MISE EN OEUVRE DES PROCEDES HEURISTIQUES DANS LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE GEOMETRIE

par AYME Jean-Louis
Docteur ès sciences
C.P.R. d'Inezgane

et El AYDI M'hamed
Docteur ès sciences
C.P.R. d'Inezgane

A INTRODUCTION

L'enseignement, c'est à dire l'action de transmettre des connaissances, voir cette transmission elle-même, n'étant pas une science exacte avec une terminologie précise largement admise, nous conduit à dire aujourd'hui qu'il n'y a pas de science de l'enseignement et qu'il n'existe pas de méthode d'enseignement qui soit indiscutablement la meilleure, comme il n'existe pas d'interprétation la meilleure d'une sonate de Beethoven. En conséquence, l'enseignement est plus un art qu'une science et la didactique peut se concevoir comme une science appliquée qui a pour objet l'élaboration et l'expérimentation de stratégie pédagogique, visant à favoriser la réalisation de projets éducatifs par des individus; en particulier, lorsque le projet s'identifie à la découverte et à l'invention, nous parlerons d'heuristique.

[1] Publication en 1987 au sein des CPR du Maroc

Un procédé heuristique est un mécanisme de décision, une sorte de comportement, qui conduit habituellement aux résultats désirés, mais qui n'offre aucune garantie de succès. Un tel procédé, de par sa nature, a un caractère plausible et il sert de guide dans la découverte d'une solution.

L'étude de ces procédés et de leur agencement en stratégie de résolution de problème est l'objet de l'heuristique.

——— . ———

En mathématique, chaque élève possède un modèle personnel de son activité face à un problème.
En règle générale, ce modèle est relativement pauvre; en simplifiant on peut le qualifier de manicheen:

> ce problème est-il d'un type que je sais résoudre?
> Si oui, j'applique un algorithme qui me conduit à la solution.
> Si non, ce problème est en dehors de mes capacités.

L'entreprise heuristique consiste à aider l'élève à développer le modèle qu'il se fait de sa propre activité de résolution de problème et à recréer pour lui une atmosphère de recherche qui lui fera revivre, à son niveau de connaissance et de développement intellectuel, un peu de l'activité du mathématicien.

——— . ———

Ce que nous présentons ici est beaucoup plus une attitude du professeur qu'un savoir spécifique à transmettre, à un élève, à un niveau donné.

(B) UN PROBLEME DE GEOMETRIE

Interessons-nous à l'énoncé suivant relevé dans un livre de mathématiques (Maths 3e, IREM Strasbourg, Istra, p 52,1980) et mettons en oeuvre les procédés heuristiques pour résoudre ce problème:

> "soit ABC un triangle isocèle de sommet A, on note H le milieu de BC.
> Démontrer que toute droite passant par H recoupe AB en B' et AC en C', tels que: B'C' $\geqslant$ BC." (I)

1. Lecture en compréhension et correction de l'énoncé:

"soit ABC un triangle isocèle de sommet A et H le milieu du segment BC.
Démontrer que toute droite passant par H recoupe la droite AB en B' et la droite AC en C', tels que la longeur du segment B'C' est supérieure ou égale à la longueur du côté BC."

Nous observons en dehors d'une tournure incorrecte

- qu'une même notation recouvre dans cet énoncé des significations différentes
- et que la question posée (une inégalité à démontrer) contient un problème d'existence qui n'est pas a priori du ressort des programmes du premier cycle.

En conséquence, proposons l'énoncé sans notation suivant qui nous incitera à rechercher la condition d'existence des segments à considérer:

pour chaque droite passant par le milieu de la base d'un triangle isocèle, on considère, lorsqu'il existe, le segment ayant pour extrémités les points d'intersections de cette droite avec les supports des autres côtes de ce triangle. (II)

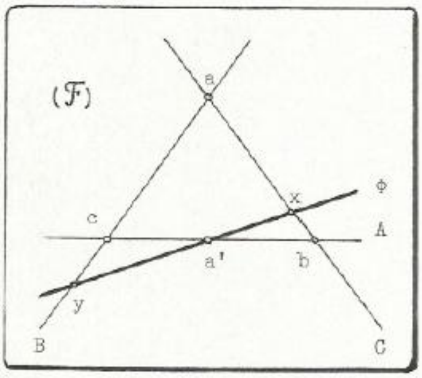
Question: démontrer que la longueur de la base est inférieure ou égale à la longueur de tous les segments ainsi obtenus.

Notons que le fait d'écrire "question" sous-entend:

(1) est-ce que vous pouvez démontrer que.........?

(2) dans les deux cas justifiez votre réponse.

