THE CEVIAN NESTS THEOREM

PREMIÈRE PREUVE SYNTHÉTIQUE

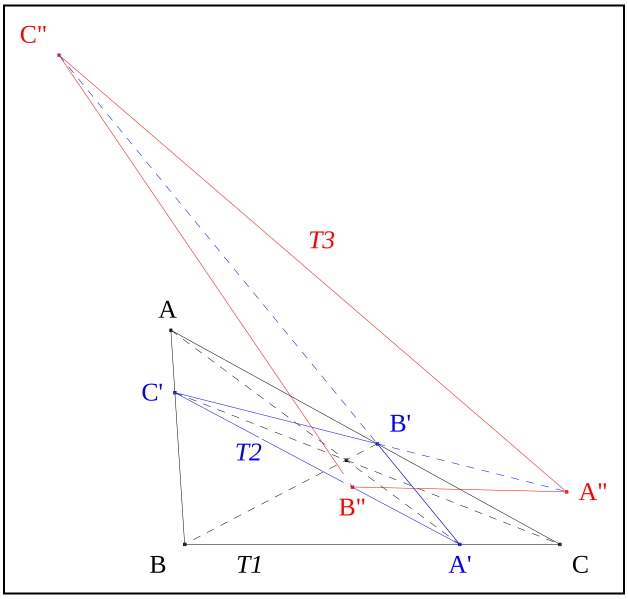
Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique du résultat 39 de Johann Döttl[1] connu aujourd'hui, en anglais, sous le nom de "The cevian nests theorem". Cette preuve fait appel aux théorèmes de Desargues et de Pappus.

1. Situation A **(T1, T2), (T2, T3) $\Leftrightarrow$ (T1, T3)**

VISION

Figure :

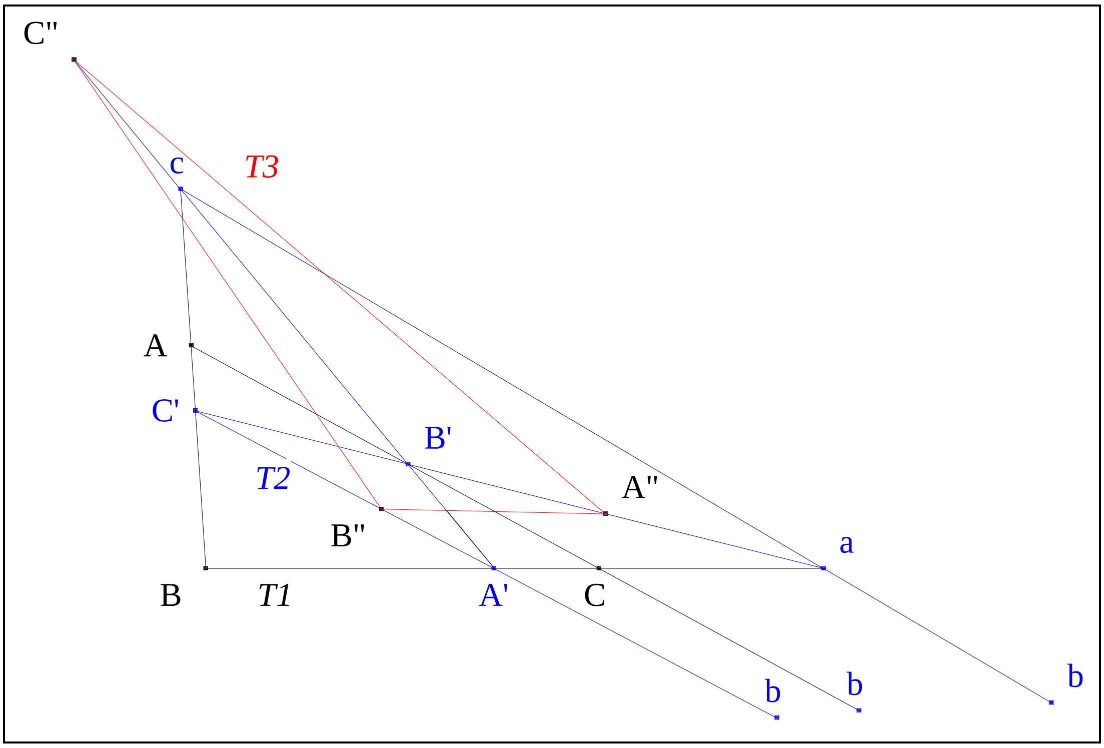


Traits :	T1	un triangle,
	A, B, C	les sommets de T1,
	T2	un triangle cévien de T2,
	A', B', C'	les sommets de T2,
	T3	un triangle inscrit de T2
et	A", B", C"	les sommets de T3.

