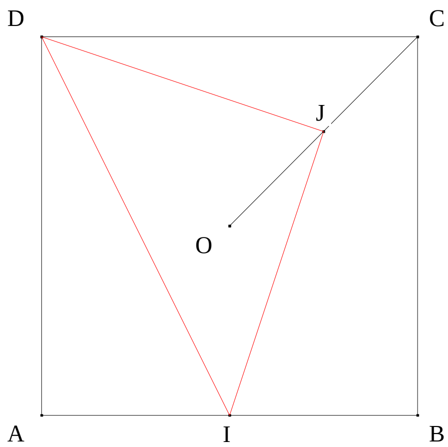
MINIATURES GÉOMÉTRIQUES

SUR

UN CARRÉ

ADDENDUM II

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur propose un addendum à l'article "Miniatures sur un carré" en présentant 39 nouvelles miniatures.
Progressivement un thème de dégage et des sous-thèmes apparaissent…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

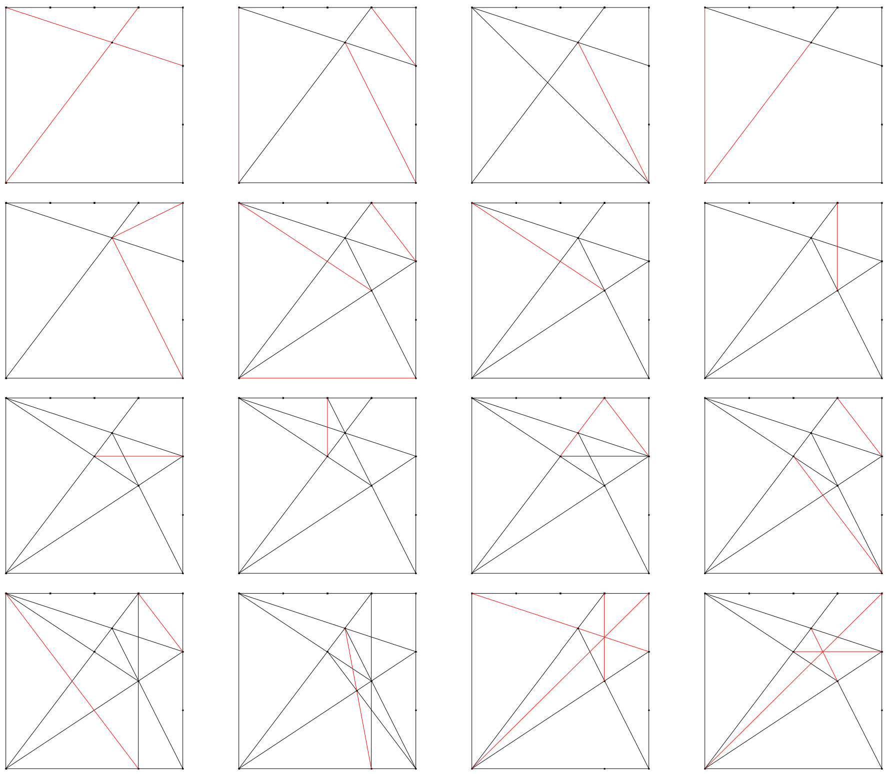
Abstract. The author offers an addendum to article "Miniatures on a square" presenting 39 new miniatures.
Gradually a theme appears and sub-themes come up…
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

[1] St-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 30/11/2014 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. UN POINT DE VUE

Les figures présentées par l'auteur lui ont fait penser à des **miniatures** i.e. à des images participant à l'enluminure d'un manuscrit.
Pour un géomètre sensible aux formes, la figure qui lui apparaît dans une **vision** est celle d'un Sujet qu'on appelait autrefois "être" géométrique. En dévoilant ses **traits** essentiels à son regard amical, le Sujet lui laisse gracieusement entrevoir une illumination, voire un théorème. Comme cela est souvent le cas, le géomètre réagit d'une façon belliqueuse en aiguisant son regard qui devient binoculaire. Agressé visuellement, le généreux Sujet se voile dans une configuration en abandonnant un **donné** inerte à la raison du géomètre.
Ayant perdu la vision, celui-ci choisit alors un mode de raisonnement et une méthode géométrique qui lui permettent de visualiser comme un aveugle sa propre démarche. Avec l'aide de techniques particulières qui aplanissent son chemin, il progresse vers le donné qu'il désire s'approprier. Cette démarche raisonnée prend alors l'allure d'un **schéma de démonstration** i.e. d'une **visualisation** lorsque seuls les points principaux et les relations présentes dans la configuration, sont retenus. Ce schéma logico-déductif permet alors de comprendre le cheminement et le projet du géomètre dont le désir est de faire partager avec d'autres, le résultat auquel il est parvenu.



2

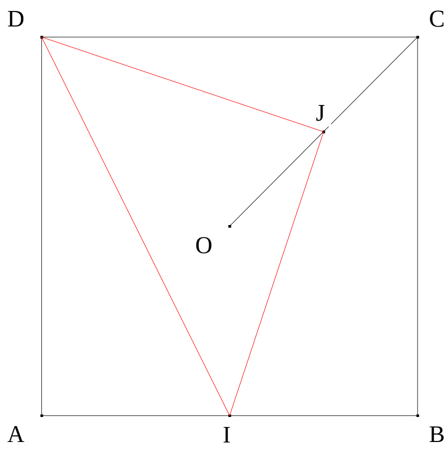
[2] Ayme J.-L., Mosaïque dans un carré, G.G.G. vol. **20** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

B. DES MINIATURES

1. Un triangle rectangle isocèle

VISION

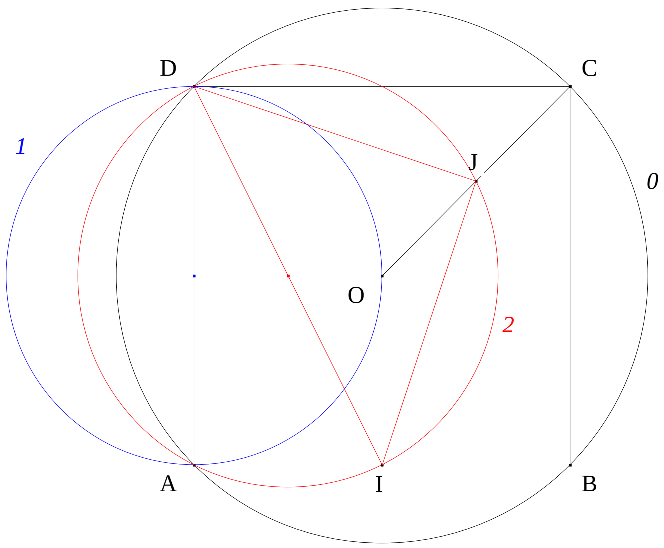
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	O	le centre de ABCD
et	I, J	les milieux resp . de [AB], [OC].

Donné : le triangle IJD est J-rectangle isocèle. [3]

VISUALISATION



[3] Dans un carré, *Les-Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,985211

- Notons *0* le cercle circonscrit à ABCD
  et *1* le cercle circonscrit au triangle AOD.

- D'après "Le cercle des milieux" [4], A, D, I et J sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle de diamètre [DI].

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", IJQ est J-rectangle.

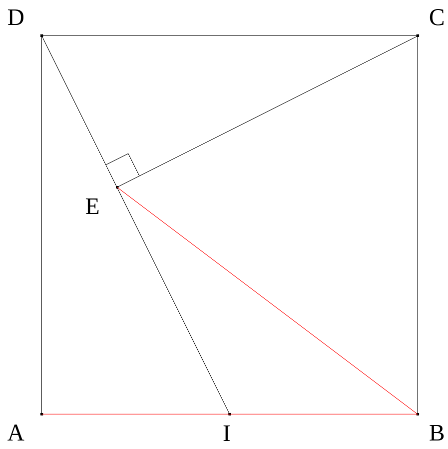
- Par "Le théorème des angles inscrits", IJQ est J-isocèle.

- **Conclusion :** le triangle IJD est J-rectangle isocèle.

2. Deux segments égaux

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	I	le milieu de [AB]
et	E	le pied de la perpendiculaire à (DI) issue de C.

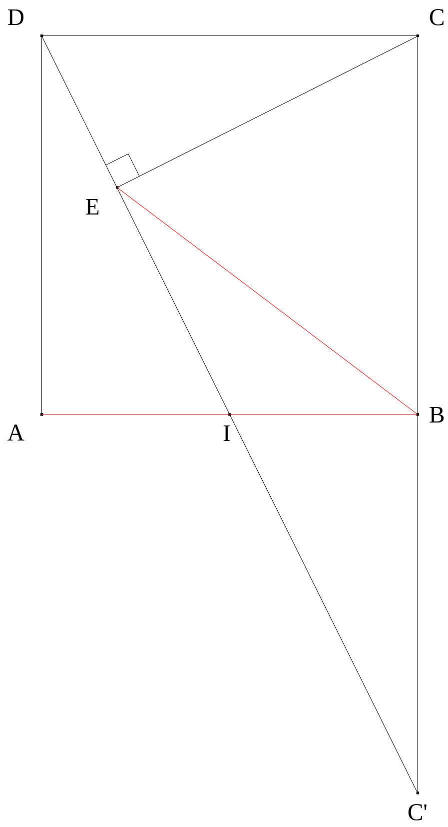
Donné : BE = BA. [5]

VISUALISATION

---

4 Ayme J.-L., Midcircle theorem, G.G.G. vol. **25**, p. 3-5 ; http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/

5 Ayme J.-L., Toying with a square, AoPS du 26/08/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=603958



- Notons C' le symétrique de C par rapport à B.

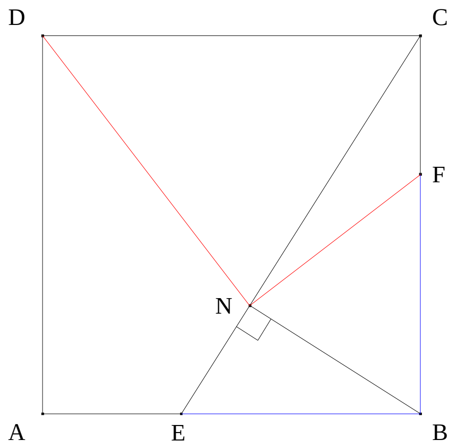
- Le triangle ECC' étant E-rectangle, BE = BC ;
  par hypothèse, BC = BA.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, BE = BA.

3. Deux perpendiculaires

VISION

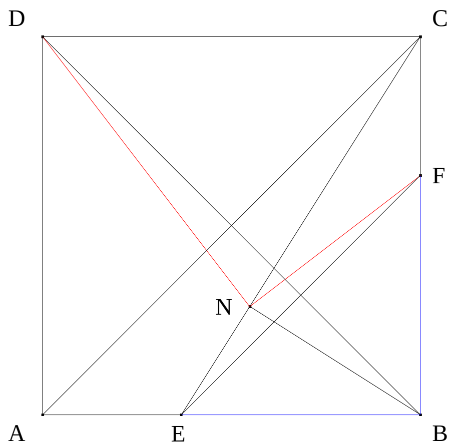
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E, F deux points resp. de [AB], [BC] tels que BE = BF,
et N le pied de la B-hauteur du triangle BCE.

Donné : (NF) est perpendiculaire à (ND). [6]

VISUALISATION



- **Commentaire :** montrons que les triangles NEF et NBD sont semblables.

- D'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", <NEF = <NBD.

- Une chasse de rapports :

  * les triangles NEB et BEC étant semblables, NE/NB = BE/BC.

  * les triangles rectangles-isocèles BEF et BAC étant semblables, BE/BA = EF/AC

  * par hypothèse, BE/BC = EF/ BD

[6] Not as easy, *Mathlinks* du 10/01/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=127915
Needs two minutes, AoPS du 25/07/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=599562
Ayme J.-L., Miniatures Géométriques, G.G.G. vol. **7**, p. 4-6 ; http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/

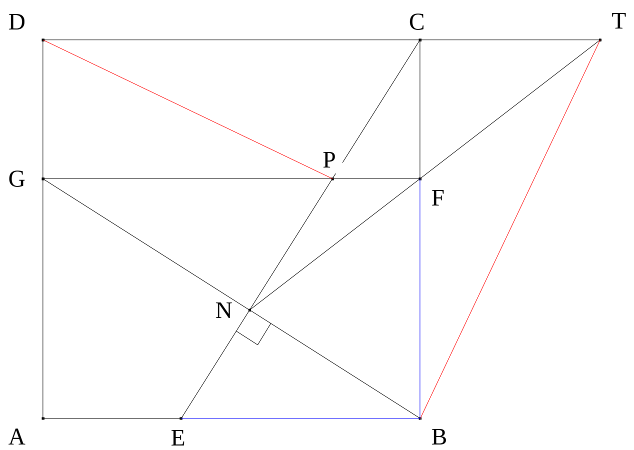
* par transitivité de la relation =, NE/NB = EF/BD.

- **Conclusion :** NEF et NBD étant semblables et ayant deux couples de côtés correspondants perpendiculaires, (NF) est perpendiculaire à (ND).

4. Rioplatense Olympiad 2013, Level 3, Problem 2. Deux perpendiculaires

VISION

Figure :

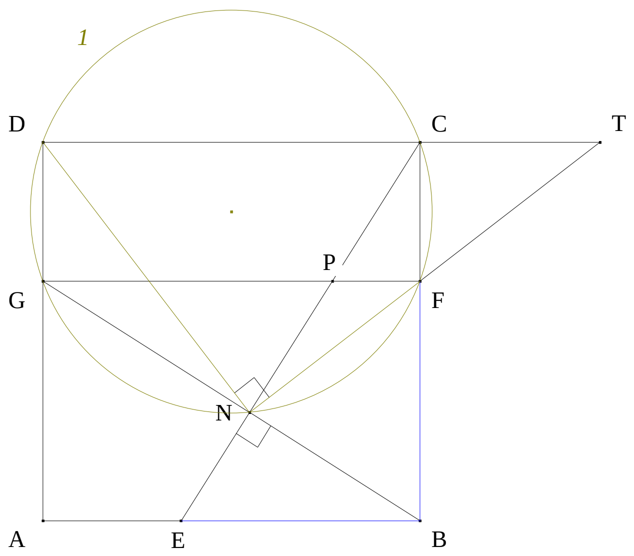


Traits :	ABCD	un carré,
	E, F	deux points resp. de [AB], [BC] tels que BE = BF,
	N	le pied de la B-hauteur du triangle BCE,
	G	le point d'intersection de (BN) et (AD),
	P	le point d'intersection de (GF) et (CE),
et	T	le point d'intersection de (NF) et (CD).

