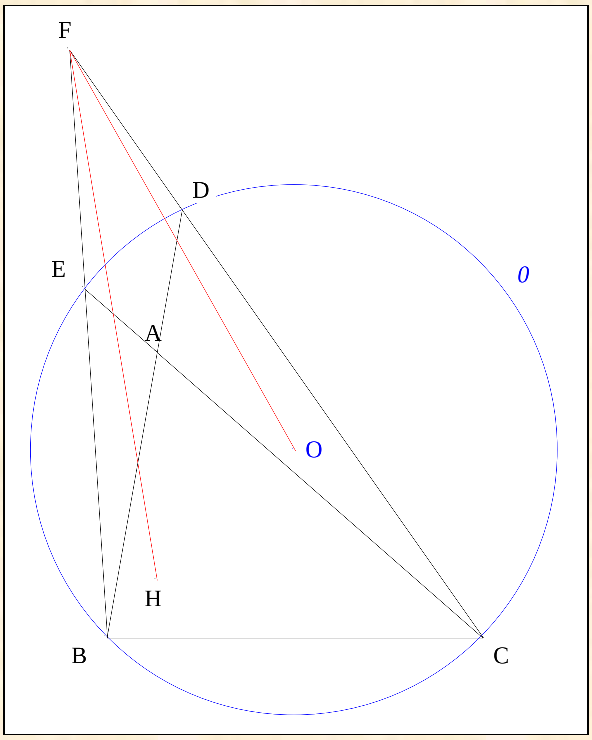
A CHRISTIAN von NAGEL's RESULT

REVISITED AND GENERALIZED

†

Jean-Louis AYME



Résumé. L'auteur propose de revisiter et généraliser un résultat de Christian von Nagel très connu dans la littérature géométrique. Une preuve purement synthétique est présentée. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author proposes to revisit and generalize a result of Christian von Nagel very known in the geometric literature. A purely synthetic proof is presented. The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

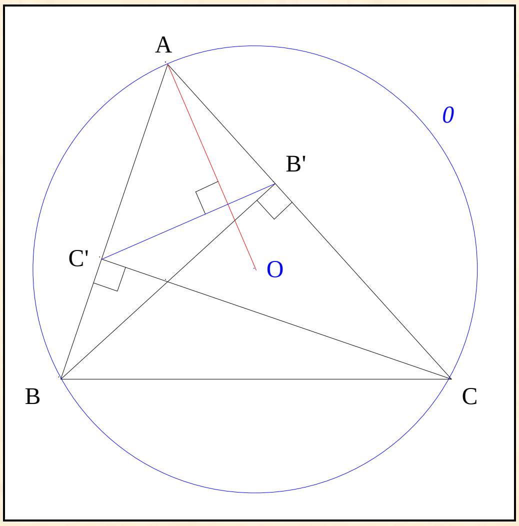
Sommaire

A. UN RÉSULTAT DE CHRISTIAN von NAGEL

1. Un rayon

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et B', C' les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC.

Donné : le rayon (AO) est perpendiculaire à (B'C').[1]

---

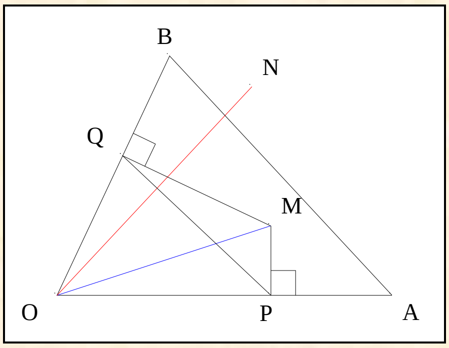
[1] von Nagel C. H., *Nouvelles Annales* série **2**, tome **19** (1860) 354 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
Ayme J.-L, Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3** p. 21-22 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Note historique : une preuve en a été donnée en 1860 par Charles Pierre Housel. [2]

2. Isogonale et perpendiculaire

VISION

Figure :



Traits : OAB un triangle,
M un point,
P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA), (OB)
et N un point.

Donné : (ON) est la O-isogonale de (OM) relativement à OAB
si, et seulement si,
(ON) est perpendiculaire à (PQ). [3]

3. Le résultat revisité

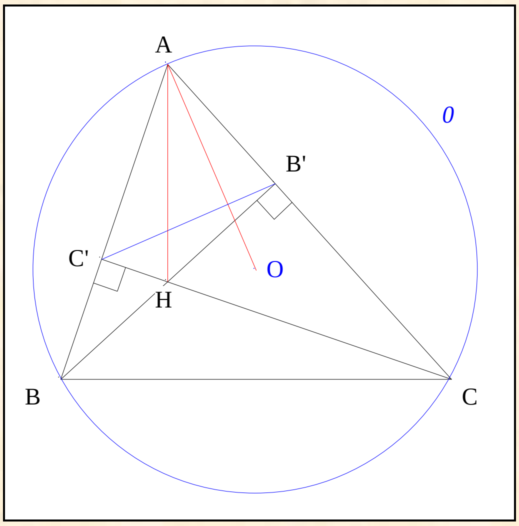
VISION

Figure :

---

[2] von Nagel C. H., *Nouvelles Annales* série **2**, tome **19** (1860) 440 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[3] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-
Ayme J.-L., Mantel*Noyer*Droz–Farny*Goormaghtigh or Simson–Wallace Generalized, G.G.G., vol. **12** p. 29-31 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



