*Crux Mathematicorum*

**PROBLEM 4277**

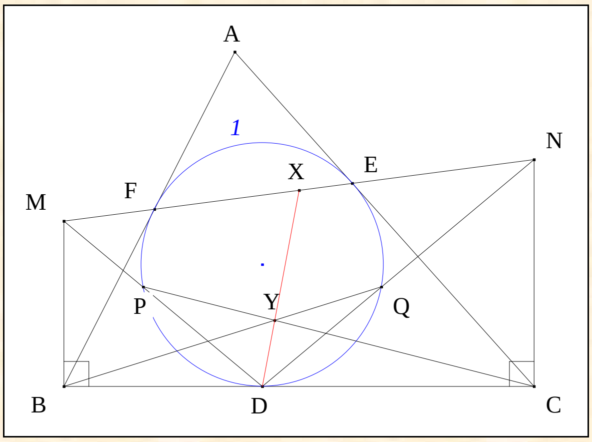
proposed

by

Tran Quang Hung [1] (Vietnam) 2017

## VISION

**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | *1* | le cercle inscrit de ABC, |
| | I | le centre de *1*, |
| | DEF | le triangle de contact de ABC, |
| | M, N | les points d'intersection de (EF) avec les perpendiculaires à (BC) resp. en B, C, |
| | P, Q | les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (DM), (DN), |
| | Y | le point d'intersection de (CP) et (BQ), |
| et | X | le milieu de [MN]. |

**Donné :** D, X et Y sont alignés [2].

---

[1] connu sous le pseudonyme *buratinogigle* sur le site *Art of Problem Solving* (AoPS)

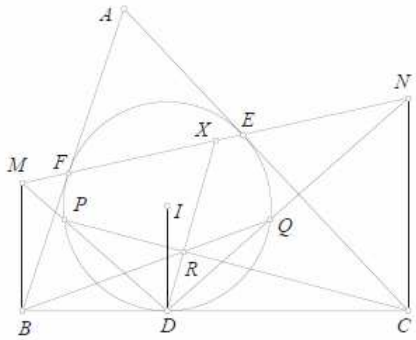
[2] *Crux Mathematicorum* vol. **43**, **8** (Oct. 2017) ; https://cms.math.ca/crux/

Milieu d'un segment, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1534990

**Archives**

**4277**. *Proposé par Tran Quang Hung.*

Soit $ABC$ un triangle dont le cercle inscrit $(I)$ touche $BC, CA$ et $AB$ en $D, E$ et $F$ respectivement. De plus, $M$ et $N$ se trouvent sur $EF$ de façon à ce que $BM$ et $CN$ sont perpendiculaires à $BC$. Aussi, $DM$ et $DN$ intersectent $(I)$ de nouveau en $P$ et $Q$. Enfin, $BQ$ intersecte $CP$ en $R$. Démontrer que $DR$ bissecte $MN$.




**yan2** [ Répondre par message privé ]

Membre depuis : il y a huit années
Messages: 323

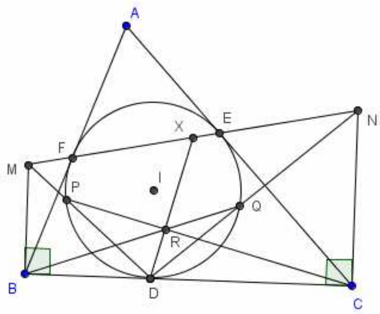
**Milieu d'un segment**
il y a trois jours

Bonsoir,

voici un joli exercice de géométrie élémentaire :

$ABC$ triangle, on suppose que le cercle inscrit touche les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ aux points $F, D$ et $E$ respectivement. Les droites perpendiculaires à $(BC)$, en $B$ (resp. en $C$), coupent la droite $(EF)$ en $M$ (resp. $N$). Les droites $(DM)$ et $(DN)$ coupent, à nouveau, le cercle inscrit en $P$ et $Q$ respectivement. Les droites $(CP)$ et $(BQ)$ se coupent au point $R$. Enfin, les droites $(DR)$ et $(EF)$ se coupent en $X$.
Question : montrer que $X$ est le milieu de $[MN]$.

Cordialement,
Yan2



**Une photo**


communiquée par le professeur Nguyen van Linh [3] (first one on the left) qui précise

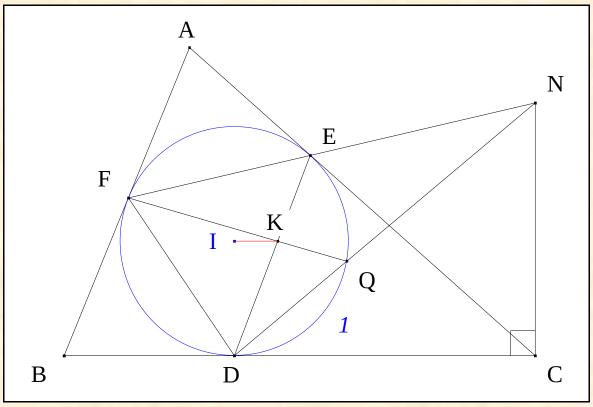
*Tran Quang Hung (3rd person from the left) is also a Vietnamese geometry teacher.*
*He is working at High school for Gifted student (HSGS), Hanoi University of Science.*

