NOTE

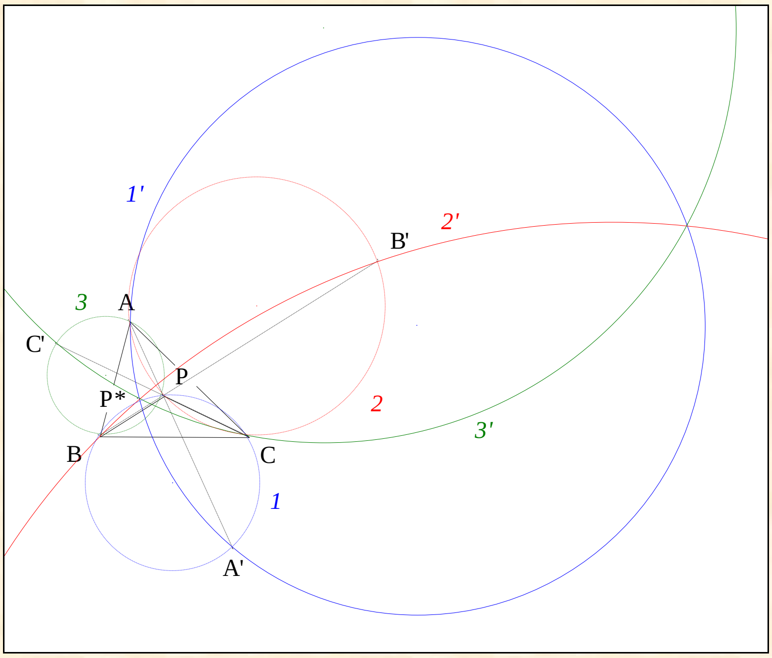
TROIS CERCLES COAXIAUX

DE

NGO QUANG DUONG

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Cette note présente un résultat du Vietnamien Ngo Quang Duong concernant trois cercles coaxiaux basée sur la considération de deux points isogonaux relatifs à un triangle. L'auteur de cette note commence par étudier un cas particulier (orthocentre, centre du cercle circonscrit) qui lui a permis de faire un lien entre les cercles de John Rogers Musselman et de Paul Yiu avant d'envisager le cas général dans une approche personnelle. Une récolte de quatre résultats termine cette note.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This note presents a result of the Vietnamese Ngo Quang Duong concerning three coaxial circles based on the consideration of two isogonal points relating to a triangle. The author of this note start by studying a particular case (orthocenter, centre of circumscribed circle) which allowed him to make a connection between John Rogers Musselman and Paul Yiu circles before considering the general case in a personal approach. A harvest of four results completes this note.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/08/2015 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. Triangle H-cerclecévien et le point O 3

I. Prémisses 3

1. Les cercles de John Rogers Musselman
2. Les cercles de Paul Yiu

II. Le problème de l'auteur 8

III. La démarche de l'auteur 9

1. Une parallèle à (BC)
2. Le A-cercle de Yui
3. La preuve de **A. II.**
4. Commentaire
5. Le triangle symétrique

B. Triangle P-cerclecévien et le point P* 15

I. Prémisse 15

1. Une généralisation des cercles de Paul Yiu

II. Le problème de Ngo Quang Duong 17

III. Visualisation de l'auteur 18

1. Trois points alignés
2. Le A-cercle généralisé de Yiu
3. La preuve de **B. II.**

C. Quatre résultats de l'auteur 22

1. Deux triangles perspectifs
2. Trois droites concourantes
3. Une tangente à un cercle de Yiu

A. TRIANGLE H-CERCLECÉVIEN

ET

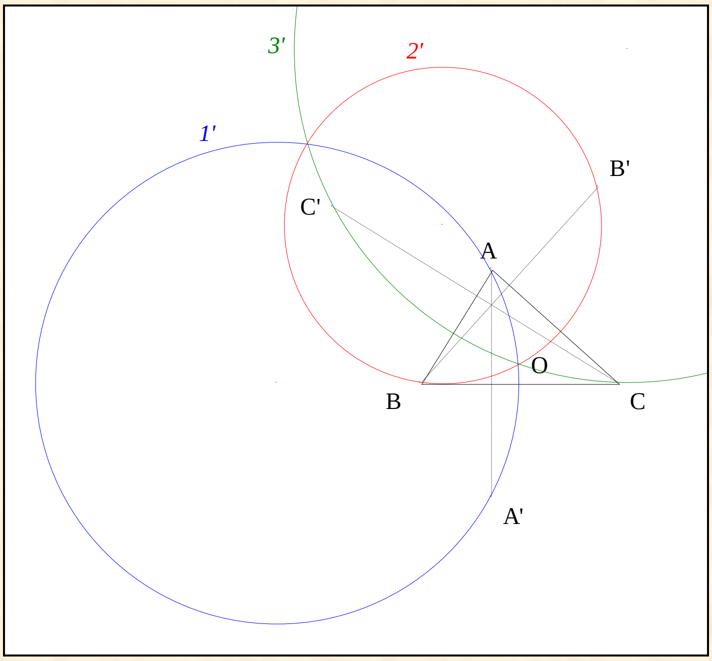
LE POINT O

I. PRÉMISSES

1. Les cercles de John Rogers Musselman

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle symétrique [2] de ABC
et *1', 2', 3'* les A, B, C-cercles de Musselman [3] de ABC.

Donné : *1', 2'* et *3'* sont coaxiaux. [4]

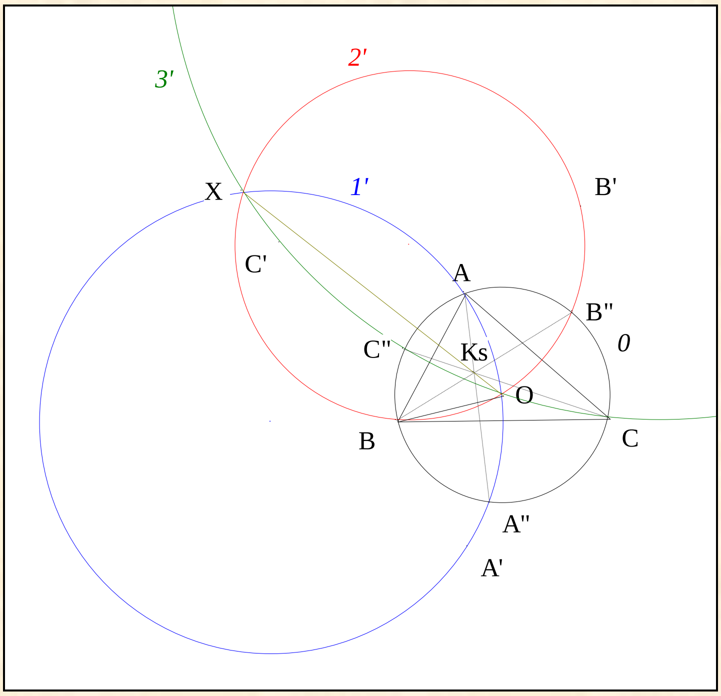
VISUALISATION

---

[2] A', B', C' sont les symétriques de A, B, C resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)

[3] i.e. les cercles circonscrits resp. aux triangles AOA', BOB', COC'

[4] Musselman J. R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **46** (1939) 601
Signé J. N. (Joseph Neuberg ?), *Mathesis* (1924) 331



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  Ks le point de Kosnitza
  et A"B"C" le triangle Ks-circumcévien de ABC.

- D'après "Le point de Kosnitza" [5], A" est sur *1'*
  B" est sur *2'*
  C" est sur *3'*.

- **Conclusion :** par application du théorème des trois cordes de Monge [6], *1'*, *2'* et *3'* sont coaxiaux.

- Notons X ce second point de concours.

Note historique : ce résultat de l'américain John Rogers Musselman a été démontré et généralisé par le belge René Goormaghtigh [7] ; sa preuve a recours aux nombres complexes.
Notons que cette généralisation était connue de Joseph Neuberg [8].
Rappelons que la preuve proposée par Darij Grinberg a recours à l'inversion.

Scolies : **(1)** le second point de base X est répertorié sous X_{1157} chez ETC.

