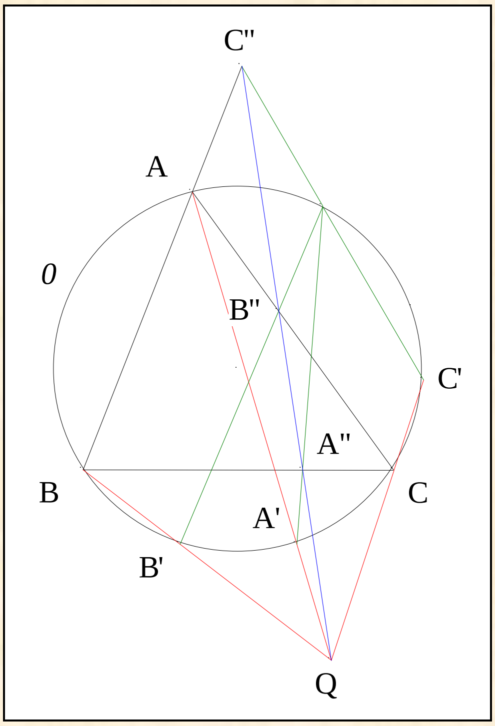
LA P-TRANSVERSALE DE Q

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique d'un résultat de Paul Aubert et de Joseph Neuberg datant de la fin du XIX-ième siècle ainsi que deux résultats analogues, le premier de John Wentworth Clawson et le second de Darij Grinberg.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. We present a purely synthetic proof of a result of Paul Aubert and Joseph Neuberg dating from the end of the 19th century as well as two similar results, the first of John Wentworth Clawson and the second of Darij Grinberg.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

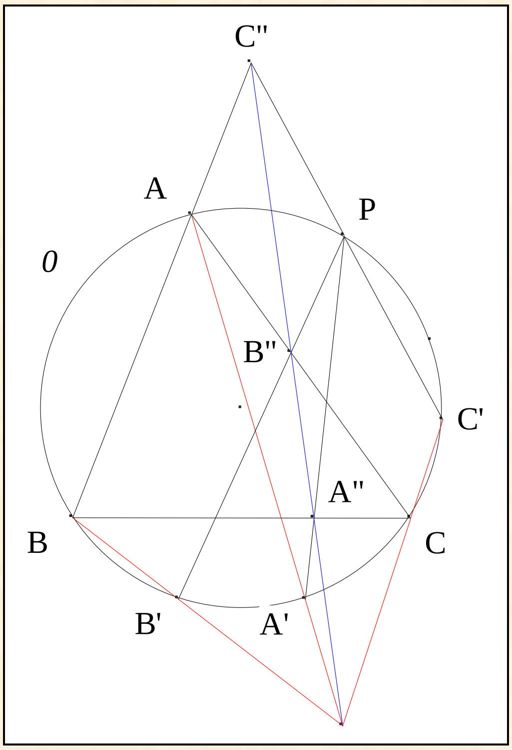
Sommaire

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 02/09/2009

I. L'ÉQUIVALENCE D'AUBERT-NEUBERG

VISION

Figure :

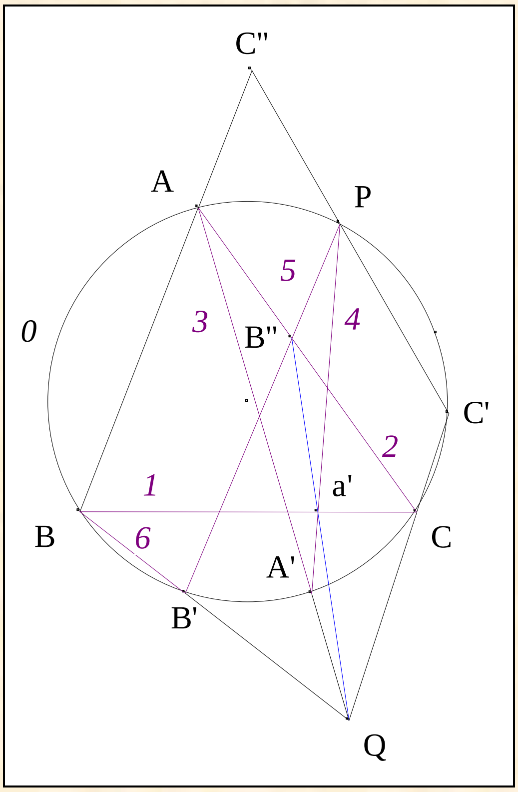


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	A', B', C'	trois points de *0*,
	P	un point de *0*
et	A", B", C"	les points d'intersection de (PA') et (BC), de (PB') et (CA), de (PC') et (AB).

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes
si, et seulement si,
(A"B"C") est une ménélienne.