[3] https://nguyenvanlinh.wordpress.com/

## VISUALISATION

### ÉTAPE 1

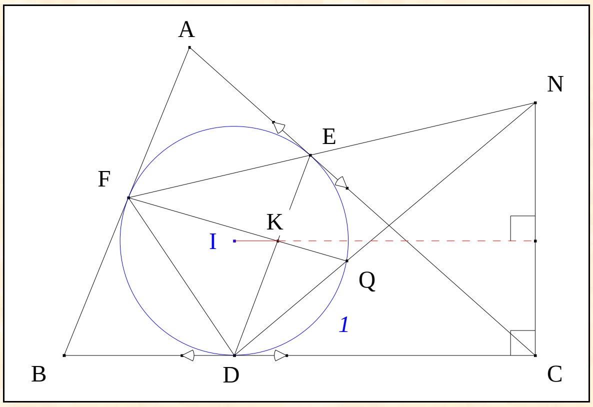
### VISION




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | *1* | le cercle inscrit de ABC, |
| | I | le centre de *1*, |
| | DEF | le triangle de contact de ABC, |
| | N | le point d'intersection de (EF) avec la perpendiculaire à (BC) en C, |
| | Q | le second point d'intersection de *1* avec (DN) |
| et | K | le point d'intersection de (DE) et (FQ). |

**Donné :** (IK) est perpendiculaire à (CN). [4]

### VISUALISATION




- D'après Philippe de La Hire "La réciprocité polaire" [5], K est le pôle de (CN) ;
  en conséquence, (IK) ⊥ (CN).

- **Conclusion :** (IK) est perpendiculaire à (CN).

---

4 Ayme J.-L., Collinear, AoPS du 29/11/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1346410_collinear

5 Ayme J.-L., La réciprocité polaire, G.G.G., vol. **13** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

**Archive**

**Source**: own ?

jayme
6135 posts

*Nov 29, 2016, 2:13 pm*

Dear Mathlinkers,

1. ABC a triangle
2. (I) the incircle of ABC
3. DEF the contact triangle of ABC
4. N the point of intersection of Ef with the perpendicular to BC at C
5. Q the second point of intersection of (I) with DN
6. K the point of intersection of DE and FQ.

Prove : B, K and N are collinear.

Sincerely
Jean-Louis

**ÉTAPE 2**

High School for Gifted Students (HSGS) Open Olympiad 2016, day **2**

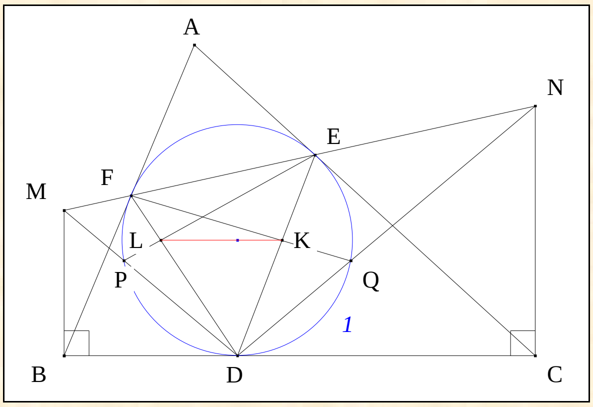
Problem proposed

by

Tran Quang Hung (Vietnam) 2016

**VISION**

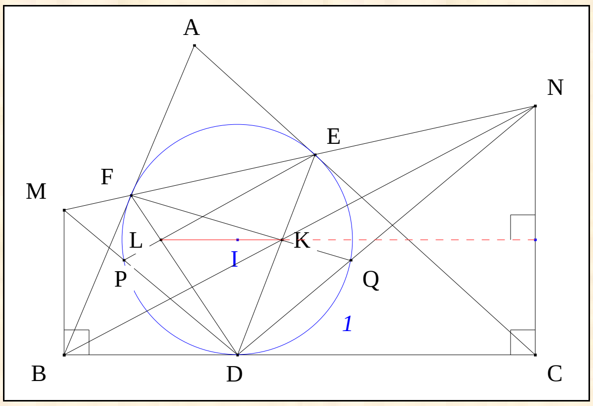
**Figure :**




| | | | |
|---|---|---|---|
| **Traits :** | | ABC | un triangle, |
| | | *1* | le cercle inscrit de ABC, |
| | | I | le centre de *1*, |
| | | DEF | le triangle de contact de ABC, |
| | | M, N | les points d'intersection de (EF) avec les perpendiculaires à (BC) resp. en B, C, |
| | | P, Q | les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (DM), (DN) |
| | et | K, L | les points d'intersection resp. de (DE) et (FQ), (DF) et (EP). |

**Donné :** (KL) passe par I et est parallèle à (BC). [6]

**VISUALISATION**




- **Scolie :** (BM) // CN).

