FRANCISCUS JOHANNES VAN DEN BERG

POINTS JUMEAUX

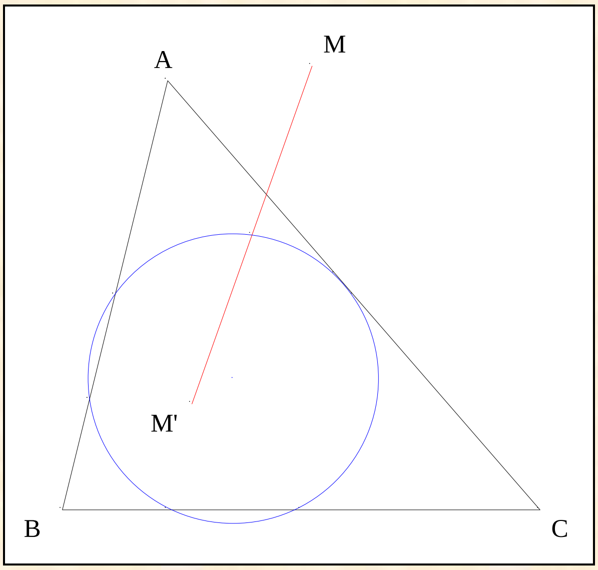
ET

CERCLE D'EULER

PAIRS of POINTS : ANTIGONAL, ISOGONAL and INVERSE

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente un résultat de F. J. van den Berg par deux voies différentes dont l'une permet à l'auteur de trouver nouveau centre du triangle. L'étude se poursuit avec un remarquable résultat de John Casey liant points antigonaux, isogonaux et inverses. Des exercices résolus terminent l'article.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The article presents a result of F. J. van den Berg by two different routes which one allows the author to find a new center of the triangle. The study continues with a remarkable result of John Casey binding antigonal, isogonal and inverse points. Solved exercises end the article.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be prouved synthetically.

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion (France), le 20/09/2011.

Sommaire

A. Peter Hendrik Schoute 3
1. Points jumeaux
2. Une courte biographie de P. H. Schoute

B. Franciscus Johannes van den Berg 5
I. Voie longue
1. Trois cercles concourants
2. Le cercle d'appui
3. Le résultat de F. J. van den Berg
II. Voie courte
1. Par le point d'Euler-Poncelet
2. Une très courte biographie de F. J. van den Berg

C. Un nouveau centre 18
1. Triangles d'Ocagne et antipédal

D. John Casey 22
1. Une construction de deux points jumeaux
2. Points inverses, isogonaux et antigonaux
3. Une courte biographie de John Casey

E. Exercices 35
I. Bui Quang Tuan
II. Jean-Pierre Ehrmann
1. Quatre cercles concourant de Floor van Lamoen
2. Quatre cercles concourant de Jean-Pierre Ehrmann
3. Points symgonaux
III. François Rideau
1. Un losange

F. Appendice 45
1. Une monienne brisée
2. Construction de l'inverse d'un point

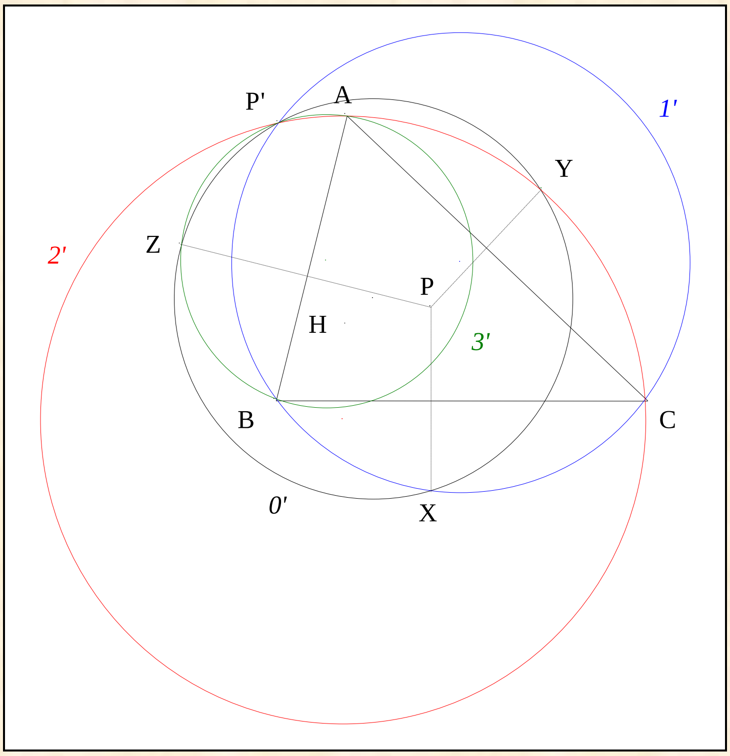
G. Annexe 51
1. Le théorème faible de Desargues
2. Le théorème des trois cercles concourants
3. L'alignement A-N-Oa
4. Point complémentaire ou la construction d'Ocagne

A. PIETER HENDRIK SCHOUTE

1. Points jumeaux

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
P un point distinct de A, B, C, H,
X, Y, Z les symétriques de P par rapport à (BC), (CA), (AB),
et *0'*, *1'*, *2'*, *3'* les cercles circonscrits aux triangles XYZ, XBC, YCA, ZAB.

Donné : *1'*, *2'* et *3'* concourent sur *0'*. [2]

Énoncé traditionnel :

à trois cercles passant par un même point
et
par les extrémités de chacun des côtés d'un triangle,
correspondent
trois cercles symétriques qui passent par un même point.

Scolies : **(1)** le point de vue ponctuel

- Notons P' ce point de concours.

---

[2] Schoute P. H., *Journal de Mathématiques Spéciales* n° **93** (1889) 57 ;
Ayme J.-L., Les points jumeaux de Schoute, G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- Par définition, P' est "le jumeau de P relativement à ABC".
  En anglais, P' est "the twin point of P or the reflection conjugate of P with respect to ABC" ;
  En allemand, P' est "der Zwillingspunkte von P".

(2) Symétrie du résultat

- Mutatis mutandis, nous montrerions que P est "le jumeau de P' relativement à ABC".

- En conséquence, "P et P' sont deux jumeaux relativement à ABC".

(3) Deux cas particuliers

si, P est l'orthocentre de ABC
alors, P' est indéterminé sur le cercle circonscrit ;

si, P est sur le cercle circonscrit
alors, P' est l'orthocentre de ABC.

(4) Exemples de jumeaux [3]

Lemoine point	===>	X(67)
Incenter	===>	X(80)
Circumcenter	===>	X(265)
Centroid	===>	X(671)
Gergonne point	===>	X(1156)
Ninepoint center	===>	X(1263)
Nagel point	===>	X(1320)

(5) Le point de vue des angles de droites

$<BPC + <BP'C = 0$ (mod. Π)
$<CPA + <CP'A = 0$ (mod. Π)
$<APB + <AP'B = 0$ (mod. Π).

(6) Le point de vue angulaire

- Par définition, P' est "l'antigonal de P relativement à ABC" et réciproquement ;
  en conséquence, "P et P' sont deux antigonaux relativement à ABC".

(7) Exemple

- Les deux points de Fermat, notés F+ et F-, répertoriés sous X_{14} et X_{15} chez ETC [4], sont antigonaux.

2. Une courte biographie de Pieter Hendrik Schoute

3 Danneels E., Triangle point transformation based on reflections, Message *Hyacinthos* # **7965** du 21/09/2003 ; http://tech.dir.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7965

4 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

 [5]

Pieter Hendrik Schoute est né le 21 janvier 1846 à Wormerveer (Pays-Bas).
Professeur à l'université de Groningue (Pays-Bas) est surtout connu pour avoir fait connaître en France dans un article de *Journal de Mathématiques Spéciales* n° **93** de 1889, une nouvelle transformation dite "par cercles symétriques" qui consiste à faire correspondre à trois cercles passant par un même point et par deux des sommets d'un triangle, trois cercles symétriques passant aussi par un même point.
De 1881 jusqu'à sa mort, il professe à l'université de Groningen.
Il décède le 18 avril 1813 à Groningen (Pays-Bas).

Précisons que certains géomètres attribuent la paternité des points jumeaux à Franciscus Johannes van den Berg en 1881, d'autres à August Artzt dans *Programmm des Gymnasiums zu Recklinghausen* de l'année 1885-86.

B. FRANCISCUS JOHANNES van den BERG

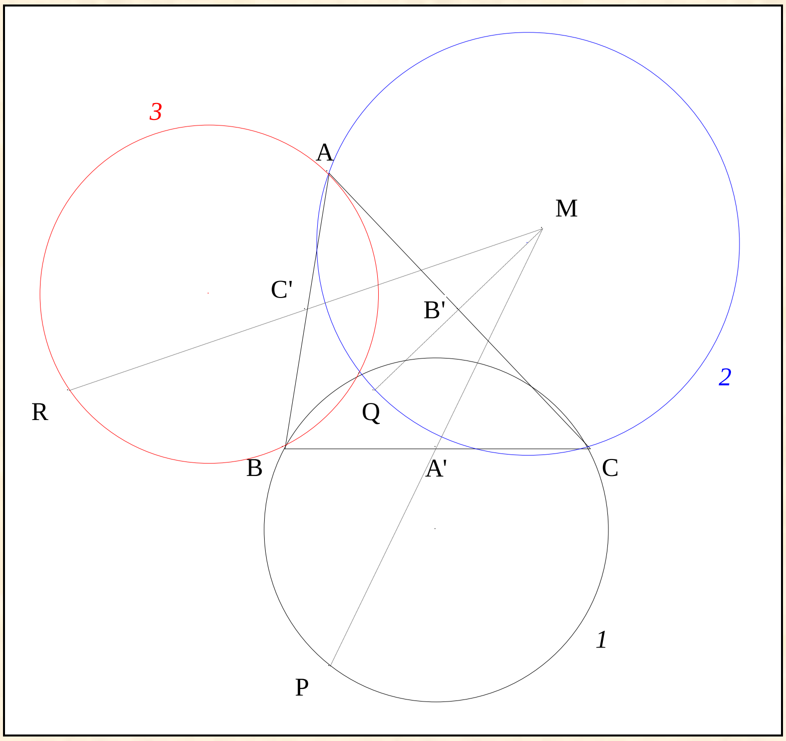
I. VOIE LONGUE

1. Trois cercles concourants

VISION

Figure :

[5] The MacTutor History of Mathematics archive ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

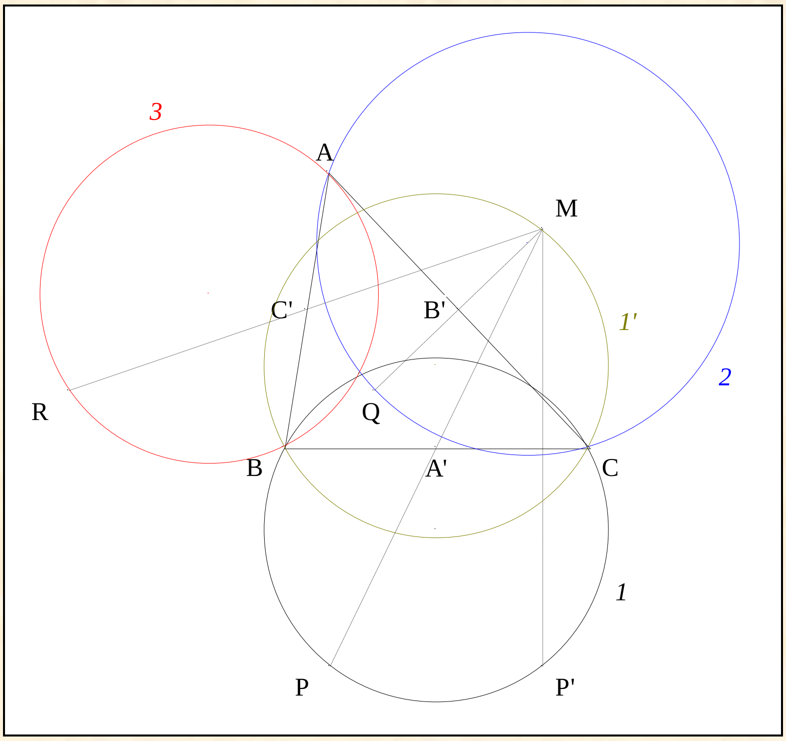


Traits :	ABC	un triangle,
	A', B', C'	les milieux resp. de [BC], [CA], [AB],
	M	un point,
	P, Q, R	les symétriques de M resp. par rapport à A', B', C'
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. des triangles PBC, QCA, RAB.

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants.[6]

VISUALISATION

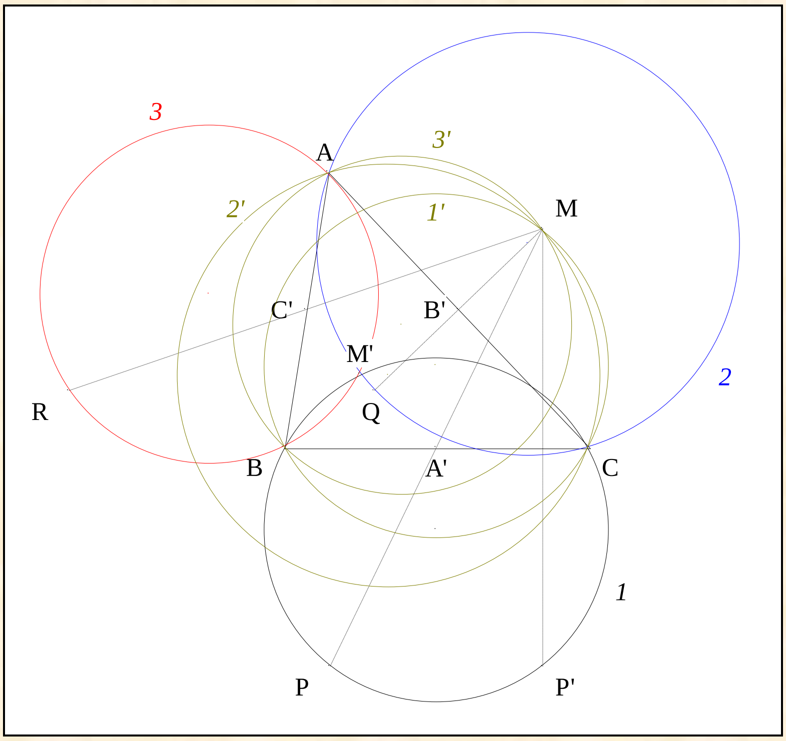
[6] van den Berg F. J., *Mathesis* **141** (1881) ; solution de Liénard A.-M. (**1882)** 226.



- Notons *1'* le cercle circonscrit au triangle MBC
  et P' le symétrique de M par rapport à (BC).

- **Scolie :** A' étant le milieu de [MP] et de la corde commune [BC] des cercles *1* et *1'*, P' est sur *1*.

- **Conclusion partielle :** *1* et *1'* sont symétriques par rapport à (BC).

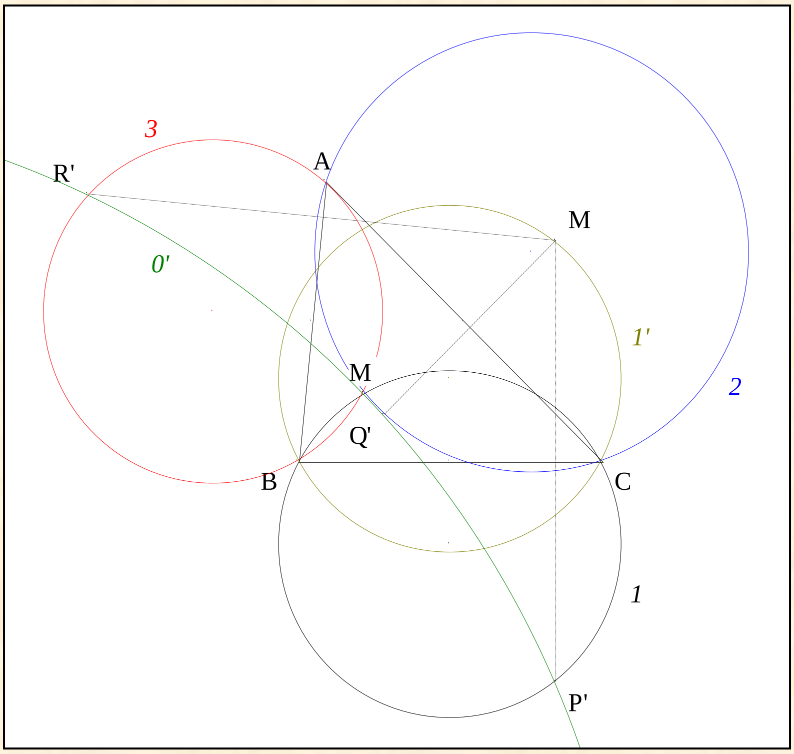


- Notons *2', 3'* les cercles circonscrits resp. aux triangles MCA, MAB.

- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Points jumeaux,
  1', *2'* et *3'* passant par M et par les extrémités de chacun des côtés du triangle ABC,
  les cercles symétriques de *1*, *2* et *3* sont concourants.

- Notons M' ce point de concours.

Scolie : un quatrième cercle



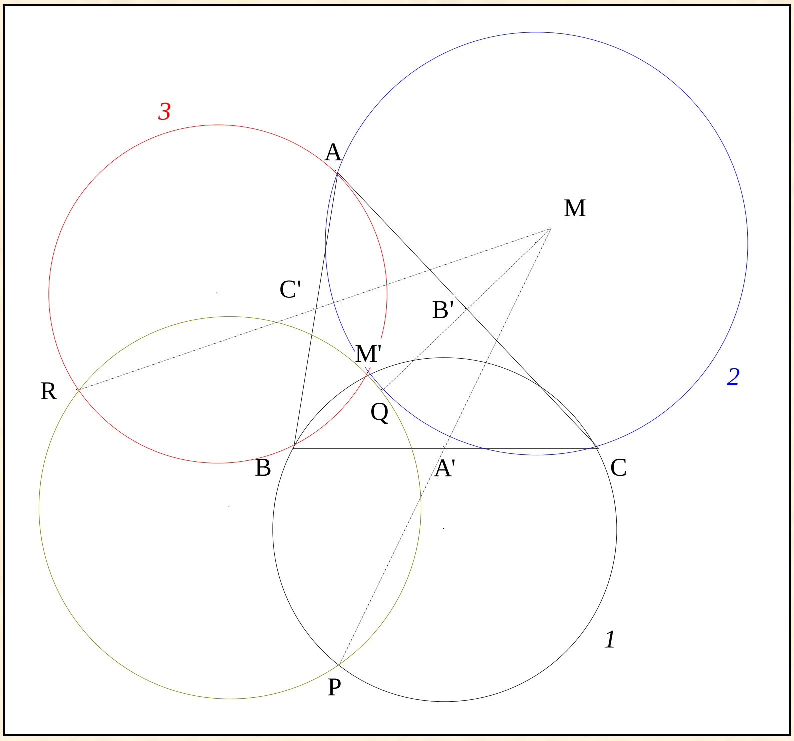
- Notons Q', R' les symétriques resp. de M par rapport à (CA), (AB)
  et *0'* le cercle passant par P', Q' et R'.

- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Points jumeaux, *1'*, *2'* et *3'* concourent sur *0'*.

2. Le cercle d'appui

VISION

Figure :



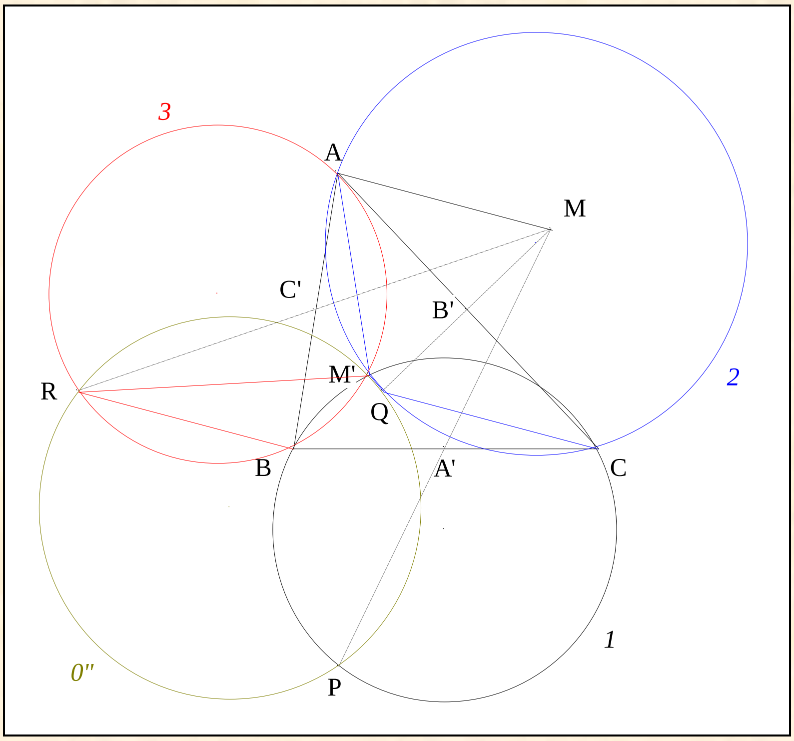
Traits :	ABC	un triangle,
	A', B', C'	les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]
	M	un point,
	P, Q, R	les symétriques de M resp. par rapport à A', B', C',
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, QCA, RAB
et	M'	le point de concours de *1*, *2*, *3*.

Donné : P, Q, R et M' sont cocycliques. [7]

VISUALISATION

- D'après **A. 1.** Points jumeaux, *1*, *2* et *3* sont concourants en M'.

[7] Gémellité et cercle d'Euler, *Les Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,690752



- Notons *0"* le cercle passant par Q, R et M'.

- **Commentaire :** montrons que P est sur *0"*.

- Une chasse angulaire à Π près :

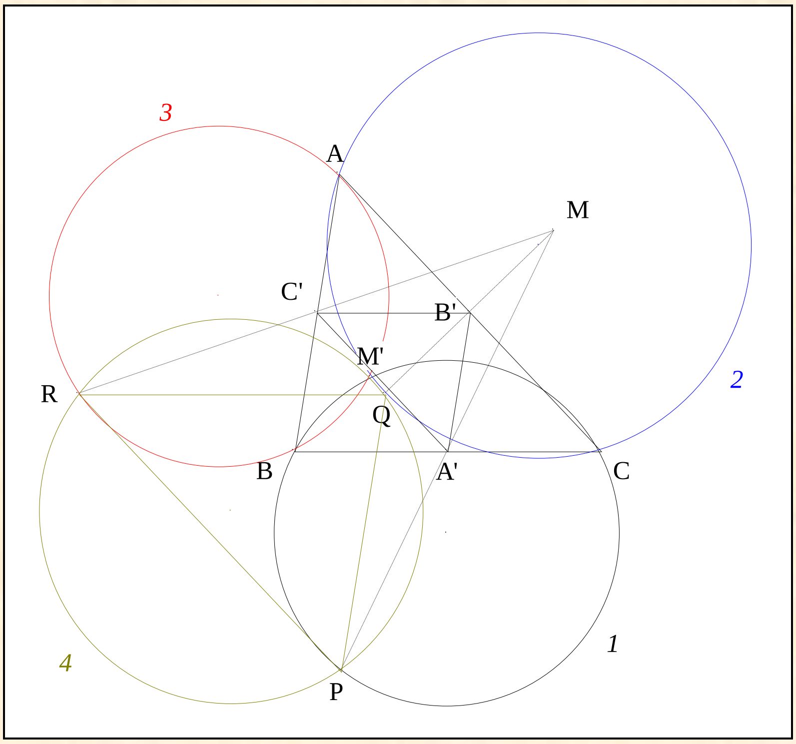
d'après "La relation de Chasles", <QM'R = <QM'A + <AM'R ;

d'après "Le théorème de l'angle inscrit" appliqué à *2*, <QM'A = <QCA
à *3*, <AM'R = <ABR ;

les quadrilatères AMCQ et AMBR étant des parallélogrammes,
(CQ), (AM) et (BR) sont parallèles entre elles.

d'après "Le théorème angles alternes-internes", <QCA = <MAC
<ABR = <BAM ;

par transitivité de la relation =, <QM'R = <MAC + <BAM
ou encore, <QM'R = <MAC **-** <MAB
d'après "La relation de Chasles", <QM'R = <BAC ;

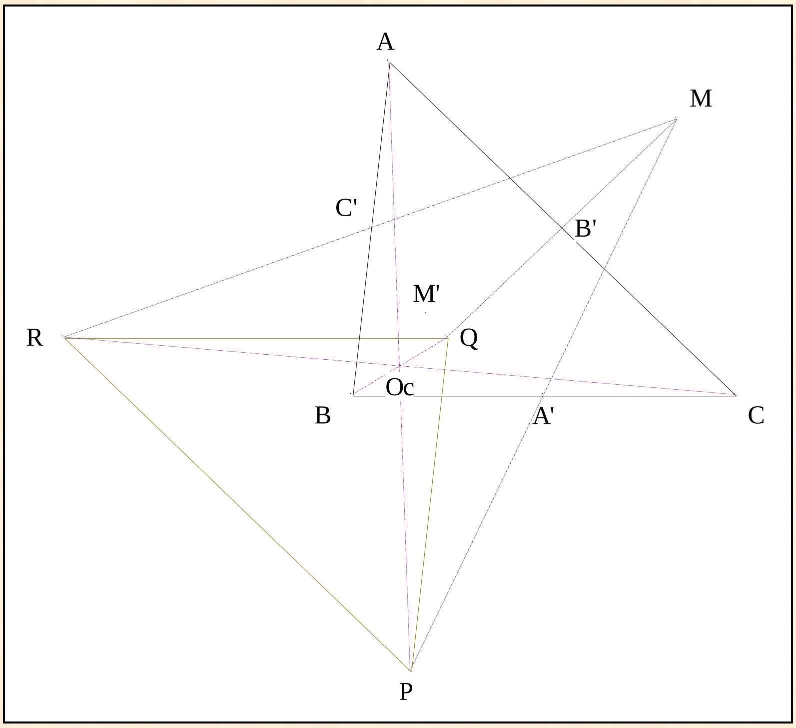


ABC étant homothétiques à A'B'C', <BAC = <B'A'C' ;
A'B'C' étant homothétiques à PQR, <B'A'C' = <QPR ;
par transitivité de la relation =, <QM'R = <QPR ;
en conséquence, P est sur *0''*.

- **Conclusion :** P, Q, R et M' sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

Scolies : **(1)** le point d'Ocagne (1882)



- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe)
  appliqué aux homothétiques ABC et PQR, (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

- Notons Oc ce point de concours.

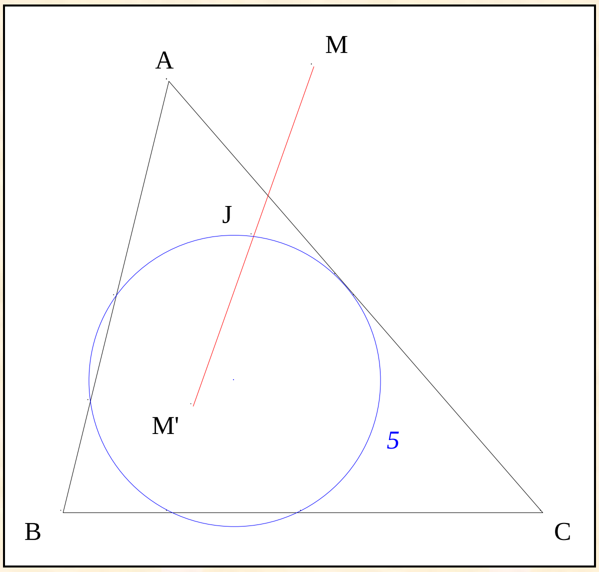
- Oc est le point d'Ocagne de ABC.

(2) PQR est "le M-triangle d'Ocagne de ABC".

3. Le résultat de van den Berg

VISION

Figure :



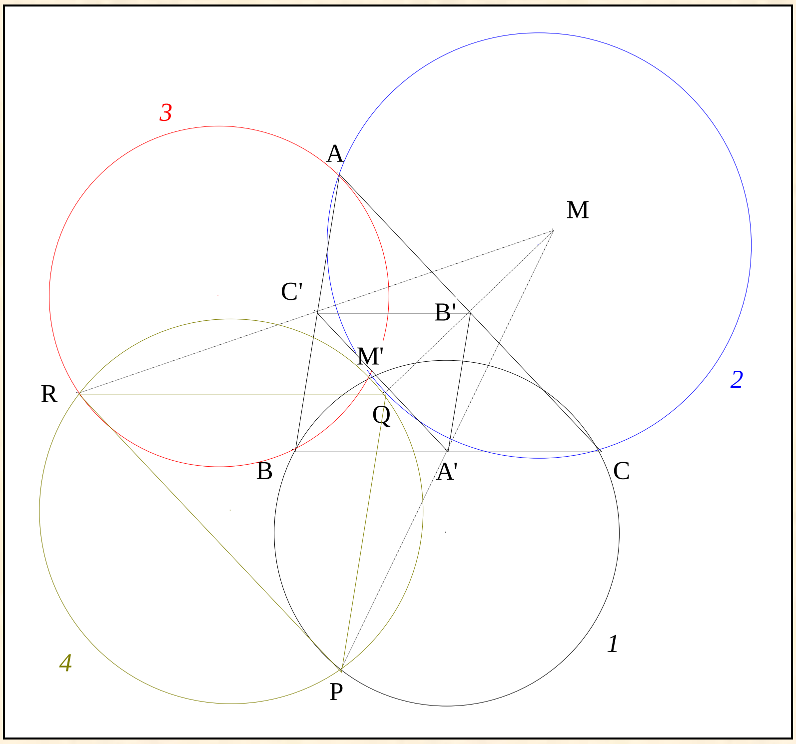
Traits : ABC un triangle,
5 le cercle d'Euler de ABC,
M, M' deux points jumeaux,
et J le milieu de [MM'].

Donné : J est sur *1*.[8]

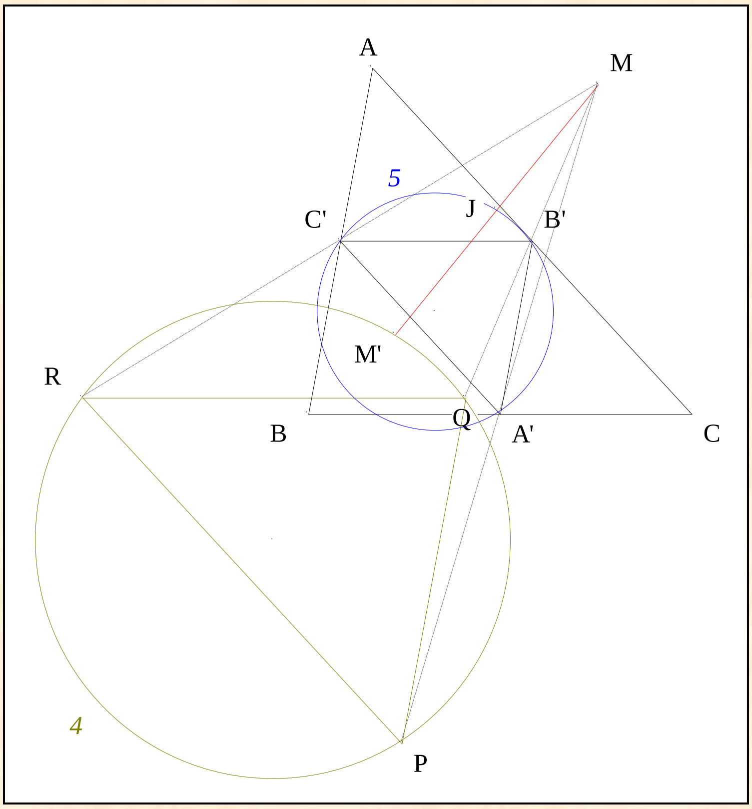
VISUALISATION

[8] van den Berg F. J., Over twee met betrekking tot een driehoek symmetrische groepen van drie cirkels, en over twee dergelijke groepen van drie rechte lijnen. (Dutch)
Title in English: On two groups of three circles symmetrical with respect to a triagle, and two similar groups of three straight lines.
[J] Nieuw Arch. **VII.** (1881) 78-90.

van den Berg F. J., *Mathesis* 141 (1881) ; solution de Liénard A.-M. **(1882)** 226
Gémellité et cercle d'Euler, *Les Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,690752



- Les hypothèses et notations sont les mêmes qu'en **B. 2.**



- **Conclusion :** *5* étant le cercle des milieux relativement à *4* et à M, J est sur *1*.

Note historique : un article de 1992 signé par Jan van Yzeren[9] propose une autre solution de ce résultat.

Énoncé traditionnel :

le milieu du segment qui joint deux points jumeaux d'un triangle
est sur
le cercle d'Euler de ce triangle.

Archive (en Allemand) :

Wenn drei über den Seiten eines Dreiecks als Sehnen beschriebene Kreise durch einen Punkt gehen, müssen auch die drei zu diesen Seiten symmetrischen Kreise einen Punkt mit einander gemein haben.

Nachdem dieser Satz mit Hülfe von trilinearen Coordinaten bewiesen worden ist, wird die Verwandtschaft der beiden Gruppen von Kreisen näher entwickelt.
Die conjugirten Schnittpunkte beider Gruppen haben folgende Eigenschaften :

1. Jedes Paar solcher Punkte sind die Endpunkte eines der Durchmesser einer dem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbel.

2. In Folge dessen ist der geometrische Ort der Mitten jedes solchen Paars der Neunpunktekreis des Dreiecks. Weiter wird die analoge Untersuchung für die beiden bemeinschaftlichen Schnittpunkte in zwei in Bezug auf die Winkel symmetrischen Gruppen von drei geraden Linien angestellt.

Scolie : les deux points de Fermat d'un triangle, notés F+ et F-, répertoriés sous X_{14} et X_{15} chez ETC [10], étant antigonaux,
le milieu de [F+F-] est sur le cercle d'Euler de ce triangle.

Commentaire : nous avons à découvrir la nature géométrique de ce milieu.