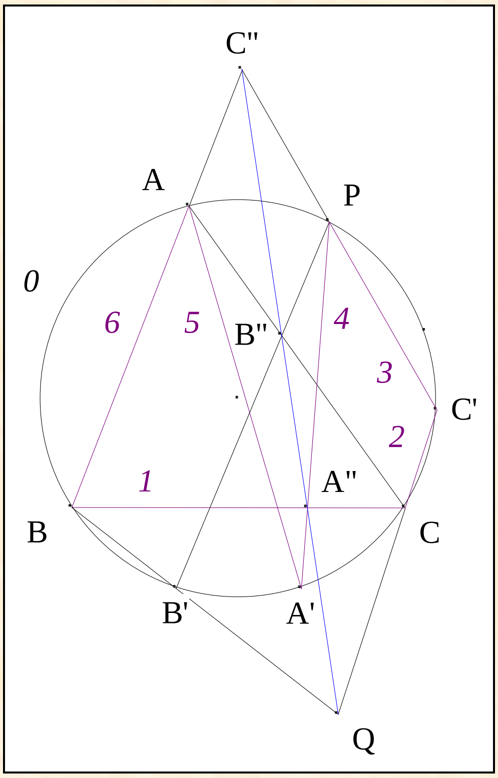
VISUALISATION NÉCESSAIRE [2]

[2] Aubert P., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1889) 529 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
Collinearity of four points, Australian Mathematical Olympiad 2001, AoPS du 16/06/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=484198



- Notons Q le point de concours de (AA'), (BB') et (CC').

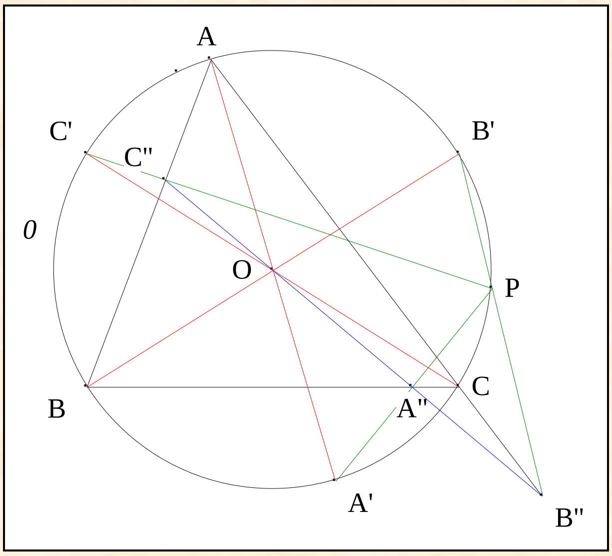
- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**), (A"B"Q) est la pascale de l'hexagone cyclique BCAA'PB'B.



- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1.**), (A"QC") est la pascale de l'hexagone cyclique BCC'PA'AB.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, (A"B"C") est une ménélienne passant par Q.

Scolie : le cas particulier d'Hendricus Hubertus van Aubel ou la P-transversale de O [3]



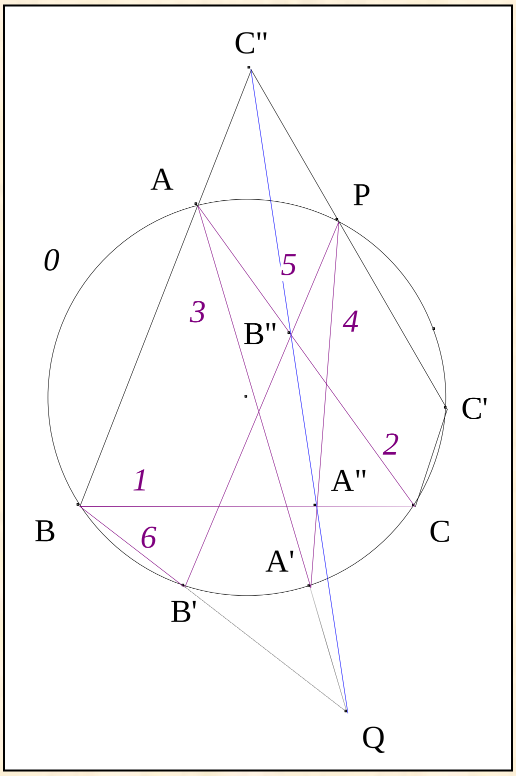
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A', B', C'	les symétriques de A, B, C par rapport à O,
	P	un point de *0*,
et	A", B", C"	les points d'intersection de (PA') et (BC), (PB') et (CA) , (PC') et (AB).

Donné : (A"B"C") est une ménélienne passant par O.

VISUALISATION SUFFISANTE [4]

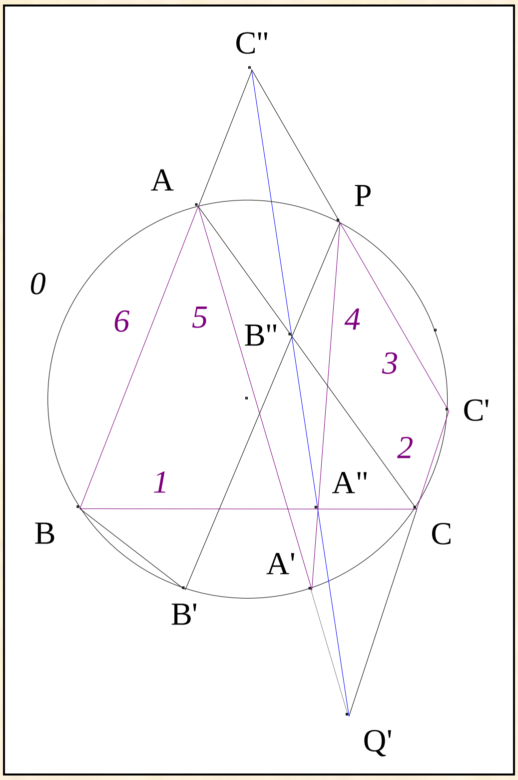
[3] Van Aubel, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1889) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[4] Neuberg J. (1897)



- Notons Q le point d'intersection de (AA') et (BB').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.), (A"B"Q) est la pascale de l'hexagone BCAA'PB'B ;
  en conséquence, (AA'), (BB') et (A"B") sont concourantes en Q.