[6] Collinear points, AoPS du 23/07/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1276894_collinear_points

| | | |
|---|---|---|
| • D'après Étape**1**, | **(1)** | (IK) // (BC) |
| | **(2)** | (BC) // (IL). |
| • Par transitivité du //, | | (IK) // (IL) ; |
| d'après le postulat d'Euclide, | | (IK) = (IL). |
| • **Conclusion :** | | (KL) est parallèle à (BC). |

## ÉTAPE 3

High School for Gifted Students (HSGS) Open Olympiad 2016, day **2**

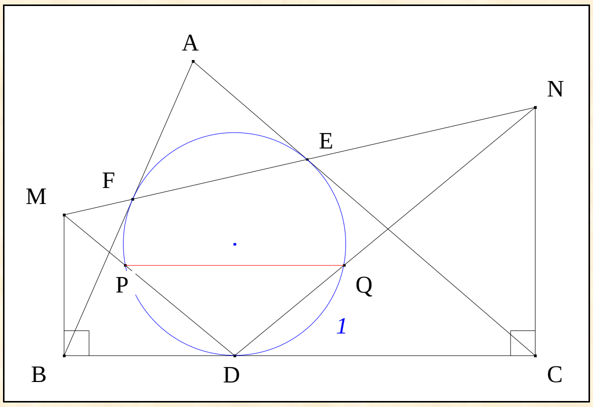
Problem proposed

by

Tran Quang Hung (Vietnam) 2016

## VISION

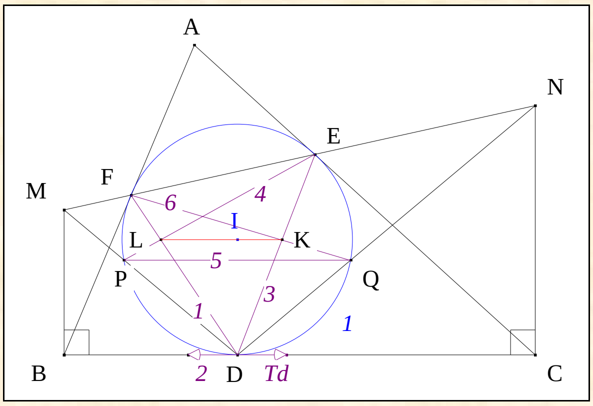
**Figure :**




**Traits :** ABC un triangle,
*1* le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
M, N les points d'intersection de (EF) avec les perpendiculaires à (BC) resp. en B, C
et P, Q les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (DM), (DN).

**Donné :** (PQ) est parallèle à (BC). [7]

## VISUALISATION




- Notons *Td* la droite (BC) tangente à *1* en D,
  et K, L les points d'intersection resp. de (DE) et (FQ), (DF) et (EP).

[7] Collinear points, AoPS du 23/07/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1276894_collinear_points

- D'après Étape **2**, (KL) // (BC) i.e. à *Td*.

- D'après Aubert-Pascal "Pentagramma mysticum"
  appliqué à l'hexagone dégénéré cyclique FD *Td* EPQF, **(1)** (KL) en est la pascale

  **(2)** (PQ) // *Td*.

- **Conclusion :** (PQ) est parallèle à (BC).

**Archive**

**Source**: Own, HSGS Open Olympiad 2016, day 2

*Jul 23, 2016, 8:02 am • 2*

**buratinogigle**
*1270 posts*

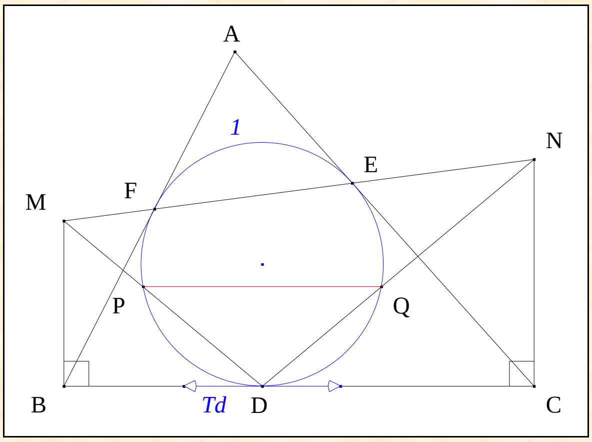
Let $ABC$ be a triangle with incircle $(I)$ touches $BC, CA, AB$ at $D, E, F$, reps. $M, N$ lie on line $EF$ such that $BM$ and $CN$ are perpendicular to $BC$. $DM, DN$ cut $(I)$ again at $P, Q$.

a) Prove that $PQ \parallel BC$.

b) Let $DE$ cuts $FQ$ at $K$. $DF$ cut $EP$ at $L$. Prove that $KL \parallel BC$.

c) Prove that $I, K, L$ are collinear.