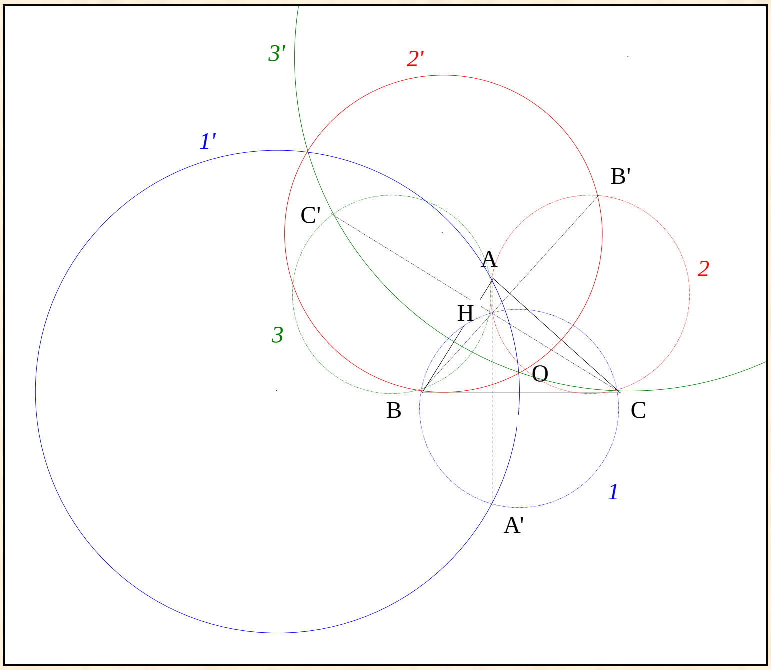
(2) Ks est sur (OX)

(3) X est l'inverse de Ks par rapport à *0*

(4) Les cercles de Carnot de ABC

---

[5] Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. **1**, p. 11-13 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[6] idem
[7] Goormaghtigh R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **48** (1941) 281-283
[8] Neuberg J., Mémoire sur le Tétraèdre (1884)



- Notons H l'orthocentre de ABC
  et *1, 2, 3* les A, B, C-cercles de Carnot [9] de ABC.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", *1, 2, 3* passent resp. par A', B', C'.

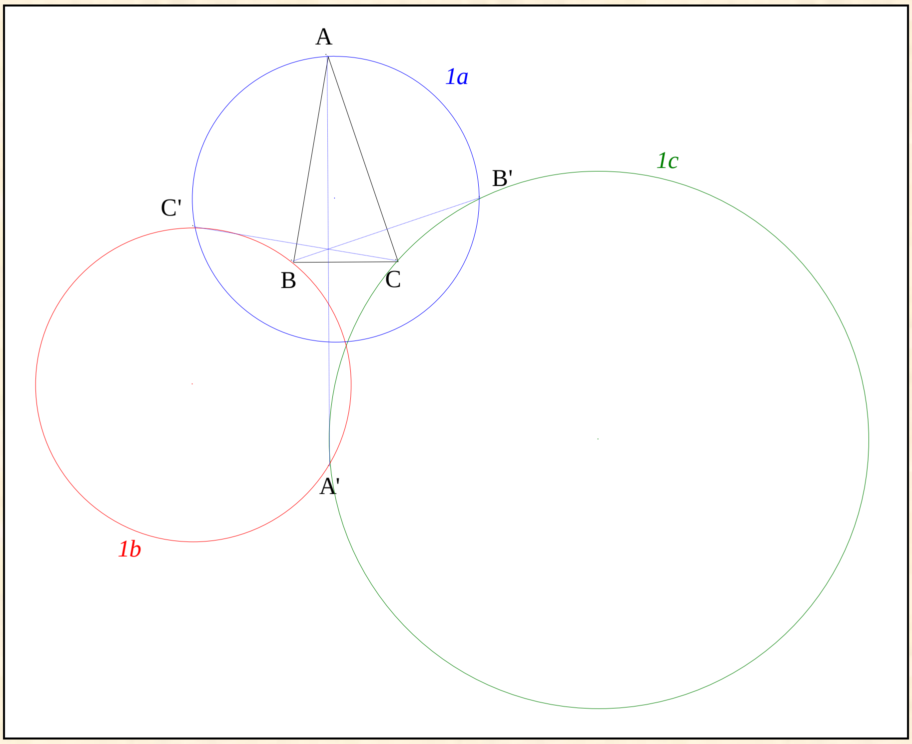
- **Conclusion :** A'B'C' est le triangle H-cerclecévien [10] de ABC.

2. Les cercles de Paul Yiu [11]

VISION

Figure :

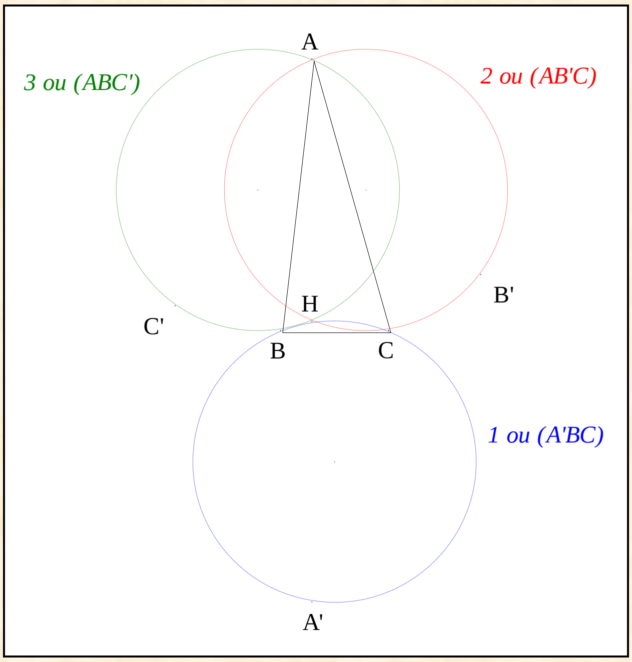
[9] i.e. les cercles circonscrits resp. aux triangles HBC, HCA, HAB
[10] A', B', C' sont les seconds points d'intersection de (AH), (BH), (CH) resp. avec *1, 2, 3*
[11] Yiu P., A triad of circles with an interesting common point, Message *Hyacinthos* # **4533** du 12/12/2001 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/4533



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle symétrique de ABC
et *1a*, *1b*, *1c* les A, B, C-cercles de Yiu [12] de ABC.

Donné : *1a*, *1b*et *1c* sont concourants.

VISUALISATION



- Notons H l'orthocentre de ABC
  1, *2*, *3* les A, B, C-cercles de Carnot [13] de ABC.

---

[12] i.e. les cercles circonscrits resp. aux triangles AB'C', BC'A', CA'B'

- **Scolie :** *1*, *2*, *3* passent resp. par A', B', C'.

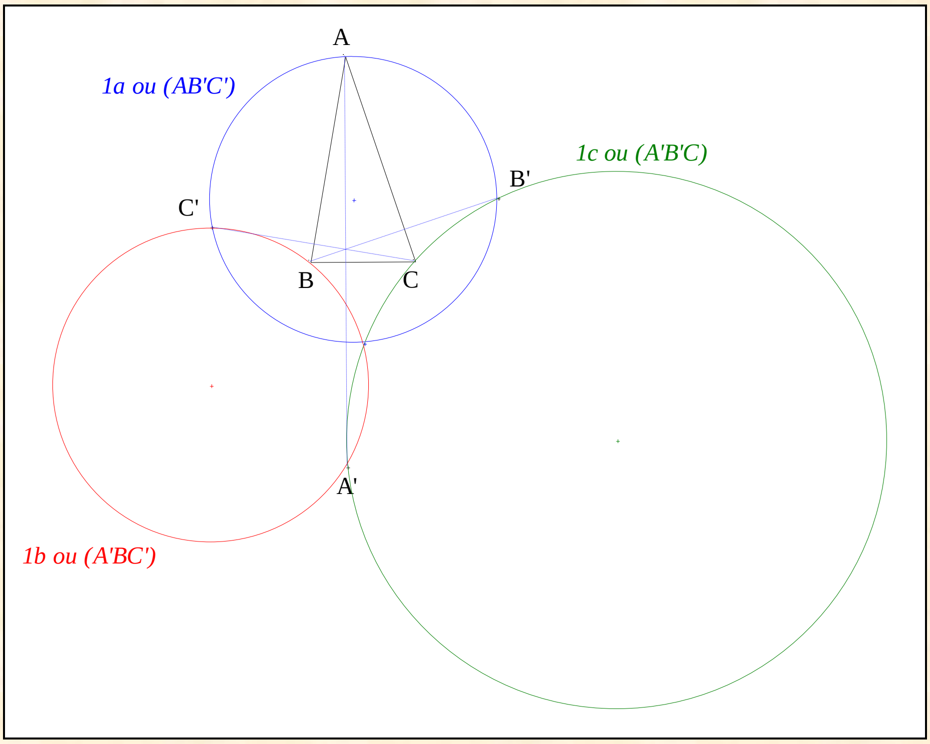
- Notons (A'BC), (AB'C), (ABC') resp. les cercles *1*, *2*, *3*
  et (AB'C'), (A'BC'), (A'B'C) resp. les cercles *1a*, *1b*, *1c*.