- Notons Q' le point d'intersection des droites (AA') et (CC').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.), (A"Q'C") est la pascale de l'hexagone BCC'PA'AB en conséquence, (AA'), (CC') et (A"C") sont concourantes en Q'.

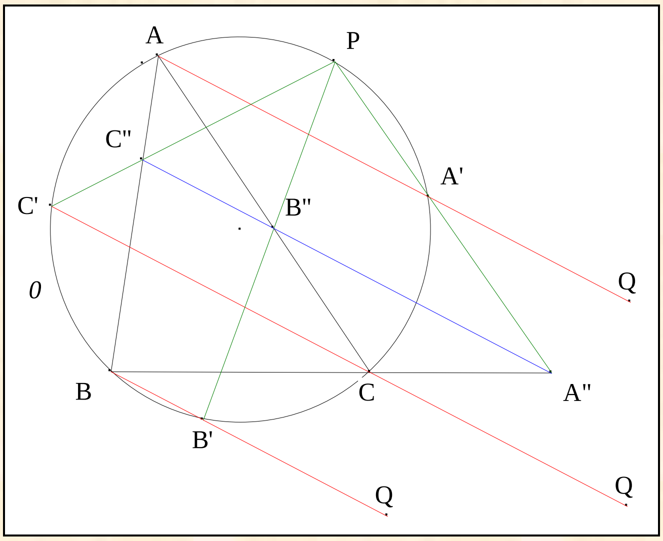
- **Conclusion :** le point d'intersection de deux droites étant unique, (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes sur la droite (A"B"C") en Q.

Scolie : ce résultat de Joseph Neuberg a été proposé par Antrea Hatzipolakis [5] au groupe *Hyacinthos* en 2001. Dans son message, Q est "le point de Neuberg".

II. L'ÉQUIVALENCE D'AUBERT-MACKENSIE

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A', B', C' trois points de *0* tels que (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles entre elles,
P un point
et A", B", C" les point d'intersection de (PA') et (BC), (PB') et (CA), (PC') et (AB).

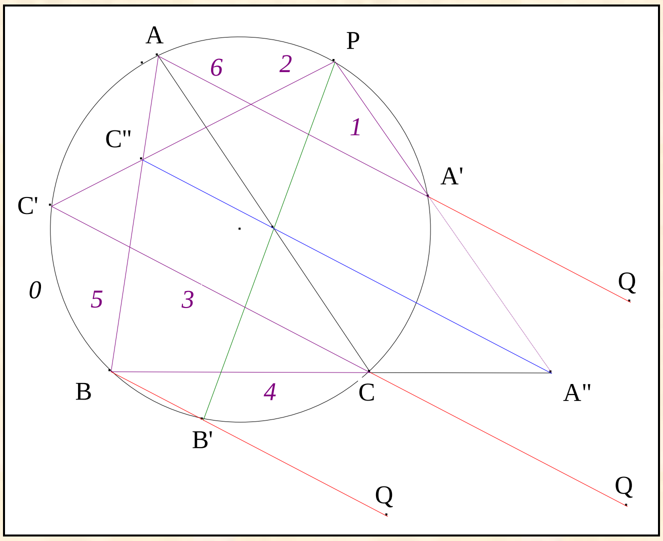
Donné : P est sur *0* *si, et seulement si*, (A"B"C") est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA').

VISUALISATION NÉCESSAIRE [6]

---

[5] Hatzipolakis A., Three Neuberg points on the Euler line, Message *Hyacinthos* # **2487** du 25/02/2001

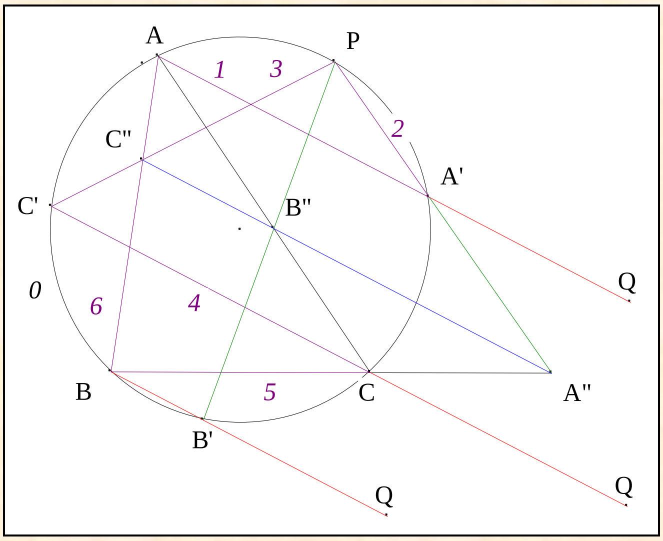
[6] Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0



- Notons Q le point à l'infini sur (AA').

- **Scolie :** (QAA'), (QBB') et (QCC') sont parallèles entre elles.

- D'après "Un résultat d'Aubert" (Cf. **V. 2.**),
(PR) est la pascale de l'hexagone cyclique A'MC'CBAA', (A"C") // (AA').