**Scolies** **(1)** le triangle DPQ est D-isocèle



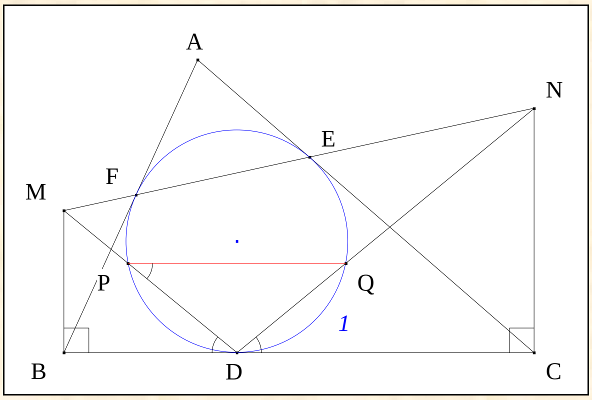

- Notons *Td* la tangente à *1* en D.

- Nous avons : * *1* est cercle circonscrit au triangle DPQ

  * *Td* = (BC)

- **Conclusion :** *Td* étant parallèle à (PQ), le triangle DPQ est D-isocèle.

**(2)** Deux triangles rectangles semblables




- Une chasse angulaire :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| * | DPQ étant D-isocèle, | <DPQ | = | <PQD |
| * | par "Angles alternes-internes", | <DPQ = <MDB | et | <PQD = <CDN |
| * | par substitution, | <MDB | = | <CDN. |

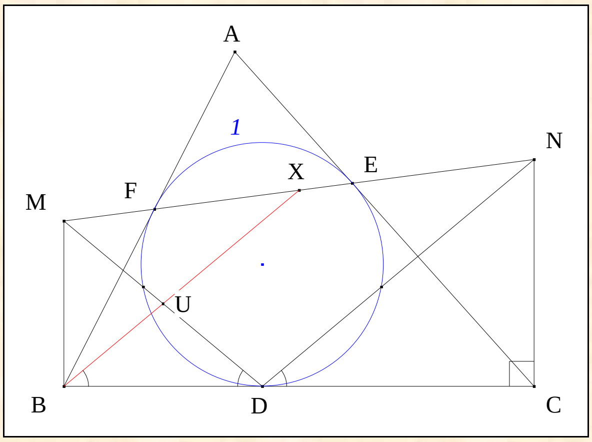
- **Conclusion :** les triangles BDM, CDN étant resp. B, C-rectangle et ayant deux autres angles égaux, sont semblables.

## ÉTAPE 4

L'auteur

## VISION

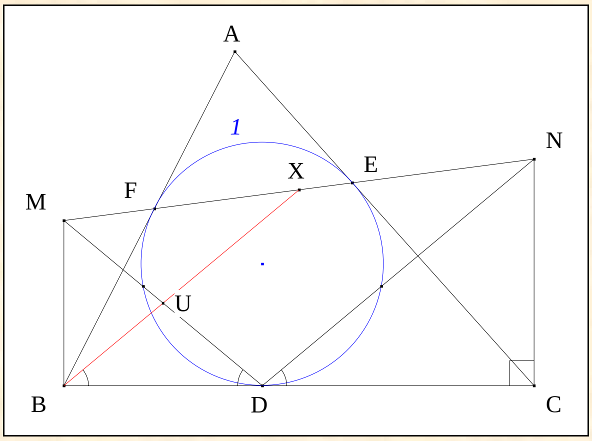
**Figure :**




**Traits :** ABC un triangle,
*1* le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
M, N les points d'intersection de (EF) avec les perpendiculaires à (BC) resp. en B, C
et U, X les milieux resp de [DM], [MN].

**Donné :** (BX) est parallèle à (DN).

## VISUALISATION




- Une chasse angulaire :

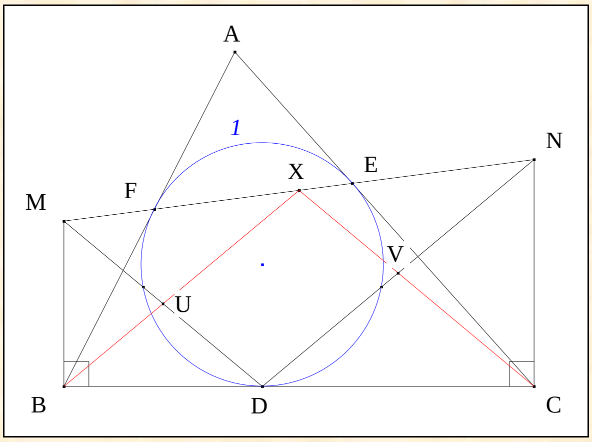
| | | |
|---|---|---|
| * | le triangle UBD étant U-isocèle, | <DBU = <UDB |
| * | d'après Étape **3**, scolie **2**, | <UDB = <CDN |
| * | par transitivité de =, | <DBU = <CDN |

* par "Angles correspondants", (BU) // (DN).