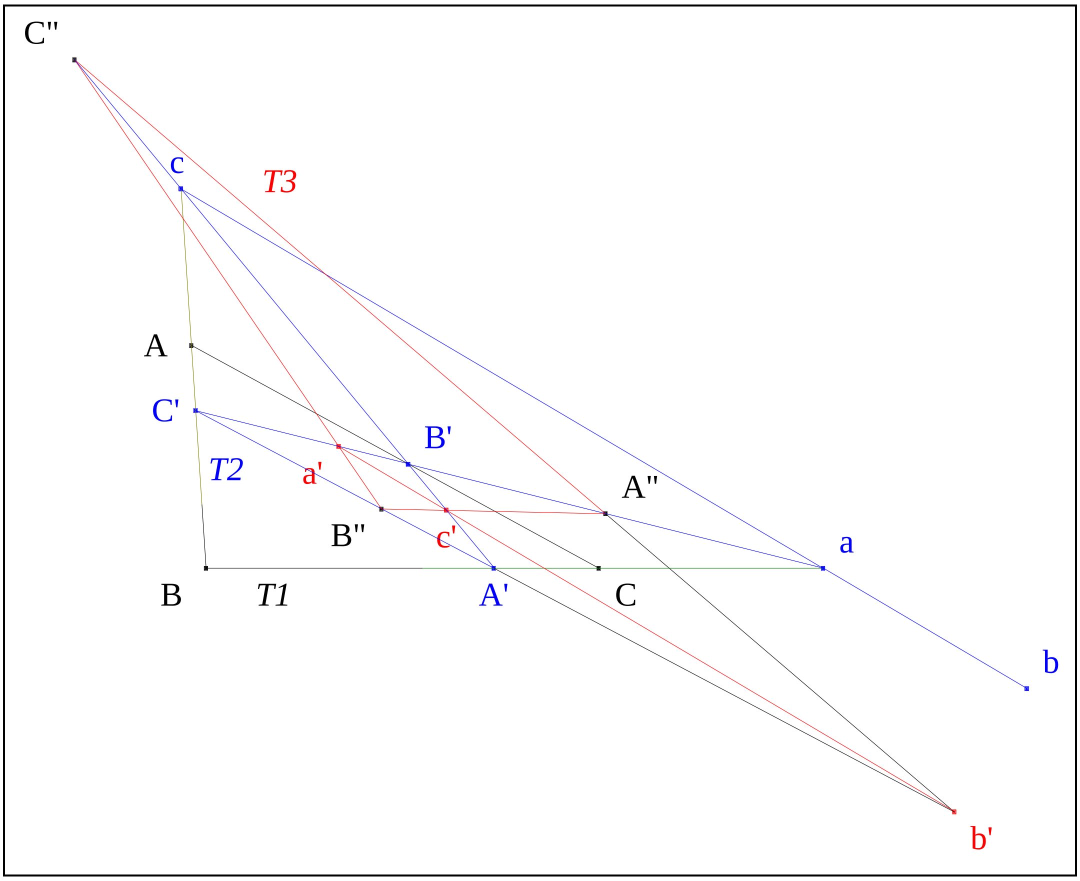
Donné : T3 est en perspective avec T2 *si, et seulement si,* T3 est en perspective avec T1.

[1] Döttl J., *Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks* (1886) n° 39.

