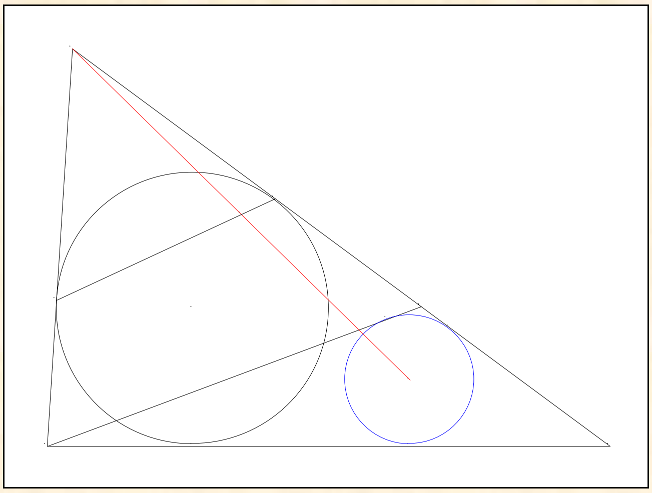
FRANCE TEAM SELECTION TEST

Deuxième jour : mercredi 16 mai 2007

Problème 6

†

Jean-Louis AYME



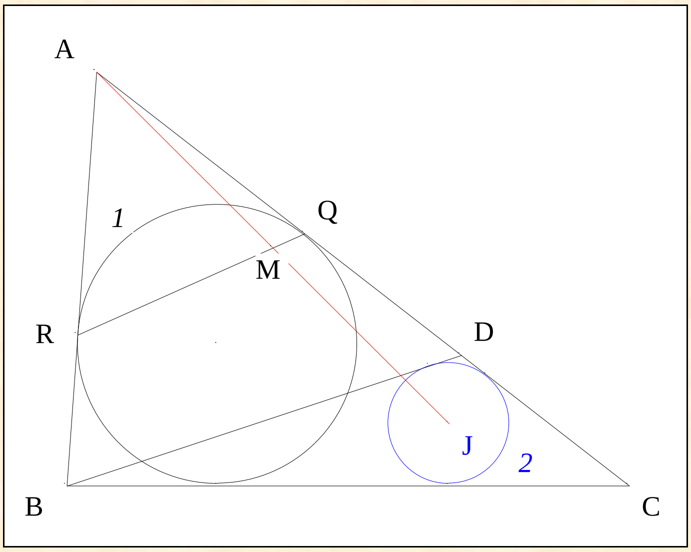
Résumé. Nous présentons un problème proposé au test de sélection (TST) de l'équipe française pour les Olympiades Internationales de Mathématiques de 2007, pour lequel l'auteur en donne une preuve originale.
Une note historique et une précision sur les TST sont offertes aux lecteurs.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

A. LE PROBLÈME 6

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle tel que AB < AC,
D le point de [AC] tel que le triangle BDA soit B-isocèle,
1, *2* les cercles inscrits resp. des triangles ABC, BDC,
I, J les centres resp. de *1*, *2*,
Q, R les points de contact de *1* resp. avec (CA), (AB)
et M le point d'intersection de (QR) et (AJ).

Donné : M est le milieu de [AJ].[1]

Note historique : ce problème a été proposé en 2006 dans la Short List des 47-ième I.M.O. en Slovénie. Il a été reproposé en 2007 aux TST de France, du Brésil, de l'AIMO[2].

À propos des TST : un team selection test (TST) ou team selection exam (TSE) est un test donné aux meilleurs des candidats, une soixantaine, des olympiades nationales[3] pour former l'équipe nationale pour les Olympiades internationales. Un TST propose sur deux journées six problèmes à résoudre durant 4h30 où la sagacité prévaut sur les connaissances. Les énoncés sont très courts et difficiles, et leur résolution ne fait appel à aucun outil sophistiqué.
Beaucoup d'élèves utilisent les TST pour se préparer aux OIM[4]. Notons que ceux de Chine, Roumanie et des États-unis sont très prisés, celles de Chine étant de notoriété difficile.
L'équipe nationale ainsi formée se compose de six élèves.