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle MDN, (DN) // (UX) ;
  par transitivité du //, (BU) // (UX) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (BU) = (UX) ;
  en conséquence, B, U et X sont alignés.

- **Conclusion :** (BX) est parallèle à (DN).

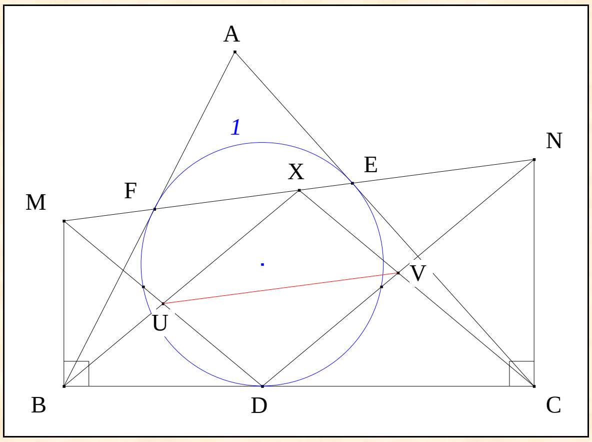
**Scolies :** **(1)** deux autres parallèles




- Notons U le milieu de [DM]

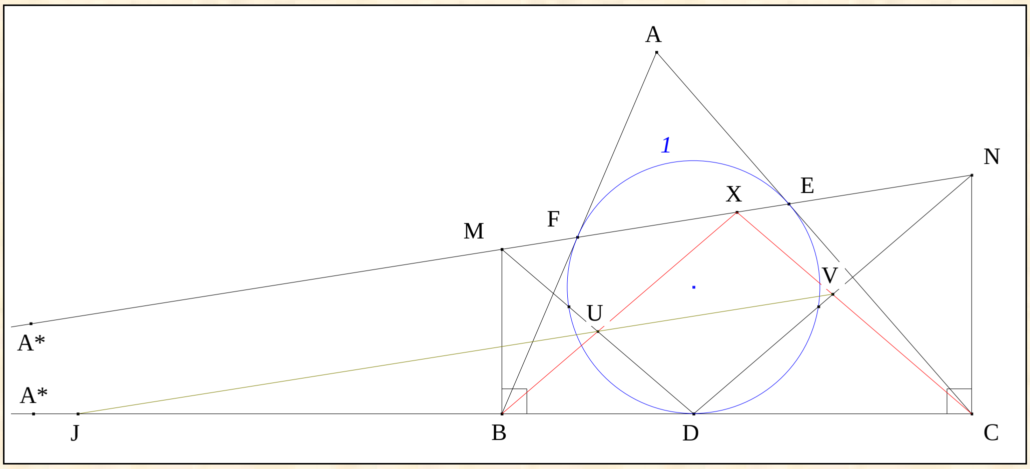
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (CX) est parallèle à (DM).

**(2)** Deux parallèles remarquables




- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle DMN, (UV) est parallèle à (MN).

**(3)** Un point remarquable sur (BD)




- Notons A*, J les points d'intersection de (BC) resp. avec (MN), (UV). [8]

- Par culture géométrique, le quaterne (B, C, D, A*) est harmonique.

- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle A*DM, J est le milieu de [A*D].

**(4)** Par culture géométrique [9], JB/JC = (DB/DC)².

---

[8] A* est le A-point de Nobbs de ABC
[9] Leboss2 C., Héméry C., *Géométrie Classe de Mathématiques*, Ed. Fernand Nathan (1961), n° **262**, p. 168