Donné : (DP) est perpendiculaire à (TB). [7]

VISUALISATION

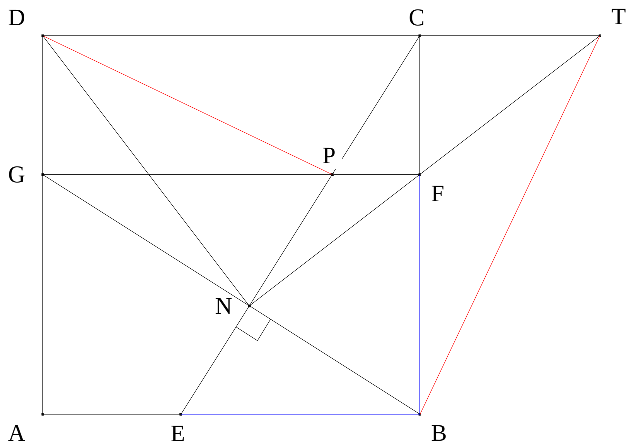
[7] Prove that two lines are perpendicular, AoPS du 22/08/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=603545



- Notons *1* le cercle de diamètre [CG] ; il passe par D et N.

- D'après "Problème **3**", (NF) ⊥ (ND) ;
en conséquence, le cercle de diamètre [FD] passe par C et N.

- **Conclusion partielle :** (FG) // (AB).



- **Commentaire :** montrons que les triangles NDP et NTB sont semblables.

- D'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", <GNP = <CNB.

- Une chasse de rapports :

  * les triangles NGP et NCB étant semblables, NP/NB = NG/NC.

  * les triangles NGD et NCT étant semblables, NG/NC = ND/NT

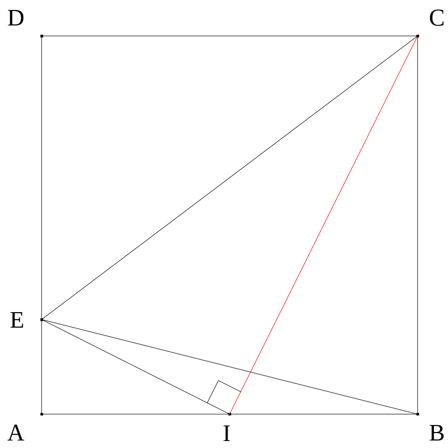
  * par transitivité de la relation =, NP/NB = ND/NT.

- **Conclusion :** NDP et NTB étant semblables et ayant deux couples de côtés correspondants perpendiculaires, (DP) est perpendiculaire à (TB).

5. Une bissectrice intérieure

VISION

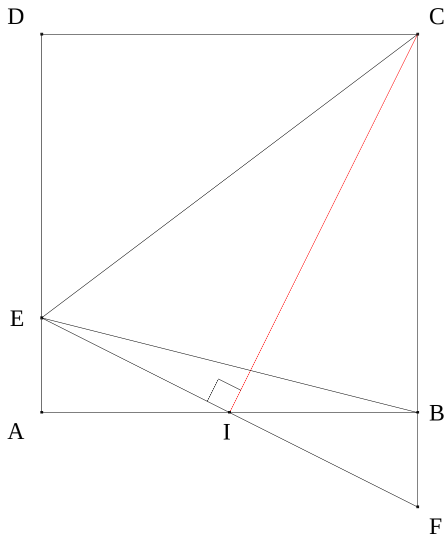
Figure :



Traits : ABCD un carré,
I le milieu de [AB]
et E le point d'intersection de la perpendiculaire à (CI) issue de I avec (AB).

Donné : (CI) est la C-bissectrice intérieure du triangle CBE. [8]

VISUALISATION



- Notons F le point d'intersection de (IE))) et (BC).

- D'après l'axiome de passage **IIIb**
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC), I est le milieu de [EF] ;
  en conséquence, le triangle CEF est C-isocèle.

[8] Prove that, AoPS du 14/06/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=593638

- CEF étant C-isocèle, la C-médiatrice (CI) est aussi la C-bissectrice intérieure.

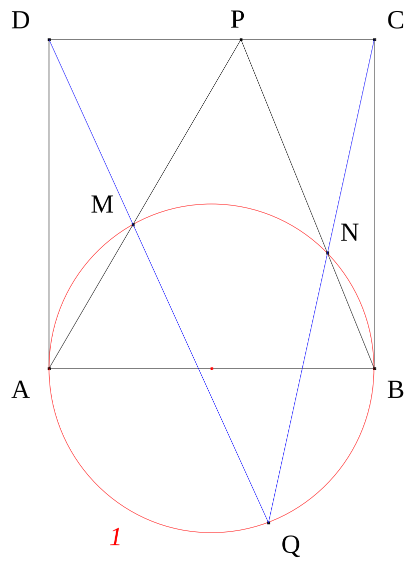
- **Conclusion :** (CI) est la C-bissectrice intérieure du triangle CBE.

6. Égalité de deux rapports

Indian Postal Coaching 2004

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un triangle carré,
	P	un point de]CD[,
	1	le cercle de diamètre [AB],
	M, N	les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec *1*
et	Q	le point d'intersection de (CN) et (DM).

Donné : QA/QB = QD/QC. [9]

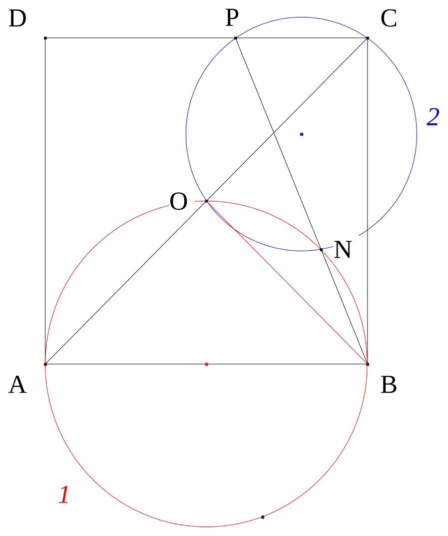
VISUALISATION

- **Scolie :** Q est sur *1*. [10]

---

9 A square – good, AoPS du 22/09/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=53010
Point on a circle, moldova, AoPS du 30/04/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=35359

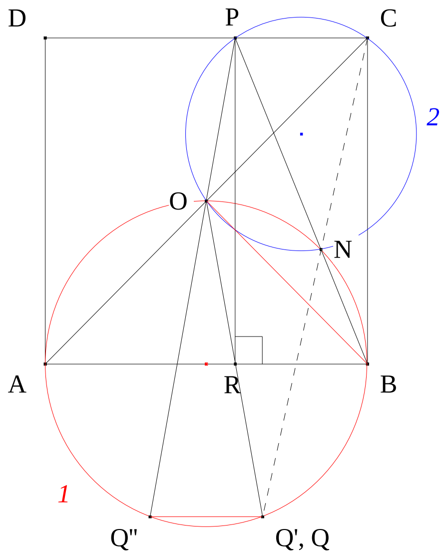
10 Ayme J.-L., Miniatures Géométriques, G.G.G. vol. **7**, problème **5**, p. 10-12 ; http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/
Geometry Problem (22), *Mathlinks* du 19/08/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=362839.
Point on a circle, *Mathlinks* du 30/04/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=35359
Cono Sur Olympiad 2012, Problem **2**, AoPS du 03/11/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=505346



- Notons O le centre de ABC ; il est sur *1* ;

- Le cercle *1*, les points de base O et N, la monienne (AOC), les parallèles (AB) et (CP), conduisent au théorème **0''** de Reim ; en conséquence, O, N, C et P sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.



- Notons R le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de P.
  Q' le second point d'intersection de (OR) avec *1*
  et Q" le second point d'intersection de (OP) avec *1*.

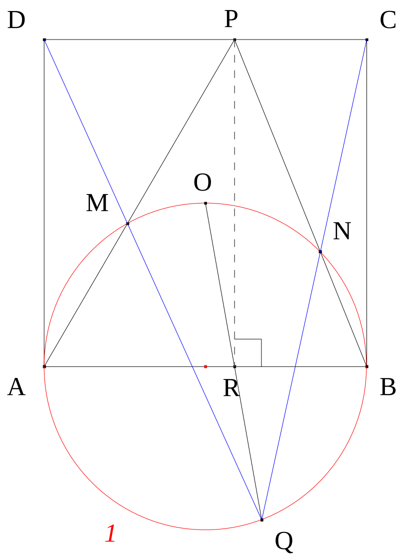
- **Scolie :** (Q'Q") // (AB). [11]

- Le cercle *1* et *2*, les points de base O et N, la monienne (Q"OP), les parallèles (Q"Q') et (PC), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, Q', N et C sont alignés ;

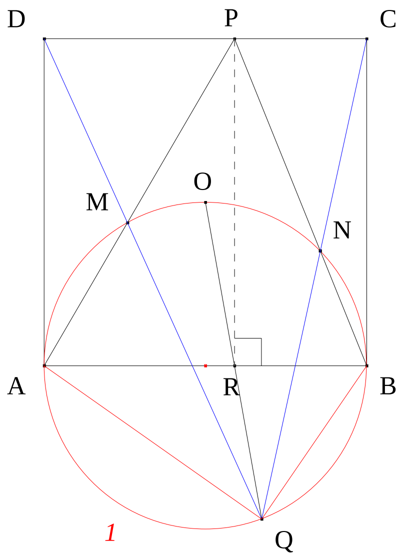
- **Conclusion partielle :** Q' et Q sont confondus.

---

[11] Ayme J.-L., Miniatures Géométriques, G.G.G. vol. **7**, problème **17**, p. 37 ; http://jl.ayme-pagesperso-orange.fr/



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CN), (DM) et (OR) sont concourantes en Q.



- **Scolie :** (QO) est la O-bissectrice intérieure du triangle QAB.

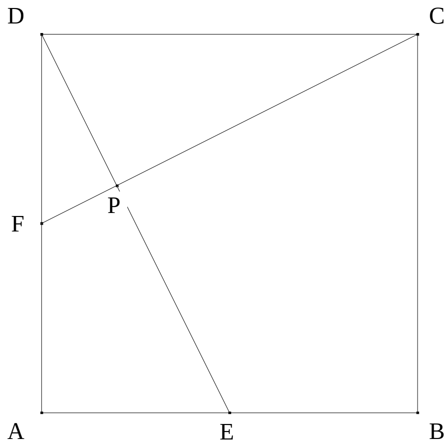
- D'après "Le théorème de la bissectrice", QA/QB = RA/RB
  par construction, RA/RB = PD/PC.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, QA/QB = QD/QC

7. Deux perpendiculaires

VISION

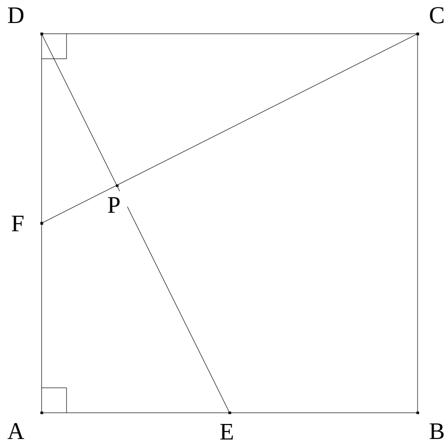
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E, F les milieux resp. de [AB], [AD],
et P le point d'intersection de (CF) et (DE).

Donné : (DE) est perpendiculaire à (CF). [12]

VISUALISATION



- **Conclusion :** ADE et DCF étant semblables et ayant deux couples de côtés correspondants perpendiculaires, (DE) est perpendiculaire à (CF).

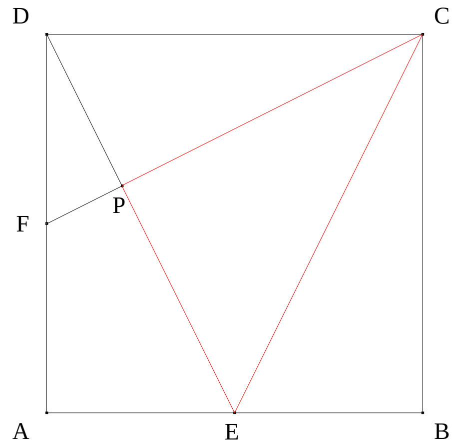
8. Un triangle d'or [13]

VISION

Figure :

[12] Paraguayan National Olympiad 2007, Level **3**, Problem **3**, AoPS du 01/09/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=604675

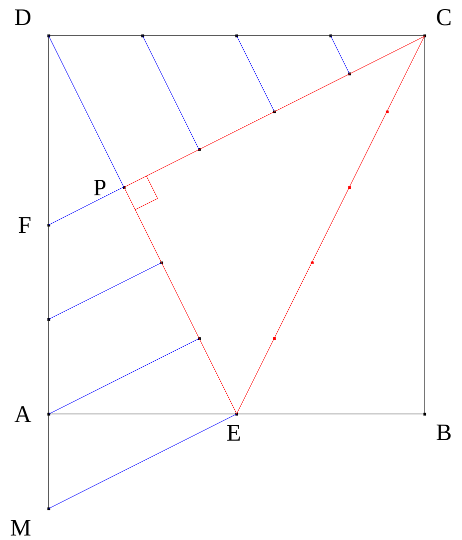
[13] triangle pythagoricien 3-4-5



Traits : ABCD un carré,
E, F les milieux resp. de [AB], [AD],
et P le point d'intersection de (CF) et (DE).