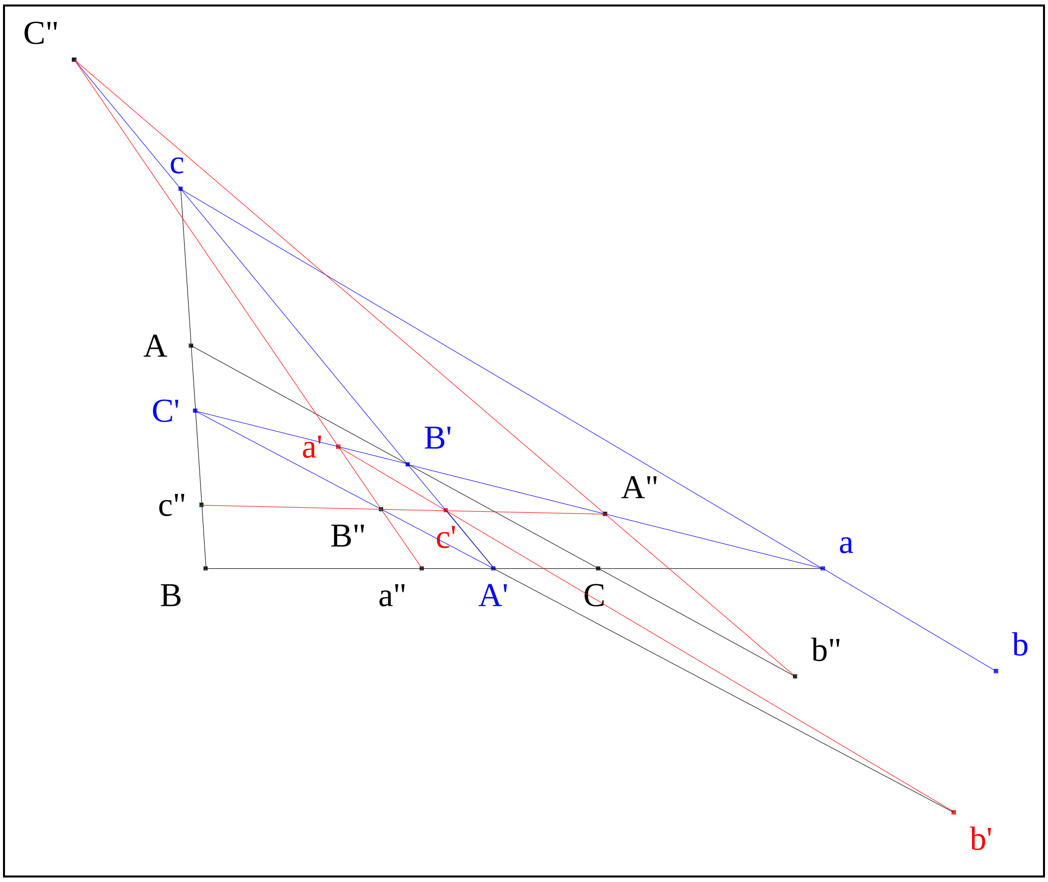
VISUALISATION NÉCESSAIRE



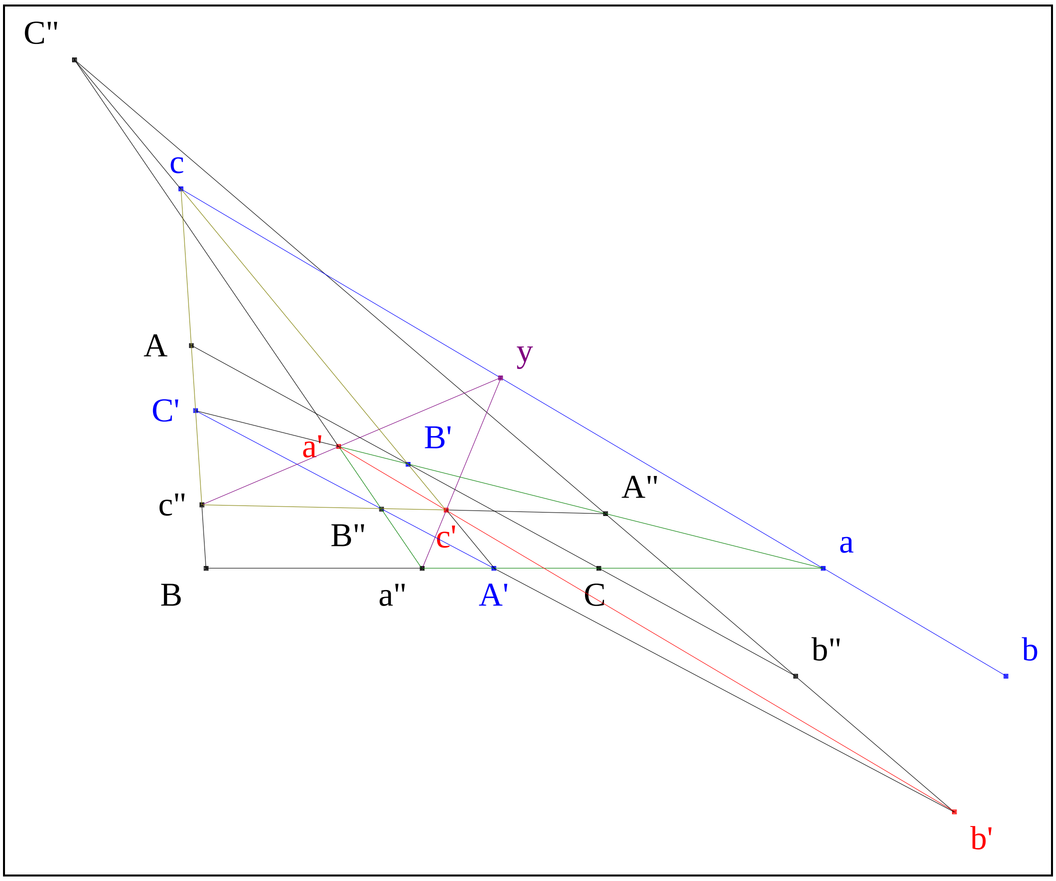
- Notons (abc) l'axe de la perspective entre T1 et T2.