# ÉTAPE 5

*Crux Mathematicorum* Problem **4277**

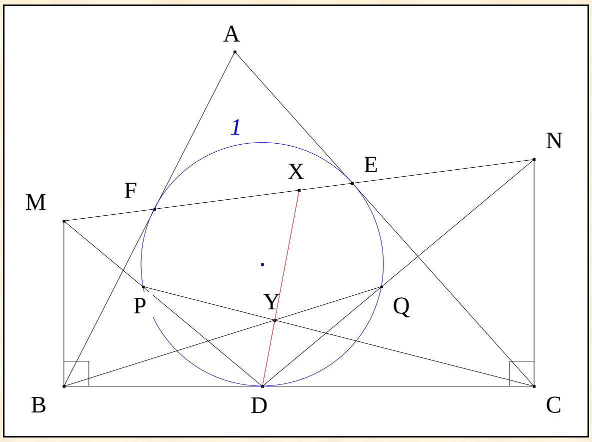
proposed

by

Tran Quang Hung [10] (Vietnam) 2017

## VISION

**Figure :**



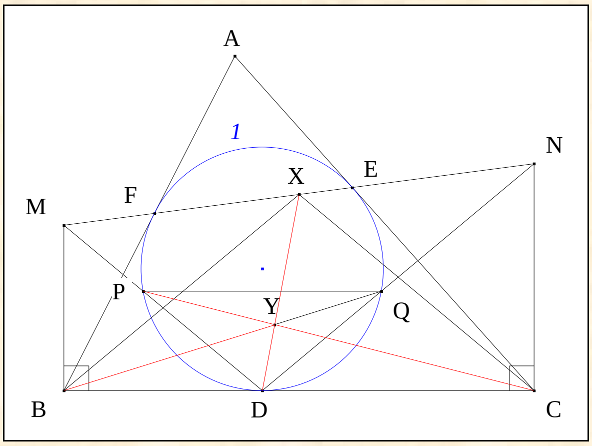

| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | *1* | le cercle inscrit de ABC, |
| | I | le centre de *1*, |
| | DEF | le triangle de contact de ABC, |
| | M, N | les points d'intersection de (EF) avec les perpendiculaires à (BC) resp. en B, C, |
| | P, Q | les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (DM), (DN), |
| | Y | le point d'intersection de (CP) et (BQ), |
| et | X | le milieu de [MN]. |

**Donné :** D, X et Y sont alignés [11].

## VISUALISATION COURTE

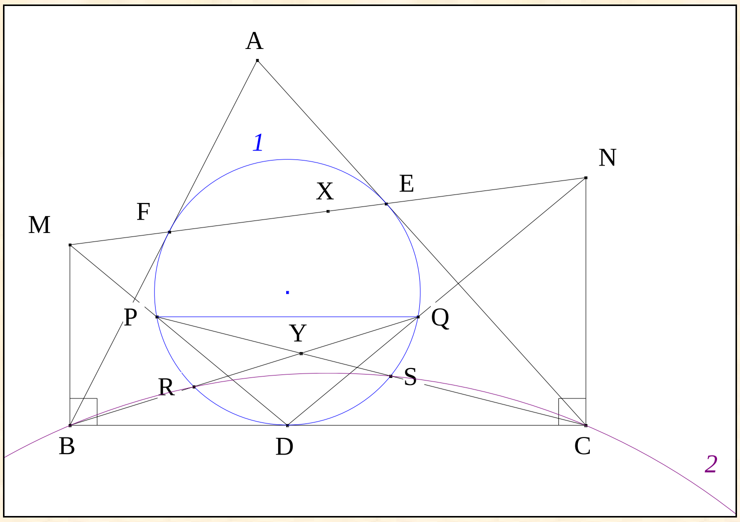
[10] connu sous le pseudonyme *buratinogigle* sur le site *Art of Problem Solving* (AoPS)

[11] *Crux Mathematicorum* vol. **43**, **8** (Oct. 2017) ; https://cms.math.ca/crux/
Milieu d'un segment , *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1534990

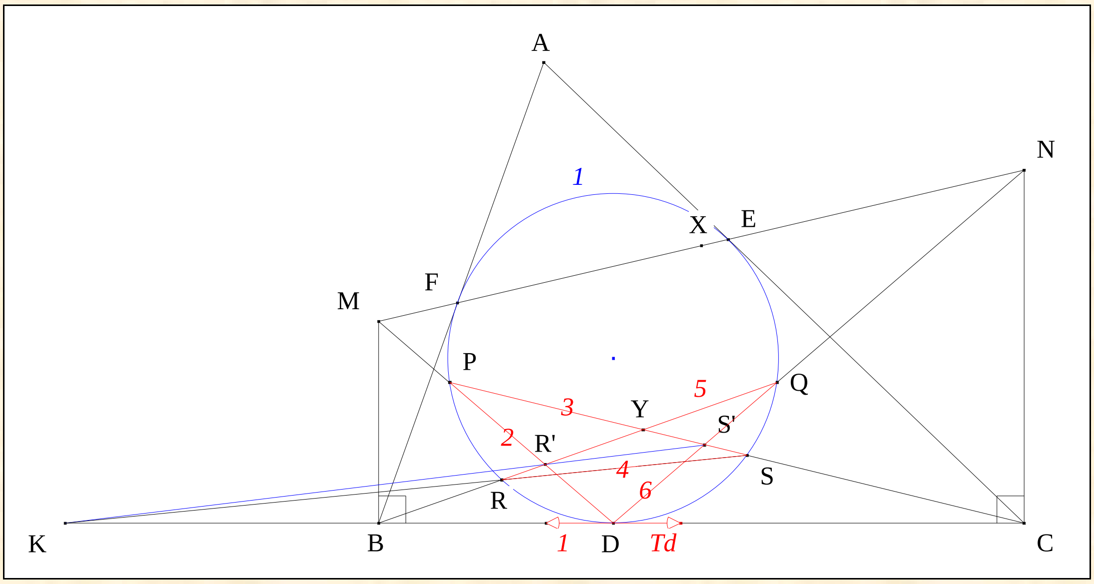



- D'après Étape **3**, (PQ) // (BC).
- D'après Étape **4**, (DQ) // (BX) et (DP) // (CX).
- Les triangles DPQ et XCB étant homothétiques sont perspectifs ; en conséquence, (DX), (PC) et (QB) concourent en Y.
- **Conclusion :** D, X et Y sont alignés.

