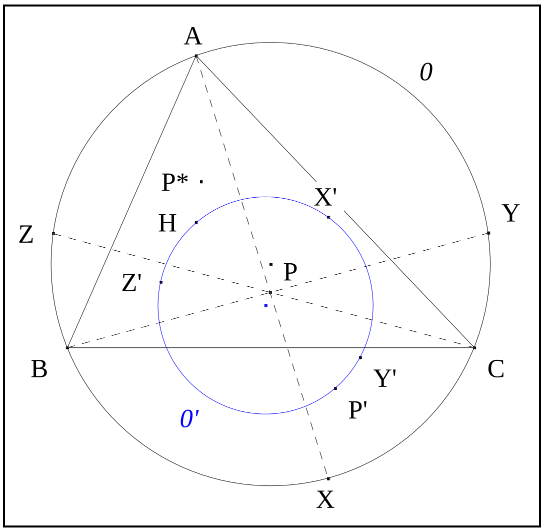
LE P-CERCLE DE HAGGE

UNE PREUVE PUREMENT SYNTHETIQUE

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons une preuve originale et synthétique du cercle de Karl Hagge datant de 1907 considéré comme un cercle de Mannheim et généralisant le cercle de Fuhrmann (1890). Une note historique, deux cas particuliers, une généralisation de Nikolaos Dergiades ainsi qu'une variante chinoise sont étudiés.
Un appendice présentant une généralisation du théorème de Reim ainsi qu'une annexe complètent cet article.
Les figures [2] sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. We present proof original and synthetic circle Karl Hagge dating from 1907, considered as a circle of Mannheim and generalizing the Fuhrmann circle (1890).
A historical note, two specific cases, a generalization of Nikolaos Dergiades as well as a Chinese variant are studied.
An appendix with a generalization of the theorem of Reim and an annex complete this article.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown briefly.

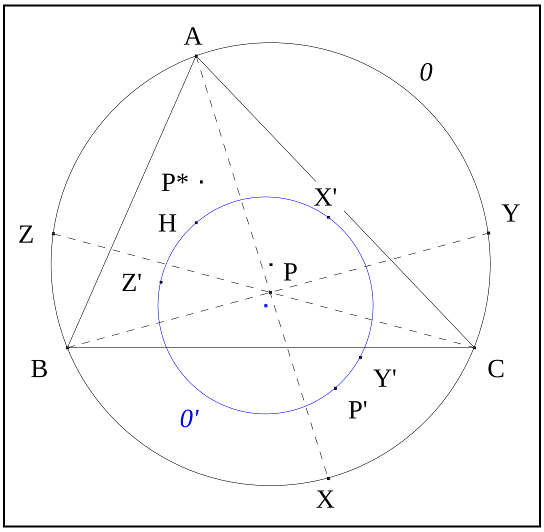
[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), remastorisé le 30/04/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
[2] Le triangle de départ ABC est acutangle sauf pour des cas de lisibilité des figures…

Sommaire

I. PRÉSENTATION

1. Les P-triangle et P-cercle de Hagge

C'est en 1907 qu'apparaît la première généralisation[3] du cercle de Fuhrmann dans un article signé par le géomètre allemand Karl Hagge de Kolsnap (Allemagne ou Danemark)) connu pour avoir été très actif durant la première moitié du vingtième siècle. Signalons que la référence à Hagge a été donnée sans preuve par Roger Arthur Johnson[4].



Finition : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point non situé sur *0*,
XYZ le triangle P-circumcévien,
X', Y', Z' les symétriques de X, Y, Z par rapport à (BC), (CA), (AB),
et *0'* le cercle circonscrit à X'Y'Z'

Définitions : X'Y'Z' est le P-triangle de Hagge de ABC ;
0' est le P-cercle de Hagge de ABC.

Commentaires : **(1)** *si* P est sur *0*
alors, le P-cercle de Hagge *0'* se dégénère en une droite passant par H
i.e. la droite de Steiner de P relativement à ABC.

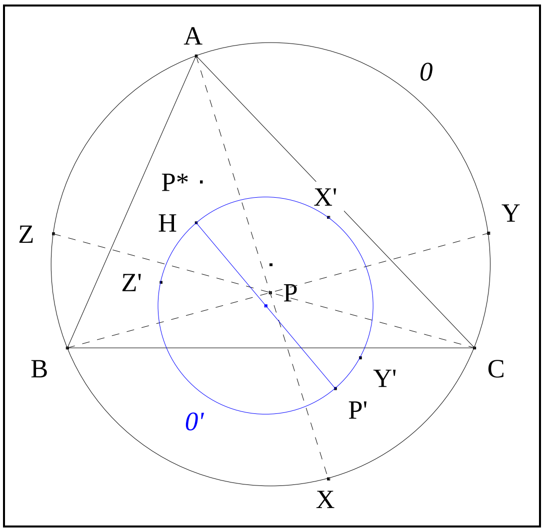
(2) Le cercle de Fuhrmann de ABC est le I-cercle de Hagge de ABC.

---

[3] Ayme J.-L., L'orthocentre du triangle de Fuhrmann, G.G.G. vol. 1 (2007) ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/ ;
Revistaoim (Espagne) 23 (2006) ; http://www.oei.es/oim/revistaoim/index.html.

[4] Johnson R. A., Modern Geometry (edition 1929), Theorem 502 p. 300.

2. Le résultat de Hagge



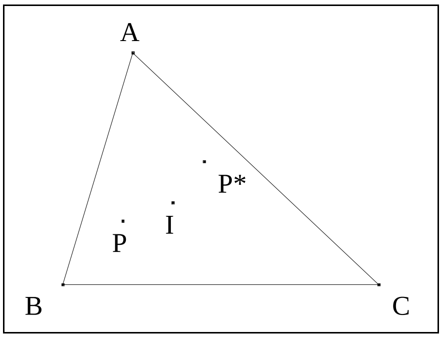
Finition :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point non situé sur *0*,
	P'	l'anticomplément de l'isogonal de P relativement à ABC,
	X'Y'Z'	le P-triangle de Hagge
et	*0'*	le P-cercle de Hagge de ABC.

Définitions : [HP'] est un diamètre de *0'*.[5]

[5] Hagge K., Der Fuhrmannsche Kreis und der Brocardsche Kreis Sonderfälle eines allgemeineren Kreises, *Zeitschrift für Math. und Nat. Unterricht* 38 (1907-1908) 257-269.

II. LE P-CERCLE DE HAGGE

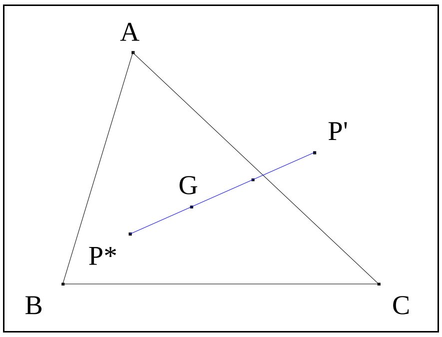
1. Isogonal de P



Finition :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	P	un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et	P'	le point d'intersection des symétriques de (AP), (BP), (CP) resp. par rapport à (AI), (BI), (CI).

Définition : P* est l'isogonal de P relativement à ABC.

2. Anticomplément de P*



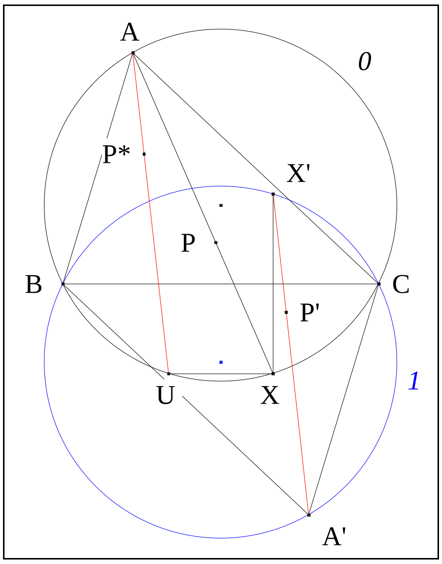
Finition :	ABC	un triangle,
	G	le point médian de ABC,
	P*	un point
et	P'	le point tel que G soit le premier tiers-point de [P*P'] à partir de P.

Définition : P' est l'anticomplément de P* relativement à ABC.

3. Anticomplément de l'isogonal de P

VISION

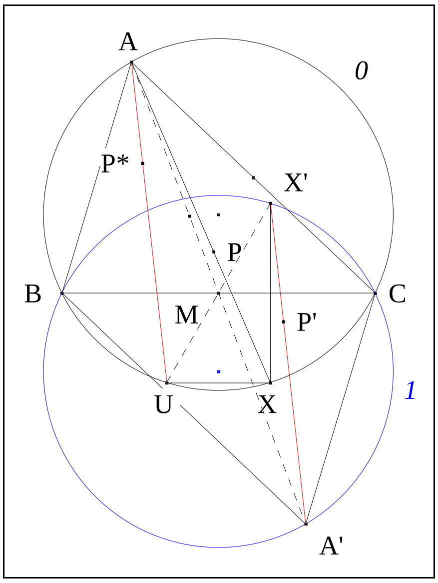
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point,
X le second point d'intersection de (AP) avec *0*,
X' le symétrique de X par rapport à (BC),
A' le point tel que le quadrilatère ABA"C soit un parallélogramme,
1 le cercle circonscrit à A'CB,
U le second point d'intersection de la perpendiculaire à (XX') passant par X avec *0*,
P* le conjugué isogonal de P
et P' le point anticomplémentaire de P*.

Donné : (A'X') passe par P'.

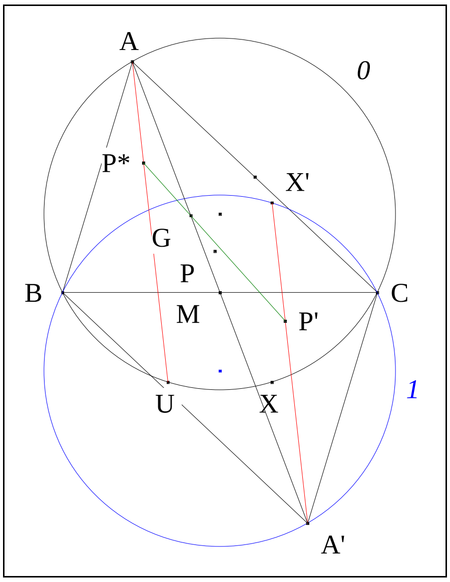
VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (BC) // (XU)
  (2) (AU) et (APX) sont deux A-isogonales de ABC.

- D'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 1), (AU) passe par P*.

- Notons M le milieu de [BC].
- ABA"C étant un parallélogramme, M est le milieu de [AA'].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle X'UX, M est le milieu de [X'U].
- Le quadrilatère AUA'X' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme; en conséquence, (AU) // (A'X').

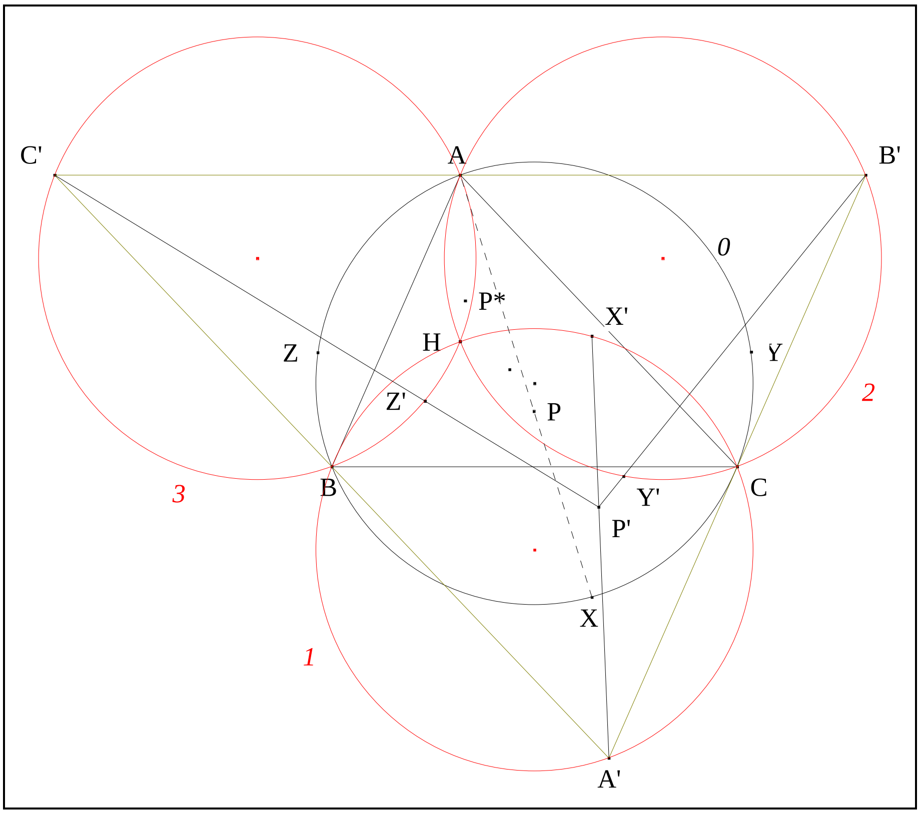


- **Scolie :** A' est le A-sommet du triangle antimédian de ABC.
- Notons G le point médian de ABC.
  et A'B'C' le triangle antimédian de ABC.
- G étant le point médian de A'B'C', A' est le point anticomplémentaire de A.
- **Conclusion :** d'après Thalès, (A'X') passe par P'.

Énoncé traditionnel : P' est l'anticomplément de l'isogonal P* de P relativement à ABC. [6]

4. La preuve

[6] Ehrmann J.-P., Cyclic quad. with H, Message *Hyacinthos* # 9493 du 08/03/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



- Notons $1, 2, 3$ les A, B, C-cercles de Carnot de ABC,
  et A', B', C' les antipôles de H relativement à $1, 2, 3$.

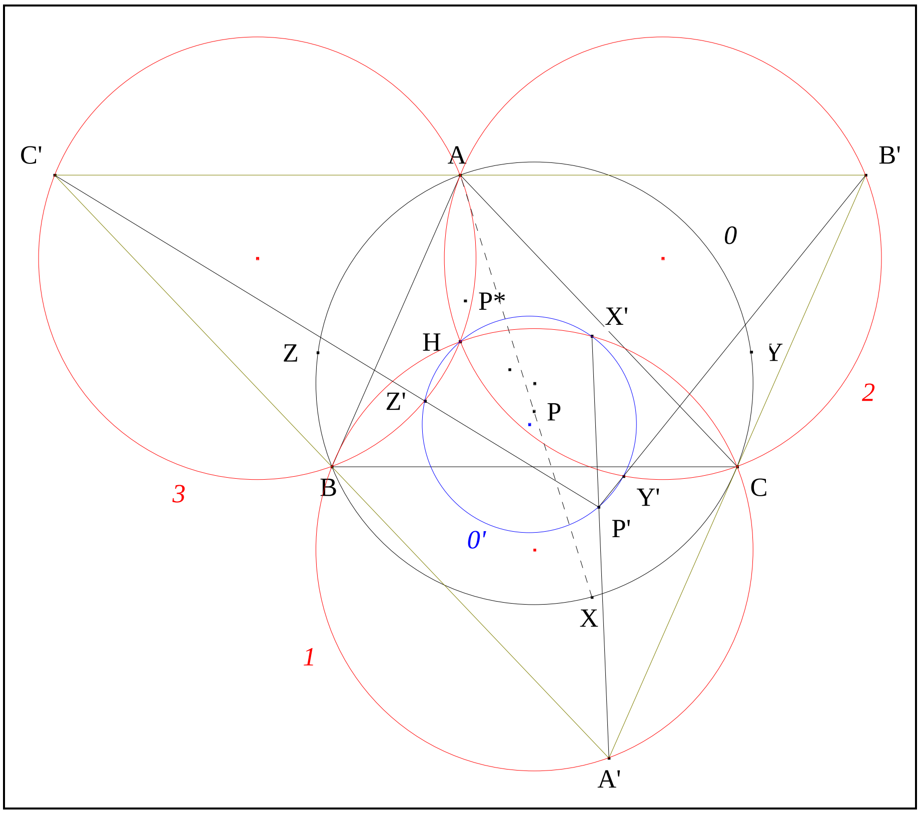
- **Scolies :** X' étant le symétrique de X par rapport à (BC), *1* passe par X'
  Y' est le symétrique de Y par rapport à (CA), *2* passe par Y'
  Z' est le symétrique de Z par rapport à (AB), *3* passe par Z'.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AB') ⊥ (AH) ;
  par hypothèse, (AH) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AB') // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AC') // (BC) i.e. (BC) // (AC') ;
  par transitivité de la relation //, (AB') // (AC') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AB') = (AC') ;
  en conséquence, (B'AC) // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (C'BA) // (CA)
  (A'CB) // (AB).

- **Conclusion partielle :** A'B'C' est le triangle antimédian de ABC.



- D'après II. 3. Anticomplément de l'isogonal de P, (A'X'), (B'Y'), (C'Z') passent par P'.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le cercle de Mannheim"[7] appliqué à A'B'C', à *1*, *2*, *3*, et à P', X', Y', Z', H et P' sont cocycliques.

- **Scolie :** H et P' sont sur *0'*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A'P'X') ⊥ (X'H).

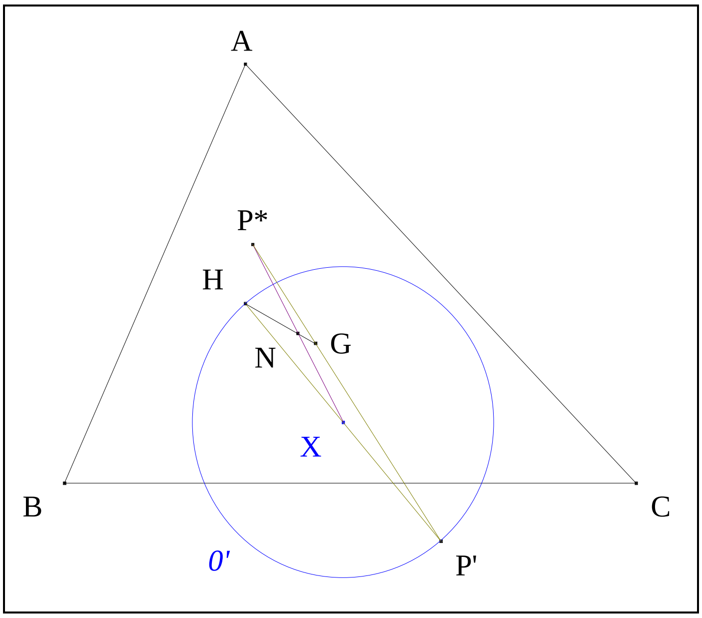
- **Conclusion :** [HP'] est un diamètre de *0'*.

5. Le résultat de Peiser

VISION

Figure :

[7] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2, p. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
X le centre de *0'*
et N le point d'intersection de (GH) et (P*X).

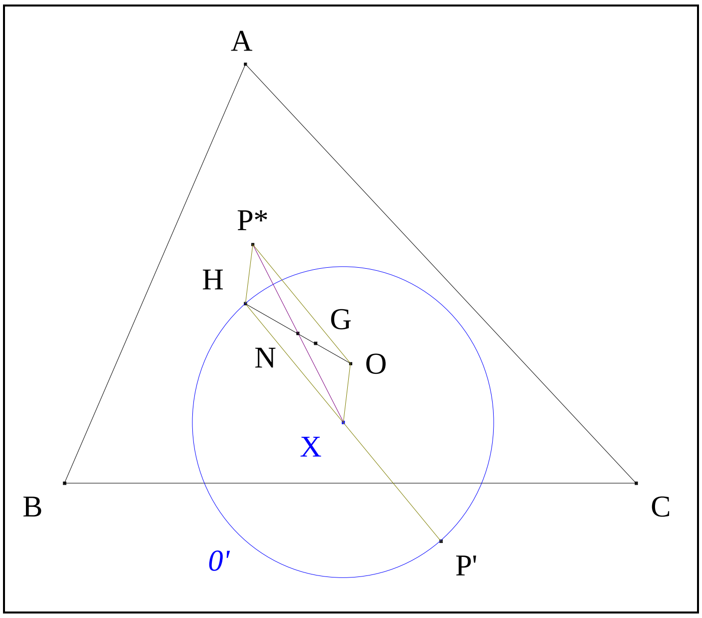
Donné : X est le symétrique de P* par rapport à N.[8]

VISUALISATION

- Nous savons que G est le premier tiers-point de [P*P'] à partir de P*.
- D'après "Tiers point et milieu" (Cf. Annexe 2) appliqué au triangle P*P'X et à la ménélienne (GHN), N est le milieu de [P*X].
- D'après "Tiers point et milieu" (Cf. Annexe 3) appliqué au triangle GHP' et à la ménélienne (NXP*), N est le premier tiers-point de [GH] à partir de G ;
  en conséquence, N est le centre du cercle d'Euler de ABC.
- **Conclusion :** X est le symétrique de P* par rapport à N.

Scolie : le rayon de *0'*

[8] Peiser A. M., The Hagge circle of a triangle, *Amer. Math. Monthly* 49 (1942) 524-527.



- Notons O le centre de *0*.

- D'après "La droite d'Euler" [9], O est le symétrique de H par rapport à N.

- Le quadrilatère P*HXO ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme.

- **Conclusion :** XH = OP*.

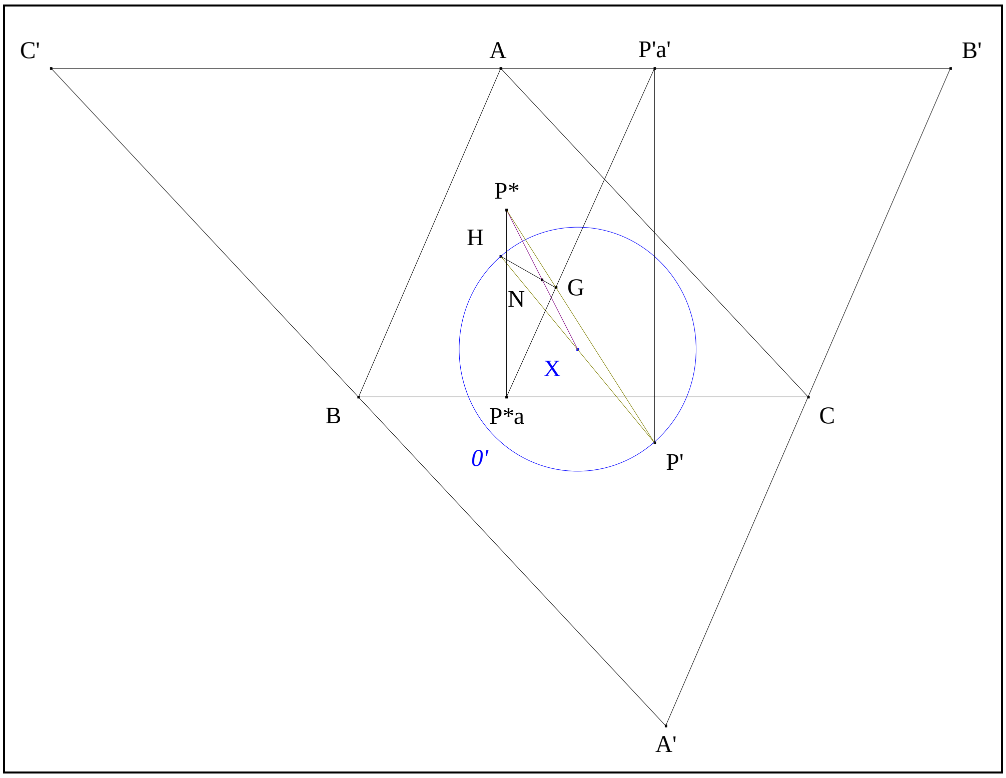
6. Un subtil résultat

VISION

Figure :

---

[9] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 1-4 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



Traits :		aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
	P*a	le pied de la perpendiculaire sur (BC) abaissée de P*,
	A'B'C'	le triangle antimédian de ABC
et	P'a'	le pied de la perpendiculaire sur (B'C') abaissée de P'

Donné : 2.P*P*a = P'P'a'.

VISUALISATION

- Nous savons que **(1)** G est le premier tiers-point de [P*P'] à partir de P*
  (2) A'B'C' est homothétique à ABC de centre G et de rapport 2
  (3) P'a' de A'B'C' correspond à P*a de ABC.

- **Conclusion :** 2.P*P*a = P'P'a'.

Commentaire : ce subtil résultat signalé par Wladimir Zajic aura une grande importance en ce qui concerne le V. 3. Trois droites concourantes ou la version longue.