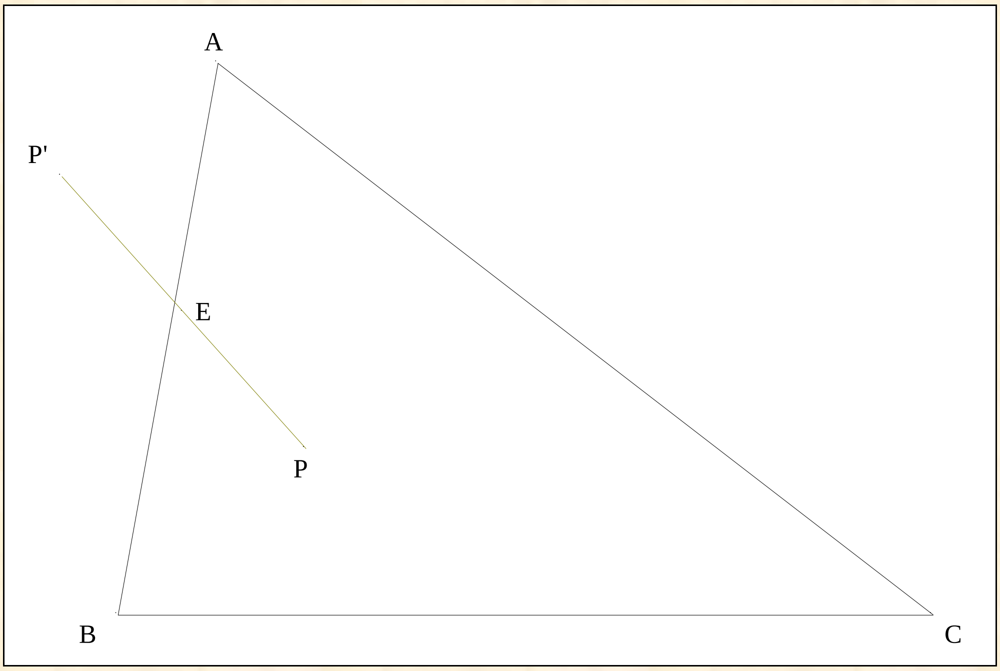
II. VOIE COURTE

1. Par le point d'Euler-Poncelet

VISION

Figure :

9 Van Yzeren J., Pairs of points: Antigonal, Isogonal, and Inverse, *Mathematics Magazine* vol. **65**, **5** (1992) 339-347.
10 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



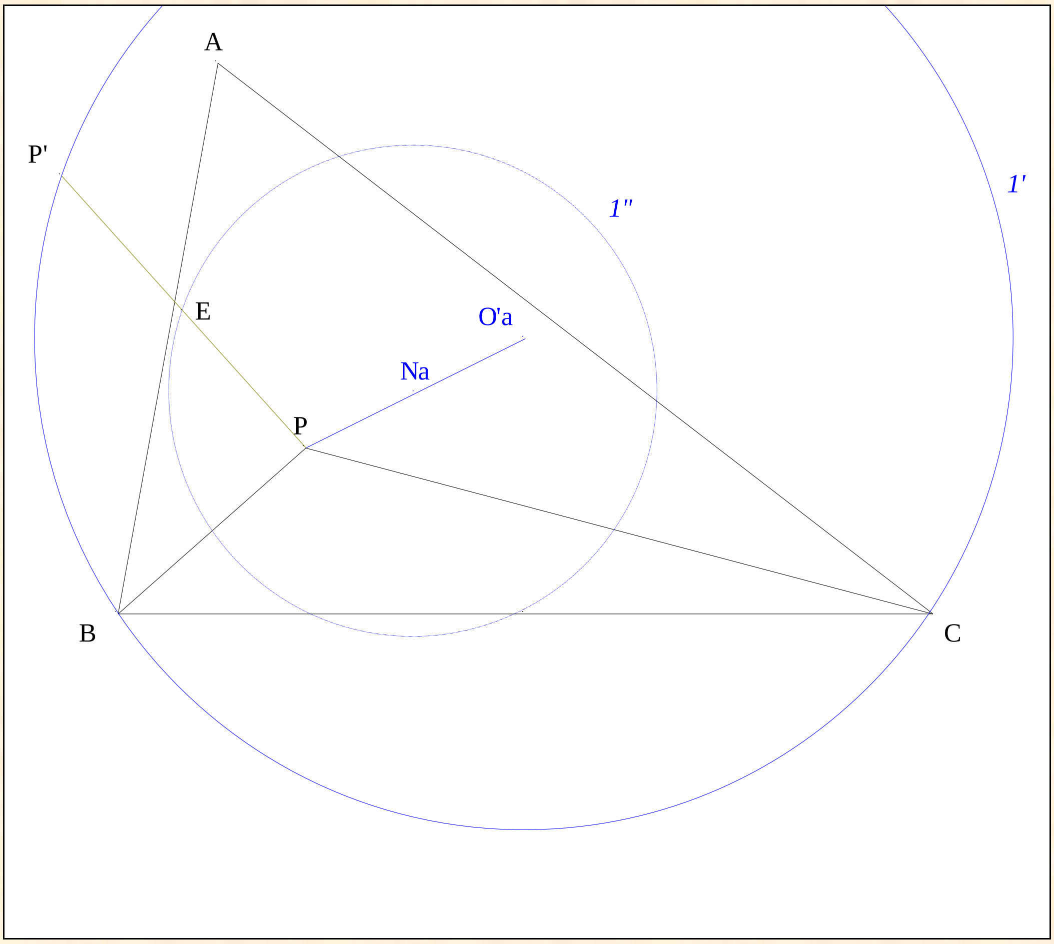
Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	P	un point distinct de A, B, C, H,
	E	le point d'Euler-Poncelet [11] du quadruplet (A, B, C, P)
et	P'	le jumeau de P relativement à ABC.

Donné : E est le milieu de [PP'].

VISUALISATION

- **Scolie :** E est le point de concours des cercles d'Euler des triangles PBC, PCA, PAB et ABC.
- Étude relative à PBC

[11] Ayme J.-L., Le point d'Euler-Poncelet d'un quadrilatère, G.G.G. vol. **8** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons *1'* le symétrique du cercle circonscrit à PBC par rapport à (BC) ; il passe par P' ;
  O'a le centre de *1'*,
  1" le cercle d'Euler de PBC ; il passe par E ;
  et Na le centre de *1"*.

- D'après **G. 3.** L'alignement A-N-Oa, Na est le milieu de [PO'a] ;
  en conséquence, *1'* est l'homothétiques de *1"* (centre P et de rapport 2).

- Notons *2'* le symétrique du cercle circonscrit à PCA par rapport à (CA) ; il passe par P' ;
  3' le symétrique du cercle circonscrit à PAB par rapport à (AB) ; il passe par P' ;
  2" le cercle d'Euler de PCA ; il passe par E ;
  et *3"* le cercle d'Euler de PAB ; il passe par E.

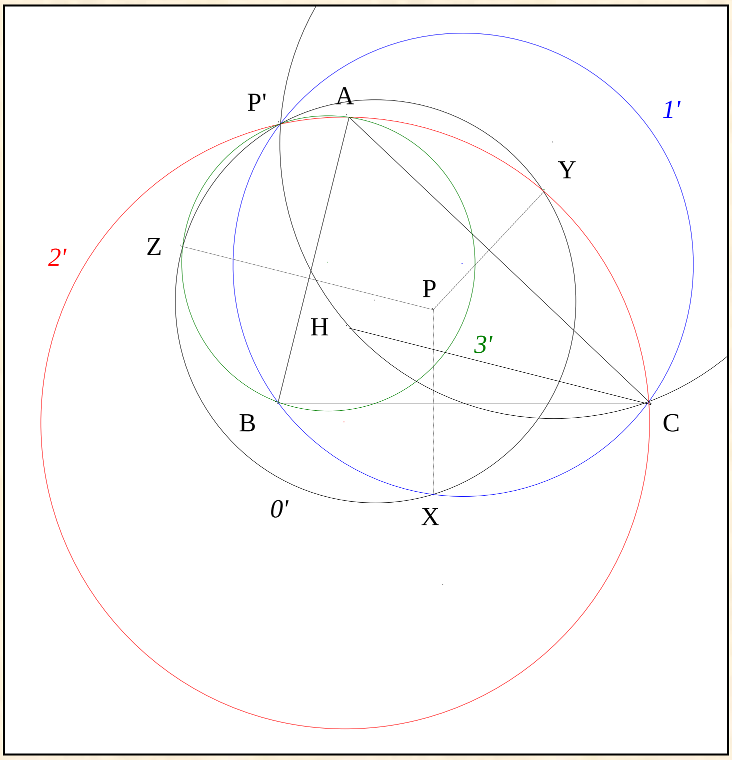
- **Conclusion :** par homothétie, E est le milieu de [PP'].

Énoncé traditionnel :

le jumeau d'un point P *relativement à un triangle* ABC
est
le symétrique de P *relativement au point d'Euler-Poncelet des quatre points* A, B, C *et* P.

Scolies : **(1)** cette approche suggère une construction de deux points jumeaux

(2) Avec le point H



- Le cercle d'Euler de ABC est aussi celui des triangles HBC, HCA, HAB.

- Le jumeau de P relativement à HAB est le point d'intersection des cercles d'Euler de HAB et PAH ;
  le jumeau de P relativement à HAC est le point d'intersection des cercles d'Euler de HAC et PAH ;
  en conséquence, ces deux jumeaux sont confondus.

- Raisonnement identique avec HBA et HBC.

- **Conclusion :** le jumeau P' de P relativement à ABC
  est aussi le jumeau de P relativement aux triangles HBC, HCA, HAB.

(3) Le point de vue des angles de droites

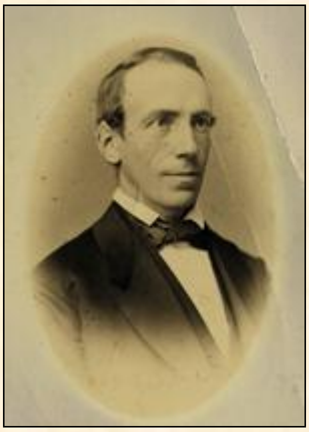
- D'après **A. 2.** Points jumeaux, scolie **5**

$$\angle BPH + \angle BP'H = 0 \quad (\text{mod. } \Pi)$$
$$\angle CPH + \angle CP'H = 0 \quad (\text{mod. } \Pi)$$
$$\angle APH + \angle AP'H = 0 \quad (\text{mod. } \Pi).$$

(4) Un dernier résultat

P' *étant le jumeau de* P *relativement à un triangle* ABC,
le point d'Euler-Poncelet de A, B, C, P
est aussi
le point d'Euler-Poncelet de A, B, C, P'.

2. Une très courte biographie de van den Berg


[12]

Franciscus Johannes van den Berg est né le 19 juillet 1833 à Rotterdam (Pays-Bas).
Il est le fils de Petrus Franciscus van den Berg et de Maria Theresia van Kerckhoff.
En septembre 1845, il suit les cours de mathématiques dirigés par le professeur chinois J. P. A. François à Erasmiaansch Gymnasium
De septembre à décembre 1883, il se fait remplacer par Thomas Jan Stieltjes à l'École Polytechnique de Delft.
Il décède le 30 mars 1892 à Hilversum (Pays-Bas).

Références : Huygens Institute - Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW)[13]

Remerciements à Chris van Tienhoven et à Ken Pledger pour les références en hollandais que l'auteur n'a pu lire.

C. UN NOUVEAU CENTRE

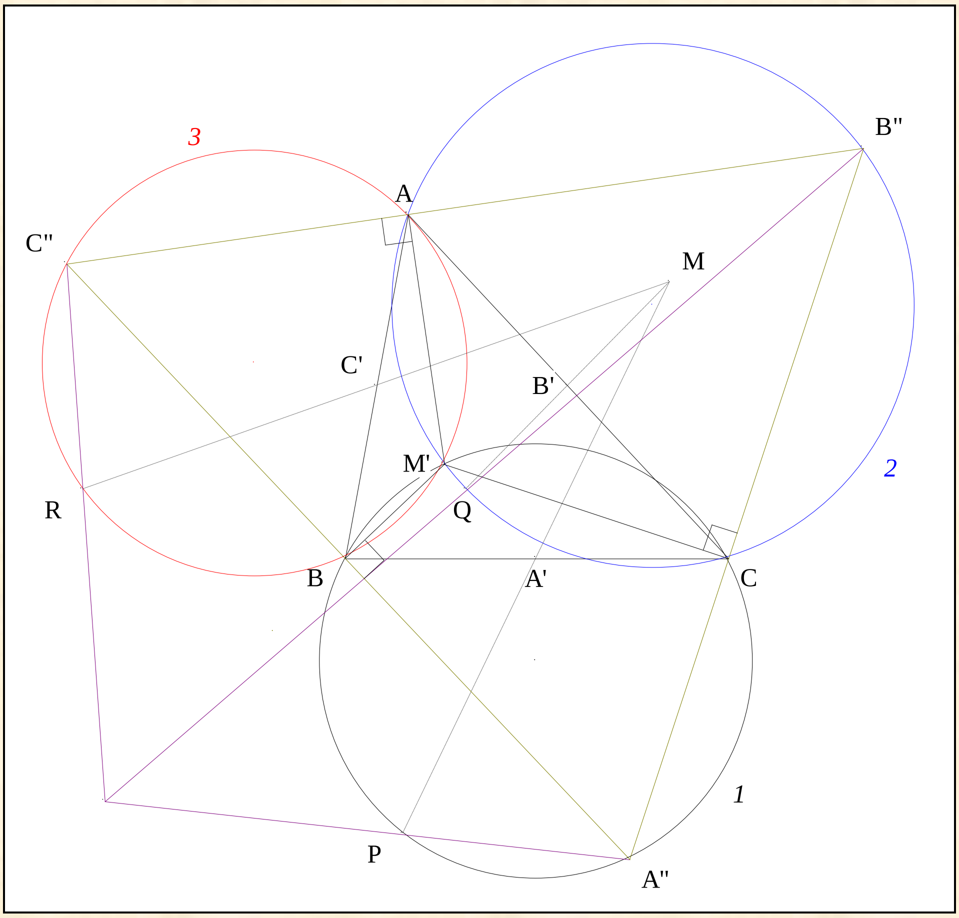
1. Triangles d'Ocagne et antipédal

VISION

Figure :

[12] Schoute P. H., Levensbericht F.J. van den Berg, Jaarboek (1897), Huygens Institute - Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW), Amsterdam, pp. 97-145 ; http://www.dwc.knaw.nl/DL/levensberichten/PE00001788.pdf

[13] http://www.biografischportaal.nl/persoon/03525984

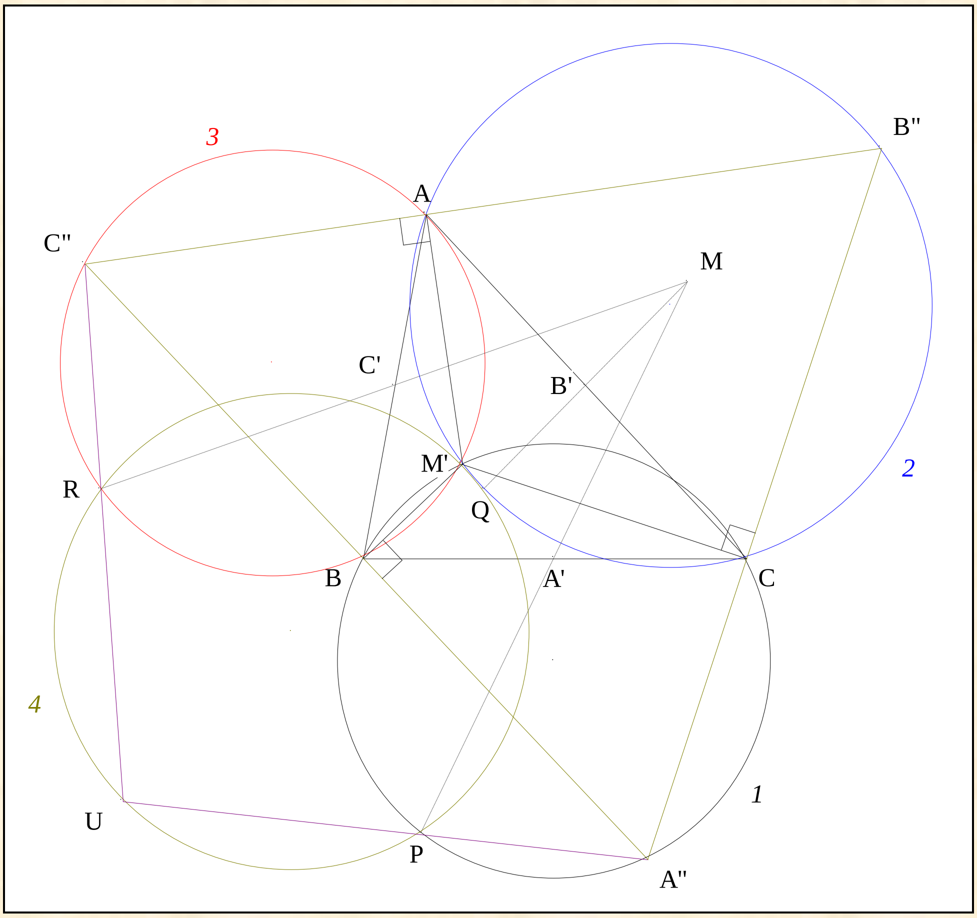


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A"B"C" le triangle antipédal de M'.

Donné : (A"P), (B"Q) et (C"R) sont concourantes. [14]

VISUALISATION

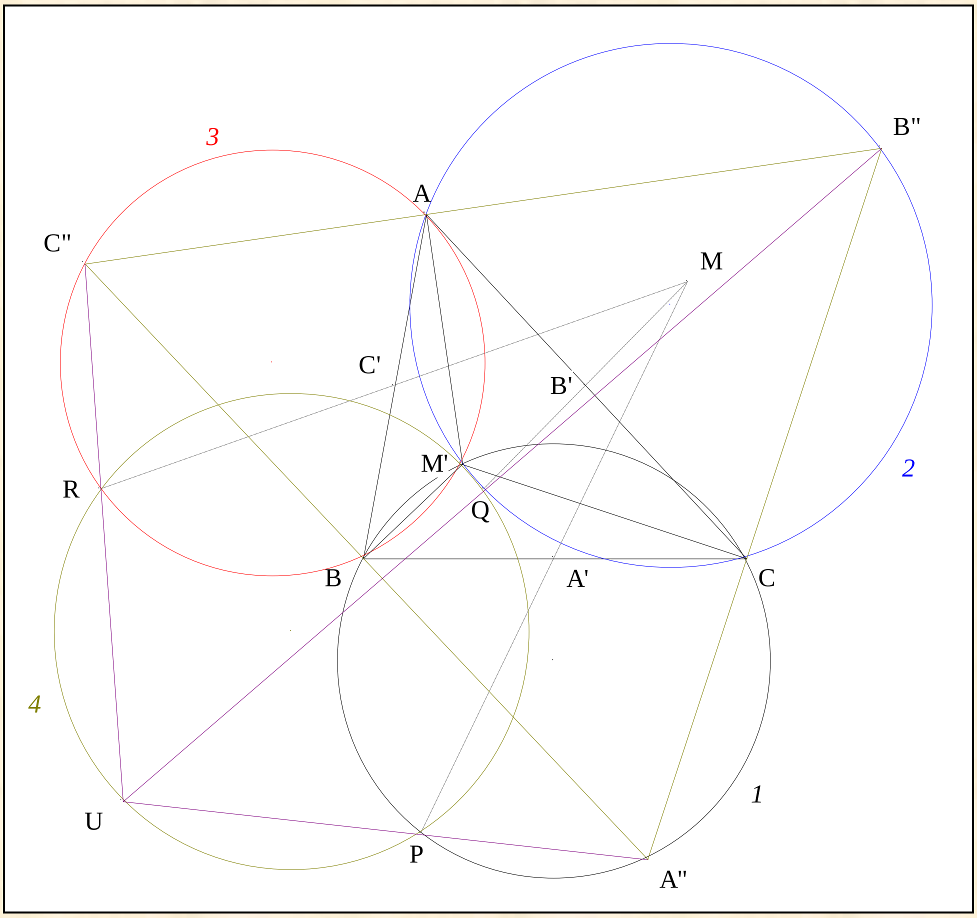
[14] Ayme J.-L., Three nice concurrent lines, *Mathlinks* du 30/08/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=427469
Ayme J.-L., Three nice concurrent lines, Message *Hyacinthos* # **20216** du 31/08/2011 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



* **Scolies :** A" est sur *1*
  B" est sur *2*
  C" est sur *3*.