- **Commentaire :** nous passons de (A'BC) , (AB'C), (ABC')

  à

  (AB'C'), (A'BC'), (A'B'C)

  par la technique d'accentuation [14].



- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des six cercles" [15],
  (AB'C'), (A'BC'), (A'B'C) i.e. *1a*, *1b*, *1c* sont concourants.

Scolie : ce point de concours est répertorié sous X_{1157} chez ETC [16].

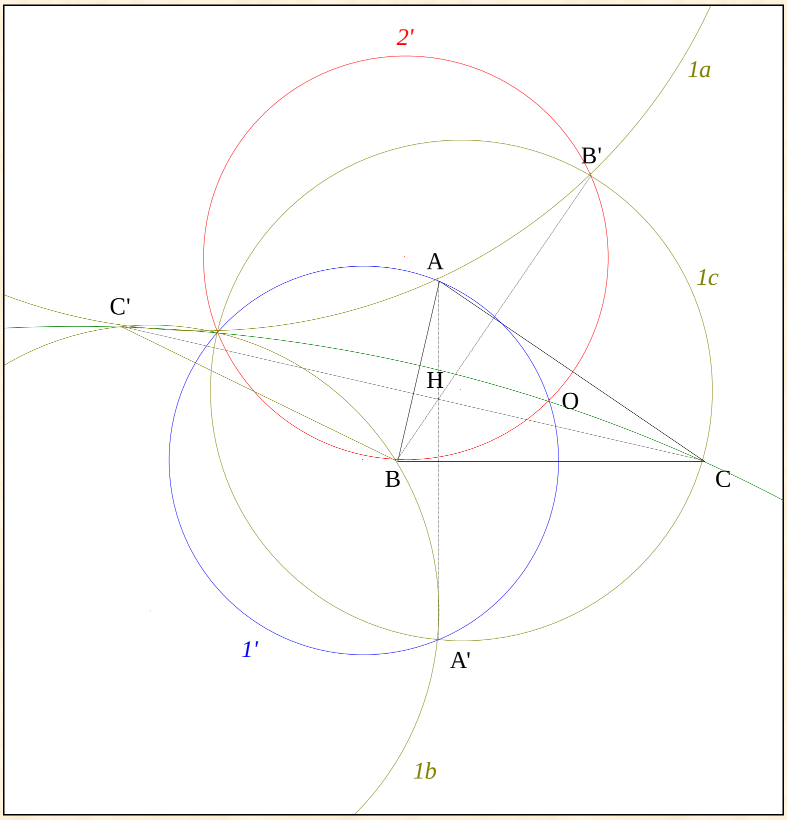
---

13 i.e. les cercles circonscrits resp. aux triangles HBC, HCA, HAB
14 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles G.G.G. vol. **2**, p. 13 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
15 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles G.G.G. vol. **2**, p. 8-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
16 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

II. LE PROBLÈME DE L'AUTEUR

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A'B'C'	le triangle symétrique [17] de ABC,
	1', 2', 3'	les A, B, C-cercles de Musselman [18] de ABC
et	*1a, 1b, 1c*	les A, B, C-cercles de Yiu de ABC.

Donné : *1', 2', 3', 1a, 1b* et*1c* sont concourants.

---

[17] ou H-cerclecévien où A', B', C' sont les seconds points d'intersection de (AH), (BH), (CH) avec les cercles circonscrits aux triangles HBC, HCA, HAB

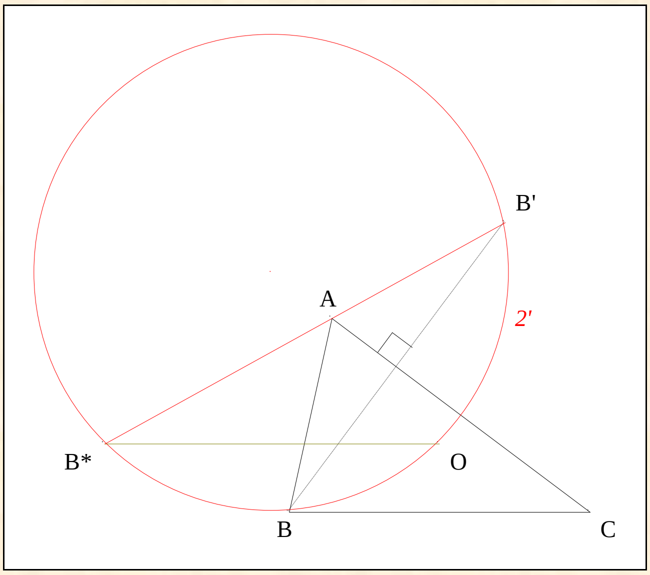
[18] i.e. les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'O, BB'O, CC'O

III. LA DÉMARCHE DE L'AUTEUR

1. Une parallèle à (BC)

VISION

Figure :



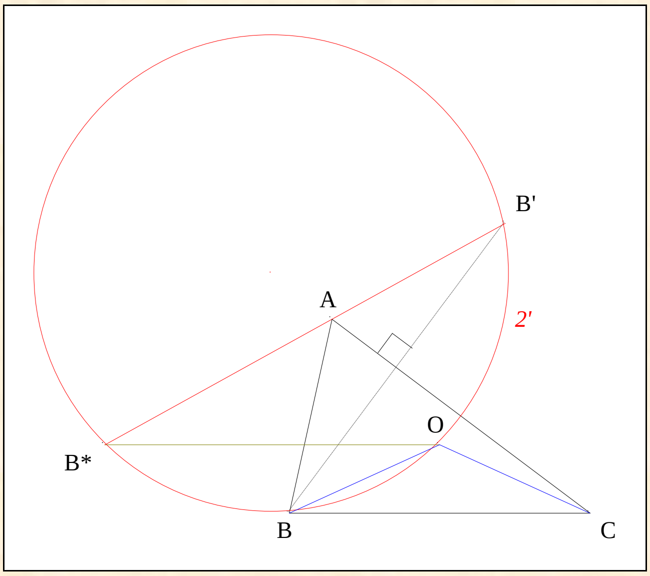
Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
B' le symétrique de B par rapport à (AC),
2' le B-cercle de Musselman [19] de ABC
et B* le second point d'intersection de (AB') avec *2'*.

Donné : (OB*) est parallèle à (BC). [20]

VISUALISATION

[19] i.e. le cercle passant par O, B, B'

[20] Ayme J.-L., Two parallels, AoPS du 26/06/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1106880_two_parallels

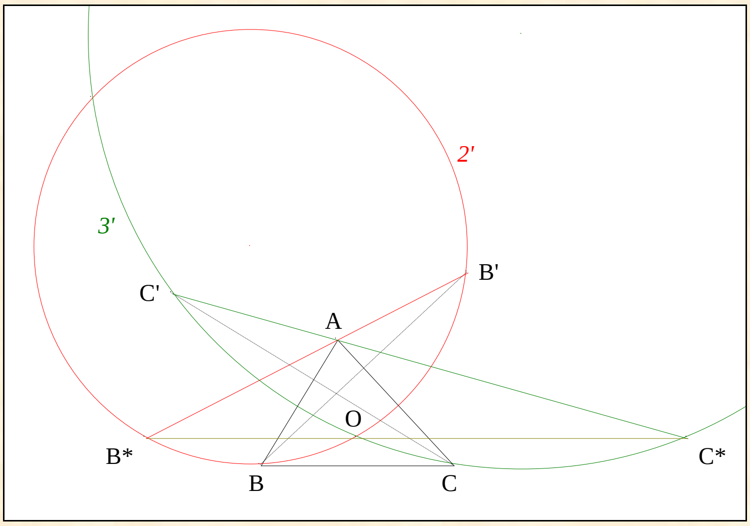


- **Scolie :** <BAB' = <BAO.
- Les triangles ABB' et OBC étant resp. A, O-isocèles sont semblables.
- Une chasse angulaire :

*	par similitude,	<CBO = <B'BA
*	par symétrie d'axe (AC),	<B'BA = <AB'B
*	par une autre écriture,	<AB'B = <B*B'B
*	par "Angles inscrits",	<B*B'B = <B*OB
*	par transitivité de =,	<CBO = <B*OB.

- **Conclusion :** les angles alternes-internes <CBO et <B*OB étant égaux, (OB*) est parallèle à (BC).