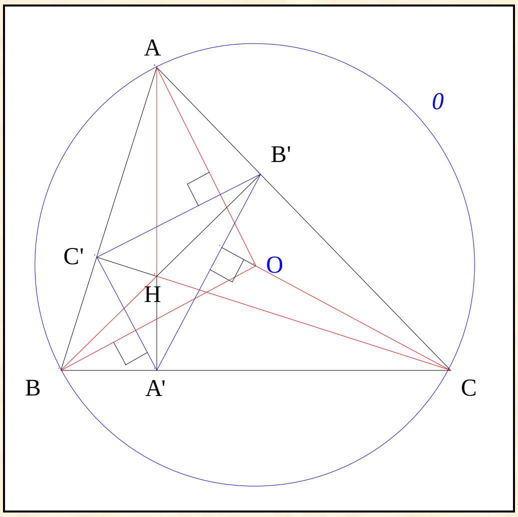
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
H l'orthocentre de ABC
et B', C' les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC.

Donné : (AO) et (AH) sont deux A-isogonales de ABC.

Énoncé traditionnel :

la bissectrice d'un angle d'un triangle
divise en deux parties égales
l'angle formé par
le rayon du cercle circonscrit, et par la hauteur qui part du sommet considéré.

Scolie : vision triangulaire



- Notons A' le pied de la A-hauteur de ABC.
- Mutatis mutandis, (BO) et (BH) sont deux B-isogonales de ABC
(CO) et (CH) sont deux C-isogonales de ABC.
- **Conclusion :** O et H sont isogonaux relativement à ABC.

Énoncé traditionnel :

les rayons qui joignent les sommets d'un triangle au centre du cercle circonscrit sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent deux à deux les pieds des hauteurs du triangle.

Note historique : F. G.-M. signale que le résultat de von Nagel

n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général

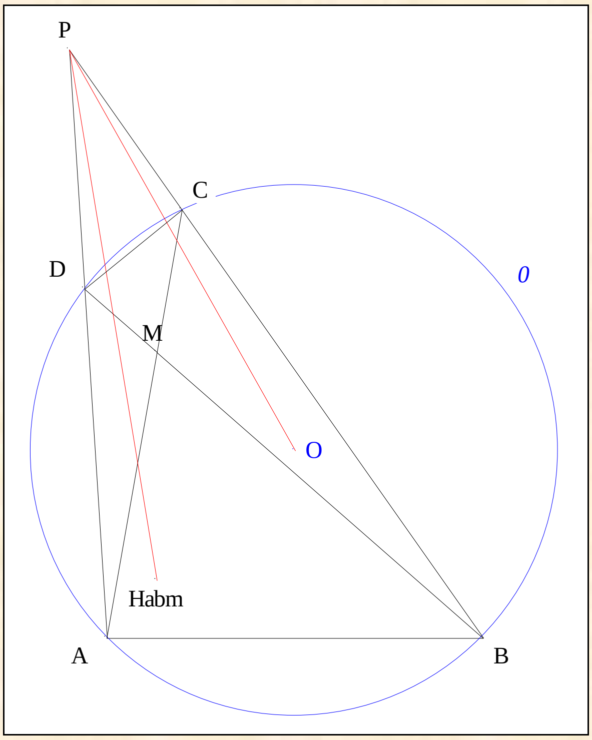
sans spécifier lequel.

B. GÉNÉRALISATION À UN QUADRILATÈRE CYCLIQUE

1. Une généralisation

VISION

Figure :



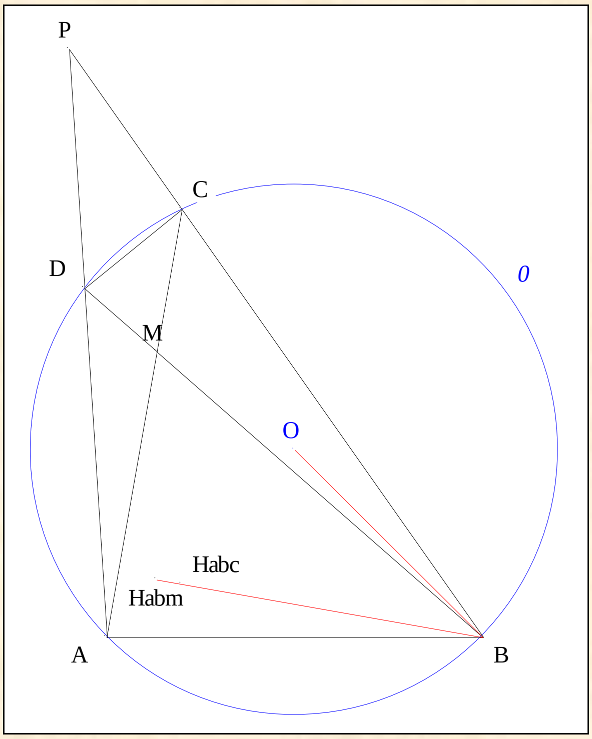
Traits :

ABCD un quadrilatère cyclique,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,