**VISUALISATION LONGUE**



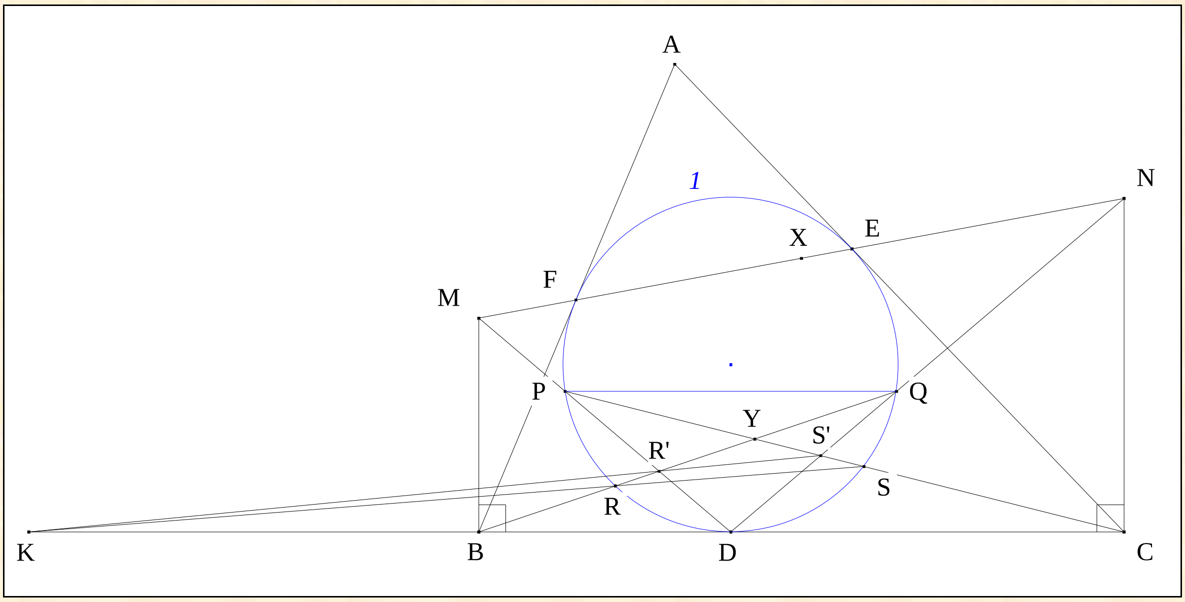

- Notons R, S les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (BQ), (CP).
- D'après Étape **3**, (PQ) // (BC).
- Le cercle *1*, les points de base R et S, les moniennes naissantes (QRB) et (PSC), les parallèles (QP) et (BC), conduisent au théorème **0''** de Reim ; en conséquence, R, S, B et C sont cocycliques.
- Notons *2* ce cercle.




- Notons R', S' les points d'intersection resp. de (BQ) et (DP), (BP) et (DQ),
  *Td* la tangente à *1* en D
  et K le point d'intersection de (RS) et (BC).

- **Scolie :** *Td* = (BC).

- D'après Aubert-Pascal "Pentagramma mysticum"
  (KR'S') est la pascale de l'hexagone dégénéré cyclique *Td* PSRQD.




- Une chasse de rapports
  par application du théorème de Ménélaüs au triangle BYC et aux ménéliennes

  * (R'S'K), (R'Y/R'B) . (KB.KC) . (S'C/S'Y) = 1

  KB.KC = (R'B/R'Y) . (S'Y/S'C)