---

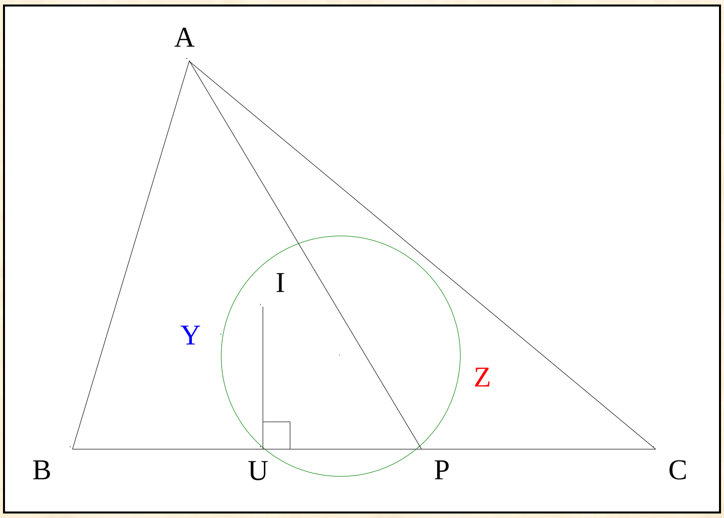
1 France TST (2007) problème 6.
2 Americana Ibero Mathematics Olympiads, TST 4, problem 1.
3 Comme le Concours général.
4 Olympiades Internationales de Mathématiques.

B. L'APPROCHE

1. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	P	un point de [BC],
	Y, Z	les centres resp. des triangles APB, APC
et	U	le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (BC).

Donné : U, Y, Z et P sont cocycliques. [5]

Note historique : ce cercle de diamètre [YZ] construit à partir de deux cercles extérieurs l'un de l'autre, est apparu en 1869 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*[6].
Dans le cas particulier où les deux cercles sont ceux considérés dans l'énoncé, la référence a été donnée d'une façon incomplète par le regretter Juan Carlos Salazar.
Une preuve peut être vue chez l'auteur[7].

2. Avertissement : les notations mis en œuvres à partir de là sont conservées de paragraphes en paragraphes.

3. Deux perpendiculaires

VISION

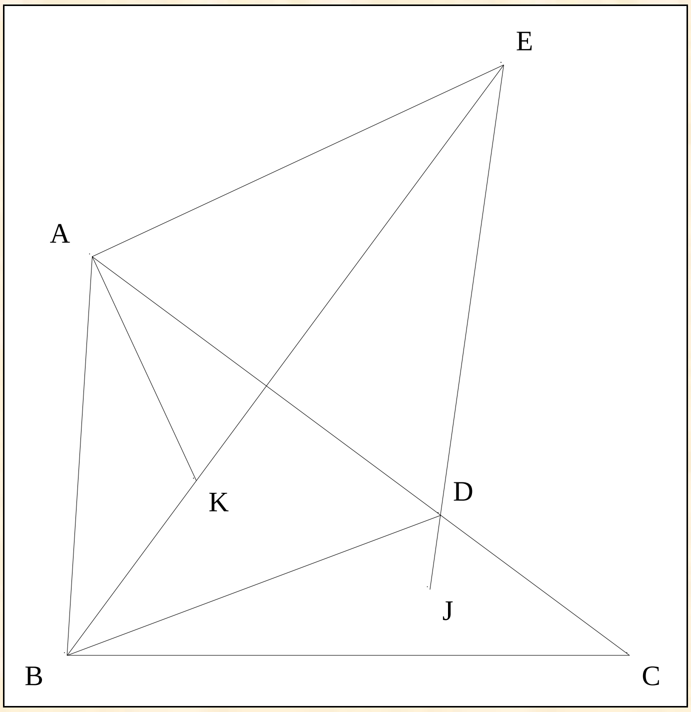
---

5 *American Mathematical Monthly*.

6 *Nouvelles Annales de Mathématiques* de Terquem (1869) 458 ;
Ayme J.-L., Gohierre de Longchamps dans les Journaux scientifiques, G.G.G. vol. 5, p. 12 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

7 Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach-Ayme, G.G.G. vol. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

Figure :



Traits : ABC un triangle tel que AB < AC,
D le point de [AC] tel que le triangle BDA soit B-isocèle,
J, K les centres resp. des triangles BCD, BDA
et E le point d'intersection de (AK) et (DJ).

Donné : (AE) est perpendiculaire à (AK).

VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** (AK) est la A-bissectrice intérieure de BDA
  (2) (BK) est La B-bissectrice intérieure de BDA
  (3) (DJ) est la D-bissectrice extérieure de BDA
  (4) E est le B-excentre de BDA

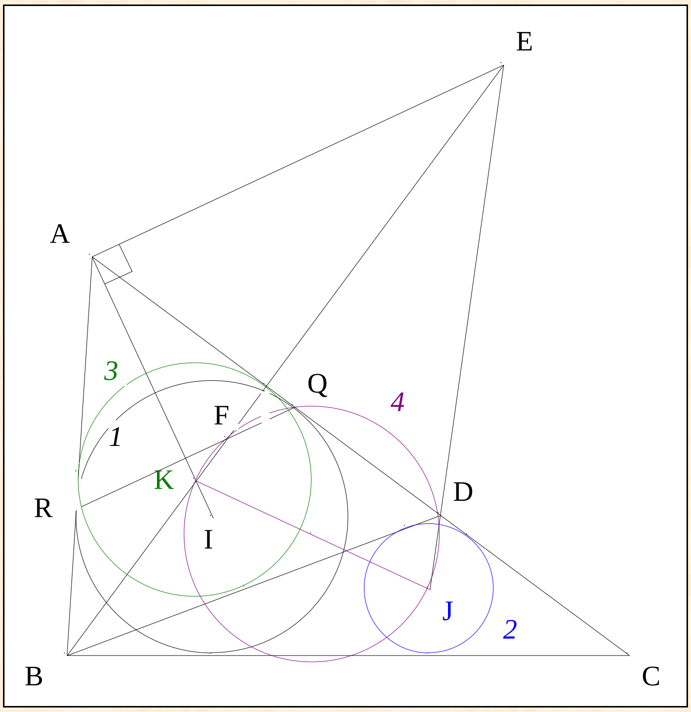
- En conséquence, (AE) est la A-bissectrice extérieure de BDA.

- **Conclusion :** (AE) est perpendiculaire à (AK).

4. Un point sur un cercle

VISION

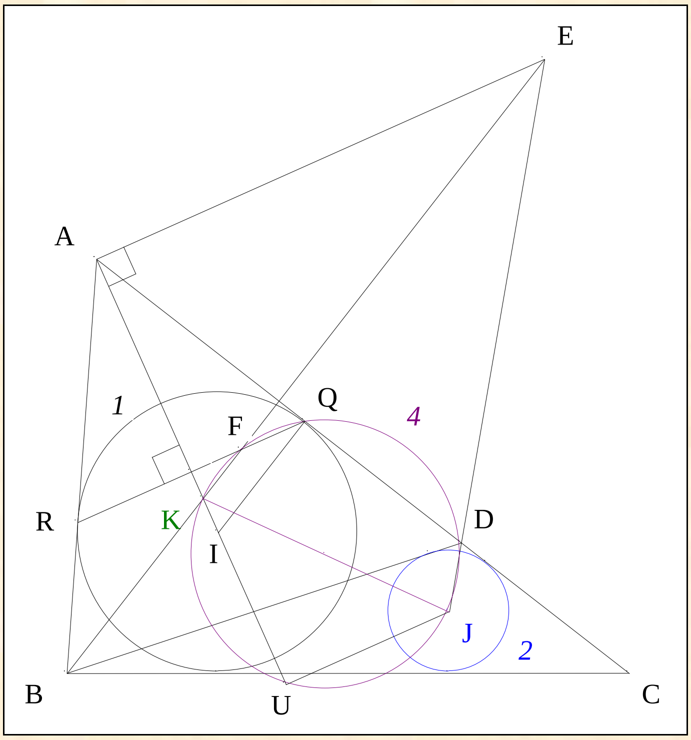
Figure :



Traits :	ABC	un triangle tel que AB < AC,
	D	le point de [AC] tel que le triangle BDA soit B-isocèle,
	1, *2*, *3*	les cercles inscrits resp. des triangles ABC, BDC, BDA,
	I, J, K	les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
	Q, R	les points de contact de *1* resp. avec (CA), (AB),
	E, F	les points d'intersection resp. de (AK) et (DJ), de (QR) et (BE),
et	*4*	le cercle de diamètre [JK].

Donné : F est sur *4*.