III. NOTE HISTORIQUE

Dans son article, Karl Hagge a étudié les cas particuliers suivants :

*	P est en K,	le K-cercle de Hagge est le cercle orthocentroïdal
*	P est I,	le I-cercle de Hagge est le cercle de Fuhrmann
*	P est en O,	le O-cercle de Hagge est concentrique au cercle circonscrit et a pour diamètre [HL], L étant le point de de Longchamps.
*	P est en H,	le H-cercle de Hagge se réduit à H
*	P est sur le cercle circonscrit,	le P-cercle de Hagge se dégénère en la droite de Simson de pôle P.

Dans le même article, il évoque le nom de Böklen ; il s'avère qu'à cette même époque vivaient deux géomètres portant le même nom, l'un ayant un prénom commençant par O.

Le centre du P-cercle de Hagge a été considéré en 1942 par A. M. Peiser en recourrant aux complexes, en 2005 par Khoa Lu Nguyen[10] et en 2007 par Christopher J. Bradley et Geoff C. Smith[11] dont la preuve artificielle de nature dynamique met directement en jeu une rotation d'angle plat pour démontrer à la fois la "cocyclicité" des points et la position du centre du P-cercle de Hagge.

---

[10] Nguyen K. L., Reflections across the sides, Message Hyacinthos # 11451 du 07/08/2005 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

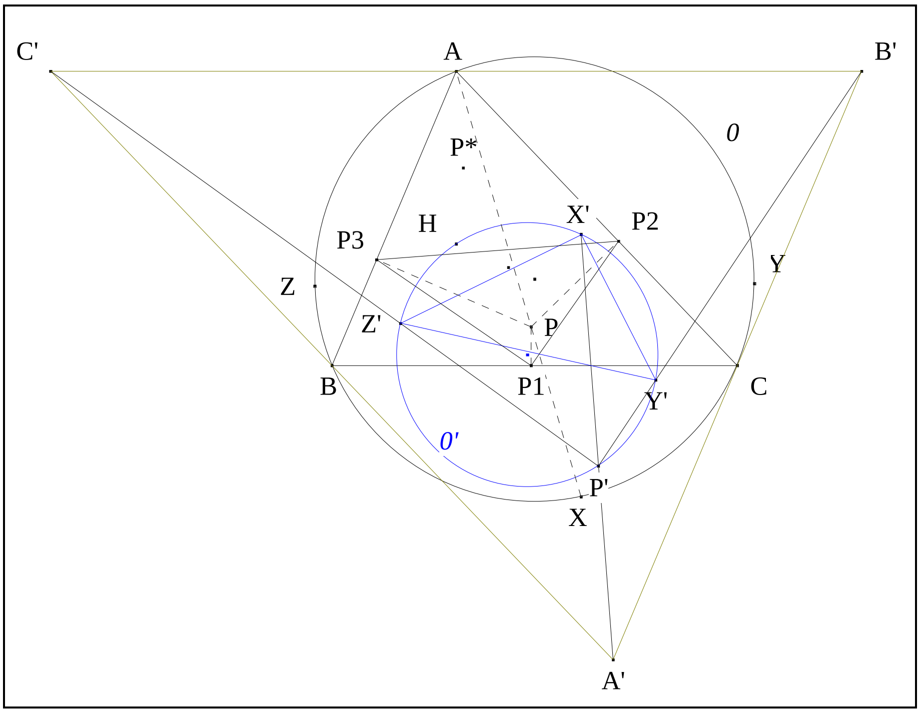
[11] Bradley C. J., Smith G. C., Hagge circles and isogonal conjugation, *The mathematical Gazette* 91 (2007) 202-207 ; On a Construction of Hagge, *Forum Geometricorum* vol. 7 (2007) 231-247.

IV. LE P-TRIANGLE DE HAGGE

1. Le triangle P-pédal de ABC

VISION

Figure

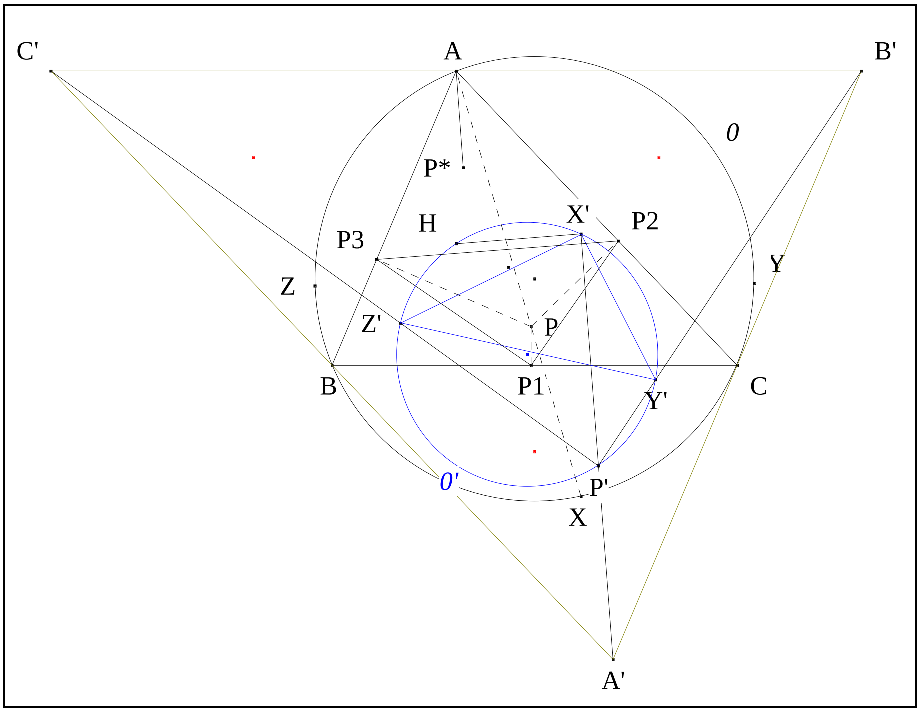


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

	P1P2P3	le triangle P-pédal de ABC
et	X'Y'Z'	le P-triangle de Hagge de ABC.

Donné : X'Y'Z' est indirectement semblables à P1P2P3.

VISUALISATION



- D'après II. 3. Anticomplément de l'isogonal de P, (AP*) // (A'X') **;**
  d'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 4), (AP*) ⊥ (P2P3) ;
  d'après II. 4. La preuve, (A'X') ⊥ (HX') ;
  la relation // étant compatible avec la relation ⊥ , (P2P3) // (HX').

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (P3P1) // (HY')
  (P1P2) // (HZ').

- Une chasse angulaire modulo ∏ :
  par parallélisme, <P2P1P3 = <Z'HY' ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <Z'HY' = <Z'X'Y' ;
  par transitivité de la relation =, <P2P1P3 = <Z'X'Y'.

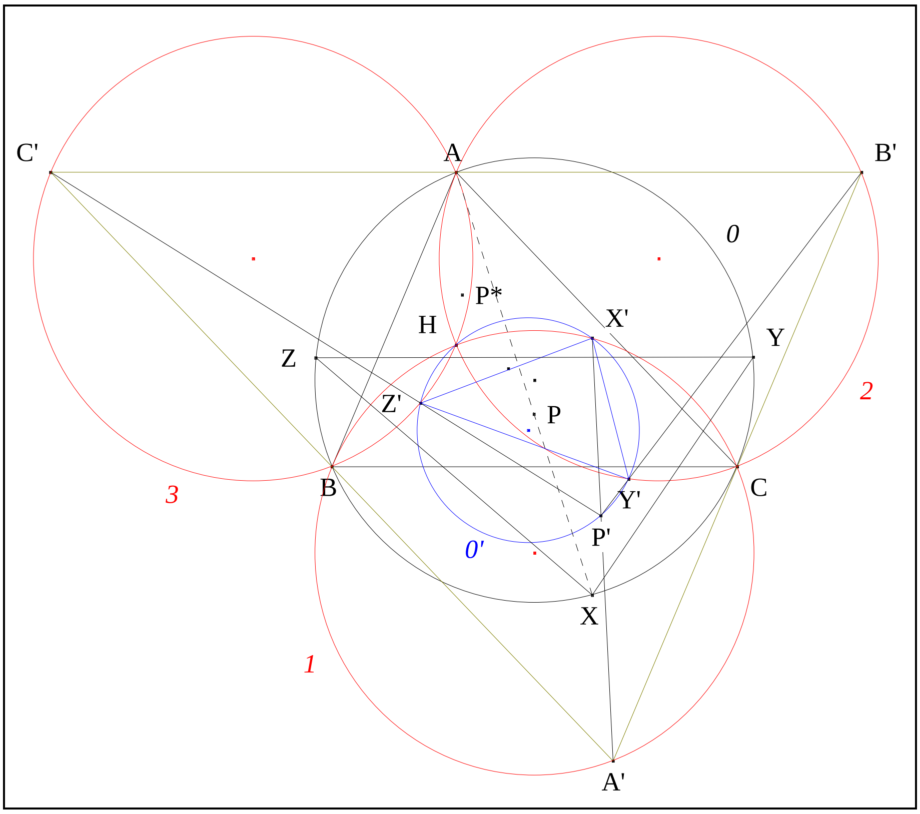
- Mutatis mutandis, nous montrerions que <P3P2P1 = <X'Y'Z'
  <P1P3P2 = <Y'Z'X'.

- **Conclusion :** X'Y'Z' est indirectement semblables à P1P2P3.

2. Le triangle P-circumcévien de ABC

VISION

Figure



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
XYZ le triangle P-circumcévien de ABC
et X'Y'Z' le P- triangle de Hagge de ABC.

Donné : X'Y'Z' est indirectement semblables à XYZ.

VISUALISATION

- Une chasse angulaire modulo ∏ à partir de <YXZ

par décomposition, <YXZ = <YXA + <AXZ.

Partons de <YXA

d'après le théorème de l'angle inscrit, <YXA = <YCA ;
par symétrie d'axe (CA), <YCA = <ACY' ;
d'après le théorème de l'angle inscrit, <ACY' = <AB'Y' ;
ou encore, <AB'Y' = <C'B'P' ;
par transitivité de la relation =, <YXA = <C'B'P'.

Partons de <AXZ

mutatis mutandis, nous montrerions que <AXZ = <P'C'B'.

Par substitution, <YXZ = <C'B'P' + <P'C'B' ;
ou encore, <YXZ = <B'P'C' ;
i.e. <B'P'C' = <Y'P'Z' ;
d'après le théorème de l'angle inscrit, <Y'P'Z' = <Z'X'Y' ;
par transitivité de la relation =, <YXZ = <Z'X'Y'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <ZYX = <X'Y'Z'

<XZY = <Y'Z'X'.

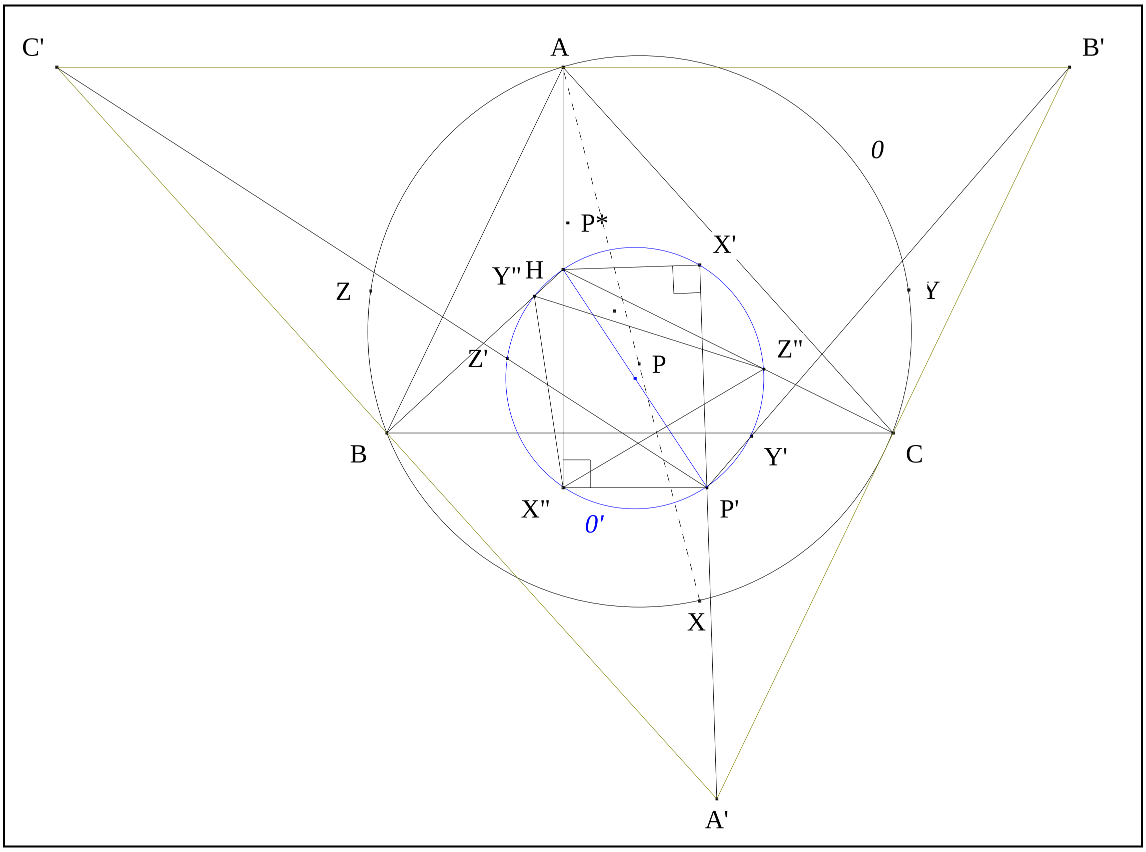
- **Conclusion :** X'Y'Z' est indirectement semblables à XYZ.

V. TROIS AUTRES POINTS SUR *0'*

1. Le P-triangle X"Y"Z"

VISION

Figure



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
et X", Y", Z" les seconds points d'intersection de (AH), (BH), (CH) avec *0'*.

Donné : le triangle X"Y"Z" est indirectement semblables à ABC. [12]

VISUALISATION

- Une chasse angulaire modulo $\prod$ à partir de <Y"X"Z"

---

[12] Grinberg D., Cyclic quad. with H, Message *Hyacinthos* # 9511 du 10/03/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

par décomposition, <Y"X"Z" = <Y"X"H + <HX"Z".

Partons de <Y"X"H
d'après le théorème de l'angle inscrit, <Y"X"H = <Y"Z"H .

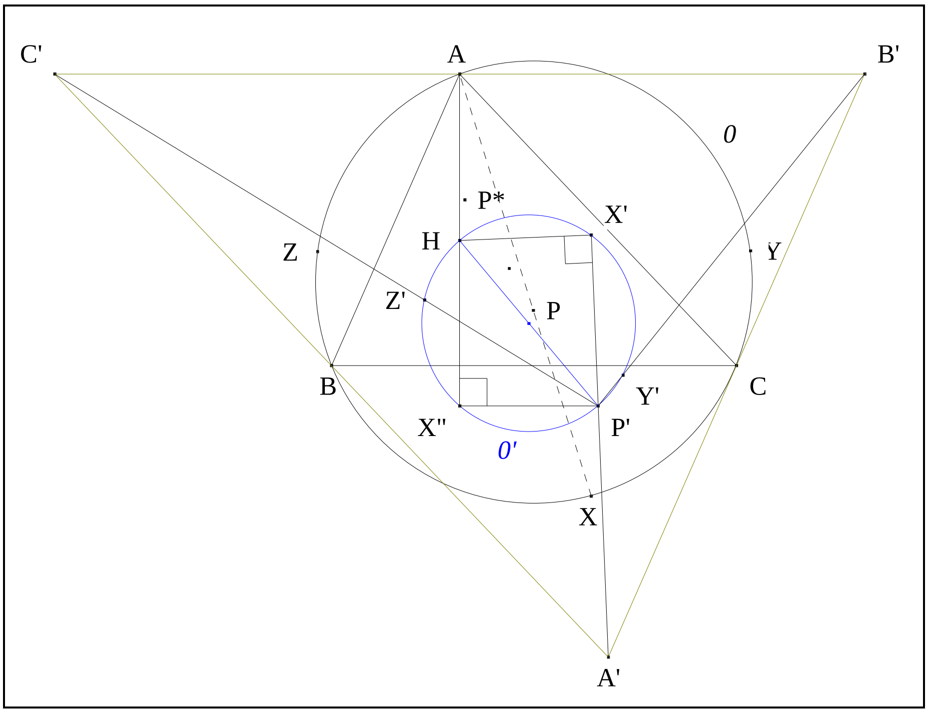
Partons de <Y"X"H
d'après le théorème de l'angle inscrit, <HX"Z" = <HY"Z".

Par substitution, <Y"X"Z" = <Y"Z"H + <HY"Z" ;
ou encore, <Y"X"Z" = <Z"HY" ;
i.e. <Y"X"Z" = <CHB ;
nous savons que <CHB = <CAB ;
par transitivité de la relation =, <Y"X"Z" = <CAB.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <Z"Y"X" = <ABC
  <X"Z"Y" = <BCA.

- **Conclusion :** le triangle X"Y"Z" est indirectement semblables à ABC.

Scolie : deux parallèles



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (X"P') ⊥ (AHX") ;
  par définition de H, (AHX") ⊥ (BC).

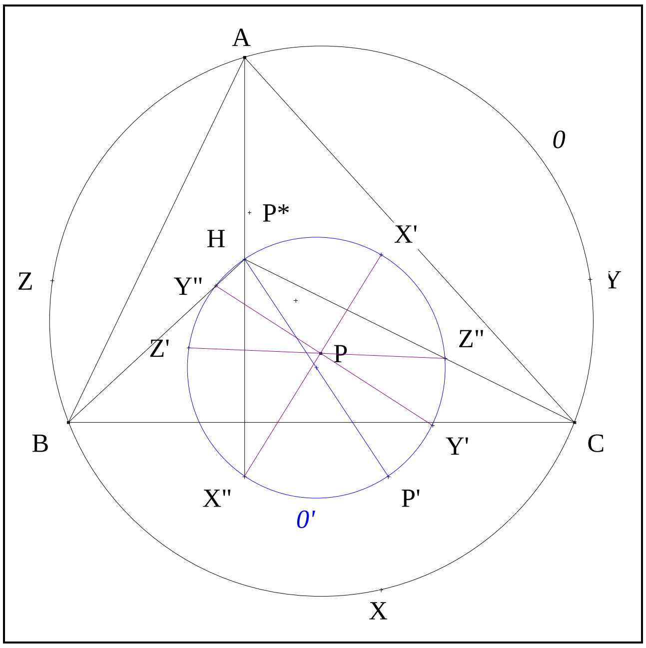
- **Conclusion :** d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (X"P') // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (Y"P') // (CA)
  (Z"P') // (AB).

2. Trois droites concourantes ou la version courte

VISION

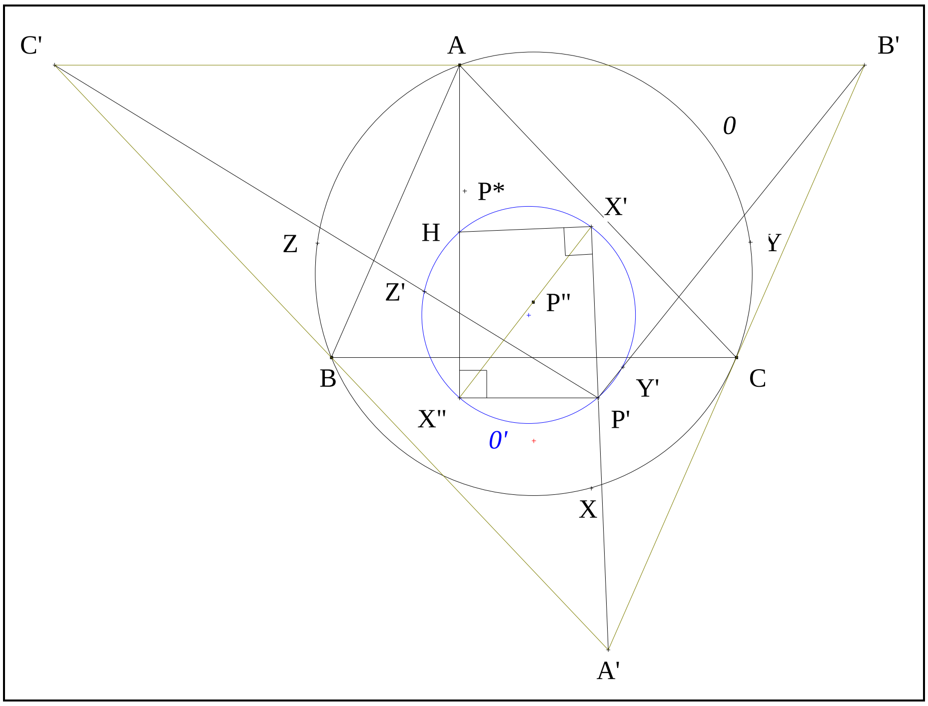
Figure



Traits : les hypothèses et notations sont le même que précédemment.

Donné : (X'X"), (Y'Y") et (Z'Z") sont concourantes.

VISUALISATION



- Relativement au triangle antimédian de ABC et aux points H et P',
  nous sommes dans la situation du "Théorème des six pied" (Cf. Annexe 5).

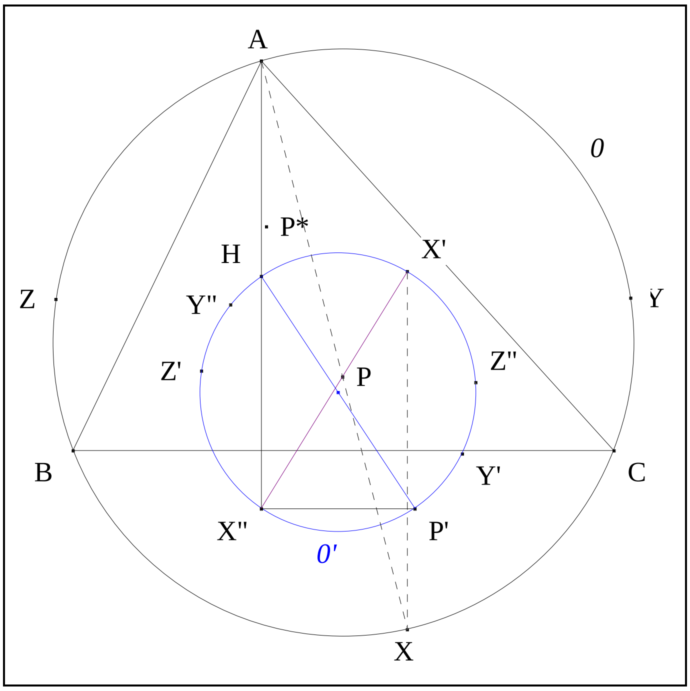
- **Conclusion :** (X'X"), (Y'Y") et (Z'Z") sont concourantes.

Commentaire : dans cette approche fulgurante, nous ne connaissons pas la nature du point de concours.

