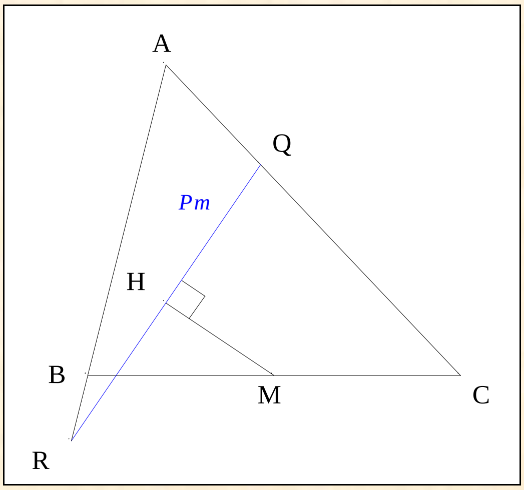
À PROPOS

DE

LA PONCTUELLE (MH)

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons la droite joignant l'orthocentre H d'un triangle au milieu M de l'un des ses côtés. De nombreux exercices portant autour de (MH) ont été présentés dans la littérature géométrique. L'auteur présente quelques aspects de ce thème riche en développement permanent.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. We present the line joining the orthocenter H of a triangle to the middle of its sides. Many exercises with around (MH) were presented in the geometric literature. The author presents a few aspects of this rich theme in permanent development.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (France), le 06/11/2011.

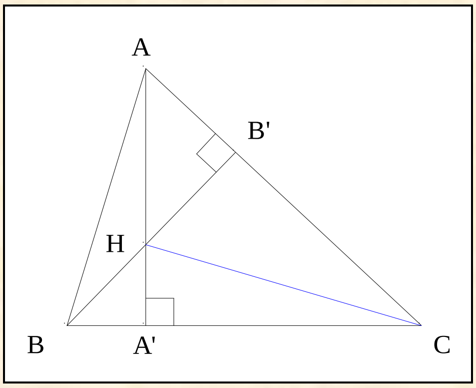
Sommaire

A. LA DROITE (MH)

1.a L'orthocentre H

VISION

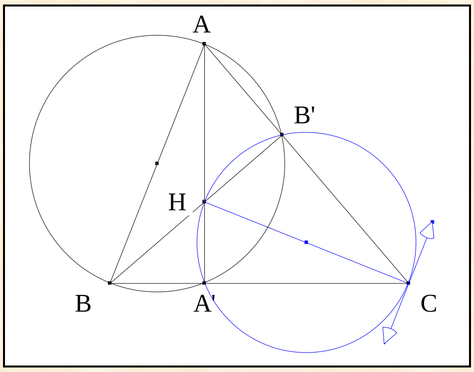
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	A', B'	les pieds des B, C-hauteurs de ABC
et	H	le point d'intersection de (AA') et (BB').

Donné : (CH) est la C-hauteur de ABC. [2]

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle de diamètre [AB] ; il passe par A' et B' ;
  2 le cercle de diamètre [CH] ; il passe par A' et B' ;
  et *Tc* la tangente à *2* en C.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A' et B', les moniennes (BA'C) et (AB'C), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (AB) // T_C ;
  par définition d'une tangente, $T_C \perp$ (CH) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AB) $\perp$ (CH).

- **Conclusion :** (CH) est la C-hauteur de ABC.

---

[2] Archimède (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.), *Scolies*, lemme **5**.
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas **5**.

Scolies : **(1)** ce résultat reste vrai lorsque le triangle est quelconque.

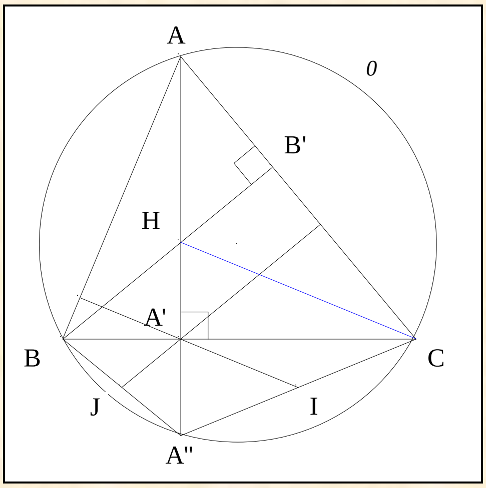
(2) Lorsque le triangle ABC est A-rectangle, A est l'orthocentre de ABC ;
lorsque ABC est acutangle, H est l'intérieur de ABC ;
lorsque ABC est obtusangle, H est l'extérieur de ABC.