2. Une figure associée à cet énoncé et une notation appropriée:



Remarques:

(1) cette figure (ℱ) peut être construite avec la règle et le compas donc avec le compas uniquement (théorème de Mohr-Mascheroni) ou avec la règle seulement si on se donne un cercle auxiliaire (théorème de Steiner).

(2) nous observons que cette notation met en évidence au signe prime près les points fixes (premières lettres d'un alphabet) et les points variables (dernières lettres d'un alphabet).

Nous continuerons donc avec cette nouvelle notation.

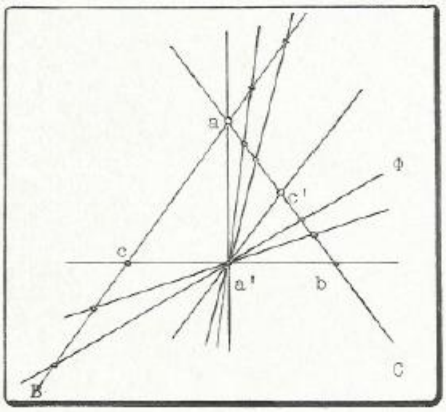
Précisons que ab représente la longueur du côté [a,b] , D(a,b) la droite passant par les points a et b,]a,b[l'intervalle ouvert d'extrémités a et b, et [x,y] le segment d'extrémités x et y.

(3) Notons qu'un triangle isocèle obtusangle nous conduirait à la même situation.

(4) Rappelons enfin qu'une figure ne se substitue pas à une démonstration, que la précision d'une figure dépend des instruments utilisés pour la construire et qu'une "mauvaise" figure est une punition pour l'élève car elle rend toute démonstration plus difficile (et pourtant on envisage bien une figure "fausse" dans un raisonnement par l'absurde!).

3. <u>Recherche de la condition d'existence des segments à considérer:</u>

* un triangle isocèle admettant un axe de symétrie, nous retiendrons les photos superposées suivantes du film de la simulation consistant à faire pivoter la droite Φ autour du point a'.



* Cette simulation nous souffle une partie de la condition : Φ ne doit pas être parallèle à B; ceci met en jeu le point c' milieu du côté [a,b].

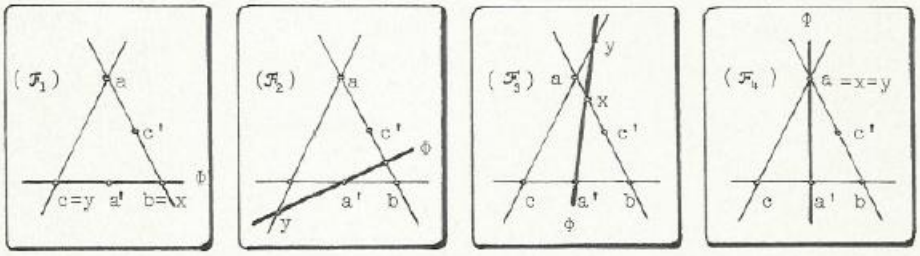
* <u>condition d'existence:</u>
la droite Φ est ni parallèle à B ni à C: ceci revient à dire que la droite Φ est sécante aux droites B et C (rappelons que deux droites sont ou bien parallèles ou bien sécantes).

* La question proposée dans l'énoncé (I) contient donc une <u>erreur</u> !
En conséquence, proposons une nouvelle formulation de l'énoncé:

> pour chaque droite passant par le milieu de la base d'une triangle isocèle et sécante aux supports des autres côtés, on considère le segment déterminé par ces supports sur cette droite. (III)
> <u>Question:</u> démontrer.....

4. Subdivision de la condition d'existence; rescencement des cas particuliers:

retenons les images suivantes du film de la simulation précédente



cas ① cas ② cas ③ cas ④

Nous observons deux cas particuliers exprimés par les images $(\mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{F}_4)$ et une situation générale exprimée par les images $(\mathcal{F}_2)$ et $(\mathcal{F}_3)$.

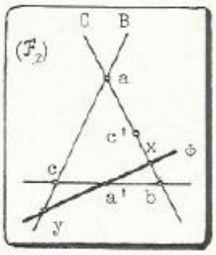
5. Etude des cas particuliers:

nous constatons que le cas ① vérifie la conjecture de l'énoncé (I) alors que le cas ④ ne la vérifie pas.
La question posée dans cet énoncé contient donc une deuxième erreur!
En conséquence, proposons cette nouvelle formulation de l'énoncé:

> Pour chaque droite passant par le milieu de la base d'un triangle isocèle, distincte de l'axe de symétrie de ce triangle et sécante au support des deux autres côtés, on considère le segment déterminé par ces supports sur cette droite.
> Question: démontrer.... (IV)

6. Etude du cas (2):

donnée: une droite Φ passant par a' est sécante en x à l'intervalle ouvert]b,c'[, donc à la droite C, et sécante en y à la droite B.



cas (2)

* Existence d'un tel cas ou cohérence de la donnée:

. l'existence des trois points non alignés (donc distincts) a, b et c résulte des axiomes de la géométrie plane.

