triangle. Sa participation active sur le site *Mathlinks* l'a révélé comme l'un des plus grands "solvers" de nos jours ce qui a attiré tout naturellement mon attention.

Rappelons que le résultat principal de l'article en cours a interpellé des membres du groupe *Hyacinthos* en 2003.

Tout a débuté récemment avec un problème de Nguyen Van Linh[23], étudiante à la Highschool for gifted student de Ha Noi (Vietnam), posté sur *Mathlinks* en 2009 concernant un cas particulier d'un problème de l'*American*

[23] Livetolove212, Concurrent 2 (PC-point again), *Mathlinks* du 02/12/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=315750.

Mathematical Monthly [24] datant de 1917 comme l'auteur l'a montré dans l'article précédent[25]. A partir de là, l'auteur qui avait le résultat de cet article en tête, a communiqué avec Luis González au sujet de la possibilité d'une preuve synthétique.

L'auteur : *I think as you say that P is moving on a cubic, that a synthetic proof seems to me quite impossible... at first look. In my research, I haven't found no way to start...*

Luis González : *Thus, I do believe that we can show synthetically that if the pedal triangle of P is perspective with ABC then the line passing through P and its isogonal conjugate P', hit the Euler line at a fixed point (De Longchamps point). I tried to use the results in the above two proofs but failed.*

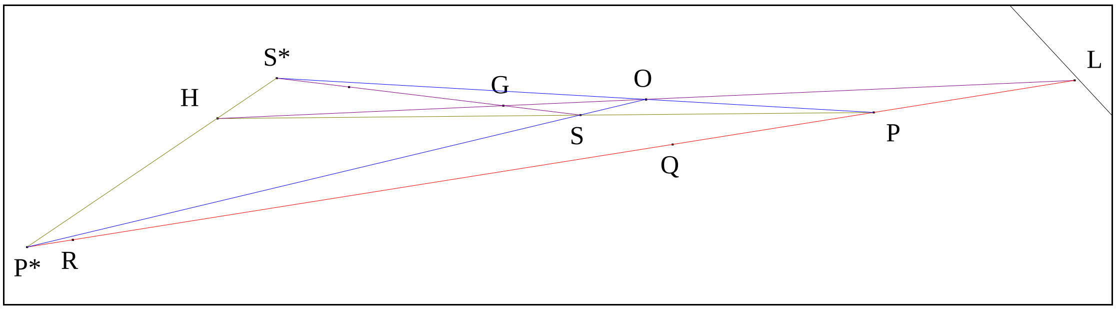
Aussi, l'article en cours n'aurait pas vu le jour sans l'intime conviction de Luis González…

D. RETOMBÉES

1. Le point médian

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
P un PC-point,
Q le point de Ceva de P,
S l'isotomcomplément de Q,
P* l'isogonal de P,
R le point de Ceva de P*,
S* l'isotomcomplément de R,
H l'orthocentre de ABC,
G le point médian de ABC
et L le point de de Longchamps de ABC.

Donné : G, S et S* sont alignés.

VISUALISATION

---

[24] *American Mathematical Monthly* **24** (1917) 313-317 ;
A.M.'s Problem, Message *Hyacinthos* # 1350 du 04/09/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[25] Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le marquis Giovani Ceva – Approfondissement d'un problème du *Monthly* de 1917, G.G.G., vol. 6, p. 14 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

- D'après "La droite d'Euler"[26], la quaterne (O, H, G, L) est harmonique.

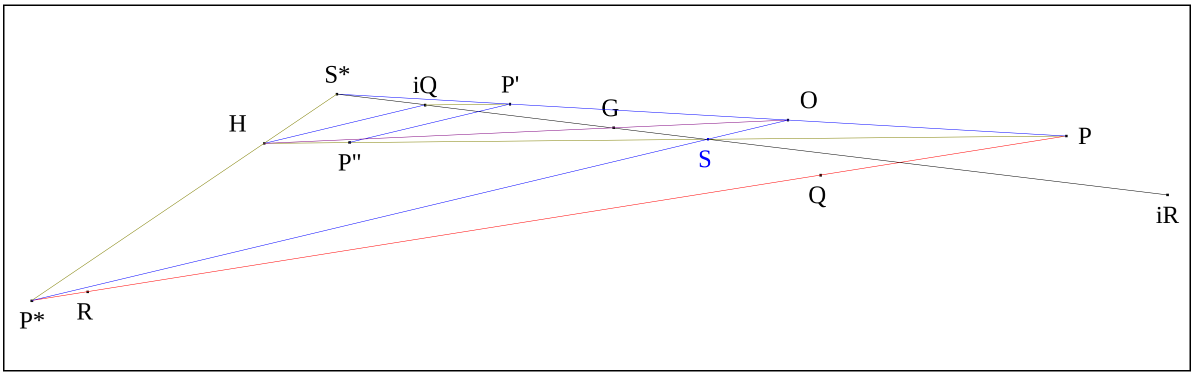
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 4) appliqué au quadrilatère HSOS*, la diagonale (PP*) passant par L, la diagonale (SS*) passe par G.

- **Conclusion :** G, S et S* sont alignés.

Note historique : Luis Gonzales[27] a montré métriquement cet alignement en utilisant le théorème de Cristea.

Énoncé traditionnel : la droite passant par les isotomcompléments des points de Ceva d'un PC-point et de son isogonal**,** passe par le point médian de ce triangle.

Scolie : un alignement remarquable

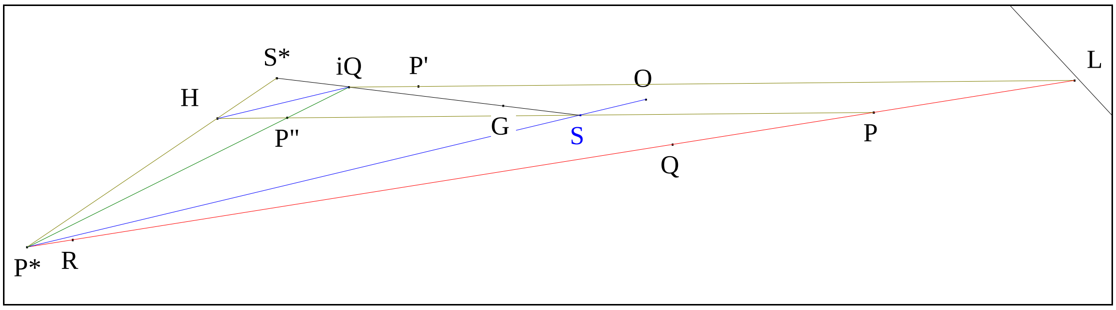


- **Conclusion :** G, S, S*, iQ et iR sont alignés.

2. **Un alignement insolite**

VISION

Figure :



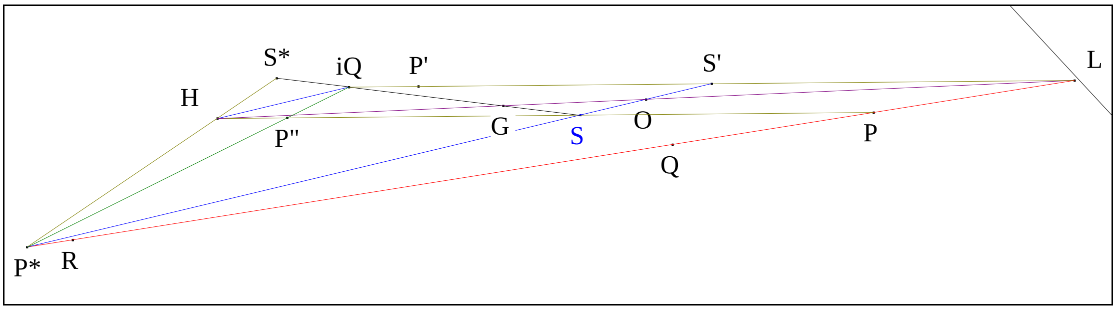
---

[26] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy , G.G.G., vol. 2, p. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[27] Ayme J.-L., A surprising collinearity, *Mathlinks* du 06/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=360705.

Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : P*, iQ et P" sont alignés.[28]

VISUALISATION



- Notons S' le point d'intersection de (OS) et (S*L).

- Nous avons : S'iQ = SH et SH = S'L ;
  par transitivité de la relation =, S'iQ = S'L ;
  en conséquence, S' est le milieu de [iQL].

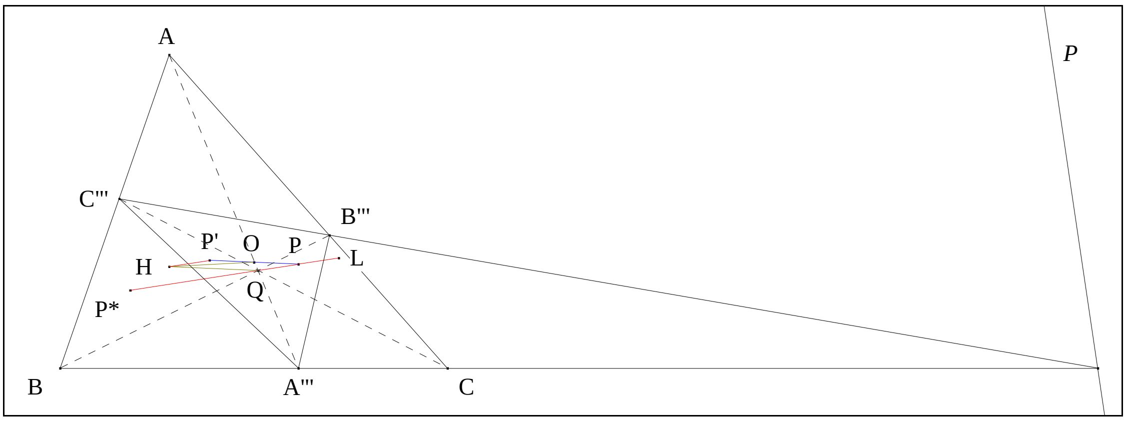
- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" appliqué au trapèze P"PLiQ, P*, iQ et P" sont alignés.

