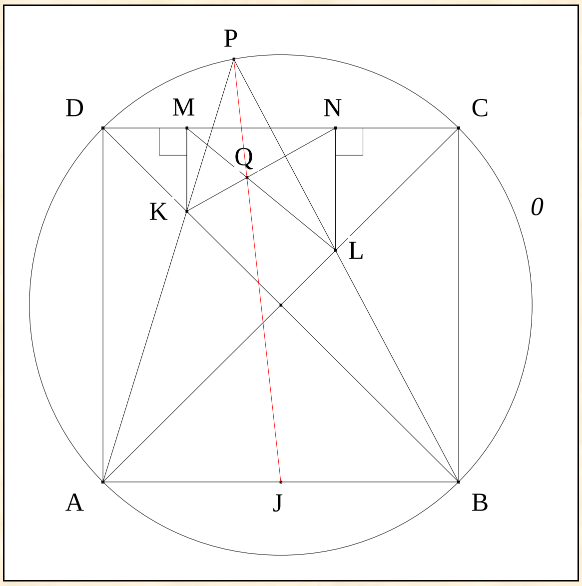
BREAKING DOWN OF A PROBLEM

*…académiquement, il se sent prêt à se lancer froidement dans une aventure qui l'amènera à circonscrire son Sujet, à le pulvériser selon n'importe quelle loi en un nombre fini d'objets insécables, vidés de toute essence, et à recomposer les morceaux inertes suivant n'importe quel système de telle façon que toute modification ne consistera plus qu'en divisions et combinaisons***.**

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente *Breaking down of a problem* où chaque problème se résout par décomposition en un nombre fini d'étapes et par la suite à les recomposer...

Abstract. The author presents *Breaking down of a problem* where each problem is resolved by decomposition in a finite number of steps and subsequently to recompose them...

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 12/04/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Resumen. El autor presenta *Breaking down of a problem* donde cada problema se resuelve por la descomposición de un número finito de pasos y posteriormente recomponerlos...

Zusammenfassung. Der Autor präsentiert *Breaking down of a problem* wo durch Zersetzung in einer endlichen Anzahl von Schritten und anschließend zu schwenken sie jedes Problem behoben ist...

D1826 LA SAGA DES DICHOTOMIES (2e épisode) [2]

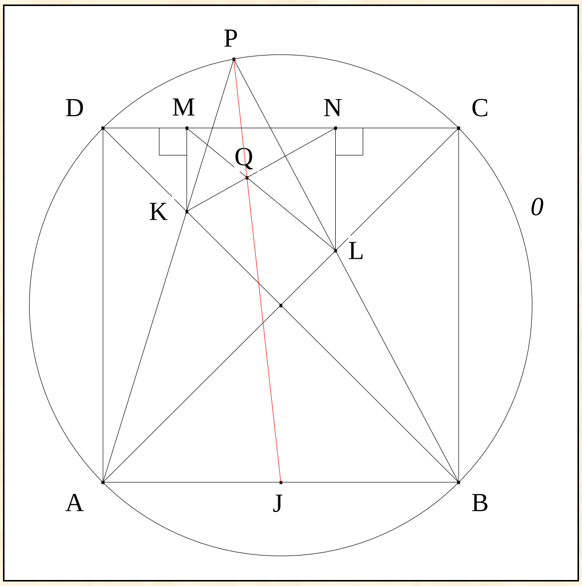
Sharygin Finals 2017, Problem **8.8**

de

Tran Quang Hung

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	O	le centre de *0*,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
	M, N	les pieds des perpendiculaires à (CD) issues resp. de K, L
et	J	le milieu de [AB].

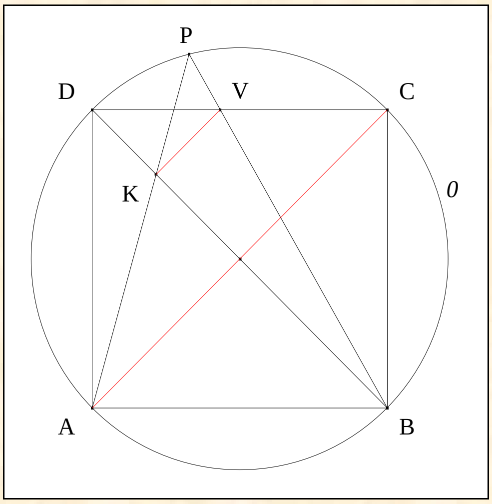
Donné : (PQ) passe par J.