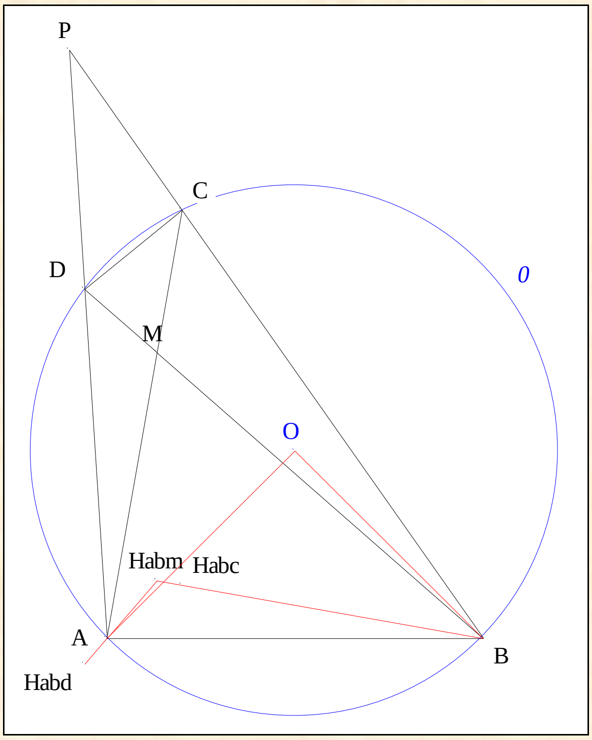
M, P les points d'intersection resp. de (AC) et (BD), (AD) et (BC),
et Habm l'orthocentre du triangle ABM.

Donné : (PHabm) et (PO) sont deux P-isogonales du triangle ABP.

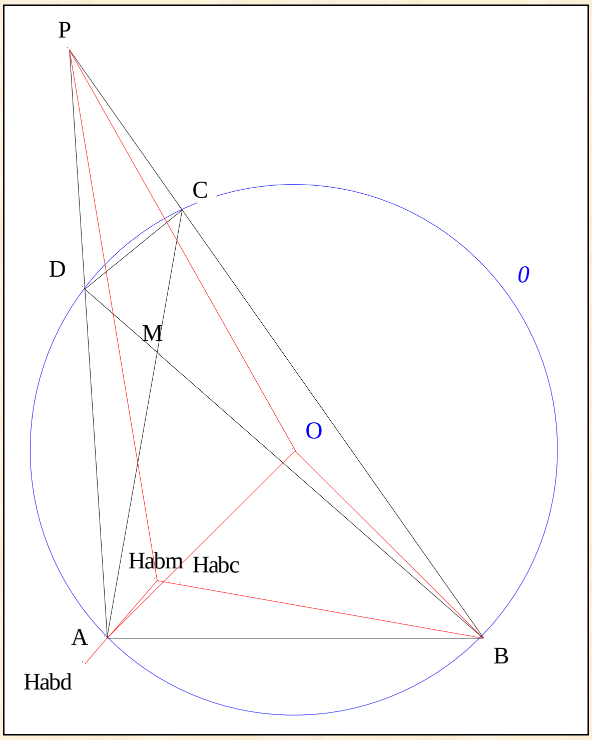
VISUALISATION



- Considérons le triangle ABC.
- Notons Habc l'orthocentre du triangle ABC.
- **Scolie :** B, Habc et Habm sont alignés.
- **Conclusion partielle :** d'après **A. 3.** Le résultat revisité, (BHabm) et (BO) sont deux B-isogonales de ABC.



- Considérons le triangle ABD.
- Notons Habd l'orthocentre du triangle ABD.
- **Scolie :** A, Habd et Habm sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AHabm) et (AO) sont deux B-isogonales de ABC.



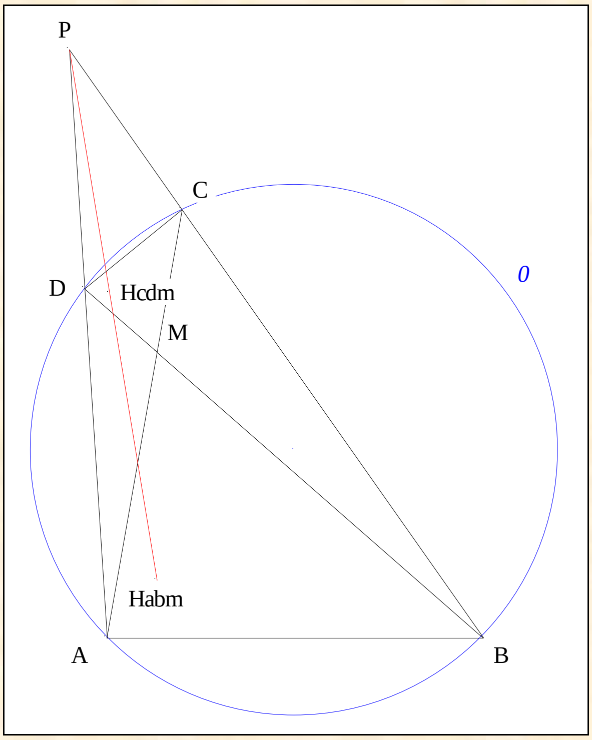
- Considérons le triangle ABP.

- **Conclusion :** d'après **D.** Annexe **1.** The isogonal theorem,
  (PHabm) et (PO) sont deux P-isogonales du triangle ABP.