Énoncé traditionnel : l'isogonal, l'isotomique et le symétrique d'un PC-point par rapport à son isotomcomplément sont alignés.

3. La polaire trilinéaire du point de Ceva d'un PC-point

VISION

Figure :



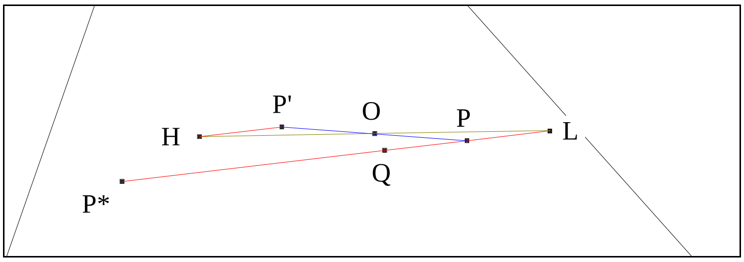
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A'''B'''C''' le triangle Q-cévien de ABC

[28] Ayme J.-L., PC-point and collinearity ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=361814 ; message *Hyacinthos* # 19186 du 13/08/2010 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

et *P* la polaire trilinéaire [29] de Q.

Donné : *P* est perpendiculaire à (HP').[30]

VISUALISATION

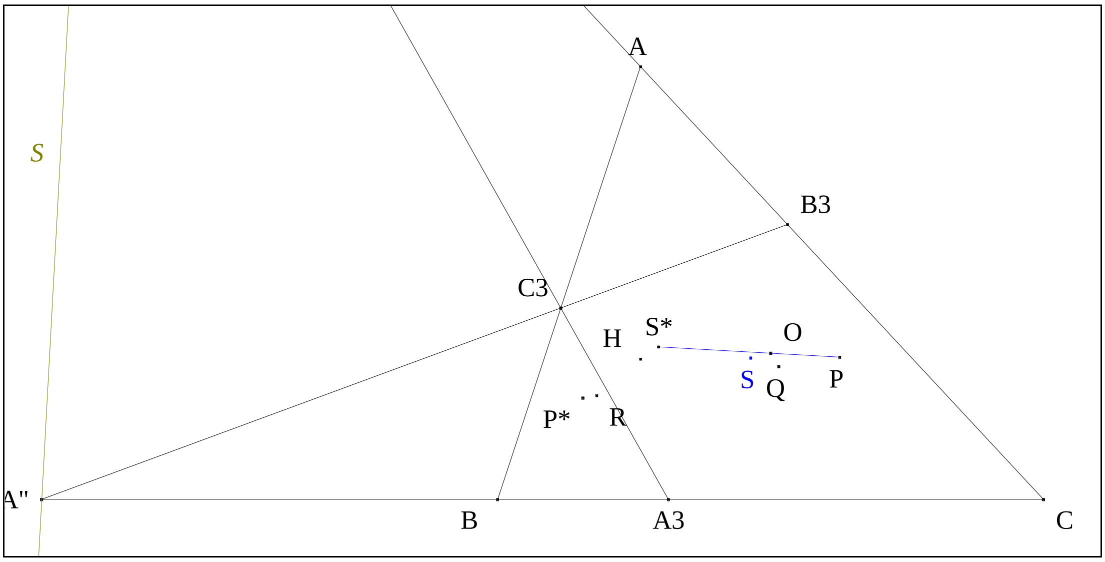


- Notons *P* la polaire trilinéaire de Q.
- D'après "Le théorème de Sondat"[31] appliqué à ABC et A'B'C', *P* ⊥ (P*PQ).
- Le quadrilatère HPLP' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (P*QPL) // (HP') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, *P* ⊥ (HP').
- **Conclusion :** *P* est perpendiculaire à (HP').

4. La polaire trilinéaire de S*

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèse et notations précédentes, nous ajoutons

[29] c'est l'axe de perspective du triangle Na-cévien et de ABC.
[30] Ayme J.-L., Two perpendicular lines (PC-point again again), *Mathlinks* du 15/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=362095.
[31] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

	A3B3C3	le triangle S*-cévien de ABC
et	*S*	la polaire trilinéaire [32] de S*.

Donné : *S* est perpendiculaire à (OPS*).[33]

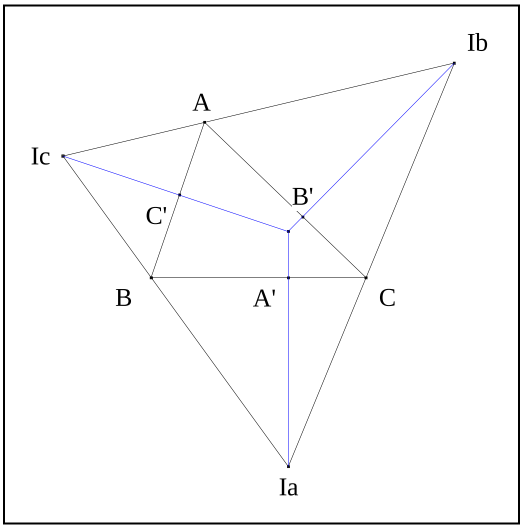
VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après "Approfondissement d'un problème du *Monthly* de 1917" [34], *S* est perpendiculaire à (OPS*).

4. Une application : la PC-droite du point de Bevan [35]

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	IaIbIc	le triangle excentral de ABC,
et	A', B', C'	les pieds des perpendiculaires issues de Ia, Ib,Ic' resp. sur (BC), (CA), (AB).

Donné : (A'Ia), (B'Ib) et (C'Ic) sont concourantes.

VISUALISATION

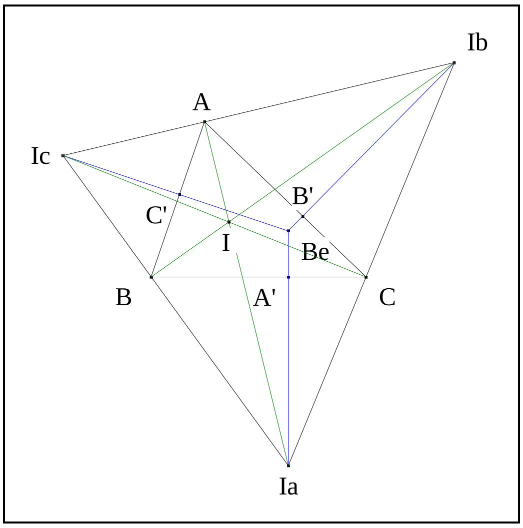
---

32 c'est l'axe de perspective du triangle Na-cévien et de ABC.

33 Ayme J.-L., Two perpendicular lines (PC-point again again), *Mathlinks* du 15/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=362095.

34 Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le Marquis Giovani Ceva, G.G.G., vol. 6, p. 19, 23, 27, 29 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

35 Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 18.



- Notons I le centre de ABC.

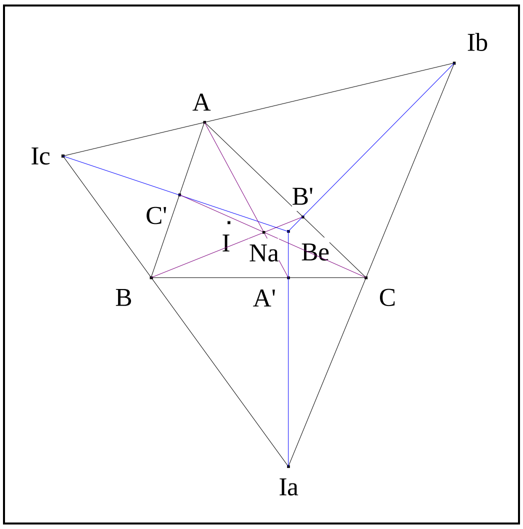
- **Scolie :** I est l'orthocentre de IaIbIc ;
  en conséquence, ABC est le triangle orthique de A'B'C'.

- **Conclusion :** d'après Nagel "Un rayon"[36] appliqué à IaIbIc,
  (A'Ia), (B'Ib) et (C'Ic) passent par le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.

- Notons Be ce point de concours.

Scolie : **(1)** Be est "le point de Bevan de ABC" et est répertorié sous X_{40} chez ETC.