[2] Fulger S., Square and circumcircle, AoPS du 21/07/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1481472_square_and_circumcircle

ÉTAPE 1

VISION

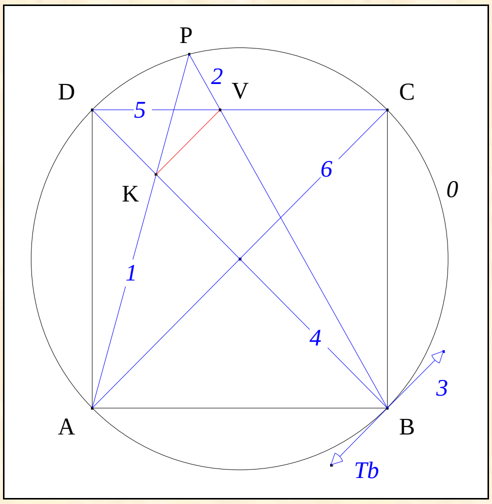
Figure :



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A
et K, V les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (CD).

Donné : (VK) est parallèle à (AC). [3]

VISUALISATION



- Notons *Tb* la tangente à *0* en B.

- **Scolie :** Tb // (AC).

[3] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 05/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490497_two_parallels_in_a_square

- D'après Carnot-Pascal "Pentagramma mysticum" [4]
  appliqué à l'hexagone dégénéré cyclique APB *Tb* DCA **(1)** (VK) en est la pascale

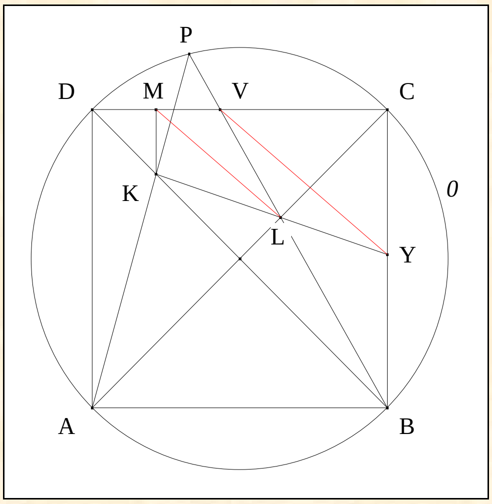
(2) (VK) // (AC).

- **Conclusion :** (VK) est parallèle à (AC).

ÉTAPE 2

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L, V	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC), (PB) et (CD),
	Y	le point d'intersection de (KL) et (BC),
et	M	le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K.

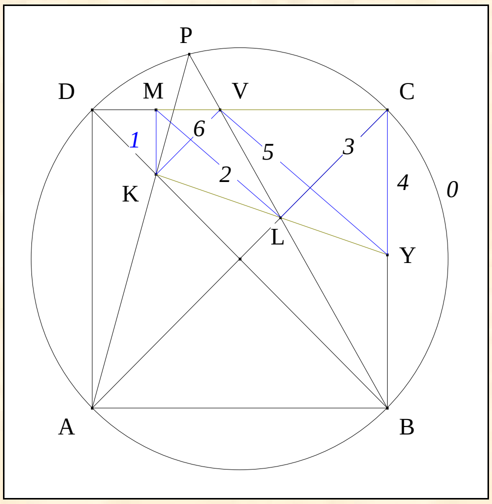
Donné : (VY) est parallèle à (ML). [5]

VISUALISATION

---

[4] Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456
Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[5] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490844_two_parallels



- **Scolie :** (KM) // (CY).

- D'après Problème **9**, (VK) // (AC).