VISUALISATION

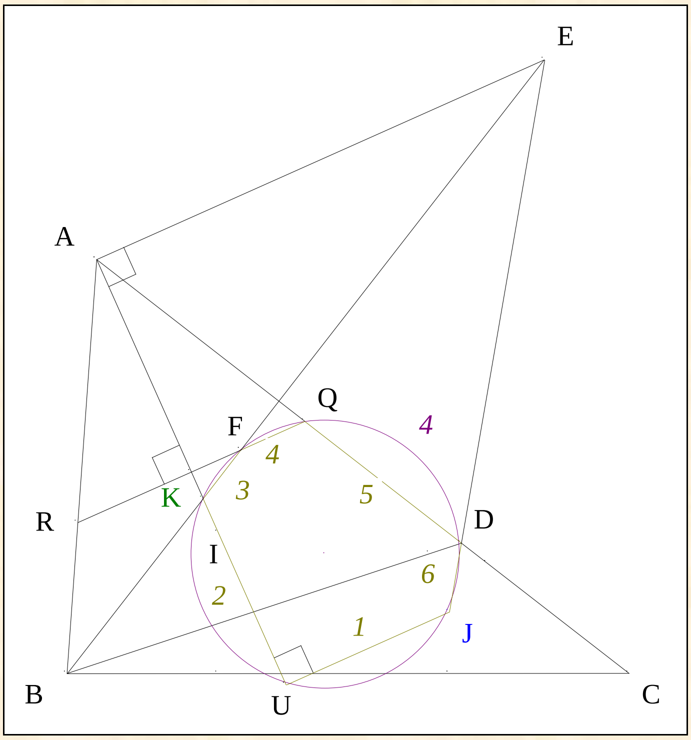


- Notons U le second point d'intersection de (AKI) avec *4*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (UJ) ⊥ (AU).

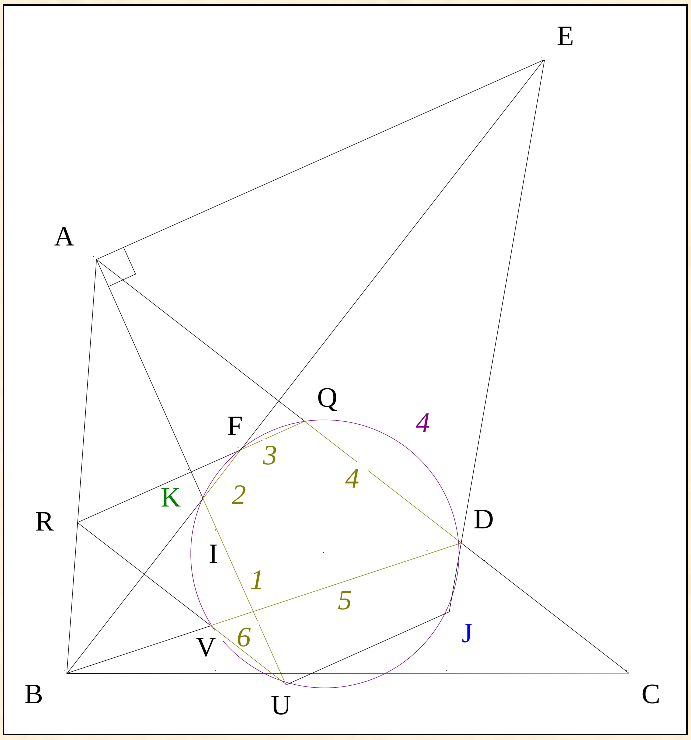
- **Scolies :** **(1)** (QR) ⊥ (AU)
  (2) (AE) ⊥ (AU).

- **Conclusion partielle :** (AE), (QR) et (JU) sont parallèles entre elles.



- **Conclusion :** d'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. Annexe 1),
  (AE) étant la pascale de l'hexagone JUKFQDJ, F est sur *4*.

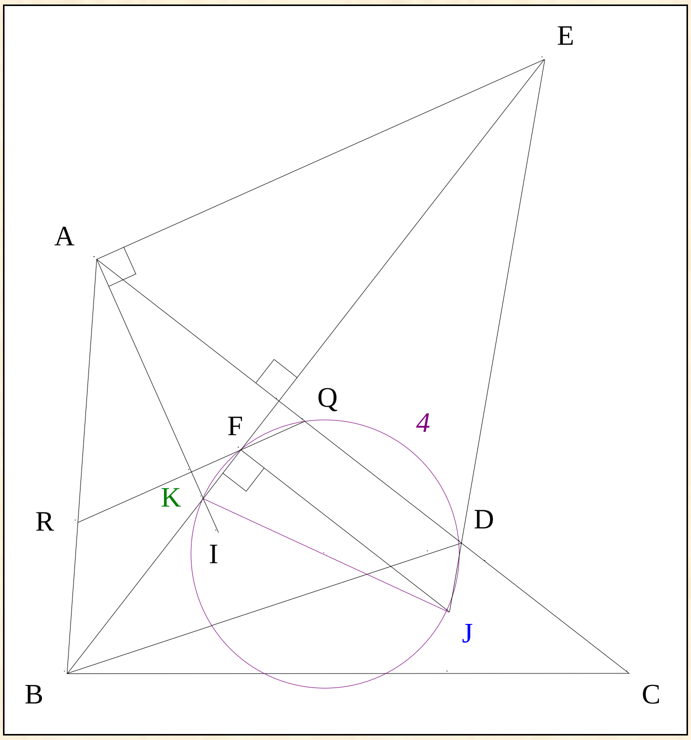
Scolies : **(1)** un autre point sur *4*



- Notons V le second point d'intersection de (BD) et (UR).