* Notons U le point d'intersection de (A"P) et (C"R).

* D'après "Une monienne brisée" (Cf. **F.** Appendice **1**)
  appliquée à *1* et *3*, à la monienne (A"B C") et à la monienne brisée (PM'R), U est sur *4*.



- D'après "Le théorème des trois cercle concourants" (Cf. **G.** Annexe **1**) appliqué à *2*, *3* et *4*, B", Q et U sont alignés.

- **Conclusion :** (A"P), (B"Q) et (C"R) sont concourantes.

Énoncé traditionnel :

le triangle d'Ocagne relatif à un point d'un triangle
est en perspective avec
le triangle antipédal du point jumeau relativement au triangle.

Scolies : **(1)** *4* est le U-cercle de Mannheim[15] relativement à A"B"C" et aux cercles *1*, *2* et*3*.

(2) ce résultat ce généralise à tout triangle α-pédal.

Note historique : dans sa première réponse, l'espagnol Francisco Javier Garcia Capitan[16] précise que lorsque M est le centre O du cercle circonscrit à ABC, U est le point X_{399}.
Dans sa seconde réponse[17], il précise que lorsque M est le premier ou second point de Fermat, U est un nouveau centre de ABC.

---

15 Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim…, G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

16 Garcia Capitan F. J., Two perspective triangles, developpment to new centers?, Message *Hyacinthos* # **20214** du 31/08/2011 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

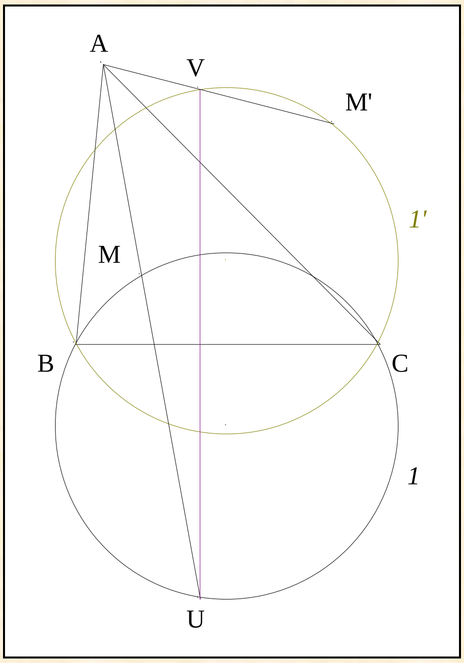
17 Garcia Capitan F. J., Two perspective triangles, developpment to new centers?, Message *Hyacinthos* # **20225** du 09/09/2011 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

D. POINTS INVERSES, ISOGONAUX ET ANTIGONAUX

1. Une construction de deux points jumeaux

VISION

Figure :

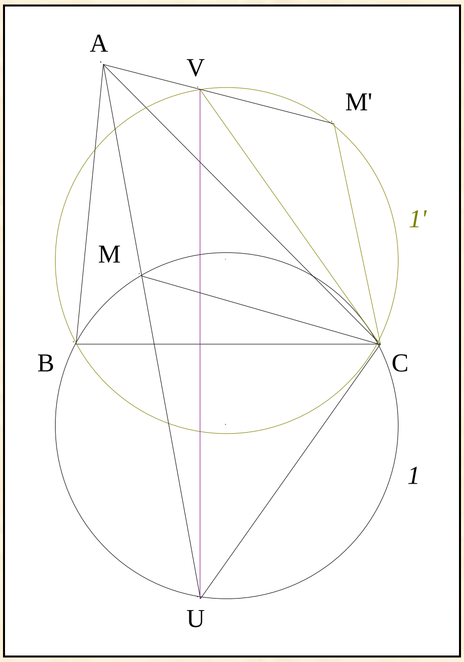


Traits :	ABC	un triangle,
	M, M'	deux points jumeaux de ABC,
	1, *1'*	les cercles circonscrits resp. aux triangles BMC, BM'C
	U	le second point d'intersection de (AM) avec *1*
et	V	le second point d'intersection de (AM') avec *1'*.

Donné : (UV) est perpendiculaire à (BC).[18]

VISUALISATION

[18] Ayme J.-L., Antigonal points, *Mathlinks* du 28/08/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=427148



- D'après **A. 1.** Points jumeaux, *1* passe par M et *1'* passe par M'.

- Une chasse angulaire à **Π** près :

  autre écriture, <CM'V = <CM'A ;
  d'après **A. 1.** Points jumeaux, scolie 3, <CM'A = <AMC ;
  autre écriture, <AMC = <UMC ;
  par transitivité de la relation =, <CM'V = <UMC.

  1 et *1'* étant symétrique par rapport à (BC), CV = CU.

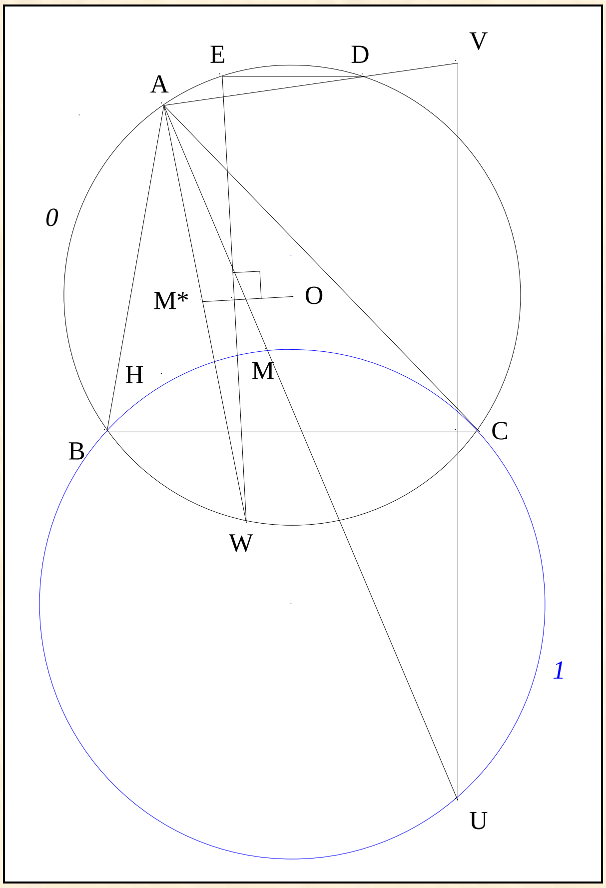
- **Conclusion :** (UV) est perpendiculaire à (BC).

Exercice : sur deux droites données, issues du sommet A d'un triangle ABC, déterminer un couple de points antigonaux (ou jumeaux).

2. Points inverses, isogonaux et antigonaux

VISION

Figure :

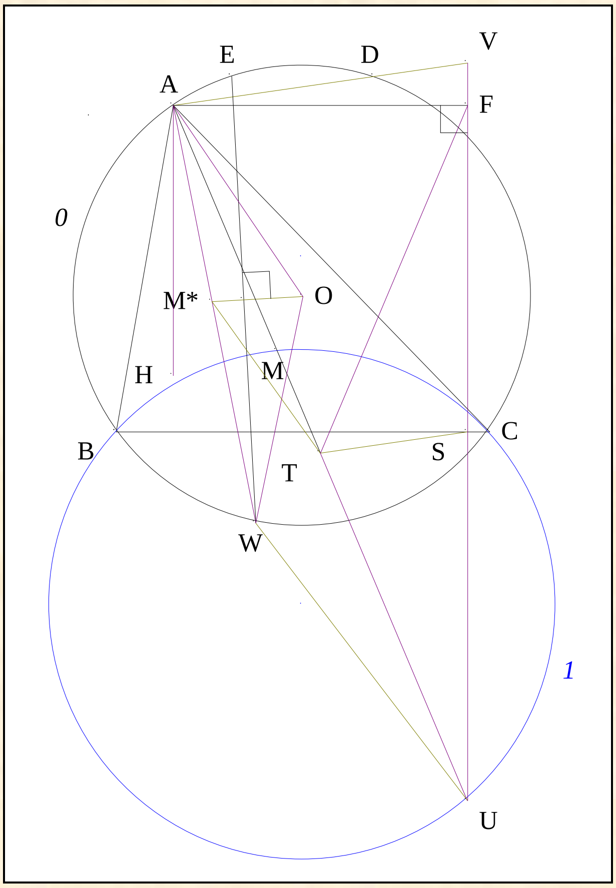


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	M	un point distinct de A, B, C, H,
	1	le cercle circonscrit au triangle BMC,
	U	le second point d'intersection de (AM) avec *1*,
	V	le symétrique de U par rapport à (BC),
	D	le second point d'intersection de (AV) avec *0*,
	M*	l'isogonal de M relativement à ABC,
	W	le second point d'intersection de (AM*) avec *0*
et	E	le symétrique de W par rapport à (OM*).

Donné : (DE) est parallèle à (BC).[19]

VISUALISATION

[19] Ayme J.-L., Two surprising parallels, *Mathlinks* du 08/09/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=429732



- **Scolies :** **(1)** E est sur *0*
  (2) le triangle FAU étant F-rectangle, TF = TU

- Notons F le pied de la perpendiculaire à (UV) issue de A,
  S le point d'intersection de (UV) et (BC),
  et T le milieu de [AU].

- **Scolies :** **(1)** le triangle OAW est O-isocèle
  (2) le triangle TUF est T-isocèle.

- Une chasse angulaire à Π près :

  * O et H étant deux points isogonaux de ABC, <WAO = <HAU ;
  * d'après le théorème "angles alternes-internes", <HAU = <FUA ;
  * par transitivité de la relation =, <WAO = <FUA ;

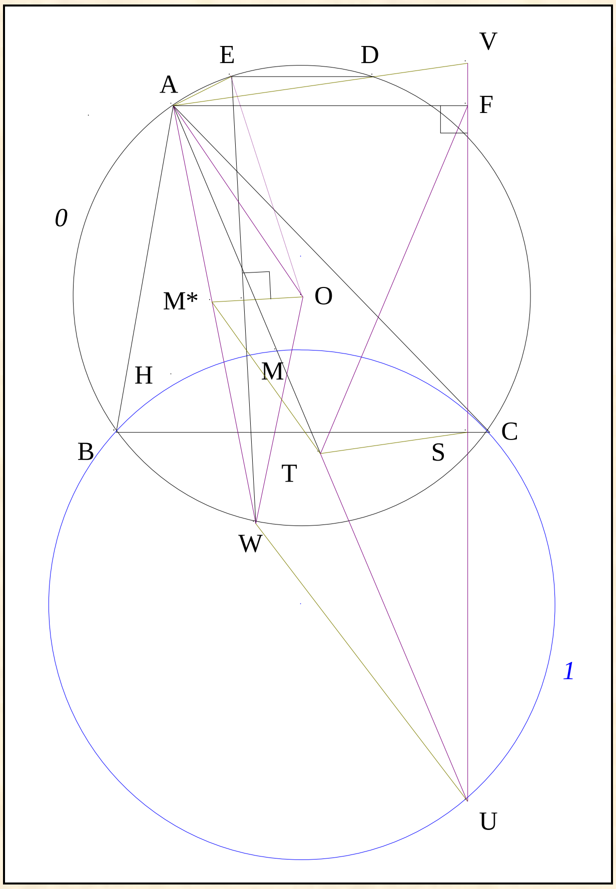
  en conséquence, OAW et TUF sont semblables.

- Une chasse de rapports :

  * d'après Thalès "La droite des milieux" appliquée aux triangles UVA, (TS) // (AV) ;
  en conséquence, $\frac{SU}{SV} = \frac{TA}{TU}$;

  * d'après Thalès "La droite des milieux" appliquée aux triangles AUW, (TM*) // (UW) ;
  en conséquence, $\frac{TA}{TU} = \frac{M^*A}{M^*W}$;

* par transitivité de la relation =, $\frac{SU}{SV} = \frac{M^*A}{M^*W}$;



- Une nouvelle chasse angulaire à Π près :

* d'après le théorème "angles au centre", <WAE = <M*OW

* M* et S divisant resp. [AW], [UV] dans le même rapport,
  les triangles OWM* et TUS sont semblables ;
  en conséquence, <M*OW = <UTS ;

* d'après le théorème "angles correspondants", <UTS = <UAD

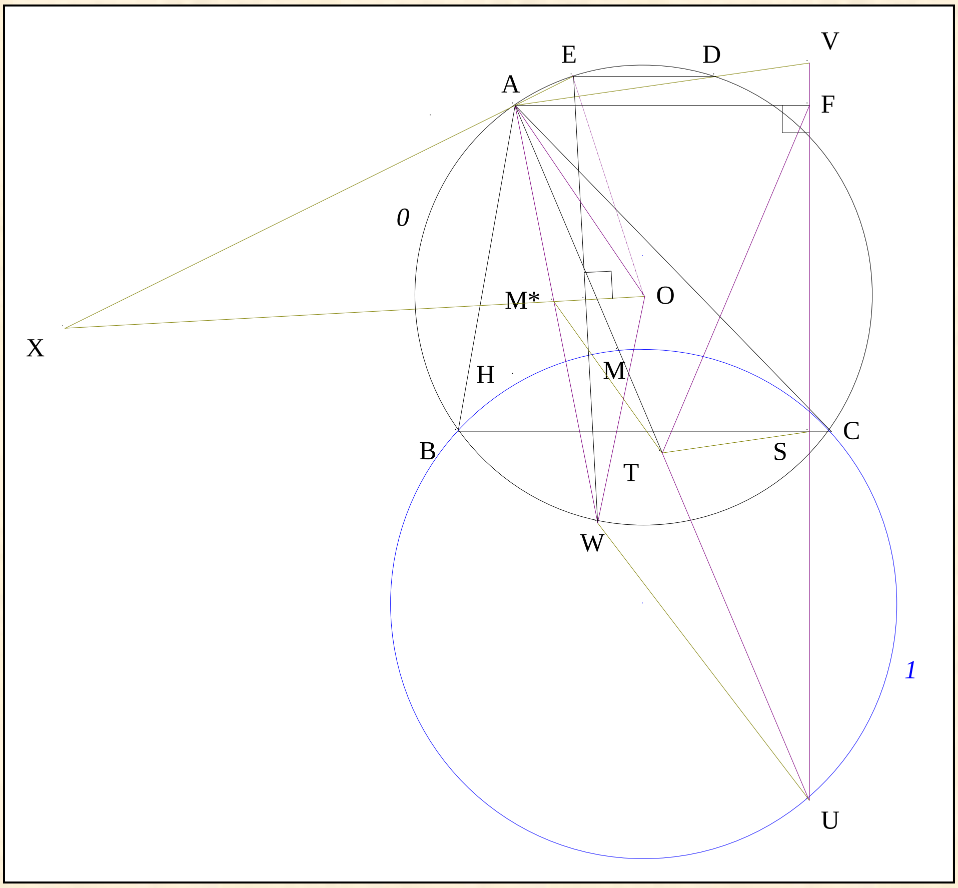
* par transitivité de la relation =, <WAE = <UAD ;

* en conséquence, (AE) et (AD) sont deux A-isogonales de ABC.

- **Conclusion :** relativement au sommet A de ABC, (DE) est parallèle à (BC).

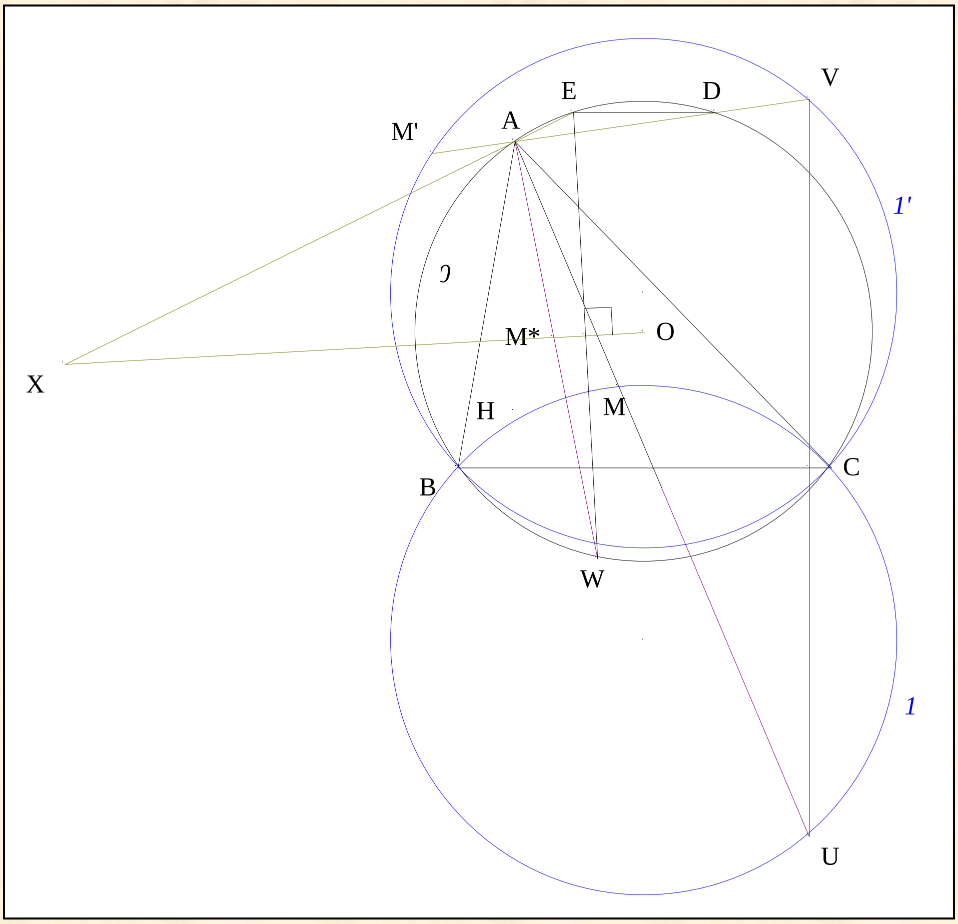
Note historique : la technique consistant à introduire le triangle T-isocèle TUF a été introduite par le diplômé YuMing Lee plus connu sous le pseudonyme "Lym" sur le site *Mathlinks*.