3. Korea National Olympiad 2010 Problem 6

VISION

Figure :



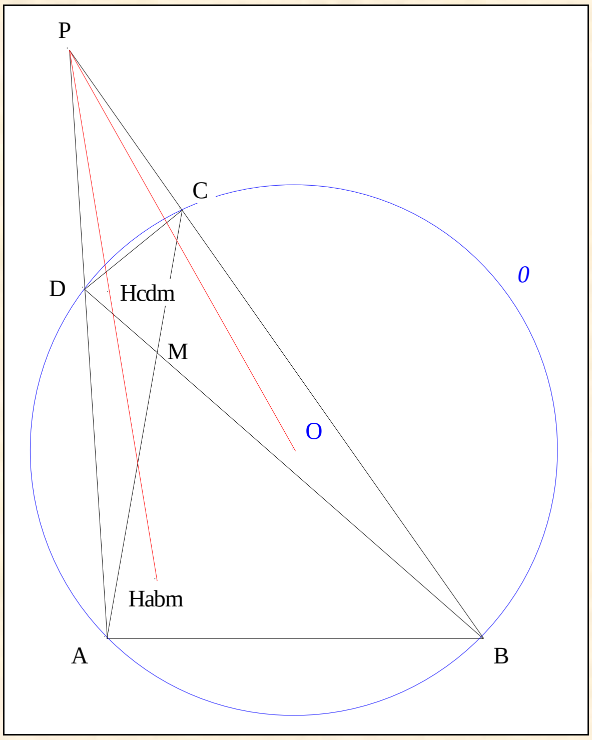
Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique convexe,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	M, P	les points d'intersection resp. de (AC) et (BD), (AD) et (BC),
et	Habm, Hcdm	les orthocentres resp. des triangles ABM, CDM.

Donné : A, Habm et Hcdm sont alignés.[4]

VISUALISATION

---

[4] Orthocentres of triangles ABC and A'B'C', IMO Shortlist 1995, G**8**, AoPS du 13/03/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=29893
Collinear points with orthocenters, Korea National Olympiad 2010 Problem **6**, AoPS du 09/09/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=497762

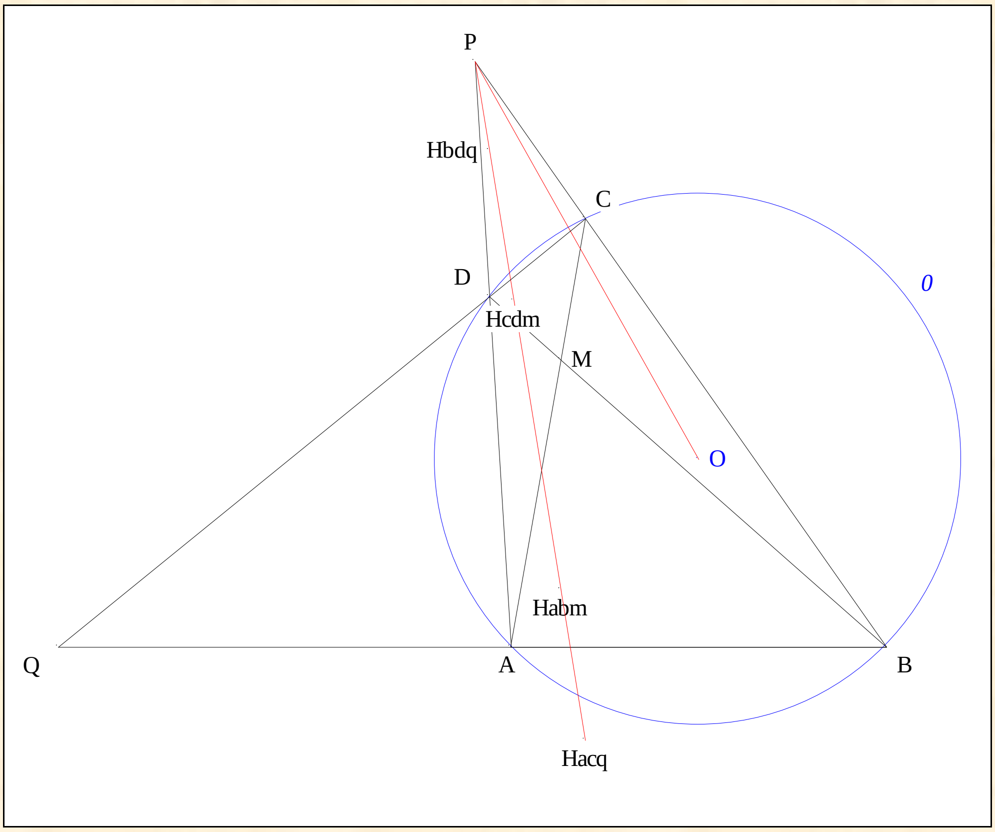


- Notons O le centre de *0*.

- D'après **B. 1.** Une généralisation, (PHabm) et (PO) sont deux P-isogonales du triangle ABP
  (PHcdm) et (PO) sont deux P-isogonales du triangle ABP ;
  en conséquence, (PHcdm) et (PHabm) sont confondues.

- **Conclusion :** A, Habm et Hcdm sont alignés

Scolies : **(1)** vision **1**



- Considérons le quadrilatère croisé cyclique ABDC.