Donné : le triangle PEC est P-rectangle et d'or. [14]

VISUALISATION WITHOUT WORDS

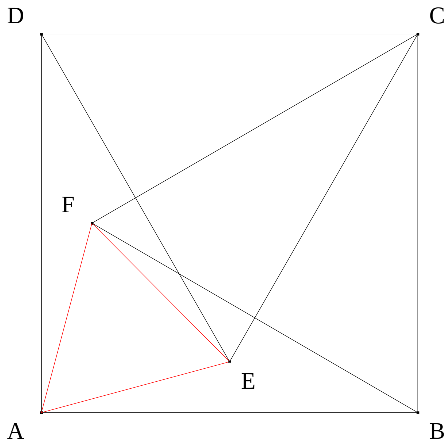


9. Une miniature ''interne'' de Victor Thébault

VISION

Figure :

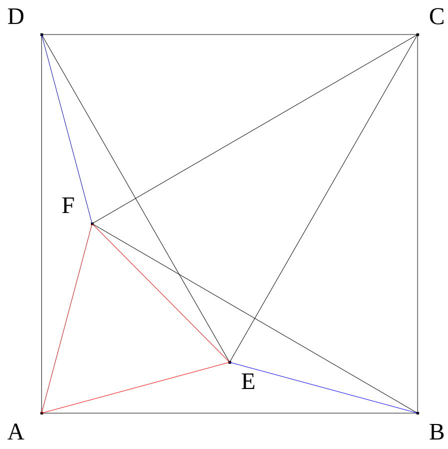
[14] Yiu P., *Recreational Mathematics* (2003) 435



Traits : ABC un carré,
et BFC, CED deux triangles équilatéraux, intérieurs à ABCD.

Donné : le triangle AEF est équilatéral. [15]

VISUALISATION



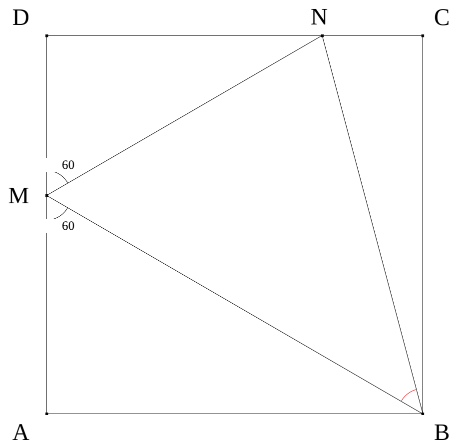
- Par symétrie d'axe (AC) des triangles CEB et CDF, BE = DF.
- **Scolies :** **(1)** la médiatrice de [AB] est celle de [CD] ; elle passe par E
  (2) la médiatrice de [AD] est celle de [CB] ; elle passe par F.
- D'après "Le théorème de la médiatrice", BE = AE et DF = AF;
  en conséquence, AE = AF.
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que (CE) $\perp$ (BF) ;
  en conséquence, (CE) est la médiatrice de [BF].
- D'après "Le théorème de la médiatrice", BE = FE.
- **Conclusion :** le triangle AFE est équilatéral.

[15] Thébault V. (1937)
An equilateral triangle, AoPS du 12/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=562265

10. Évaluation d'un angle

VISION

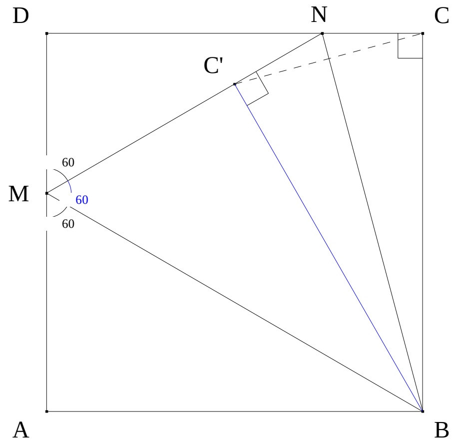
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	M, N	le point de [AD] tel que <AMB = 60°
et	N	le point de [DC] tel que <DMN = 60°.

Donné : <MBN = 45°. [16]

VISUALISATION WITHOUT WORDS



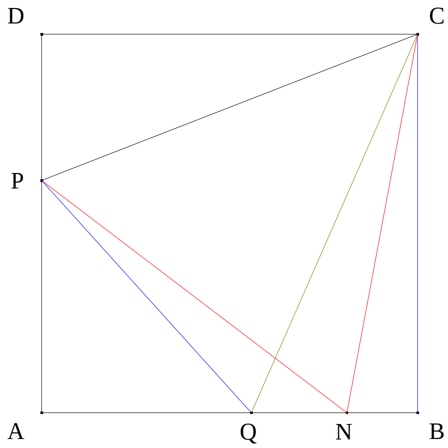
[16] Finals-Portuguese Mathematical Olympiad (High-School) P**2**, AoPS du 05/04/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=584122

11. Une relation angulaire

Iran National Olympiad - 2014 Second Round - D1P2

VISION

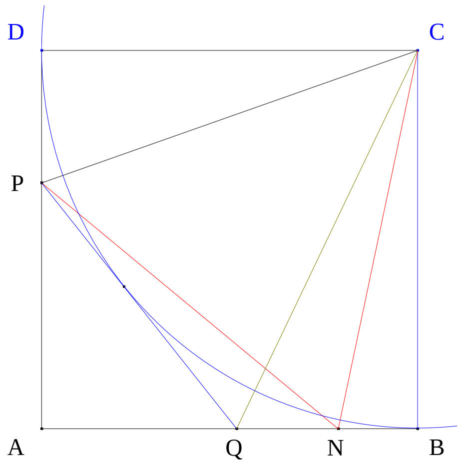
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	P	un point de [AD],
	N	le point de [AB] tel que NP = NC
et	Q	le point de [AN] tel que <NCB = <NPQ.

Donné : 2.<BCQ = <PQA. [17]

VISUALISATION



- Une chasse angulaire :

  * par "angles alternes-internes", <CPD = <PCB

[17] Angles on square, AoPS du 01/05/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=587739
Angles and points on a square, AoPS du 01/05/2014; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=587738

* par décomposition, <PCB = <PCN + <NCB

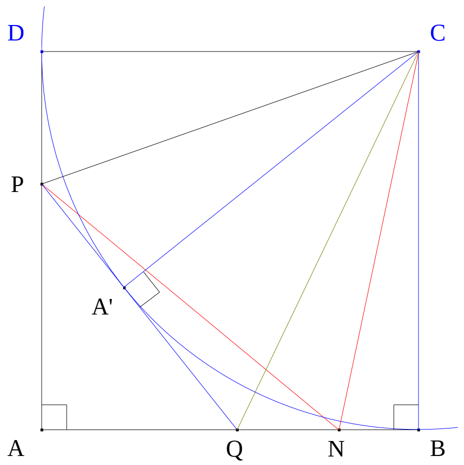
* par hypothèses, <PCN = <NPC, <NCB = <QPN

* par substitution, <PCB = <NPC + <QPN

* par sommation, <PCB = <QPC.

- **Conclusion partielle :** (PC) est la P-bissectrice extérieure du triangle APQ.

- (AC) étant la A-bissectrice intérieure de APQ, C est le A-excentre de APQ.



- Notons *1a* le A-excercle de APQ
  et A' le pied de la perpendiculaire à (PQ) issue de C

- Une chasse angulaire :

  * par addition, <AQP + 2.<CQB = 180°

  * le triangle BCQ étant B-rectangle, 90° = <CQB + <BCQ

  * par multiplication par 2, 180° = 2.<CQB + 2.<BCQ

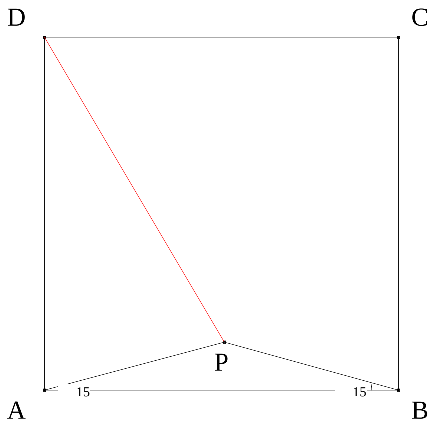
  * par transitivité de la relation =, <AQP + 2.<CQB = 2.<CQB + 2.<BCQ

- **Conclusion :** par simplification, <AQP = 2.<BCQ.

12. Évaluation d'un angle

VISION

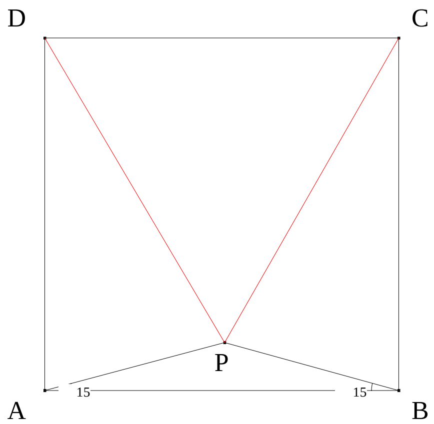
Figure :



Traits : ABCD un carré,
et P un point intérieur à ABCD tel que **(1)** le triangle PAB soit P-isocèle
(2) <BAP = 15°.

Donné : <ADP = 30°. [18]

VISUALISATION



- D'après "Miniatures géométriques, addentum, problème **11**" [19], le triangle PCD est équilatéral.
- **Conclusion :** <ADP = 30°.

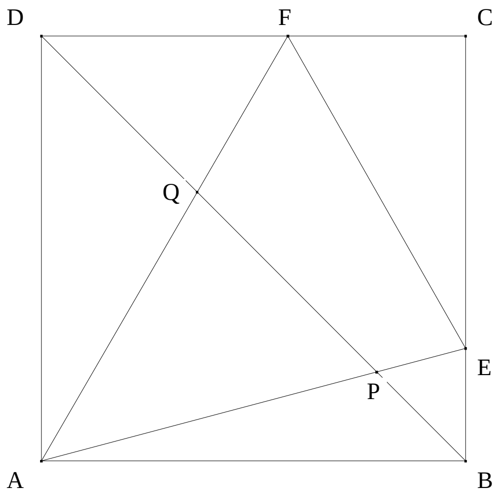
13. Évaluation d'un angle

VISION

Figure :

[18] Nice square !, AoPS du 15/05/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=589632
Equilateral triangle in a square : Beauty, AoPS du 02/08/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=546845

[19] Ayme J.-L., Miniatures géométriques, addentum, G.G.G. vol. **11**, p. 19-20 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABCD un carré,
E, F deux points resp. de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF
et P, Q les points d'intersection de (BD) resp. avec (AE), (AF).

Donné : *si*, BP.CE = DQ.CF *alors*, <EAF = 45°. [20]

VISUALISATION

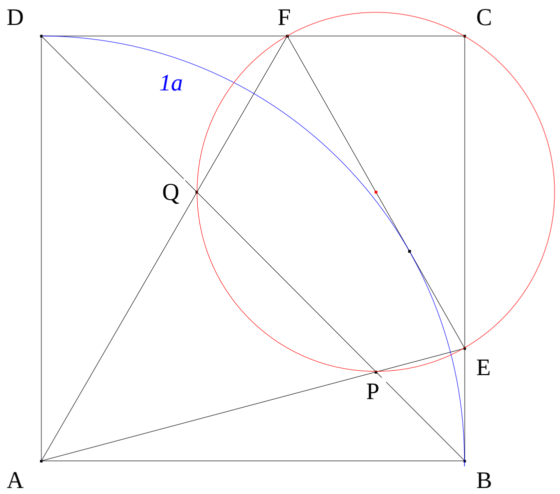
- Construction de E et F [21].
- **Conclusion :** d'après "45°, un angle dans un carré" [22]
  et par une chaîne d'équivalence, <EAF = 45°.

14. Cinq points cocycliques

VISION

Figure :

[20] Angle in a square, AoPS du 27/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=555880
[21] Ayme J.-L., 45°, **1.** Regard **4**, G.G.G. vol. **18** , p. 11; http :jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[22] Ayme J.-L., 45°, un angle dans un carré, G.G.G. vol. **16** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

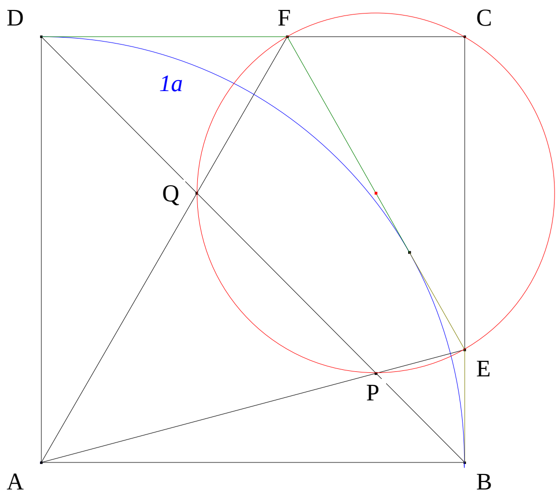


Traits :	ABCD	un carré,
	1a	le cercle de centre A passant par B,
	E, F	deux points resp. de [BC], [CD] tels que (EF) soit tangente à *1a*
et	P, Q	les points d'intersection de (BD) resp. avec (AE), (AF).

Donné : P, Q, E, F et C sont cocycliques. [23]

VISUALISATION

Commentaire : c'est une réciproque square 45° vol. 7 miniatures



- **Conclusion :** d'après "45°, un angle dans un carré" [24]
  et par une chaîne d'équivalence, P, Q, E, F et C sont cocycliques.

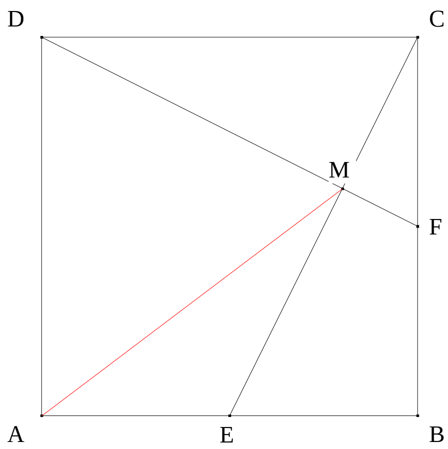
15. Deux segments égaux

[23] Square, AoPS du 06/05/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=588495

[24] Ayme J.-L., 45°, un angle dans un carré, G.G.G. vol. **16**, p. 16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

VISION

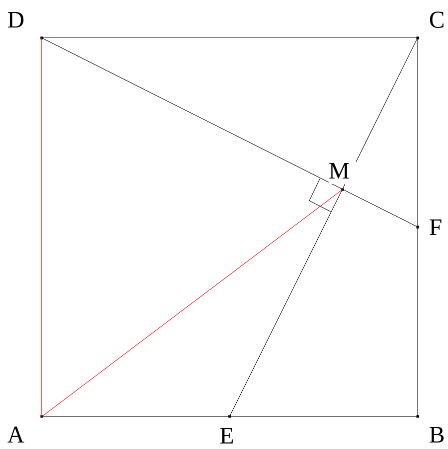
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E, F les milieux resp. de [AB], [BC],
et M le point d'intersection de (CE) et (DF).