(2) Be est un PC-point



- Nous avons : **(1)** A'B'C' est inscrit dans ABC et ABC inscrit dans IaIbIc

  (2) A'B'C' et IaIbIb sont perspectifs et ABC et IaIbIc sont perspectifs ;

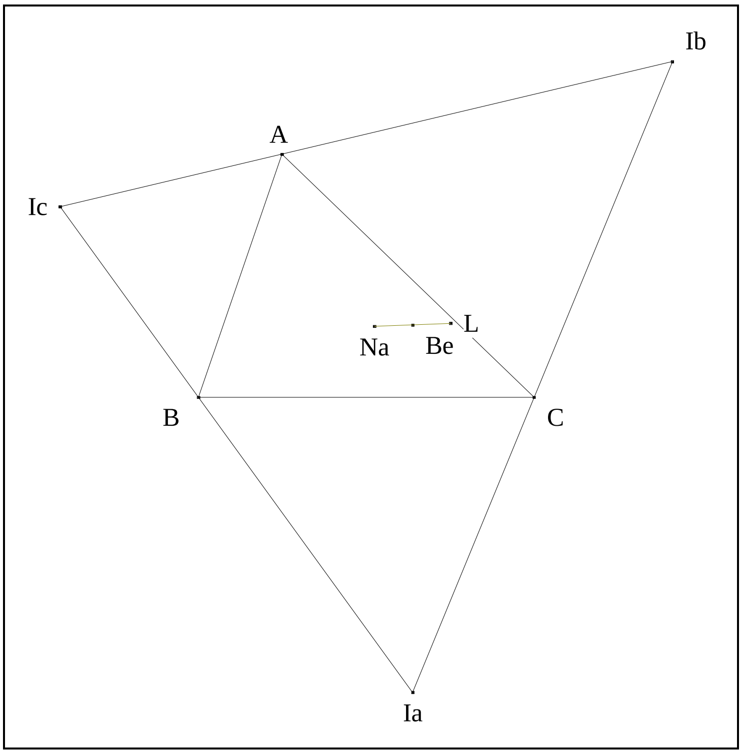
  d'après "The cevian nests theorem"[37], A'B'C' et ABC sont en perspectifs.

---

[36] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de von Nagel, G.G.G., vol. 3, p. 19-20 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[37] Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G., vol. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

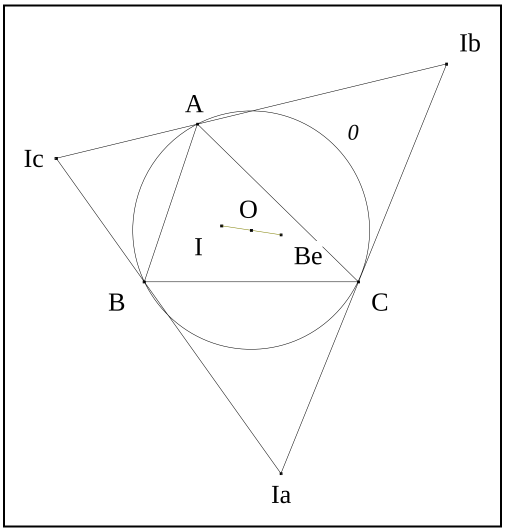
- Notons Na ce point de concours.
- Na est "le point de Nagel de ABC" et est répertorié sous X_{40} chez ETC.
- **Conclusion :** Be est un PC-point.

(3) La PC-droite de Be



- Notons L le point de de Longchamps de ABC.
- D'après C. 3. La preuve de l'auteur, Be, Na et L sont alignés.
- **Conclusion :** la PC-droite de Be passe par L.

(4) Le symétrique de Be par rapport au centre du cercle circonscrit



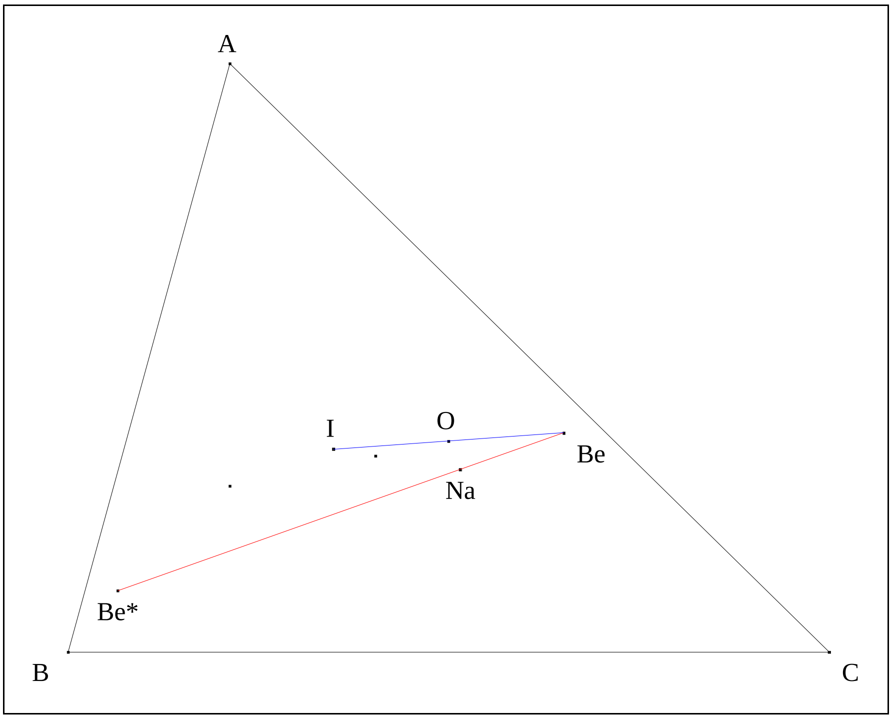
- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC
  et O le centre de *0*.

- D'après Feuerbach, *1* est le cercle d'Euler-Bevan de IaIbIc.

- D'après "La droite d'Euler"[38], (IOBe) est la droite d'Euler de IaIbIc.

- **Conclusion :** d'après Feuerbach, O est le milieu de [IBe].

(5) Le premier résultat d'Alexey Zaslavsky [39]



- Notons Be* l'isogonal de Be. [40]

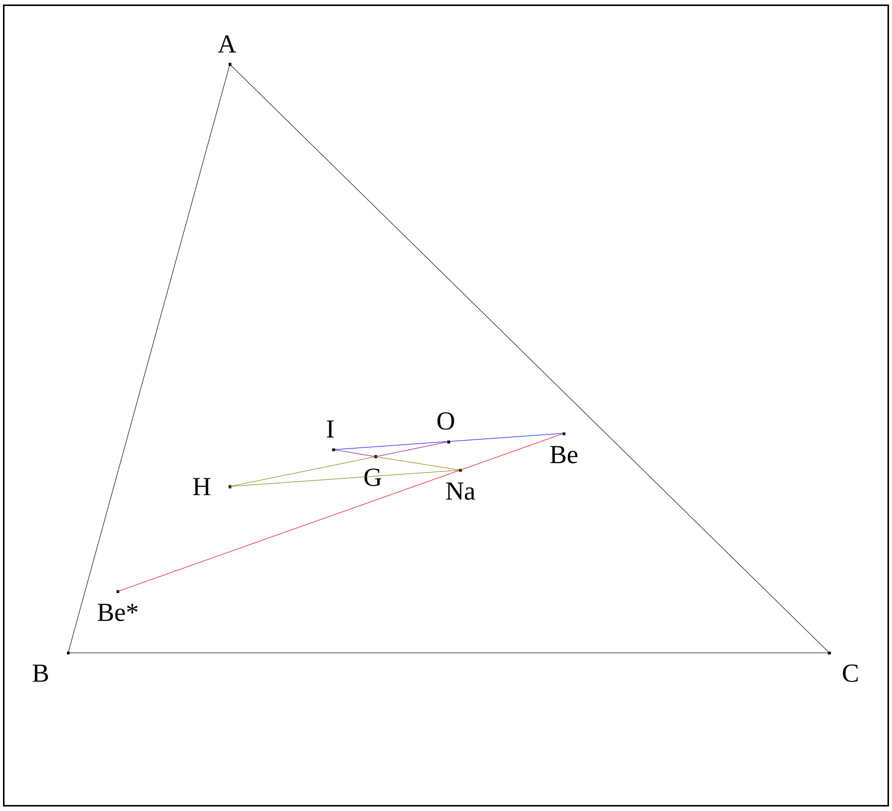
- **Conclusion :** d'après B. 2. PC-droite d'un PC-point, Be, Na et Be* sont alignés.

Note historique : Alexey Zaslavsky dans un message *Hyacinthos* de 2003 est parti du centre I du triangle ABC, a considéré le symétrique Be de I par rapport au centre du cercle circonscrit du triangle sans donner la nature de Be, puis le point de Nagel du triangle sans préciser sa relation avec Be, puis l'isogonal Be* de Be et d'affirmer en fin que Be, Na et Be* sont alignés.