. Les milieux a' et c' des segments respectifs [b,c] et [a,b] existent et appartiennent respectivement aux intervalles ouverts]b,c[et]a,b[: c'est une conséquence du premier axiome de la structure affine des droites. Les points a et a' sont distincts (raisonner par l'absurde).

. Il existe au moins un point x dans l'intervalle ouvert]b,c'[: ceci résulte de l'hypothèse faite sur la cardinalité α des droites ($\alpha>2$) et d'une conséquence de l'axiome de passage entre les structures d'ordre des droites.
Nous en déduisons que les points x et c' sont distincts, que x appartient à l'intervalle ouvert]a,b[et en raisonnant par l'absurde que les points a' et x sont distincts.

. La droite Φ déterminée par les points a' et x existe d'après le premier axiome d'incidence et est sécante en y à la droite B d'après une conséquence de l'axiome de passage entre les structures affines des droites; d'où l'existence du segment [x,y] .
Nous venons de montrer qu'il existe donc au moins une droite Φ passant par a', sécante aux droites C et B respectivement en x et y, le point x appartenant à l'intervalle ouvert]b,c'[.
Notons Ψ_2 l'ensemble de ces droites Φ .

. Les points a, a', c, x et y sont distincts (raisonner par l'absurde); ainsi à chaque droite Φ de (Ψ_2) est associé un segment unique $[x,y]$ de longueur non nulle.
Les points a et x étant de part et d'autre de la droite D(a',c'), il en est de même des points x et y; les points a', x et y étant alignés, il s'en suit que le point a' appartient à l'intervalle fermé $[x,y]$ et plus précisément à l'intervalle ouvert $]x,y[$ d'après ce qui précède.

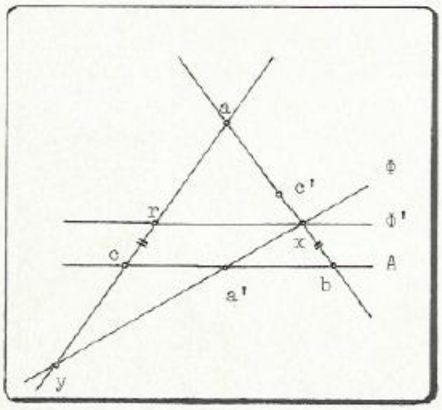
* Position du point y:

les points a,x et y n'étant pas alignés (raisonner par l'absurde), considérons le triangle axy; le point b n'appartenant pas au côté $[a,x]$ de ce triangle, la droite A passant par les points b et a' recoupe en c le côté $[a,y]$ de ce triangle (un raisonnement par l'absurde conduit à la négation du théorème de Moritz Pash, énoncé en 1882); plus précisément le point c appartient à l'intervalle ouvert $]a,y[$ d'après l'étude précédente.

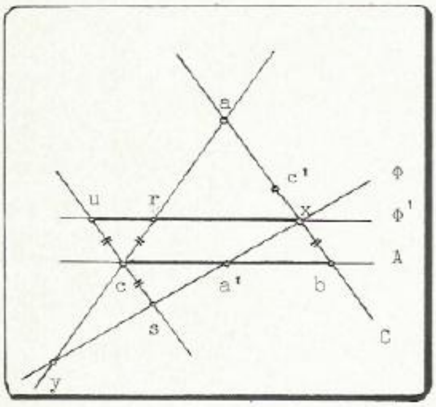
* Conséquence:

la figure $(\mathcal{F}_2)$ représente fidèlement la configuration théorique des points et des droites mis en jeu et peut nous servir de guide dans la recherche d'une démonstration.