(3) H est "l'orthocentre de ABC" et est répertorié sous X_4 dans la nomenclature d'ETC[3].

Énoncé traditionnel : les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Note historique : Euclide d'Alexandrie ignore le concept d'orthocentre dans ses *Éléments*, alors qu'Archimède[4] de Syracuse. en parle sous un autre nom dans le lemme 5.

I, J milieux resp. de [A"C] et [A"B]



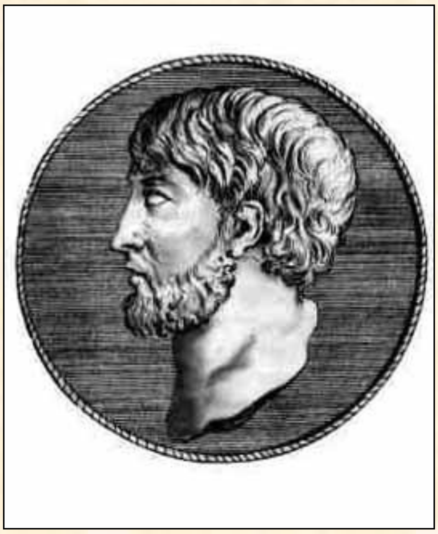
La démonstration d'Archimède a recours à un quadrilatère orthodiagonal et au petit théorème de Thalès.
Dick Tahta affirme que le lemme 12 est une source plus appropriée de l'orthocentre qui, autrefois, était appelé "point d'Archimède".

John Satterly[5] attribue la création du mot "orthocentre" à William Henry Besant et Norman Ferrers en 1865.
L'orthocentre est noté habituellement H, première lettre de "Höhenschnittpunkt" qui, en allemand, signifie "point de concours des hauteurs".

1.b. Une courte biographie d'Archimède de Syracuse

---

3 http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.
4 Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas **5**.
5 Satterly J., *Mathematical Gazette* **45** (1962) 51.


[6]

Il y avait plus d'imagination
dans la tête d'Archimède
que dans celle d'Homère [7] [8]

Archimède naquit vers 297 a. J.-C. en Sicile [9], dans la principale cité de cette île, Syracuse.
A cette époque, cette île était une riche colonie grecque. Son père Phidias était un astronome et c'est probablement avec lui qu'il commença à s'intéresser aux mathématiques.
D'après Plutarque[10], il était apparenté à Hiéron qui devint roi de cette ville en 269. Très probablement, le jeune Archimède alla étudier au Musée d'Alexandrie auprès des successeurs d'Euclide, puis revint à Syracuse pour diriger des travaux portuaires, navals et militaires.
Son oeuvre est la plus importante de l'Antiquité car elle fait de lui un précurseur du calcul infinitésimal. Appliquant avec virtuosité la méthode d'exhaustion ou d'épuisement due à Eudoxe[11] de Cnide, il réussit à calculer l'aire d'un segment de parabole ainsi que le volume de la sphère.
Avec Archimède, la Géométrie élémentaire telle que nous la concevons aujourd'hui, est définitivement constituée.
La fin tragique de cet illustre mathématicien et physicien, nous est parvenue au travers de l'histoire de Marcellus, général romain, qui pénétra par surprise dans la ville de Syracuse lors de la seconde guerre Puniques. Polybe[12], Tite-Live[13] et Plutarque rapportèrent que durant le siège qui dura trois ans, Archimède inventa divers systèmes mécaniques subtiles et ingénieux qui auraient élever des vaisseaux ennemis dans les airs pour les laisser ensuite retomber sur les rochers où ils se brisaient, ou bien incendier d'autres vaisseaux avec des miroirs ardents. Lors de la prise de la ville, l'histoire raconte qu'Archimède étudiait un problème au moyen de lignes tracées sur du sable comme il avait l'habitude de le faire lorsqu'un soldat lui ordonna de le suivre. Absorbé dans ses réflexions, il n'entendit point cette injonction. Irrité, la brute le transperça de son glaive. Il avait en cette année 212 avant notre ère, 75 ans et allait devenir une légende.
Affligé par la mort d'Archimède, Marcellus fit graver sur son tombeau une sphère inscrite dans un cylindre pour rappeler l'un[14] de ses plus beaux résultats, accompagné de six vers grecs.
En 75 av. J.-C., Cicéron alors questeur en Sicile, retrouvait le tombeau du grand géomètre, enfoui sous les ronces et les épines et le ramenait une seconde fois, comme il le dit, à la lumière.