- D'après "Un résultat d'Aubert" (Cf. **V. 2.**),
(RQ) est la pascale de l'hexagone AA'MC'CBA, (B"C") // (BB') ;
par hypothèse, (BB') // (AA') ;
par transitivité de la relation //, (B"C") // (AA').

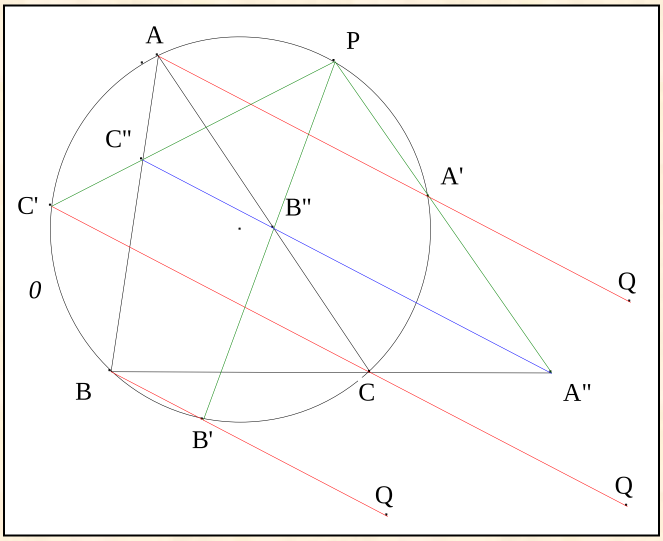
- D'après l'axiome d'incidence Ia, (B"C") = (A"C").

- **Conclusion :** (A"B"C") est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA').

Note historique : ce cas "limite" où Q est un point à l'infini se retrouve chez Hatton [7].

[7] Hatton, *Projective Geometry*, (1913) 164

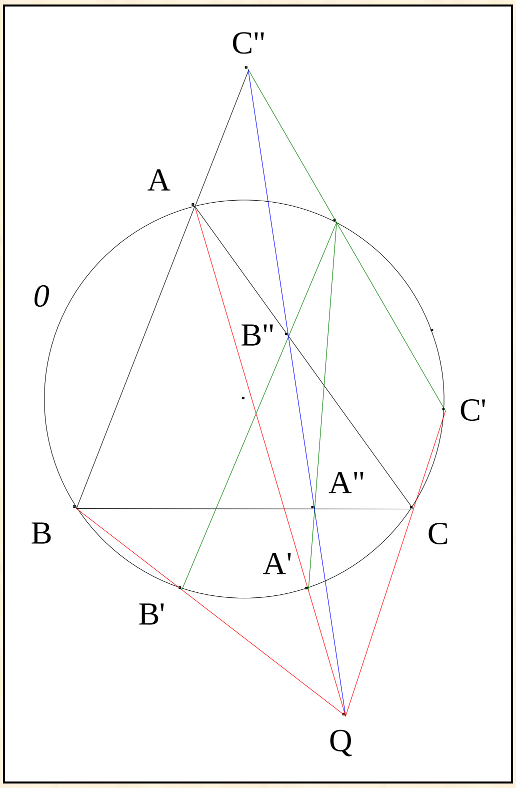
VISUALISATION SUFFISANTE [8]



- **Conclusion :** d'après "Un résultat d'Aubert" (Cf. **V. 2**.), P est sur *0*.

III. L'ÉQUIVALENCE DE CLAWSON-AYME

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,

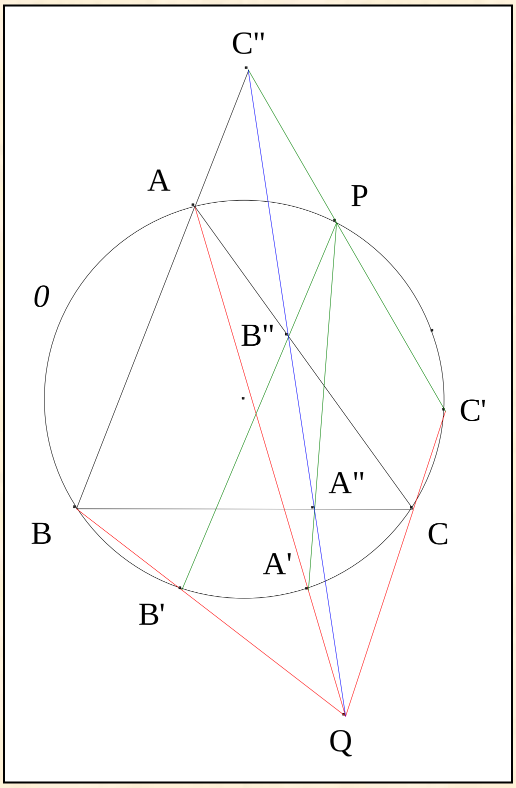
---

[8] M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201

	Q	un point,
	A', B', C'	les seconds points d'intersection de (QA), (QB), (QC) avec *0*,
	D	une ménélienne de ABC
et	A", B", C"	les point d'intersection de *D* avec (BC), (CA), (AB).