- **Conclusion :** d'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),
  (ABR) étant la pascale de l'hexagone UKFQDVU, V est sur *4*.

(2) Deux parallèles



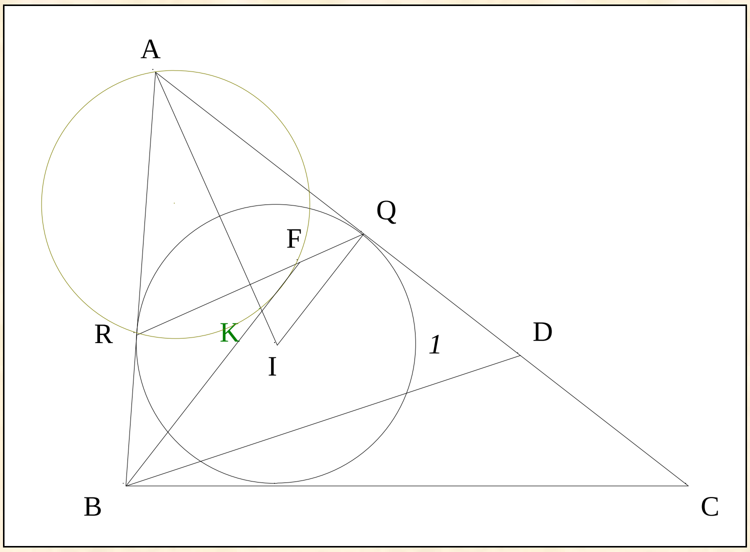
- Le triangle BDA étant B-isocèle, la B-bissectrice intérieure (BK) est aussi la B-hauteur ;
  en conséquence, (AC) ⊥ (BKFE).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (BKFE) ⊥ (JF).
- **Conclusion :** d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AC) // (JF).

6. Un cercle

VISION

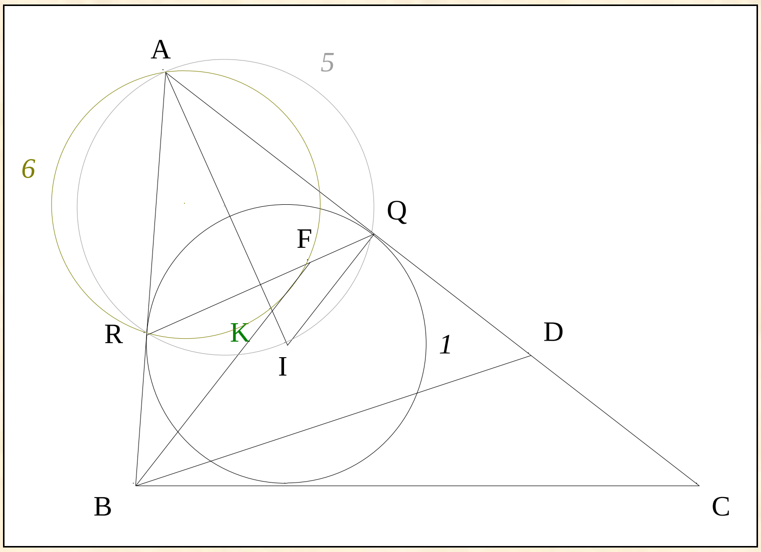
Figure :



Traits : ABC		un triangle tel que AB < AC,
	D	le point de [AC] tel que le triangle BDA soit B-isocèle,
	1, *3*	les cercles inscrits resp. des triangles ABC, BDA,
	I, K	les centres resp. de *1*, *3*,
	Q, R	les points de contact de *1* resp. avec (CA), (AB),
et	F	le point d'intersection de (QR) et (BK),

Donné : A, R, K et F sont cocycliques.