Scolie : vision symétrique



- Notons C' le symétrique de C par rapport à (AB),

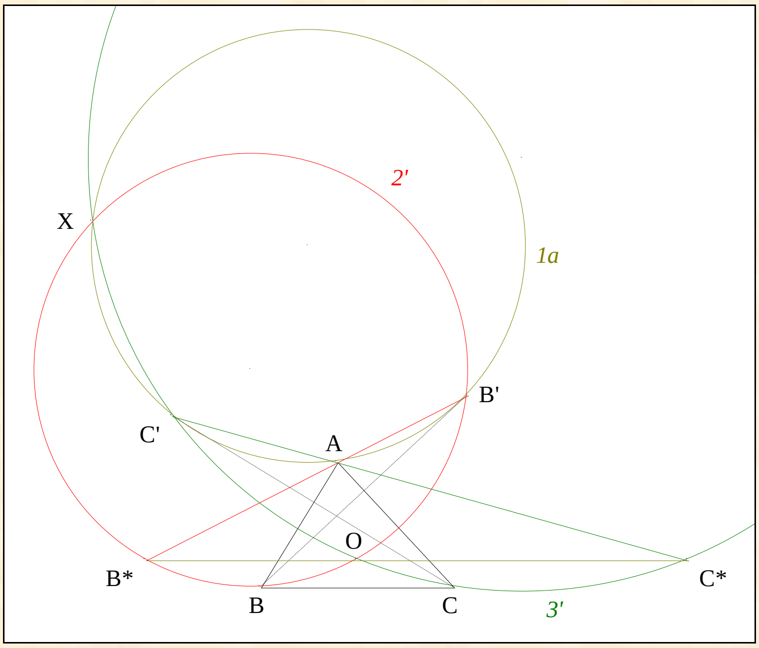
	3'	le cercle passant par O, C, C'
et	C*	le second point d'intersection de (AC') avec *3'*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (OC*) est parallèle à (BC).
- **Conclusion :** d'après le postulat d'Euclide, B*, O et C* sont alignés.

2. Le A-cercle de Yui

VISION

Figure :

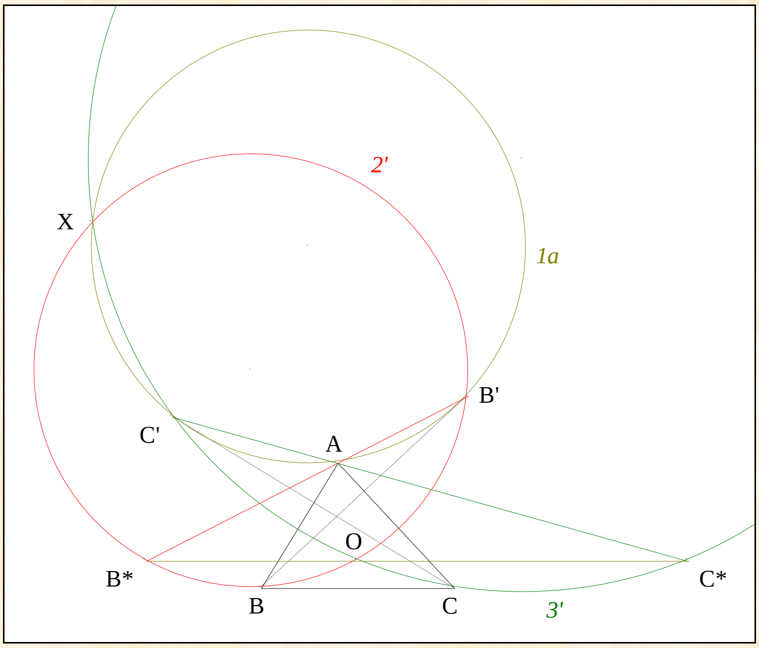


Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	B', C'	les symétriques de B, C resp. par rapport à (AC), (AB),
	2', *3'*	les B, C-cercles de Musselman de ABC,
	X	le second point d'intersection de *2'* et *3'*,
et	*1a*	le A-cercle de Yui [21].

Donné : *1a* passe par X.

VISUALISATION

[21] i.e. le cercle passant par A, B', C'

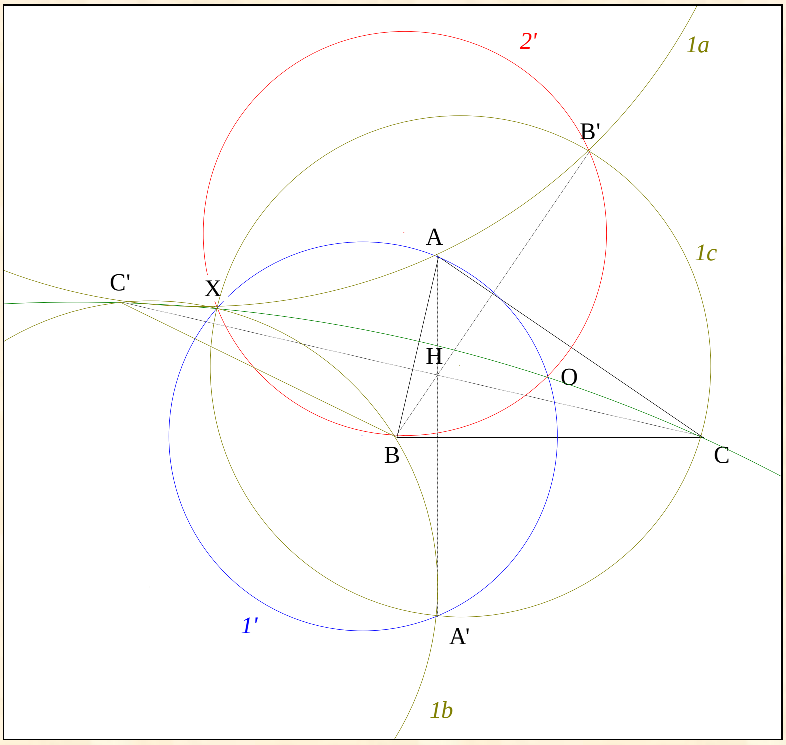


- D'après Miquel "Le théorème du pivot" [22]
  appliqué au triangle AB*C*
  avec B' sur (AB*), O sur (B*C*), C' sur (AC*), *1a*, *2'* et *3'* sont concourants.

- **Conclusion :** *1a* passe par X.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1b*, *3'* et *1'* sont concourants
  1c, *1'* et *2'* sont concourants.

3. La preuve de A. II.



[22] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

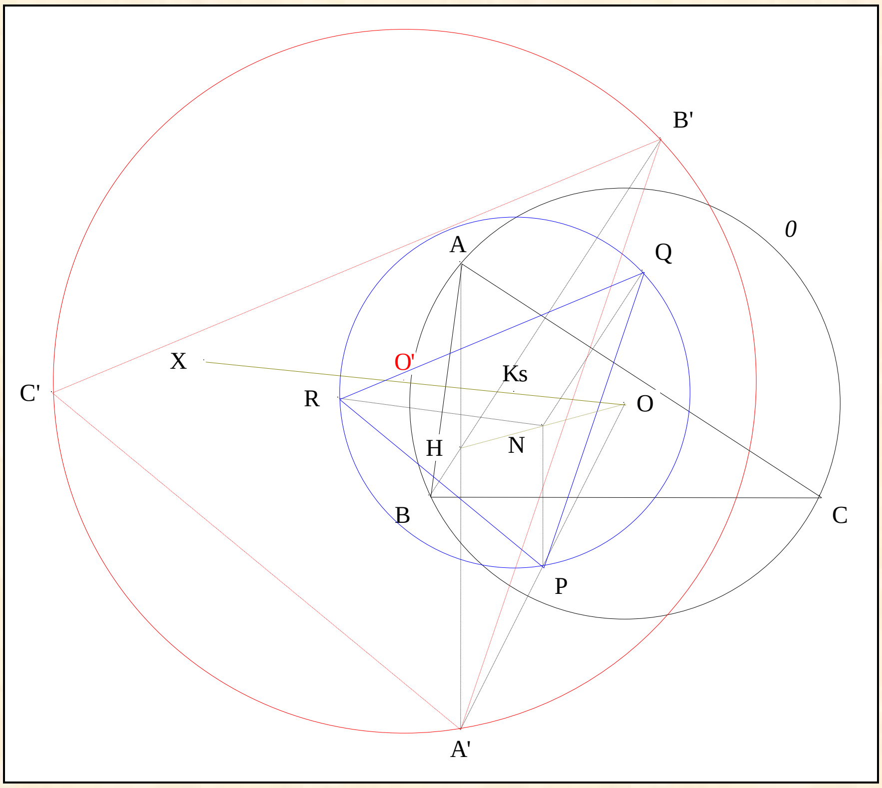
- D'après **A. I. 1**, les A, B, C-cercles de Musselman étant coaxiaux, *1'*, *2'*, *3'* passent par X.
- D'après **A. I. 2**, les A, B, C-cercle de Yiu de ABC sont concourants.
- D'après **A. III. 2**, les A, B, C-cercle de Yiu de ABC i.e. *1a*, *1b*, *1c* passent par X.
- **Conclusion :** *1'*, *2'*, *3'*, *1a*, *1b* et*1c* sont concourants en X.