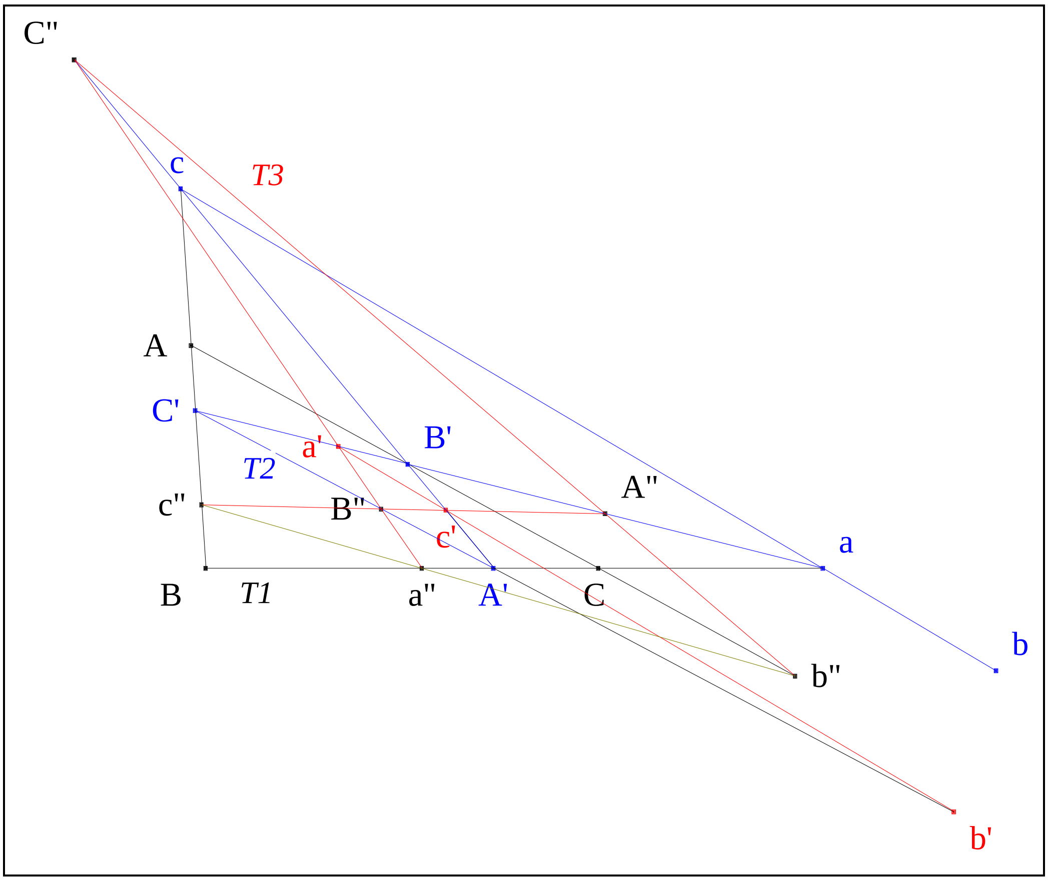
- Notons (a'b'c') l'axe de la perspective entre T2 et T3.



- Notons a'', b'', c'' les points d'intersection de (BC) et (B''C''), de (CA) et (C''A''), de (AB) et (A''B'').



- **Scolie :** (C'B"A') est l'axe des triangles aa'a" et cc"c',
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1), aa'a" et cc"c' sont perspectifs.
- Notons y le centre de cette perspective.
- **Scolie :** y est sur (abc).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que bb'b" et aa"a' sont perspectifs.
- Notons z le centre de cette perspective.
- **Scolie :** z est sur (abc).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que cc'c" et bb"b' sont perspectifs.
- Notons x le centre de cette perspective.
- **Scolie :** x est sur (abc).
- D'après Pappus "Proposition 139" (Cf. Annexe 2), (b"c"a") est la pappusienne de l'hexagone za'yc'xb'z.