3. Trois droites concourantes ou la version longue

VISION

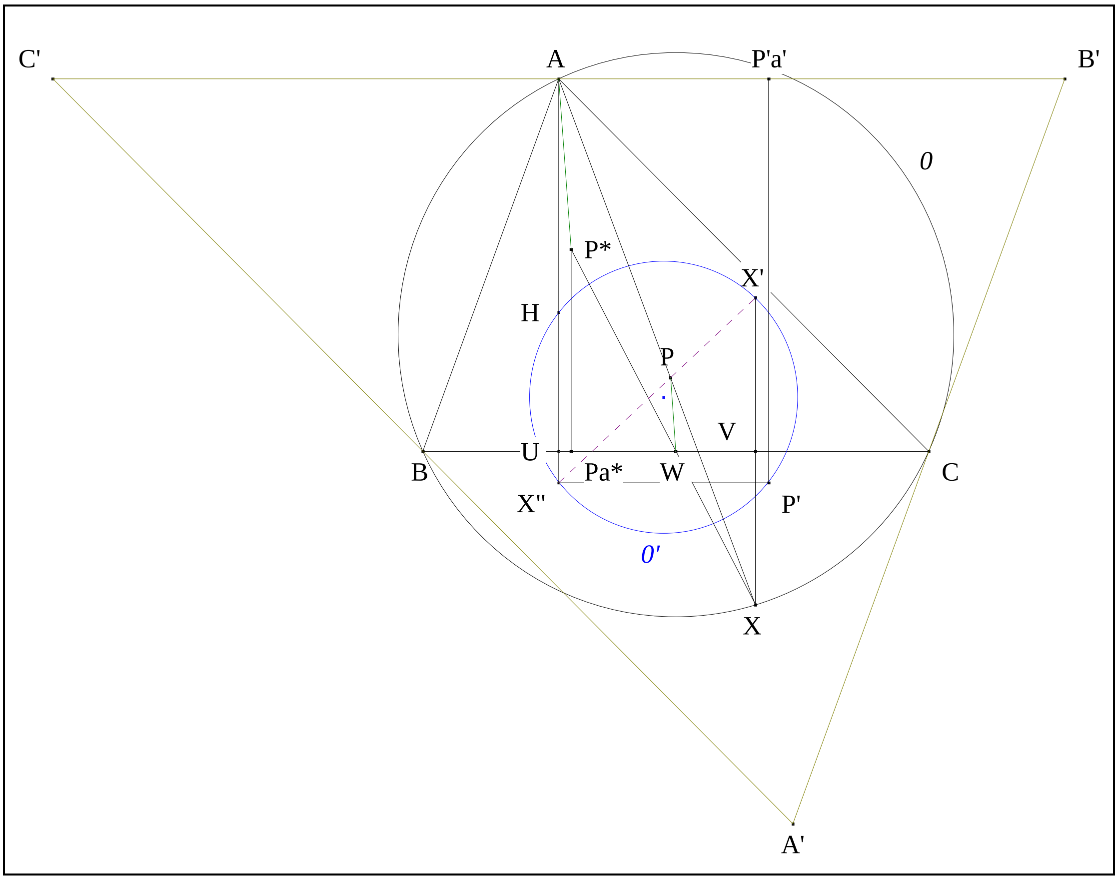
Figure



Traits : les hypothèses et notations sont le même que précédemment.

Donné : (X'X") passe par P.

VISUALISATION



- Notons W le point d'intersection de (P*X) et (BC),
  U le pied de la A-hauteur de ABC,
  V le point d'intersection de (BC) et (XX'),
  P*a le pied de la perpendiculaire sur (BC) issue de P*
  et P'a' le pied de la perpendiculaire sur (B'C') issue de P'.

- D'après "Parallèle à une isogonale" (Cf. Appendice 2), (PW) // (AP*).

- D'après Thalès, $\frac{\overline{PX}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{WX}}{\overline{WP^*}}$

- Les triangles WXV et WP*P*a étant homothétiques, $\frac{\overline{WX}}{\overline{WP^*}} = \frac{\overline{WV}}{\overline{WP^*a}}$

$$\frac{\overline{WV}}{\overline{WP^*a}} = \frac{\overline{XV}}{\overline{P^*P^*a}}.$$

- Nous pouvons écrire : $\frac{\overline{XV}}{\overline{P^*P^*a}} = \frac{2.\overline{XV}}{2.\overline{P^*P^*a}}$;

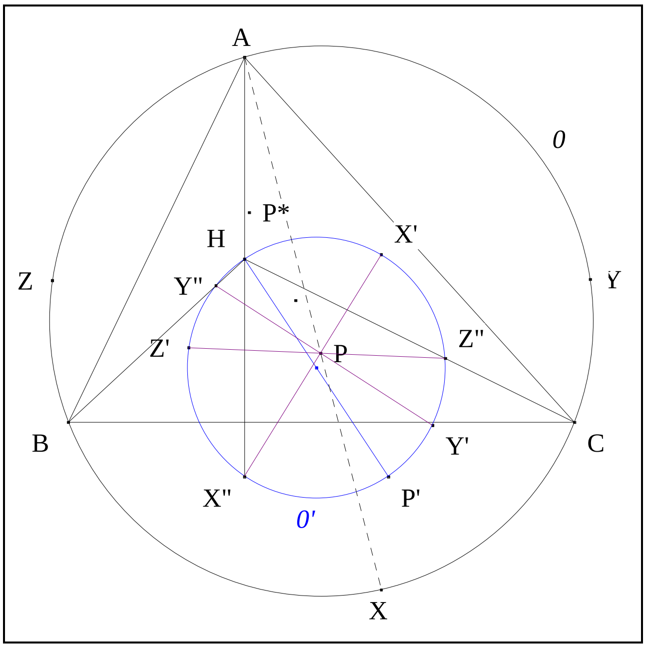
- D'après II. 6. Un subtil résultat, $\frac{2.\overline{XV}}{2.\overline{P^*P^*a}} = \frac{\overline{XX'}}{\overline{P'a'P'}}$;

  ou encore, $\frac{\overline{XX'}}{\overline{P'a'P'}} = \frac{\overline{XX'}}{\overline{AX''}}.$

- Par transitivité de la relation =, $\frac{\overline{PX}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{XX'}}{\overline{AX''}}$.

- D'après Thalès, X', P et X" sont alignés

- **Conclusion :** (X'X") passe par P.



Scolies : **(1)** Mutatis mutandis, nous montrerions que, (Y'Y") passe par P
(Z'Z") passe par P.

(2) (X'X"), (Y'Y") et (Z'Z") sont concourantes en P.

Note historique : ce résultat a été signalé par Karl Hagge.
L'approche de l'auteur a pu être menée à son terme grâce à l'aide de Vladimir Zajic plus connu sous le pseudonyme de "Yetti" qui m'a fait observé que

2.P*P*a = P'P'a'.

Rappelons que sa démarche[13] s'inspire de celle proposée en 2006 pour une autre question.

Commentaire : cette approche diffère de celle menée par l'auteur pour le cercle de Furhmann[14].

4. Direction de (X'PX")

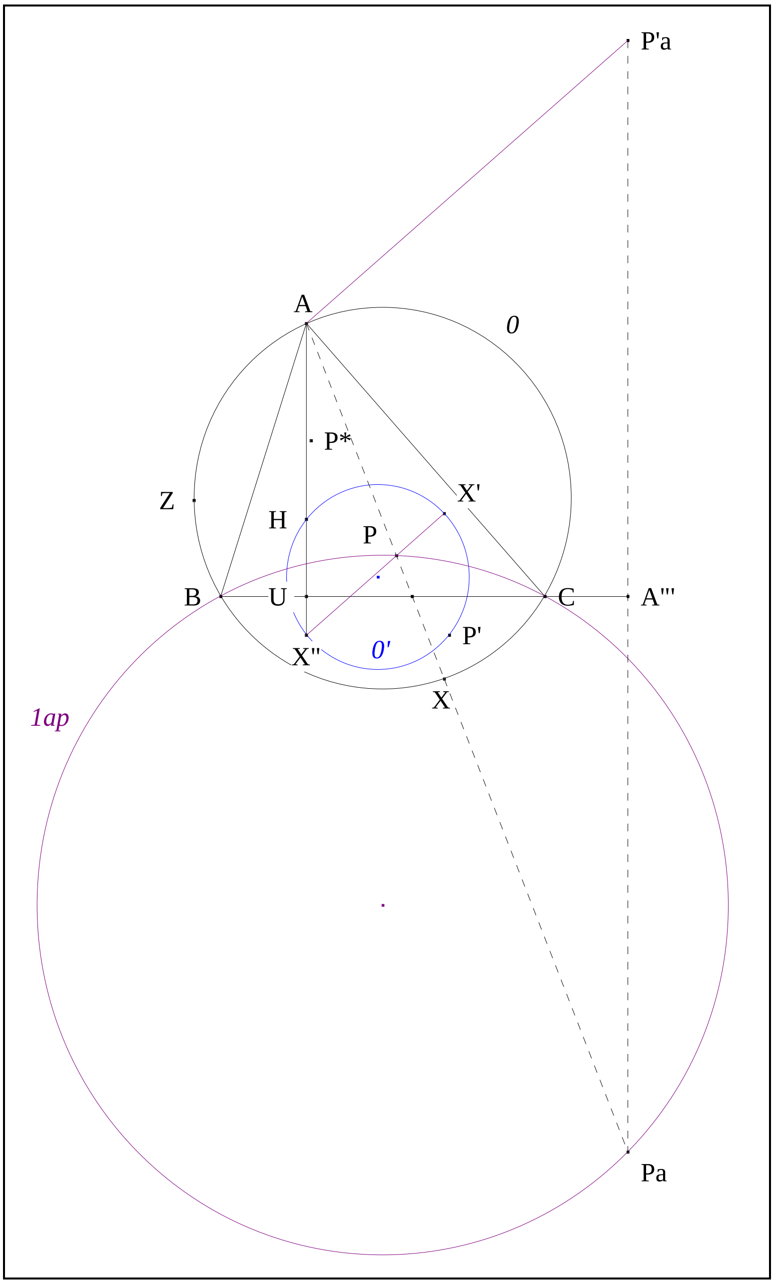
VISION

---

[13] Orthic triangle (Fuhrmann triangle of orthic triangle), *Mathlinks* du 14/07/2006 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=101687.
A difficult parallelism, *Mathlinks* du 26/06/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=285239 ; #3, 4.

[14] Ayme J.-L., Le cercle de Furhmann, G.G.G. vol. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

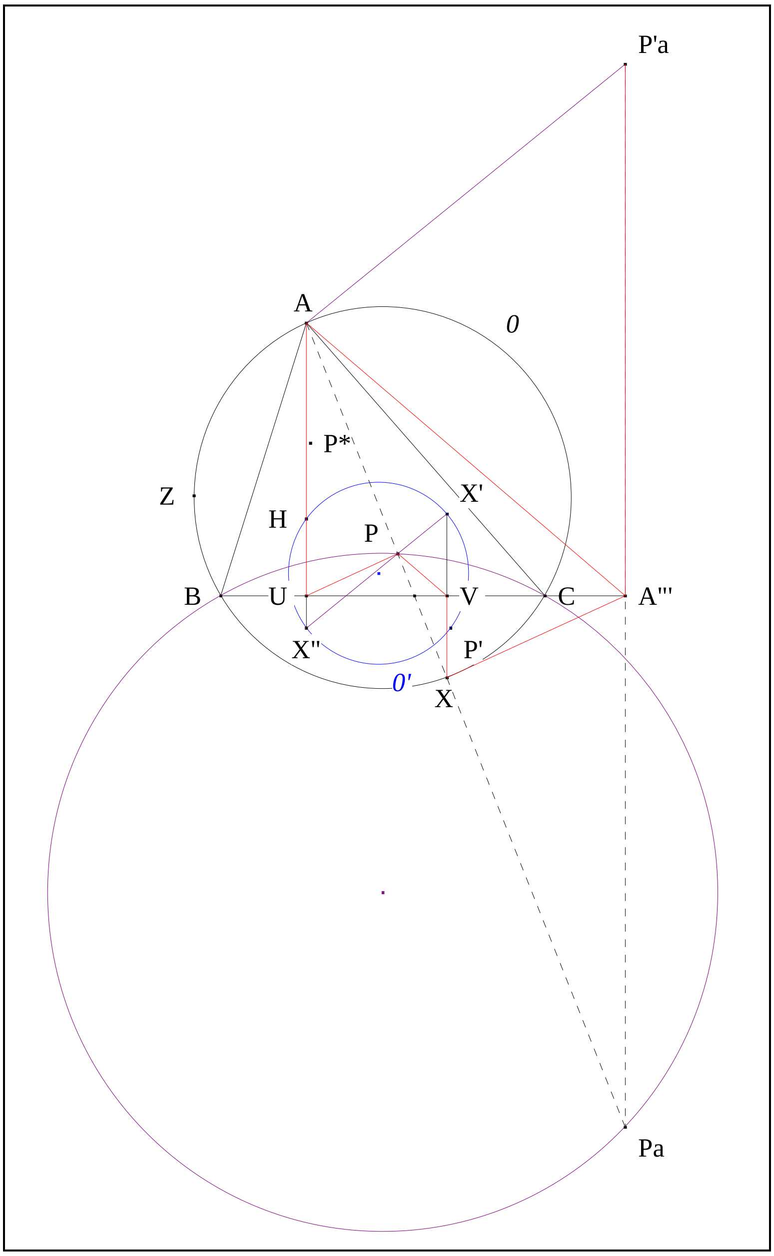
Figure



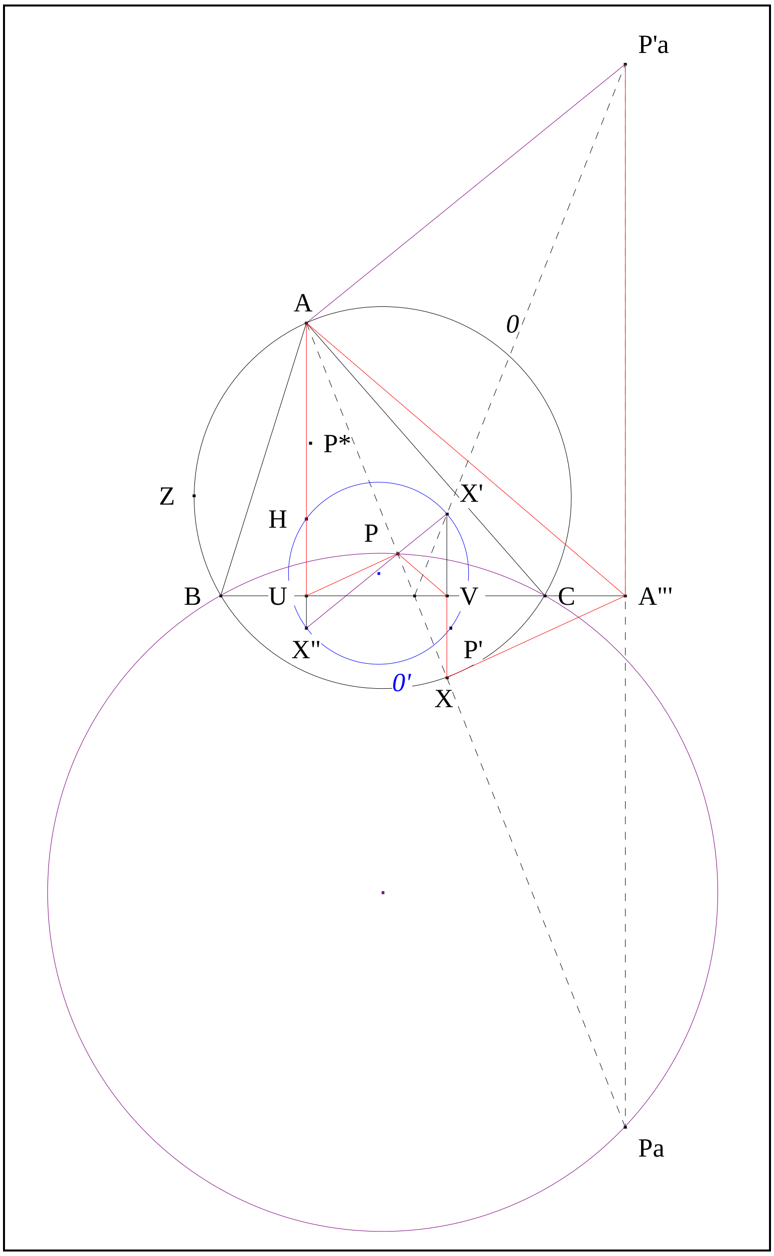
Traits :		aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
	1ap	le cercle circonscrit au triangle PBC,
	Pa	le second point d'intersection de AP avec *1ap*,
	P'a	le symétrique de Pa par rapport à (BC),
	U	le pied de la A-hauteur de ABC
et	A'''	le point d'intersection de (BC) et (PaP'a).

Donné : (X'PX'') est parallèle à (AP'a).

VISUALISATION



- D'après "Le théorème généralisé de Reim" (Cf. Appendice 1), (PU) // (A'''X)
(PV) // (AA''').



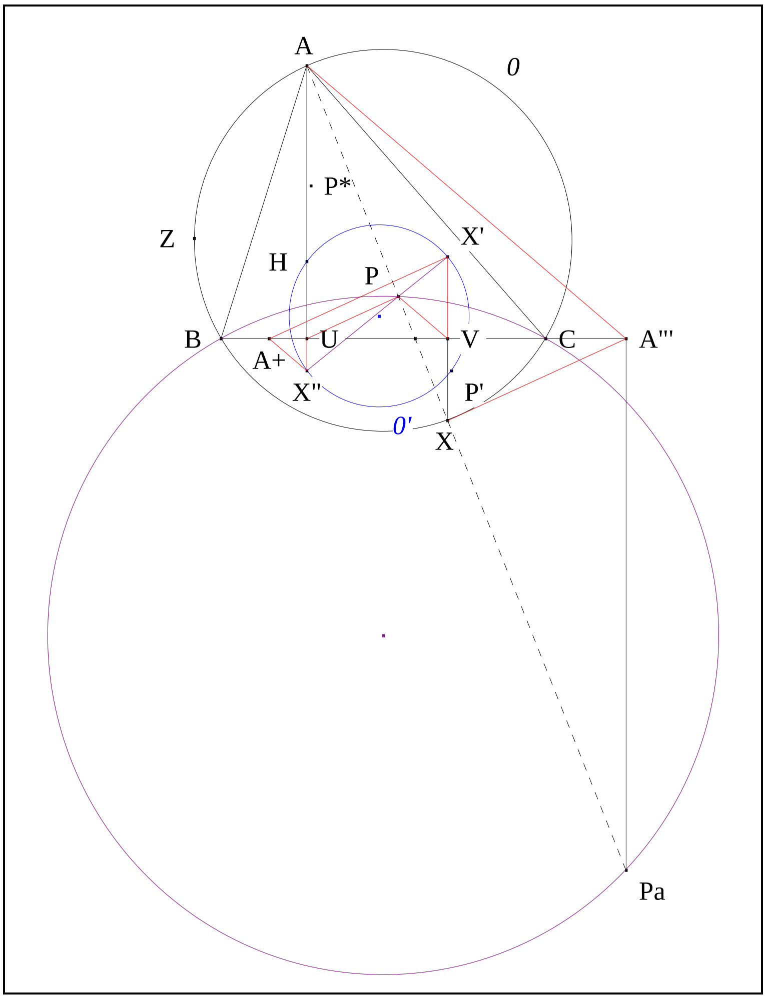
- D'après "Le théorème faible de Desargues" (Cf. Annexe 6) appliqué aux triangles perspectifs PX'V et AA'''P'a, (PX') // (AP'a).

- **Conclusion :** (X'PX") est parallèle à (AP'a).

Scolies : **(1)** (PX') a la même direction que (AP'a).

(2) Une parallèle à (PV) [15]

[15] A difficult parallelism, *Mathlinks* du 26/06/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=285239 ; #3, 4.



- Notons A+ le symétrique de A''' par rapport à V.

- Nous savons que (PU) // (A'''X).

- Le quadrilatère A'''X'A+X ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (A'''X) // (X'A+) ;
  par transitivité de la relation =, (PU) // (X'A+).

- **Conclusion :** d'après "Le petit théorème de Pappus" (Cf. Annexe 7)
  appliqué à l'hexagone VX'A+X"UPV inscrit dans les droites (BC) et (X'X"), (A+X") // (PV).

VI. TROIS CAS PARTICULIERS

A.

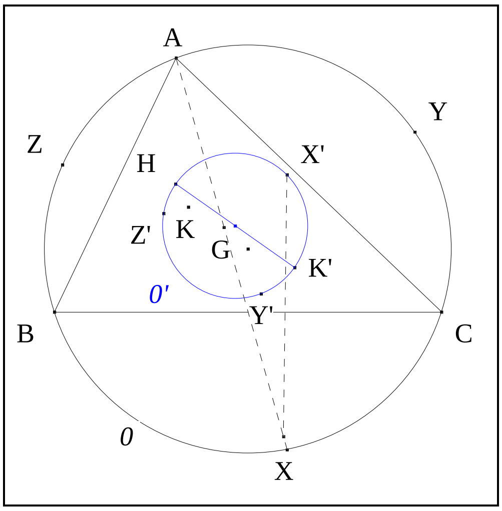
AVEC LE POINT MÉDIAN

Commentaire : l'auteur a voulu intéressé le lecteur à deux situations particulières et à une approche légèrement différente du cas général comme cela a été le cas pour le cercle de Furhmann.[16]

1. G-cercle de Hagge

VISION

Figure :



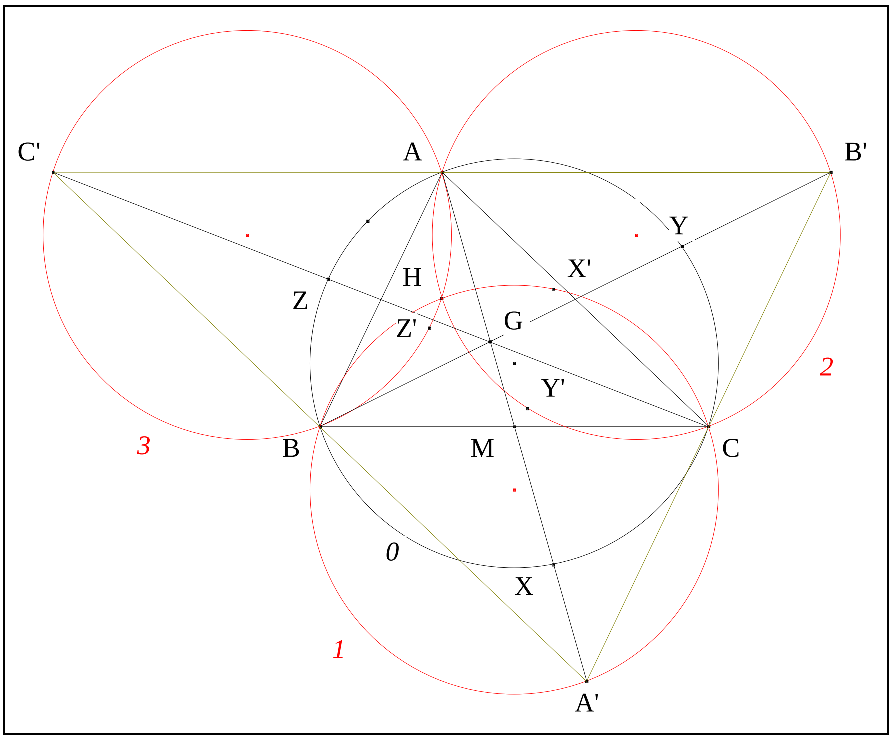
Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	G	le point médian de ABC
	0	le cercle circonscrit de ABC
	XYZ	le triangle circummédian de ABC,
	X', Y', Z'	les symétriques de X, Y, Z par rapport à (BC), (CA), (AB),
	0'	le cercle circonscrit au triangle X'Y'Z',
	K	le point de Lemoine de ABC
et	K'	le point anticomplémentaire de K relativement à ABC.

Donné : [HK'] est un diamètre de *0'*. [17]

VISUALISATION

[16] Ayme J.-L., Le cercle de Furhmann, G.G.G. vol. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

[17] Pohoata C., On the G-Hagge circle, *Mathlinks* du 26/07/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=2009327131&t=217016.



- Notons *1*, *2*, *3* les A, B, C-cercles de Carnot de ABC,
  A', B', C' les antipôles de H relativement à *1*, *2*, *3*
  et M le milieu de [BC].

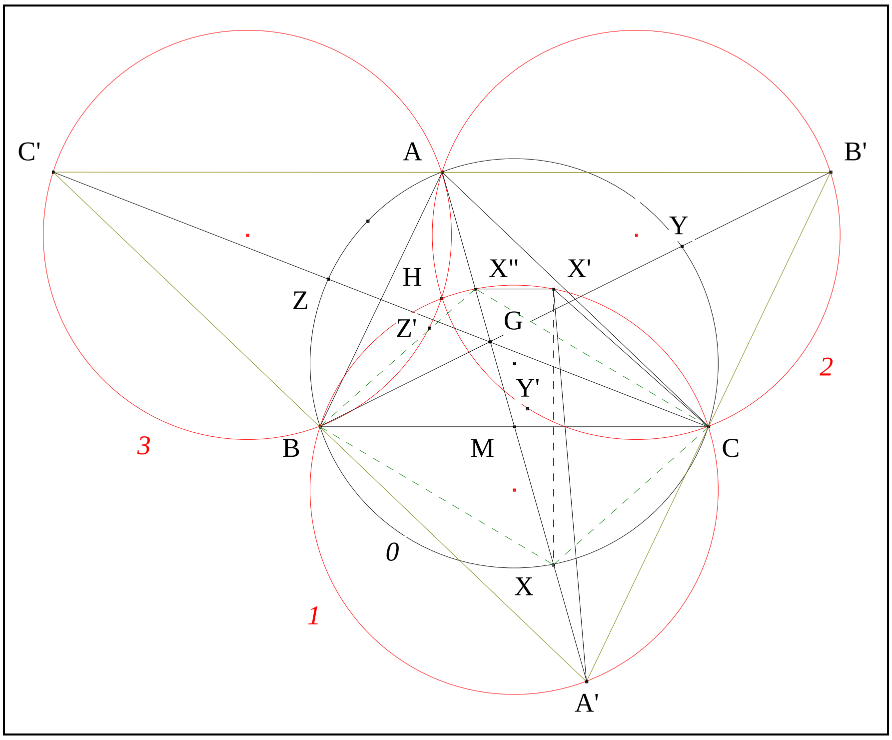
- **Scolie :** *1* passe par H et X'
  2 passe par H et Y'
  3 passe par H et Z'.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AB') ⊥ (AH) ;
  par hypothèse, (AH) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AB') // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AC') // (BC) i.e. (BC) // (AC') ;
  par transitivité de la relation //, (AB') // (AC') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AB') = (AC') ;
  en conséquence, (B'AC) // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (C'BA) // (CA)
  (A'CB) // (AB).