(5) Le second résultat d'Alexey Zaslavsky [41] ou la polaire trilinéaire [42] de Na

---

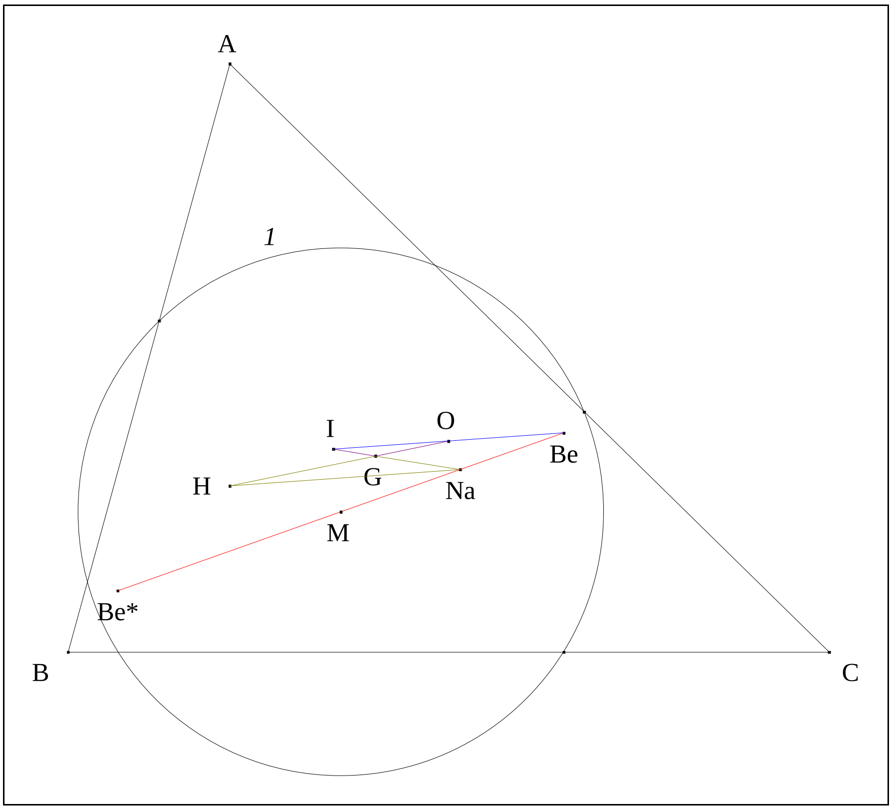
38 Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G**.,** vol. 2 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
39 Zaslavsky A. A., Nagel point Message *Hyacinthos* # 8840 du 19/12/2003 ;
40 Be* est répertorié sous X_{189} chez ETC.
41 Zaslavsky A. A., Nagel point Message *Hyacinthos* # 8840 du 19/12/2003 ;
42 c'est l'axe de perspective du triangle Na-cévien et de ABC.



- Notons P la polaire trilinéaire de Na.

- **Conclusion :** d'après D. 3. La polaire trilinéaire du point de Ceva d'un PC-point**,** $P \perp$ (HI).

(6) le centre du cercle circonscrit du triangle Be-pédal de ABC



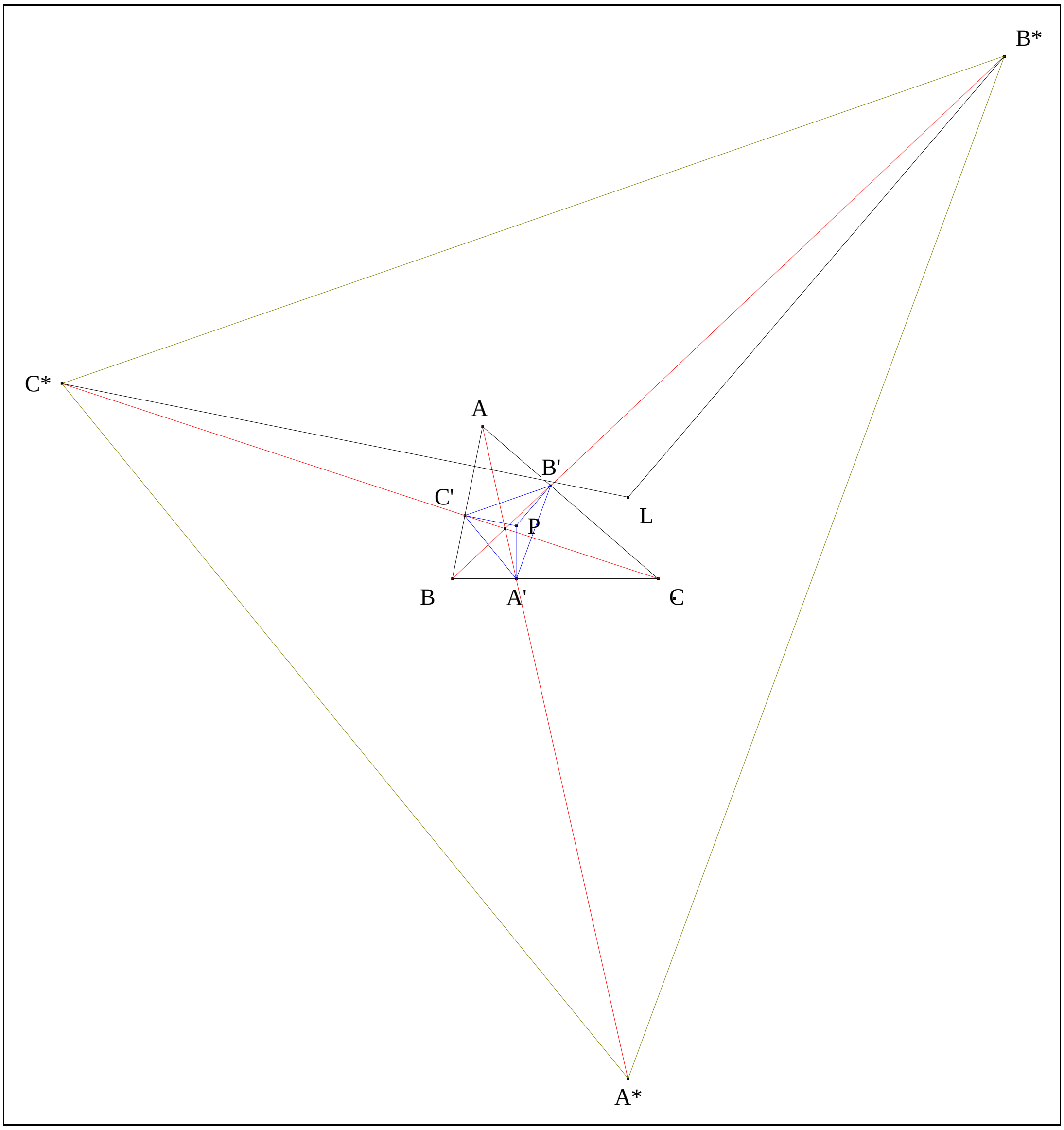
- Notons *1* ce cercle
  et M le centre de *1*. [43]

- **Conclusion :** d'après B. 3. Cinq points alignés, scolie, M, Be, Na et Be* sont alignés.

5. Un problème de l'auteur

VISION

Figure :



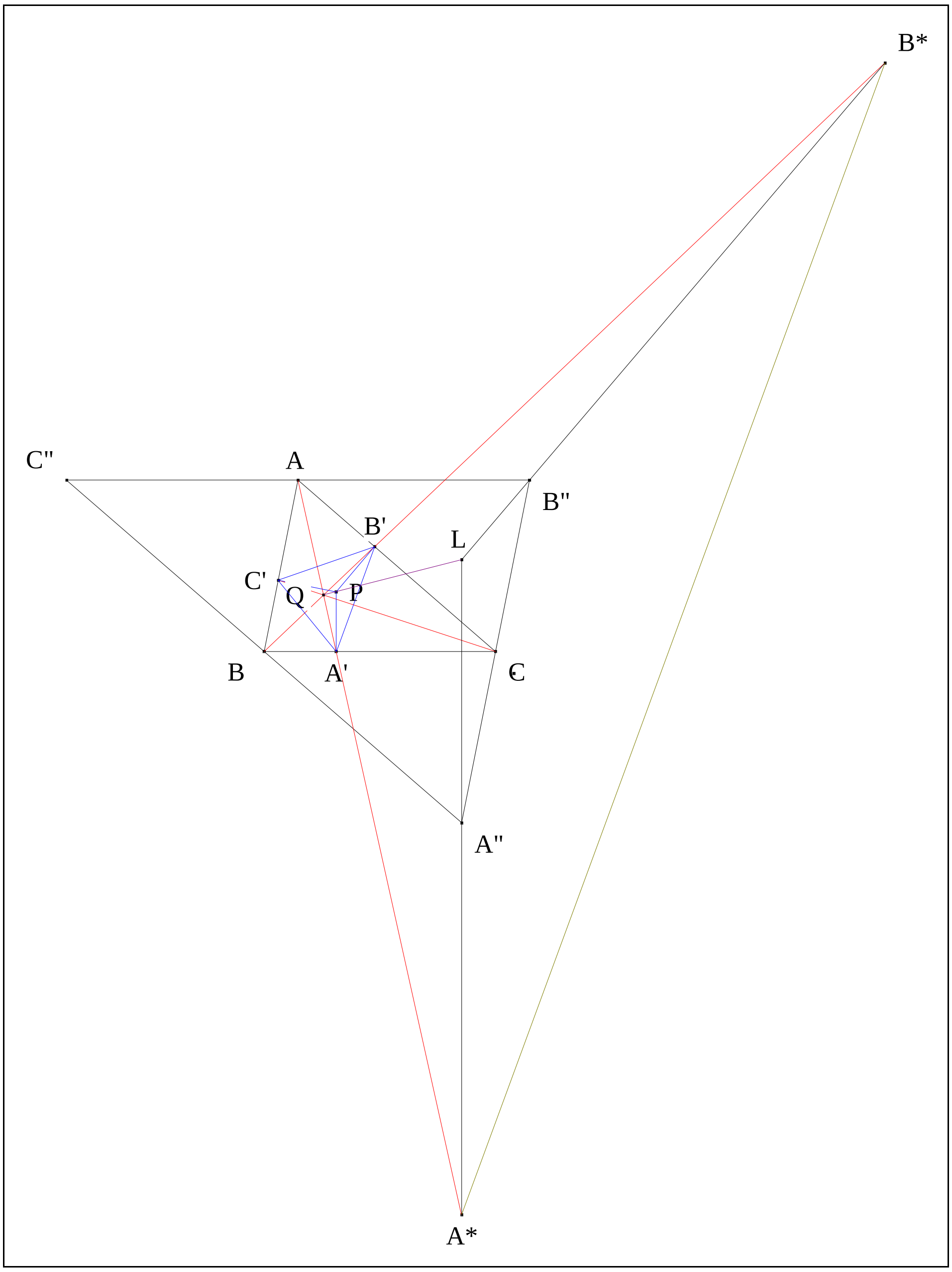
Traits : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC,
A'B'C' le triangle P-pédal de ABC,
L le point de de Longchamps de ABC,
A* le point d'intersection de (AA') avec la perpendiculaire à (BC) issue de L,

43 M est répertorié sous X_{1158} chez ETC.

	B*	le point d'intersection de (AB') avec la perpendiculaire à (CA) issue de L
	C*	le point d'intersection de (AC') avec la perpendiculaire à (AB) issue de L.