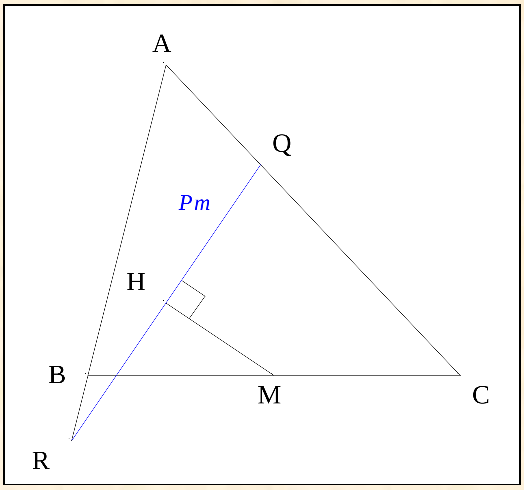
---

[6] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/A.html.
[7] Poète épique grec qui selon Hérodote aurait vécu v. 850 av; J.-C..
[8] Voltaire, philosophe français du XVIIIe siècle.
[9] Les Phéniciens de Carthage ont colonisé la Sicile au VIIIe siècle av. J.C., suivit très rapidement des grecs qui établissent sur la côte est, des comptoirs et la peuplent au IV-Ve siècle. Syracuse fondée par Corinthe en 734 est la principale cité de l'île sur laquelle les grecs exercent leur hégémonie.
[10] Écrivain grec du premier siècle.
[11] Astronome et mathématicien grec du IVe siècle avant notre ère.
[12] Historien grec du IIe siècle avant notre ère.
[13] Historien latin du Ier siècle.
[14] Le calcul du volume d'une sphère.

2. Un exercice d'Oleg Faynsteyn

VISION

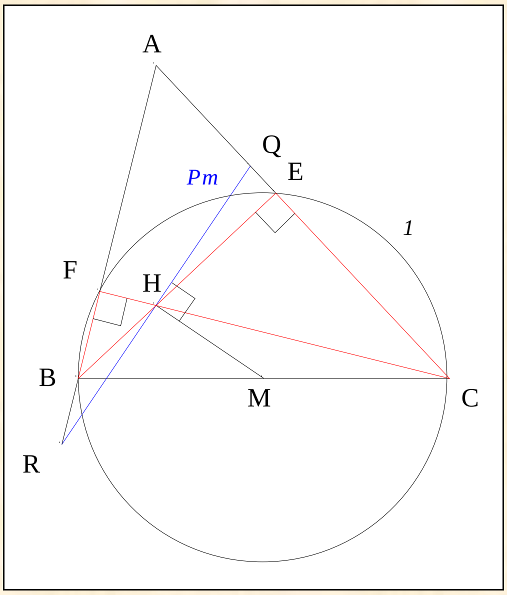
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	M	le milieu de [BC],
	Pm	la perpendiculaire à (MH) en H
et	Q, R	les intersection de *Pm* resp. avec (AC), (AB).

Donné : H est le milieu de [QR].[15]

VISUALISATION



- Notons E, F les pieds des B, C-hauteurs de ABC
  et *1* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par E et F.

[15] Faynsteyn O., *Elemente der Mathematik*, problème **1180**.

- **Conclusion :** d'après "Le papillon d'Eves" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué au quadrilatère cyclique BECF, croisé en H, H est le milieu de [QR].