- **Conclusion partielle :** A'B'C' est le triangle antimédian de ABC.



- Notons X" le second point d'intersection de (AA') avec *1*.

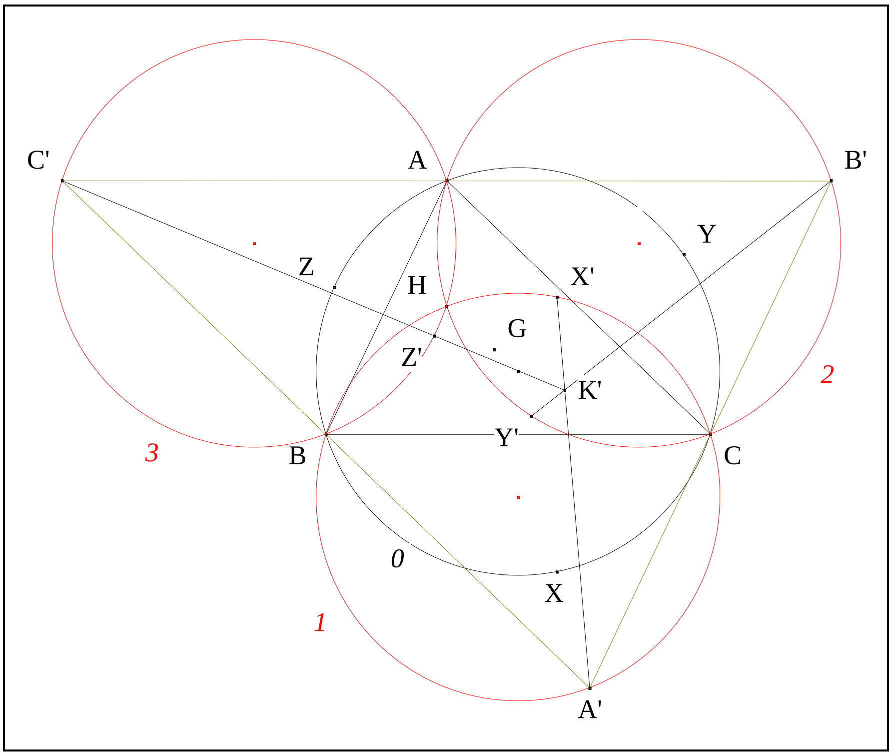
- **Scolie :** G est le point médian de A'B'C'.

- D'après "Le trapèze complet" appliqué au trapèze BCB'C', (A'GXA) passe par M.

- Le quadrilatère BXCX" ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, BX" = CX ;
  par symétrie, CX = CX' ;
  par transitivité de la relation =, BX" = CX' .

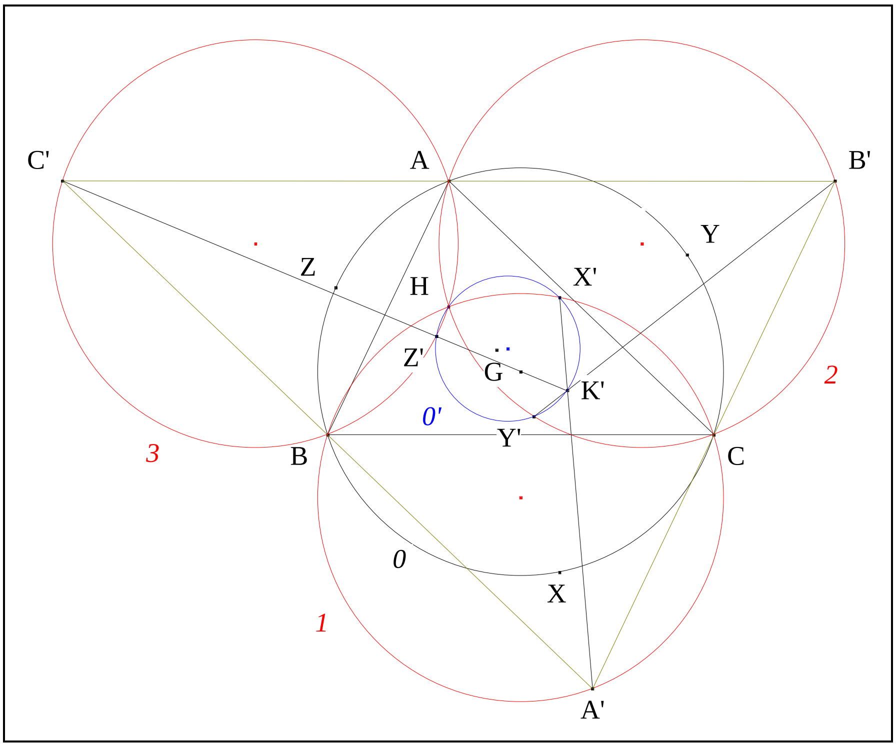
- Le quadrilatère cyclique BCX'X" ayant deux côtés opposés égaux, est un trapèze;
  en conséquence, (X'X") // (BC).

- **Conclusion partielle :** G étant le point médian de A'B'C'. (A'X') est la A'-symédiane de A'B'C'.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'Y') est la B'-symédiane de A'B'C'
  (C'Z') est la C'-symédiane de A'B'C'.

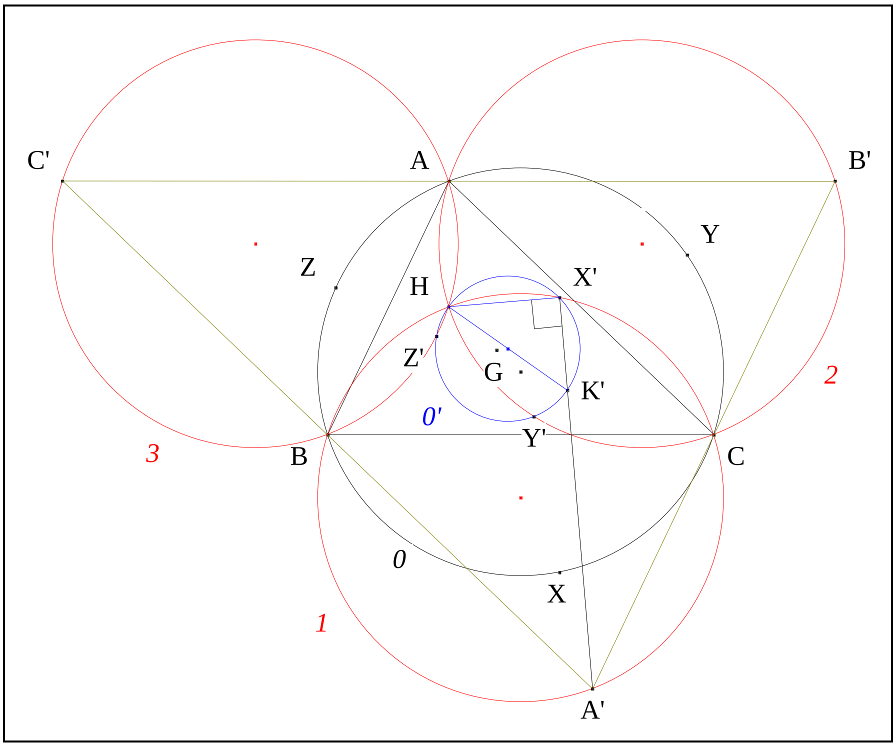
- **Conclusion partielle :** d'après "Le point de Lemoine", (A'X'), (B'Y'), (C'Z') concourent en K'.



- **Conclusion partielle :** d'après "Le cercle de Mannheim"[18] appliqué à A'B'C', à *1*, *2*, *3*, et à K',
  X', Y', Z', H et K' sont cocycliques.

[18] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2, p. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

- Notons *0'* ce cercle.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A'K'X') ⊥ (X'H).

- **Conclusion :** [HK'] est un diamètre de *0'*.

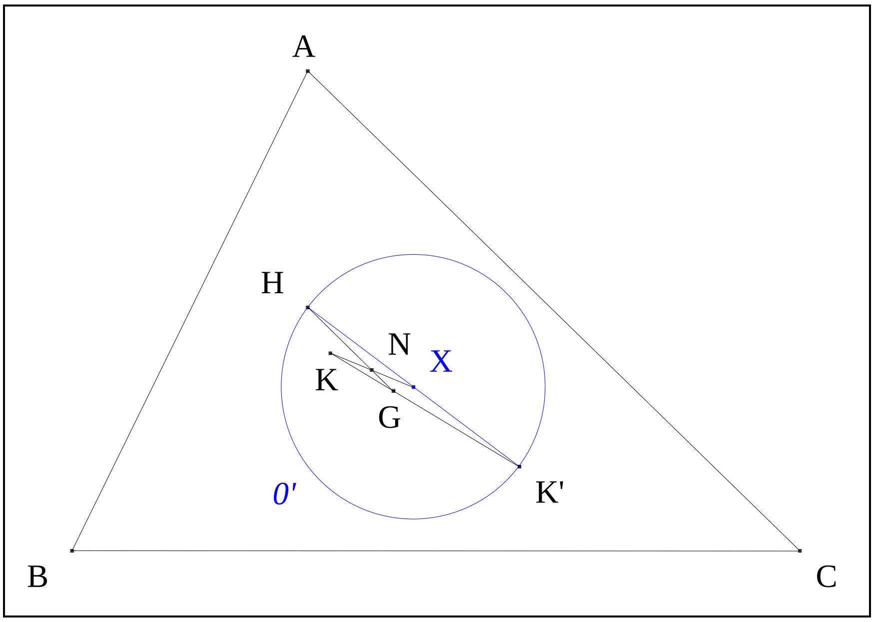
Scolies : **(1)** K est l'isogonal de G relativement à ABC et
K' est l'anticomplément de l'isogonal de G relativement à ABC.

(2) K, K' sont resp. répertoriés sous X_6, X_{69} chez ETC [19].

(3) Position du centre de *0'*

---

[19] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.



- Notons X le centre de *0'*
  et N le point d'intersection de (GH) et (KX).

- Nous savons que G est le premier tiers-point de [KK'] à partir de K.

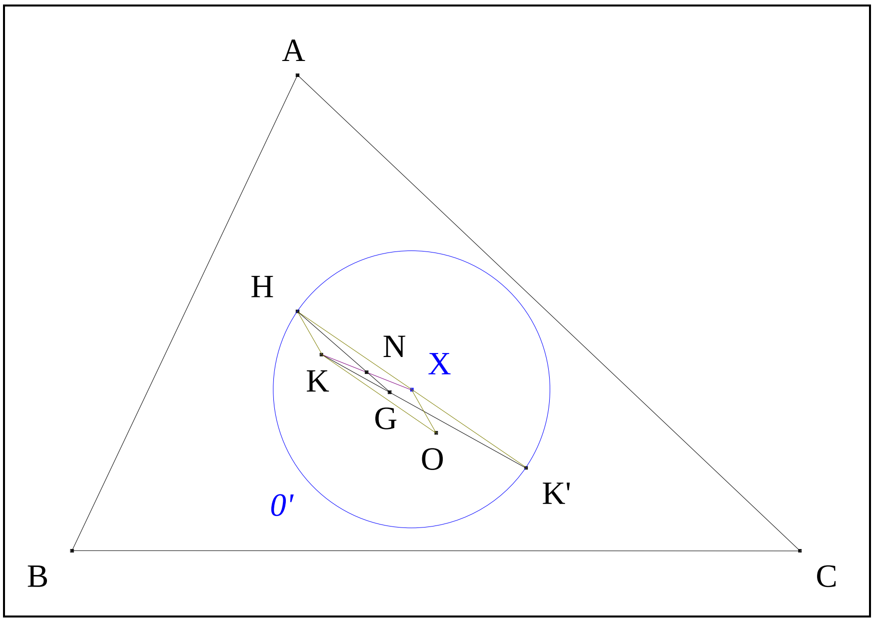
- D'après "Tiers point et milieu" (Cf. Annexe 2) appliqué au triangle KK'X et à la ménélienne (GNH),
  N est le milieu de [KX].

- D'après "Tiers point et milieu" (Cf. Annexe 3) appliqué au triangle GHK' et à la ménélienne (NXK),
  N est le premier tiers-point de [GH] à partir de G ;
  en conséquence, N est le centre du cercle d'Euler de ABC.

- **Conclusion :** X est le symétrique de K par rapport à N.

(4) X est répertorié sous X_{1352} chez ETC.

(5) Le rayon de *0'*



- Notons O le centre de *0*.

- D'après "La droite d'Euler" [20], O est le symétrique de H par rapport à N.

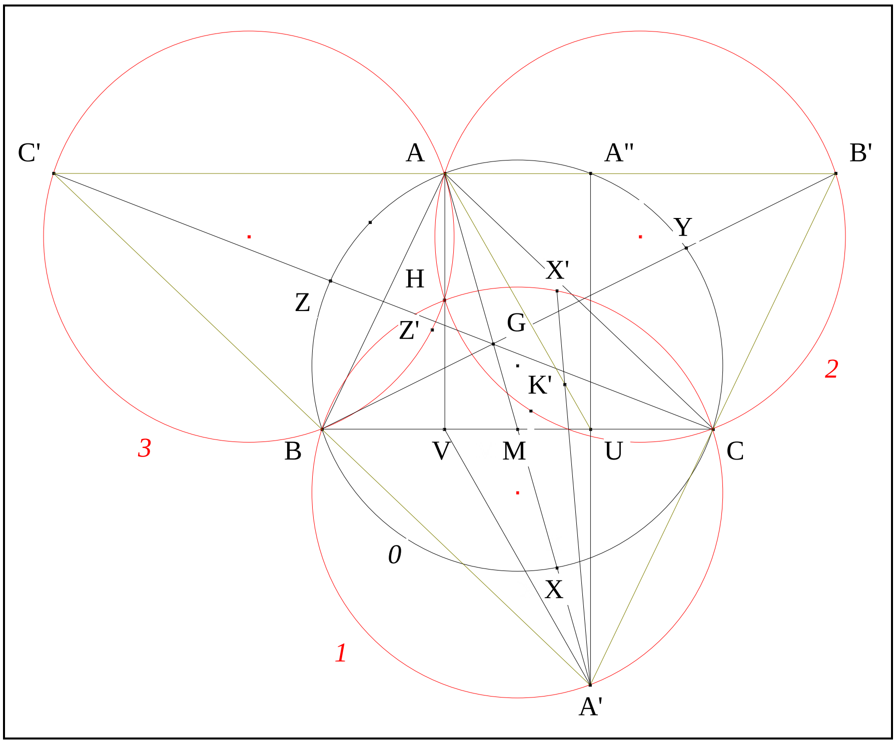
- Le quadrilatère KHXO ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme.

- **Conclusion :** XH = OK.

(6) La droite diamétrale (HK') est parallèle à l'axe de Brocard (OK) de ABC.

(7) K' est le point de Lemoine de A'B'C'.

(8) K' est l'isotomique de H relativement à ABC[21]



- Notons A" le pied de la A'-hauteur de A'B'C',
  U le milieu de [AA"] ; U est sur (BC) ;
  V le point d'intersection de (AH) et (BC),
  et M le milieu de [BC].

- D'après Schwatt "Le milieu d'une hauteur" (Cf. Annexe 8) appliqué à A'B'C', A, K' et U sont alignés.

- Le quadrilatère ABA'C étant un parallèlogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu M.

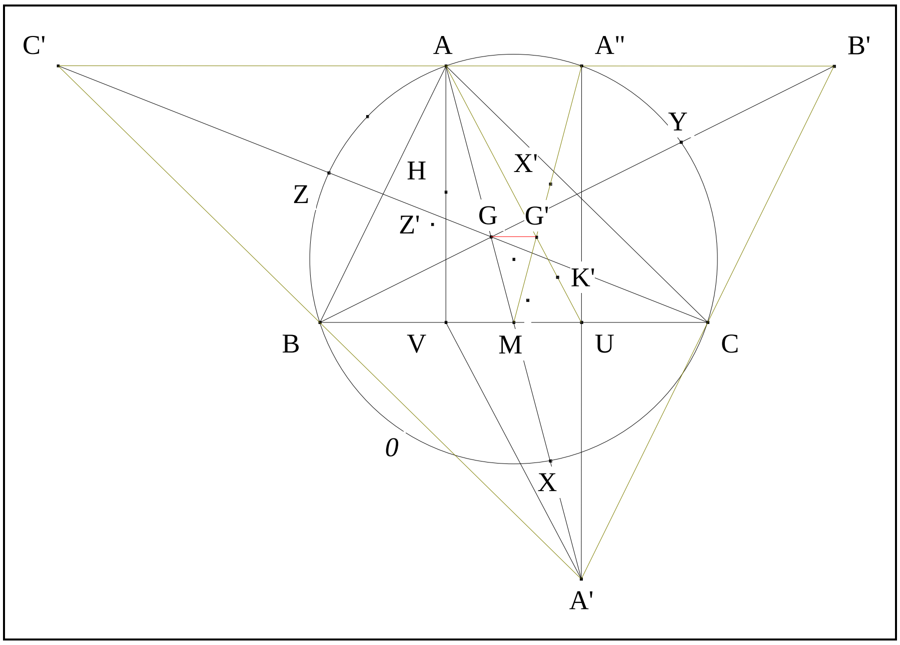
- Le quadrilatère AVA'U ayant deux côtés opposés [AV] et [A'U], parallèles et égaux, est un parallélogramme ; en conséquence, ses diagonales se coupent en leur milieu M.

- Par définition, U et V sont isotomiques relativement à [BC].

- **Conclusion :** K' est l'isotomique de H relativement à ABC.

(8) Une parallèle à (BC) passant par G

[20] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 1-4 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
[21] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires*, p. 188 ; solution donnée par Prince, *J.M.E.* 94 p. 115.

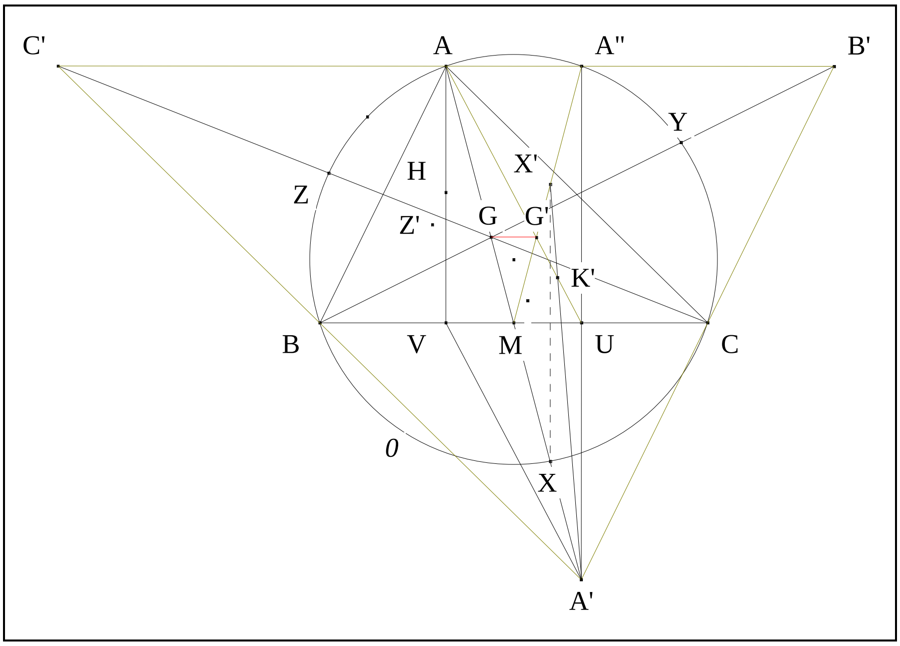


- Notons G' le point d'intersection de (AU) et (A"M).

- U et M étant les milieux resp. de [A'A"], [AA'], G est le point médian du triangle AA'A".

- **Conclusion :** G étant le point médian de ABC,
  d'après Thalès, (GG') est parallèle à (BC).

(9) Un point remarquable sur (A"M)



- **Conclusion :** par symétrie d'axe (BC), X' est sur (A"M).

Note historique : J. G. Boubals a été sur la piste du G-cercle de Hagge en proposant le problème suivant[22] :

[22] Boubals J. G., *Journal de Mathématiques Élémentaires* p. 197.

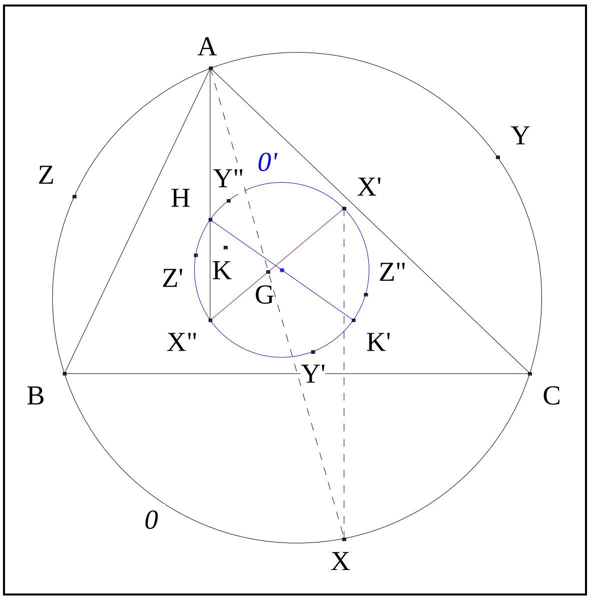
"*les droites, qui joignent les sommets d'un triangle ABC aux points symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux points milieux des côtés, se coupent en un même point qui est le point de concours des symédianes du triangle antimédian de ABC*".

Une solution a été donnée par Adolphe Mineur[23] qui signait Ad. M. ou encore sous le pseudonyme de *Le Prince* F..

2. Exercice : trois points alignés

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

et X", Y", Z" les seconds points d'intersection de (AH), (BH), (CH) avec *0'*.

Donné : (X'X") passe par G. [24]

Note historique : une preuve non simple a été donnée par Vladimir Zajic. [25]

Contexte : la Géométrie de Brocard s'impose avec le triangle A'B'C'.
K' étant point de Lemoine de A'B'C', H le centre du cercle circonscrit de A'B'C', le cercle *0'* de diamètre [HK'] n'est d'autre que le cercle de Brocard de A'B'C'.
Par construction, X"Y"Z" est le premier triangle de Brocard de A'B'C' et X'Y'Z' le second triangle de Brocard de A'B'C'.
Un résultat permet de dire que X"Y"Z" et A'B'C' sont comédians i.e. partagent le même point médian G.

---

23 Prince, *Journal de Mathématiques Élémentaires* 87 p. 115.

24 Ayme J.-L., The G-Hagge' s circle, *Mathlinks* du 21/07/2008. http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1511789919&t=216118.

25 Ayme J.-L., A nice parallelism, Message *Hyacinthos* # 16600 du 25/07/2008; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.
Mathlinks du 25/07/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=216893.

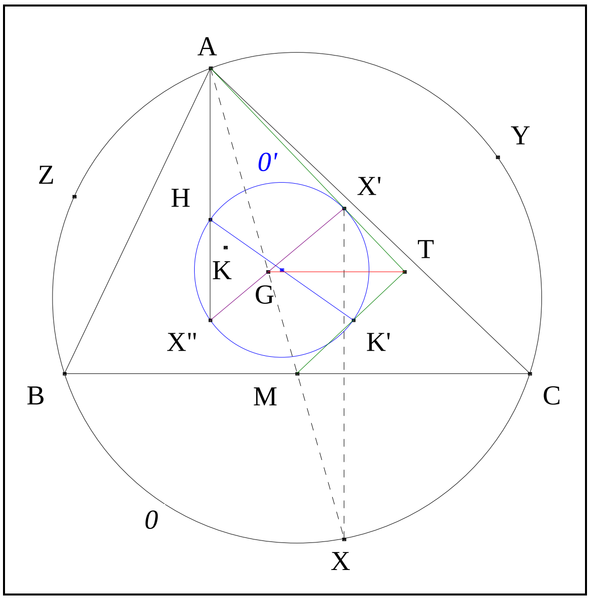
Une analyse angulaire permet de se mettre sur la voie du concept d'isopôle… et permet d'élaborer une preuve élégante de l'alignement X' – G - X"…

Commentaire : l'auteur laisse au lecteur le soin d'imaginer une autre approche que celle présentée dans la situation générale.