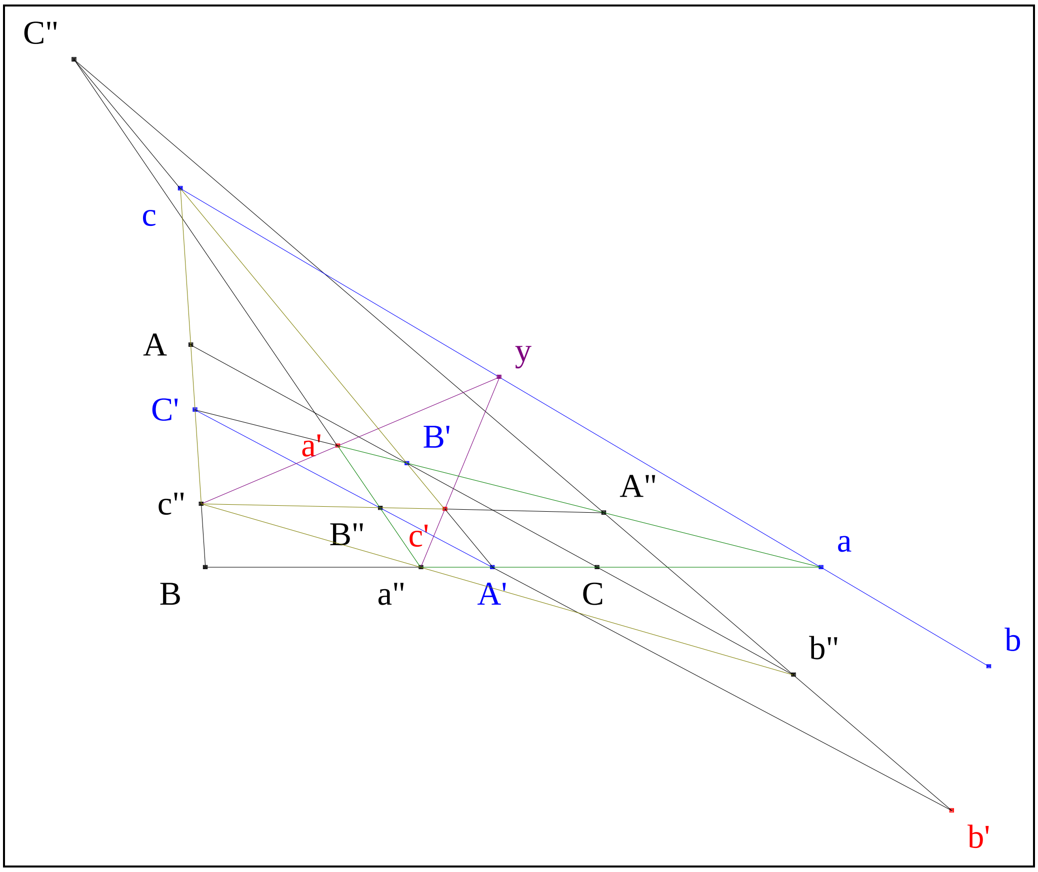


- **Scolie :** (c"b"a") est l'axe de T1 et T3.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles", T3 est en perspective avec T1.

Note historique : Nathan Altshiller-Court[2] et Philippe Lombard[3] ont repris à leur façon cette situation.

VISUALISATION SUFFISANTE

2 Altshiller-Court N., Supplementary Exercice 7, *College Geometry*, Barnes and Noble, New York, (2nd edition, 1952) 165.
3 Lombard P., Exercice 102, *Géométrie élémentaire et calcul vectoriel*, Topiques éditions, (1986) 124-125.



- Notons (abc) l'axe de la perspective entre T2 et T1
  (a"b"c") l'axe de la perspective entre T1 et T3,
  et a', b', c' les points d'intersection de (B'C') et (B"C"), de (C'A') et (C"A"), de (C'A') et (C"A")

- **Scolie :** (C'B"A') est l'axe des triangles aa'a" et cc"c',

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1), aa'a" et cc"c' sont perspectifs.

- Notons y le centre de cette perspective.

- **Scolie :** y est sur (abc).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que bb'b" et aa"a' sont perspectifs.

- Notons z le centre de cette perspective.

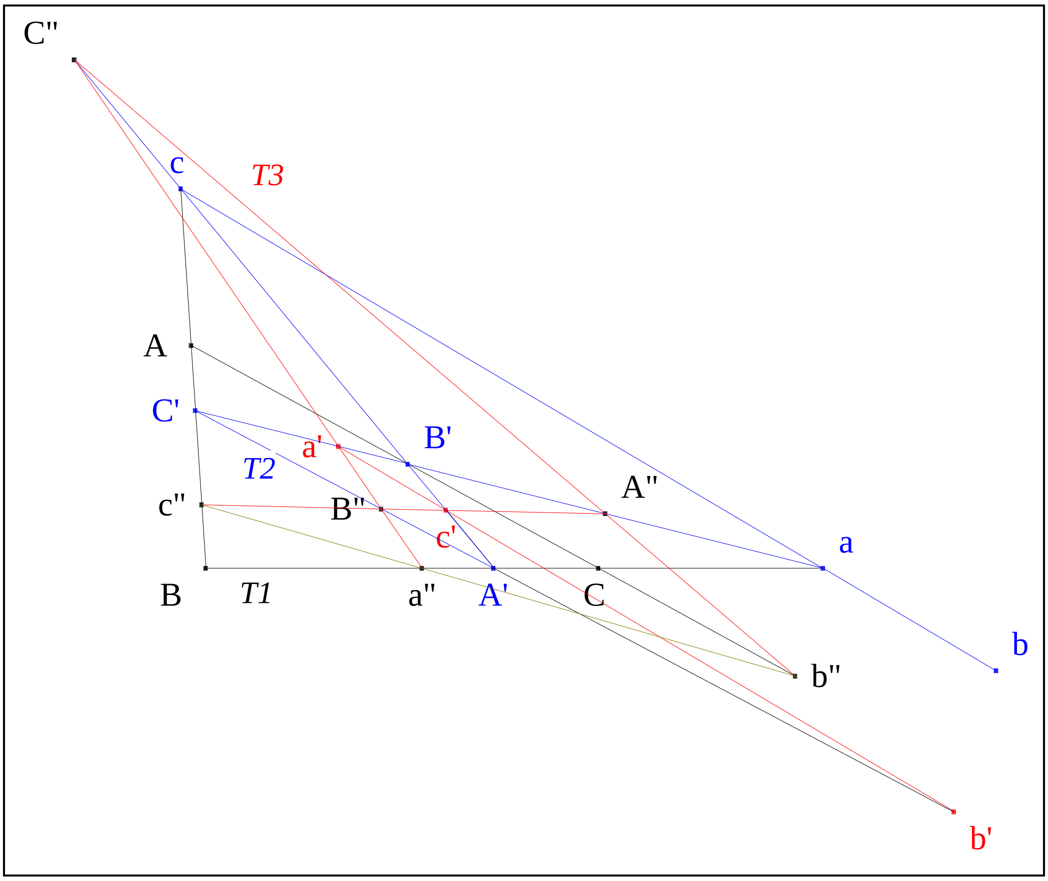
- **Scolie :** z est sur (abc).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que cc'c" et bb"b' sont perspectifs.