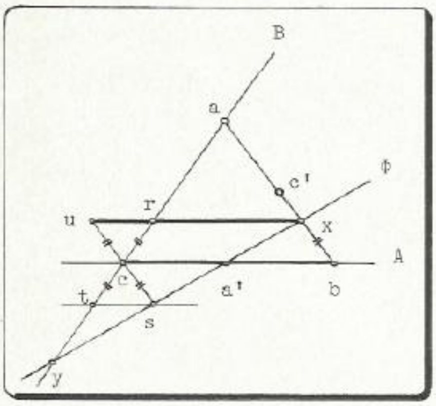
* Une démonstration guidée par une construction auxiliaire:



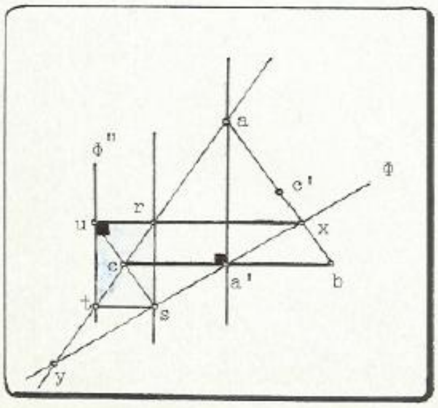
$a' \in]x,y[$.
Passant par x, la parallèle Φ' à A est sécante en r à $]a,c[$ d'après l'axiome de passage entre les structures d'ordre des droites que nous noterons (P).
Nous avons: Φ' sécante à Φ
$bx = cr$
$r \in]a,y[$



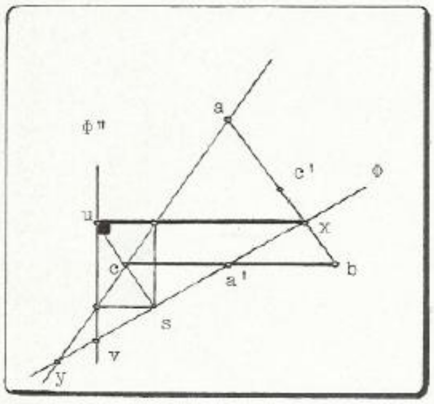
Passant par c, la parallèle à la droite C est sécante en s à Φ et en u à Φ'.
bc = xu car bcux est un parallélogramme.
c est le milieu de [s,u] car de plus cs = bx.
Nous avons $u \neq x, r$
et $s \neq a', x, y, r$ (raisonner par l'absurde).
Nous préciserons la position de s.



Passant par s, la parallèle à A est sécante en t à la droite B.
c est le milieu de [r,t] d'après l'axiome de passage entre les structures affines des droites.
Nous avons $t \neq c, y, r, u$ (raisonner par l'absurde).



Le quadrilatère rstu est un rectangle car ses diagonales se coupent en leur milieu et sont égales en longueur.
Notons Φ'' la droite D(t,u).
Nous avons $\Phi' \perp \Phi''$
$D(r;s) /\!/ D(a,a')$.
D'où $s \in]a',y[$ d'après (P);
il en résulte que $t \in]c,y[$, (P);
d'où : $t \in]y,r[$.



Φ" est sécante en v à]y,s[d'après (P);
d'où v ∈]x,y[d'après ce qui précède et v ≠ u (raisonner par l'absurde).

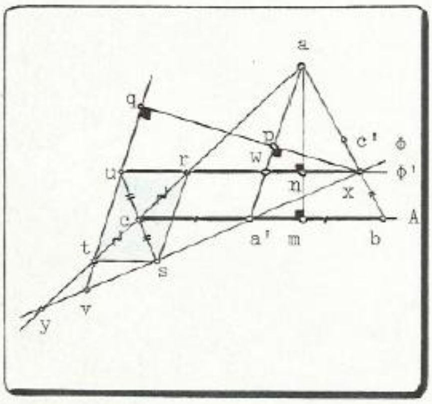
En conséquence, cette construction auxiliaire nous permet d'écrire

$$\boxed{\forall \Phi \in \Psi_2 \;,\; bc = xu < xv < xy}$$

C.Q.F.D.

* <u>Une généralisation du cas (2):</u>

l'étude minutieuse de cette construction auxiliaire nous conduit à généraliser cette situation au cas d'un triangle abc vérifiant l'inégalité ab ⩽ ac.



On construit le parallèlogramme rstu de la même façon que précédemment.

Les points a' et w étant les milieux respectifs des segments [s,x] et [r,x] , il s'en suit que les droites D(a,a') et D(r,s) sont parallèles.