3. Une parallèle à un côté passant par G

VISION

Figure :

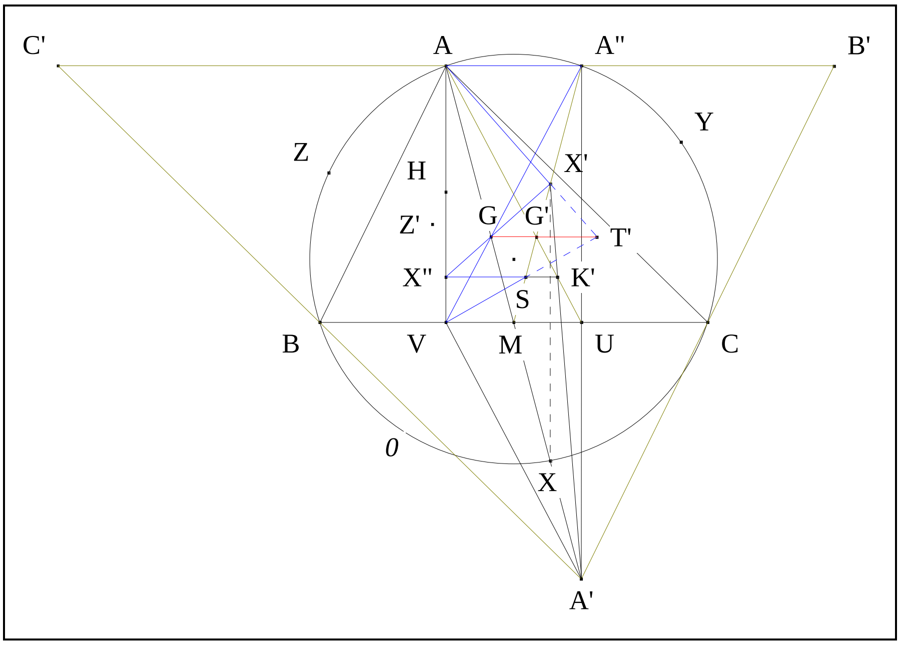


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
M le pied de la A-médiane de ABC
et T le point d'intersection de (AgK') et (AX').

Donné : (GT) est parallèle à (BC). [26]

VISUALISATION

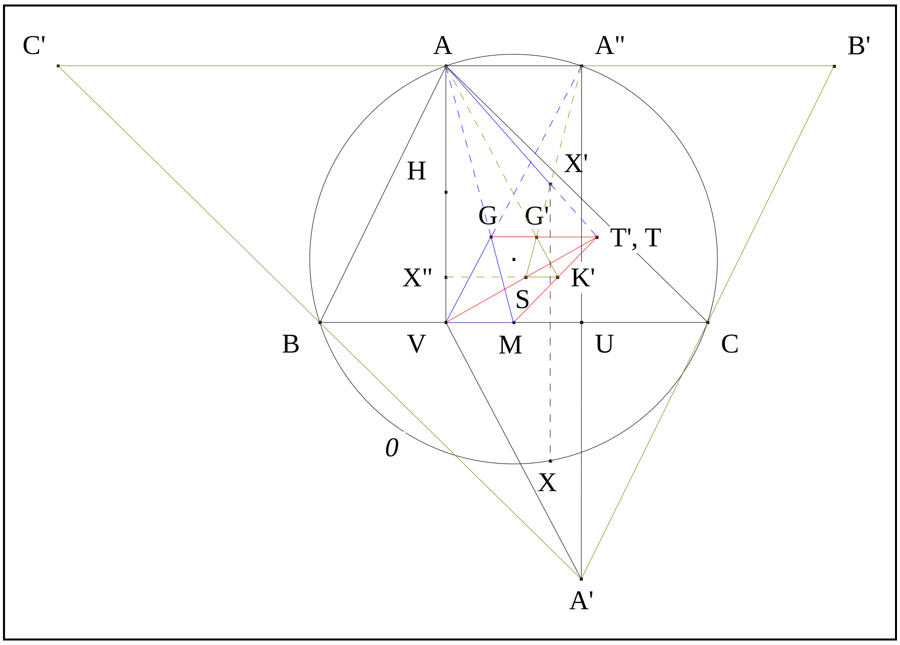
[26] Ayme J.-L., A nice parallelism, Message *Hyacinthos* # 16600 du 25/07/2008; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.
Mathlinks du 25/07/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=216893.



- Notons S le point d'intersection de (A"X'G'M) et (K'X").
  et T' le point d'intersection de (AX') et (VS).

- D'après "La proposition 139 de Pappus" (Cf. Annexe 9) appliqué à l'hexagone sectoriel A"AX'X"SVA",

  (1) (GT') ou encore (GG'T') est la pappusienne de cet hexagone
  (2) (GT') // (BC).



- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 10),
  (A"A') étant l'arguésienne des triangles GVM et G'SK',
  (GG'), (VS) et (MK') sont concourantes en T' ;
  en conséquence, T et T' sont confondus.

- **Conclusion :** (GT) est parallèle à (BC).

Note historique : une preuve non simple a été donnée par Vladimir Zajic.[27]

B.

AVEC LE POINT DE KOSNITZA

Inspiré

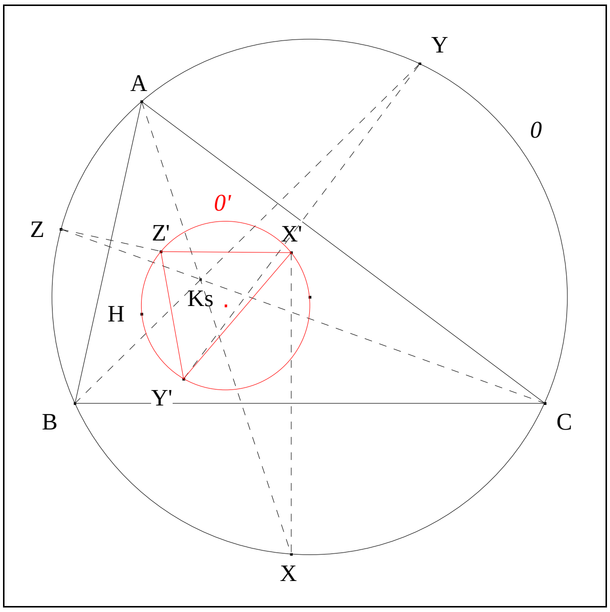
par

Telv Cohl

1. Le Ks-cercle de Hagge de ABC

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
Ks le point de Kosnitza [28] de ABC,
XYZ le triangle Ks-circumcévien,
X', Y', Z' les symétriques de X, Y, Z par rapport à (BC), (CA), (AB),
et *0'* le cercle circonscrit à X'Y'Z'.

Définitions : * X'Y'Z' est le Ks-triangle de Hagge de ABC

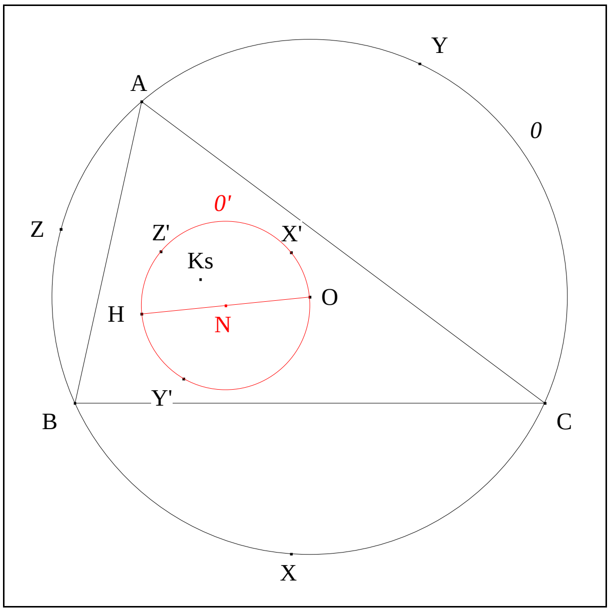
* *0'* est le Ks-cercle de Hagge de ABC.

---

[27] Ayme J.-L., A nice parallelism, Message *Hyacinthos* # 16600 du 25/07/2008; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.
Mathlinks du 25/07/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=216893.

[28] Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. **1** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Scolies : **(1)** le centre de *0'*



- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC
  et O le centre de *0*.

- D'après John Rigby "Isogonal de Ks" [29], N est l'isogonal de Ks relativement à ABC.

- D'après "La droite d'Euler" [30], O est l'anticomplément de N.

- D'après **I. 2**. Le résultat de Karl Hagge, [HO] est un diamètre de *0'* ;

  en conséquences, **(1)** O est sur *0'*

  (2) [HO] est un diamètre de *0'*.

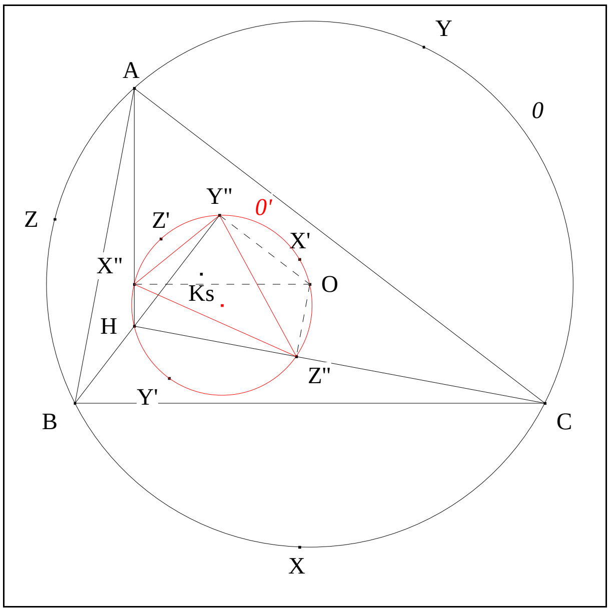
- **Conclusion :** d'après "La droite d'Euler" [31], N est le centre de *0'*.

(2) Deux triangles inversement semblables

[29] Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. **1** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

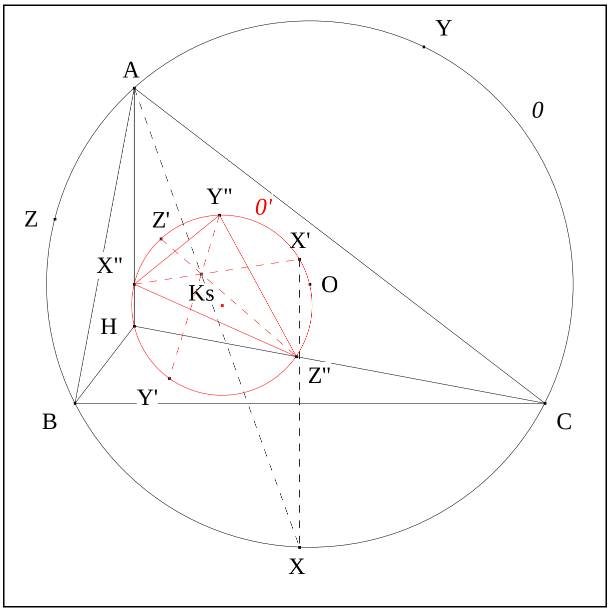
[30] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 1-4 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

[31] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 1-4 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



- Notons X", Y", Z" les pieds des perpendiculaires à (AH), (BH), (CH) issues de O.
- **Conclusion :** d'après **V. 1.**, le triangle X"Y"Z" est indirectement semblables à ABC.

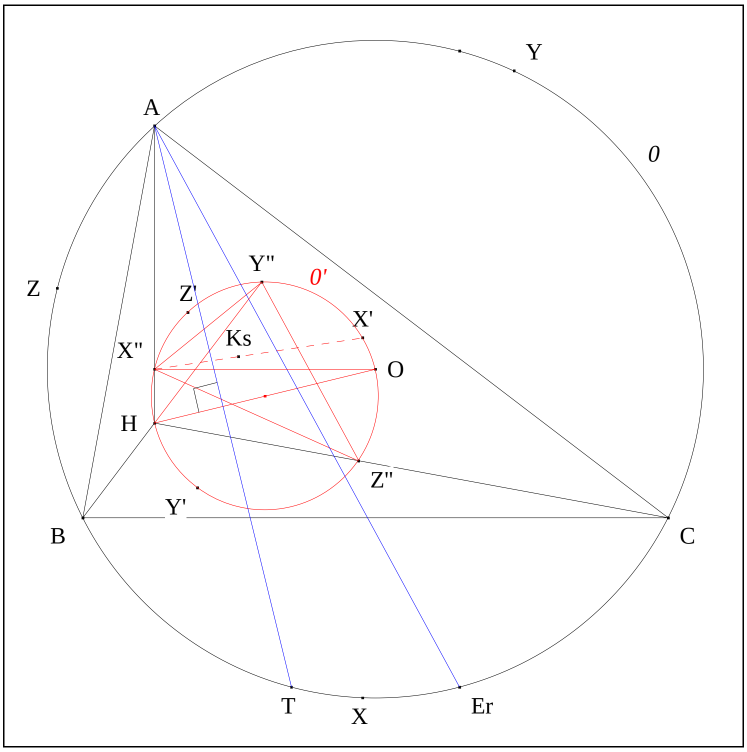
(3) Ks point de concours



- D'après Darij Grinberg "Le théorème des six pieds" [32], (X'X"), (Y'Y") et (Z'Z") sont concourantes.
- **Conclusion :** d'après V. 2, 3, Ks est ce point de concours.

(4) O est l'homologue de Er

[32] Ayme J.-L., Le théorème des six pieds, G.G.G. vol. **1**, p. 5-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons Er l'antipoint d'Euler [33] de ABC
  et T le second point d'intersection de la perpendiculaire à (OH) avec *0*.

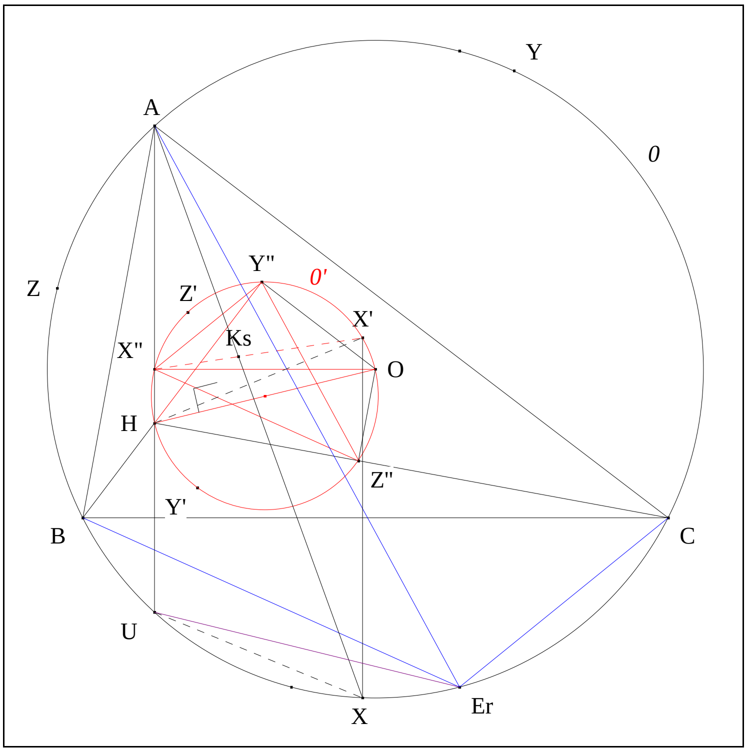
- Une chasse angulaire :

  * par "Angles inscrits", <OX"Y" = <OHY"
  * par "Angles à côtés perpendiculaires", <OHY" = <TAC
  * (AEr) et (AT) étant deux A-isogonales de ABC, <TAC = <BAEr
  * par transitivité de =, <OX"Y" = <BAEr.

- **Conclusion :** X"Y"Z" étant indirectement semblables à ABC, O a pour homologue Er.

(5) X"Y"Z" et ABC partagent le même point de Kosnitza

[33] pôle de la droite d'Euler (OH)



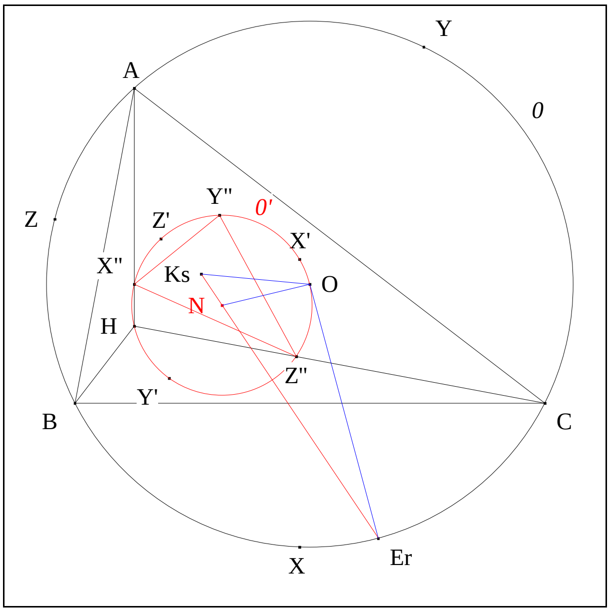
- Notons U le second point d'intersection de (AH) avec *0*.

- Une chasse angulaire :

*	par "Angles inscrits",	<OX"X' = <OHX'
*	par symétrie d'axe (BC),	<OHX' = <XUEr
*	par "Angles inscrits",	<XUER = <XAEr
*	par transitivité de =,	<OX"X' = <XAEr.

- **Conclusion :** X"Y"Z" étant indirectement semblables à ABC, Ks a pour homologue Ks.

(6) L'alignement Ks – N – Er



- Rappelons que * X"Y"Z" est indirectement semblables à ABC

  * Ks a pour homologue Ks

  * O a pour homologue Er

  * N a pour homologue O.

- **Conclusion :** les triangles KsON et KsErO étant semblables, Ks, N et Er sont alignés.

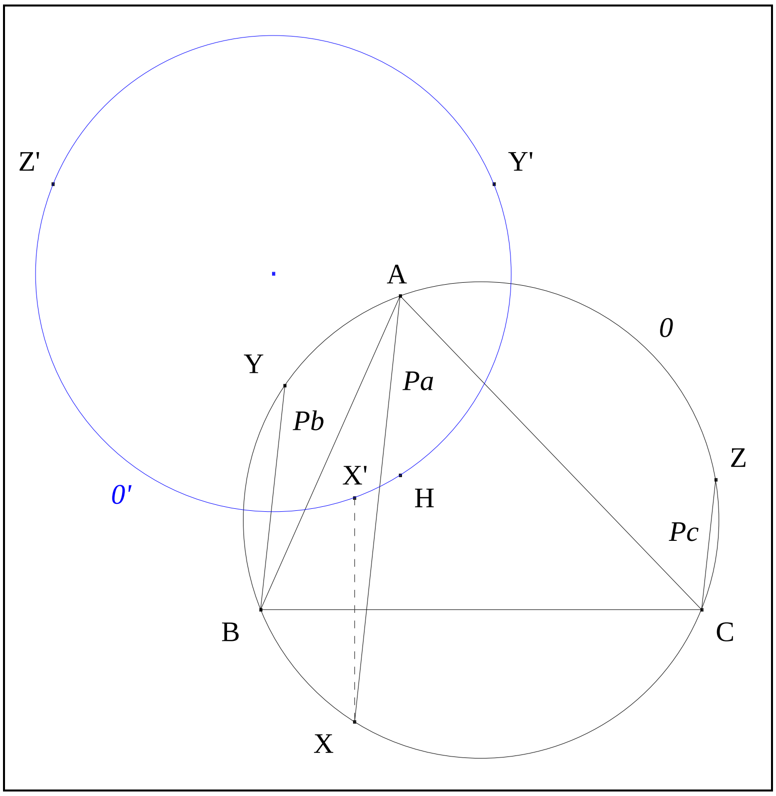
C.

AVEC LE POINT A L'INFINI

1. TST Chine (2006)

VISION

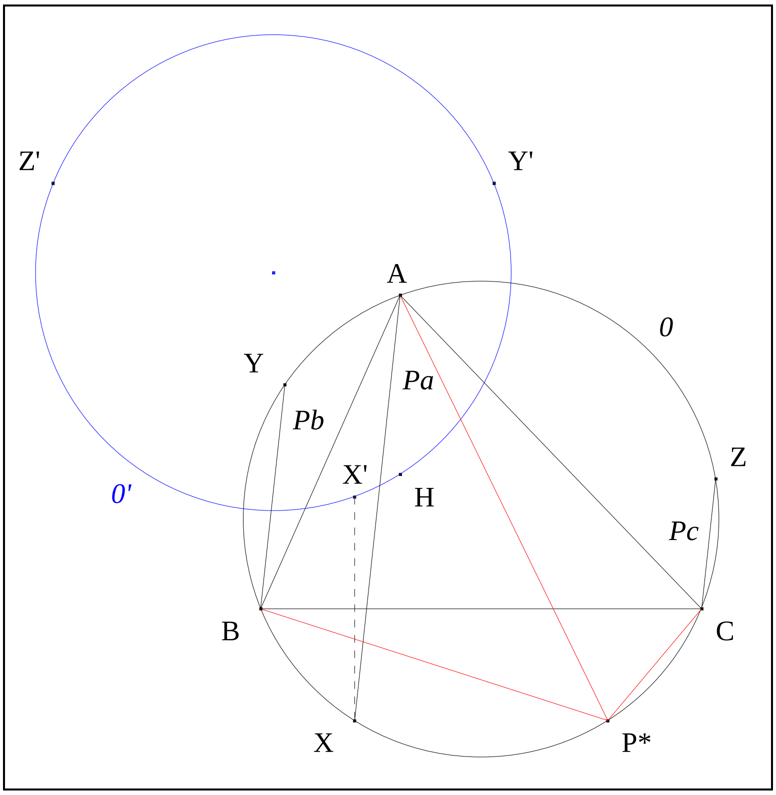
Figure :



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
*P*a, *P*b, *P*c trois parallèles passant resp. par A, B, C,
X, Y, Z les seconds points d'intersection resp. de *P*a, *P*b, *P*c avec *0*,
X', Y', Z' les symétriques de X, Y, Z resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
et *0'* le cercle circonscrit à X'Y'Z'.

Conclusion : H est sur *0'*.

VISUALISATION



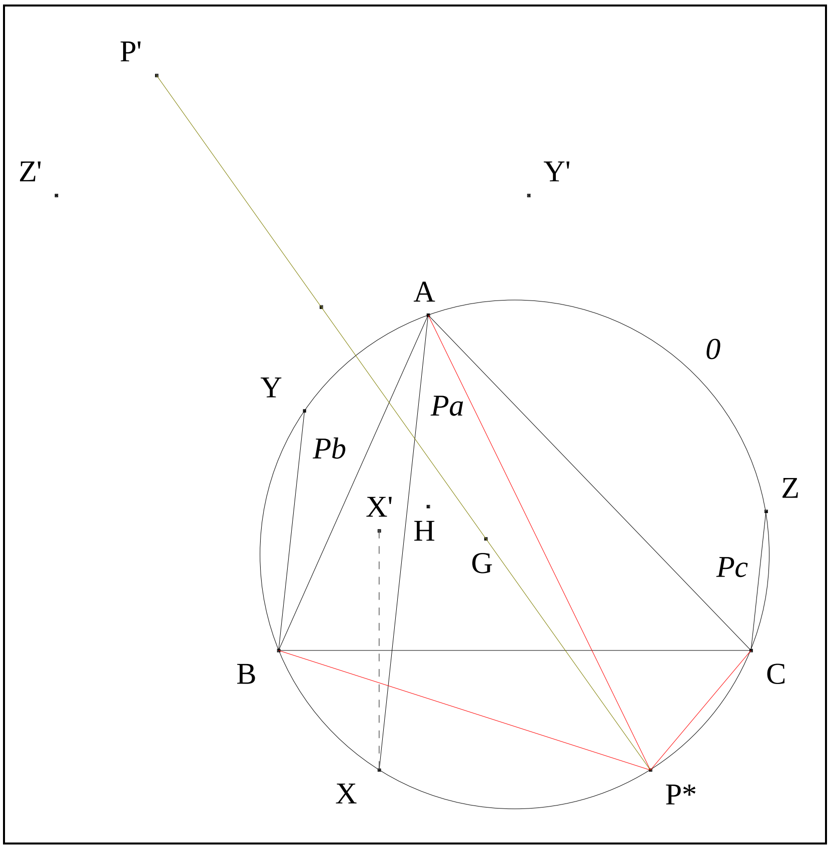
- Notons P le point à l'infini de la direction associée à *P*a.

