UN CERCLE

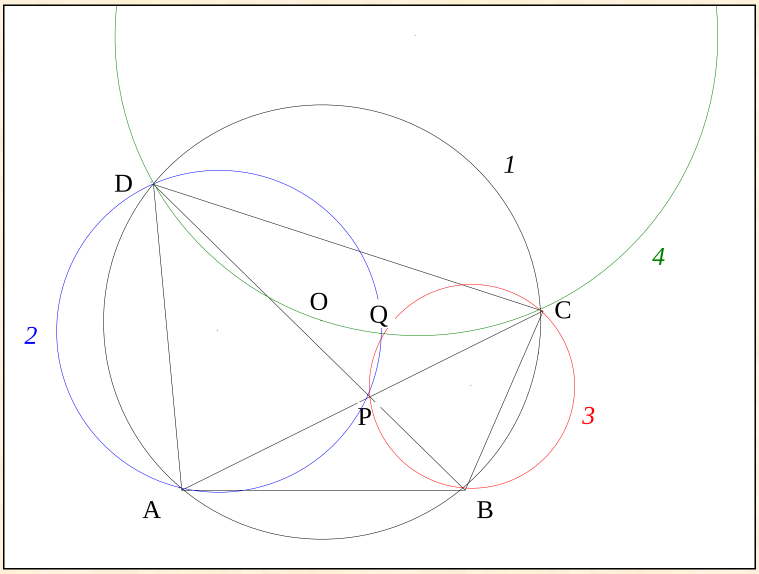
PASSANT

PAR

LE CENTRE D'UN CERCLE

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. Ce "quicky" présente un problème récurrent sur le site *Art of Problem Solving* [2].
La figure est en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This "quicky" is a recurring problem on the *Art of Problem Solving* website.
The figure is in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

---

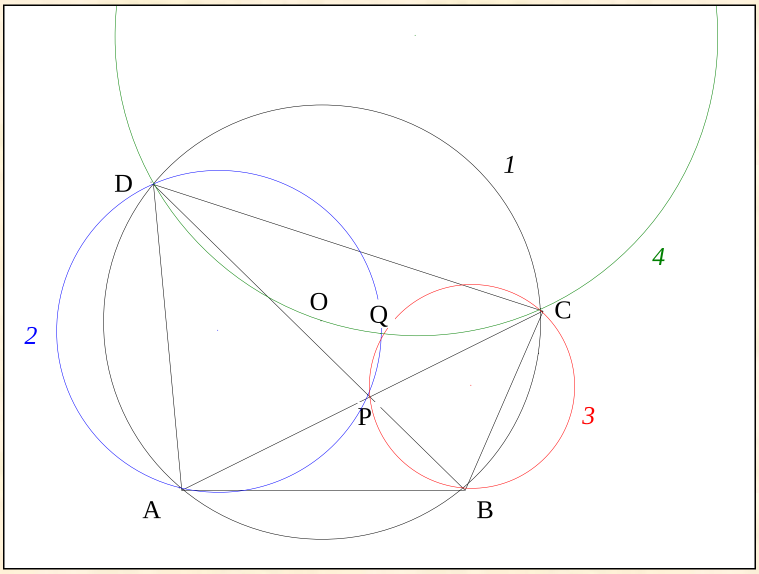
1 Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 24/12/2012

2 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=4

LE PROBLÈME

VISION

Figure :

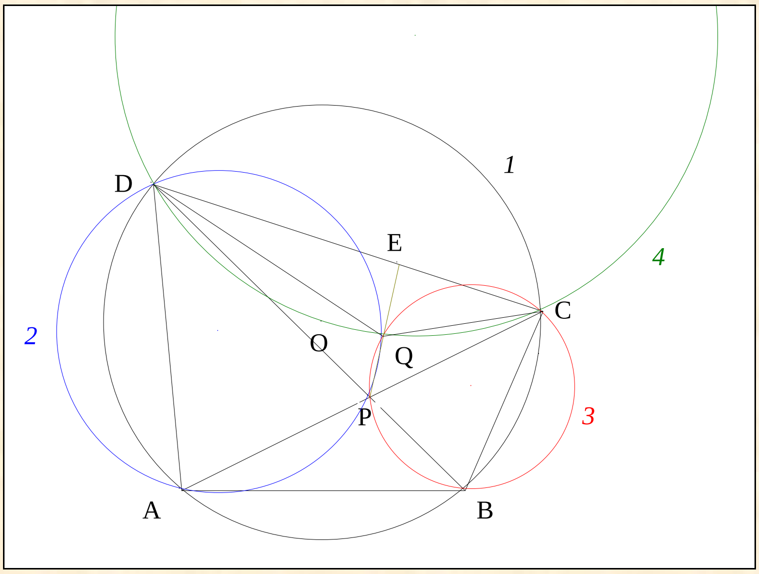


Traits : ABCD un quadrilatère cyclique,
1 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *1*,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
2, *3* les cercles circonscrits aux triangles PDA et PBC,
et *4* le cercle circonscrit au triangle QCD.