Donné : AM = AD. [25]

VISUALISATION



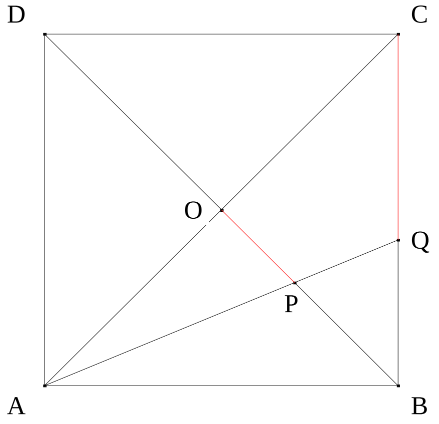
- D'après Problème **7**, (CE) ⊥ (DF).
- **Conclusion :** d'après Problème **2**, AM = AD.

16. Une relation

VISION

[25] Prove, AoPS du 03/03/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=578928

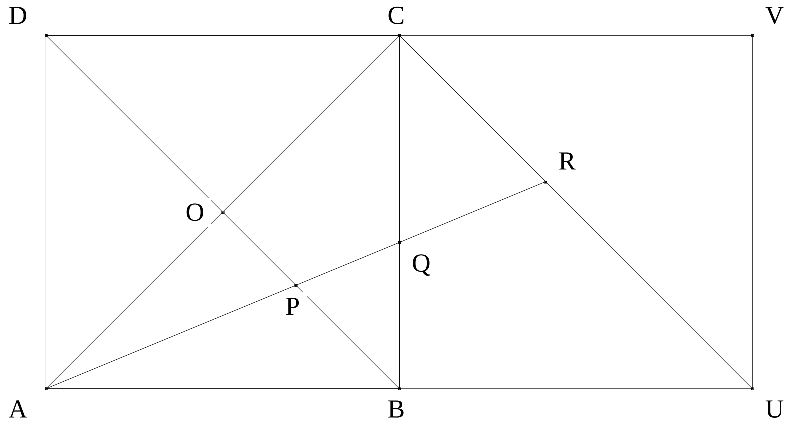
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	O	le point d'intersection de (AC) et (DE),
	Ba	la A-bissectrice intérieure du triangle ABC
et	P, Q	les points d'intersection de *Ba* resp. avec (BO), (BC).

Donné : 2.OP = CQ. [26]

VISUALISATION



- Notons BUVC le carré extérieur à ABCD
  et R le point d'intersection de (AQ) et (CU).

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle ACR, 2.OP = CR.

- **Scolies :** **(1)** par une chasse angulaire, le triangle DAP est D-isocèle

  (2) par parallélisme, le triangle CQR est C-isocèle

  (3) en conséquence, CR = CQ.

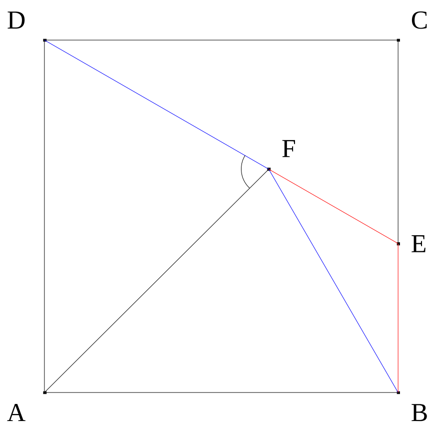
- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, 2.OP = CQ.

17. Evaluation d'un angle

[26] Geometry problem pertaining to square, AoPS du 17/06/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=283705

VISION

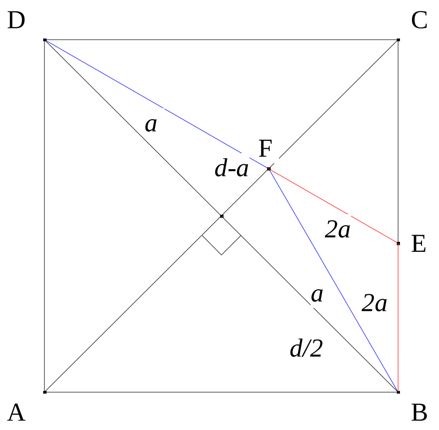
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E, F le point de [BC]
et F le point de [ED] tels que DF = BF et EF = BE.

Donné : <DFA = 75°.[27]

VISUALISATION



- Une chasse angulaire :

  * d'après "Le théorème de la médiatrice", F est sur [AC]

  * notons a la mesure en degré de <FBD

  * en conséquence, <CBD = 3a i.e. 3a = 45°.

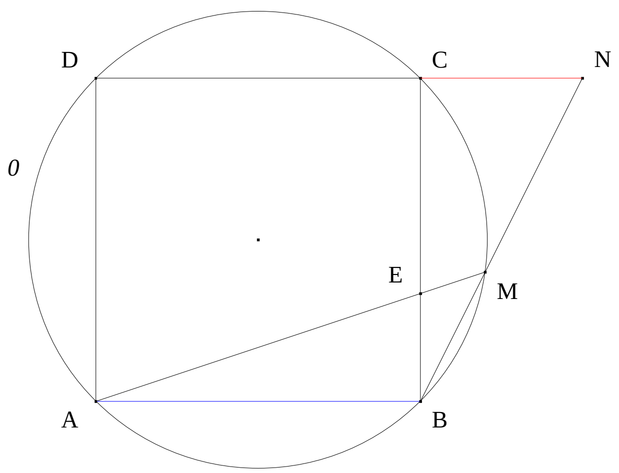
- **Conclusion :** <DFA = 75°.

18. Une relation

[27] Interior point, AoPS du 28/04/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=273990

VISION

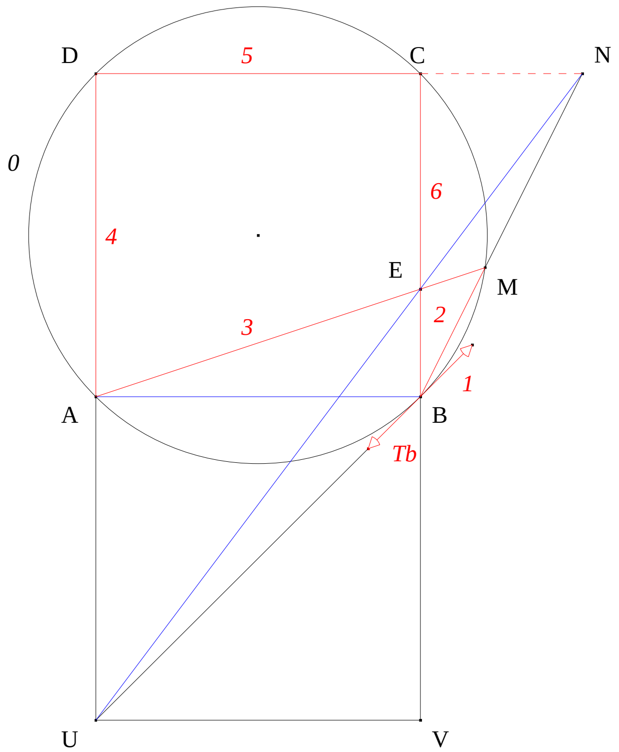
Figure :



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
E le premier tiers-point de [BC] à partir de B,
M le second point d'intersection de (AE) avec *0*
et N le point d'intersection de (BM) et (CD).

Donné : AB = 2.CN. [28]

VISUALISATION



[28] Geometry problem – square, AoPS du 23/02/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=76428

- Notons AUVB le carré extérieur à ABCD
  et *Tb* la tangente à *0* en B.

- **Scolie :** *Tb* passe par U.

- D'après Carnot "Pentagramma mysticum",
  (UNE) est la pascale de l'hexagone cyclique dégénéré *Tb* MADCB.

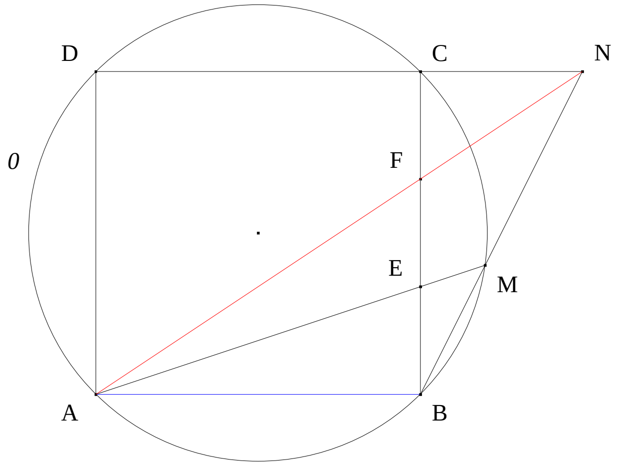
- D'après Thalès "Rapports", VU/CN = EV/EC = 2 ;
  en conséquence, VU = 2.CN.

- **Conclusion :** AB = 2.CN.

19. Un alignement

VISION

Figure :

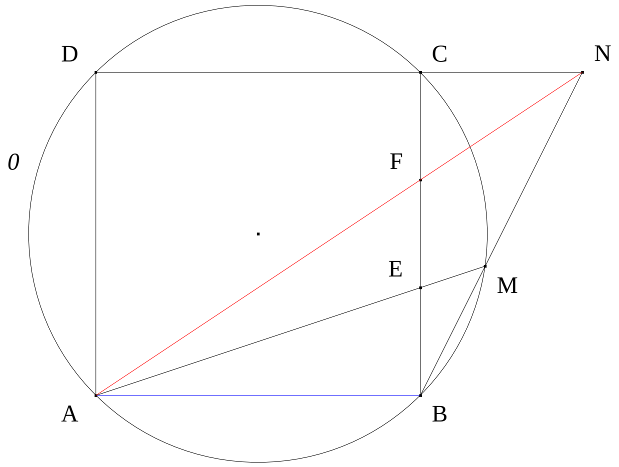


Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	E	le premier tiers-point de [BC] à partir de B,
	M	le second point d'intersection de (AE) avec *0*,
	N	le point d'intersection de (BM) et (CD),
et	F	le milieu de [CE].

Donné : A, F et N sont alignés. [29]

VISUALISATION

[29] Concurrent lines, AoPS du 21/12/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=610839



- **Scolies :** **(1)** FB/FC = 2

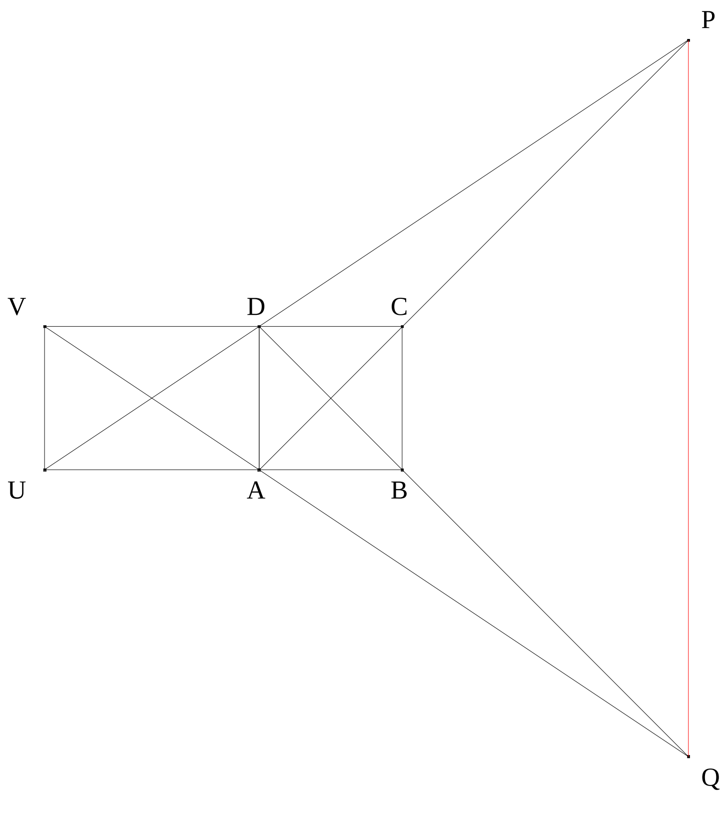
  (2) d'après "Problème **18**", BA/CN = 2.

- **Conclusion :** A, F et N sont alignés.

20. Deux parallèles

VISION

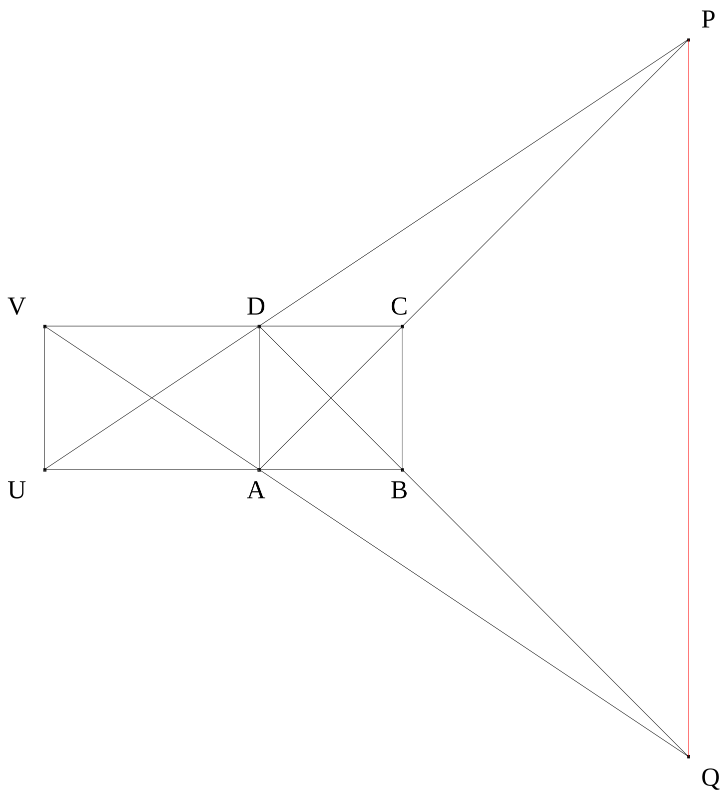
Figure :



Traits : ABCD un carré,
AUVD un rectangle extérieur à ABCD,
et P, Q les points d'intersection de (AC) et (DU), (BD) et (AV).