- D'après "Le théorème de Beltrami" (Cf. Annexe 11),
  les isogonales de *P*a, *P*b, *P*c relativement à ABC concourent sur *0*.

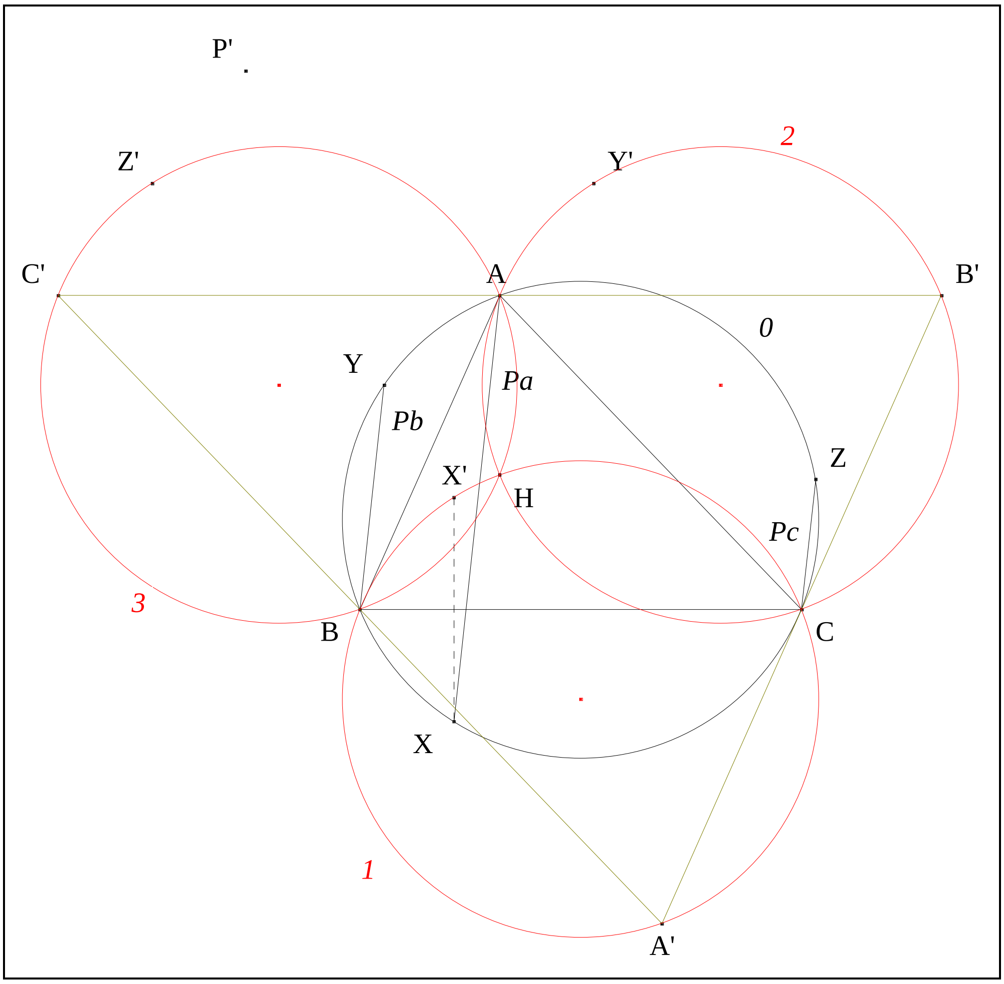
- Notons P* ce point de concours.

- **Scolie :** P* est l'isogonal de P.

- **Commentaire :** nous allons calquer notre démarche sur celle du cas général.



- Notons G le point médian de ABC
  et P' l'anticomplément de P* relativement à ABC.



- Notons *1*, *2*, *3* les A, B, C-cercles de Carnot de ABC,
  et A', B', C' les antipôles de H relativement à *1*, *2*, *3*.

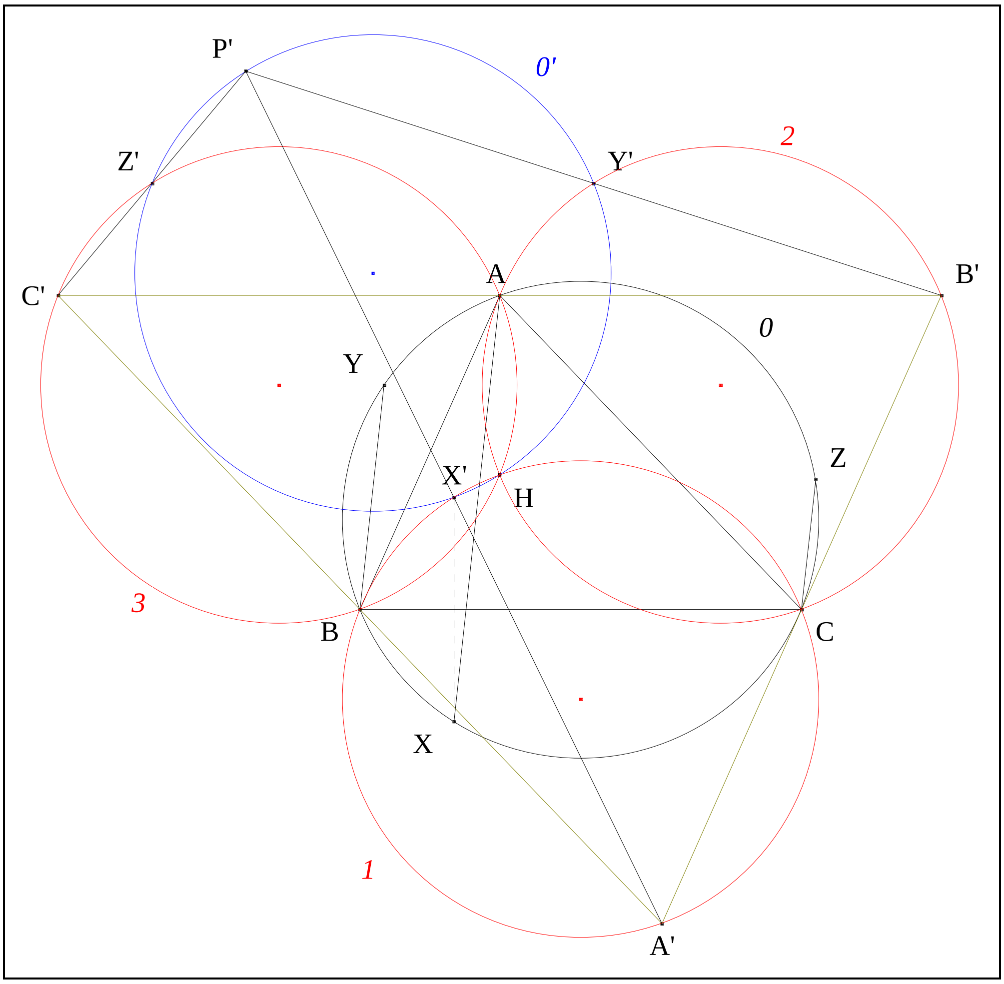
- **Scolies :** X' étant le symétrique de X par rapport à (BC), *1* passe par X'
  Y' est le symétrique de Y par rapport à (CA), *2* passe par Y'
  Z' est le symétrique de Z par rapport à (AB), *3* passe par Z'.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AB') ⊥ (AH) ;
  par hypothèse, (AH) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AB') // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AC') // (BC) i.e. (BC) // (AC') ;
  par transitivité de la relation //, (AB') // (AC') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AB') = (AC') ;
  en conséquence, (B'AC) // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (C'BA) // (CA)
  (A'CB) // (AB).

- **Conclusion partielle :** A'B'C' est le triangle antimédian de ABC.



- D'après II. 3. Anticomplément de l'isogonal, (A'X'), (B'Y'), (C'Z') passent par P'.

- D'après "Le cercle de Mannheim"[34] appliqué à A'B'C', à *1*, *2*, *3*, et à P',
  X', Y', Z', H et P' sont cocycliques.

- **Conclusion :** H est sur *0'*.

Scolies : **(1)** un diamètre de *0'*

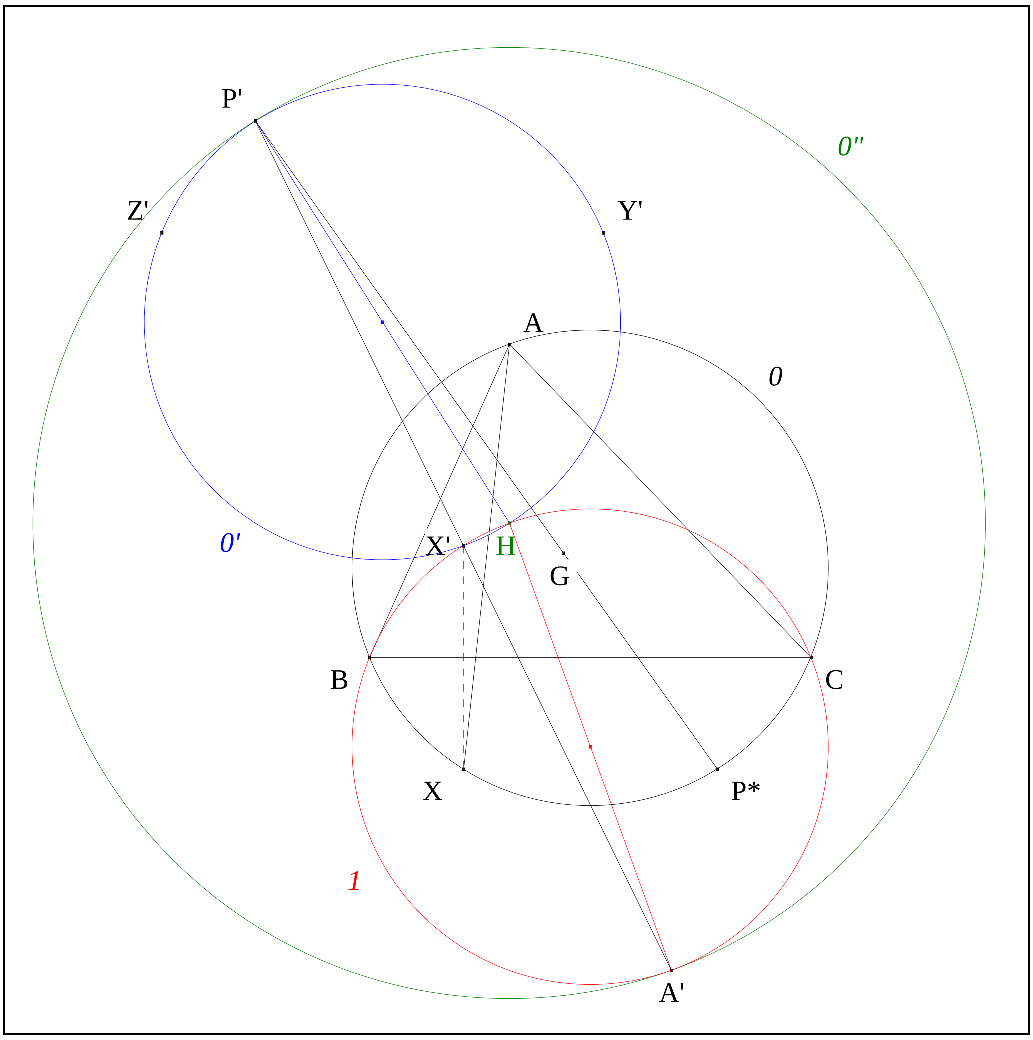
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A'P'X') ⊥ (X'H).

- **Conclusion :** [HP'] est un diamètre de *0'*.

(2) Cinq cercles égaux

---

[34] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2, p. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



- P* est sur le cercle circonscrit *0* de ABC.
- P' est l'anticomplément de P* relativement à ABC.
- ABC et son triangle antimédian A'B'C' partage le même point médian G.
- P' est sur le cercle circonscrit de A'B'C' de ABC.
- Notons *0''* ce cercle.
- H étant le centre de *0''* et [HP'] un diamètre de *0'*, *0'* et *0''* sont tangent en P'.
- **Conclusion :** *0*, *1*, *2*, *3* et *0'* sont égaux.

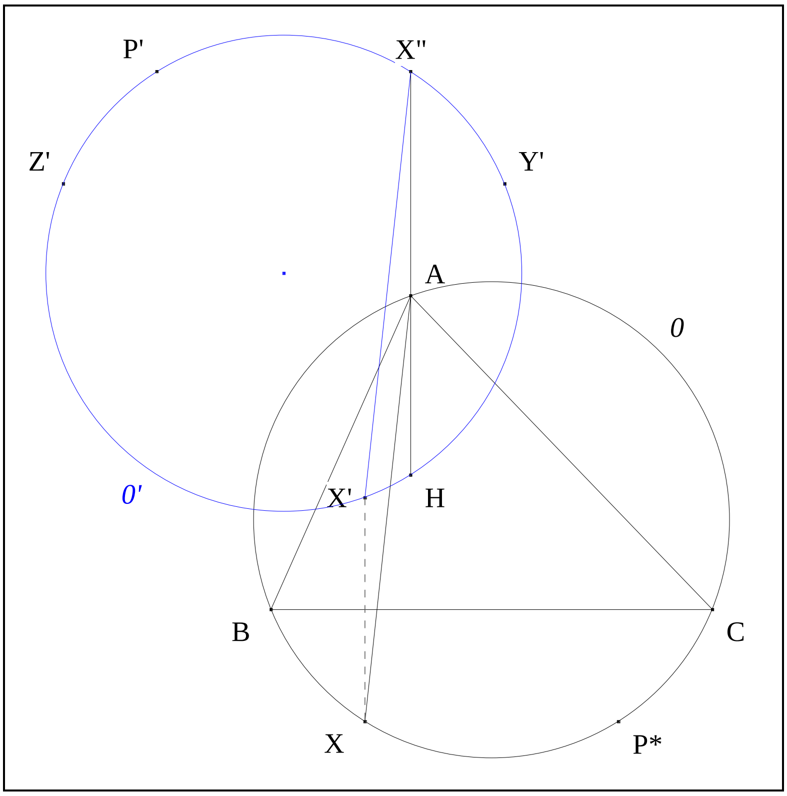
(3) Le rayon de *0''* est le double de celui de *0'*.

(4) X' est le milieu ce [A'P'].

2. Trois droites parallèles à (AX)

VISION

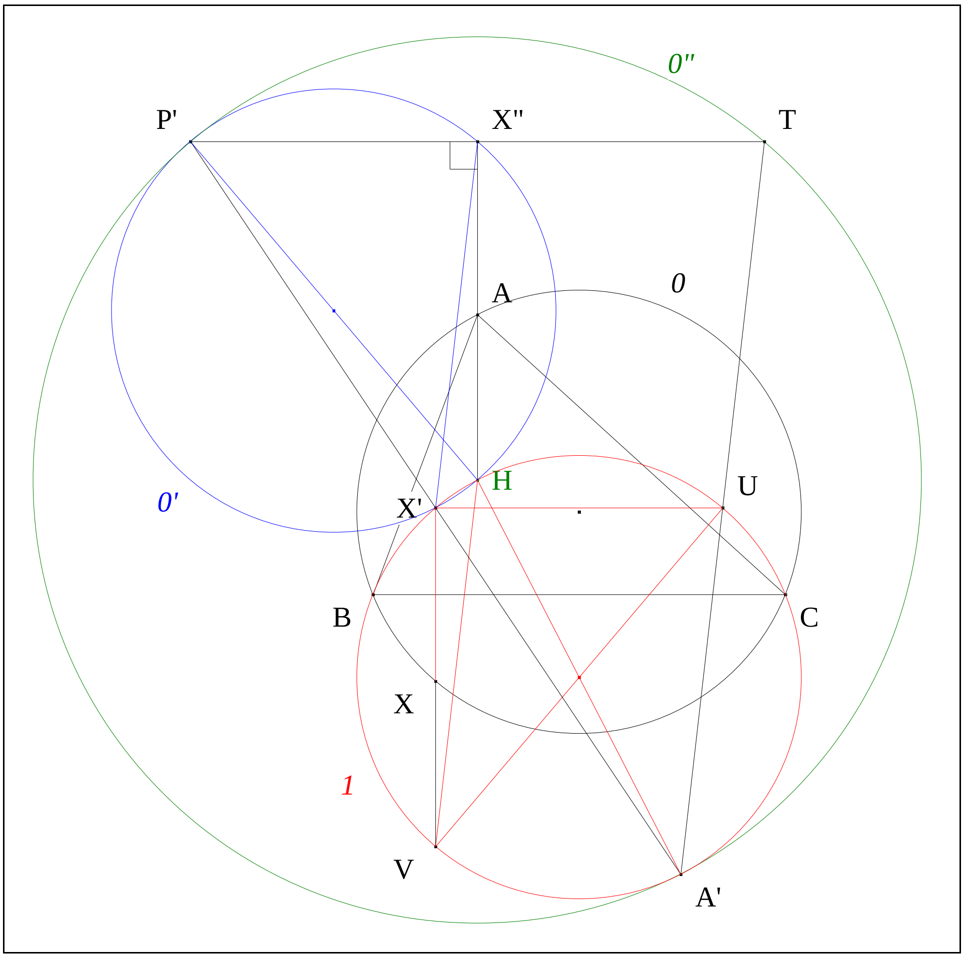
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
X" le second point d'intersection de (AH) avec *0'*.

Conclusion : (X'X") est parallèle à (AX).

VISUALISATION



- Notons T le second point d'intersection de (P'X") avec *0"*,
  U le second point d'intersection de (A'T) avec *1*
  et V le second point d'intersection de (XX') avec *1*.

- Les cercles *0'* et 0*"* tangents en P, les moniennes (X'P'A') et (X"P'T), conduisent au théorème **7** de Reim ;
  il s'en suit que (X'X") // (A'T).

- Les cercles *0"* et *1* tangents en A', les moniennes (X'A'P') et (UA'T), conduisent au théorème **7** de Reim ;
  il s'en suit que (X'U) // (P'X"T)

- Nous savons que (HAX") ⊥ (BC)
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (HAX") ⊥ (P'X"T) ;
  par construction, (BC) ⊥ (X'XV) ;
  en conséquence, (P'X"T) ⊥ (X'XV).

- D'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (X'U) ⊥ (X'XV) ;
  en conséquence, U et V sont deux points diamétraux de *1* ;
  il s'en suit que (A'UT) // (HV) ;
  par transitivité de la relation //, (X'X") // (HV).

- **Scolie :** (AH) // (XV) et AH = XV.

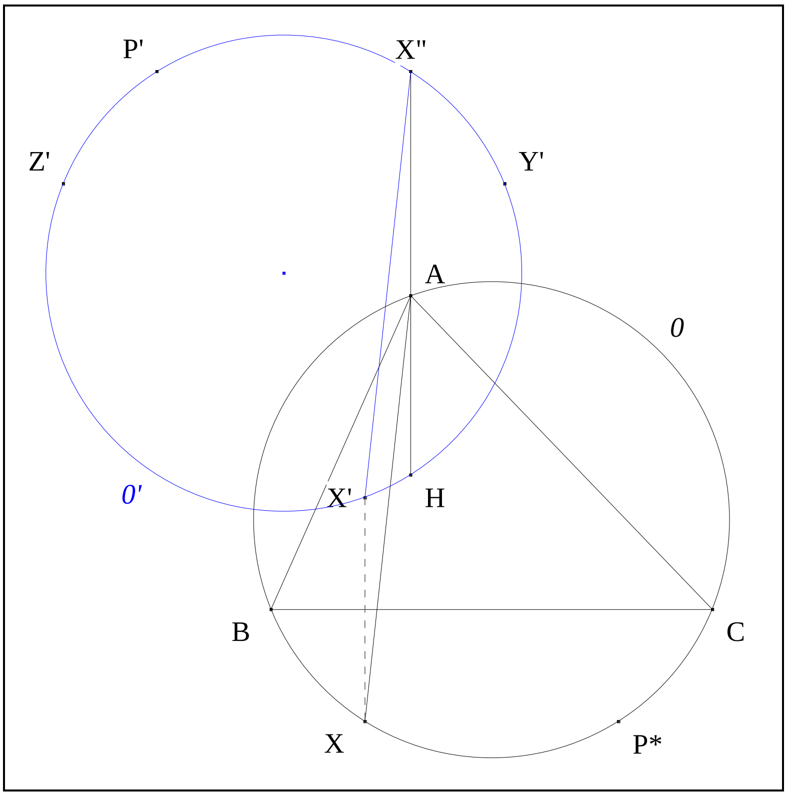
- Le quadrilatère AXVH ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme,
  en conséquence, (HV) // (AX) ;
  par transitivité de la relation //, (X'X") // (AX).

- Le quadrilatère X'X"TU ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme,
  en conséquence, X'X" = TU ;

d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle A'P'T, TU = UA' ;
le quadrilatère A'UHV étant un parallélogramme, UA' = HV ;
le quadrilatère AHVX étant un parallélogramme, HV = AX
par transitivité de la relation =, X'X" = AX.

- Le quadrilatère X'X"HV ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme.
- **Conclusion :** (X'X") est parallèle à (AX).

- **Scolies :** **(1)** deux autres parallèles à (AX)



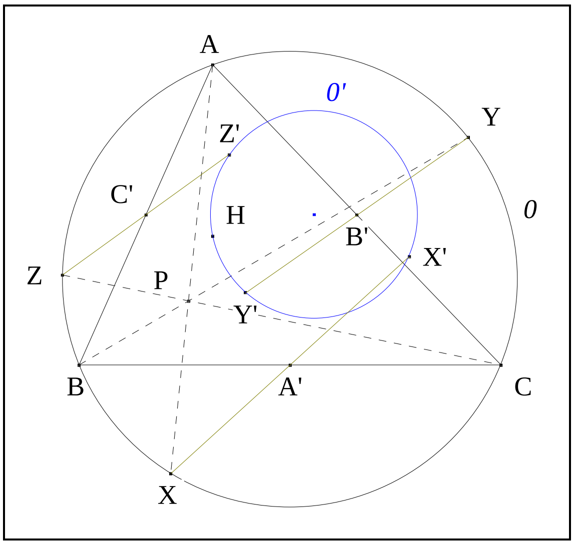
- Notons Y", Z" les seconds points d'intersection resp. de (BH), (CH) avec *0'*.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (Y'Y") est parallèle à (BX)
  (Z'Z") est parallèle à (CX).
- **Conclusion :** (Y'Y") et (Z'Z") sont parallèles à (AX).

(2) P est le point à l'infini des droites parallèles (X'X"), (Y'Y") et (Z'Z").

VII. UNE VARIANTE CHINOISE

VISION

Figure :

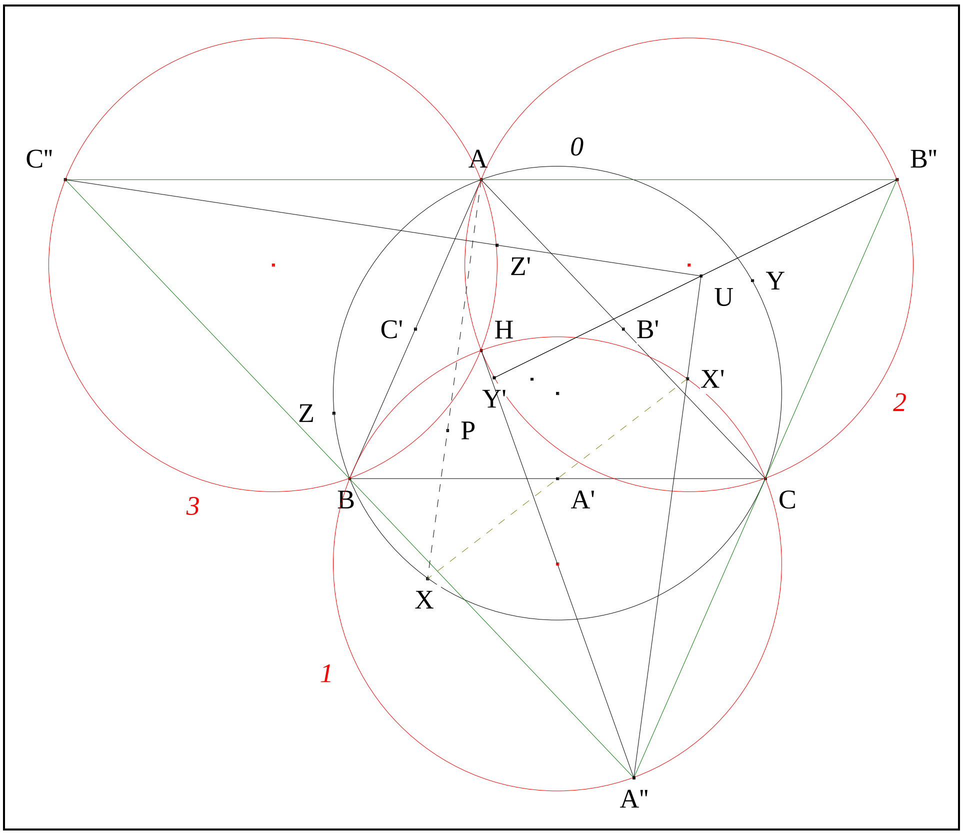


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point,
	XYZ	le triangle P-circumcévien de ABC,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	X', Y', Z'	les symétriques de X, Y, Z resp. par rapport à A', B', C'
et	*0'*	le cercle circonscrit à X'Y'Z'.