Donné : Q est sur *D*
si, et seulement si,
(A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes sur *0*.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [9]

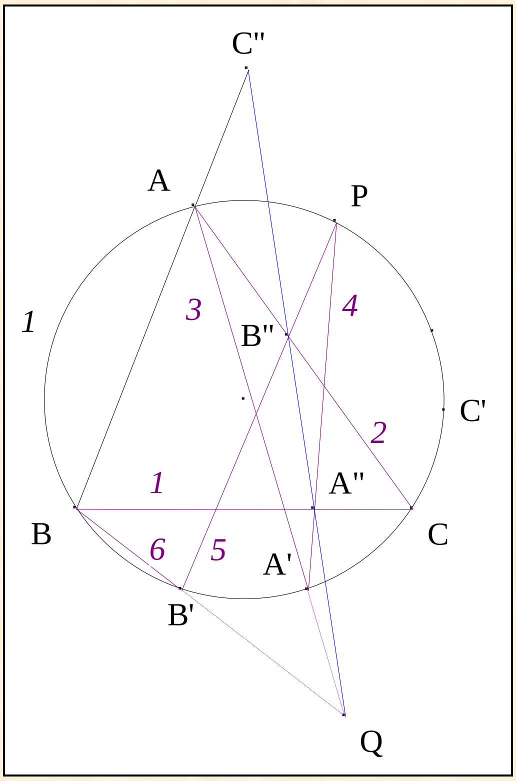


- Notons P le point de concours de (A'A"), (B'B") et (C'C").

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1.**), (A"B"Q) est la pascale de l'hexagone cyclique BCAA'PB'B.

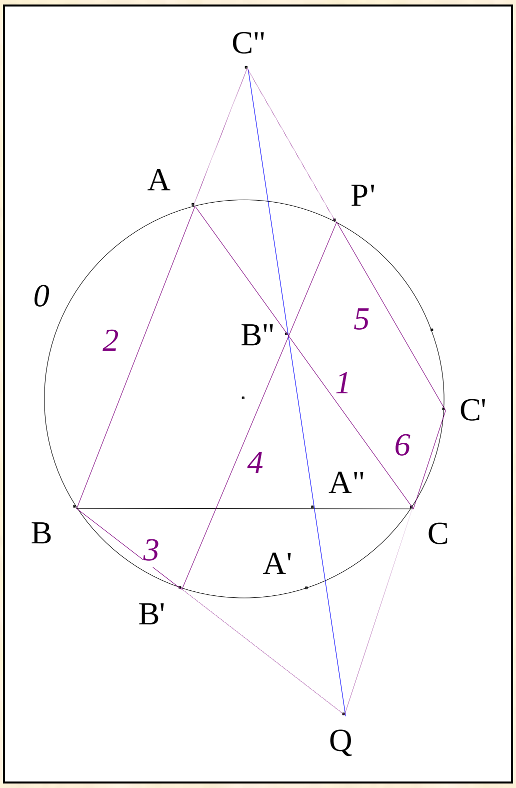
---

[9] Clawson J. W., A theorem in the geometry of the triangle, *American Mathematical Monthly* vol. **26**, **2** (1919) 59-60



- Notons P le point d'intersection de (A'A'') et (B'B'').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.),
(A''B''Q) étant la pascale de l'hexagone BCAA'PB'B, P est sur *0*.



- Notons P' le point d'intersection de (B'B'') et (C'C'').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.), (B"C"Q) étant la pascale de l'hexagone CABB'P'C'C, P' est sur *0*.

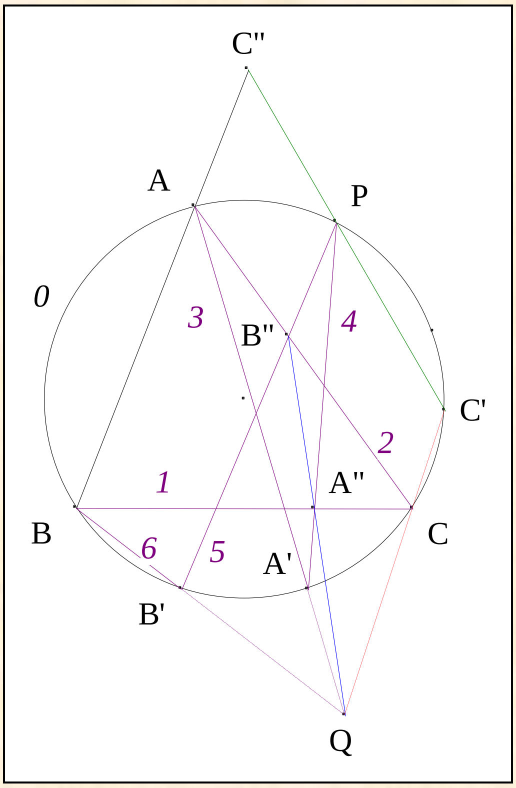
- **Conclusion :** le point d'intersection de deux droites étant unique, (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes sur *0*.

Scolie : John Wentworth Clawson appelle la droite (A"B"C"), la P-transversale de Q relativement à ABC, P en étant le pôle

Note historique : au sujet de ce résultat Clawson [10] écrivait :

It would be strange if this simple theorem were new;
yet the writer has not found it recorder.