Donné : A*B*C* est homothétique à ABC.[44]

VISUALISATION



- Notons Q le point de Ceva de P.
- D'après C. 3. La preuve par "symétrie" de l'auteur, P, Q et L sont alignés.
- Par hypothèse, (A*L) ⊥ (BC)
  (BC) ⊥ (A'P) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A*L) // (A'P).

[44] Ayme J.-L., Two difficult parallels, *Mathlinks* du 21/07/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=290020.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B*L) // (B'P).

- D'après "Le théorème faible de Desargues" (Cf. Annexe 5) appliqué aux triangles PA'B' et LA*B* en perspective de centre Q, (A*B*) // (A'B').

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B*C*) // (B'C') (C*A*) // (C'A').

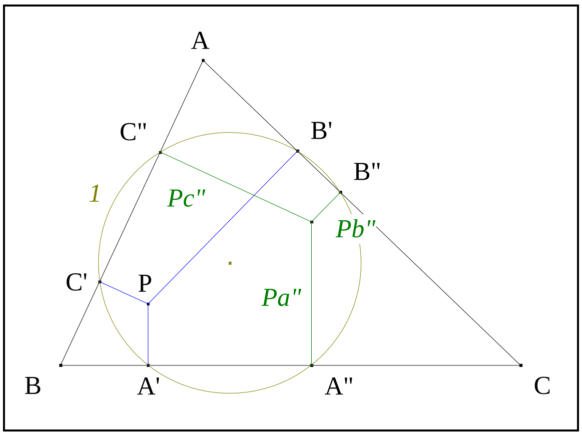
- **Conclusion :** A*B*C* est homothétique à ABC.

E. APPENDICE

1. Le P-cercle de Mathieu

VISION

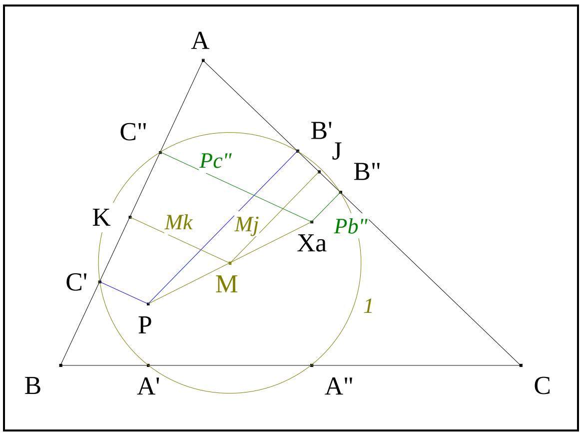
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A', B', C'	les pieds resp. des perpendiculaires issues de P resp. sur (BC), (CA), (AB),
	1	le cercle passant par A', B', C',
	A", B", C"	les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	*Pa"*, *Pb"*, *Pc"*	les perpendiculaires resp. à (BC), (CA), (AB) élevées resp. en A", B", C".

Donné : *Pa"*, *Pb"* et *Pc"* sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons M le centre de *1*
  Xa le point d'intersection de *Pb"* et *Pc"*
  J, K les milieux resp. de [B'B"], [C'C"]
  et *Mj*, *Mk* les médiatrices resp. de [B'B"], [C'C"].

- D'après le théorème "Corde et médiatrice", *Mj* et *Mk* se coupent en M.

- **Scolies :** **(1)** *Mj*, (PB') et *Pb"* sont parallèles entre elles
  (2) *Mk*, (PC') et *Pc"* sont parallèles entre elles.

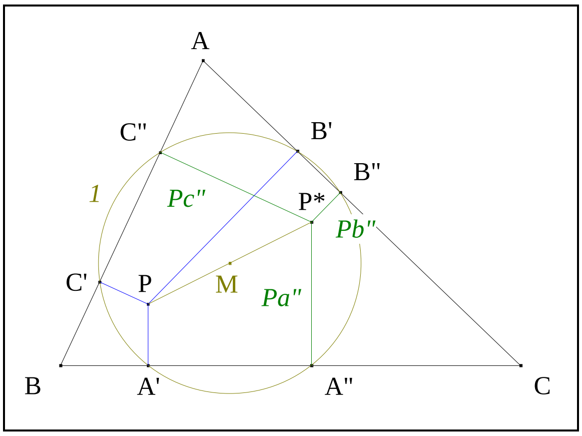
- D'après l'axiome de passage IIIb, *Mj* et *Mk* passent par le milieu de [PXa].

- **Conclusion partielle :** O est le milieu de [PXa].

- Notons Xb le point d'intersection de *Pc"* et *Pa"*
  et Xc le point d'intersection de *Pa"* et *Pb"*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que O est le milieu resp. de [PXb], [PXc] ;
  en conséquence, Xa, Xb et Xc sont confondus.

- Notons P* ce point.



- **Conclusion :** *Pa"*, *Pb"* et *Pc"* sont concourantes en P*.

Scolies : **(1)** P* est "le point de Mathieu associé à P relativement à ABC" ;
en partant de P*, P est le point de Mathieu associé est P* relativement à ABC.
Par abus de langage, P et Q sont les points de Mathieu de la situation étudiée.

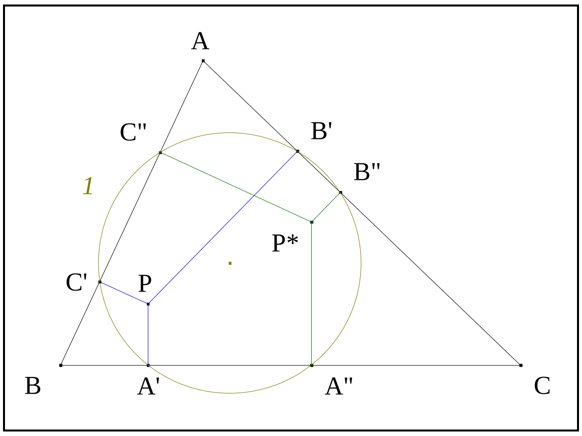
(2) *1* est "le cercle de Mathieu de P et Q" ou encore "le P-cercle de Mathieu".

(3) M est le milieu de [PP*].

(4) P* est l'isogonal de P

VISION

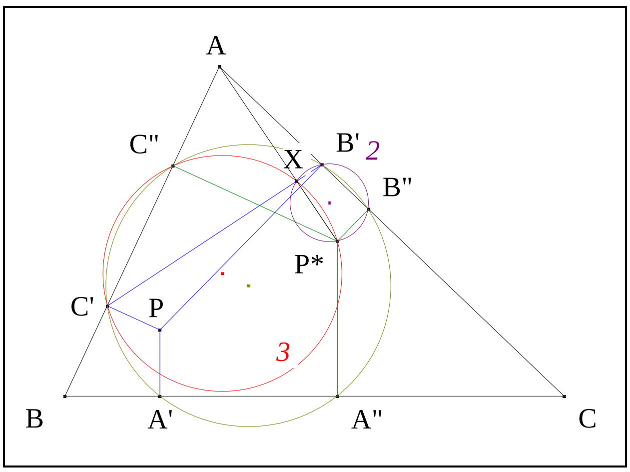
Figure :



Traits :		ABC	un triangle,
		P	un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC,
		A', B', C'	les pieds resp. des perpendiculaires issues de P resp. sur (BC), (CA), (AB),
		1	le cercle passant par A', B', C',
		A", B", C"	les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
	et	P*	le point de Mathieu associé à P.

Donné : P* est l'isogonal de P.

VISUALISATION



- Notons X le pied de la perpendiculaire abaissée de P* sur (B'C').
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", **(1)** P*, X, B' et B" sont cocycliques
  (2) P*, X, C' et C" sont cocycliques.
- Notons *2, 3* resp. ces premier et second cercles.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [45], P*, X et A sont alignés.

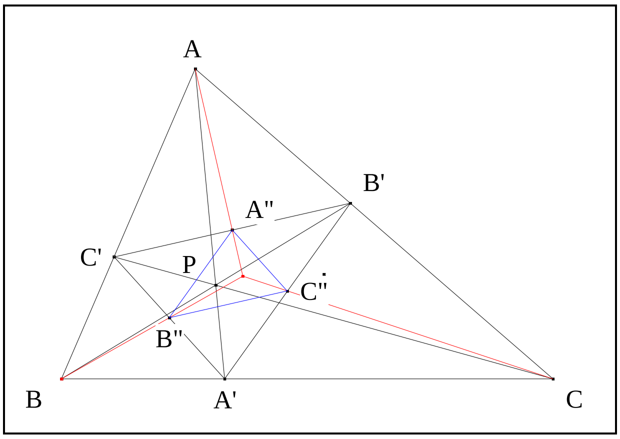
- **Conclusion partielle :** d'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 2), (AP*) est la A-isogonale de (AP) de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BP*) est la B-isogonale de (AP) de ABC (CP*) est la C-isogonale de (AP) de ABC.