Conclusion : H est sur *0'*. [35]

VISUALISATION

[35] TST Chine (2006).



- Notons *1*, *2*, *3* les A, B, C-cercles de Carnot de ABC,
  et A", B", C" les antipôles de H relativement à *1*, *2*, *3*.

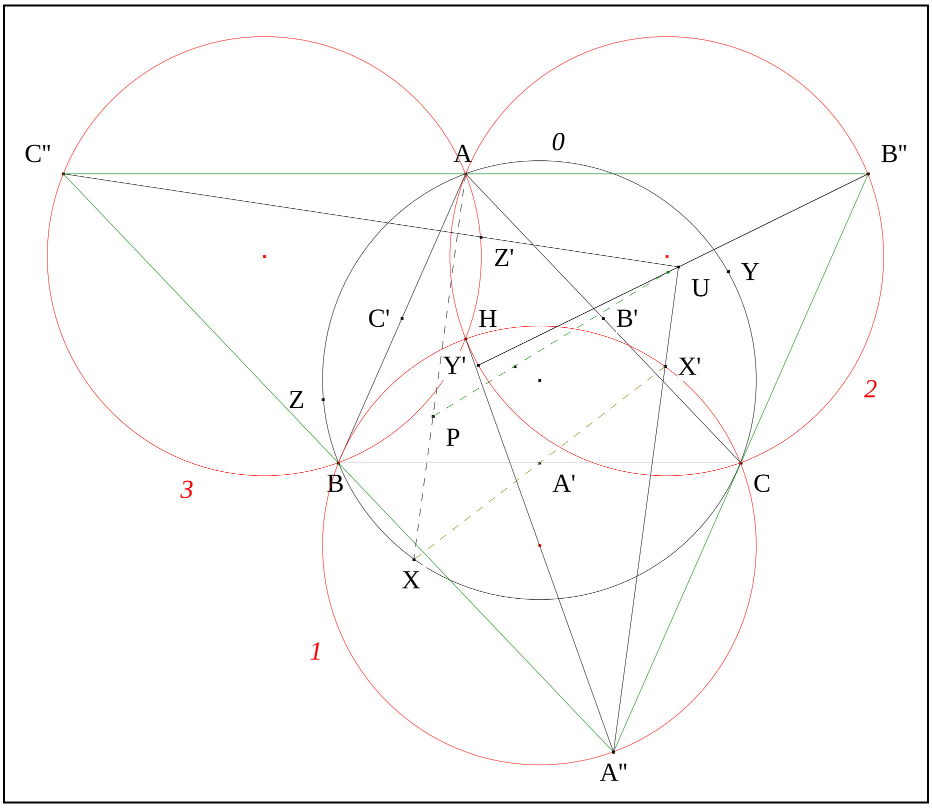
- **Scolies :** X' étant le symétrique de X par rapport à A', *1* passe par H et X'
  Y' est le symétrique de Y par rapport à B', *2* passe par H et Y'
  Z' est le symétrique de Z par rapport à C', *3* passe par H et Z'.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AB') ⊥ (AH) ;
  par hypothèse, (AH) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AB') // (BC).

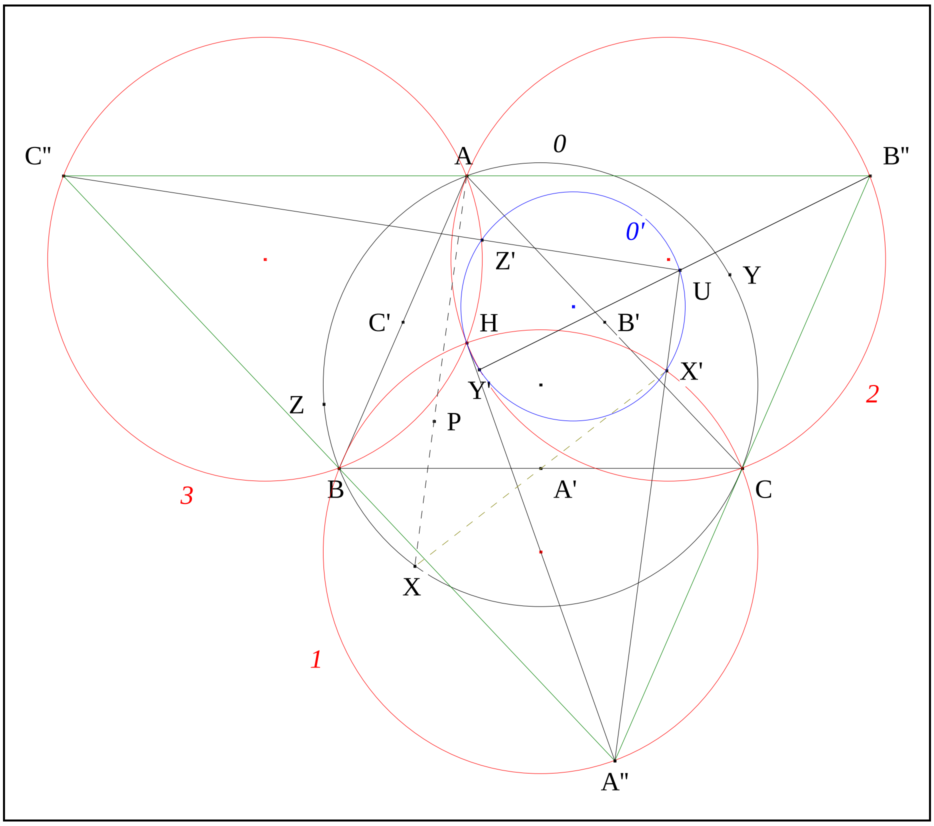
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AC') // (BC) i.e. (BC) // (AC') ;
  par transitivité de la relation //, (AB') // (AC') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AB') = (AC') ;
  en conséquence, (B'AC) // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (C'BA) // (CA)
  (A'CB) // (AB).

- **Conclusion partielle :** A'B'C' est le triangle antimédian de ABC.



- Le quadrilatère ABA"C étant un parallélogramme, A' est le milieu de [AA"].
- Mutatis mutandis, nous montrerions que B' est le milieu de [BB"]
  C' est le milieu de [CC"].
- Le quadrilatère AXA"X' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu A', est un parallélogramme.
- **Conclusion partielle :** (A"X') // (APX).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B"Y') // (BPY)
  (C"Z') // (CPZ).
- **Conclusion partielle :** ABC et A"B"C" étant homothétiques, (A"X'), (B"Y') et (C"Z') concourent.
- Notons U ce point de concours.
- **Conclusion partielle :** d'après II. 3. Anticomplément de l'isogonal de P,
  et en remplaçant dans notre situation P* par P,
  U est l'anticomplément de P relativement à A"B"C".



- D'après "Le cercle de Mannheim"[36] appliqué à A"B"C", à *1*, *2*, *3*, et à U,
  X', Y', Z', H et U sont cocycliques.

- **Conclusion :** H est sur *0'*.

Scolie : un diamètre de *0'*

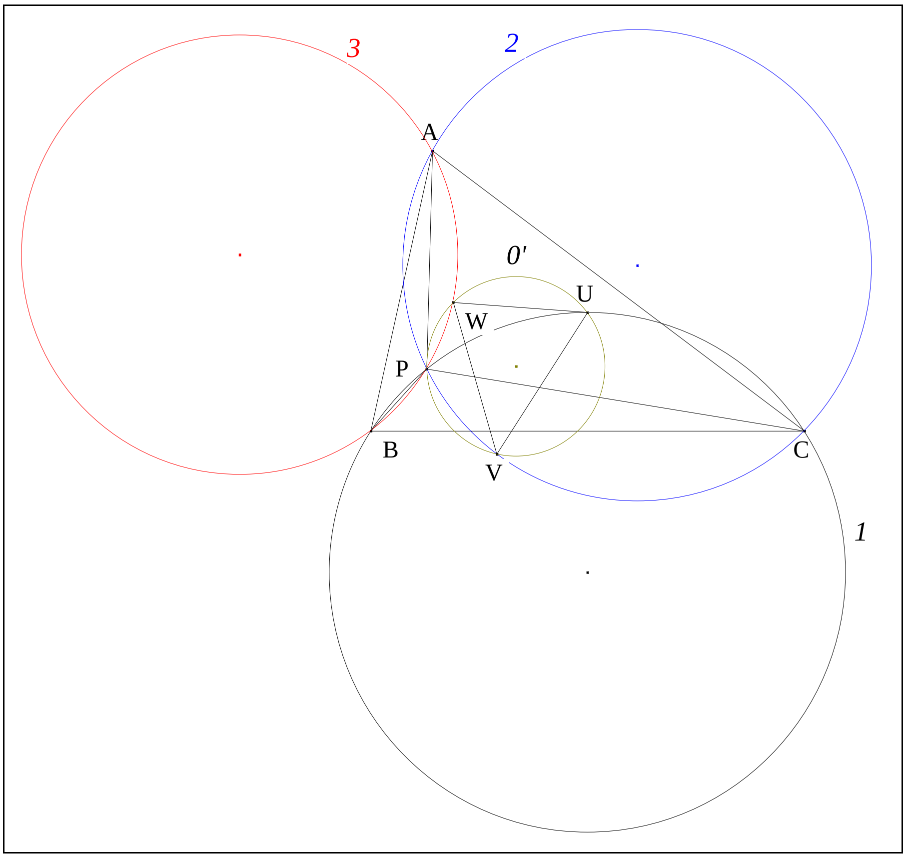
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A"X'U) ⊥ (HX').

- **Conclusion :** [HU] est un diamètre de *0'*.

[36] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2, p. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

VIII. LA GÉNÉRALISATION DE DERGIADES

1. Le mid-arcs circle



Finition :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. des triangles PBC, PCA, PAB,
	U, V, W	les milieux resp. des arcs BC, CA, AB
		tels que les arcs BUC, CVA et AXB aient la même orientation
et	*0'*	le cercle circonscrit au triangle UVW.

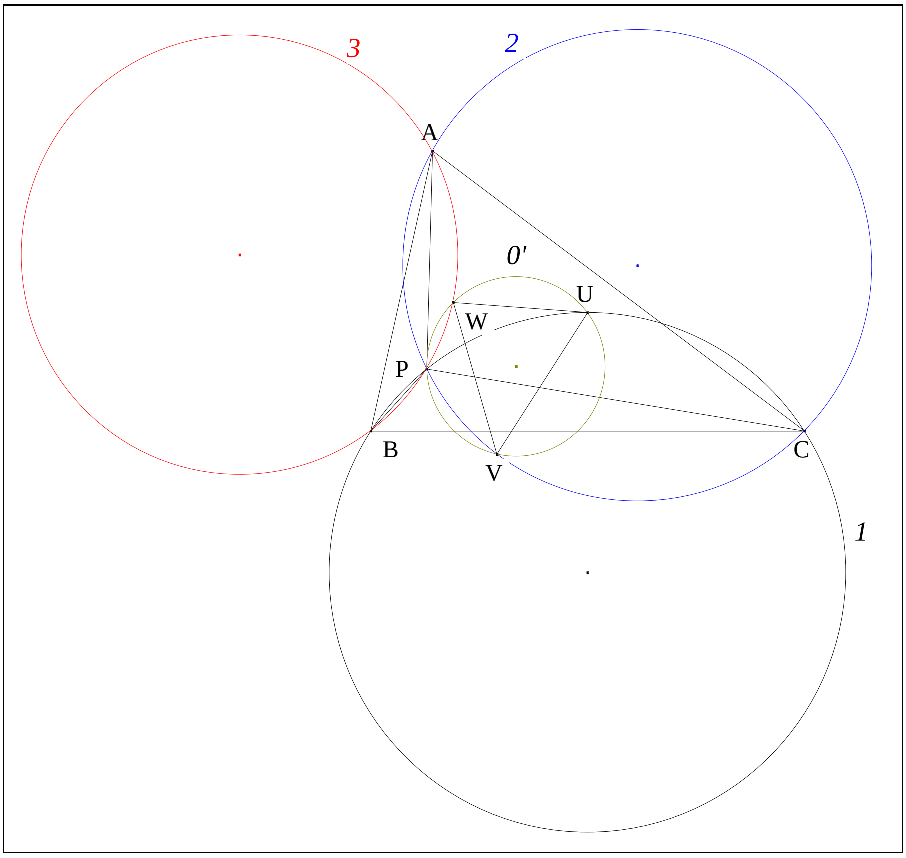
Définition : UVW est le "mid-arcs triangle" de ABC et *0'* est le "mid-arcs circle" de ABC.

2. Le résultat de Nikolaos Dergiades [37]

VISION

Figure :

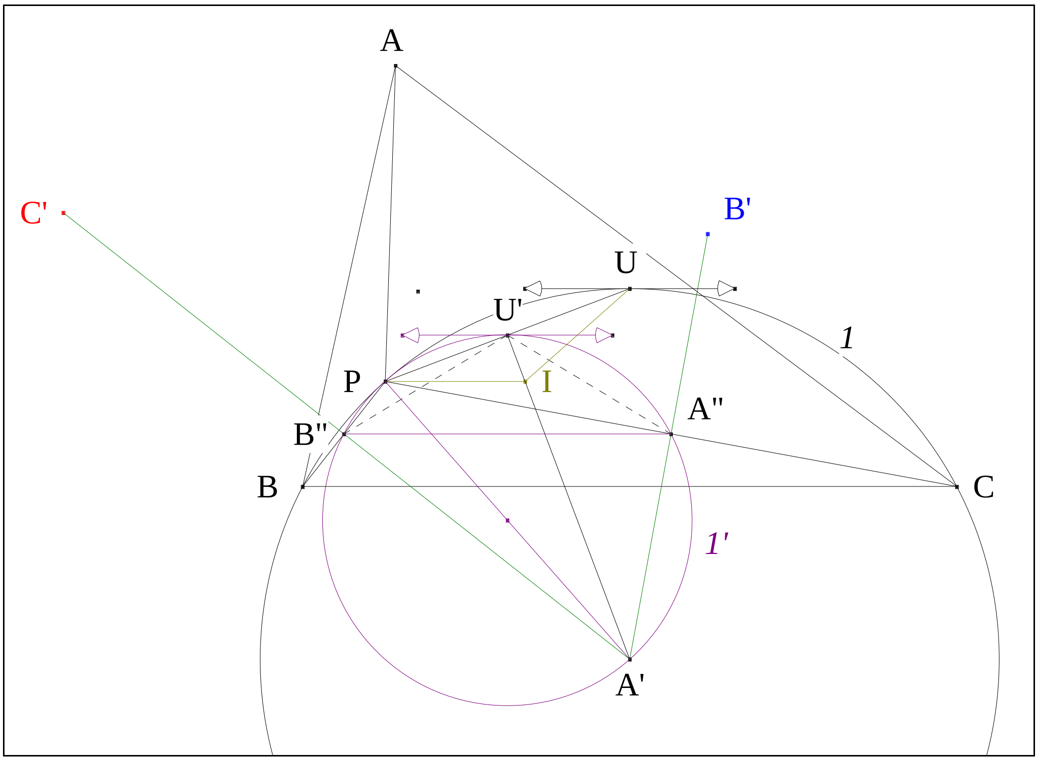
[37] Dergiades N., Mid-arcs triangle, Message *Hyacinthos* # 15251, 12253 du 03/05/2007 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. des triangles PBC, PCA, PAB
et	*0'*	le "mid-arcs circle" de ABC.

Donné : P est sur *0'*.

VISUALISATION



- Notons UVW le "mid-arcs triangle" de ABC,
  A', B', C' les centres resp. de *1*, *2*, *3*
  et I le centre de A'B'C'.

- **Scolies :** **(1)** (A'B') ⊥ (PC)
  (2) (A'C') ⊥ (PB).

- Notons A", B" les points d'intersection resp. de (A'B') et (PC), de (A'C') et (PB),
  1' le cercle de diamètre [PA'] ; il passe par A" et B" ;
  U' le second point d'intersection de (PU) avec *1'*,
  Tu la tangente à *1* en U
  et Tu' la tangente à *1'* en U'.

- **Scolies :** **(1)** (A'U') ⊥ (PU'U)
  (2) *1* et *1'* sont tangents en P.

- Les cercles tangents *1'* et *1*, le point de base P, la monienne (U'PU), conduit au théorème **8** de Reim ;
  il s'en suit que Tu' // Tu ;
  U étant le premier P-perpoint de PBC, Tu // (BC) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à PBC, (BC) // (B"A") ;
  par transitivité de la relation //, Tu' // (B"A").

- D'après "Tangente au sommet" (Cf. Annexe 12), le triangle U'B"A" est U'-isocèle ;
  en conséquence, (A'U') est la A'-bissectrice du triangle A'B'C' i.e. (A'U') passe par I.

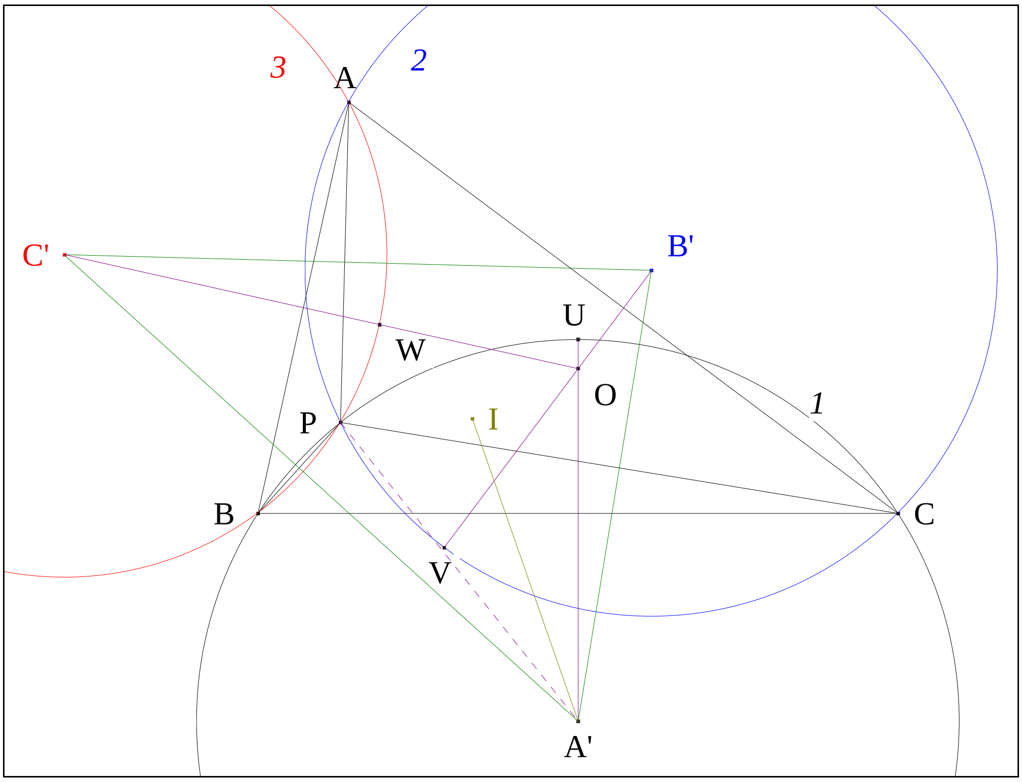
- P et U étant sur *1* et (A'U') étant perpendiculaire à (PU'U), U' est le symétrique de P par rapport à (A'I)
  ou encore, (A'I) est la médiatrice de [PU].

- **Conclusion partielle :** d'après le théorème de la médiatrice, IU = IP.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que IV = IP
  IW = IP ;
  en conséquence, U, V et W sont sur le cercle de centre I passant par P.

- **Conclusion :** P est sur *0'*.

Scolie : le point O



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC.

- (A'U), (B'V) et (C'W) passent par O.

- D'après "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 4), (A'U) et (A'P) sont deux A'-isogonales de A'B'C'
(B'V) et (B'P) sont deux B'-isogonales de A'B'C'
(C'W) et (C'P) sont deux C'-isogonales de A'B'C'.

- **Conclusion :** d'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 1),
O est l'isogonal de P relativement à A'B'C'.[38]

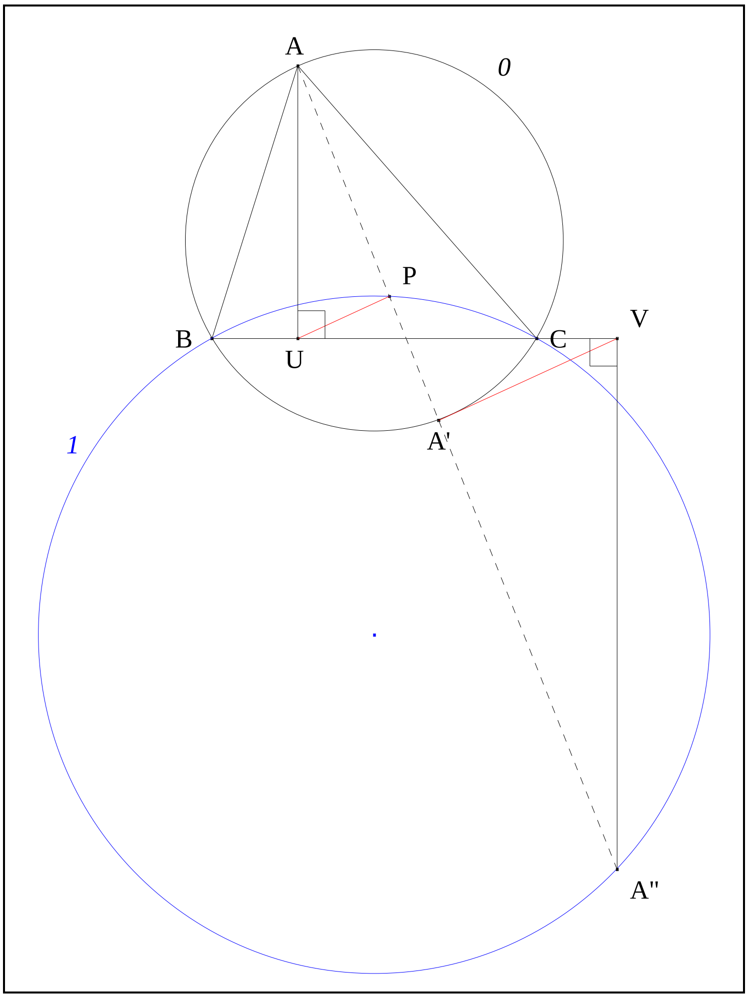
[38] Pamfilos P., Mis-arcs triangle, Message *Hyacinthos* # 15246 du 03/05/2007 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

IX. APPENDICE

1. Le théorème généralisé de Reim

VISION

Figure :

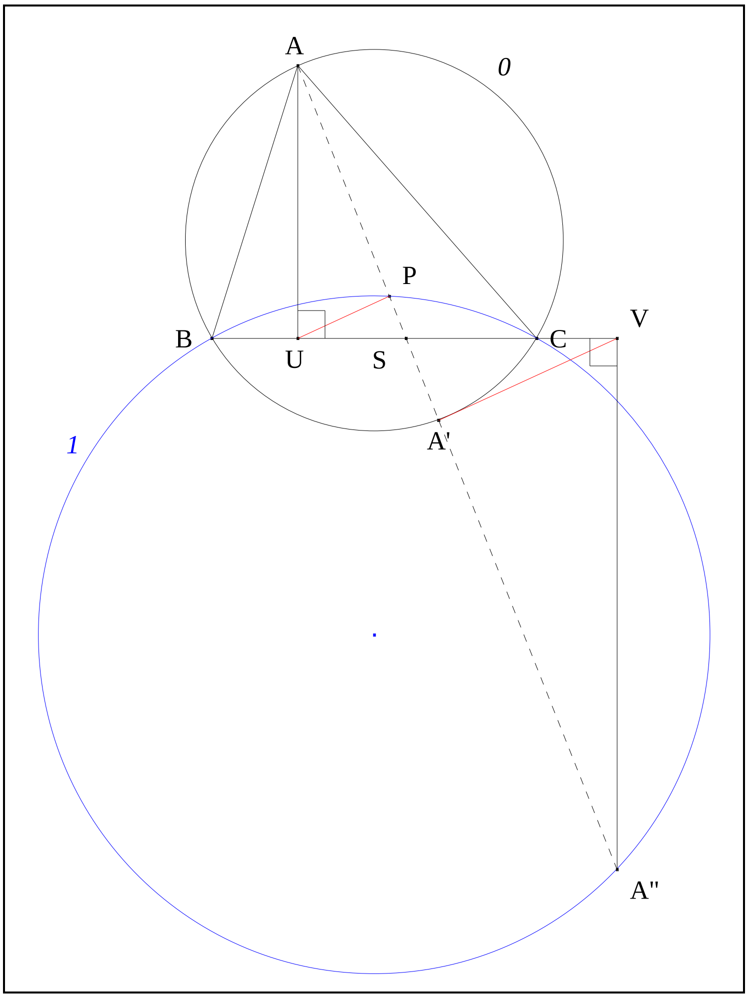


Traits : ABC un triangle,
U le pied de la A-hauteur de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point,
A' le second point d'intersection de (AP) avec *0*,
0 le cercle circonscrit à PBC,
A" le second point d'intersection de (AP) avec *1*
et V le pied de la perpendiculaire sur (BC) issue de A".