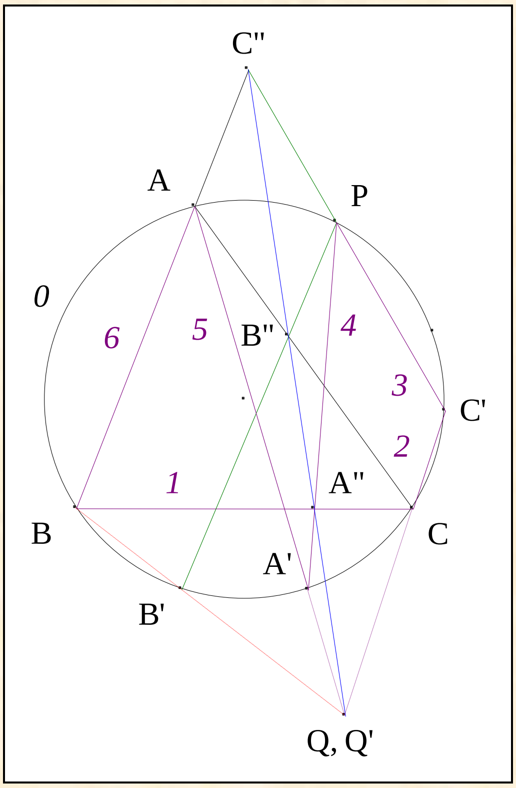
VISUALISATION SUFFISANTE [11]



- Notons Q le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1.**), (A"B"Q) est la pascale de l'hexagone BCAA'PB'B ; en conséquence, (AA'), (BB') et (A"B") sont concourantes en Q.

[10] Clawson J. W., A theorem in the geometry of the triangle, *American Mathematical Monthly* vol. **26**, **2** (1919) 59-60
[11] Auteur



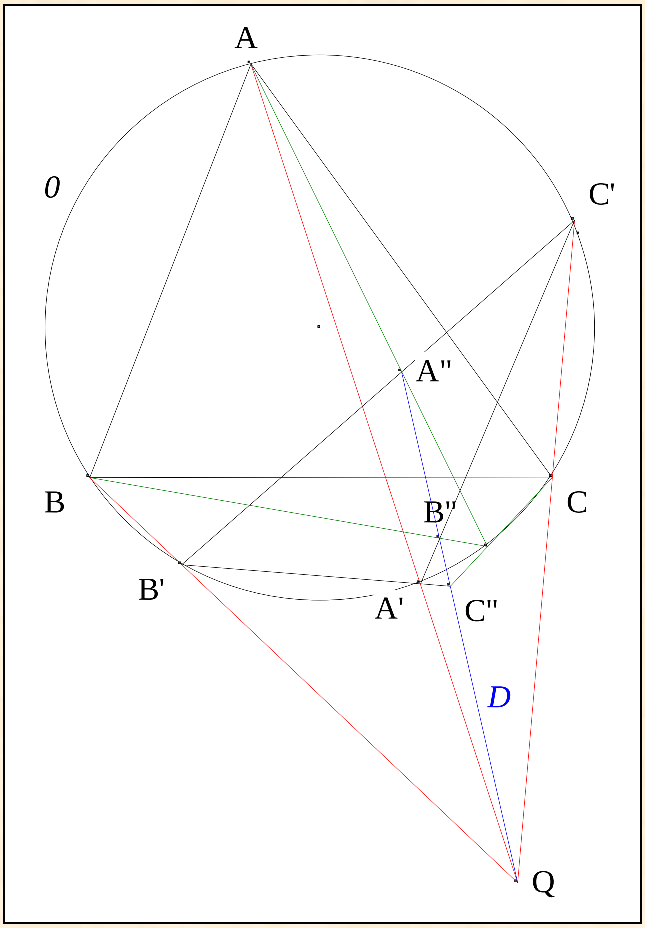
- Notons Q' le point d'intersection de (AA') et (CC').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.), (A"Q'C") est la pascale de l'hexagone BCC'PA'AB
  en conséquence, (AA'), (CC') et (A"C") sont concourantes en Q'.

- **Conclusion :** le point d'intersection de deux droites étant unique, Q est sur *D*.

IV. L'ÉQUIVALENCE DE GRINBERG

Figure :

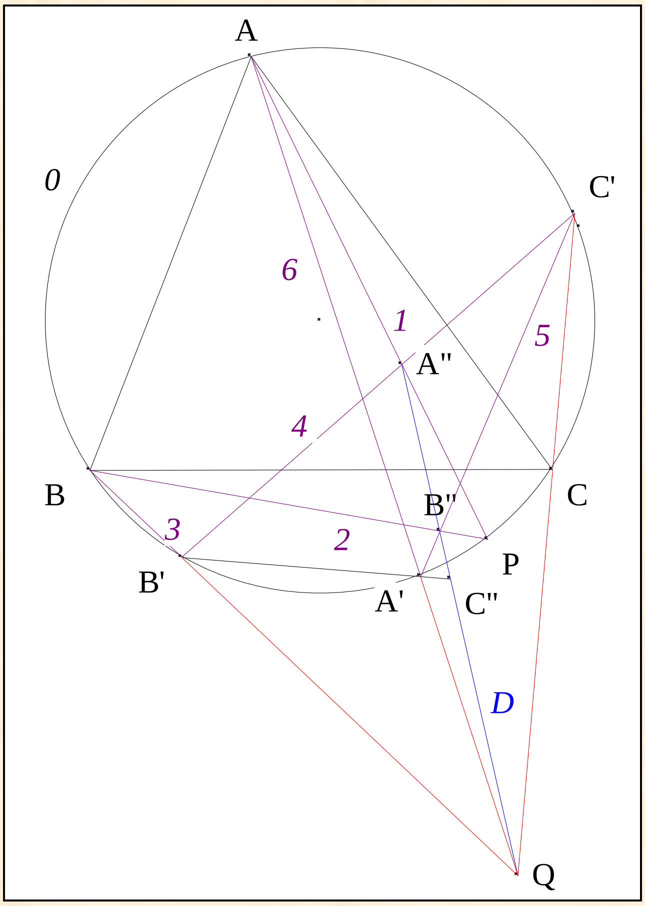


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Q	un point,
	A', B', C'	les seconds points d'intersection de (QA), (QB), (QC) avec *0*,
	D	une ménélienne de A'B'C'
et	A", B", C"	les point d'intersection de *D* avec (B'C'), (C'A'), (A'B').