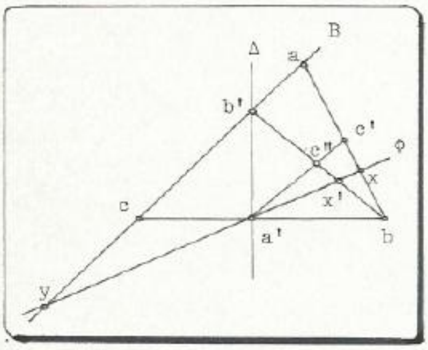
ab étant inférieur à ac, le projeté orthogonal m du point a sur la droite A appartient à la demi-droite fermée d'origine a' contenant le point b; il s'en suit que le point n appartient à la demi-droite fermée d'origine w contenant le point x.
D'après l'axiome de symétrie des rapports de projection orthogonale, le projeté orthogonal p du point x sur la droite D(a,a') appartient à la demi-droite fermée d'origine w contenant a.
Les points a et p sont d'un même côté par rapport à la droite Φ'; les points a et b étant de part et d'autre de Φ', A étant parallèle à Φ', les points a' et p sont de part et d'autre de Φ' i.e. $w \in [p,a'[$; il s'en suit que $u \in [q,v[$ (convexité du triangle xqv).

Le milieu c appartient à l'intervalle ouvert $]r,t[$:
d'où $s \in]v,x[$ (convexité du triangle uvx).
On en déduit que $t \in]u,v[$ d'après (P).

En conséquence, la figure généralisant le cas 2 représente fidèlement la configuration théorique des points et des droites mis en jeu.

Il s'en suit que $\boxed{\forall \phi \in \Psi_2 , \quad bc = xu < xv < xy}$ C.Q.F.D.

Autre démonstration:

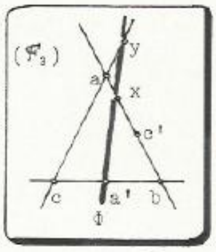


ab < ac; le point a appartient au demi-plan convexe contenant b et ayant pour frontière la médiatrice Δ du côté [b,c] . Le côté [a,c] est sécant en b' à Δ .
$c' \in [a,b]$ et $a' \in [b,c]$; il s'en suit que le segment [b,b'] coupe le segment [a',c'] en c" (ce qui se démontre), c" étant le milieu du segment [b',b]; dans le triangle a'bc', les segments [a',x] et [b,c"] se coupent en x' (se qui se démontre aussi). Il s'en suit que nous sommes dans le cas 2 pour le triangle isocèle bb'c :

$$bc < x'y \leqslant xy$$

7. Etude du cas 3:

<u>donnée:</u> une droite Φ passant par a' est sécante en x à l'intervalle ouvert]a,c'[, donc à la droite C, et sécante en y à la droite B.



cas 3

* Existence d'un tel cas ou cohérence de la donnée:

. voir 6.

.   "

. Il existe au moins un point x dans l'intervalle ouvert]a,c'[: voir 6.

. La droite Φ déterminée par les points a' et x existe d'après le premier axiome d'incidence et est sécante en y à la droite B d'après une conséquence de l'axiome de passage entre les structures affines des droites; d'où l'existence du segment [x,y].
Nous venons de montrer qu'il existe donc au moins une droite ϕ passant par a', sécante aux droites C et B respectivement en x et y, le point x appartenant à l'intervalle ouvert]a,c'[.
Notons Ψ_3 l'ensemble de ces droites Φ .

. Les points a, a', c, x et y sont distincts (raisonner par l'absurde); ainsi à chaque droites Φ de Ψ_3 est associé un segment unique [x,y] de longueur <u>non nulle.</u>
Les points a' et c sont de part et d'autre de la parallèle, passant par le point x, à la droite D (a',c'); il en est de même des points a' et y; les points a', x et y étant alignés, il s'en suit que le point x appartient à l'intervalle ouvert]a',y[d'après ce qui précède.

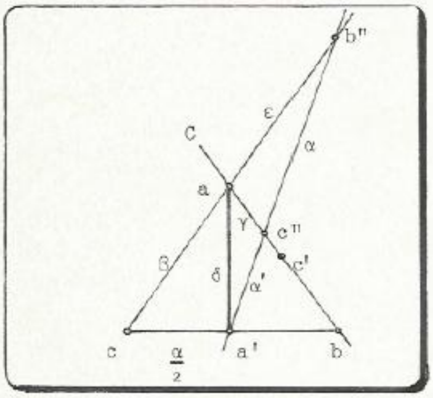
* Position du point y:

les points a,x et y n'étant pas alignés (raisonner par l'absurde), considérons le triangle ca'y; le point b n'appartenant pas au côté [c,a'] de ce triangle, la droite C passant par les points b et x recoupe en a le côté [c,y] (un raisonnement par l'absurde conduit à la négation du théorème de Pash); plus précisément le point a appartient à l'intervalle ouvert]a,y[d'après ce qui précède.