Donné : (PQ) est parallèle à (BC). [30]

VISUALISATION



- **Conclusion :** d'après Pappus "La proposition 139" [31] appliqué à l'hexagone sectoriel BCAVUDB, (PQ) est parallèle à (BC).

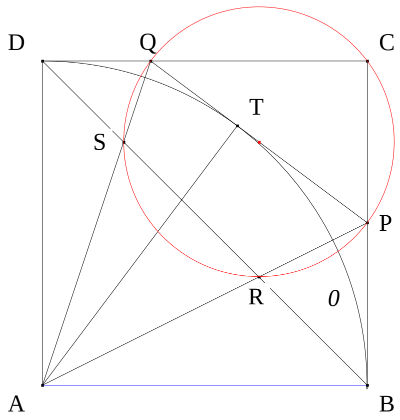
21. Cinq points cocycliques

VISION

Figure :

[30] Diagonals of a rectangle and a square, AoPS du 05/12/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=243591

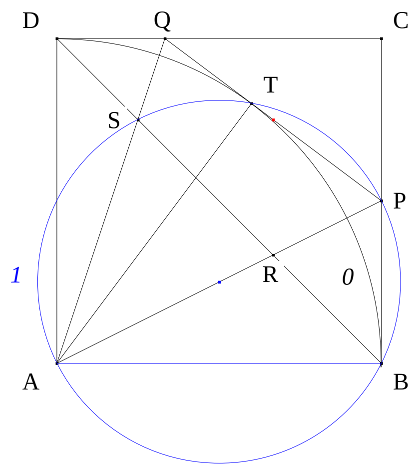
[31] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 15 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle de centre A passant par B,
T un point intérieur à ABCD situé sur *0*,
T la tangente à *0* en T,
P, Q les points d'intersection de *T* resp. avec (BC), (CD)
et R, S les points d'intersection de (BD) resp. avec (AP), (AQ).

Donné : C, P, Q, R et S sont cocycliques. [32]

VISUALISATION



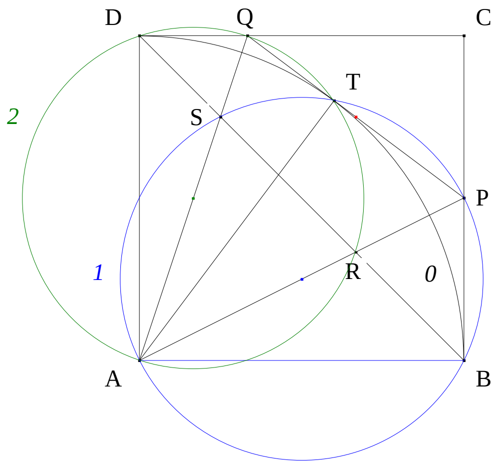
- **Scolies :** **(1)** <PAQ = 45° ou encore <PAS = 45°

  (2) <PBS = 45°.

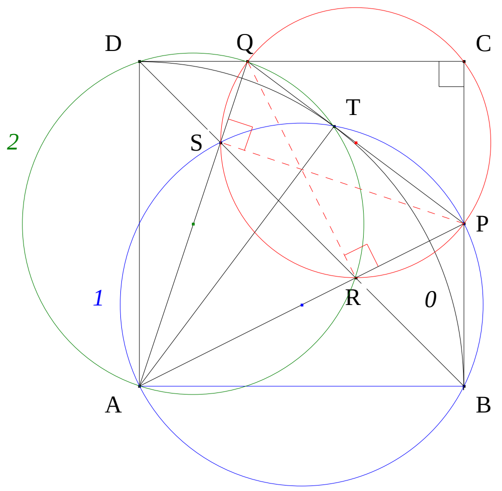
- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de l'angle inscrit", A, B, P et S sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle de diamètre [AP].

[32] Geometry, AoPS du 26/06/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=45736



- Mutatis mutandis, nous montrerions que A, D, Q et R sont cocycliques.
- Notons 2 ce cercle de diamètre [AQ].

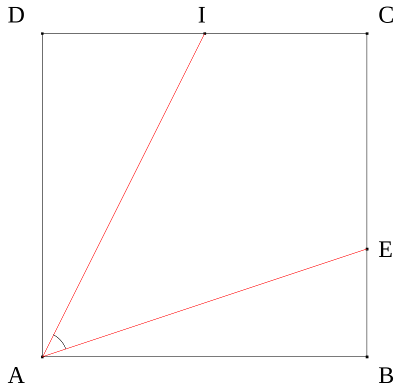


- **Scolie :** (PS) et (QR) sont resp. les P, Q-hauteur du triangle APQ.
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", C, P, Q, R et S sont cocycliques.

22. Angle de 45°

VISION

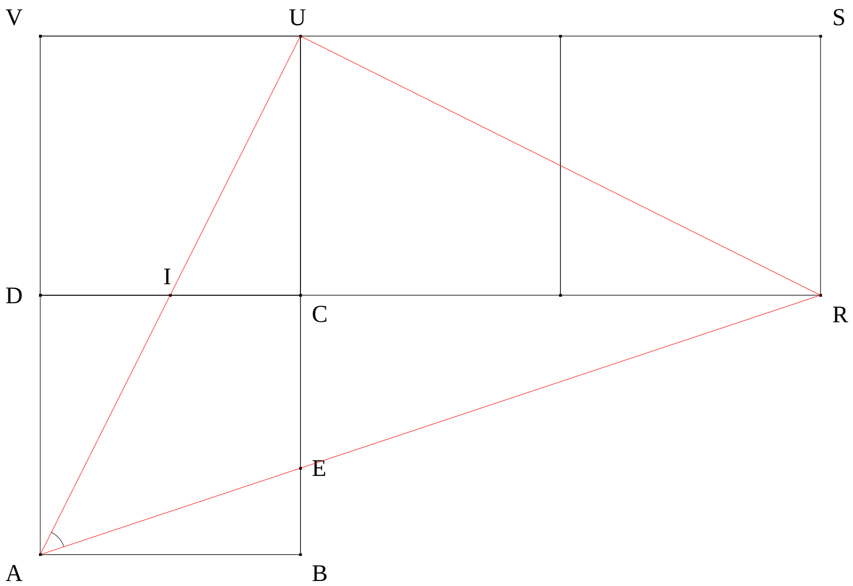
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	I	le milieu de [CD]
et	E	le premier tiers-point de [BC] à partir de B.

Donné : <IAE = 45°. [33]

VISUALISATION



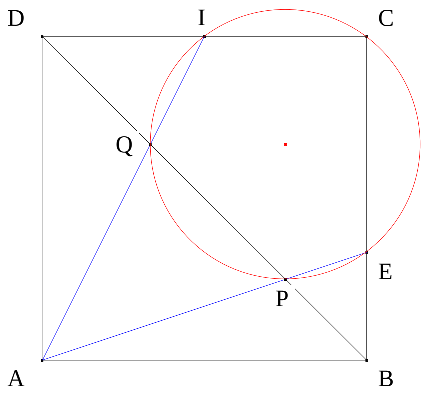
- Notons CUVD le carré extérieur à ABCD
  et CRSU le double carré extérieur à CUVD.
- **Scolie :** le triangle UAR est U-rectangle isocèle.
- **Conclusion :** <IAE = 45°.

23. Cinq points cocycliques

[33] Ayme J.-L., Evaluation of an angle, AopS du 08/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557454

VISION

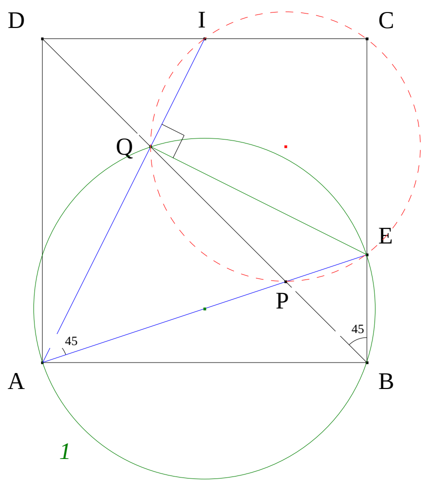
Figure :



Traits : ABCD un carré,
I le milieu de [CD],
E le premier tiers-point de [BC] à partir de B
et P, Q les points d'intersection de (BD) resp. avec (AE), (AI).

Donné : P, Q, E, C et I sont cocycliques. [34]

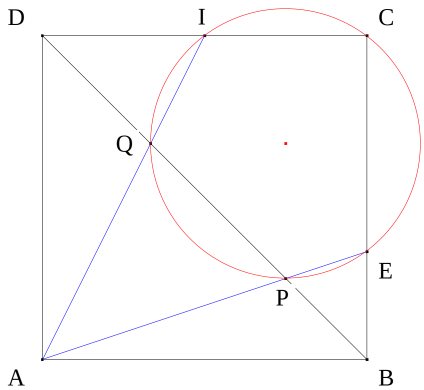
VISUALISATION



- D'après "Problème **22** ", <EAI = 45°.
- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", A, B, E et Q sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle de diamètre [AE].
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (EQ) ⊥ (AI).
- **Conclusion partielle :** E, C, I et Q sont cocycliques.

[34] Five concyclic points, AoPS du 08/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557462

- Mutatis mutandis, nous montrerions que E, C, I et P sont cocycliques.

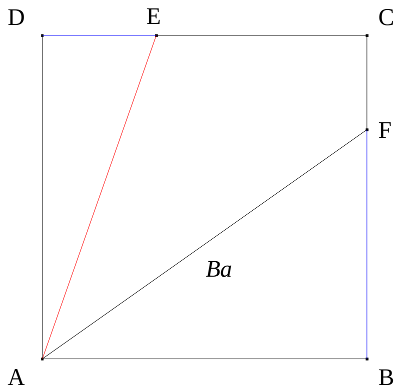


- **Conclusion :** P, Q, E, C et I sont cocycliques.

24. Une relation

VISION

Figure :

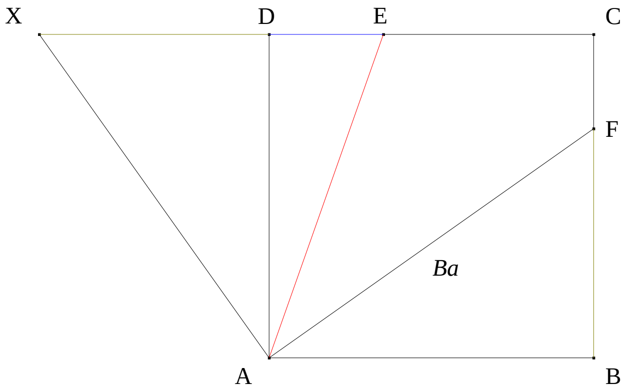


Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point [CD],
	Ba	la A-bissectrice intérieure du trianfle ABE
et	F	le point d'intersection de Ba et (BC).

Donné : AE = BF + DE. [35]

VISUALISATION

[35] Pretty Geometry problem **2**, AoPS du 27/03/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=536041



- Notons X le point de (CD) tel que **(1)** DX = BF
  (2) D soit entre C et X.

- Par une chasse angulaire, nous montrerions que <AXE et <EAX ont même complémentaire ;

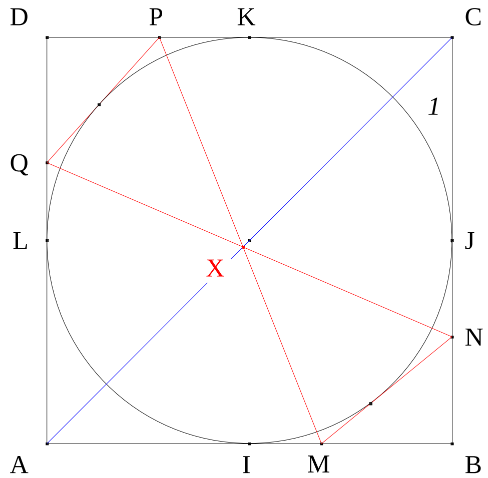
  en conséquence, **(1)** le triangle EAX est E-isocèle
  (2) EA = EX (= ED + DX).

- **Conclusion :** AE = BF + DE.

25. Intersection sur la diagonale

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	1	le cercle inscrit de ABCD,
	I, J, K, L	les point de contact de *1* resp. avec [AB], [BC], [CD], [DA],
	M, N	deux points resp. de [BI], [BJ] tels que (MN) soit tangente à *1*,
	P, Q	deux points resp. de [DK], [DL] tels que (PQ) soit tangente à *1*,

et X le point d'intersection de (PM) et (QN).

Donné : X est sur (AC). [36]

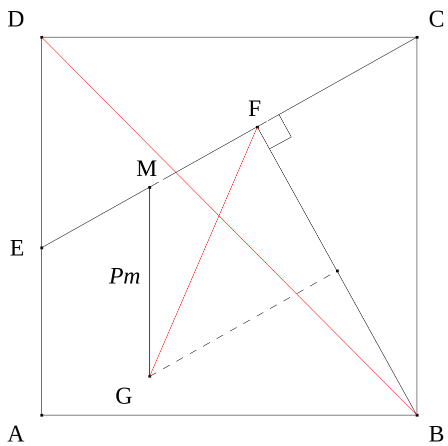
VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après le théorème de Brianchon appliqué à l'hexagone circonscriptible, X est sur (AC).