Donné : Q est sur *D*
si, et seulement si,
(AA"), (BB") et (CC") sont concourantes sur *0*.

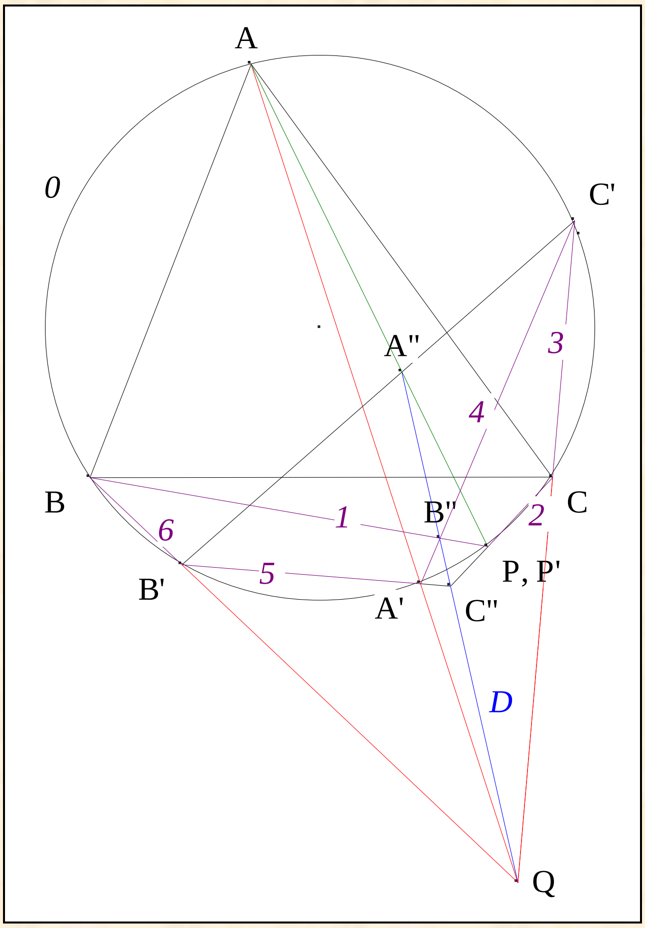
VISUALISATION NÉCESSAIRE [12]

[12] Grinberg D., Neuberg theorem (four lines proof), Message *Hyacinthos* # **6206** du 25/12/2002



- Notons P le point de concours des droites (AA") et (BB").

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1.**),
  (A"B"Q) étant la pascale de l'hexagone APB'BC'A'A, P est sur *0*.

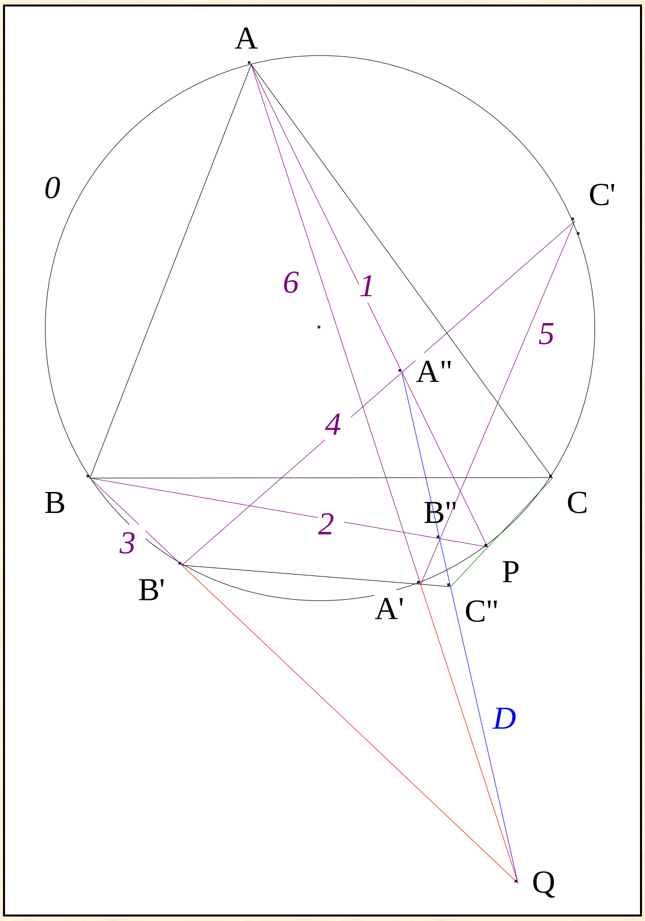


- Notons P' le point de concours des droites (BB") et (CC").

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.),
(B"C"Q) étant la pascale de l'hexagone BP'CC'A'B'B, P' est sur *0*.