* Subdivision de la condition d'existence; rescencement des cas particuliers:

. le film de la simulation évoquée en 3. ; nous montre que lorsque x se déplace sur la droite C du point a vers le point c', la longueur du segment [x,y] croît continuellement de zéro jusqu'à l'infini; pour un certain point c" de l'intervalle ouvert]a,c'[, la longueur xy serait donc égale à la longueur bc.

. Recherche du point c":



appliquons le théorème de Ménélaus au triangle abc relativement à la droite passant par les points a', b", c"

$$\frac{\alpha/2}{\alpha/2} \cdot \frac{\varepsilon+\beta}{\varepsilon} \cdot \frac{\gamma}{\gamma'} = 1$$

d'où: $\varepsilon = \dfrac{\beta\gamma}{\beta-2\gamma}$ car $\beta=\gamma+\gamma'$

Appliquons le théorème de Ménélaus au triangle a'b"c relativement à la droite C passant par les points a,b c"

$$\frac{\varepsilon}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha/2} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$$ d'où: $\alpha' = \dfrac{\alpha(\beta-2\gamma)}{2\gamma}$ d'après ce qui précède.

Appliquons le théorème de Stewart au triangle aa'b"

$(\alpha+\alpha')(\gamma^2+\alpha\alpha') = \varepsilon^2\alpha'+\delta^2\alpha$ avec $\delta^2+(\alpha/2)^2 = \beta^2$

$4\beta\gamma^4-2(4\beta^2-\alpha^2)\gamma^3-\beta(5\alpha^2-4\beta^2)\gamma^2+4\alpha^2\beta^2\gamma-\alpha^2\beta^3 = 0$

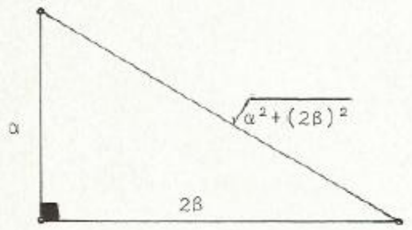
$(\gamma-\beta)^2(4\beta\gamma^2+2\alpha^2\gamma-\alpha^2\beta) = 0$

$$\gamma = \frac{-\alpha^2+\sqrt{\alpha^4+4\alpha^2\beta^2}}{4\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+(2\beta)^2}}$$

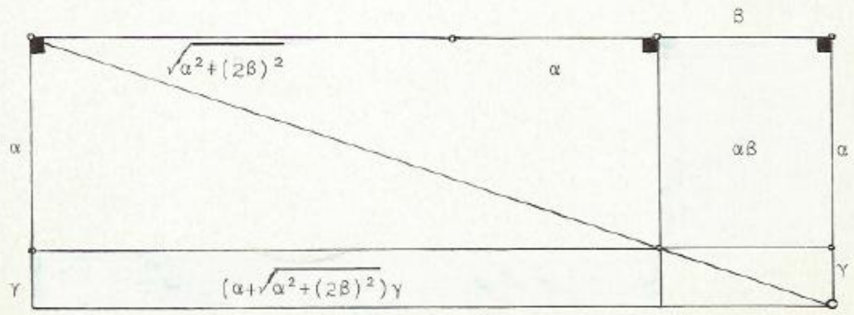
On remarque que $0 < \gamma < \beta/2$
$\gamma < \alpha$ (comparer γ^2 et α^2).

Rappelons que le théorème de Ménélaus d'Alexandrie (vers 90) est une conséquence du théorème de Thalès et que le théorème de Stewart énoncé en 1746 peut être démontré à partir du théorème d'Al-Kaschi (vers 1430).

. <u>Construction géométrique de la longueur γ, donc du point c":</u>



pour construire γ nous utiliserons la proposition 43 du livre I des Eléments d'Euclide:
"dans tout parallèlogramme, les compléments des parallèlogrammes autour du diamètre sont égaux entre eux".



. Conséquences:

trois sous-cas se dégagent de cette simulation

sous-cas 1: $x \in]c', c''[$ notons Ψ_{31} l'ensemble des droites Φ

sous-cas 2: $x = c''$

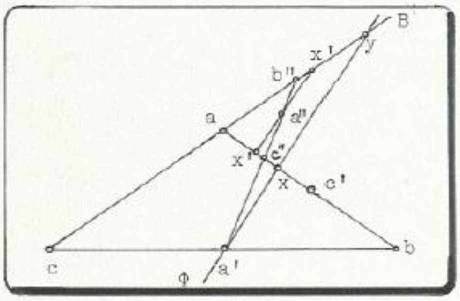
sous-cas 3: $x \in]c'', a[$ notons Ψ_{33} l'ensemble des droites Φ

. Remarques:

(1) le sous-cas 2 vérifie la conjecture de l'énoncé (I)

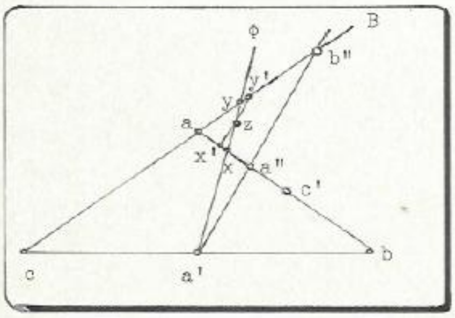
(2) le signe de la différence $\varepsilon - \gamma$ (>0) ne dépend pas des droites Φ du cas 3; on a donc $ax < ay$.