Scolies : **(1)** le point inverse de P* relativement à *0*



- Notons X le point inverse de P* relativement à *0*.
- D'après **E. 2.** Construction de l'inverse d'un point, X, A et E sont alignés.

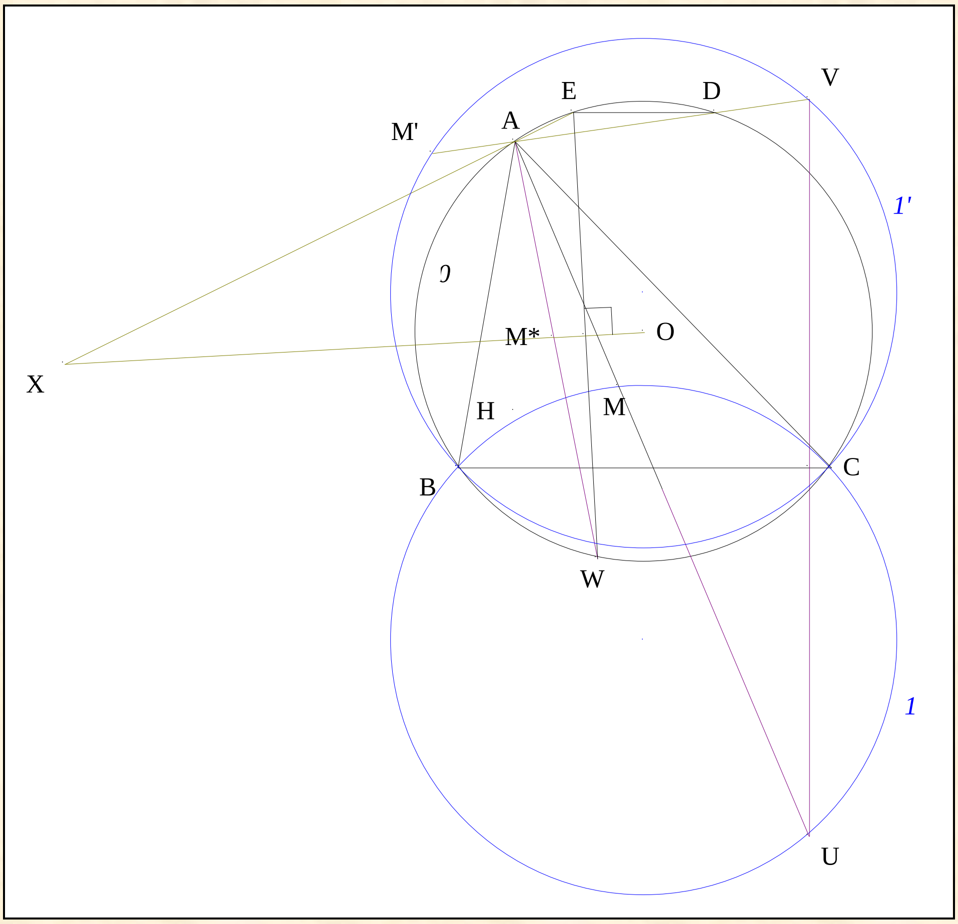
(2) L'antigonal de M



- Notons $1'$ le symétrique de 1 par rapport à (BC)
  et M' l'antigonal de M relativement à ABC.

- **Conclusion :** sachant que M' est sur $1'$, d'après **D. 1.** Une construction de deux points jumeaux, M' est le second point d'intersection de (AV) et $1'$.

(3) Vision triangulaire



- **Conclusion :** en raisonnant ensuite par rapport aux sommets B, C de ABC,
  nous concluons que M' est l'isogonal de X relativement à ABC.[20]

Récapitulation :

	M	un point de ABC distinct de H, A, B, C,
	M'	l'antigonal de M realtivement à ABC
	M*	l'isogonal de M relativement à ABC
	X	l'inverse de M* relativement à *0*
	M'	est l'isogonal de X relativement à ABC.

Énoncé traditionnel :

l'isogonal de l'inverse d'un point est l'antigonal de l'isogonal de ce point

ou encore

les isogonaux
de deux points inverses par rapport au cercle circonscrit d'un triangle
sont
antigonaux

ou encore

les isogonaux
de deux points antigonaux relativement à un triangle
sont
inverses par rapport au cercle circonscrit de ce triangle.

---

[20] Casey J., A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle and conic (1885; 2nd ed. 1893) 293; http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-99630&M=tdm

Note historique : l'auteur a rencontré ce résultat dans un livre de John Casey datant de 1885 sous la forme suivante :

Isogonal conjugates
of
inverse points with respect to circumcircle
are
twin points.

(4) Exemple

- les deux points de Fermat, notés F+ et F-, répertoriés sous X_{13} et X_{14} chez ETC [21], sont antigonaux.

- Les points "isodynamiques de ABC"[22] ou encore "les points de Hesse de ABC" sont répertoriés sous X_{15} et X_{16} chez ETC.

- Les isogonaux de F+ et F- sont resp. X_{15} et X_{16}.

- **Conclusion :** Les points "isodynamiques de ABC" sont inverses par rapport au cercle circonscrit de ABC.

3. Une courte biographie de John Casey

23

John Casey est né à Kilbehenny (Irlande), le 12 mai 1820.
Après ses études, il enseigne dans diverses écoles avant de prendre la direction du Central Model School de Kilkenny. En 1847, il épouse Catherine Ryan et de cette union naîtront deux garçons et deux filles. Durant ses moments de loisir, il se passionne pour les mathématiques, apprend le latin, le français et l'allemand. Il se fait connaître de géomètres comme le Dr. Salmon, et le professeur Townsend du Trinity College de Dublin en trouvant une solution du problème de Poncelet. En 1859, il entre au Trinity College où il obtient son B.A. en 1862. Durant les onze années suivantes, il professe à Kingstown School. En 1866, il devient membre de l'Académie royale irlandaise. En 1873, il devient professeur de mathématiques et de physique à l'université catholique de Dublin. Quelques années après, il refuse un poste de professeur au Trinity College. En 1874, il est élu membre de la London Mathematical Society.
De 1862 à 1868, il est l'un des éditeurs de la revue *Oxford, Cambridge, and Dublin Messenger of Mathematics*. Professeur dévoué et talentueux, homme pieux, membre du "Third Order of St-Francis", il a écrit de nombreux

---

21 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
22 Neuberg J., *Mathesis* (1885) **204**, renvoi.
23 The MacTutor History of Mathematics archive ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/C.html

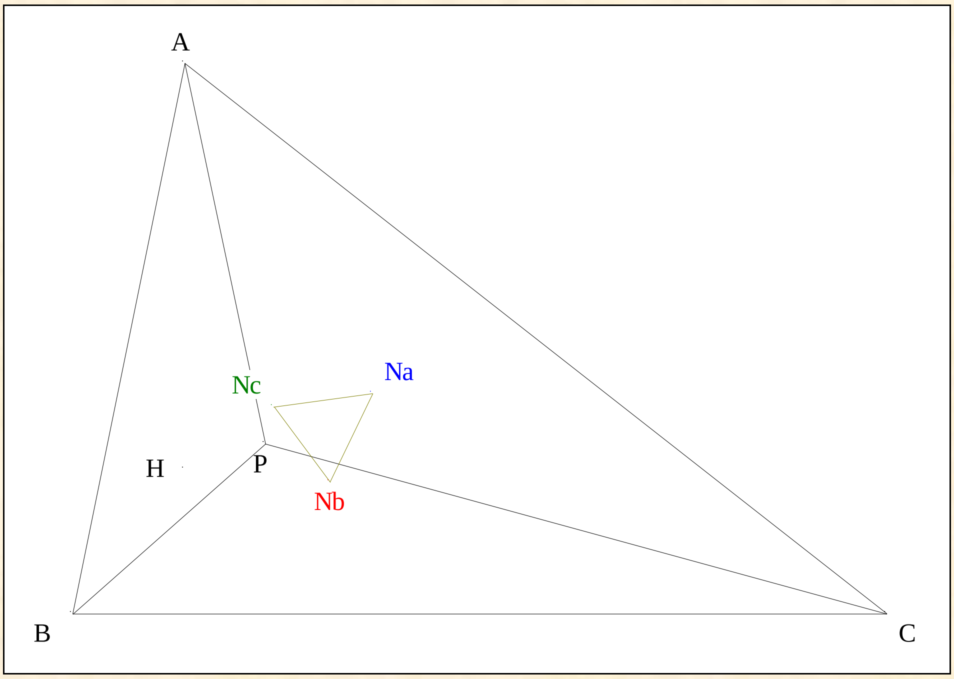
papiers dont certains seront publiés dans *Proceedings of the Royal Irish Academy*. En 1881, il publie le désormais classique *Sequel to Euclid* et en 1885, *A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle and conic* dans lequel nous trouvons à la page 293 le résultat précédent.
Il décède à Dublin (Irlande) suite à une bronchite, le 3 janvier 1891 et est enterré au cimetière de Glasnevin.

E. EXERCICES

I. Bui Quang Tuan

VISION

Figure :

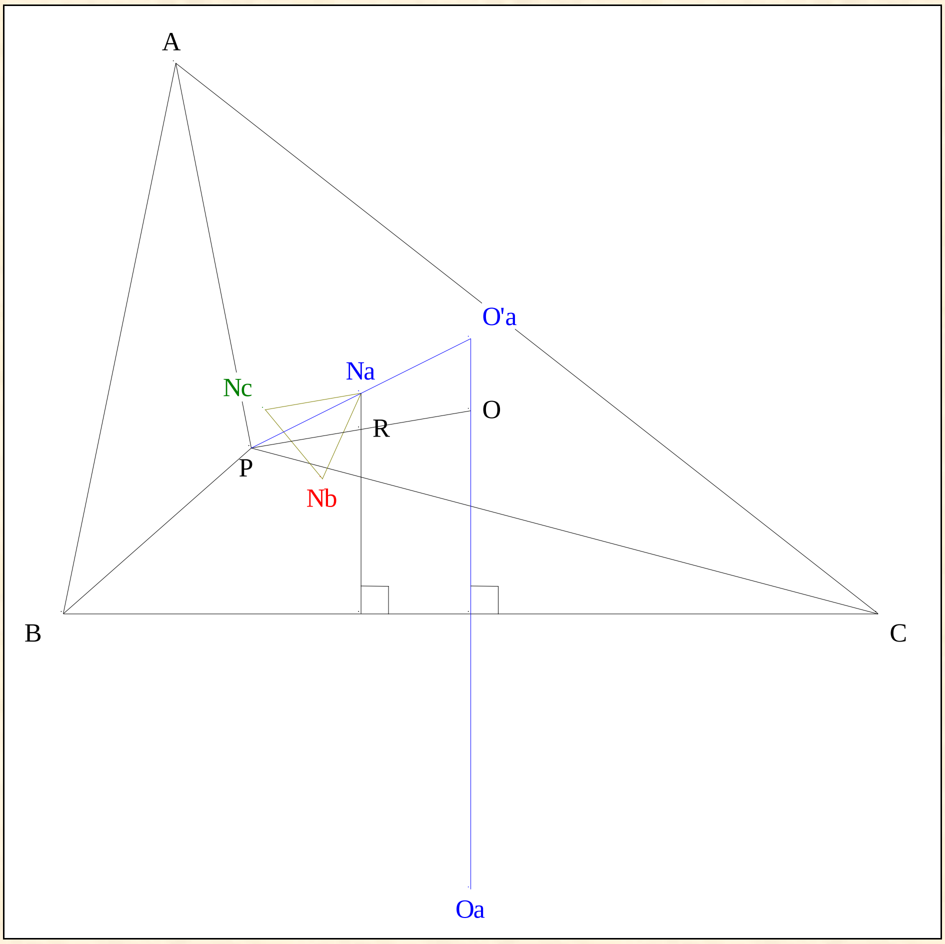


Traits :		ABC	un triangle,
		H	l'orthocentre de ABC,
		P	un point distinct de H
	et	Na, Nb, Nc	les centres des cercles d'Euler resp. des triangles PBC, PCA, PAB.

Donné : les triangles NaNbNc et ABC sont orthologiques.[24]

VISUALISATION

[24] Bui Quang Tuan, Nine point center and antiginal point, Message *Hyacinthos* # **16716** du 29/08/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



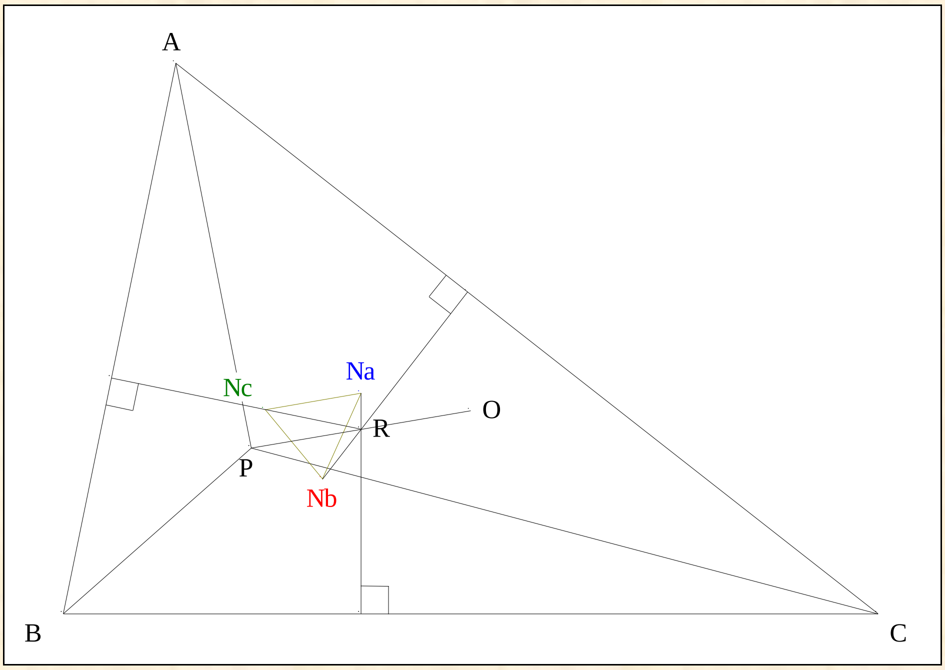
- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC,
  1, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB,
  Oa, Ob, Oc les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
  1', *2'*, *3'* les symétriques de *1*, *2*, *3* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB),
  O'a, O'b, O'c les centres de *1'*, *2'*, *3'*
  et R le milieu de [OP].

- D'après **F.** Annexe **3.**, **(1)** P, Na et O'a sont alignés
  (2) Na est le milieu de [PO'a].

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle POO'a, (NaR) //(OO'a).

- **Scolies :** **(1)** Oa, O'a et O sont alignés
  (2) (OO'a) ⊥ (BC).

- D'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (NaR) ⊥ (BC).
  en conséquence, la perpendiculaire à (BC) issue de Na passe par R.

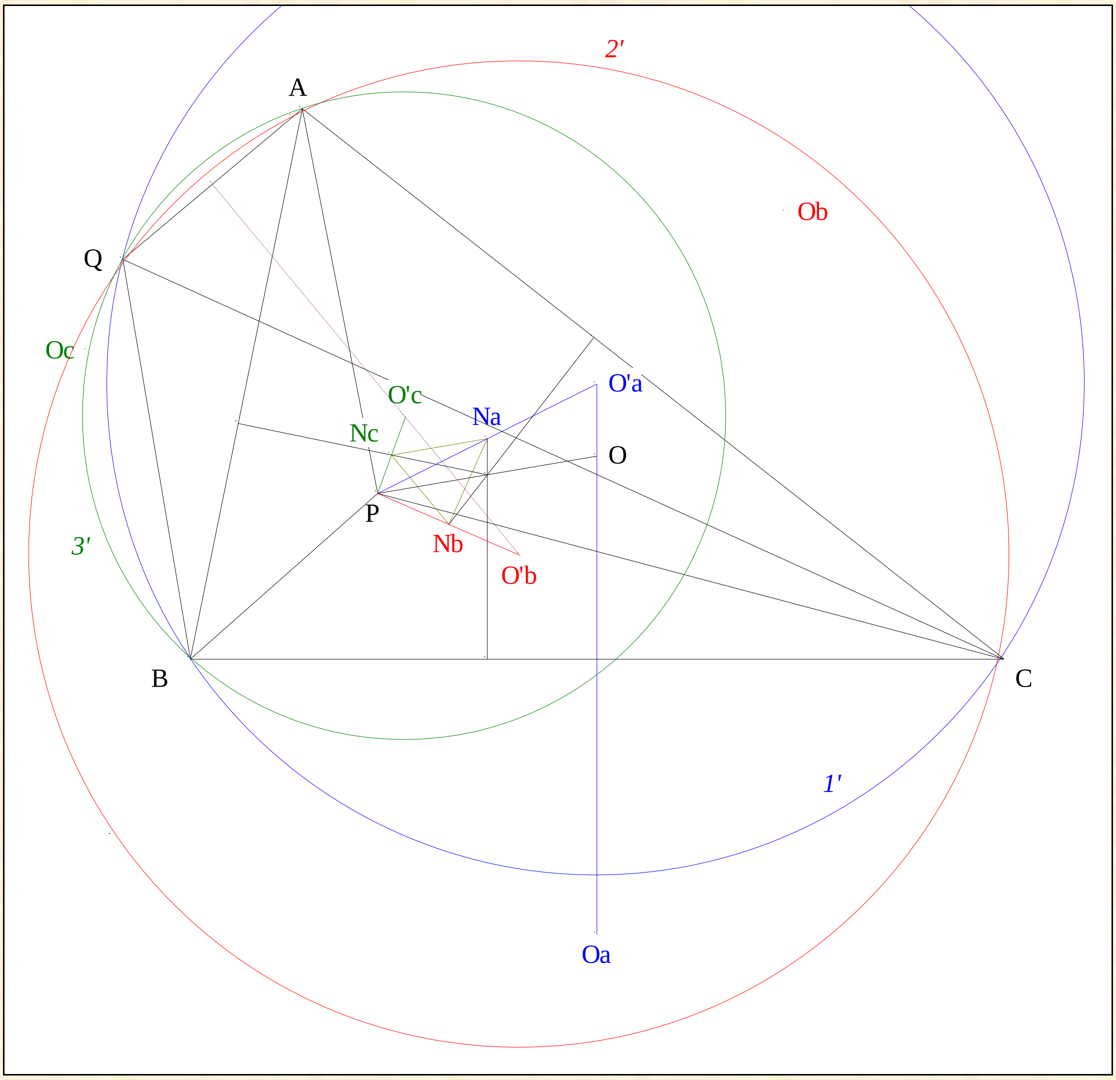


- Mutatis mutandis, nous montrerions que la perpendiculaire à (CA) issue de Nb passe par R
  la perpendiculaire à (AB) issue de Nc passe par R.