  * (R'DP), (R'Y/R'B) . (DB/DC) . (PC/PY) = 1

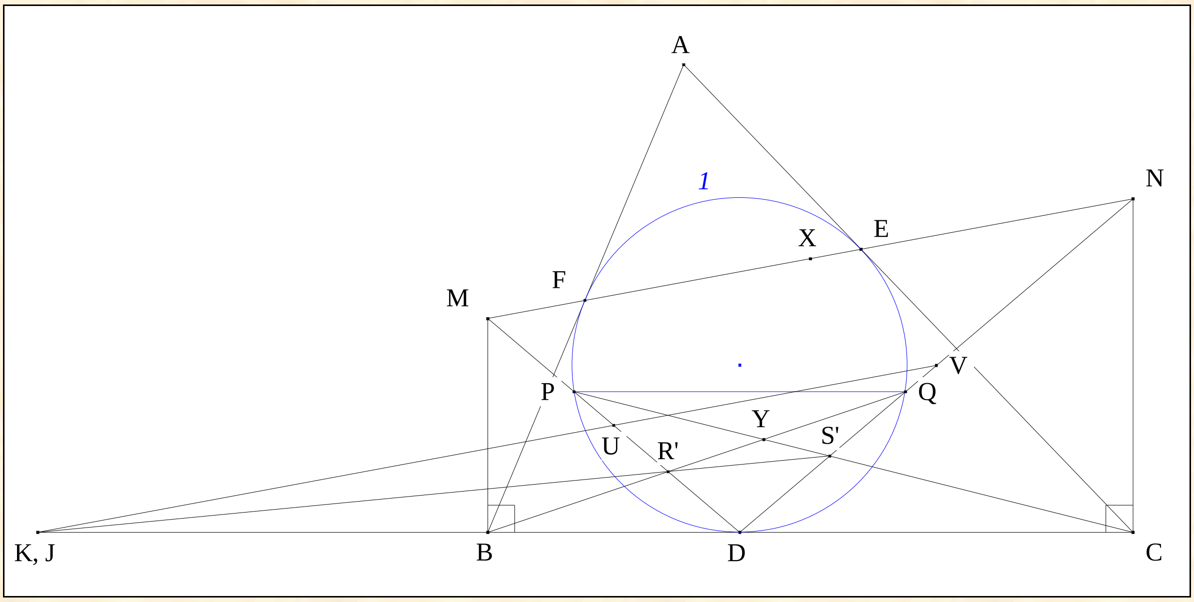
  R'B/R'Y =(DB/DC) . (PC/PY)

* (S'DQ), (S'C/S'Y) . (QY/QB) . (DB/DC) = 1

S'Y/S'C = (QY/QB) . (DB/DC)

* d'après Thalès ''Rapports'', PC/PY = QB/QY

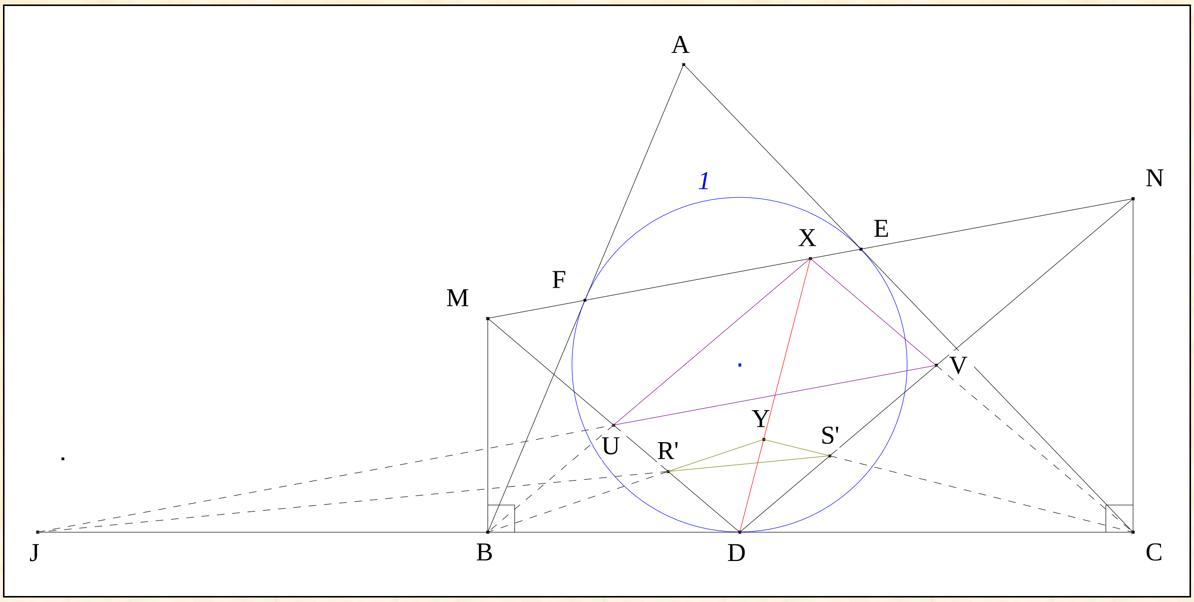
* par substitution, KB.KC = (DB/DC)².




- Notons U, V les milieux resp de [DM], [DN].
- D'après Étape **4**, scolie **4**, JB/JC = (DB/DC)² ;

en conséquences, **(1)** K et J sont confondus

**(2)** (UV), (R'S') et (BC) concourent en J.




- D'après Girard Desargues "Le théorème des deux triangles" [12]
(BJC)étant l'arguésienne des triangles XUV et YR'S', XUV et YR'S' sont D-perspectifs.

[12] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **7**, p. 40-44 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- **Conclusion :** D, X et Y sont alignés.