4. Commentaire : O et H étant deux points isogonaux de ABC, une généralisation à un couple de points isogonaux de ABC est proposée en 2015 par Ngo Quang Duong [23].

5. Le triangle symétrique

VISION

Figure :



Traits :

ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle symétriques de ABC,
O' le centre du cercle circonscrit à A'B'C',
N le centre du cercle d'Euler de ABC,
PQR le triangle N-symétrique relativement à ABC

---

23 Ngo Quang Duong, Generalization of Musselman's theorem, *Anopolis* du 14/06/2015 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Anopolis/conversations/topics/2648?from=trending
Quelques cercles, *Les-Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1108941

et Ks le point de Kosnita de ABC.

Donné : O' est le symétrique de O par rapport à Ks. [24]

VISUALISATION

- Notons H l'orthocentre de ABC.
- **Scolie :** N est le milieu de [OH].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle A'OH, P est le milieu de [OA'].
- Mutatis mutandis, nous montrerions que Q est le milieu de [OB']
  R est le milieu de [OC'].
- D'après John Rigby [25], Ks est l'isogonal de N relativement à ABC ;

  en conséquence, **(1)** Ks est le centre du cercle circonscrit à PQR

  (2) (AKs) est perpendiculaire à (QR).
- **Conclusion :** A'B'C' étant homothétique à PQR (centre O, rapport 2),
  O' est le symétrique de O par rapport à Ks.

Scolie : O, Ks, O' et X [26] sont alignés.

---

24 With the Kosnita point, AoPS du 20/07/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1117059_with_the_kosnita_point

25 Rigby J., Brief notes on some forgotten geometrical theorems, *Mathematics & Informatics Quarterly* **7** (1997) 156-158
Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. **1**, p. 14-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

26 défini en **A. III. 2.** et **3.**

B. TRIANGLE P-CERCLECÉVIEN

ET

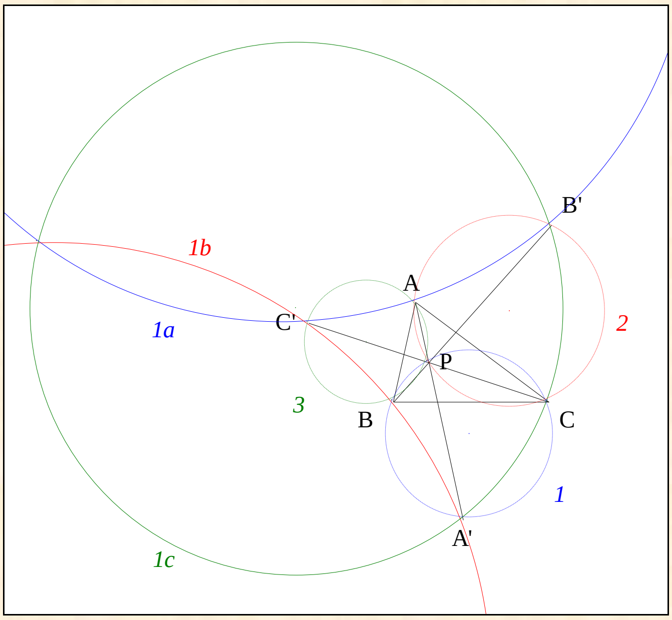
LE POINT P*

I. PRÉMISSE

1. Une généralisation des cercles de Yiu

VISION

Figure :



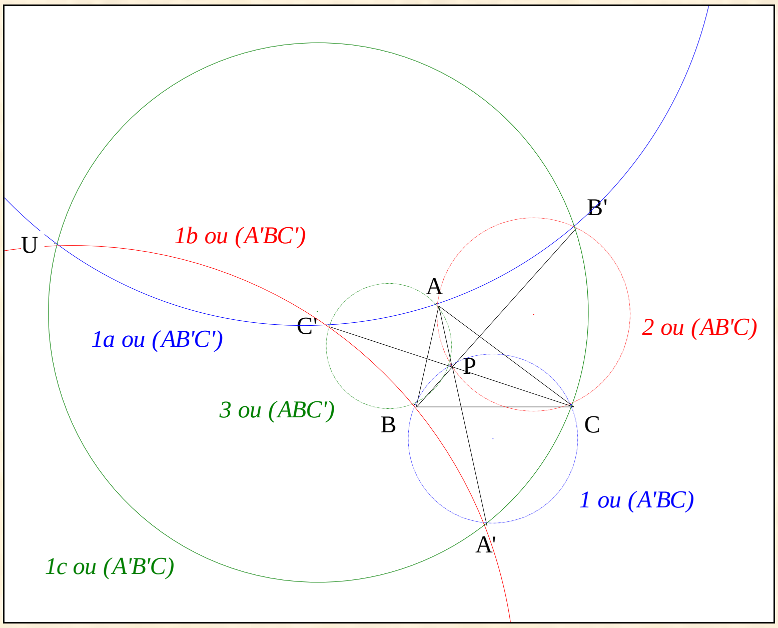
Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point intérieur [27] à ABC,
	1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB,
	A'B'C'	le triangle P-cerclecévien [28] de ABC
et	*1a, 1b, 1c*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AB'C', BC'A', CA'B'.

Donné : *1a, 1b* et *1c* sont concourants.

VISUALISATION

[27] Pour une meilleure lisibilité de la figure

[28] A', B', C' sont les seconds points d'intersection de (AP), (BP), (CP) avec les cercles *1, 2, 3*



- Notons (A'BC), (AB'C), (ABC') les cercles *1*, *2*, *3*.
- **Commentaire :** nous passons de (A'BC) , (AB'C), (ABC') i.e. *1*, *2*, *3*

  à

  (AB'C'), (A'BC'), (A'B'C) i.e. *1a*, *1b*, *1c*.

  par la technique d'accentuation [29].
- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des six cercles" [30], (AB'C'), (A'BC'), (A'B'C) i.e. *1a*, *1b*, *1c* sont concourants.
- Notons U ce point de concours.

Scolie : *1a*, *1b*, *1c* sont "les A, B, C-cercles généralisés de Yui relativement à P".

Commentaire : ce résultat a été remarqué par Ngo Quang Duong [31].

---

29 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles G.G.G. vol. **2**, p. 13 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

30 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles G.G.G. vol. **2**, p. 8-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

31 Ngo Quang Duong, Generalization of Musselman's theorem, *Anopolis* du 14/06/2015 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Anopolis/conversations/topics/2648?from=trending