- Par définition, R est le centre d'orthologie de NaNbNc relativement à ABC.

- **Conclusion :** les triangles NaNbNc et ABC sont orthologiques.

Scolie : précisons le centre d'orthologie de ABC relativement à NaNbNc



- D'après **A. 1.** Points jumeaux, *1'*, *2'* et *3'* sont concourants.
- Notons Q ce point de concours.
- **Scolie :** **(1)** O'a, O'b, O'c sont les symétriques de Oa, Ob, Oc resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).
  (1) P et Q sont deux points jumeaux de ABC
  (2) (O'bO'c) est la médiatrice de [AQ] i.e. (AQ) ⊥ (O'bO'c).
- D'après **F.** Annexe **3.,** **(1)** Nb est le milieu de [PO'b]
  (2) Nc est le milieu de [PO'c].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle PO'bO'c, (O'bO'c) // (NbNc) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AQ) ⊥ (NbNc).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BQ) ⊥ (NcNa)
  (CQ) ⊥ (NaNb).
- **Conclusion :** par définition, le jumeau Q de P est le centre d'orthologie de ABC relativement à NaNbNc.

Note historique : la visualisation précédente s'inspire de celle d'Antreas Hatzipolakis.[25]

---

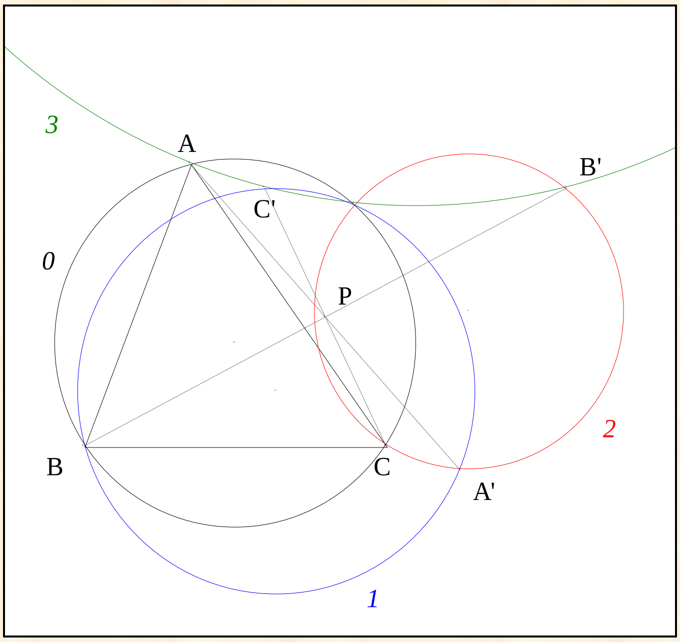
[25] Hatzipolakis A., Nine point center and antiginal point, Message *Hyacinthos* # **16717** du 29/08/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

II. Jean-Pierre Ehrmann

1. Quatre cercles concourants de Floor van Lamoen

VISION

Figure :

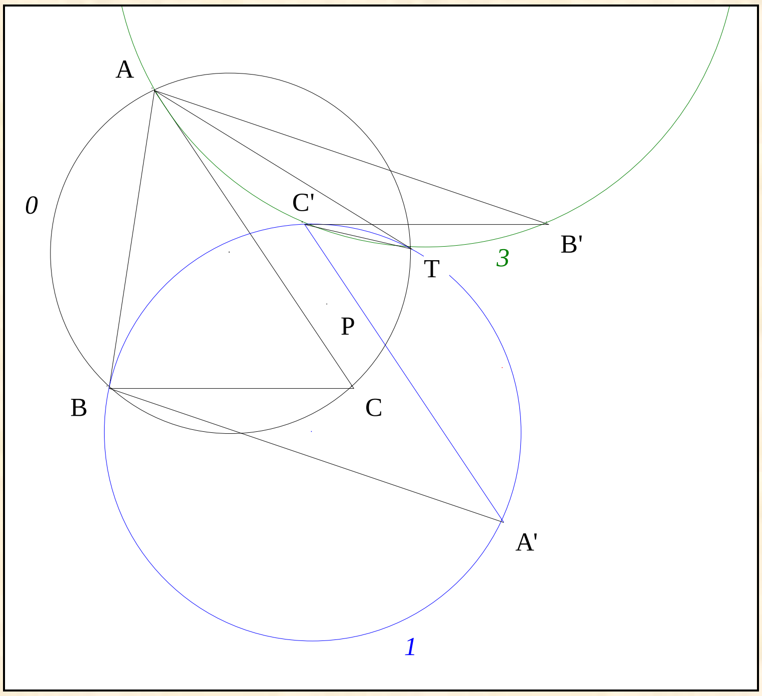


Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A', B', C'	les symétriques de A, B, C par rapport à P,
et	*0, 1, 2, 3*	les cercles circonscrits resp. à ABC, AB'C', A'BC', A'B'C.

Donné : *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.[26]

VISUALISATION

[26] van Lamoen F., Another conjecture (?), Message *Hyacinthos* # **4547** du 13/12/2001 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- Notons T le second point d'intersection de *0* et *1*.

- Le quadrilatère ACA'C'
  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P, est un parallélogramme ; en conséquence, (AC) // (A'C').

- Le quadrilatère ABA'B'
  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P, est un parallélogramme ; en conséquence, (AB') // (BA').

- Le quadrilatère BCB'C'
  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P, est un parallélogramme ; en conséquence, (B'C') // (BC).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et T, les parallèles (AC) et (A'C'),
  conduisent au théorème généralisé de Reim ; en conséquence, <ATC' = <CBA' ;
  d'après le théorème "angles à côtés parallèles", <CBA' = <C'B'A ;
  par transitivité de la relation =, <ATC' = <C'B'A ;
  en conséquence, A', C', T et B' sont cocycliques i.e. *3* passe par T.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *2* passe par T.

- **Conclusion :** *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

Note historique : ce résultat de 2001a été déjà étudié par S. N. Collings[27] en 1974. Les coordonnées barycentriques du point de concours ont été calculées par Barry Volk.
La transformation qui a un point P associe ce point de concours, est dite de "Collings" chez ETC [28].
Rappelons que Jakob Steiner avait envisagé cette situation lorsque P est le point médian de ABC ; les quatre cercles concourent au point de Steiner qui, dans la nomenclature d'ETC, est répertorié sous X_{99}.

Scolies : **(1)** la visualisation présentée diffère de la preuve angulaire de Darij Grinberg.

---

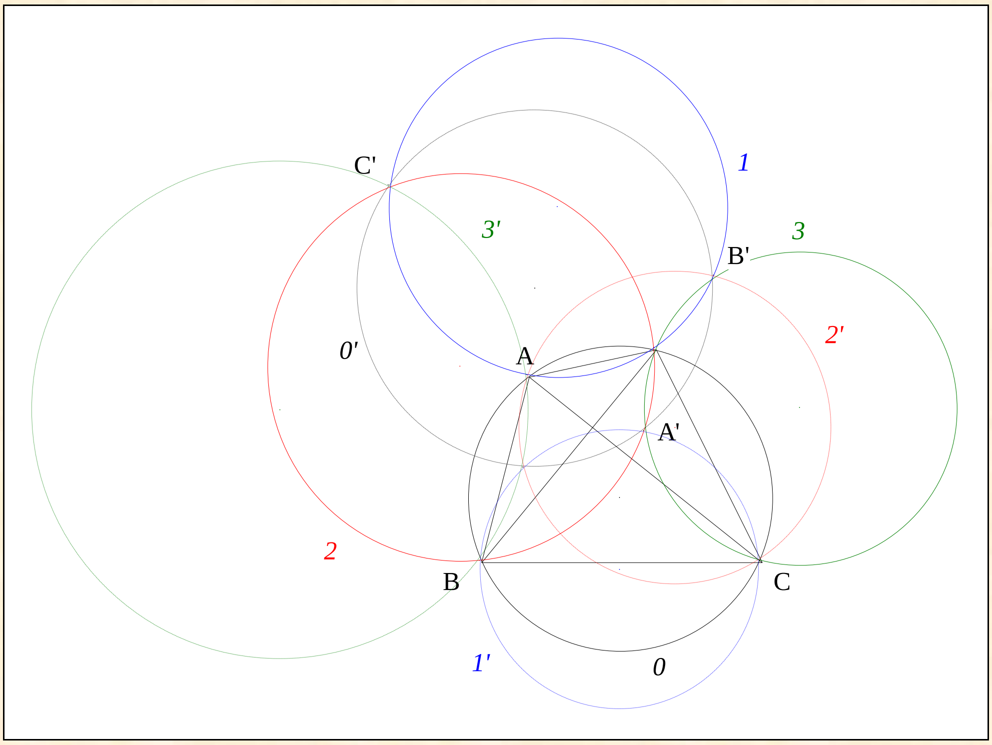
27 Collings S. N., Reflections on reflections **2**, *Mathematical Gazette* (1974) 264.
28 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

(2) T est le quatrième point d'intersection de l'ellipse de centre P passant par A, B et C.

2. Quatre cercles concourants de Jean-Pierre Ehrmann

VISION

Figure :



Traits : ABC, A'B'C' deux triangles,
0, *0'* les cercles circonscrits de ABC, de A'B'C',
1, *2*, *3* les cercles circonscrits de AB'C', BC'A', CA'B',
et *1'*, *2'*, *3'* les cercles circonscrits de A'BC, B'CA, C'AB.

Donné : *1'*, *2'* et *3'* concourent sur *0'* *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* concourent sur *0*. [29]

VISUALISATION

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles" [30] appliqué

(1) au triangle ABC et aux points A', B', C'

1', *2'* et *3'* sont concourants *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* sont concourants

(2) au triangle AB'C' et aux points A', B, C

0', *3'* et *2'* sont concourants *si, et seulement si,* *0*, *3* et *2* sont concourants.

---

29 Ehrmann J.-P., Message *Hyacinthos*.

30 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles (p. 12-13), G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

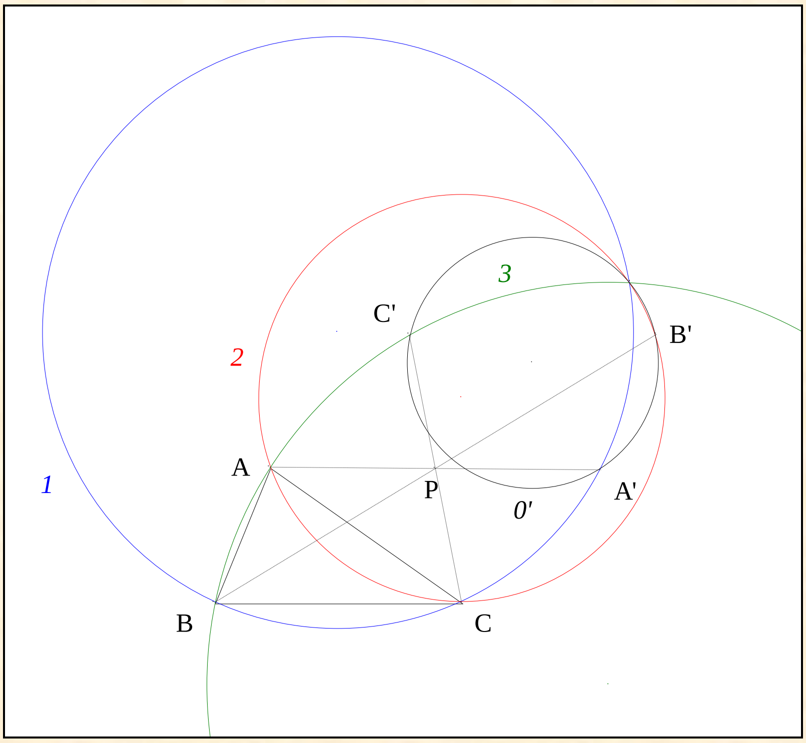
- **Conclusion :** par conjonction logique,

1', *2'* et *3'* concourent sur *0'* *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* concourent sur *0*.

3. Points symgonaux

VISION

Figure :

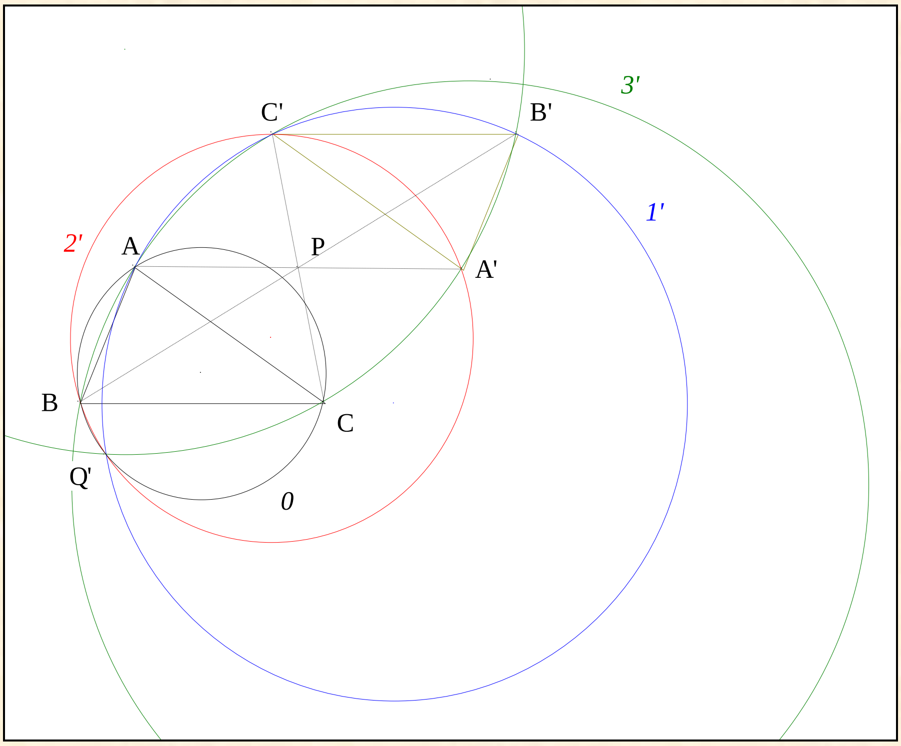


Traits : ABC un triangle,
P un point,
A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport à P,
et *0'*, *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. à A'B'C', A'BC, AB'C, ABC'.

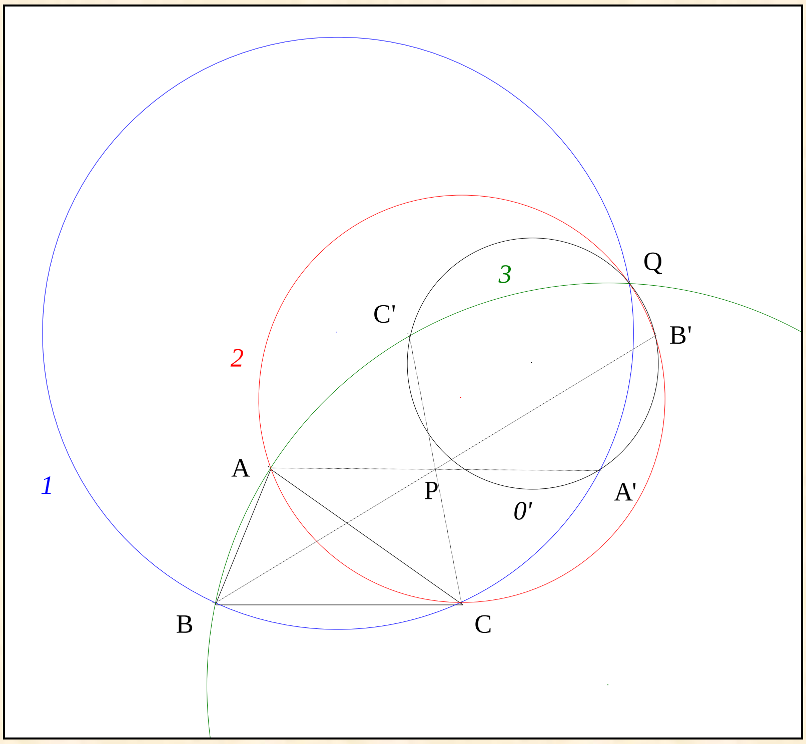
Donné : *1*, *2* et *3* concourent sur *0'*.[31]

VISUALISATION

[31] Ehrmann J.-P., Symgonal, Message *Hyacinthos* # **9381** du 25-02-04 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- **Scolie :** les triangles A'B'C' et ABC sont homothétiques.
- Notons *0, 1', 2', 3'* le cercle circonscrit à ABC, AB'C', A'BC', A'B'C.
- D'après **E. II. 1.** Quatre cercles concourants de Floor van Lamoen, *1', 2'* et *3'* concourent sur *0*.
- Notons Q' ce point de concours.

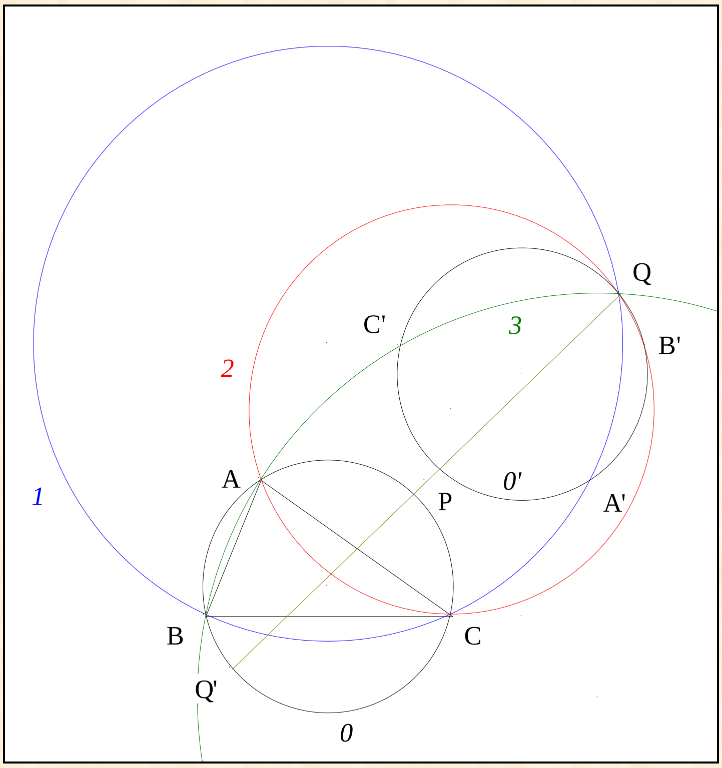


- **Conclusion :** d'après **E. II. 2.** Quatre cercles concourants de Jean-Pierre Ehrmann, *1, 2* et *3* concourent sur *0'*.