* Etude du sous-cas 1:



nous donnerons ici un schéma de démonstration.
L'existence d'un tel cas se démontre comme précédemment.
Si $x \in]c', c''[$ alors $y \in]b'', \rightarrow[$ ne contenant pas x.
Considérons le triangle $ab''c''$ pour lequel $\gamma < \varepsilon$. Par a'' milieu de $[b'', c'']$ on mène la parallèle à Φ qui rencontre le côté $[a, c'']$ en x' et la droite B en y' tel que $y' \in]b'', y[$; ceci reste à prouver. Nous sommes alors dans la généralisation du cas 2:
$\boxed{\forall \Phi \in \Psi_{31} \ , \ bc = b''c'' < x'y' < xy}$ cette dernière inégalité restant à démontrer.

* Etude du sous-cas 3:



nous donnerons ici encore un schéma de démonstration. L'existence d'un tel cas se démontre comme précédemment. Si $x \in]c'', a[$ alors $y \in]a, b''[$
Considérons le triangle axy pour lequel nous savons que $ax < ay$. Par z milieu de $[x, y]$ on mène la parallèle à $D(b'', c'')$ qui rencontre le côté $[a, x]$ en x' et B en y' tel que $y' \in]y, \rightarrow[$ contenant b''; ceci reste à prouver. !

Nous sommes alors dans la généralisation du cas 2:

$$\boxed{\forall \phi \in \Psi_{33} \ , \ xy < x'y' < b''c'' = bc}$$

En conséquence, l'énoncé (I) contient une troisième erreur!

8. Récapitulation de la méthode synthétique mise en oeuvre:

posons $\Psi = \{A\} \cup \Psi_2 \cup \Psi_{31} \cup \{D(b'',c'')\}$.

A la symétrie axiale près du triangle isocèle abc, nous pouvons écrire

$$\boxed{\forall \phi \in \Psi \quad , \quad bc < xy}$$

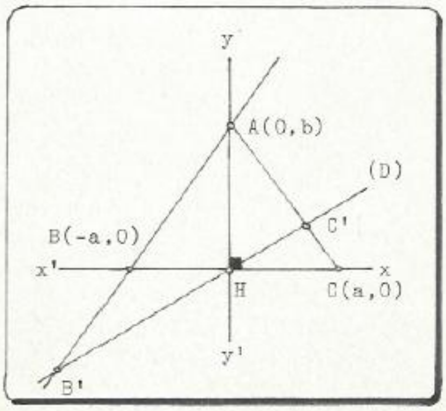
En conséquence, il faudrait proposer une formulation définitive de l'énoncé (I).

9. Démonstration par la méthode analytique:

les notations sont ici différentes cas nous sommes dans le cadre de la géométrie analytique.
On munit le plan contenant le triangle par un repère convenable.
Le choix de ce repère est fait de façon que:

- H est l'origine du repère
- l'axe x'Hx est le support de la base du triangle
- l'axe y'Hy est le support de la hauteur.

Toute droite (D) passant par H a pour équation $x = 0$ ou $y = \alpha x$
(α est un nombre réel)



* La droite d'équation $x=0$ coupe les deux droites (AB) et (AC) au seul point $A(0,b)$.

* Considérons maintenant une droite (D) d'équation $y=\alpha x$ et cherchons les coordonnées des points d'intersection B' et C' de cette droite avec les droites (AB) et (AC).

. Equation de la droite (AB): $y = \frac{b}{a}x + b$

. Equation de la droite (AC): $y = -\frac{b}{a}x + b$

. Coordonnées du point B':
Les coordonnées du point $B'(x,y)$ vérifient à la fois les deux équations: $y = \alpha x$ et $y = \frac{b}{a}x + b$. Ce système a une solution lorsque $\alpha \neq \frac{b}{a}$ et on trouve que B' est le point de coordonnées $\left(\frac{ab}{a\alpha-b}, \frac{\alpha ab}{a\alpha-b}\right)$.