VISUALISATION



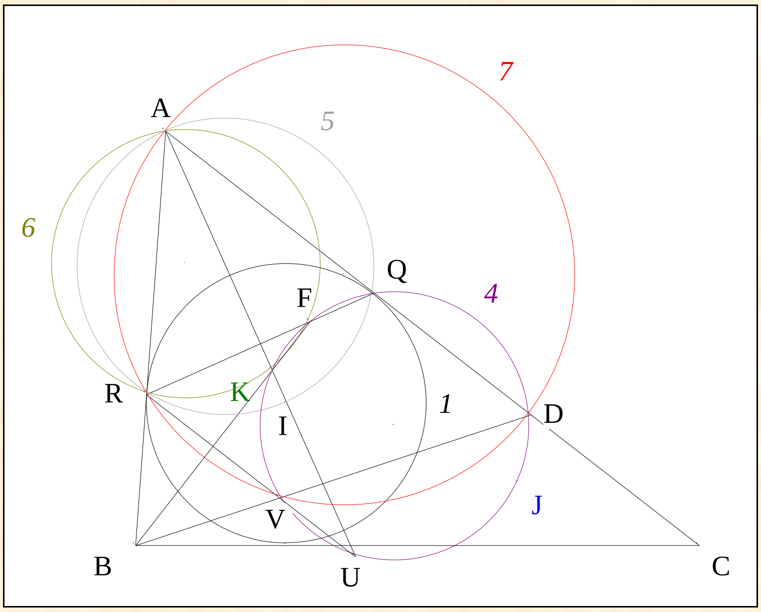
- Notons 5 le cercle de diamètre [AI] ; il passe par Q et R.

- Le triangle BDA étant B-isocèle, la B-bissectrice intérieure (BK) est aussi la B-hauteur ;
  en conséquence, (BKF) // (IQ).

- **Conclusion :** le cercle *5*, les points de base A et R, les moniennes naissantes (KAI) et (FRQ), les parallèles (KF) et (IQ), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, A, R, K et F sont cocycliques.

- Notons *6* ce cercle.

Scolies : **(1)** quatre points cocycliques



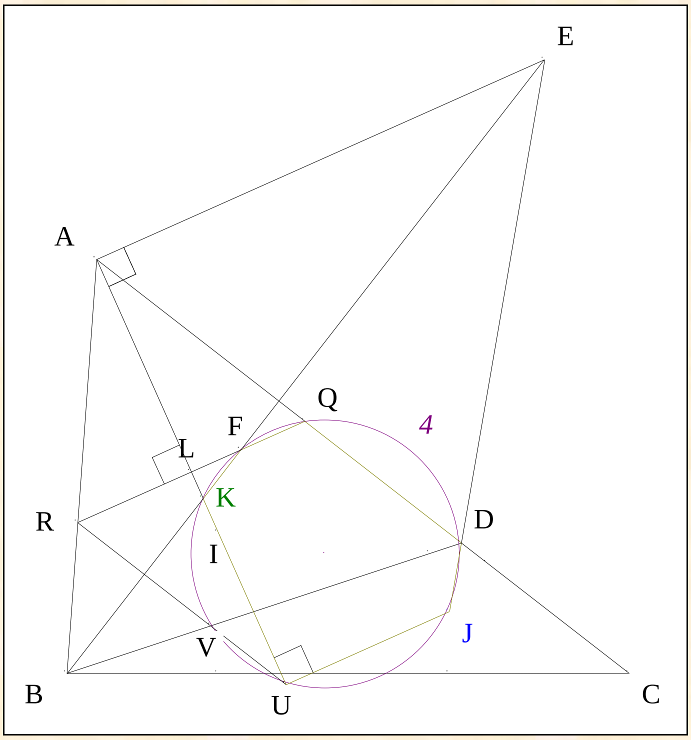
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 3)
  appliqué à *4*, *5* et *6*, A, R, V et D sont cocycliques.

- Notons *7* ce cercle.

- Le triangle BDA étant B-isocèle, le quadrilatère ARVD est un trapèze.

- **Conclusion :** (RV) est parallèle à (AD).

(2) Un milieu

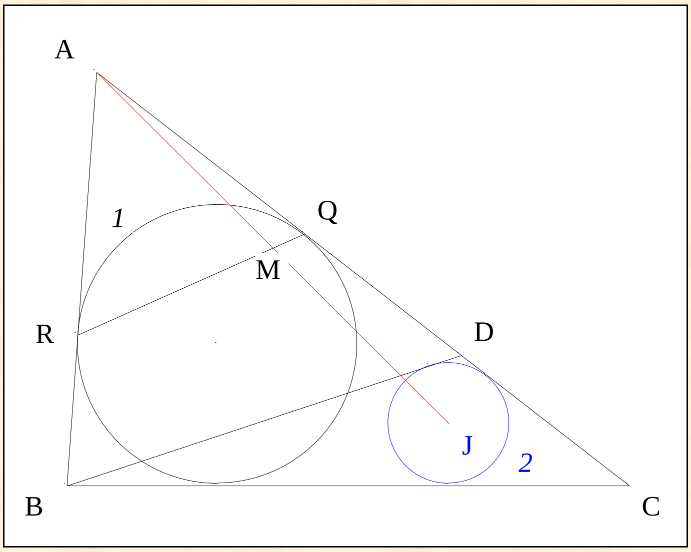


- Notons L le point d'intersection de (AU) et (QR).
- L est le milieu de [QR].
- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontière (ADC) et (RVU), L étant le milieu de [QR], L est le milieu de [AU].