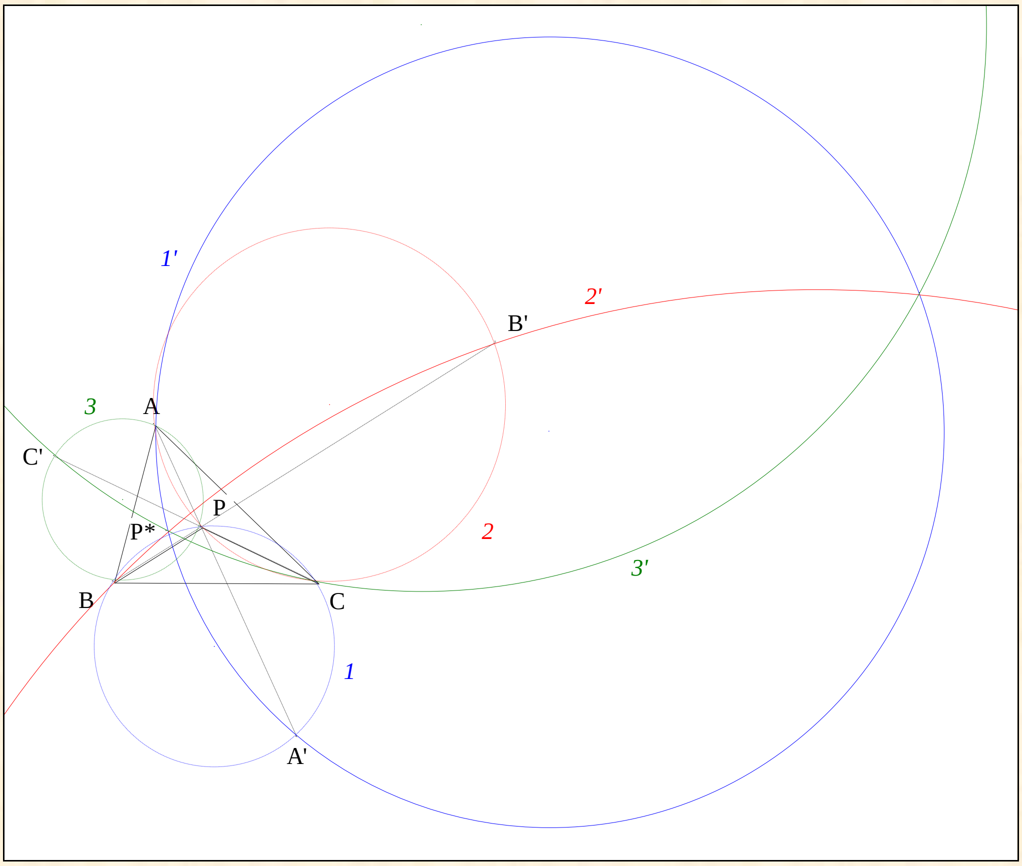
II. LE PROBLÈME

DE

NGO QUANG DUONG

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	1, 2, 3	les cercles circonscrits aux triangles PBC, PCA, PAB,
	A', B', C'	les seconds points d'intersection de (AP), (BP), (CP) resp. avec *1, 2, 3*
et	*1', 2', 3'*	les cercles circonscrit s aux triangles P*AA', P*BB', P*CC'.

Donné : *1', 2'* et *3'* sont coaxiaux [32].

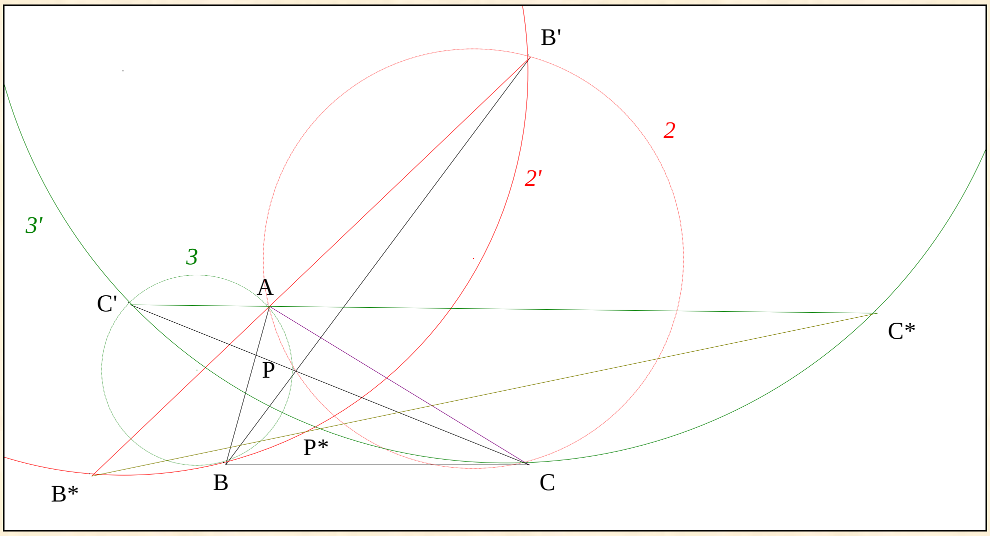
[32] Ngo Quang Duong, Generalization of Musselman's theorem, *Anopolis* du 14/06/2015 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Anopolis/conversations/topics/2648?from=trending
Quelques cercles, *Les-Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1108941

III. VISUALISATION DE L'AUTEUR

1. Trois points alignés

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point intérieur [33] à ABC,
2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles PCA, PAB,
B', C' les seconds points d'intersection de (BP), (CP) avec *2*, *3*,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
2' le cercle passant par P*, B, B',
3' le cercle passant par P*, C, C'
et B*, C* les seconds points d'intersection resp. de (AB') avec *2'*, (AC') avec *3'*.

Donné : B*, P* et C* sont alignés.

VISUALISATION

- Une chasse angulaire à **Π** près :

*	par "Angles inscrits",	<B*P*B = <B*B'B
*	par une autre écriture,	<B*B'B = <AB'P
*	par "Angles inscrits",	<AB'P = <ACP
*	par isogonalité,	<ACP = <P*CB
*	par transitivité de =,	<B*P*B = <P*CB

---

33 Pour une figure lisible

* mutatis mutandis, <CP*C* = <CBP*.

* par addition membre à membre, <B*P*B + <CP*C* = <P*CB + <CBP*

* par "Le théorème 180", <P*CB + <CBP* = <CP*B

* par transitivité de =, <B*P*B + <CP*C* = <CP*B

* par transposition, <B*P*B + <BP*C + <CP*C* = 0

* par Chasles, <B*P*C* = 0.

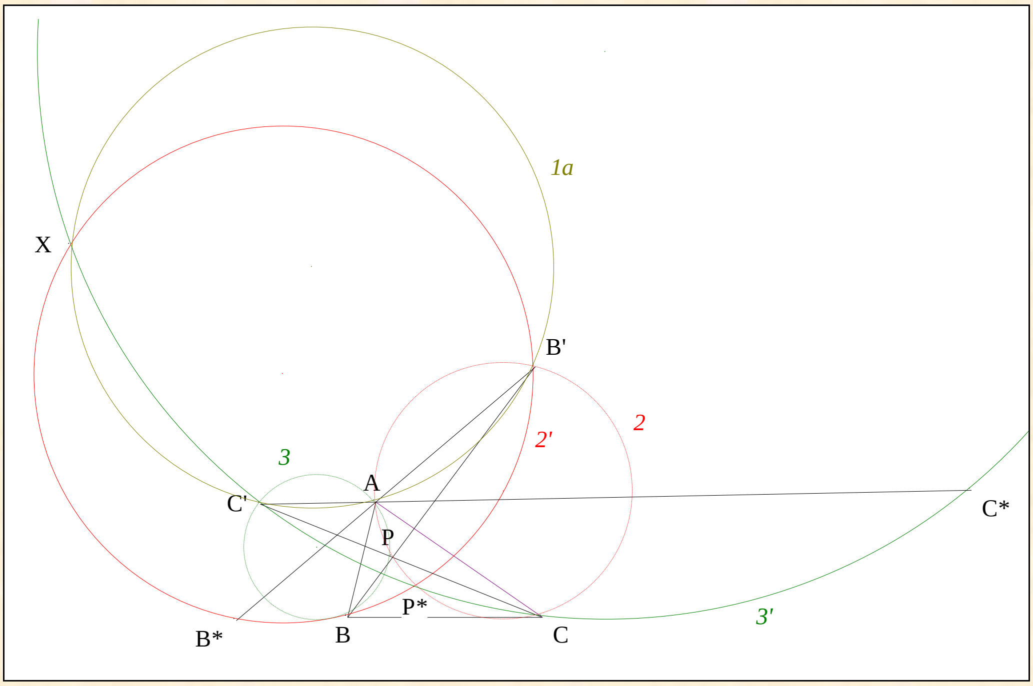
- **Conclusion :** B*, P* et C* sont alignés.

Commentaire : dans ce cas général, la droite (B*P*C*) n'est plus parallèle à (BC).

2. Le A-cercle généralisé de Yui

VISION

Figure :



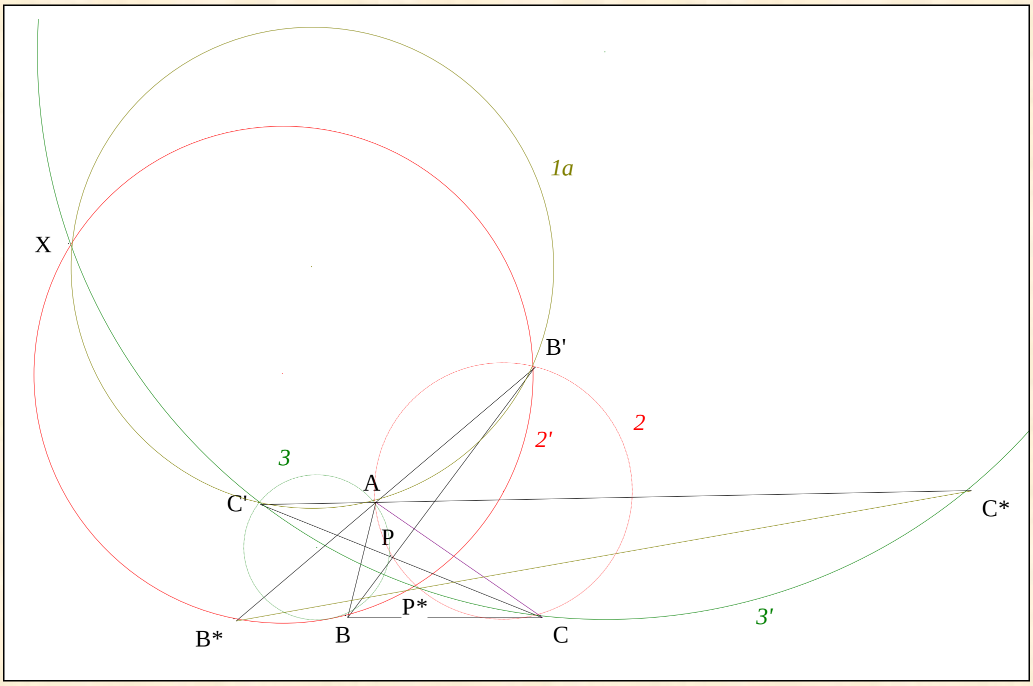
Traits :