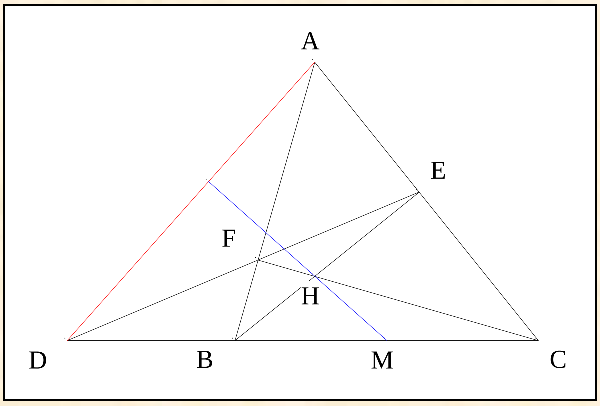
Commentaire : la solution[16] proposée dans la revue suisse *Elemente der Mathematik* est trigonométrique.

Note historique : Oleg Faynsteyn est originaire de Leipzig (Allemagne).
Rappelons que cette question avait déjà été posée aux Olympiades Mathématiques de Saint-Petersbourg (Russie) en 1995-96.

3. Un exercice de Georges Papelier

VISION

Figure :



Traits :

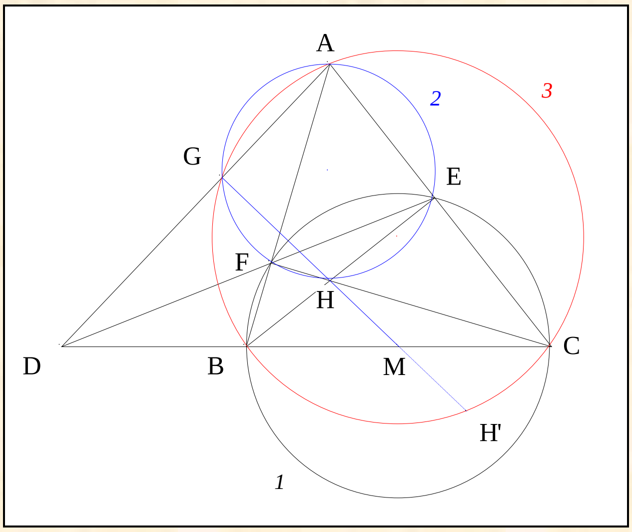
	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	E, F	les pieds des B, C-hauteurs de ABC,
	D	le point d'intersection de (EF) et (BC),
et	M	un point de [BC].

Donné : M est le milieu de [BC] *si, et seulement si,* (MH) et (AD) sont perpendiculaires.[17]

VISUALISATION NÉCESSAIRE

[16] *Elemente der Mathematik*, **1** (2003) 58.

[17] Papelier G., *Exercices de Géométrie Moderne*, Pôles et polaires n° **34** (1927) 24, Eds J. Gabay (1996) ;
MH perpendicular at, *Mathlinks* du 26/01/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=72094



- Notons | 1 | le cercle de diamètre [BC] ; il passe par E et F ;
  | 2 | le cercle de diamètre [AH] ; il passe par E et F ;
  | 3 | le cercle circonscrit à ABC,
  | H' | le symétrique de H par rapport à M
  et | G | le second point d'intersection de *2* et *3*.

Notons *1* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par E et F ;
2 le cercle de diamètre [AH] ; il passe par E et F ;
3 le cercle circonscrit à ABC,
H' le symétrique de H par rapport à M
et G le second point d'intersection de *2* et *3*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre" (Cf. Annexe **2**), *3* passe par H'.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème des trois cordes" [18], (AG) passe par D.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  (1) A et H étant deux points diamétraux de *2*, (GH) $\perp$ (GA) ;
  (2) A et H' étant deux points diamétraux de *3*, (GH') $\perp$ (GA).

- Sachant que l'on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à une droite en un point de celle-ci, (GH) et (GH') sont confondues ; en conséquence, G, H et H' sont alignés.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre" (Cf. Annexe **2**), H, M et H' sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, G, M, H et H' sont alignés ;
  en conséquence, (MH) $\perp$ (GA).