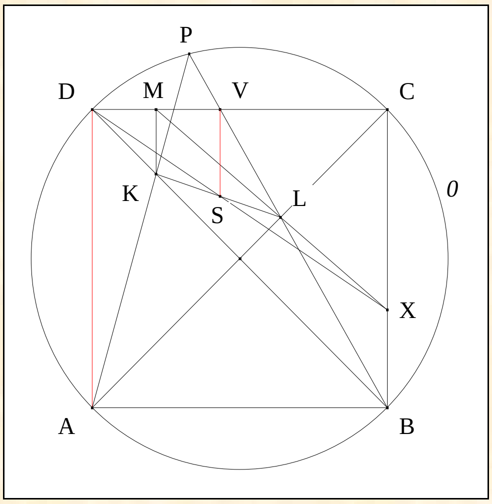
- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [6]
  appliqué au quadrilatère sectoriel KMLCYVK de frontières (KY) et (MC), (VY) // (ML).

- **Conclusion :** (VY) est parallèle à (ML).

ÉTAPE 3

VISION

Figure :



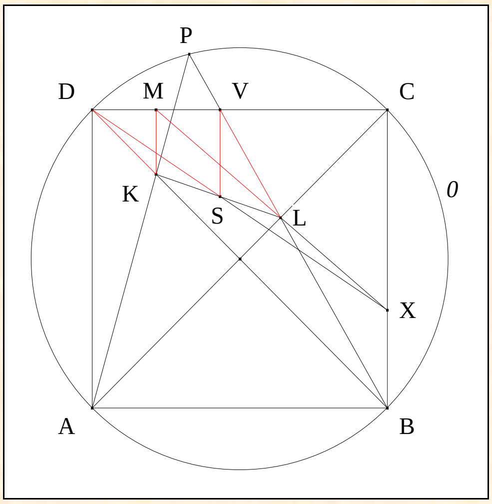
Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A,
K, L, V les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC), (PB) et (CD),
M le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K,

[6] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

	X	le point d'intersection de (ML) et (BC),
et	S	le point d'intersection de (DX) et (KL).

Donné : (SV) est parallèle à (AD). [7]

VISUALISATION



- **Scolie :** (KM) // (BX).

- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [8]
  (BX) étant la pascale du quadrilatère sectoriel KMLVSDK de frontières (KL) et (CD), (SV) // (KM).

- **Conclusion :** (SV) est parallèle à (AD).

ÉTAPE 4

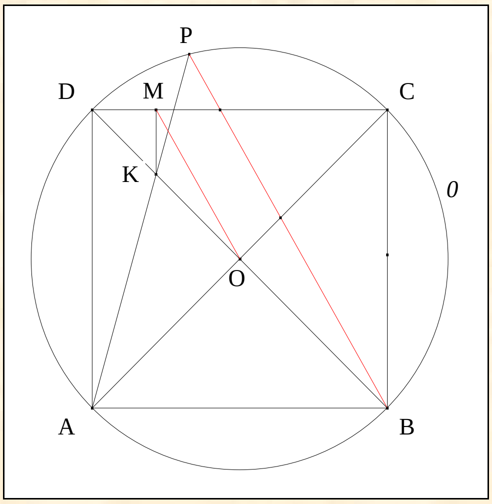
VISION

Figure :

---

[7] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490869_two_parallels

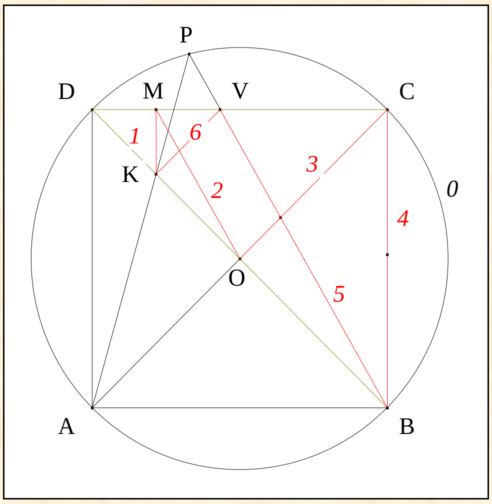
[8] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A
et M le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K.