Donné : *4* passe par O. [3]

VISUALISATION

[3] Russie (1999) ; IMO Shortlist

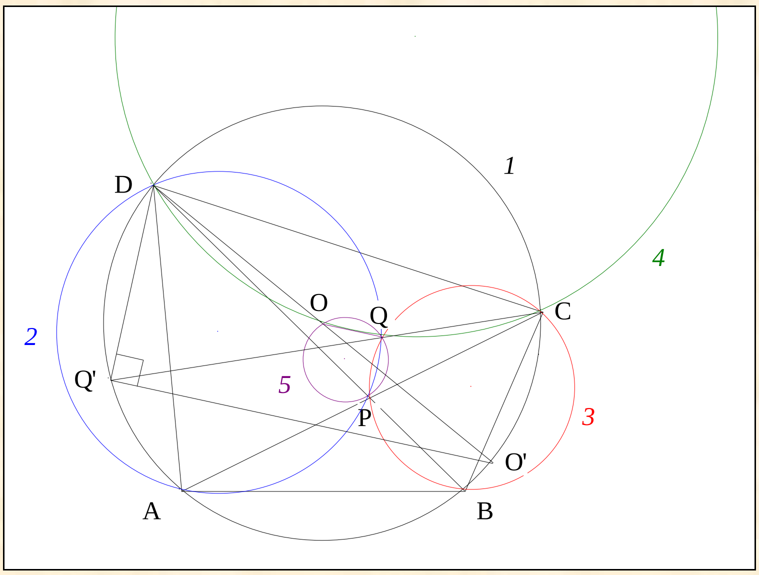


- Notons E le point d'intersection de (PQ) et (CD).
- Une chasse angulaire à **Π**. près :

  * le quadrilatère PQDA étant cyclique, <DAP = <DQE i.e. <DAC = <DQE ;
  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <DAC = <DBC ;
  * le quadrilatère PBCQ étant cyclique, <PBC = <EQC i.e. <DBC = <EQC ;
  * par addition membre à membre de ces égalités, 2.<DAC = <DQE + <EQC
  * d'après "La relation de Chasles" 2.<DAC = <DQC ;
  * d'après "Le théorème de l'angle au centre", <DOC = <DQC.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de l'angle inscrit", *4* passe par O.

Scolies : **(1)** Le triangle QOP est Q-rectangle



- Notons *5* le cercle circonscrit à QOP,
  et O', Q' les seconds points d'intersection resp. de (DO), (CQ) avec *1*.

- Les cercles *1* et *4*, les points de base C et D, les moniennes (Q'CQ) et(O'DO), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (Q'O') // (QO).

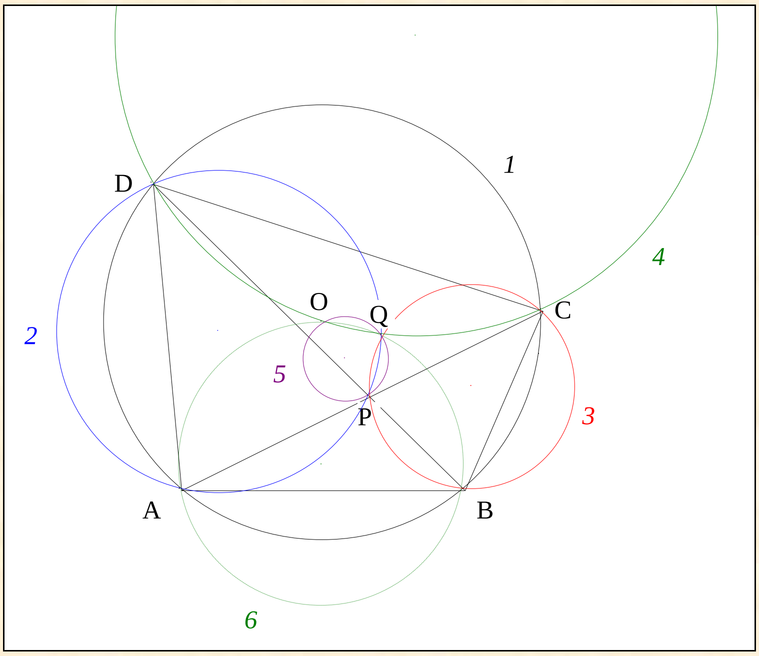
- Les cercles *1* et *3*, les points de base C et B, les moniennes (Q'CQ) et (DBP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (Q'D) // (QP).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (Q'O') ⊥ (Q'D).

- La relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (QO) ⊥ (QP).

- **Conclusion :** le triangle QOP est Q-rectangle.

(2) Un second cercle passant par O



- Notons *6* le cercle circonscrit au triangle QAB.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *6* passe par O.