- **Conclusion :** par définition, P* est l'isogonal de P.

Note historique : ce résultat se trouve dans un livre d'Eugène Catalan[46] écrit en 1879.

2. Isotomcomplément 1



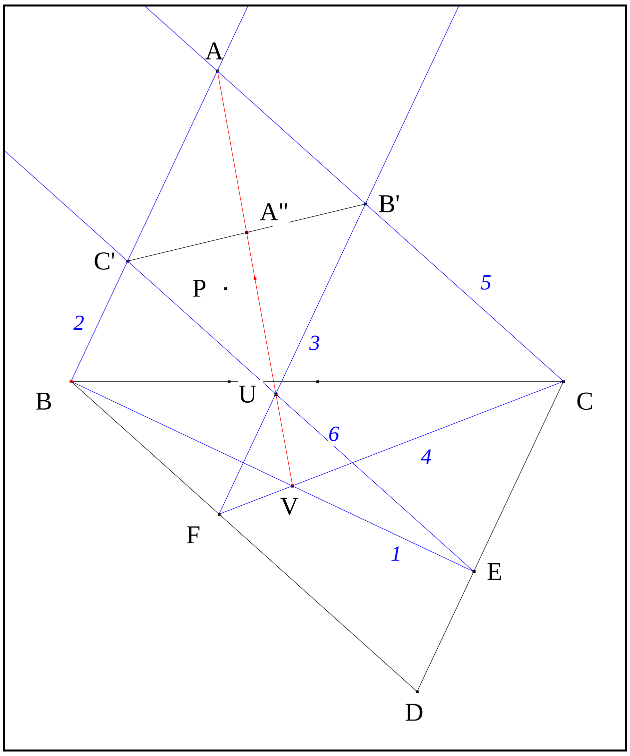
Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le P-triangle cévien de ABC
et A"B"C" le triangle médian de A'B'C'.

Donné : A"B"C" est en perspective avec ABC.

VISUALISATION

[45] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G., vol. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

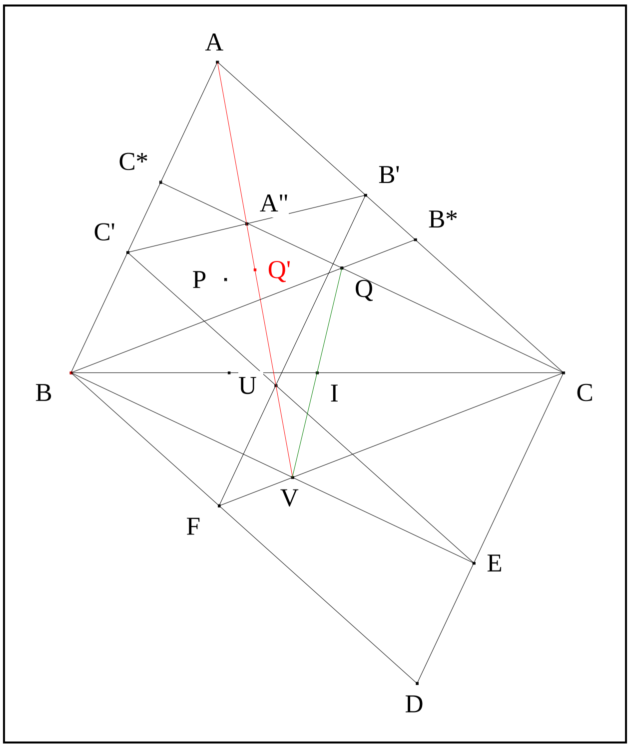
[46] Catalan E., Théorème 28, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Elémentaire*, 6e édition, Dunod, Paris (1879) 52.



- Notons D le point tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme
  E le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par C' avec (CD)
  F le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par B' avec (BD)
  et U, V le point d'intersection de (C'E) et (B'F), de (BE) et (CF).

- D'après Pappus "Deux sommets à l'infini" [47], (VAU) est la pappusienne de l'hexagone dégénéré *123456*.

- Le quadrilatère AC'UB' étant un parallélogramme, A' est sur (VAU).



[47] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G., vol. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

- Notons B* l'isotomique de B' relativement à [AC],
  C* l'isotomique de C' relativement à [AB],
  Q le conjugué isotomique de P,
  Q' le complément du conjugué isotomique de P,
  et I le milieu de [BC].

- Par construction, le quadrilatère BVCQ est un parallélogramme;
  en conséquence, Q, I et V sont alignés.

- D'après "Le point complémentaire" (Cf. Annexe 6), (AA"UV) passe par Q'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB") passe par Q'
  (CC") passe par Q'.

- **Conclusion :** A"B"C" est en perspective avec ABC.

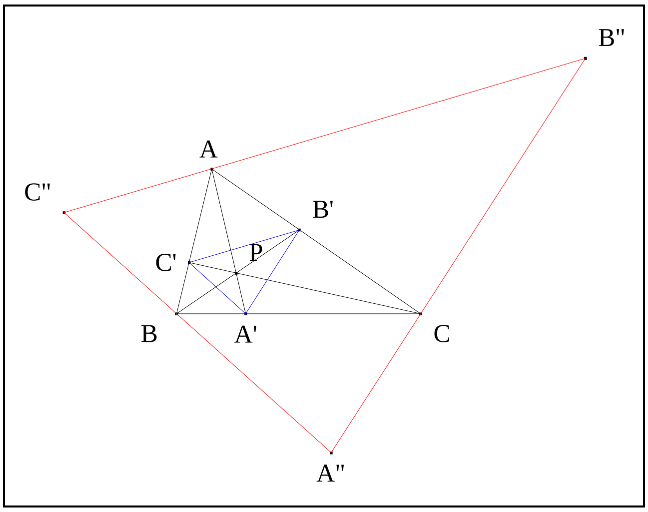
Scolie : Q' est "le complément de l'isotomique de P" en français
ou "l'isotomcomplement de P" en anglais comme le dit et l'utilise Darij Grinberg.

Note historique : ce résultat présenté comme "Theorem 1" par Darij Grinberg[48] a été démontré en recourrant aux coordonnées barycentriques.

3. Isotomcomplément 2 [49]

VISION

Figure :

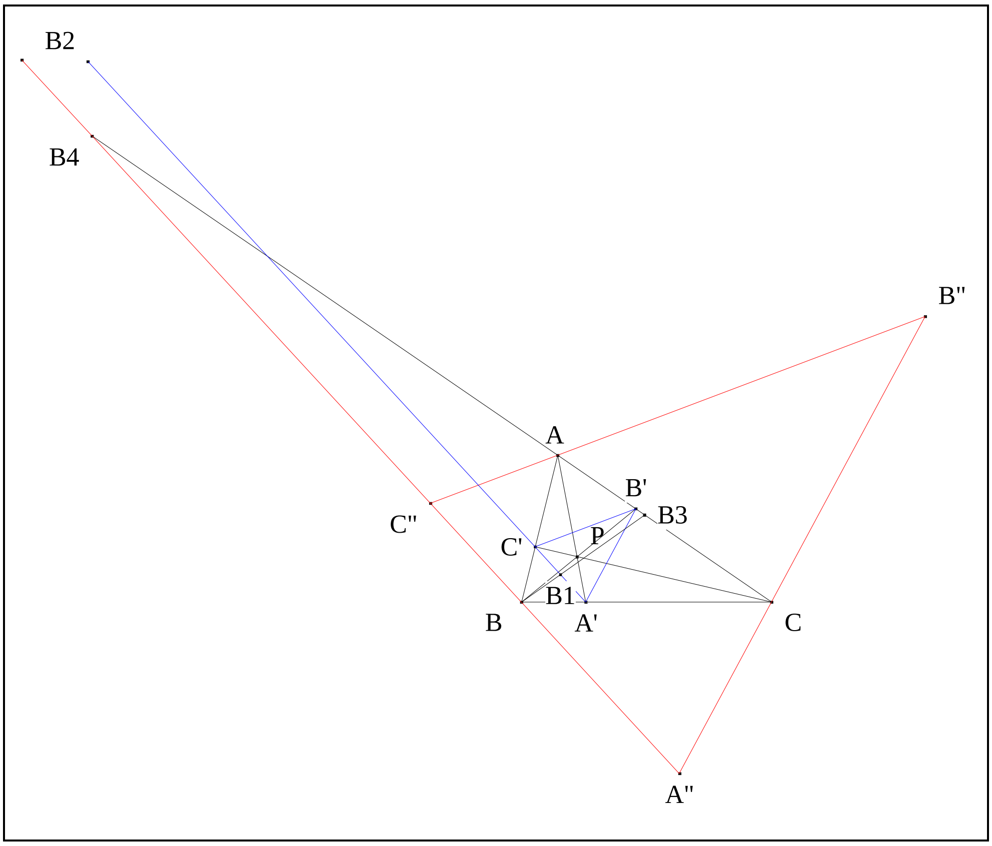


Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC
et A"B"C" le triangle homothétique à A'B'C' circonscrivant ABC.

[48] Grinberg D., Isotomcomplement theory, Message # 6423 *Hyacinthos* du 24/01/2003.
[49] Grinberg D., Isotomcomplement Theory, Theorem 8, Message *Hyacinthos* du 24/01/2003.

Donné : A"B"C" et ABC sont en perspective.

VISUALISATION



- Notons B1 le milieu de [A'C'],
  B2 le point à l'infini de (C'A') et (C"A") ;
  et B3, B4 les points d'intersection resp. de (BB1) et (CA), de (C"A") et (CA).

- Notons Q l'isotomcomplément de P.