- **Conclusion :** le point d'intersection de deux droites étant unique,
(AA"), (BB") et (CC") sont concourantes sur *0*.

VISUALISATION SUFFISANTE [13]

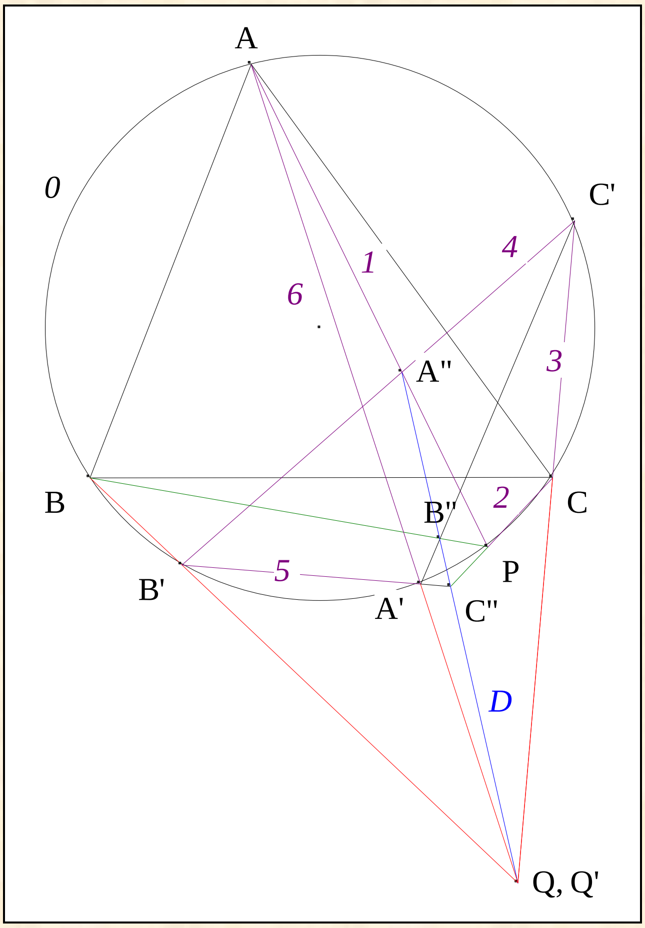


- Notons P le point de concours de (AA"), (BB") et (CC"),
  et Q le point d'intersection de (AA') et (BB').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.), (A"B"Q) est la pascale de l'hexagone APBB'C'A'A ;
  en conséquence, (AA'), (BB') et (A"B") sont concourantes en Q.

---

[13] Grinberg D., Converse of Neuberg theorem, Message *Hyacinthos* # **6791**du 23/03/2003



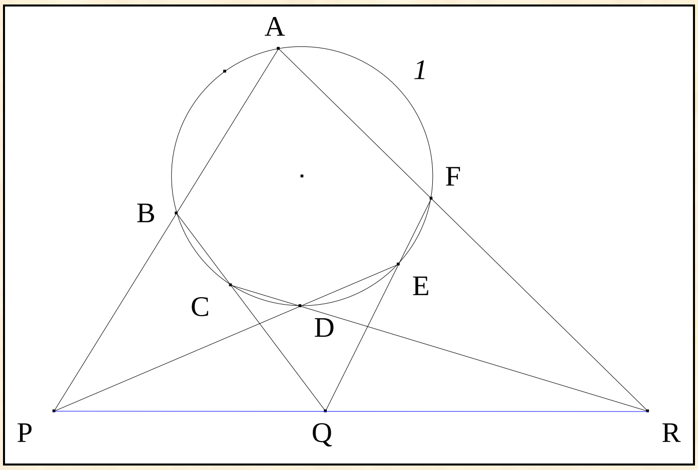
- Notons Q' le point d'intersection de (AA') et (CC').

- D'après "Hexagramma mysticum" (Cf. **V. 1**.), (A"Q'C") est la pascale de l'hexagone APCC'B'A'A
  en conséquence, (AA'), (CC') et (A"C") sont concourantes en Q'.

- **Conclusion :** le point d'intersection de deux droites étant unique, Q est sur *D*.

V. ANNEXE

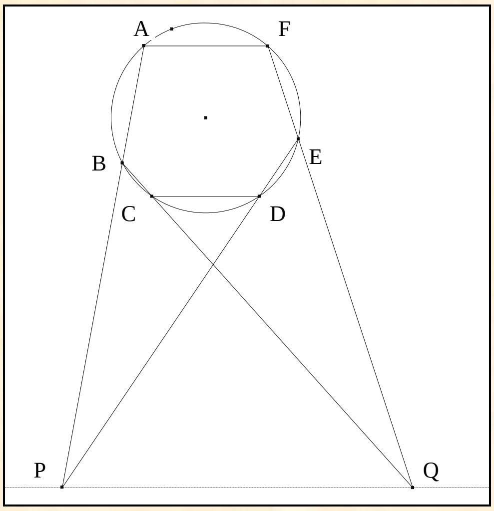
1. Hexagramma mysticum [14]



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEF	un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*
et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

2. Un résultat d'Aubert [15]



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDE	un pentagone inscrit dans *1*,
	F	un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
et	P, Q	les points d'intersection de (AB) et (DE), de (BC) et (EF).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* (PQ) et (AF) sont parallèles.

[14] Pascal B. (1640)
[15] La condition nécessaire est de Paul Aubert