Donné : (OM) est parallèle à (PB). [9]

VISUALISATION



- Notons V le point d'intersection de (PB) et (CD).
- **Scolie :** (KM) // (BC).
- D'après Problème **9**, (KV) // (AC).
- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [10]
  appliqué au quadrilatère sectoriel KMOCBVKK de frontières (DC) et (DB), (OM) // (BV).
- **Conclusion :** (OM) est parallèle à (PB).

---

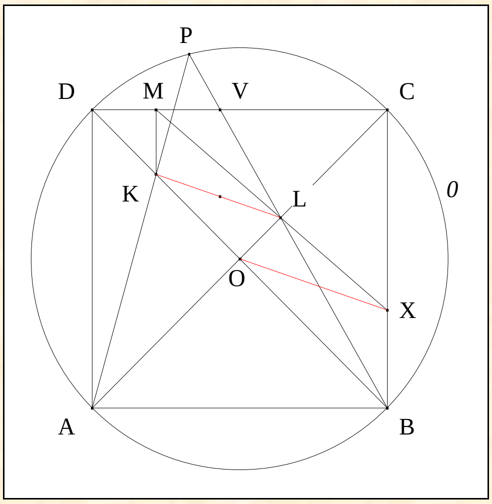
[9] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490884_two_parallels

[10] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ÉTAPE 5

VISION

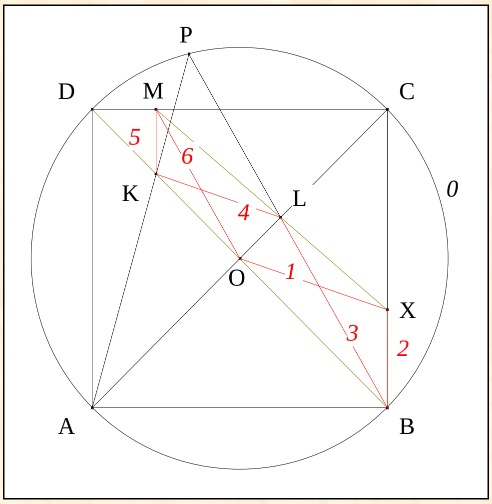
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	O	le centre de *0*,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
	M	le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K
et	X	le point d'intersection de (ML) et (BC).

Donné : (OX) est parallèle à (KL). [11]

VISUALISATION



- **Scolie :** (KM) // (BX).

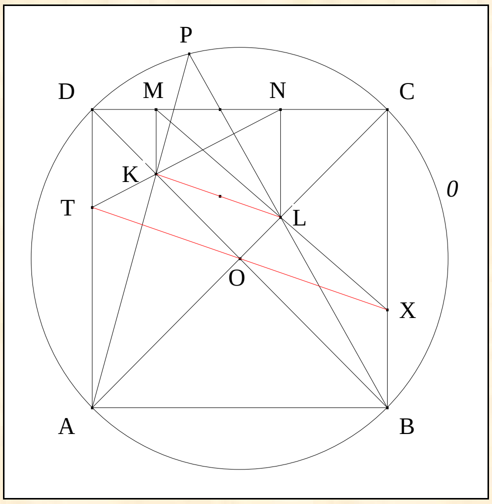
[11] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490887_two_parallels_a_better_formulation

- D'après Problème **12**, (OM) // (BL).

- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [12]
  appliqué au quadrilatère sectoriel OXBLKMO de frontières (BD) et (MX), (OX) // (KL).

- **Conclusion :** (OX) est parallèle à (KL).

Scolie : une jolie parallèle à (KL)



- Notons N le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de L
  et T le point d'intersection de (NK) et (AD).

- Mutatis mutandis nous montrerions que (KL) // (OT) ;
  par transitivité de //, (OX) // (OT) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (OX) = (OT) ;
  en conséquence, X, O et T sont alignés.