- Notons Q ce point de concours.

Scolies : **(1)** Q est "le symgonal de P relativement à ABC et P " ; ce nom a été donné par Jean-Pierre Ehrmann.

(2) Le résultat de Paul Yiu [32]

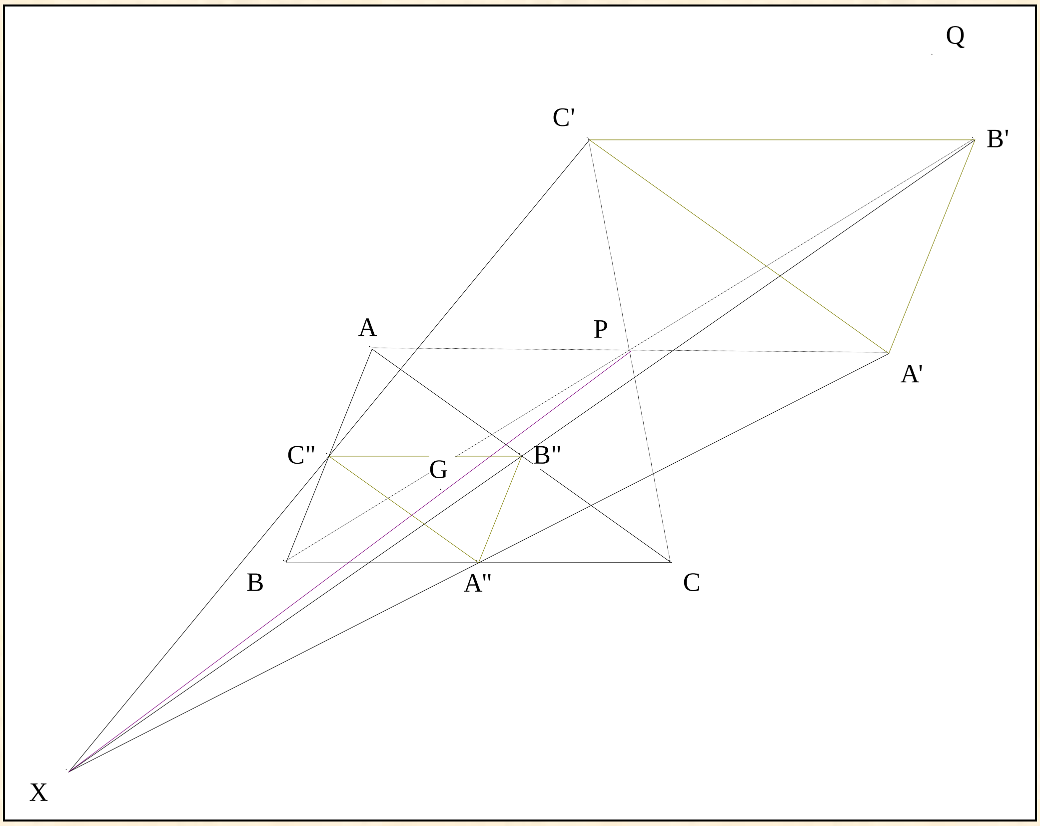


- **Conclusion :** par symétrie de centre P, Q, P et Q' sont alignés.

(3) Nature de Q [33]

[32] Yiu P, Symgonal, Message *Hyacinthos* # **9383** du 25-02-04 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[33] Ehrmann J.-P., Symgonal, Message *Hyacinthos* # **9385** du 25-02-04 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

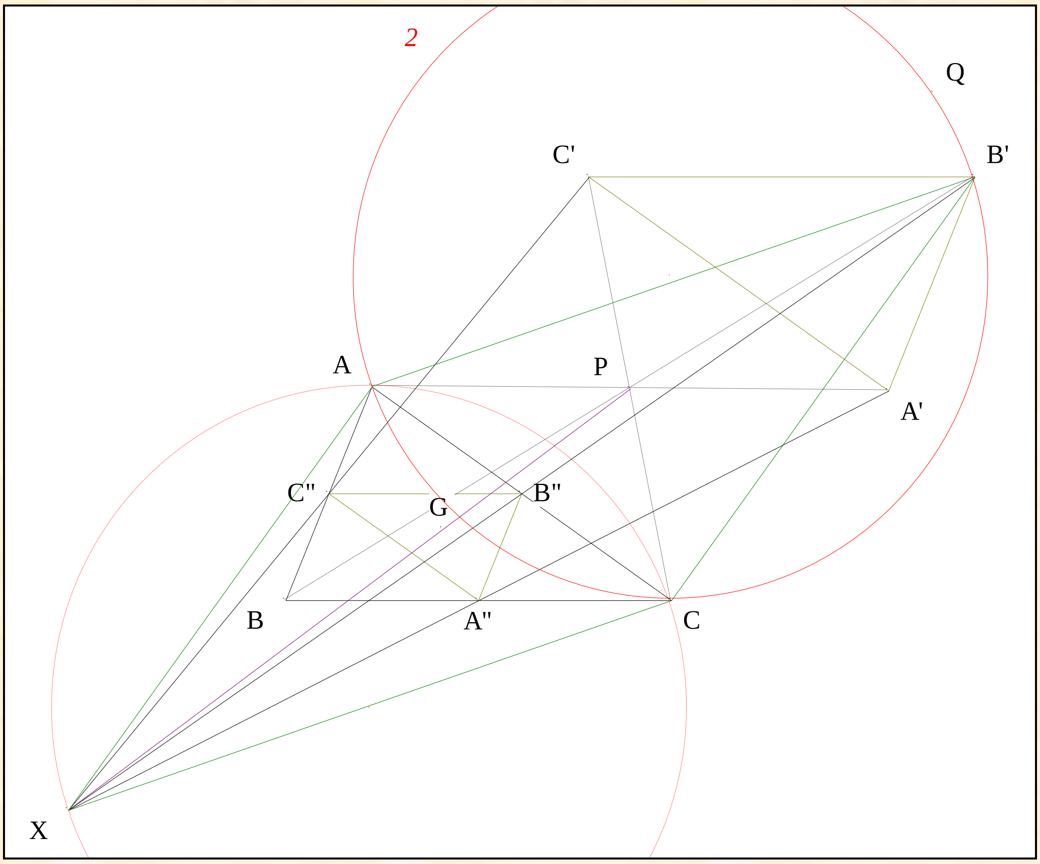


- Notons G le point médian de ABC
  et A"B"C" le triangle médian de ABC.

- A"B"C" étant homothétique et "plus petit" que A'B'C',
  d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe **1**), (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

- Notons X ce point de concours.

- D'après "La construction d'Ocagne" (Cf. Annexe **4**), X est l'anticomplément de P relativement à ABC.



- AB'CX étant un parallélogramme, le symétrique de *2* par rapport à (CA) passe par X.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que le symétrique de *3* par rapport à (AB) passe par X
  le symétrique de *1* par rapport à (BC) passe par X ;

- Par définition, X est l'antigonal de Q relativement à ABC.

- **Conclusion :** Q est l'antigonal de l'anticomplément de P relativement à ABC
  ou encore,
  P est le complément de l'antigonal de Q relativement à ABC.

- D'une façon plus poétique,

Q *est l'isogonal de l'inverse* (relativement au cercle circonscrit de ABC)
de l'isogonal de l'anticomplément de P (relativement à ABC)

(4) De P à Q [34]

P	Q
1	1320
2	671
5	265
6	895
9	1156
10	80
11	4

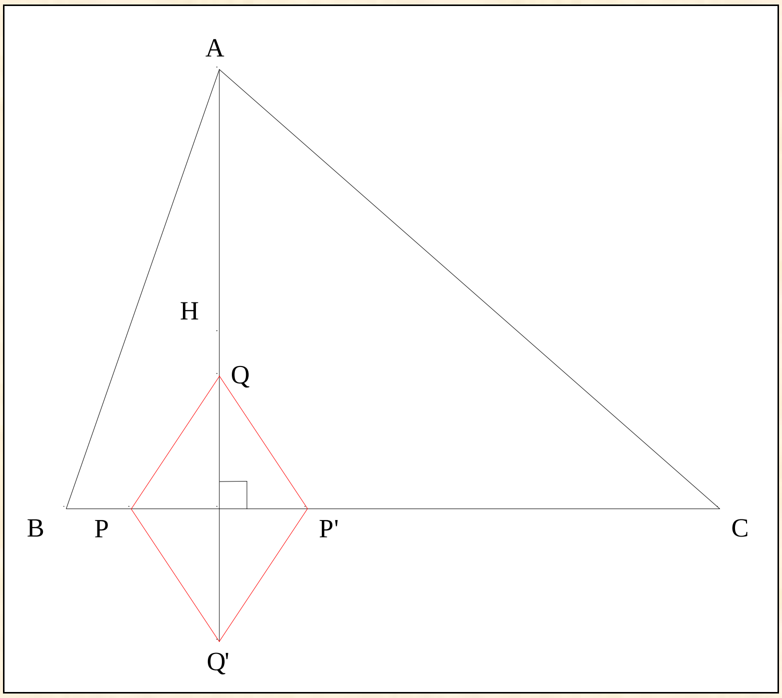
[34] avec la nomenclature de ETC ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

III. FRANÇOIS RIDEAU

1. Un losange

VISION

Figure :



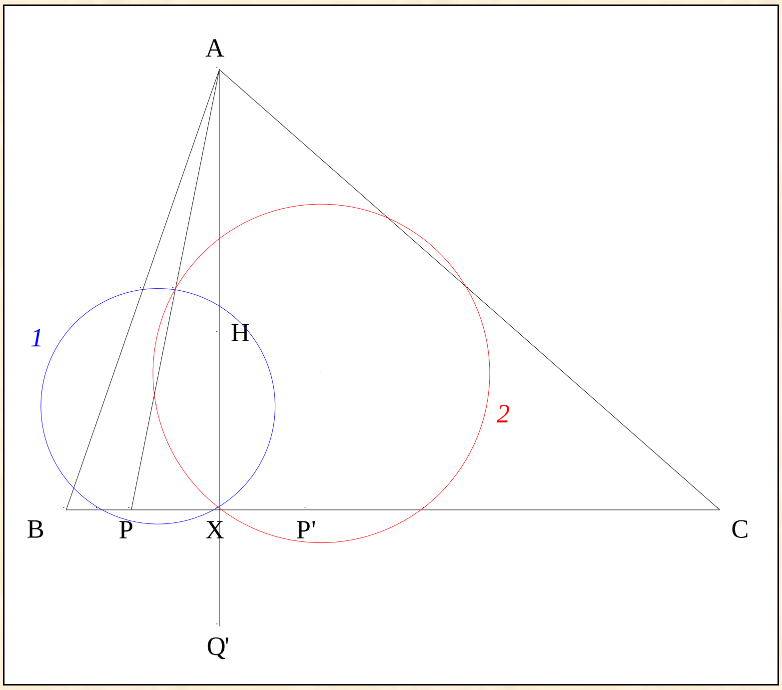
Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	P	un point de (BC),
	P'	le jumeau de P relativement à ABC,
	Q	un point de (AH)
et	Q'	le jumeau de Q relativement à ABC.

Donné : le quadrilatère PQ'P'Q est un losange. [35]

VISUALISATION

- **Commentaire :** pour éviter de considérer un droite comme un cercle de rayon infini, nous suivrons la voie courte i.e. en considérant un quaterne de point (Cf. **B. II. 1.**).

[35] Rideau F., Gémellité et cercle d'Euler, *Les Mathématiques.net* du 25-02-04 ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,690752

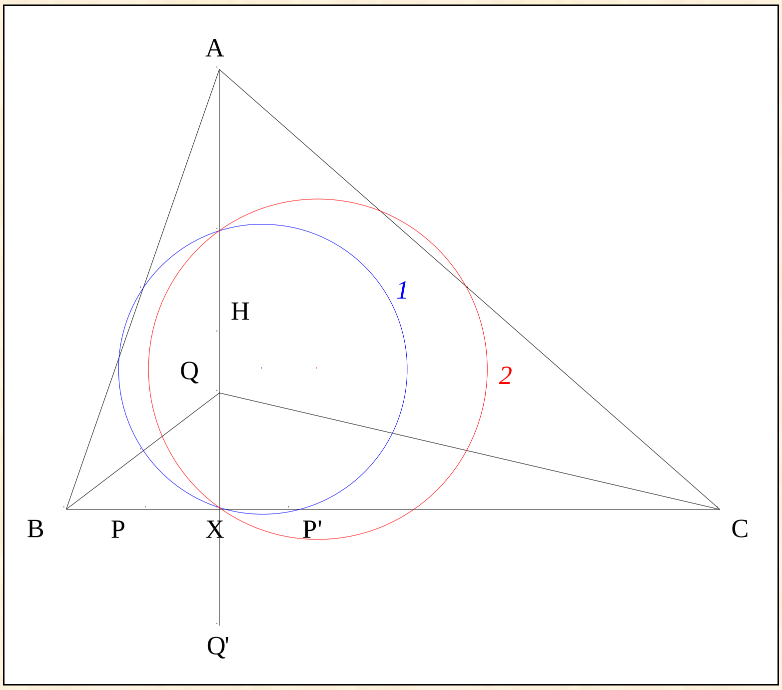


- Considérons le quaterne {A, B, C, P}.

- Notons X le pied de la A-hauteur de ABC,
  et *1, 2* les cercles d'Euler resp. des triangles PAB, PAC.

- **Scolies :** **(1)** *1* et *2* passent par X
  (3) X est le point d'Euler-Poncelet de {A, B, C, P}.

- **Conclusion partielle :** X est le milieu de [PP'].

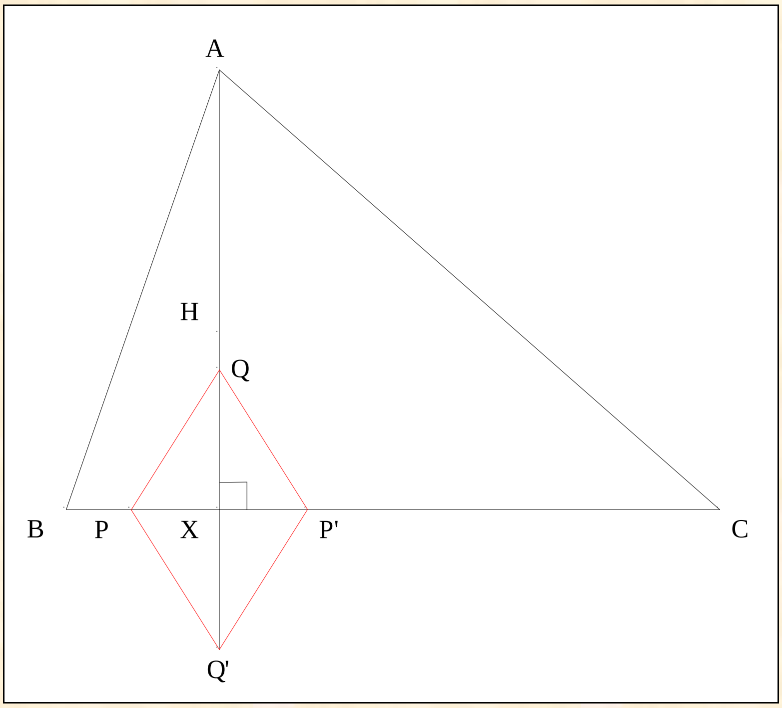


- Considérons le quaterne {A, B, C, Q}.

- Notons *1, 2* les cercles d'Euler resp. des triangles QAB, QAC.

- **Scolies :** **(1)** *1* et *2* passent par X
  (1) X est le point d'Euler-Poncelet de {A, B, C, Q}.

- **Conclusion partielle :** X est le milieu de [QQ'].



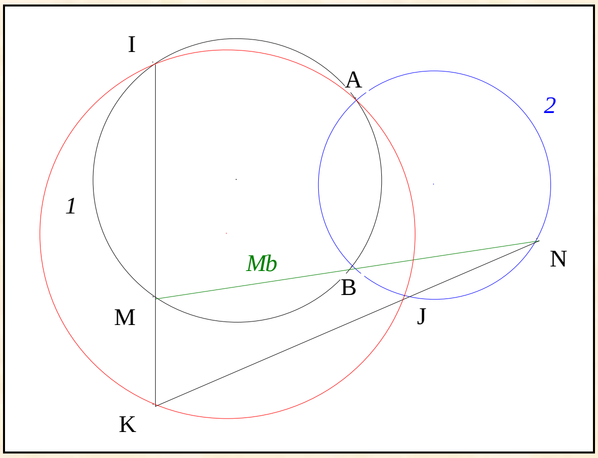
- **Conclusion :** le quadrilatère PQ'P'Q est un losange.

F. APPENDICE

1. Une monienne brisée

VISION

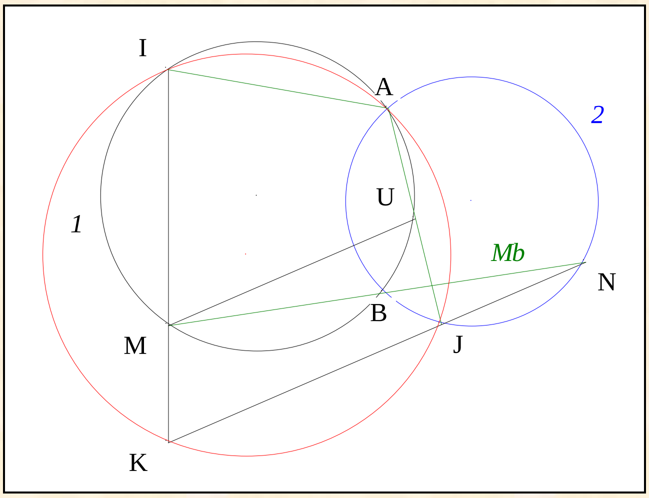
Figure :



Traits : *1, 2* deux cercles sécants
A, B les points d'intersection de *1*et *2*,
Mb une monienne passant par B,
M, N les points d'intersection de *Mb* resp. avec *1*, *2*,
I, J deux points resp. de *1*, *2*
et K le point d'intersection de (IM) et (JN)

Donné : I, A, J et K sont cocycliques.