. Coordonnées du point C':
les coordonnées du point C' (x,y) vérifient à la fois les deux équations: $y = \alpha x$ et $y = -\frac{b}{a}x + b$. Ce système a une solution lorsque $\alpha \neq -\frac{b}{a}$ et on trouve que le point C' est le point de coordonnées $\left(\frac{ab}{a\alpha+b}, \frac{\alpha ab}{a\alpha+b}\right)$

. <u>Remarque:</u>
la droite (D) d'équation $y=\alpha x$ coupe à la fois les deux droites (AB) et (AC) lorsque $\alpha \neq b/a$ et $\alpha \neq -b/a$. Dans le cas où $\alpha = b/a$ ou $\alpha = -b/a$, l'un des deux points B' ou C' n'existe pas et de ce fait on ne peut pas parler de la distance B'C'.

. <u>Posons nous cette question:</u> quelle condition doit vérifier le nombre α pour que $B'C' \geqslant BC$?

<u>Réponse</u>: $B'C' \geqslant BC \iff (B'C')^2 \geqslant (BC)^2$

or: $$(B'C')^2 = \left[\frac{ab}{a\alpha+b} - \frac{ab}{a\alpha-b}\right]^2 + \left[\frac{a\alpha b}{a\alpha+b} - \frac{a\alpha b}{a\alpha-b}\right]^2$$

$$(ab)^2(1+\alpha^2)\left(\frac{2b}{(a\alpha)^2-b^2}\right)^2$$

et $(BC)^2 = 4a^2$

donc: $B'C' \geqslant BC$ est équivalent à

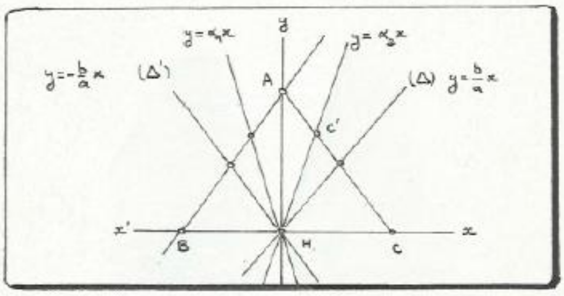
$$(ab)^2(1+\alpha^2)\left(\frac{2b}{(a\alpha)^2-b^2}\right) \geqslant 4a^2$$

après simplification on trouve

$$\alpha^2 \leqslant \frac{b^4+2b^2a^2}{a^4} = \left(\frac{b}{a}\right)^2\left(2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$$

donc

$$\alpha_1 = -\frac{b}{a}\sqrt{2+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{2+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \alpha_2 \quad \text{avec } \alpha \neq \frac{b}{a}, -\frac{b}{a}$$

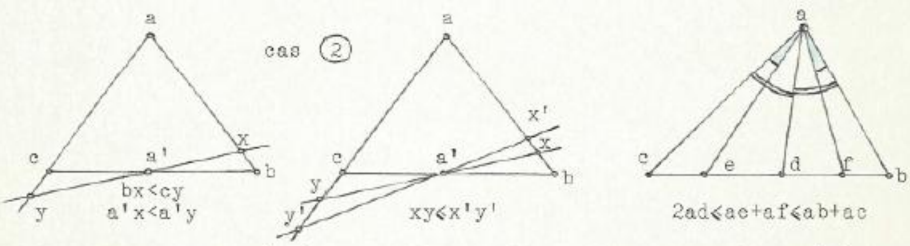


. <u>Conclusion:</u> toute droite passant par H, est sécante aux droites (AB) et (AC) en B' et C' tels que $B'C' \geqslant BC$ si, et seulement si, cette droite appartient à la région hachurée exceptées les droites Δ et Δ'.

C COMMENTAIRES

Cette recherche qui reste ouverte nous a permis d'une part de montrer l'existence d'énoncés flous comportant des erreurs et d'autre part de mieux pénétrer à l'intérieur de la géométrie plane.

Il reste à montrer que cette recherche peut déboucher sur un thème;
* signalons à ce sujet les exercices suivants



* notons que le théorème de Steiner s'y rattache et qu'une généralisation de notre problème au cas d'un tripoint est intéressante pour la recherche des cas particuliers et pour le calcul de γ .

Une adaptation au 1er cycle peut être envisagée sous la forme d'une suite d'exercices menés judicieusement au cours de l'année et ceci sur un cahier de recherche; présenté soigneusement, ce cahier deviendrait un document qui serait sûrement conservé par nos élèves.

En conséquence, il reste encore beaucoup de travail à faire.

BON COURAGE !