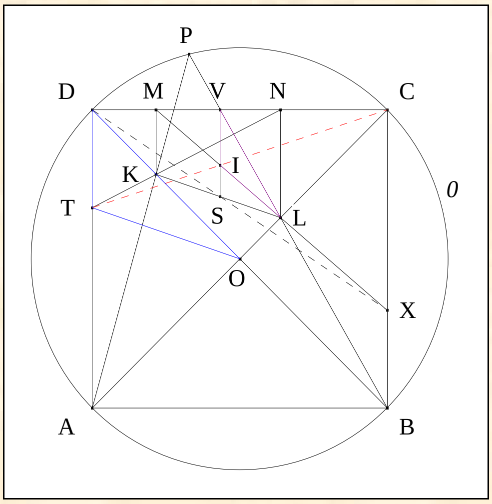
- **Conclusion :** (XOT) est parallèle à (KL).

ÉTAPE 6

VISION

Figure :

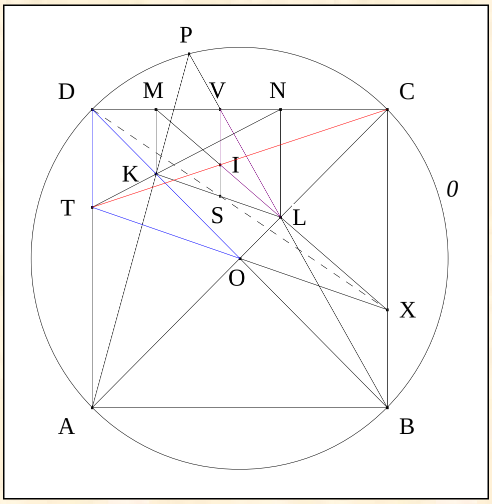
[12] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A,
K, L les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
M, N les pieds des perpendiculaires à (CD) issues resp. de K, L,
X, T les points d'intersection resp. de (ML) et (BC), (NK) et (AD),
V le point d'intersection de (PB) et (CD),
S le point d'intersection de (DX) et (KL),
et I le point d'intersection de (SV) et (ML).

Donné : C, I et T sont alignés. [13]

VISUALISATION



- D'après Problème **11**, (TD) // (IV).
- D'après Problème **13**, scolie, T, O et X sont alignés.
- **Scolie :** (TD), (IV) et (BX) sont parallèles entre elles.
- **Conclusion :** d'après Girard Desargues "Le théorème des deux triangles" [14]

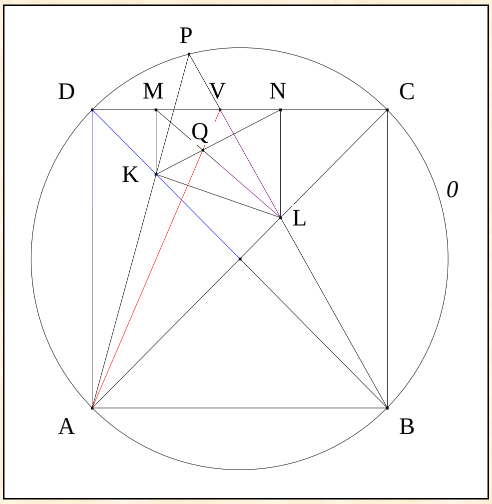
[13] Ayme J.-L., Three collinear points, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490911_three_collinear_points

(BX) étant l'arguésienne des triangles TDO et IVL, C, I et T sont alignés.

ÉTAPE 7

VISION

Figure :



Traits :		ABCD	un carré,
		0	le cercle circonscrit à ABCD,
		O	le centre de *0*,
		P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
		K, L	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
		M, N	les pieds des perpendiculaires à (CD) issues resp. de K, L
	et	V, Q	les points d'intersection de (PB) et (CD), (ML) et (MK).