26. Une inégalité

VISION

Figure :



Traits :

	ABCD	un carré,
	E	un point de [AD],
	F	le pied de la perpendiculaire à (CE) issue de B,
	M	le milieu de [EF],
	Pm	la parallèle à (BC) issue de M
et	G	le point d'intersection de *Pm* et de la médiatrice de [BF].

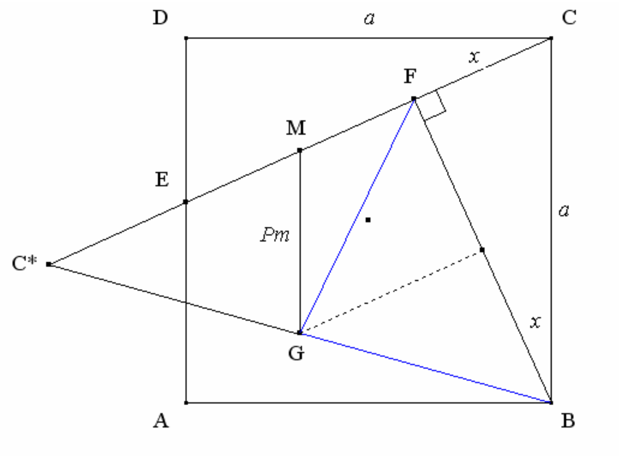
Donné : AC < 2.FG. [37]

VISUALISATION

---

[36] Nicula V., T belongs to diagonal AC, AoPS du 22/08/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=550537

[37] Square inequality, AoPS du 05/02/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=574757
An inequality in a square, AoPS du 29/10/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=611830



- Notons C* le point d'intersection de (BG) et (CE),
  a la mesure de [AB]
  et x la mesure en degré de <CBF (ou de <DCE).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", G est le milieu de [BC*].

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle C*BC,
  M étant le milieu de [EF],
  M est le milieu de [CC*] ;
  FC = EC*.

- Un calcul segmentaire :

  * d'après ''Le théorème de Pythagore''
    appliqué au triangle FBC* rectangle en F, $BC^{*2} = BF^2 + FC^{*2}$

  * ou encore, $BC^{*2} = BF^2 + CE^2$

  * par projection, $BC^{*2} = (a.\cos x)^2 + (a/\cos x)^2$

  * i.e. $BC^{*2} = a^2.(\cos^2 x + 1/\cos^2 x)$

  * d'après ''Le théorème de Pythagore''
    appliqué au triangle DAC rectangle en D, $AC^2 = 2.a^2$.

- **Rappels :** **(1)** pour tout réel u strictement positif, $u + 1/u \geq 2$

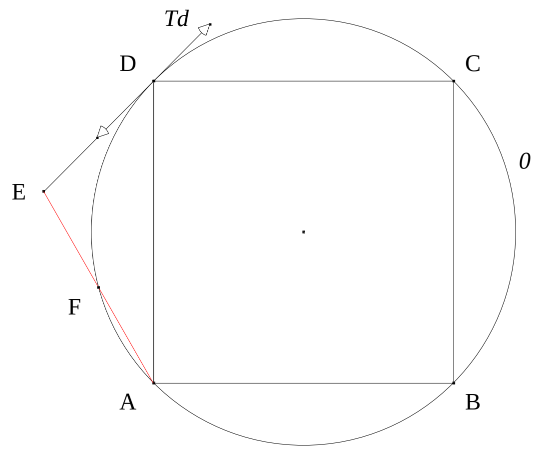
  (2) $BC^* = 2.FG$.

- **Conclusion :** 2.FG > AC.

27. Évaluation d'un angle

VISION

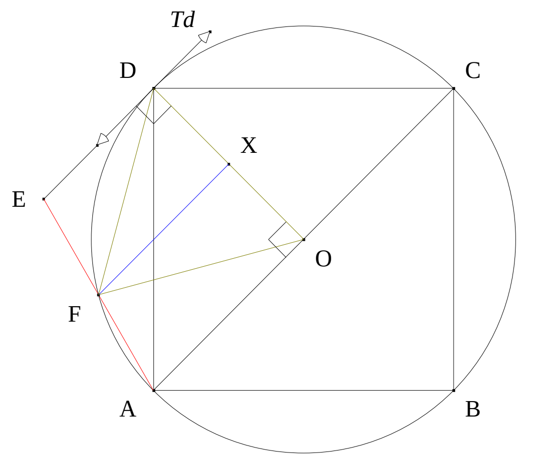
Figure :



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
Td la tangente à *0* en D,
E un point de *Td*,
F le second point d'intersection de (AE) avec *0*.

Donné : *si,* F est le milieu de [AE] *alors,* <DAE = 30°. [38]

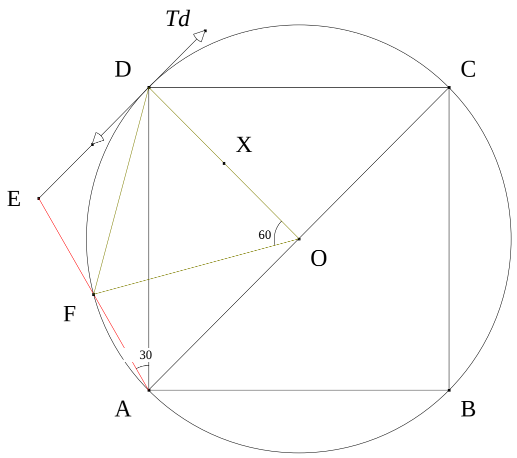
VISUALISATION



- Notons O le centre de *0*
  et X le milieu de [OD].

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au trapèze rectangle AODE, (FX) est la médiatrice de [OD] ;
  en conséquence, la triangle ODF est équilatéral.

[38] In square, AoPS du 28/12/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=568792

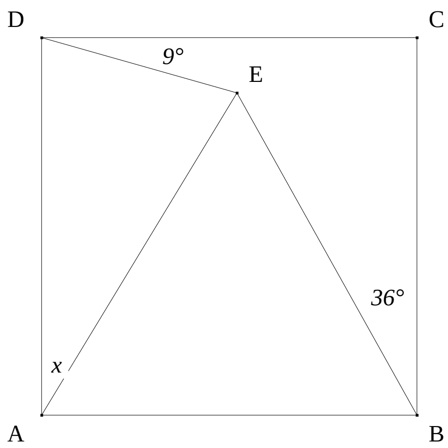


- **Conclusion :** d'après "Le théorème angles au centre et inscrit", <DAE = 30°.

28. Evaluation d'un angle

VISION

Figure :

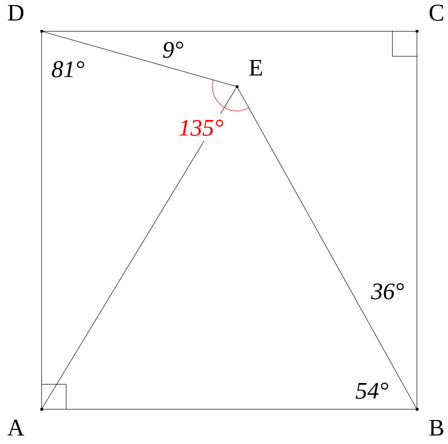


Traits : ABCD un carré
et E le point intérieur à ABCD tel que <CBE = 36° et <CDE = 9°.

Donné : <DAE = 18°. [39]

VISUALISATION

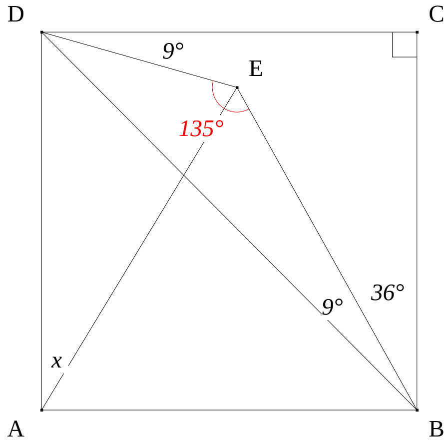
[39] x in square , AoPS du 07/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=570186



- Une sommation angulaire :

*	somme des angles de ABED,	<BED + <EDA + <DAB + <ABE = 2. 180°
*	ou encore,	<BED + 81° + 90° + 54° = 360°
*	i.e.	<BED = 135°.

- **Conclusion partielle :** le supplément de <BED étant égal à 45°,
  d'après "Le théorème angles inscrit et au centre",
  E est sur le cercle de centre A passant par B.

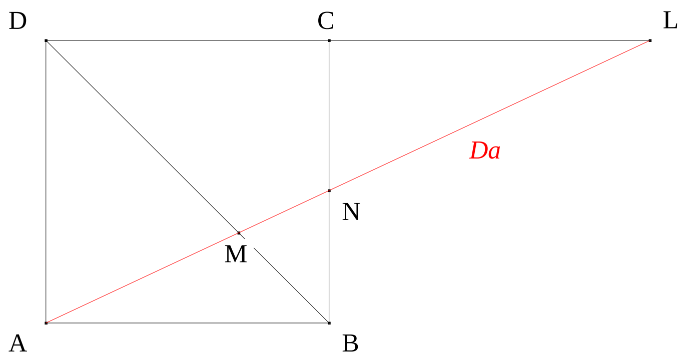


- **Conclusion :** <EBD étant égal à 9°,
  d'après "Le théorème angles inscrit et au centre", <DAE = 18°.

29. Une relation

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
Da une transversale issue de A
et M, N, L les points d'intersection de *Da* resp. avec (BD), (BC), (CD).

Donné : AM² = MN.ML. [40]

VISUALISATION

- Une chasse de rapport :

  * les triangles MAB et MLD étant semblables, MA/ML = MB/MD

  * les triangles MAD et MNB étant semblables, MA/MN = MD/BM.

- **Conclusion :** par multiplication membre à membre
  et réarrangement, AM² = MN.ML.

30. Évaluation d'un rapport

Albanian Mathematcial Olympiad,

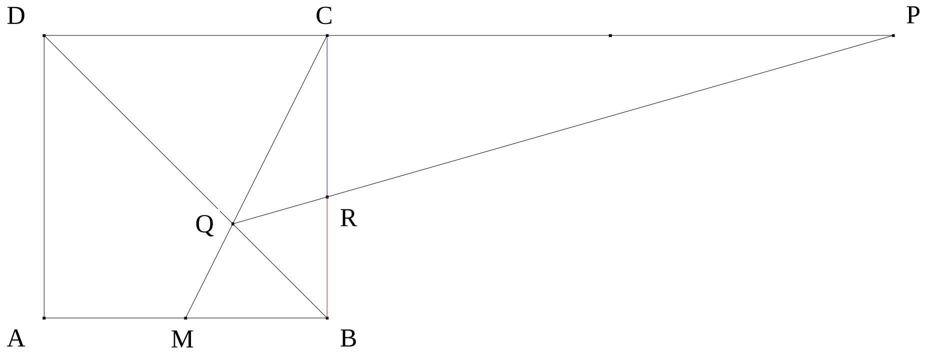
Second Stage, 2003

Vlora County, Q**5**

VISION

Figure :

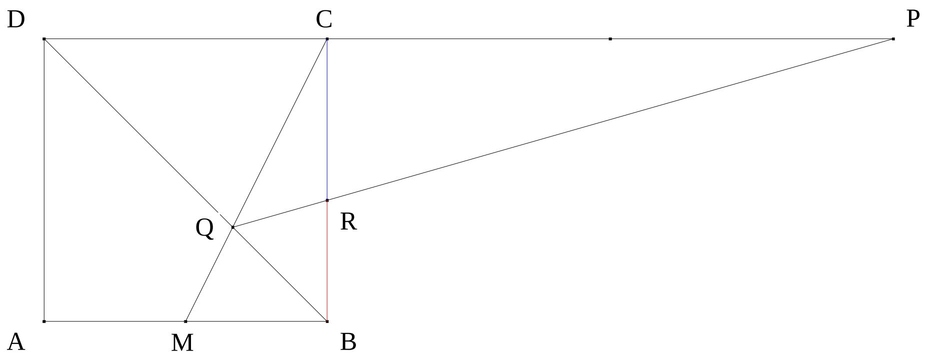
[40] A problem about parallelogram, AoPS du 12/07/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=543524
Nica and easy geometry, 10/06/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1475763_nica_and_easy_geometry
Geometry, AoPS du 28/06/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1469579_geometry



Traits : ABCD un carré,
M le milieu de [AB],
Q le point d'intersection de (MC) et (BD),
et P le point de (CD) tels que **(1)** PC = 2.CD
(2) C entre P et D.

Donné : RB/RC = 3/4. [41]

VISUALISATION



- D'après "Le théorème de Ménélaüs"
  appliqué au triangle BCD et à la ménélienne (PQR), PC/PD . QD/QB . RB/RC = 1.

- Une chasse de rapport :

  * par hypothèse, PC/PD = 2/3

  * les triangles QCD et QMB étant semblables, QD/QB = CD/MB (= 2).

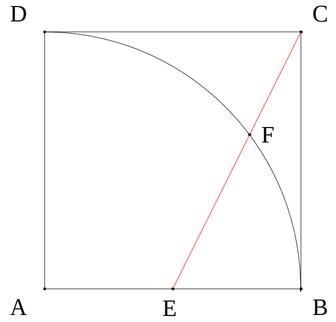
- **Conclusion :** par substitution et réarrangement, RC/RB = 3/4.

31. Évaluation d'un rapport

VISION

Figure :

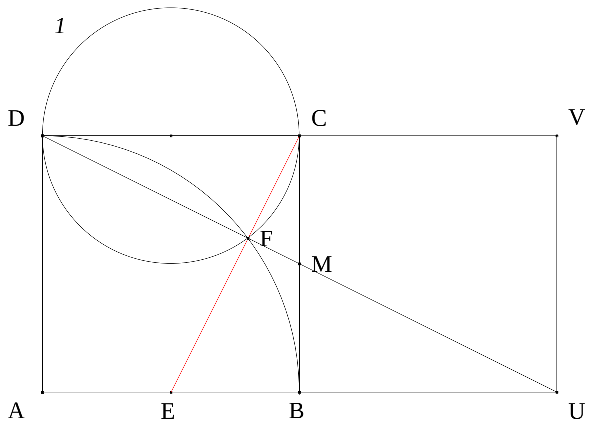
41



Traits :	ABCD	un carré,
	E	le milieu de [AB],
	1	le cercle de centre A passant par B
et	F	le point d'intersection de *1* et [EC].