- Notons x le centre de cette perspective.

- **Scolie :** x est sur (abc).

- D'après Pappus "Proposition 139" (Cf. Annexe 2), (a'b'c') est la pappusienne de l'hexagone yc"xb"za"y.

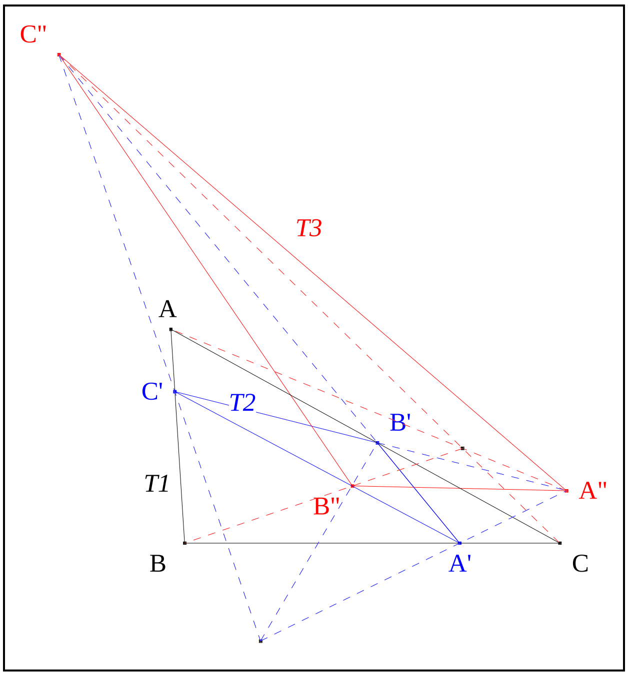


- **Scolie :** (a'b'c') est l'axe entre T2 et T3.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles", T2 est en perspective avec T3.

2. Situation B **(T2, T3), (T3, T1) ⇔ (T2, T1)**

VISION

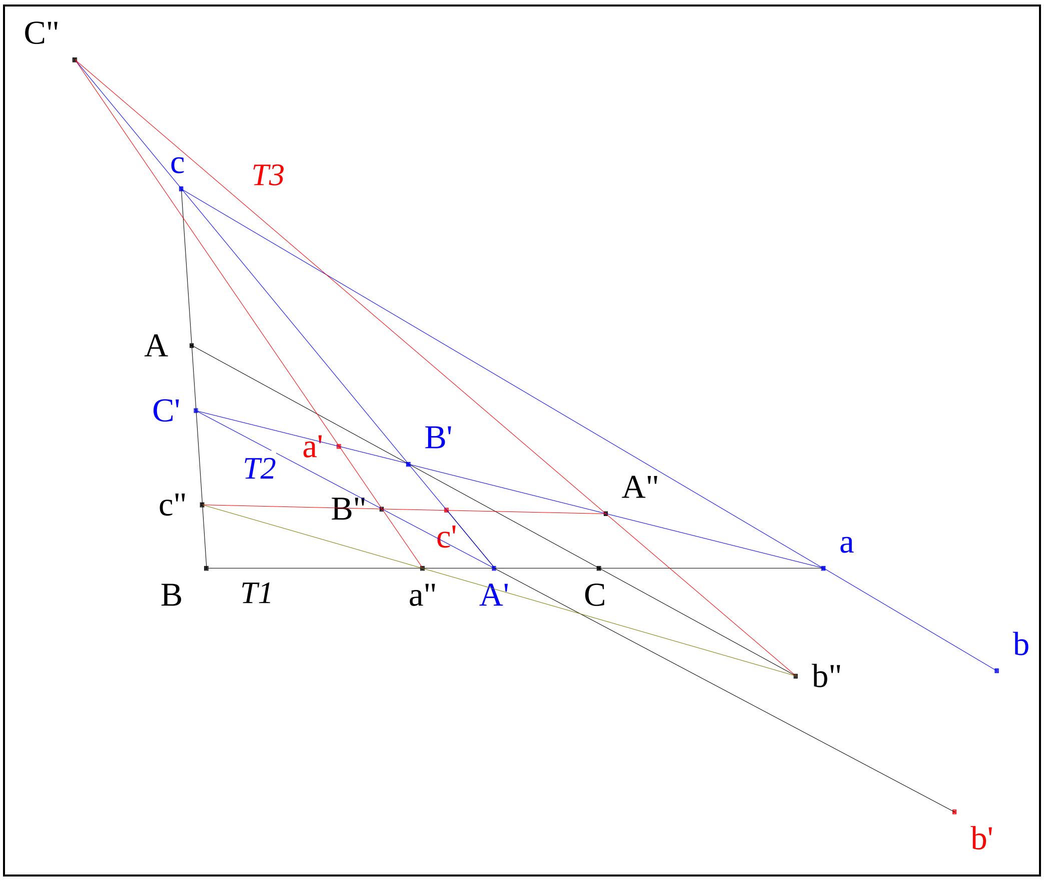
Figure :



Traits :	T1	un triangle,
	A, B, C	les sommets de T1,
	T2	un triangle inscrit de T1,
	A', B', C'	les sommets de T2,
	T3	un triangle cévien de T2
et	A", B", C"	les sommets de T3.