ABC un triangle,
P un point,
2, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles PCA, PAB,
B', C' les seconds points d'intersection de (BP), (CP) avec *2*, *3*,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
2' le cercle passant par P*, B, B',
3' le cercle passant par P*, C, C',
B*, C* les seconds points d'intersection resp. de (AB') avec *2'*, (AC') avec *3'*
X le second point d'intersection de *2'* et *3'*,

et *1a* le A-cercle généralisé [34] de Yiu.

Donné : *1a* passe par X.

VISUALISATION



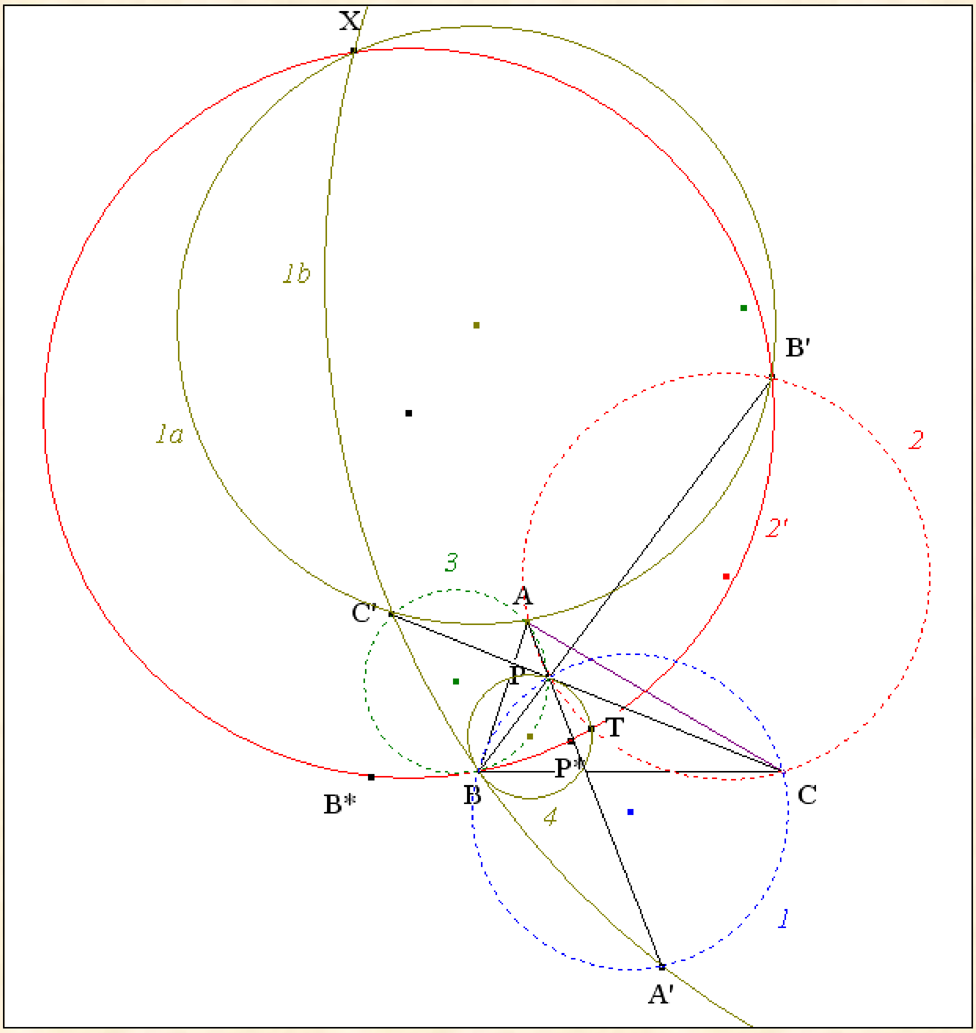
- D'après **B. 1,** B*, P* et C* sont alignés.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" [35]
  appliqué au triangle AB*C*
  avec B' sur (AB*), P* sur (B*C*), C' sur (AC*), *1a*, *2'* et *3'* sont concourants.

- **Conclusion :** *1a* passe par X.

[34] i.e. cercle passant par A, B', C'
[35] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

3. La preuve de B. II.



- Notons T le second point d'intersection de *2* et *2'*,
  et *4* le cercle circonscrit au triangle BPT.

- Partons du cercle *2*.

- Considérons les cercles *1a*, *3*, *4* et *2'*.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles" [36], C', B, B, X sont sur *1b*.

- D'après **B. III. 2.**, *1a*, *2'* et *3'* passent par X.

- **Conclusion partielle :** *1a*, *1b*, *2'* et *3'* passent par X.

- Notons Y le second point d'intersection de *2'* et *3'*.

- Mutatis mutandis, *1b*, *1c*, *3'* et *1'* passent par Y ;
  en conséquence, Y et X sont confondus.

- **Conclusion :** *1'*, *2'* et *3'* sont coaxiaux.

---

[36] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 20-22 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

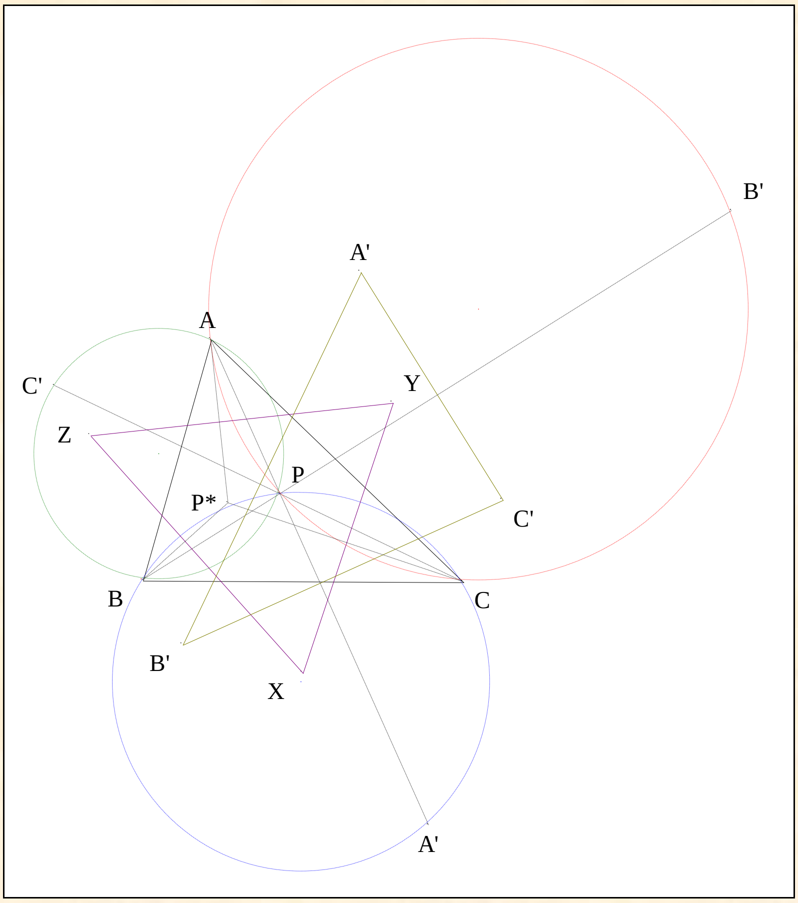
C. TROIS RÉSULTATS DE L'AUTEUR

Commentaire : ces résultats sont une conséquence directe de la "coaxialité" des trois cercles étudiés.

1. Deux triangles perspectifs

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	A'B'C'	le triangle P-cercle cévien de ABC
	A"B"C"	le triangle déterminé par les médiatrices de [AA'], [BB'], [CC']
et	XYZ	le triangle déterminé par les médiatrices de [AP*], [BP*], [CP*].