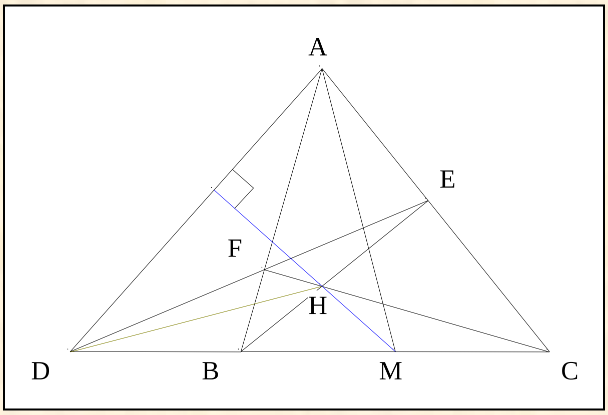
- **Conclusion :** (MH) est perpendiculaire à (AD).

Note historique : ce résultat évoqué par Georges Papelier a fait l'objet d'un problème[19] proposé aux Olympiades russes de 1992 et de Taiwan en 2000 ; il apparaît comme un cas particulier d'un problème de la 26-ième OIM de 1982.

Commentaire : la preuve de Georges Papelier a recours aux pôles et polaires.

Scolies :

[18] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
[19] Soulami Tarik Belhaj, *Les Olympiades de mathématiques*, Olympiades russes de 1992, Ellipses (1999) n° **24**, p. 256.

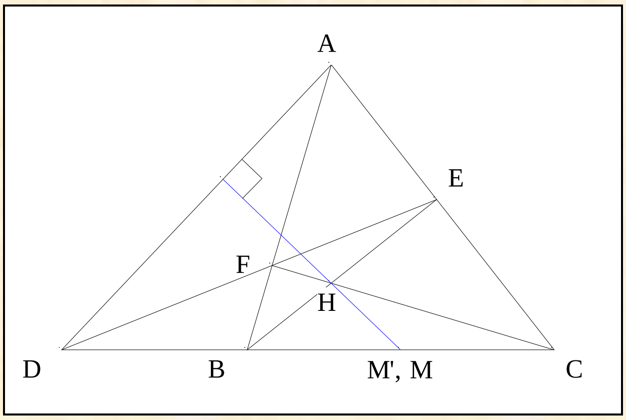


(1) H est l'orthocentre du triangle ADM

(2) (DH) est perpendiculaire à (AM).[20]

Commentaire : ce résultat suggère "une autre équivalence" à venir.

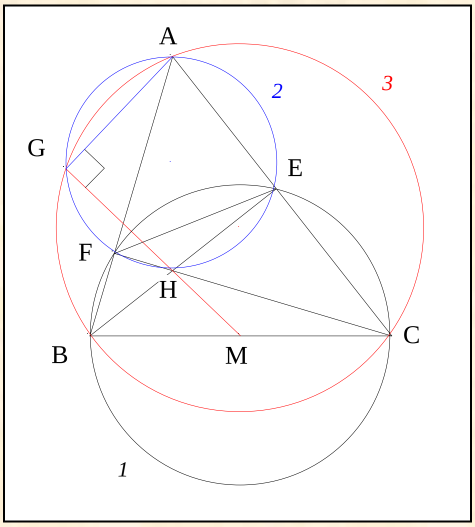
VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que M n'est pas le milieu de [BC].
- Notons M' le milieu de [BC].
- D'après la visualisation nécessaire, (M'H) ⊥ (AD) ;
  par hypothèse, (AD) ⊥ (MH) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (M'H) // (MH) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (M'H) = (MH) ;
  en conséquence, M' et M sont confondus ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** M est le milieu de [BC].