Donné : (A'V) est parallèle à (PU). [39]

VISUALISATION

[39] Ayme J.-L., Two parallels, *Mathlinks* du 25/06/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=285029 ;



- Notons S le point d'intersection de (AP) et (BC)
  et P_0 (S), P_1 (S) les puissances de S resp. par rapport à *0*, *1*.

- Par définition, **(1)** $P_0\ (S) = \overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SB}.\overline{SC}$
  (2) $P_1\ (S) = \overline{SB}.\overline{SC} = \overline{SP}.\overline{SA''}$

- Par transitivité de la relation =, $\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SP}.\overline{SA''}$

- Une chasse de rapports

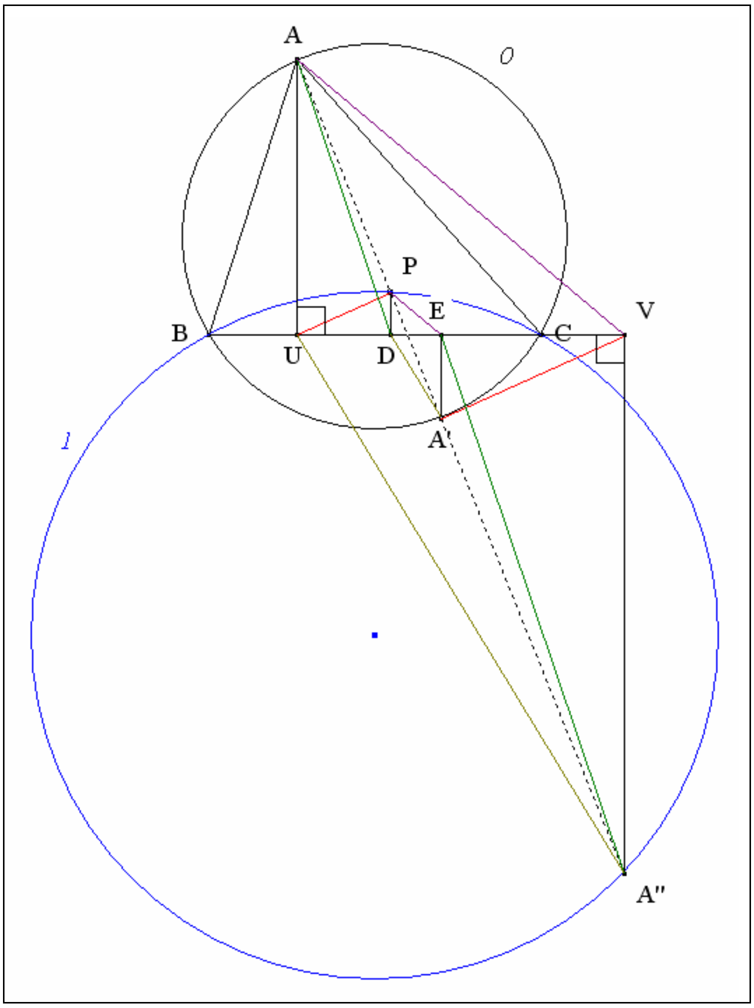
$$\frac{\overline{SP}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA''}}\ ;$$

d'après le théorème de Thalès,
$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SA''}} = \frac{\overline{SU}}{\overline{SV}}\ ;$$

par transitivité de la relation =,
$$\frac{\overline{SP}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{SU}}{\overline{SV}}\ .$$

- **Conclusion :** (A'V) est parallèle à (PU).

Scolie : le théorème généralisé de Reim [40]



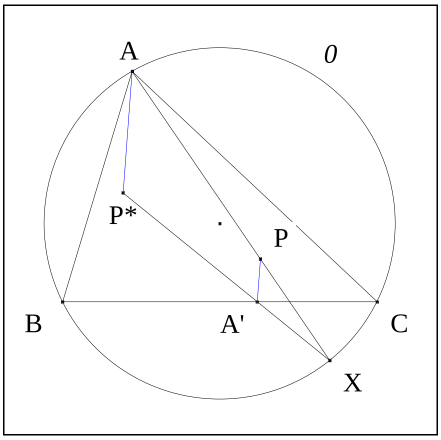
- Notons D, E les pieds des perpendiculaires sur (BC) issues resp. de P, A'.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (A'D) est parallèle à (A"U)
  (AD) est parallèle à (A"E)
  (AV) est parallèle à (PE).

2. Parallèle à une isogonale

VISION

Figure :

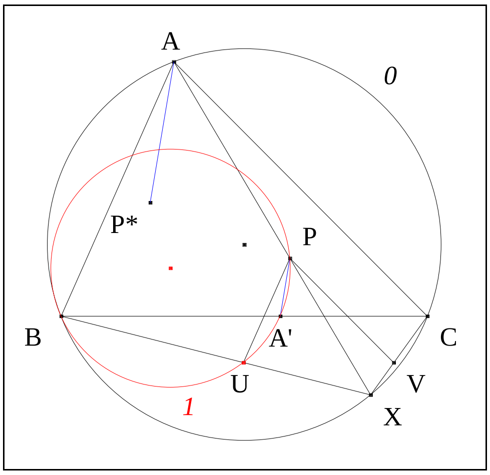
[40] Ayme J.-L., Reim's theorem generalized, *Mathlinks* du 02/07/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=286476.



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
P* l'isogonal de P,
0 le cercle circonscrit de ABC,
X le second point d'intersection de (AP) avec *0*
et A' un point de (BC).

Donné : (A'P) est parallèle à (AP*) *si, et seulement si,* P*, A' et X sont alignés. [41]

VISUALISATION NÉCESSAIRE



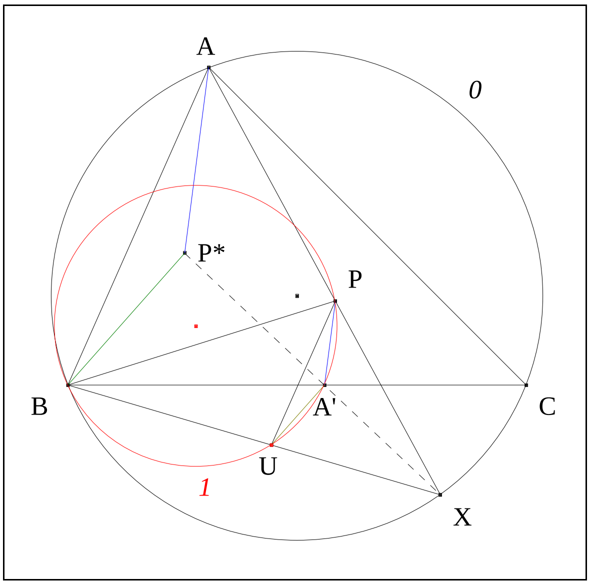
- Notons U le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par P avec (BX).

- Une chasse angulaire à π près :
  dans le théorème des angles à côtés parallèles, <UPA' = <BAP* ;
  par définition de P*, <BAP* = <XAC ;
  d'après le théorème des angles inscrits, <XAC = <XBC ;
  par une autre écriture, <XBC = <UBA' ;
  par transitivité de la relation =, <UPA' = <UBA' ;

- D'après le théorème des angles inscrits, B, U, A' et P sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.

[41] Treegoner, Isogonal conjugate (not a difficult problem), *Mathlinks* du 03/08/2005 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=46718 ;
Ayme J.-L., Isogonal points and parallelism, *Mathlinks* du 04/12/2007 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=177608.

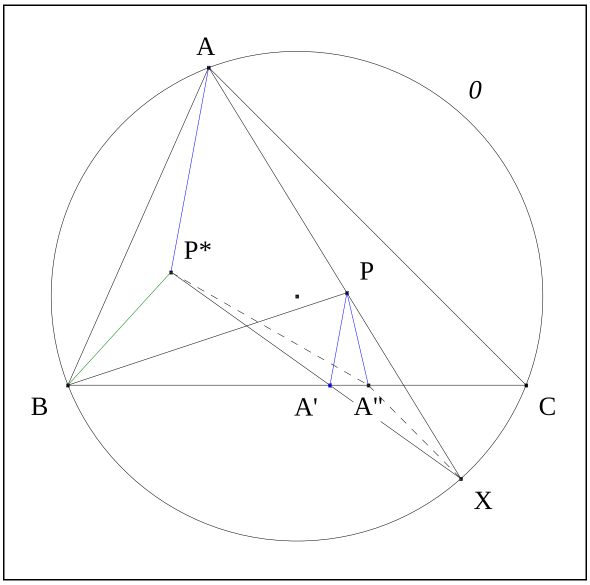


- Une seconde chasse angulaire à π près :
  d'après le théorème des angles inscrits, <BA'U = <BPU ;
  dans les angles alternes-internes, <BPU = <PBA ;
  par définition de P*, <ABP = <CBP* ;
  par une autre écriture, <CBP* = <A'BP* ;
  par transitivité de la relation =, <BA'U = <A'BP*.

- D'après le théorème des angles alternes-internes, (A'U) // (BP*).

- **Conclusion :** d'après "Le théorème faible de Desargues" (Cf. Annexe 7), appliqué aux triangles homothétiques P*AB et A'PU, P*, A' et X sont alignés.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que P*, A' et X sont alignés
  et (A'P) n'est pas parallèle à (AP*).

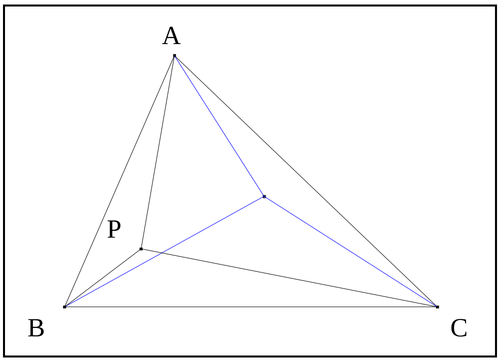
- Notons A" le point de (BC) tel que (A"P) soit parallèle à (AP*).

- **Scolie :** A" est distinct de A'.
- D'après la condition nécessaire, P*, A" et X sont alignés.
- D'après l'axiome d'incidence Ia, A" est confondu avec A', ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** (A'P) est parallèle à (AP*).

Note historique : Khoa Lu Nguyen connu sous le pseudonyme de "Treegoner" a proposé en 2005 la condition suffisante et un mathlinker connu sous le pseudonyme de "Grobber" en a donné un preuve dynamique. En 2007, l'auteur a proposé la condition suffisante et la sud coréen Hansol plus connu sous le pseudonyme de "Leonhard Euler" en a proposé la condition nécessaire. La solution proposée s'inspire de celle de Hansol.

X. ANNEXE

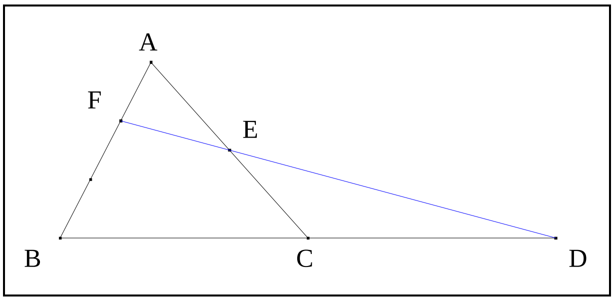
1. The isogonal theorem[42]



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et *Da* , *Db* , *Dc* les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné : *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

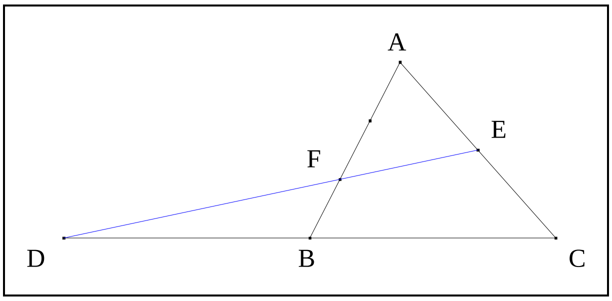
2. Tiers point et milieu



Traits : ABC un triangle,
F le second tiers-point de [BA] à partir de B,
E le milieu de [AC]
et D le point d'intersection de (EF) et (BC).

Donné : C est le milieu de [BD].

3. Tiers point et milieu

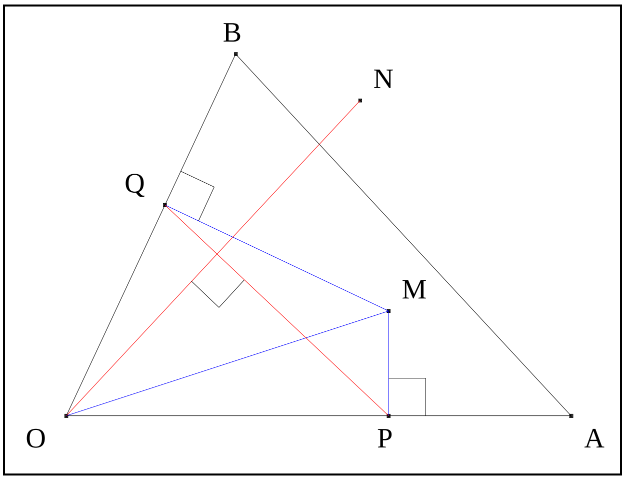


[42] Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.

Traits :	ABC	un triangle,
	F	le premier tiers-point de [BA] à partir de B,
	E	le milieu de [AC]
et	D	le point d'intersection de (EF) et (BC).

Donné : B est le milieu de [CD].

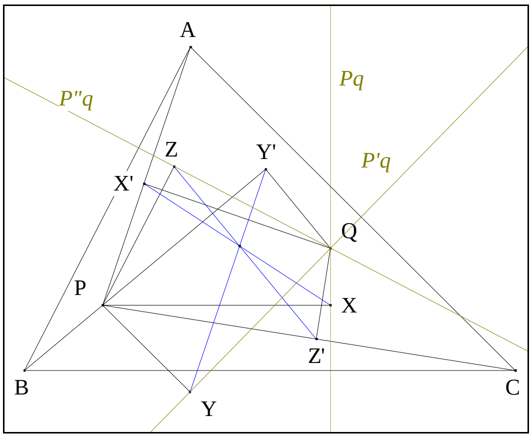
4. Isogonale et perpendiculaire[43]



Traits :	OAB	un triangle,
	M	un point,
	P, Q	les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (OA) et (OB),
et	N	un point.

Donné : la droite (ON) est l'isogonale de la droite (OM) par rapport aux droites (OA) et (OB)
si, et seulement si,
la droite (ON) est perpendiculaire à la droite (PQ).

5. Le théorème des six pieds[44]



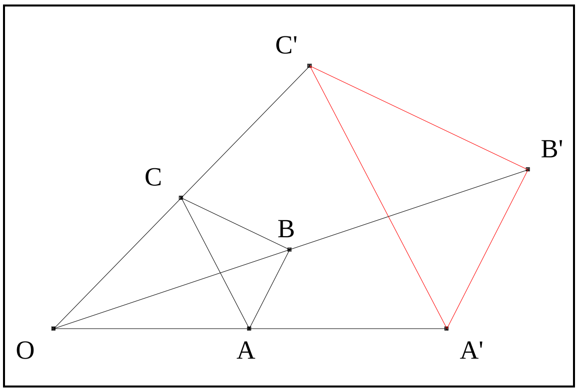
Traits :	ABC	un triangle,
	P, Q	deux points,
	*P*q , *P*'q, *P*"q	les perpendiculaires abaissées de Q resp. sur (BC), (CA), (AB),
	X, Y, Z	les pieds des perpendiculaires abaissées de P resp. sur *P*q, *P*'q, *P*"q

[43] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.
[44] Grinberg D..

et X', Y', Z' les pieds des perpendiculaires abaissées de Q resp. sur (AP), (BP), (CP).

Donné : (XX'), (YY') et (ZZ') sont concourantes.

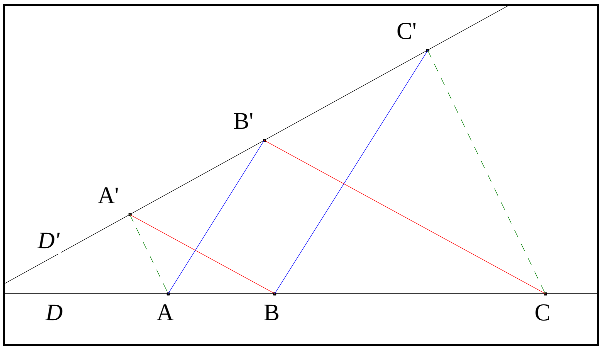
6. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que (1) (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

7. Le petit théorème de Pappus[45]



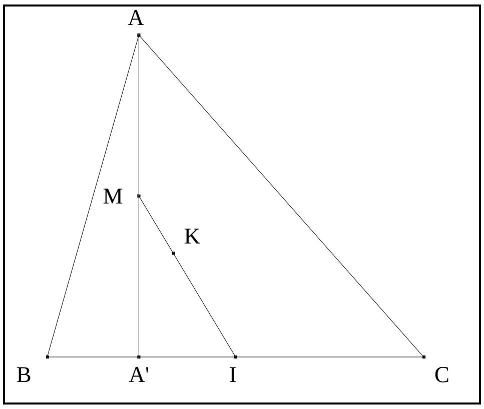
Traits : *D*, *D'* deux droites,
A, B, C trois points pris dans cet ordre sur *D*,
B' un point
et A', C' deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

8. Le milieu d'une hauteur[46]

---

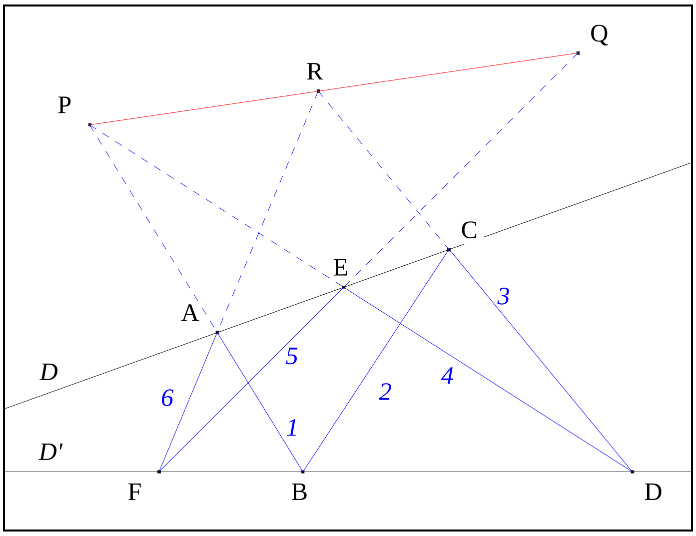
[45] Pappus, *Collections* Livre VII.
[46] Schloemilch Oscar (1823-1901) 1862.



Traits :	ABC	un triangle,
	A'	le pied de la A-hauteur de ABC,
	M	le milieu de [AA'],
	I	le milieu de [BC]
et	K	le point de Lemoine de ABC.

Donné : I, K et M sont alignés.

9. La proposition 139 de Pappus[47]

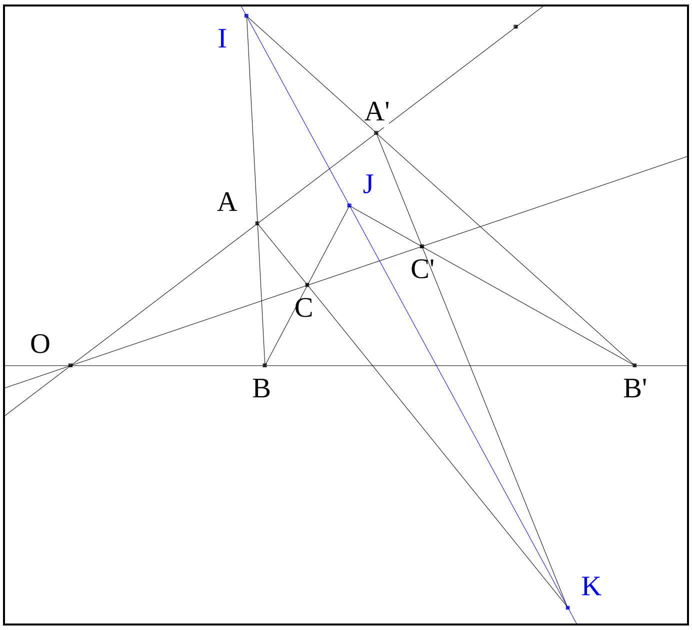


Traits :	D, D'	deux droites,
	ABCDEFA	un hexagone de Pappus
et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : E est sur (AC) *si, et seulement si*, P, Q et R sont alignés.

10. Le théorème des deux triangles de Desargues[48]

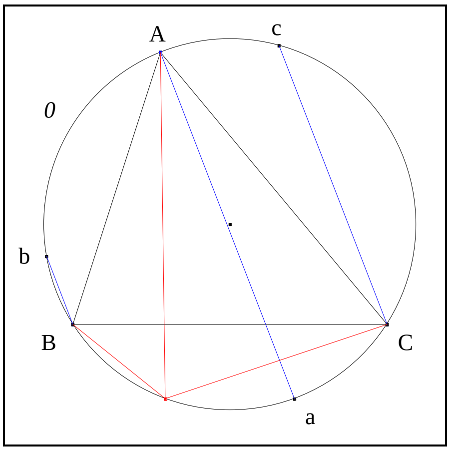
[47] Pappus, *Collections*, Livre VII.
[48] Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
O le point de concours de (AA') et (BB'),
I le point d'intersection de (AB) et (A'B'),
J le point d'intersection de (BC) et (B'C')
et K le point d'intersection de (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.

11. Le théorème de Beltrami[49]

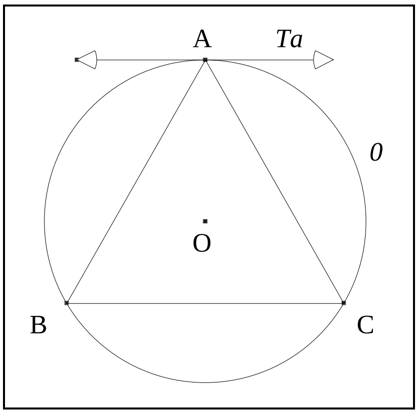


Traits: ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
*D*a, *D*b, *D*c trois céviennes passant par A, B, C,
a, b, c les seconds points d'intersection de *D*a, *D*b, *D*c avec *0*,
et *D'*a, *D'*b, *D'*c les isogonales de *D*a, *D*b, *D*c.

Donné : *D*a, *D*b, *D*c sont parallèles *si, et seulement si,* *D'*a, *D'*b, *D'*c sont concourantes sur *0*.

10. Tangente au sommet

[49] Beltrami E., *Archives* de Grünert 43, p. 48.



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*
et	*Ta*	la tangente à *0* en A.

Donné : ABC est isocèle en A *si, et seulement si,* *Ta* est parallèle à la base (BC).