C. LA VISUALISATION

VISION

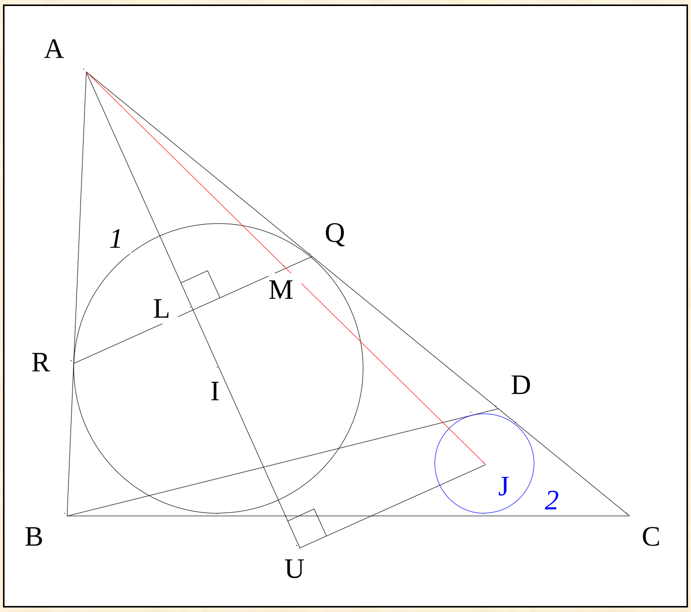
Figure :



Traits :	ABC	un triangle tel que AB < AC,
	D	le point de [AC] tel que le triangle BDA soit B-isocèle,
	1, *2*	les cercles inscrits resp. des triangles ABC, BDC,
	I, J	les centres de *1*, *2*,
	Q, R	les points de contact de *1* resp. avec (CA), (AB)
et	M	le point d'intersection de (QR) et (AJ).

Donné : M est le milieu de [AJ].

VISUALISATION[8]



- Notons L le point d'intersection de (AI) et (QR),
  et U le point d'intersection de (AI) et de la perpendiculaire à (AI) passant par J.

- **Scolies :** **(1)** L est le milieu de [AU]
  (2) (JU) // (QR).

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AUJ,

[8] de l'auteur.

(QR) étant parallèle à (JU) et passant par le milieu L de [AU], passe par le milieu de [AJ].

- **Conclusion :** M est le milieu de [AJ].

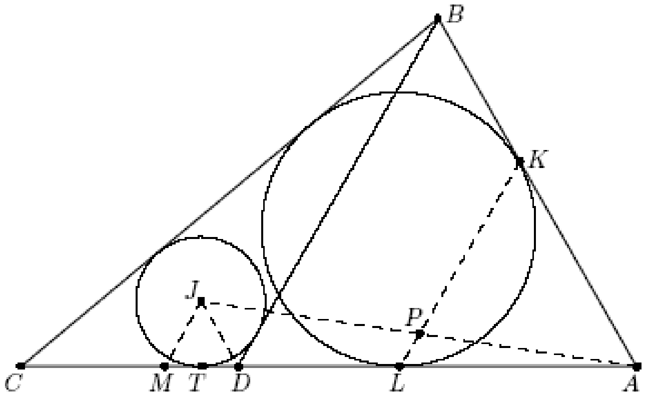
Note historique : Cosmin Pohoata en a donné une preuve segmentaire, Virgil Nicula a eu recours au théorème de Ménélaüs, l'italien Edriv a mis en jeu une homothétie, et le chinois Yemin Ge des rapports trigonométriques.[9]
Darij Griberg a signalé que ce problème avait déjà été donné sur le site *Mathlinks* par Cuenca[10]

D. LA SOLUTION OFFICIELLE

[9] http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1829539409&t=149173.
[10] Cuenca, show midpoint, *Mathlinks* du 12/08/2006 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=106306.

G4. A point D is chosen on the side AC of a triangle ABC with $\angle C < \angle A < 90^\circ$ in such a way that $BD = BA$. The incircle of ABC is tangent to AB and AC at points K and L, respectively. Let J be the incentre of triangle BCD. Prove that the line KL intersects the line segment AJ at its midpoint.