Donné : T3 est en perspective avec T1 *si, et seulement si*, T2 est en perspective avec T1.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



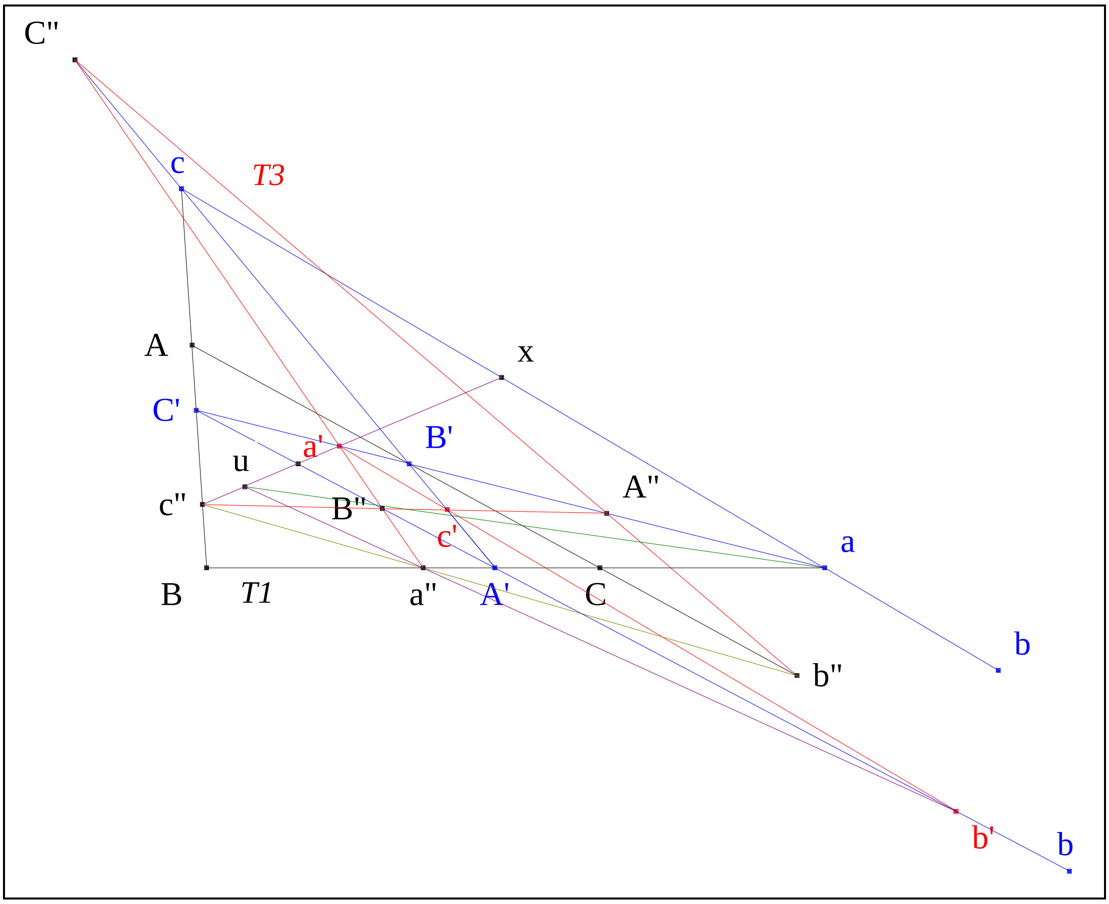
- Notons (a'b'c') l'axe de perspective de T2 et T3
  (a''b''c'') l'axe de perspective de T1 et T3,
  a, b, c les points d'intersection de (B'C') et (BC), de (C'A') et (CA), de (C'A') et (CA)
  x le centre de perspective de cc'c'' et bb''b',
  y le centre de perspective de aa'a'' et cc''c',
  et z le centre de perspective de bb'b'' et aa''a'.

- **Scolie :** x est sur (bc), y sur (ca) et z sur (ab).

- D'après Pappus "Proposition 139" (Cf. Annexe 2), (a'b'c') étant la pappusienne de l'hexagone yc''xb''za''y,
  x, y et z sont alignés.

- Raisonnons par l'absurde en affirmant que
  a, b et c ne sont pas alignés i.e. que T2 n'est pas en perspective avec T1.

- **Scolie :** (xyz) est une ménélienne du triangle abc.