Donné : FE/FC = 3/2. [42]

VISUALISATION



- Notons BUVC le carré extérieur à ABCD,
  M le point d'intersection de (DF) et (BC),
  et *1* le cercle de diamètre [CD].

- *1* étant tangent à (BC) en C, M est le milieu de [BC] ;
  en conséquence, (DF) passe par U.

- D'après "Le théorème de Ménélaüs"
  appliqué au triangle BCE avec la ménélienne (FMU), FE/FC . MC/MB . UB/UE = 1.

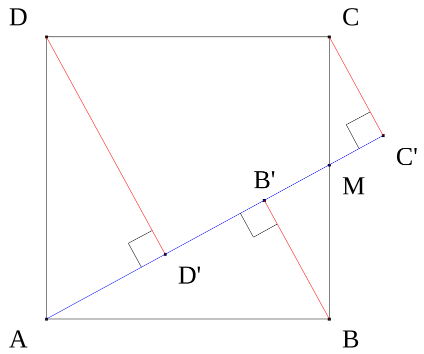
- **Conclusion :** FE/FC = 3/2.

32. Une relation

VISION

[42] P**17** [Geometry] – Turkish NMO 1st Round – 2014, AoPS du 23/05/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=590908

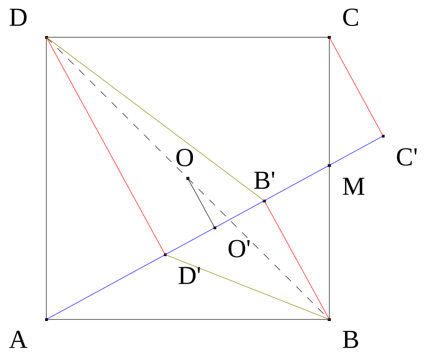
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	M	un point de [BC]
et	B', C', D'	les pieds des perpendiculaires à (AM) issues resp. de B, C, D.

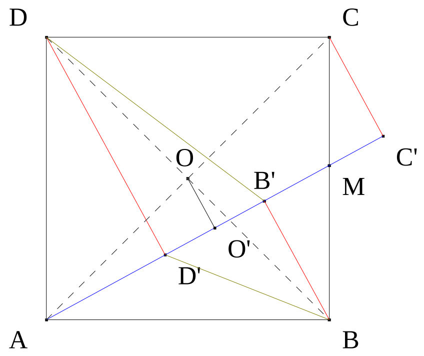
Donné : DD' = BB' + CC'. [43]

VISUALISATION



- Notons O le centre de ABCD
  et O' le pied de la perpendiculaire à (AM) issue de O.

- Le quadrilatère BDD'B' étant un trapèze croisé, 2.OO' = DD' - BB'.



- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle ACC', 2.OO' = CC'.

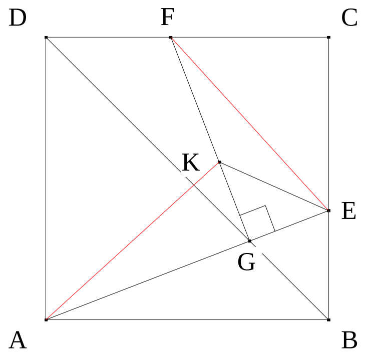
[43] Beauty problem about parallelogram, AoPS du 14/06/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=538771

- **Conclusion :** par substitution et par réarrangement, DD' = BB' + CC'.

33. Évaluation d'un angle

VISION

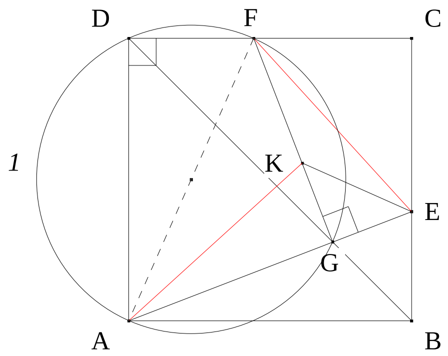
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC],
G le point d'intersection de (AE) et (BD),
F le point d'intersection de la perpendiculaire à (AE) en E avec (CD),
et K le point de [FG] tel que AK = EF.

Donné : <EKF = 135°. [44]

VISUALISATION



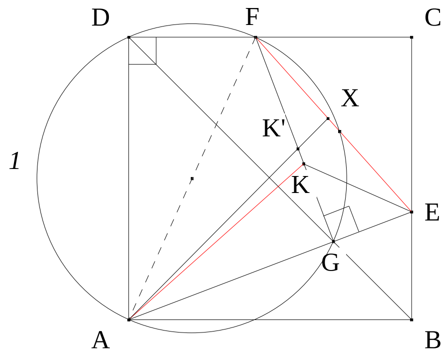
- Notons *1* le cercle de diamètre [AF].

- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", **(1)** <GAF = <GDF (= 45°)

  (2) <AFG = <ADG (= 45°).

- **Conclusion partielle :** le triangle GFA est G-isocèle.

[44] Find the measure of the angle EKF, AoPS du 02/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=612358



O is the circumcenter and D midpoint of $BC, \angle BOC = 90^\circ \implies 2OD = BC = AH$ and, indeed, H being onto an altitude and at a distance from A equal to double of distance from circumcenter to the opposite side, is the orthocenter.

- **Scolie :** K est distinct de G.

- Notons X le second point d'intersection de (EF) avec *1*
  et K' le point d'intersection de (AX) avec (FG).

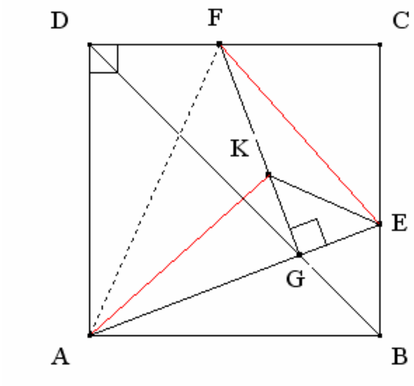
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que K' et K sont distincts.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (AX) ⊥ (EF).

- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", <GFX = <GAX.

- D'après "Le théorème a.c.a" appliqué aux triangles GFE et GAK, AK' = EF ;
  par hypothèse, EF = AK
  par transitivité de la relation =, AK' = AK ;
  en conséquence, K' et K sont confondus ce qui est contradictoire.

- **Conclusion partielle :** K est l'orthocentre du triangle AEF. [45]



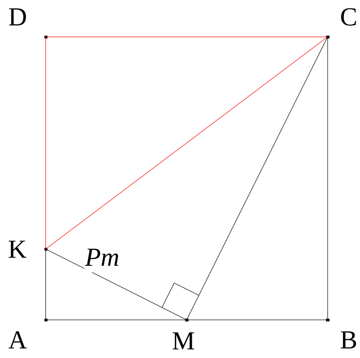
- **Conclusion :** d'après Carnot, le symétrique de K par rapport (EF) étant sur le cercle circonscrit de AEF, <EKF = 135°.

34. Un triangle pythagoricien

VISION

[45] Orthocenter, AoPS du 04/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=612594

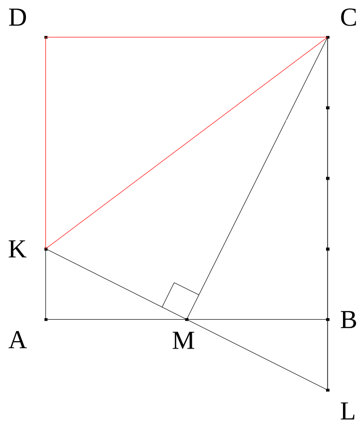
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	M	le milieu de [AB],
	Pm	la perpendiculaire à (MC) issue de M
et	K	le point d'intersection de *Pm* et (AD).

Donné : le triangle CDK est pythagoricien. [46]

VISUALISATION



- Notons L le point d'intersection de (MK) et (BC).
- **Scolie :** BL = CK.
- Considérons la relation métrique dans le triangle M-rectangle MCL **:** $BM^2 = BL.BC$.
- WOLG [47] considérons que ABCD a pour côté 4 ;
  en conséquence,
  (1) BL = 1
  (2) [BC] de "divise" régulièrement en 4 segments de longueur 1.
- **Conclusion partielle :**
  (1) [CK] se "divise" régulièrement en 5 segments de longueur 1
  (2) [CD] se "divise" régulièrement en 4 segments de longueur 1.

---

[46] Prove that, AoPS du 14/06/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=593638
[47] With a Lot Of Generality

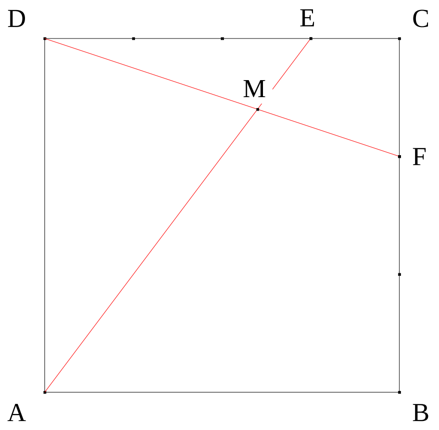
- D'après "Le théorème de Pythagore", [DK] se "divise" régulièrement en 3 segments de longueur 1.

- **Conclusion :** le triangle CDK est pythagoricien.

35. Deux segments égaux

VISION

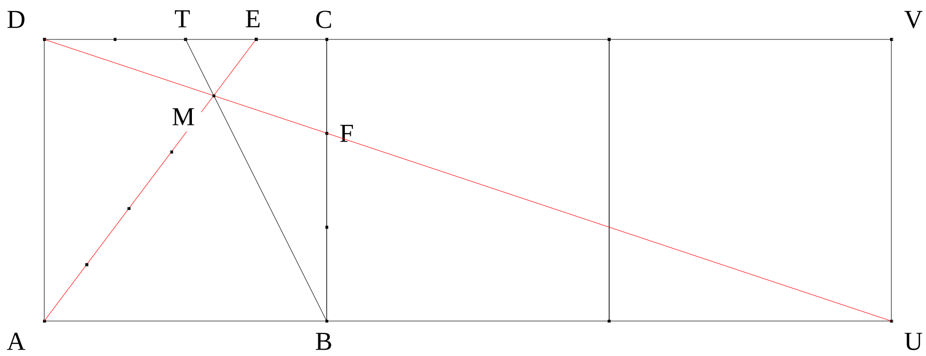
Figure :



Traits : ABCD		un carré,
	E	le point de [CD] tel que DE = 3.EC,
	F	le point de [BC] tel que BF = 2.FC
et	M	le point d'intersection de (AE) et (DF).

Donné : AM = AB. [48]

VISUALISATION



- Le triangle D-rectangle DAE est pythagorien.

- **Commentaire :** montrons que le triangle EMC est E-isocèle.

- Notons BUVC le double carré extérieur à ABCD

[48] Nicula V., A square and the value of an angle, AoPS du 20/10/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=503255

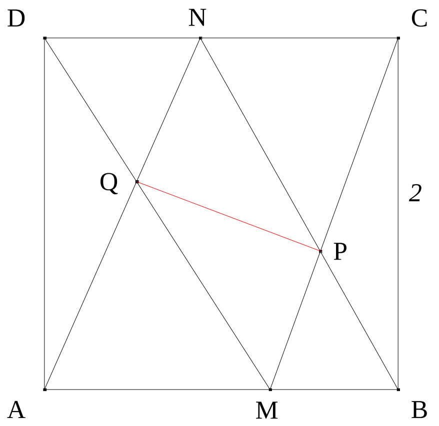
et T le milieu de [CD].

- **Scolies :** **(1)** D, M, F et U sont alignés
  (2) T, M et B sont alignés.
- D'après Thalès "Rapports", M est le premier cinq-point de [EA] à partir de E ;
  en conséquence, EM = EC. [49]
- **Conclusion :** AM = AB.

36. Une inégalité

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré de côté 2,
M, N deux points resp. de [AB], [CD]
et P, Q les points d'intersection resp. de (BN) et (CM), (AN) et (DM).

Donné : PQ > ou = 1. [50]

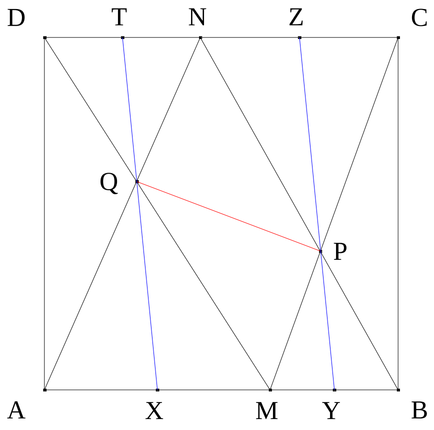
VISUALISATION [51]

---

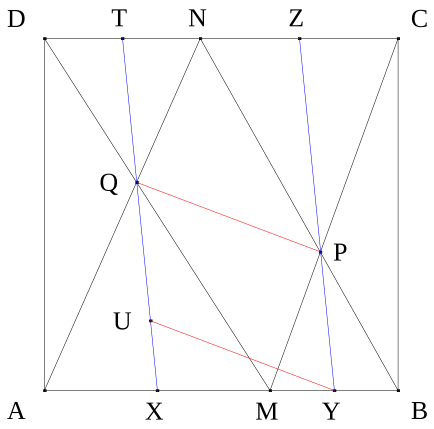
[49] A square and an isoceles triangle, AoPS du 05/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=612696

[50] Given a square…, AoPS du 28/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=556019

[51] Elle s'inspire du grec Tsikaloudakis



- Notons X, Y, Z, T les milieux resp. de [AM], [MB], [CN], [ND].
- D'après "Le trapèze complet" appliqué aux trapèzes
  * AMND, X, Q et T sont alignés
  * MBCN, T, P et Z sont alignés.
- Le quadrilatère XYZT ayant deux côtés parallèles et égaux (XY = ZT) est un parallélogramme.