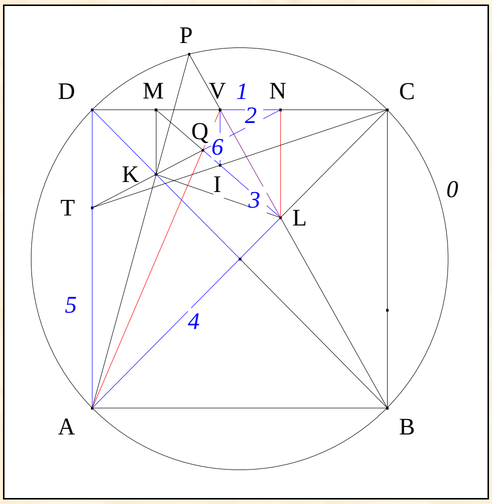
Donné : V, Q et A sont alignés. [15]

VISUALISATION

---

[14] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 42 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

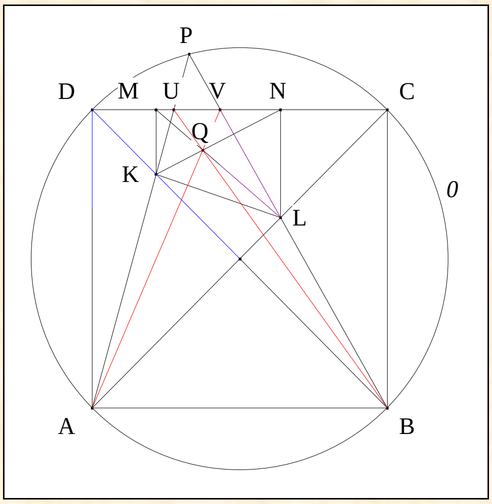
[15] Sunken rock, Square, circumcircle and concurrency, AoPS du 06/08/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1490873_square_circumcircle_and_concurrency



- Notons X, T les points d'intersection resp. de (ML) et (BC), (NK) et (AD),
  S le point d'intersection de (DX) et (KL),
  et I le point d'intersection de (SV) et (ML).

- **Conclusion :** d'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [16]
  (CTI) étant la pappusienne du quadrilatère sectoriel *123456* dont une frontière (NL),
  V, Q et A sont alignés.

Scolie : un second alignement



- Notons U le point d'intersection de (PA) et (CD).

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que U, Q et B sont alignés.

[16] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 18 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ÉTAPE 8

Sharygin Finals 2017, Problem **8.8**

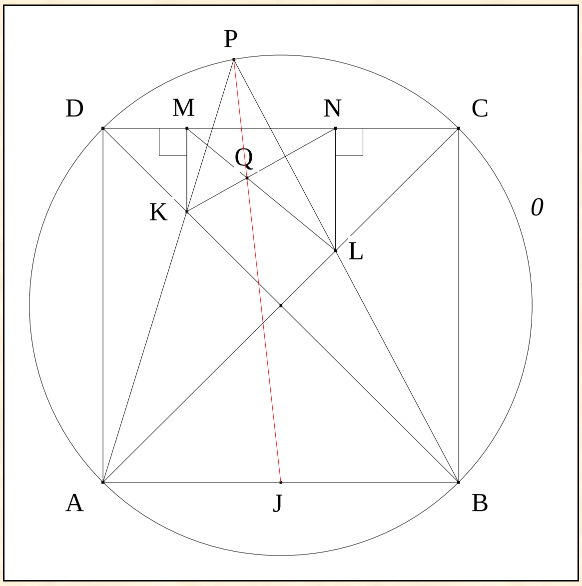
Restitution du problème

de

Tran Quang Hung (Vietnam) [17]

VISION

Figure :

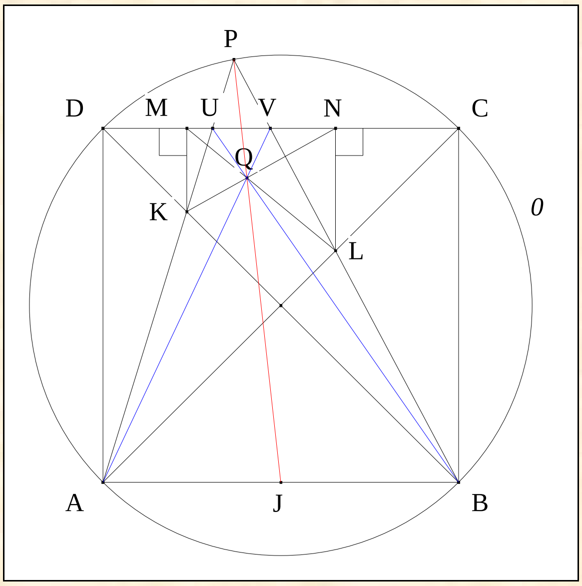


Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	O	le centre de *0*,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
	M, N	les pieds des perpendiculaires à (CD) issues resp. de K, L
et	J	le milieu de [AB].