Solution. Denote by P be the common point of AJ and KL. Let the parallel to KL through J meet AC at M. Then P is the midpoint of AJ if and only if $AM = 2 \cdot AL$, which we are about to show.



Denoting $\angle BAC = 2\alpha$, the equalities $BA = BD$ and $AK = AL$ imply $\angle ADB = 2\alpha$ and $\angle ALK = 90^\circ - \alpha$. Since DJ bisects $\angle BDC$, we obtain $\angle CDJ = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle ADB) = 90^\circ - \alpha$. Also $\angle DMJ = \angle ALK = 90^\circ - \alpha$ since $JM \| KL$. It follows that $JD = JM$.

Let the incircle of triangle BCD touch its side CD at T. Then $JT \perp CD$, meaning that JT is the altitude to the base DM of the isosceles triangle DMJ. It now follows that $DT = MT$, and we have

$$DM = 2 \cdot DT = BD + CD - BC.$$

Therefore

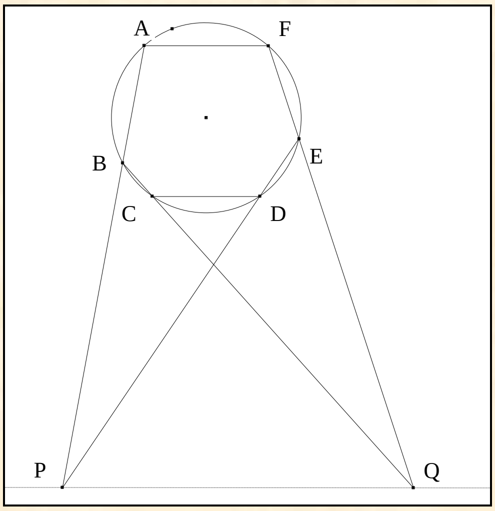
$$\begin{aligned} AM &= AD + (BD + CD - BC) \\ &= AD + AB + DC - BC \\ &= AC + AB - BC \\ &= 2 \cdot AL, \end{aligned}$$

which completes the proof.

E. ANNEXE

1. L'équivalence d'Aubert[11]

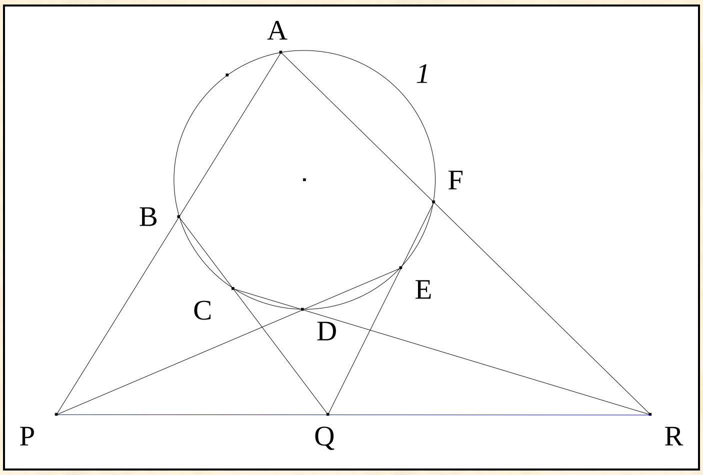
[11] La condition nécessaire est de Paul Aubert.



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDE	un pentagone inscrit dans *1*,
	F	un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
et	P, Q	les points d'intersection de (AB) et (DE), de (BC) et (EF).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si*, (PQ) et (AF) sont parallèles.

2. Hexagramma mysticum[12]

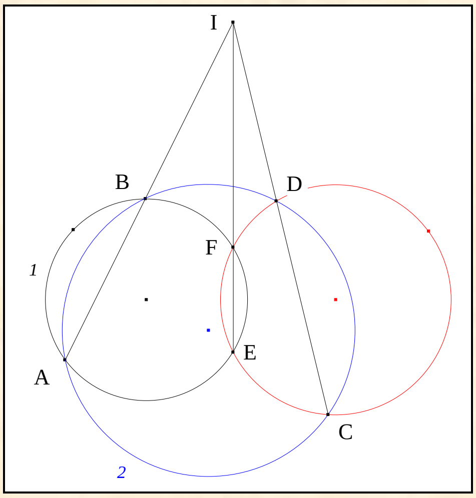


Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEF	un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
et	P, Q, R	les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

3. Le théorème des trois cordes de Monge

[12] Pascal B. (1640)



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
C, D deux points de *2*,
E, F deux points de *1*
et I le point d'intersection de (AB) et (CD).

Donné : C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
(AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.