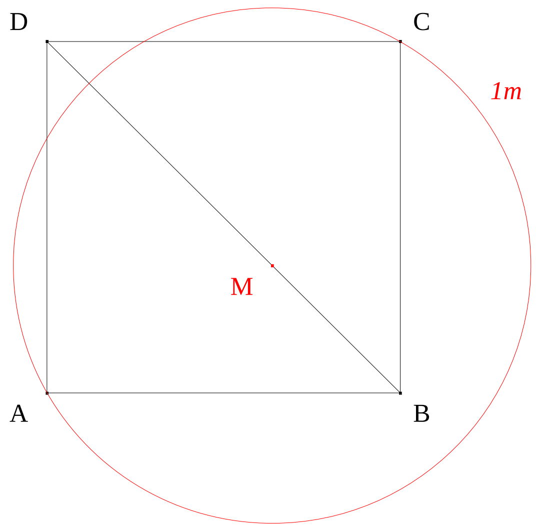


- Notons U le point de (XT) tel que (YU) soit parallèle à (PQ).
- Le quadrilatère PQUY étant un parallélogramme, YU = PQ.
- <YWU étant supérieur à 90°, YU > ou = XY.
- **Scolie :** 2.XY = AB (= 2).
- **Conclusion :** par substitution, PQ > ou = 1.

37. Un sommet du carré sur un cercle

VISION

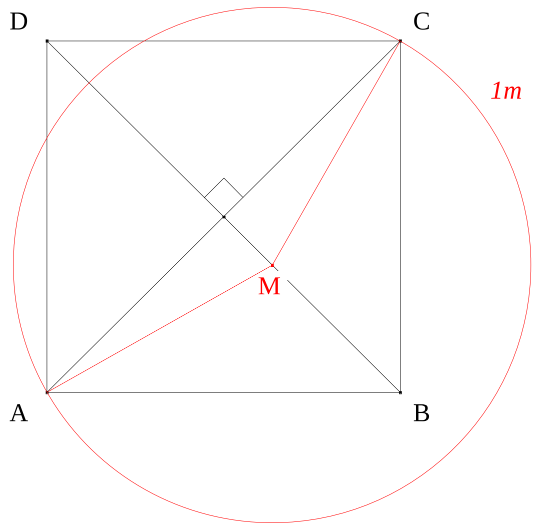
Figure :



Traits : ABCD un carré,
M un point de [BD]
et *1m* le cercle de centre M passant par A.

Donné : *1m* passe par C.[52]

VISUALISATION



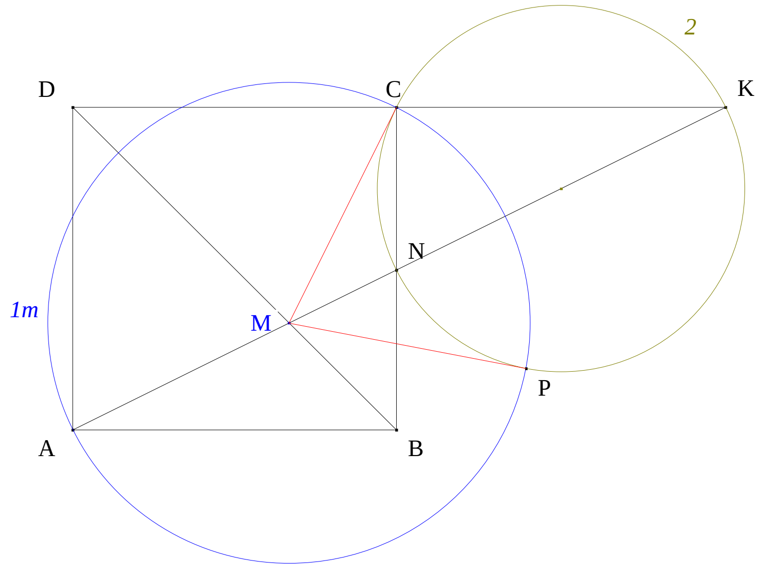
- **Scolie :** (BD) est la médiatrice de [AC].
- D'après "Le théorème de la médiatrice", MA = MC.
- **Conclusion :** *1m* passe par C.

[52] A vertex of a square on a circle, AoPS du 17/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=614246

38. Deux tangentes

VISION

Figure :



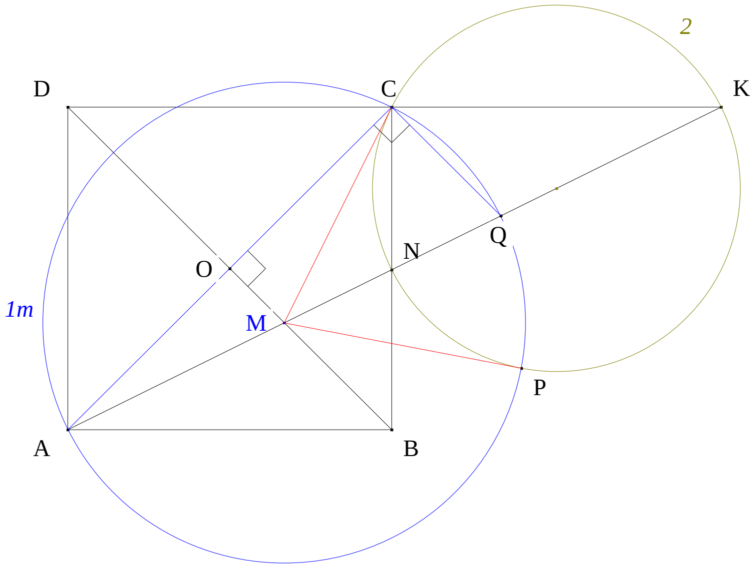
Traits :	ABCD	un carré,
	M	le point de [BD],
	K, N	les points d'intersection de (AM) resp. avec (CD), (BC),
	1m	le cercle de centre M passant par A,
	2	le cercle circonscrit au triangle KCN
et	P	le second point d'intersection de *2* et *1a*.

Donné : (MC) et (MP) sont tangentes à *2*. [53]

VISUALISATION

- **Scolie :** d'après Problème **37**, *1m* passe par C.

[53] Two tangents, AoPS du 17/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=614249



- Notons O le point d'intersection de (AC) et (BD),
  et Q le second point d'intersection de (AM) avec *1m*.

- **Scolie :** (BD) // (CQ).

- O étant le milieu de [BD], le pinceau (C ; A, Q, N, K) est harmonique ;
  en conséquence, *2* est orthogonal à *1m*.

- **Conclusion :** (MC) et (MP) sont tangentes à *2*.

Centre de 2 sur AN par symétrie

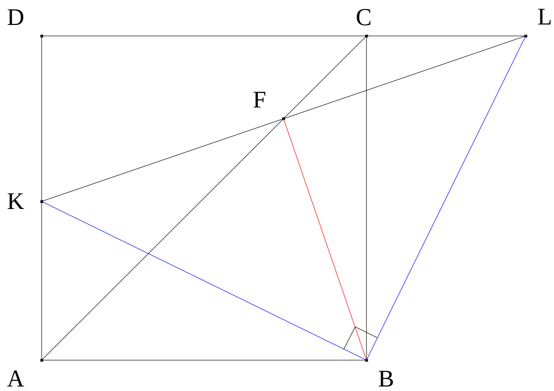
$AB \parallel CD$ and A, C symmetrical of each other about BD, we get $\angle CKN = \angle BAM = \angle BCM$, hence done.

39. Deux perpendiculaires

R.Sadykov, Sharygin Geometry Olympiad 2014 - Problem **8**

VISION

Figure :

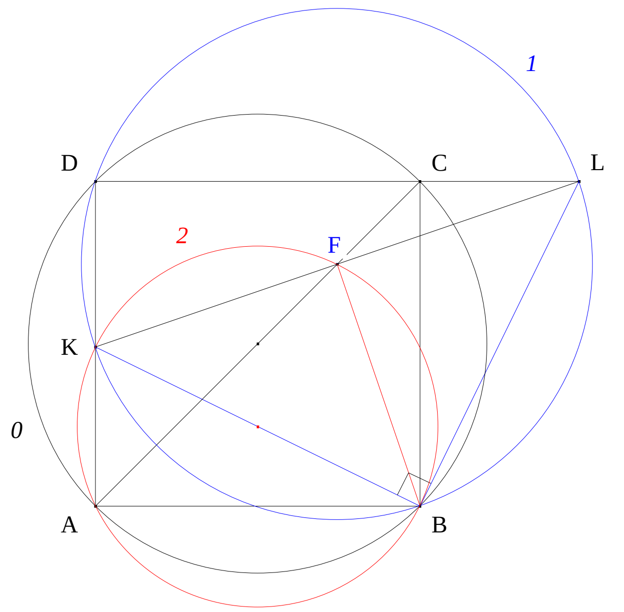


Traits : ABCD un carré,

	K	le point de [AD],
	L	les points d'intersection de la perpendiculaire à (BK) en B avec (CD),
et	F	le point d'intersection de ((KL) et (AC).

Donné : (BF) est perpendiculaire à (KL). [54]

VISUALISATION



- Notons *0*, *1*, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles CAD, LDK, FKD.
- **Scolie :** *0* et *1* passent par B.
- D'après "Le point de Miquel-Wallace" [55]
  appliqué au triangle CLF et à la ménélienne (DKA), *0*, *1* et *2* sont concourants en B.
- **Scolie :** *2* a pour diamètre [BK].
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle",
  (BF) est perpendiculaire à (KL).

40. Cercle tangent à un côté

Mexico National Olympiad 2014

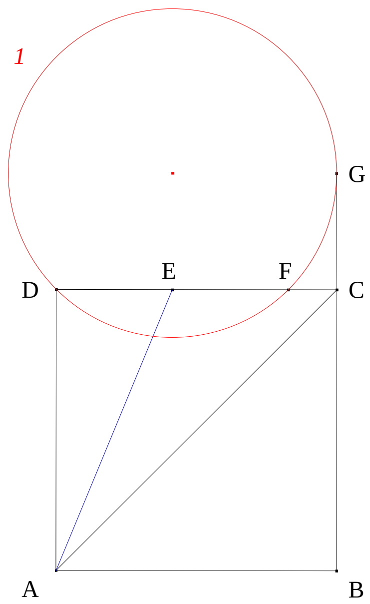
VISION

Figure :

---

[54] Perpendicular Lines Intersecting at Vertex of Rectangle, AoPS du 15/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/forum/viewtopic.php?f=46&t=614037

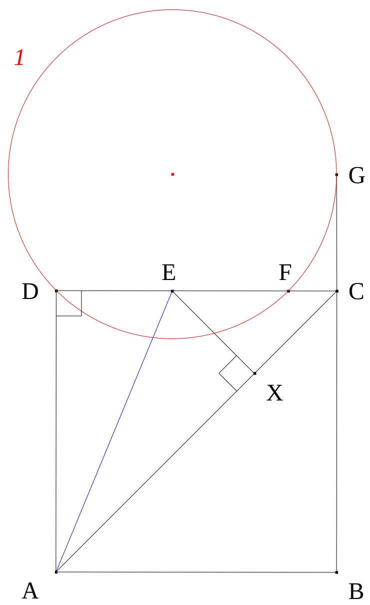
[55] Ayme J.-L., Auguste Miquel…, G.G.G. vol. **13**, p. 12 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABCD un carré,
E le pied de la A-bissectrice intérieure du triangle ACD,
F le symétrique de D par rapport à E
G le point de [BG[tel que BG = AC
et *1* le cercle passant par D, F, G.

Donné : (BG) est tangente à *1* en G. [56]

VISUALISATION



- Notons X le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de E.

- **Scolies :** **(1)** par symétrie d'axe (AE), ED = EX

  (2) le triangle XEC étant X-isocèle, EX = CX

[56] Tangent line, AoPS du 11/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=613504

(3) BG étant égal à AC, CX = CG.

(4) par transitivité de la relation =, ED = CG.

- Une chasse de rapports :

  * d'après "Le théorème de la bissectrice" appliqué au triangle ACD, EC/ED = AC/AB

  * ou encore, (EC-ED)/ED = (AC-AB)/AB

  * i.e. CF/CG = CG/CD

  * par "extrêmes et moyens", CF.CD = CG².

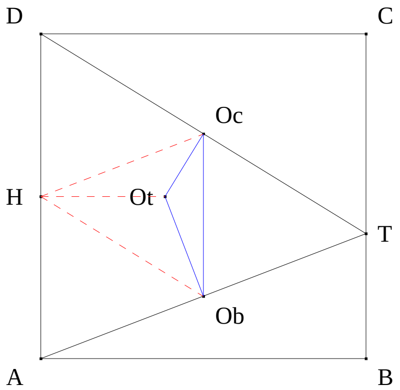
- **Conclusion :** (BG) est tangente à *1* en G.

41. Milieu de [AD]

All-Russian 2011

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
T un point de [BC],
Ob, Oc, Ot les centres des cercles circonscrits resp. aux triangles BAT, CDT, TAD,
et H l'orthocentre du triangle ObOcOt.

Donné : H est sur (AD). [57]

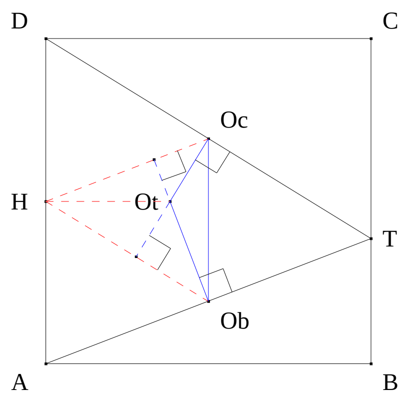
Commentaire : pour une généralisation à un parallélogramme… [58]

VISUALISATION

---

57 Orthocenter, AoPS du 23/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=615092

58 Parallelogram, AoPS du 16/05/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2272760
Orthocenter, AoPS du 14/11/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=614582



- **Scolies :** **(1)** HObOc est un triangle homothétique à TDA

  (2) Ob, Oc étant les milieux resp. de [TA], [TD], HObOc est le triangle médian de TAD.

- **Conclusion :** H est le milieu de [AD].