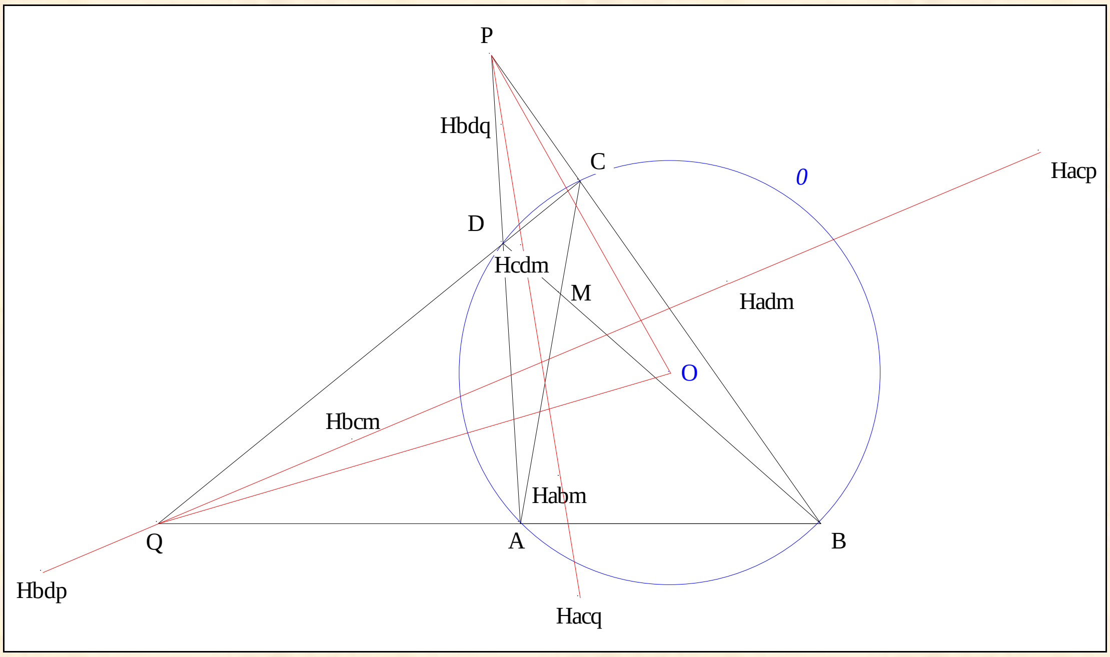
- Notons Q le point d'intersection de (AB) et (CD),
  et Hacq, Hbdq les orthocentres resp. des triangles ACQ, BDQ.

- D'après "La droite de Steiner d'un quadrilatère" [5], Hacq, Hbdq, Habm et Hcdm sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, la droite de Steiner de ABDC passe par P.

(2) vision **2**

[5] Ayme J.-L., La droite de Gauss est perpendiculaire à la droite de Steiner, vol. **4**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Considérons le quadrilatère croisé cyclique BCAD.

- Notons Hbcm, Hadm les orthocentres resp. des triangles BCM, DAM
  et Hbdp, Hcap les orthocentres resp. des triangles BDP, CAP.

- D'après "La droite de Steiner d'un quadrilatère" [6], Hbdp, Hcap, Hbcm et Hadm sont alignés.

- **Conclusion :** la droite de Steiner de BCAD passe par Q.

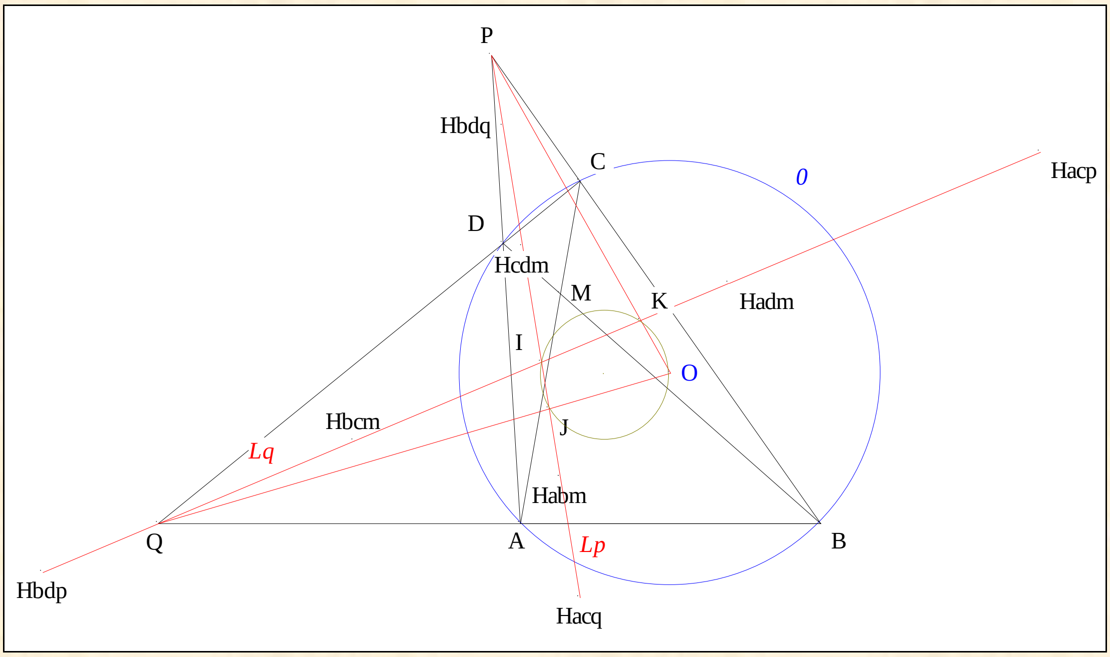
C. TROIS RÉSULTATS DE L'AUTEUR

1. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :

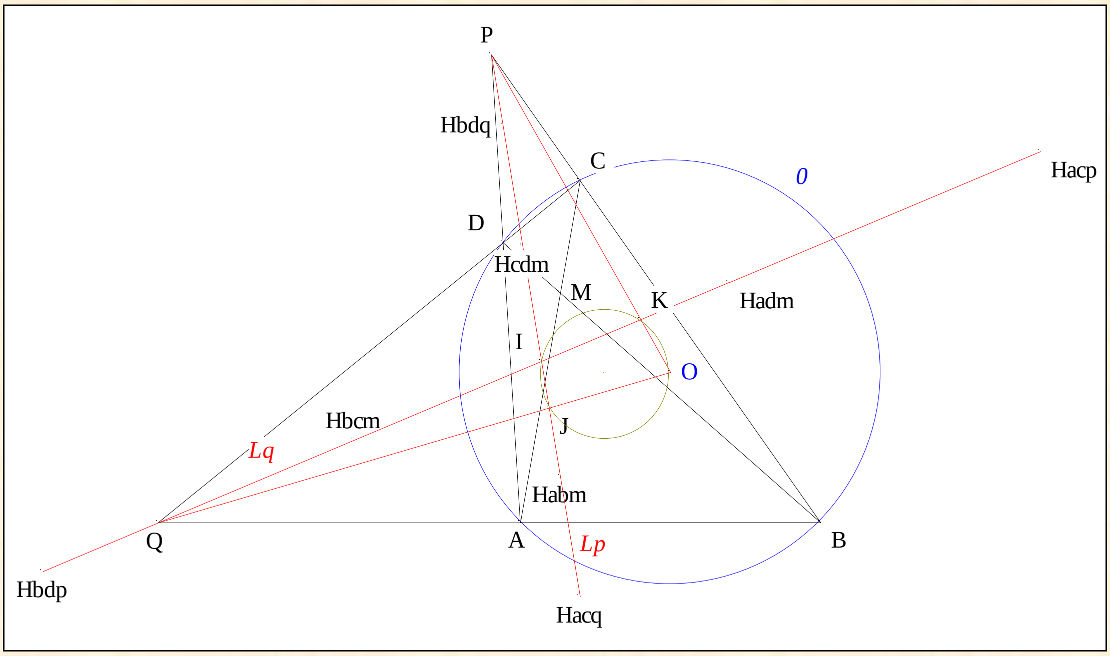
[6] Ayme J.-L., La droite de Gauss est perpendiculaire à la droite de Steiner, vol. **4**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABCD un quadrilatère cyclique,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
P, Q les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), (AB) et (CD),
Lp la P-isogonale de (PO) relativement au triangle PAB,
Lq la Q-isogonale de (QO) relativement au triangle QBC
et I, J, K les points d'intersection resp. de *Lq* et *Lp*, *Lp* et (QO), *Lq* et (PO).

Donné : I, J, K et O sont cocycliques. [7]

VISUALISATION



- Une chasse angulaire à **Π** près :

[7] Ayme J.-L., Four concyclic points, AoPS du 16/02/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=520998

* par décomposition, <*Lp*, *Lq* = <*Lp*, (PB) + <(PB), (QC) + <(QC), *Lq*

* par isogonalité, <*Lp*, *Lq* = <(PA), (PO) + <(AB), (AD) + <(QO), (QB)

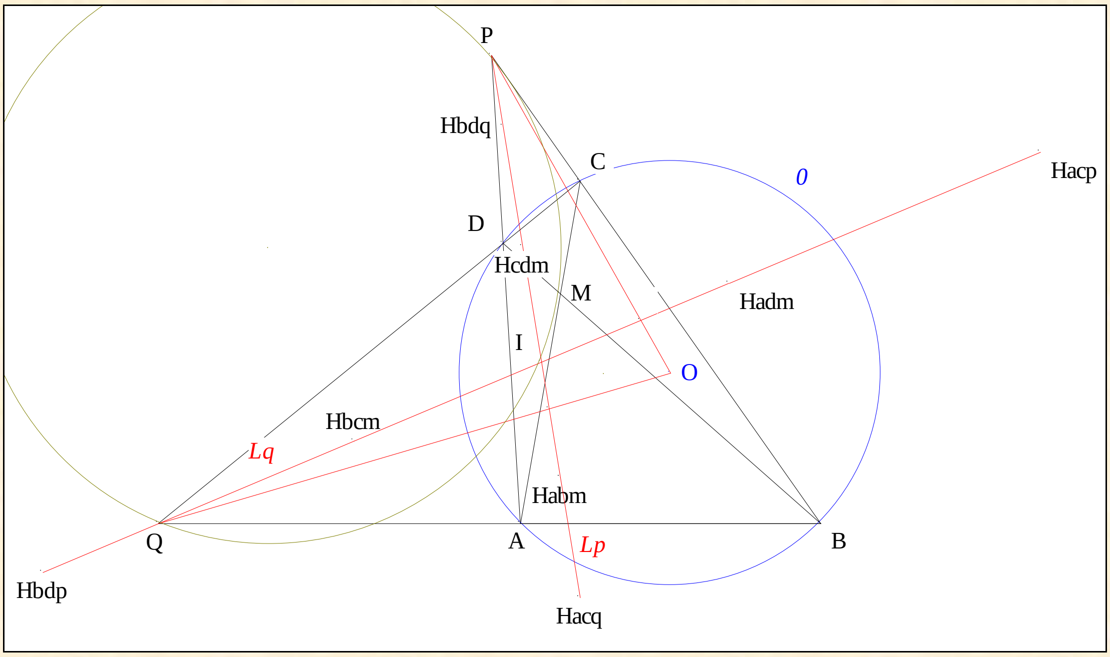
* par addition, <*Lp*, *Lq* = <(OQ), (OP)

- **Conclusion :** I, J, K et O sont cocycliques.

2. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :

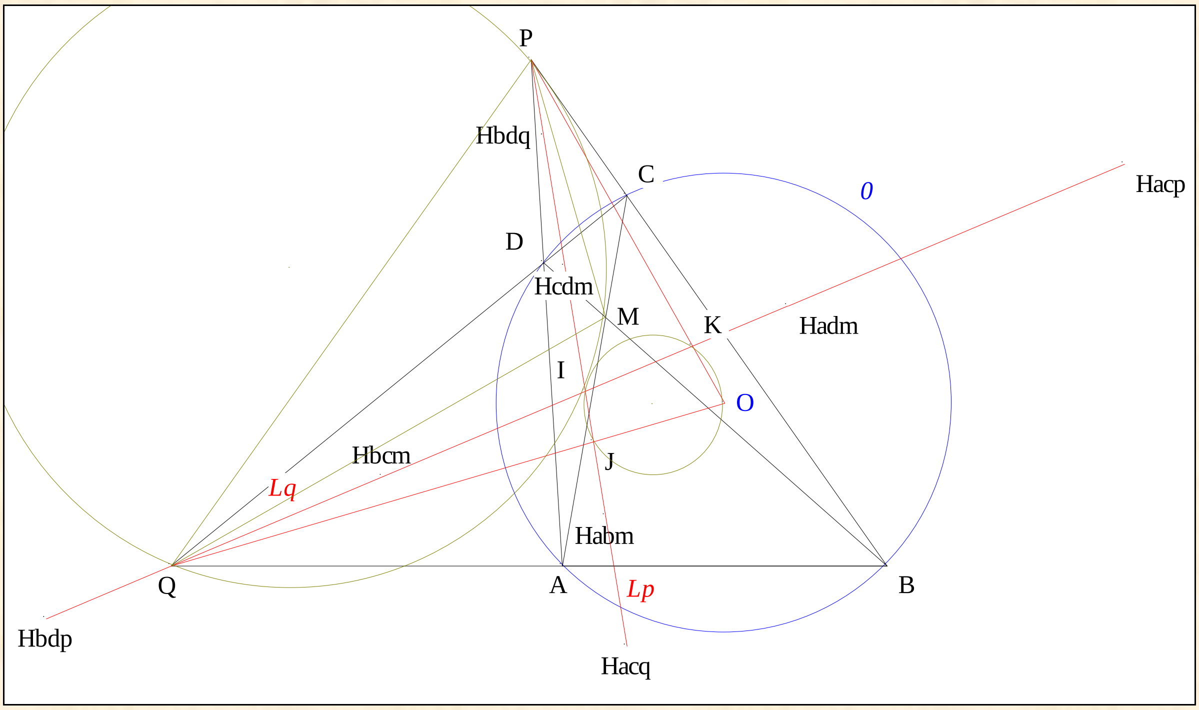


Traits : ABCD un quadrilatère cyclique convexe,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
M, P, Q les points d'intersection resp. de (AC) et (BD), (AD) et (BC), (AB) et (CD),
Lp la P-isogonale de (PO) relativement au triangle PAB,
Lq la Q-isogonale de (QO) relativement au triangle QBC
et I le point d'intersection de *Lq* et *Lp*.

Donné : I, P, Q et M sont cocycliques.[8]

VISUALISATION

[8] Ayme J.-L., Four concyclic points **2**, AoPS du 16/02/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=520999



- Notons J, K les points d'intersection resp. de *Lq* et *Lp*, *Lp* et (QO), *Lq* et (PO).

- D'après **C. 1.** Quatre points cocycliques, **(1)** I, J, K et O sont cocycliques

  (2) <*Lp*, *Lq* = <(OQ), (OP).

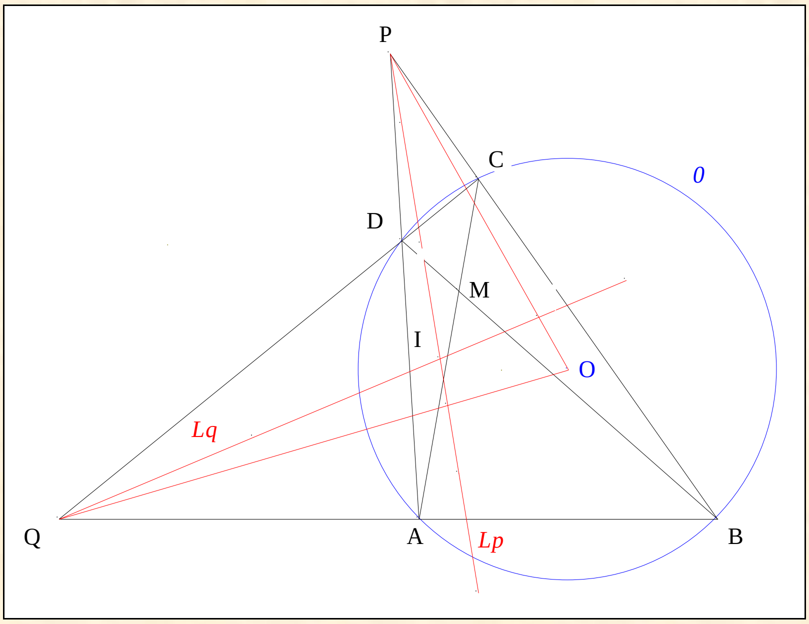
- D'après Brocard "Orthocentre du triangle diagonal", O est l'orthocentre du triangle MPQ ;
  en conséquence, <(OQ), (OP) = <(MP, (MQ) ;
  par transitivité de la relation =, <*Lp*, *Lq* = <(MP, (MQ).