Donné : XYZ et A"B"C" sont perspectifs [37].

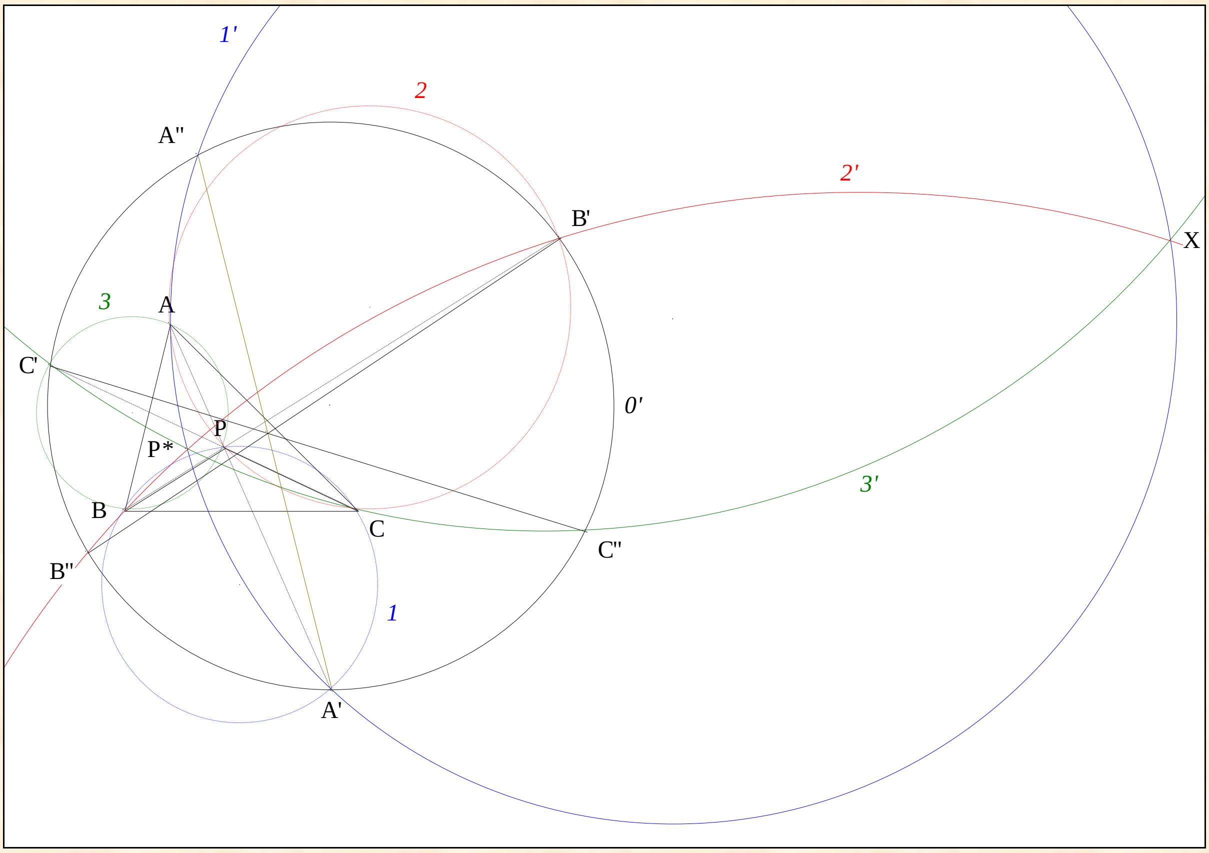
---

[37] Ayme J.-L., Two perspective triangles, AoPS du 12/07/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113575_two_perspective_triangles

2. Trois droites concourantes

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	1, 2, 3	les cercles circonscrits aux triangles PBC, PCA, PAB,
	A'B'C'	le triangle P-cerclecévien de ABC,
	0'	le cercle circonscrit au triangle A'B'C',
	1', 2', 3'	les cercles circonscrits aux triangles P*AA', P*BB', P*CC'
et	A", B", C"	les seconds points d'intersection de *0'* resp. avec *1', 2', 3'*

Donné : (AA"), (BB") et (CC") sont concourantes sur (P*X) [38].

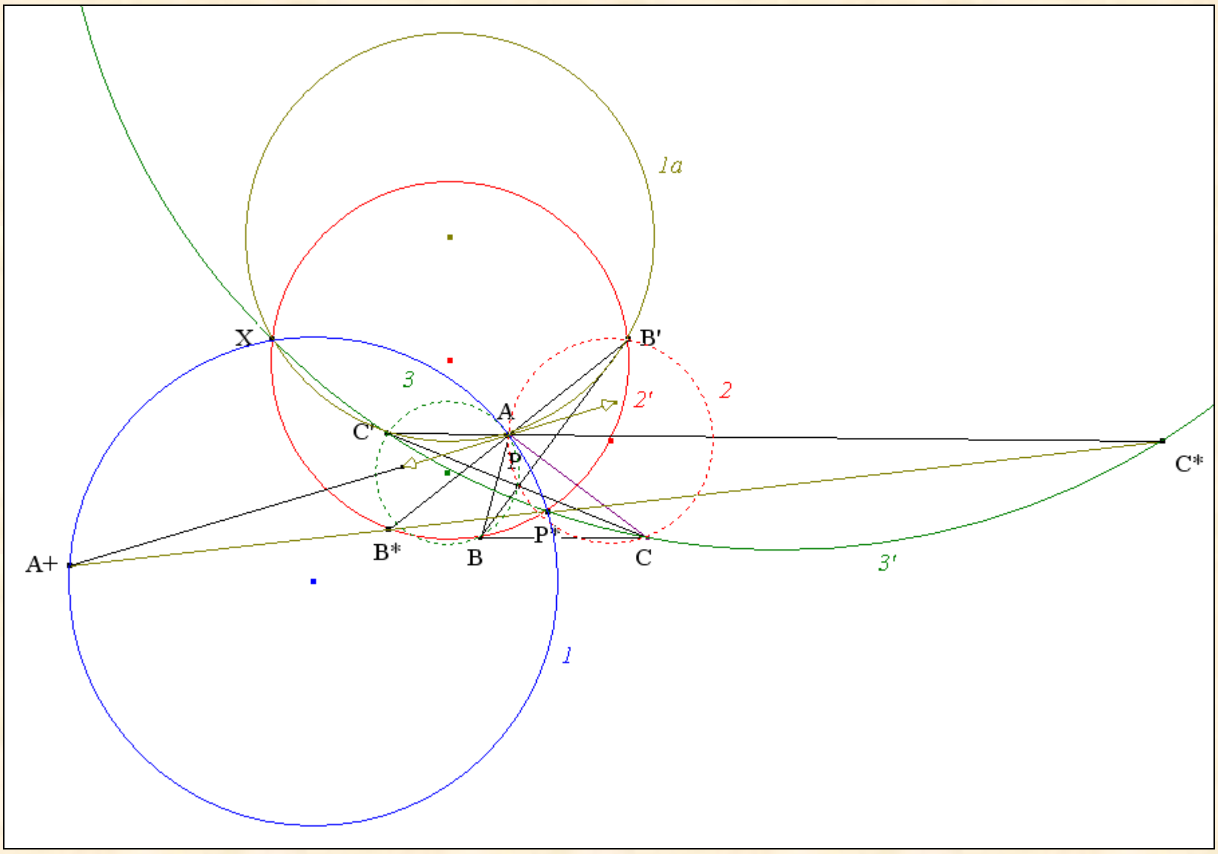
Commentaire : résultat obtenu en appliquant deux fois "Le théorème des trois cordes".

[38] Ayme J.-L. Three concurrent lines, AoPS du 15/06/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1101842_three_concurrent_line

3. Une tangente à un cercle de Yiu

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles PCA, PAB,
	B', C'	les seconds points d'intersection de (BP), (CP) avec *2, 3*,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	1', 2', 3'	les cercles circonscrits aux triangles **P*AA',** P*BB', P*CC'.
	B*, C*	les seconds points d'intersection resp. de (AB') avec *2'*, (AC') avec *3'*
	X	le second point d'intersection de *2'* et *3'*,
	1a	le A-cercle généralisé [39] de Yiu.
et	A+	le second point d'intersection de (P*B*) avec *1'*.

Donné : (AA+) est tangente à *1a* en A [40].

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème du pivot" [41]
  appliqué au triangle AC*A+
  avec C' sur (AC*), O sur (C*B*), A sur (A+A), (AA+) est tangente à *1a* en A.

---

[39] i.e. cercle passant par A, B', C'

[40] Ayme J.-L., A tangent, AoPS du 15/07/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1114508_a_tangent

[41] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/