VISUALISATION



- Notons U le second point d'intersection de (AJ) avec *1*.

- Les cercles *1*, *2*, les points de base A et B, les moniennes (UAJ) et (MBN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (UM) // (KJN) .

- **Conclusion :** le cercle *1*, les points de base I et A, les moniennes naissantes (MIK) et (UAJ), les parallèles (MU) et (KJ), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, I, A, J et K sont cocycliques.

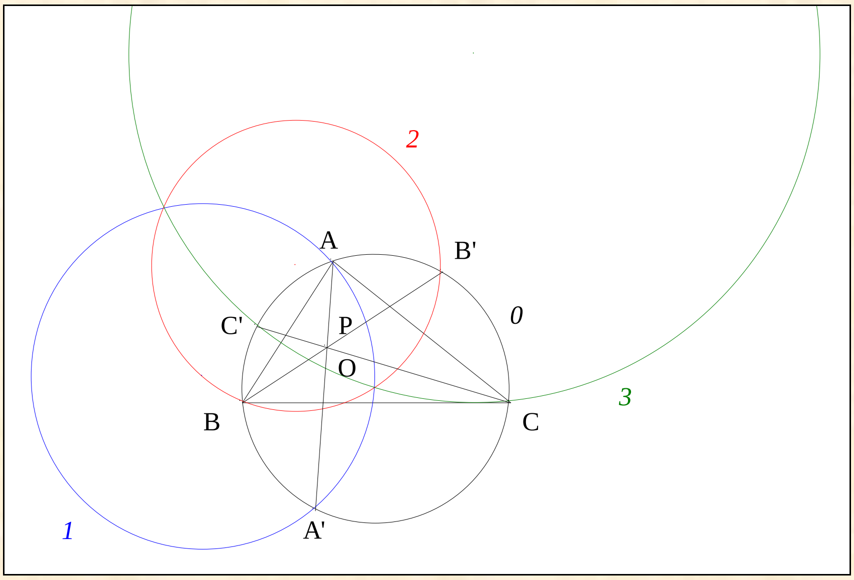
Scolies : **(1)** (IAJ) est "une monienne brisée en A".

(2) le résultat reste vrai lorsque dans les cas de tangence.

2. Construction de l'inverse d'un point

VISION

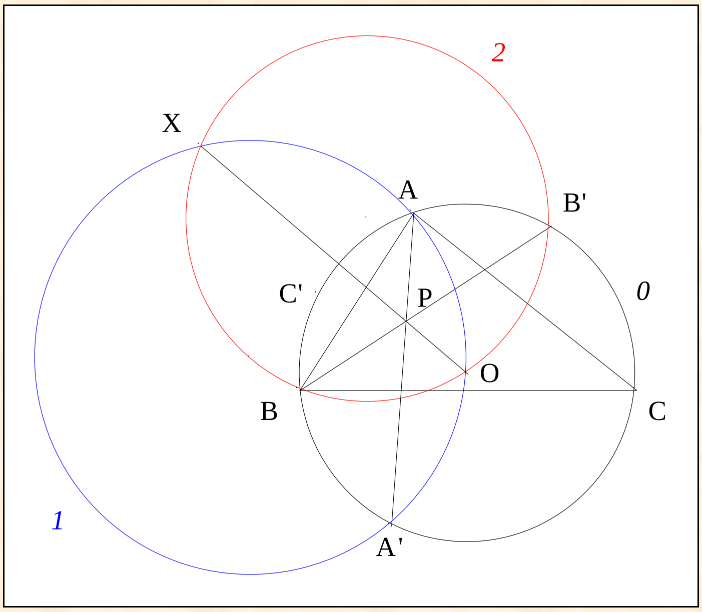
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	P	un point,
	A', B', C'	les circumtraces resp. de (AP), (BP), (CQ)
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. des triangles AOA', BOB', COC'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

VISUALISATION

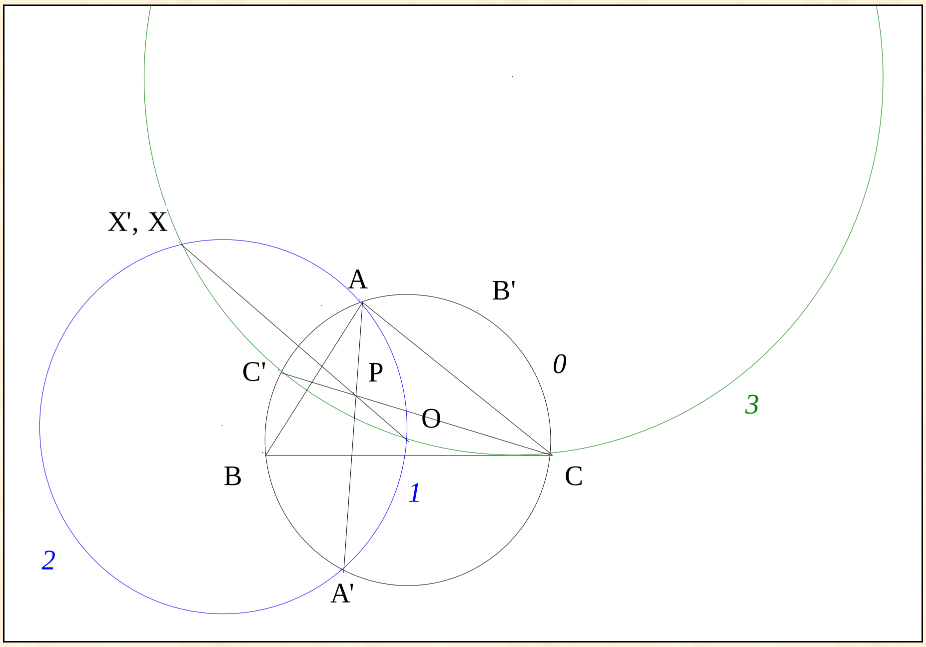


- Notons X le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après "Le théorème des trois cordes" [36] appliqué à *0*, *1* et *2*, (OP) passe par X.

---

[36] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons X' le second point d'intersection de *1* et *3*.

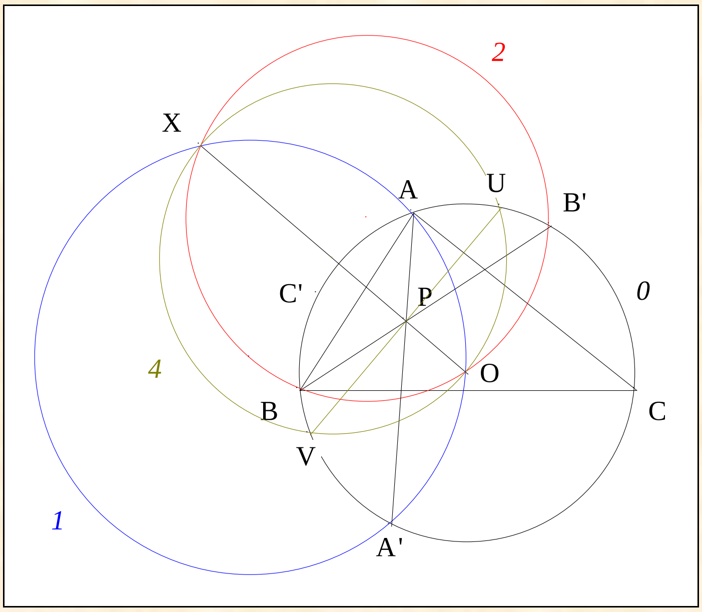
- D'après "Le théorème des trois cordes" [37] appliqué à *0*, *1* et *3*, (OP) passe par X' ;
  en conséquence, X et X' sont confondus.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

Scolies : **(1)** X et P sont inverses relativement au cercle *0* de centre O.

(2) Relativement à P, X est noté P^{-1}.

(3) Pour mieux comprendre la nature algébrique de X



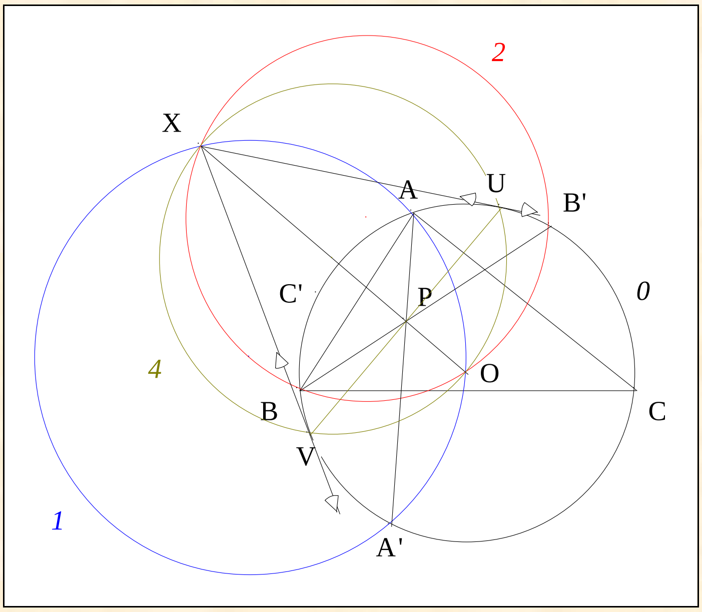
- Notons *4* le cercle de diamètre [OX]

[37] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

et U, V les points d'intersection de *0* et *4*.

- Nous avons : (UV) ⊥ (OX).

- D'après "Le théorème des trois cordes" [38] appliqué à *0*, *1* et *4*, (AA'), (OX) et (UV) sont concourantes ; en conséquence, (UV) passe par P.



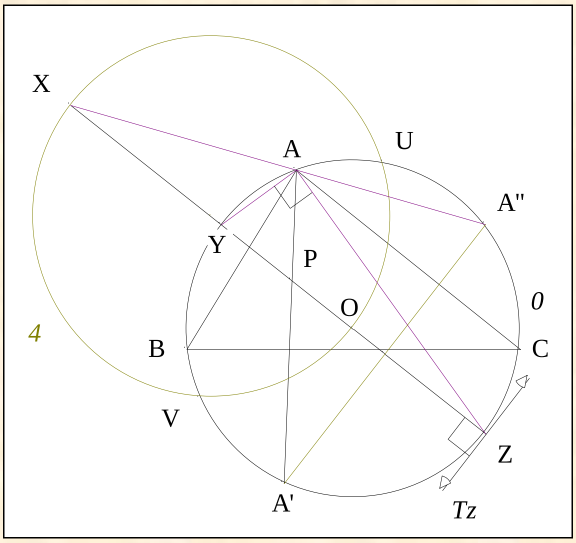
- Les tangentes à *0* en U, V passant par X, $OU^2 = \overline{OP} . \overline{OX}$.

- **Conclusion :** algébriquement, X et P sont inverses relativement au cercle *0* de centre O.

Note historique : la notion de points inverses a été introduite par Jean Victor Poncelet[39] en 1822, puis reprise par Adolphe Quetelet[40] en 1827, par Jacob Steiner[41] et Ludwig Immanuel Magnus[42] en 1832.

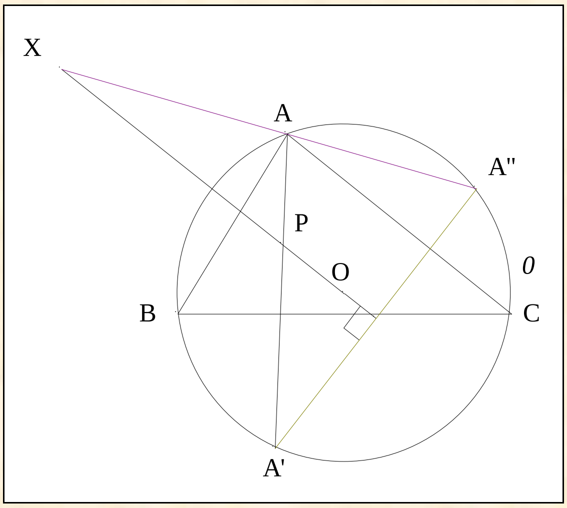
(3) Un alignement

[38] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[39] Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives* (1822).
[40] Quetelet A., Mémoires Bruxelles **4** (1827).
[41] Steiner J., Article **355**, *Les constructions géométriques* (1832).
[42] Magnus L., *Journal* de Crelle **8** (1832) 51.



- Notons Y, Z les points d'intersection de (OPX) avec *0*,
  A" le second point d'intersection de (AX) avec *0*
  et *Tz* la tangente à *0* en Z.

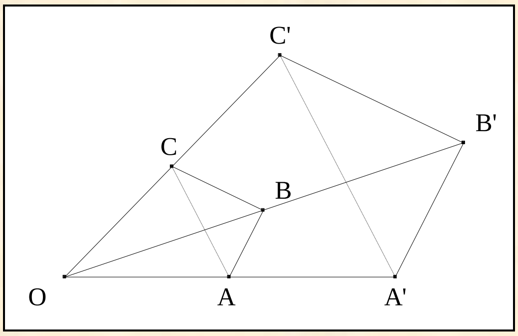
- Le quaterne (X, P, Y, Z) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (A ; X, P, Y, Z) est harmonique ;
  ce pinceau ayant deux rayons perpendiculaires (AY) et (AZ),
  (AY) est la A-bissectrice intérieur du triangle AA'A" ;
  il s'en suit que *Tz* // (A'A")
  A" est le symétrique de A' par rapport à (OPX).



- **Conclusion :** X est le point d'intersection de (OP) et (AA")
  ou encore
  le second point d'intersection de (AX) avec *0* est le symétrique de A' par rapport à (OP).

G. ANNEXE

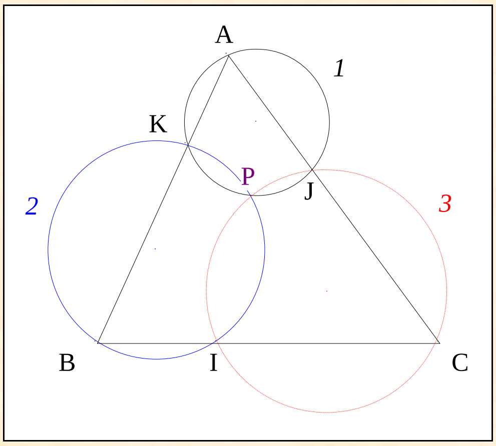
1. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que (1) (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C').

Donné : (AC) est parallèle à (A'C').

2. Le théorème des trois cercles concourants [43]



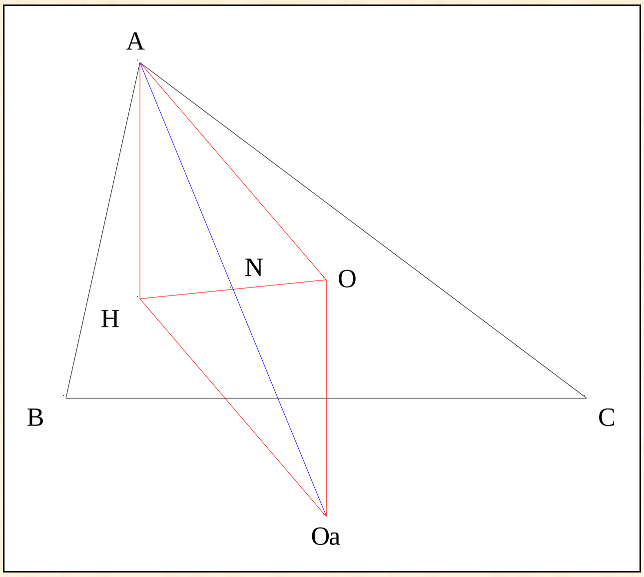
Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles sécants deux à deux,
K, P les points d'intersection de *1* et *2*,
I l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
J l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
A un point de *1*,
B le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et C le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

Commentaire : ce résultat est une réciproque du pivot de Miquel.
Il reste vrai dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles

3. L'alignement A-N-Oa

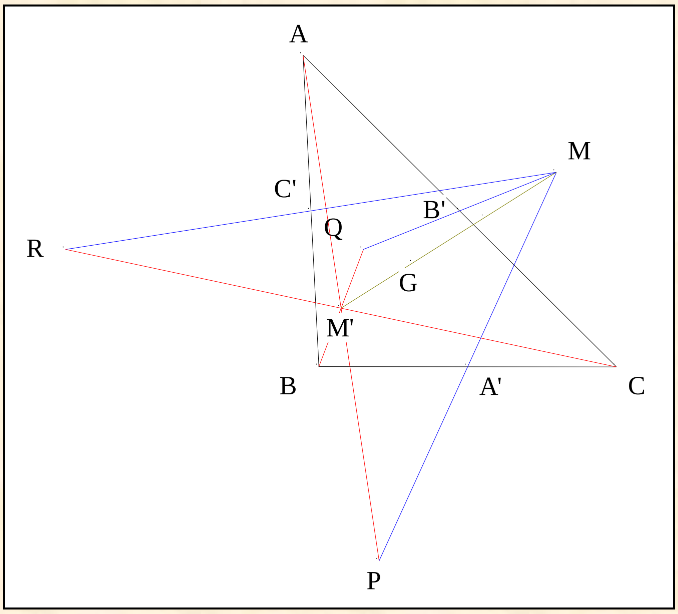
[43] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (1838) 485-487.



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
N le centre du cercle d'Euler de ABC
et Oa le symétrique de O par rapport à (BC).

Donnés : A, N et Oa sont alignés et N est le milieu de [OH].

4. Point complémentaire ou la construction d'Ocagne [44]



Traits : ABC un triangle,
G le point médian de ABC,
M un point,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et P, Q, R les symétriques de A, B, C resp. par rapport à A', B', C'

[44] d'Ocagne M. (1882).

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Scolie : ce point de concours, noté M', est le complément de M relativement à ABC
ou encore
M est l'anticomplément de M' relativement à ABC.