- Notons u le point d'intersection de (a'c"y) et (b'a"z).
- **Scolie :** (xyz) est l'axe de perspective des triangles abc et ub'c".
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1), (au), (bb') et (cc") sont concourantes.
- Par construction, (bb') et (cc") sont concourantes en C'.
- En conséquences, **(1)** u est sur (aB'C')
  (2) u et a' sont confondus
  (3) z et c sont confondus ce qui est contradictoire car z est sur (ab).
- **Conclusion :** T2 est en perspective avec T1.

VISUALISATION SUFFISANTE

- **Conclusion :** d'après **1.** "Visualisation nécessaire", T3 est en perspective avec T1.

3. Commentaires :

nous venons de prouver synthétiquement le résultat suivant

si, deux couples formés à partir des triangles emboîtés T1, T2 et T3 sont perspectifs
alors, le troisième l'est aussi.

Ce résultat est appelé "The cevian nests theorem".

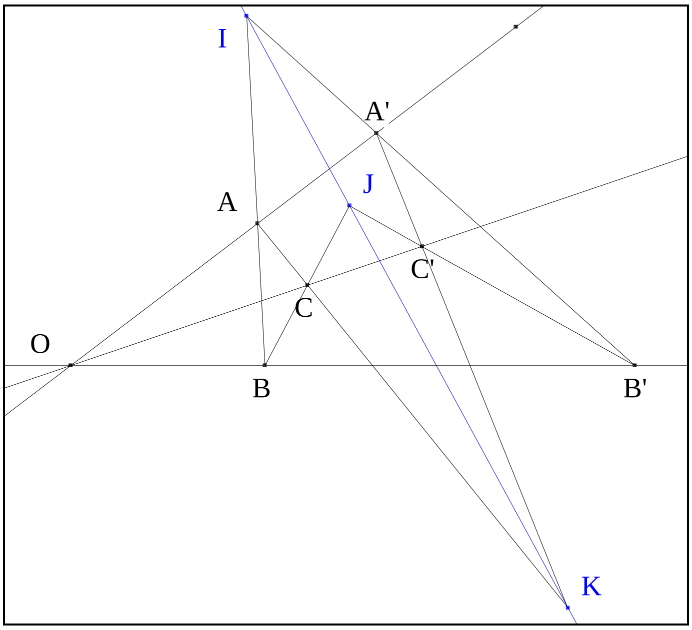
Dans un Message *Hyacinthos*, Darij Grinberg[4] dit qu'il n'a pas de preuve synthétique de ce résultat en dehors d'une preuve basée sur les théorèmes de Céva et de Ménélaüs[5] pour un quadrilatère. De plus il ajoute :

> "This is of great importance for synthetic proof of perspectivities. The cevian nests theorem itself can be derived from Ceva and Menelaos- but I am still missing a "purely projective" proof by Pappos and Desargues".

Rappelons qu'une erreur s'est glissée dans la formulation du "Cevian nests theorem" chez Nathan Altshiller-Court[6].

ANNEXE

1. Le théorème des deux triangles de Desargues[7]



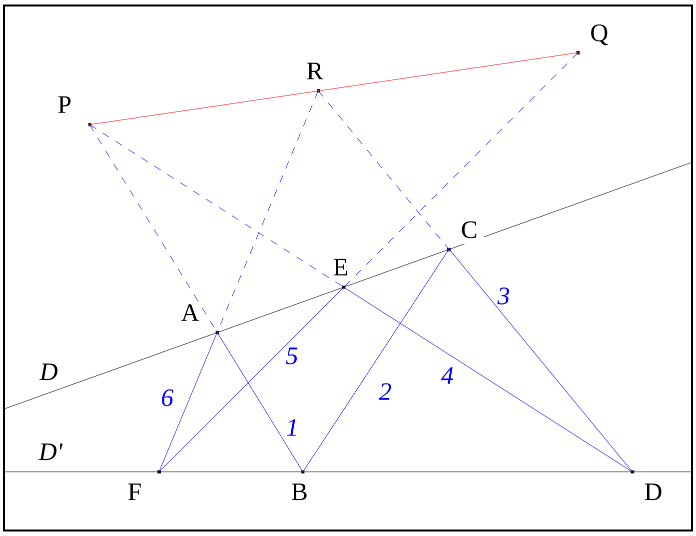
Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
	O	le point de concours de (AA') et (BB'),
	I	le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'),
	J	le point d'intersection des droites (BC) et (B'C')
et	K	le point d'intersection des droites (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* les points I, J et K sont alignés.

2. "Proposition 139" de Pappus[8]

---

4 Grinberg D., Primary Ideas of Triangle Geometry, Message *Hyacinthos* # 9285 du 11/02/2004.
5 Grinberg D. : www.mathlinks.ro/Forum/wiewtopic.php?t=3536.
6 Altshiller-Court Nathan, *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936) ex. 7 p. 165.
7 Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.
8 Pappus, *Collections*, Livre VII.



Traits : D, D' deux droites,
ABCDEFA un hexagone de Pappus
et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : E est sur la droite (AC) *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.