- **Conclusion :** I, P, Q et M sont cocycliques.

3. Nature de I

VISION

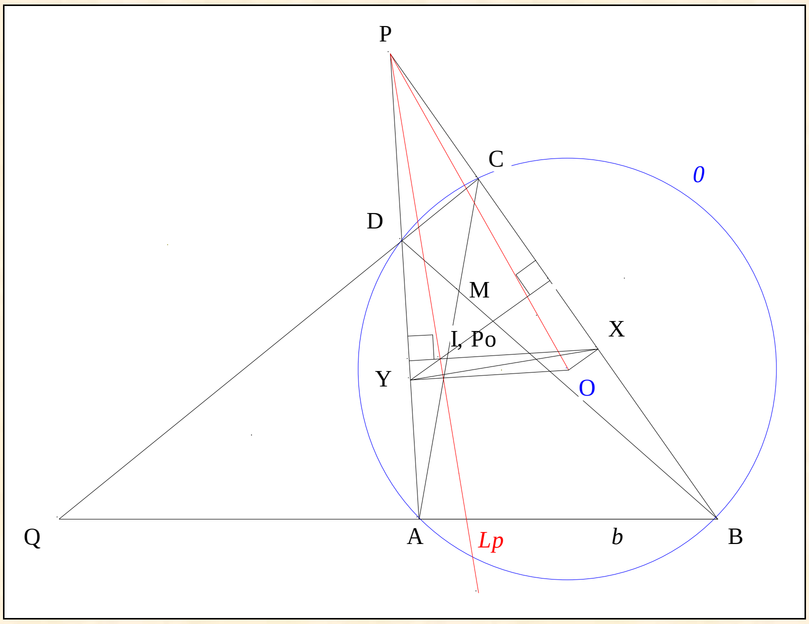
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère cyclique convexe,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
M, P, Q les points d'intersection resp. de (AC) et (BD), (AD) et (BC), (AB) et (CD),
Lp la P-isogonale de (PO) relativement au triangle PAB,
Lq la Q-isogonale de (QO) relativement au triangle QBC
et I le point d'intersection de *Lq* et *Lp*.

Donné : I est le point d'Euler-Poncelet de ABCD. [9]

VISUALISATION



- Notons Po le point d'Euler-Poncelet de ABCD
  et X, Y les milieux resp. de [BC], [DA].

[9] Ayme J.-L., Euler-Poncelet's point, AoPS du 16/02/2013 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/21561

- **Scolies :** (XO) ⊥ (BC) et (YO) ⊥ (AD).

- D'après "Le point d'Euler-Poncelet" [10], (XPo) ⊥ (AD) et (YPo) ⊥ (BC).

- Po étant l'orthocentre du triangle PXY, (PPo) ⊥ (XY).

- D'après **B. 2.** Une généralisation (PPo) est la P-isogonale de (PO) relativement à PXY ;
  en conséquence, (PPo) et (PI) sont confondues.

- **Conclusion partielle :** I est sur (PPo).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que I est sur (QPo) ;
  en conséquence, I et Po sont confondus.

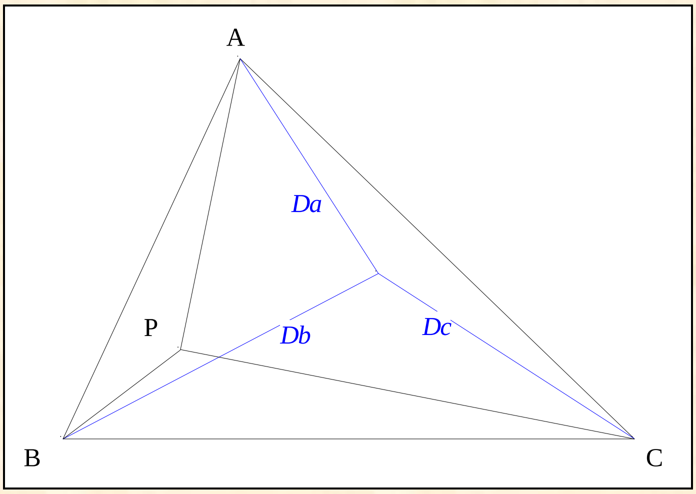
- **Conclusion :** I est le point d'Euler-Poncelet de ABCD.

D. ANNEXE

1. Points isogonaux ou the isogonal theorem [11]

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit à ABC
et *Da* , *Db* , *Dc* les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné: *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

---

[10] Ayme J.-L., A propos de l'anticentre d'un quadrilatère cyclique, vol. **8**, p. 16 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[11] Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* série **2**, tome **4** (1865) 393 ff., 400.