- D'après Grinberg "Isotomcomplément 1" (Cf Appendice 2), (BB1) passe par Q.

- Par définition, la quaterne (A', C', B1, B2) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (B ; A', C', B1, B2) est harmonique ;
  par intersection avec la transversale (AC), la quaterne (C, A, B3, B4) est harmonique.

- **Scolie :** B3 est un sommet du triangle Q-cévien de ABC.

- **Conclusion partielle :** (BB4) i.e. (C"A") est un côté du triangle Q-anticévien de ABC.

- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que (A"B") est un côté du triangle Q-anticévien de ABC
  (B"C") est un côté du triangle Q-anticévien de ABC.

- **Conclusion partielle :** par définition, A"B"C" est le triangle Q-anticévien de ABC.

- **Conclusion :** A"B"C" et ABC sont en perspective de centre Q.

Énoncé traditionnel : le triangle cévien d'un point et le triangle anticévien de l'isotomcomplément de ce point, sont homothétiques.

Note historique : ce résultat de Darij Grinberg d'abord énoncé sous forme de conjecture a été formulé de la façon suivante :

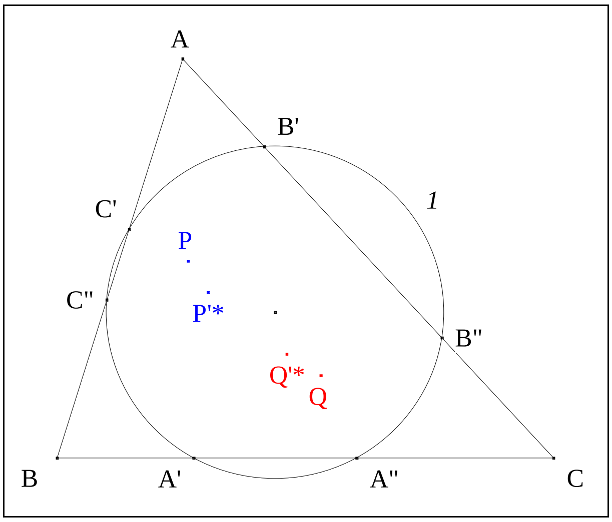
si, le triangle cévien d'un point P d'un triangle est dilaté relativement à l'isotomcomplément de P

alors, le triangle obtenu est en perspective avec le triangle de départ.

4. Isotomcompléments des points de Terquem [50]

VISION

Figure :

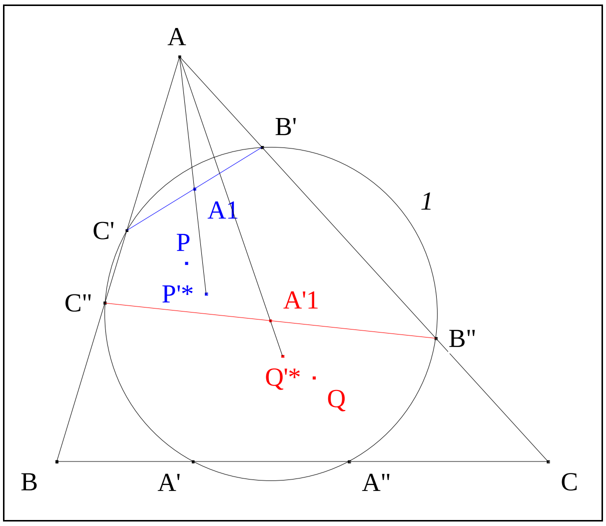


Traits : ABC un triangle,
P un point,
P'* l'isotomcomplément de P,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
1 le cercle circonscrit à A'B'C',
Q le point cyclocévien[51] de P
et Q'* l'isotomcomplément de Q.

Donné : Q'* est l'isogonal de P'*.

VISUALISATION

[50] Grinberg D., Isotomcomplement theory, theorem 8, Message *Hyacinthos* # 6423 du 24/01/2003.
[51] Cf. Annexe 1, Le M-cercle de Terquem.



- Notons A1, A'1 les milieux resp. de [B'C'], [B"C"].

- D'après E. Appendice 2. Isotomcomplément 1, (AA1) passe par P'*
  (AA'1) passe par Q'*.

- **Scolies :** **(1)** la A-médiane (AA1) du triangle AC'B' est la A-symédiane du triangle AC"B"
  (2) la A-médiane (AA'1) du triangle AC"B" est la A-symédiane du triangle AC'B'.

- **Conclusion partielle :** (AA1) et (AA'1) sont deux A-isogonales de ABC.

- Notons B1, B'1 les milieux de [C'A'], [C"B"]
  et C1, C'1 les milieux de [A'B'], [A"B"].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** (BB1) et (BB'1) sont deux B-isogonales de ABC
  (2) (CC1) et (CC'1) sont deux C-isogonales de ABC.

- **Conclusion :** Q'* est le conjugué isogonal de P'*.

Scolies : **(1)** P et Q sont "les points de Terquem relativement à *1*"

(2) P et Q sont dits "cyclocevian conjugate" en anglais.

Énoncé traditionnel : *si,* deux points sont de Terquem
alors, leurs isotomcompléments sont isogonaux.

Note historique : ce résultat a déjà été évoqué sans preuve par Barry Wolk[52].

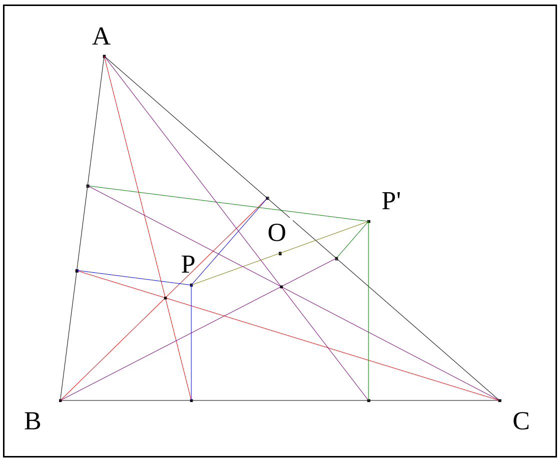
Commentaire : Darij Grinberg dit que ce résultat est le "real hit of the theory" dans la mesure où les points de Terquem prennent un sens particulier.

5. Symétrique d'un PC-point par rapport au centre du cercle circonscrit

[52] Wolk B., Proofs of Feuerbach theorem, Message *Hyacinthos* # 462.

VISION

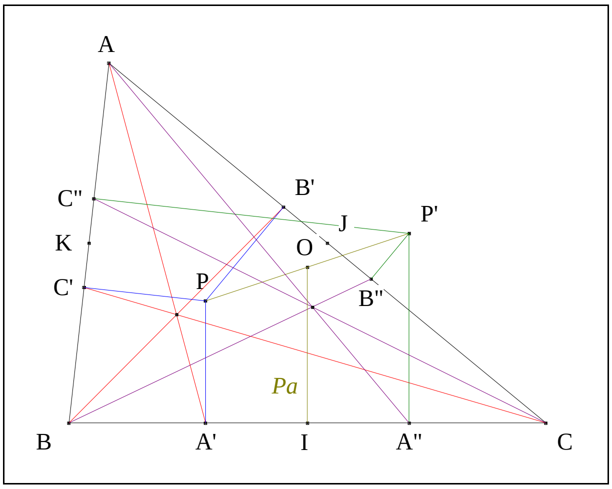
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un PC-point de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC
et P' le symétrique de P par rapport à O.

Donné : P' est un PC-point de ABC.[53]

VISUALISATION



- Notons A'B'C' le triangle P-pédal de ABC,
  A"B"C" le triangle P'-pédal de ABC,
  IJK le triangle médian de ABC
  et *Pa* la perpendiculaire à (BC) abaissée de O.

- **Scolies :** **(1)** *Pa* passe par I
  (2) *Pa*, (PA') et (P'A") sont parallèles entre elles.

- D'après l'axiome de passage IIIb
  appliqué à la bande de frontières (PA') et (PA"), I est le milieu de [A'A"].

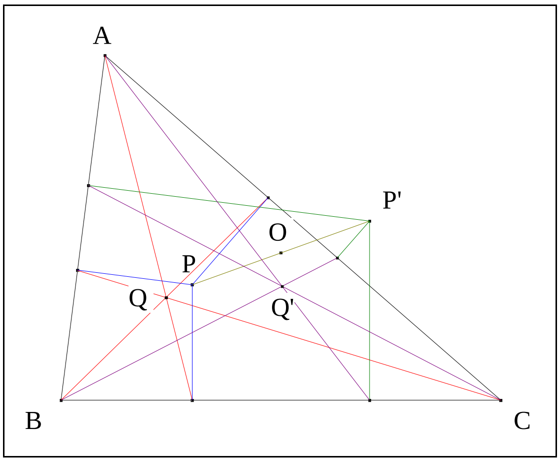
[53] Pedal-cevian point, *Mathlinks* du 14/09/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=110743.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que J est le milieu de [B'B"]
  K est le milieu de [C'C"].

- D'après de Longchamps "Isotomique d'un point" [54], A"B"C" est cévien.

- **Conclusion :** P' est un PC-point de ABC.