Donné : (PQ) passe par J.

VISUALISATION

17 Median through point on circumcircle of square, AoPS du 04/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1490023_median_through_point_on_circumcircle_of_square
Official solution ; http://geometry.ru/olimp/2017/final_sol_en.pdf



- Notons U, V les points d'intersection de (CD) resp. avec (PA), (PB).

- D'après Problème **15**, **(1)** V, Q et A sont alignés

  (2) U, Q et B sont alignés.

- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" appliqué au trapèze ABVU, (PQ) passe par J.

Archive

XIII Geometrical Olympiad in honour of I.F.Sharygin
Solutions. Final round. Second day. 8 grade

8. (Tran Quang Hung, Vietnam) Let $ABCD$ be a square, and let P be a point on the minor arc CD of its circumcircle. The lines PA, PB meet the diagonals BD, AC at points K, L respectively. The points M, N are the projections of K, L respectively to CD, and Q is the common point of lines KN and ML. Prove that PQ bisects the segment AB.

Solution. Firstly prove the following assertion.

Lemma. Let $AP = AC$ and $BQ = BC$ be the perpendiculars to the hypothenuse AB of a right-angled triangle ABC lying on the outside of the triangle. The lines AQ and BP meet at point R, and the lines CP and CQ meet AB at points M and N respectively. Then CR bisects the segment MN.

Proof. Since $\angle CAP = 90° + \angle CAB = 180° - \angle CBA$, we have $\angle ACP = \frac{\angle B}{2}$. Hence $BM = BC = BQ$ and similarly $AN = AC = AP$. Let the line passing through R and parallel to AB meet CP, CQ at points X, Y respectively, and let Z be the projection of R to AB (fig.8.8). Then $RX : BM = PR : PB = AR : AQ = RZ : QB$, Therefore $RX = RZ$. Similarly $RY = RZ$ (fig.8.8.1). Thus CR bisects XY, and hence it bisects MN.

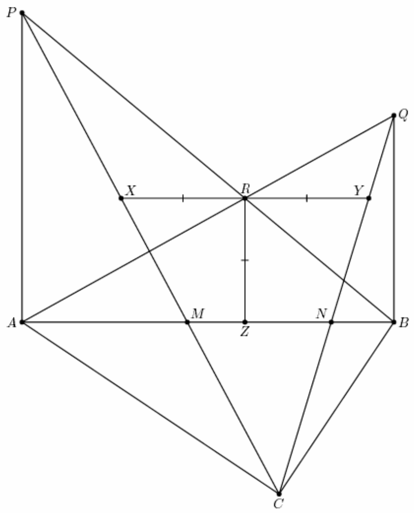


Fig. 8.8.1

Note. It it easy to see that CZ is the bisectrix of ABC and CR passes through the touching point of its incircle with the hypothenuse.

Return to the problem. Since KMD is an isosceles right-angled triangle, and $\angle KPD = 45°$, we obtain that M is the circumcenter of triangle KPD. Similarly N is the circumcenter of PCL. Furthermore $\angle MPN = 45° + (90° - \frac{\angle BDP}{2}) + (90° - \frac{\angle ACP}{2}) = 90°$. Applying the lemma to the points P, M, N, K, L we obtain the required assertion (fig.8.8.2).

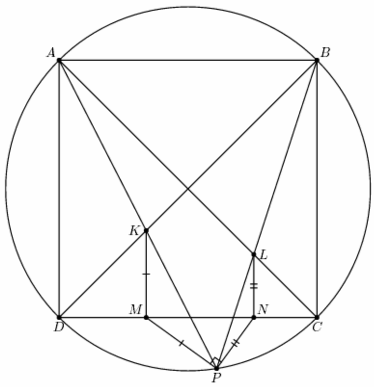


Fig. 8.8.2