Scolie : deux points isotomiques

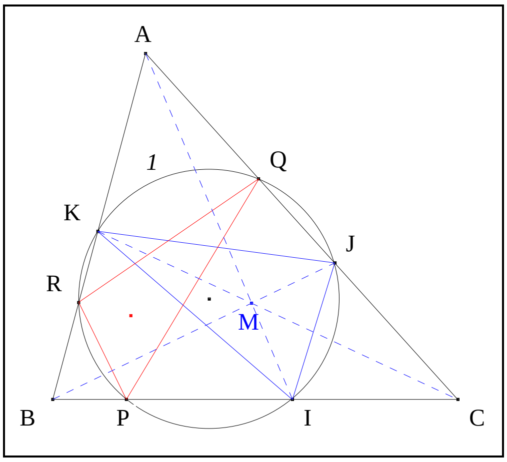


- Notons Q, Q' les points de Ceva resp. de P, P'.

- **Conclusion :** Q' est l'isotomique de Q relativement à ABC.

F. ANNEXE

1. Le M-cercle de Terquem [55]



Finition : ABC un triangle,
M un point,
IJK le triangle M-cévien de ABC,

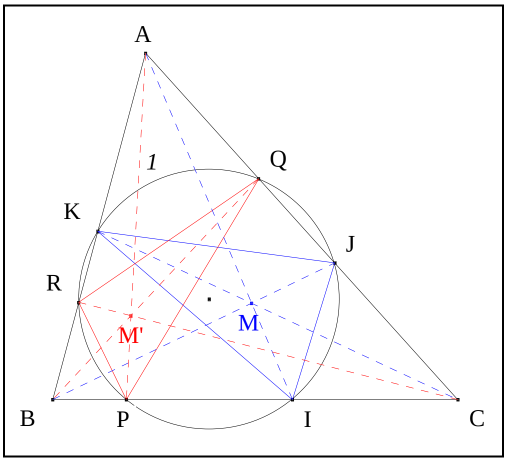
---

54 Ayme J.-L., de Longchamps dans les journaux scientifiques, G.G.G., vol. 5, p. 14 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

55 Terquem O., *Nouvelles Annales* **1** (1842) 403.

	1	le cercle circonscrit à IJK
et	P, Q, R	les second points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB).

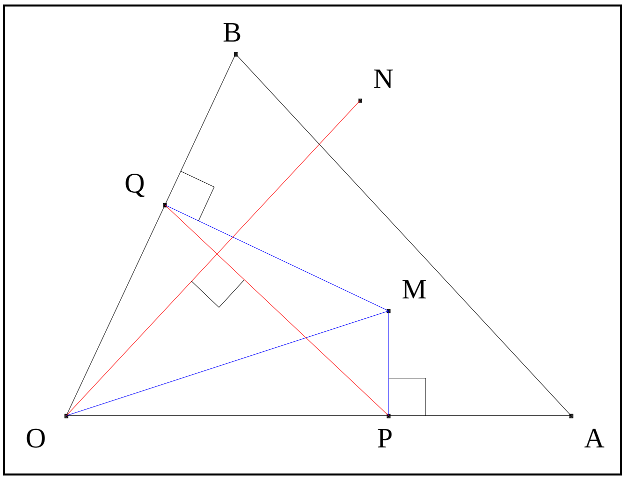
Définition : PQR est un triangle cévien de ABC.



Scolies : **(1)** *si,* nous notons M' le point de Ceva de PQR
alors, nous dirons que M et M' sont cyclocéviens.

(2) Pour faire plus court, nous dirons que M' est le point cyclocévien de M.

2. Isogonale et perpendiculaire [56]



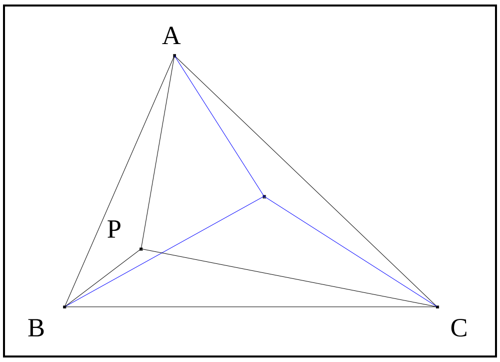
Traits :

	OAB	un triangle,
	M	un point,
	P, Q	les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA) et (OB),
et	N	un point.

Donné : (ON) est l'isogonale de (OM) par rapport à (OA) et (OB)
si, et seulement si,
(ON) est perpendiculaire à (PQ).

3. The isogonal theorem [57]

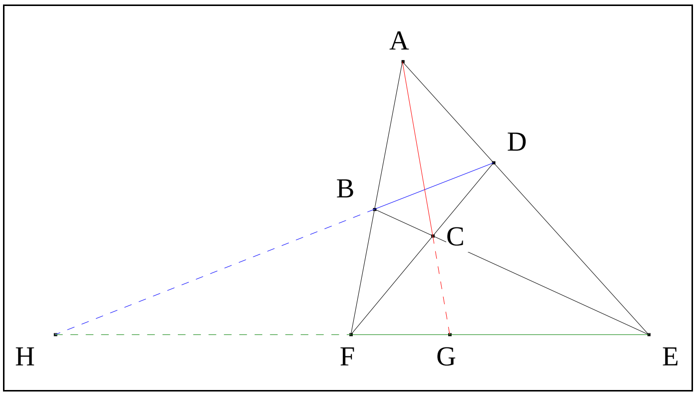
56 Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.
57 Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et *Da* , *Db* , *Dc* les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné : *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

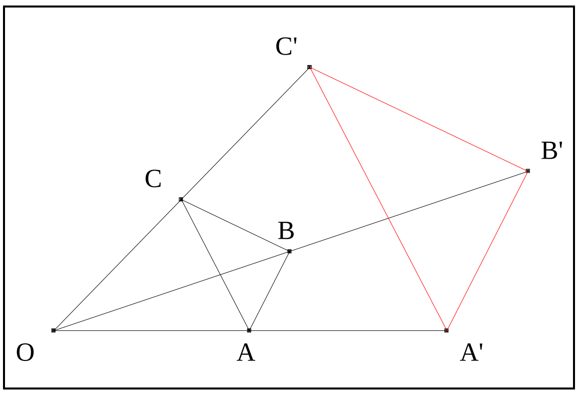
4. Diagonales d'un quadrilatère complet [58]



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
et G, H le point d'intersection resp. de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

5. Le théorème faible de Desargues



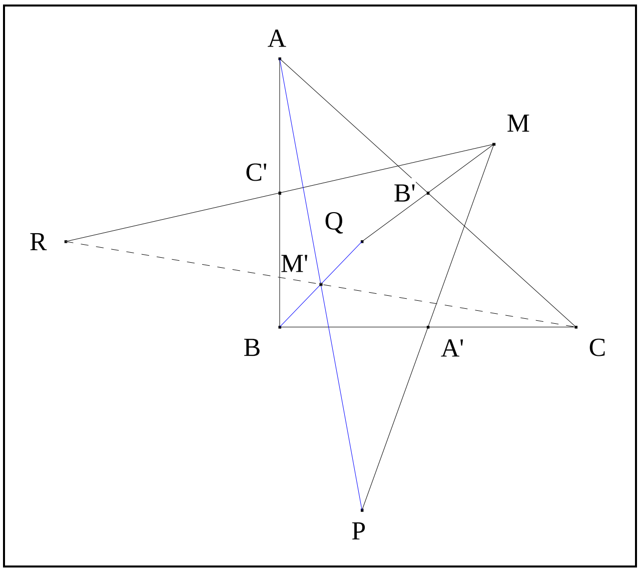
Hypothèses : ABC un triangle,

[58] Pappus, *Collections*, Livre 7, proposition 131.

et	A'B'C'	un triangle tel que	(1)	(AA') et (BB') soient concourantes en O
			(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
			(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

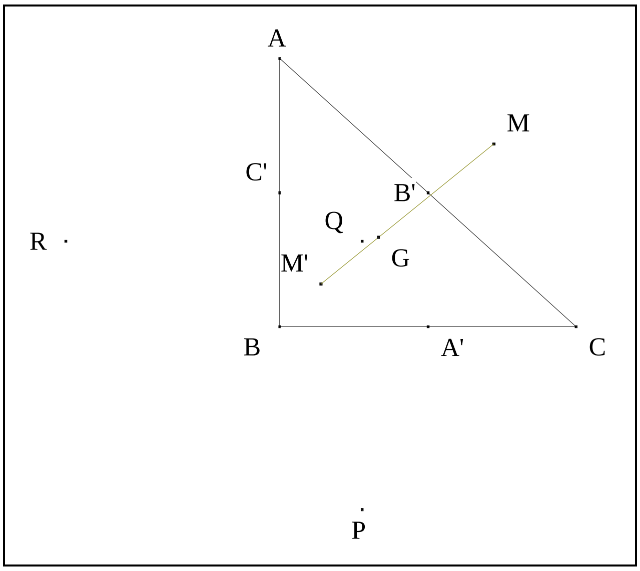
6. Le point complémentaire [59]



Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	M	un point,
	P, Q, R	les symétriques de A, B, C resp. par rapport à A', B', C'
et	M'	le point d'intersection de (AP) et (BQ).

Donné : (CR) passe par M'.

Scolies : **(1)** un alignement



[59] d'Ocagne M. (1882).

- Notons G le point médian de ABC.

- **Conclusion :** M, G et M' sont alignés dans cet ordre et GM = 2.GM'.

(2) Terminologie

nous dirons que	M' est le point complémentaire[60] de M
ou que	M est le point anticomplémentaire de M'.
Conway dit que	M' est le point subordonné ou inférieur de M
ou que	M est le point supérieur de M'.

60 En anglais, inferior, subordinate ou medial image i.e. the complement of a point with respect to a triangle is the image of this point in the homothety centered at the centroid of this triangle and having factor -1/2.