Scolie : une observation pour une généralisation

[20] Perpendicular, Taiwan MO 2000, Indian TST 2011, *Mathlinks* du 22/04/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1882542
From Geometry unbound, *Mathlinks* du 19/07/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=419069

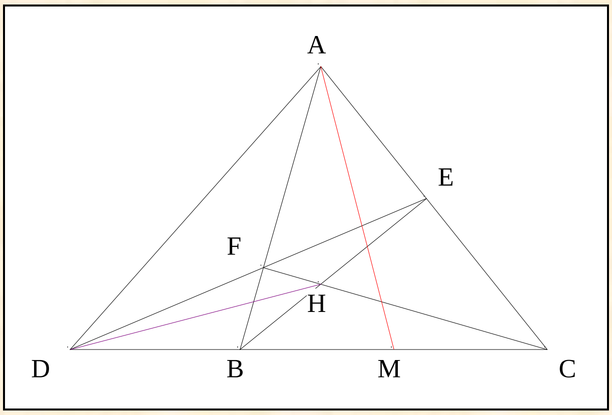


- **Conclusion :** la droite joignant
  le centre M de *1* au point d'intersection H des diagonales du quadrilatère cyclique BCEF
  est perpendiculaire
  à la corde commune des cercle *2* et *3*. [21]

4. Une autre équivalence

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	E, F	les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC,
	D	le point d'intersection de (EF) et (BC)
et	M	un point de [BC].

Donné : M est le milieu de [BC] *si, et seulement si,* (DH) est perpendiculaire à (AM).

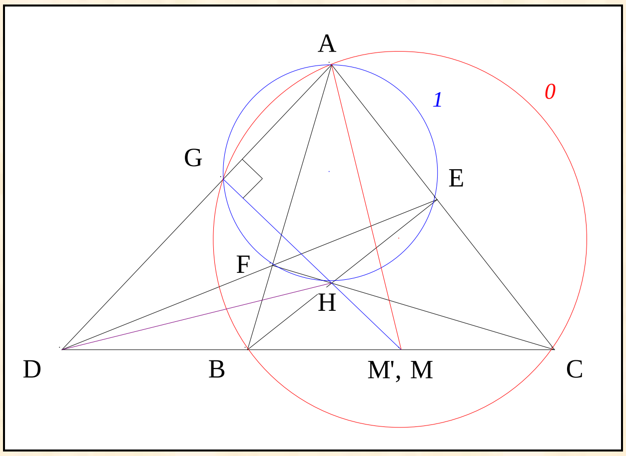
[21] intersection od altitudes, circum circle, midpoint of a side, *Mathlinks* du 20/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=378735
Lopes L., S, H, Ma are collinear, Message *Hyacinthos* # **20014** du 13/05/2011 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- **Conclusion :** d'après **A. 3.** Un excercice de G. Papelier, scolie **2**, (DH) est perpendiculaire à (AM).

Commentaire : ce résultat qui a été proposé aux O.M. de Taiwan en 2000, apparaît comme un cas particulier d'un problème de la 26-ième O.M. russe de 1982.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que M n'est pas le milieu de [BC].

- Notons M' le milieu de [BC].

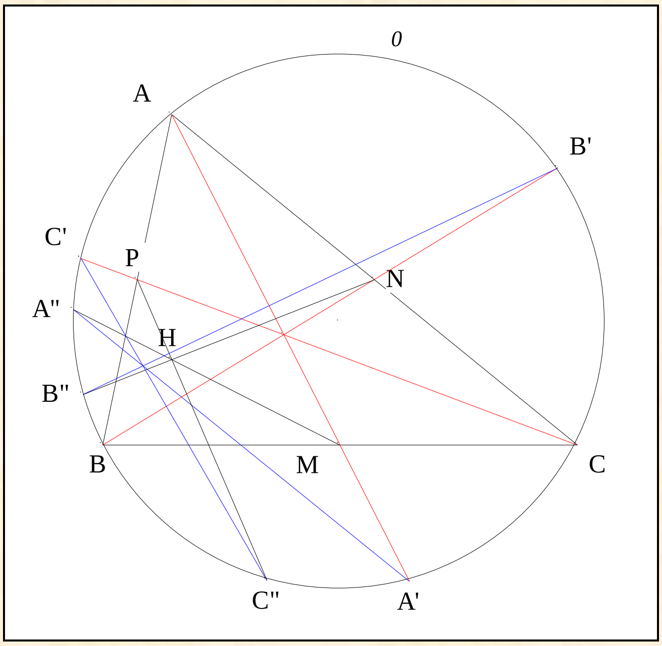
- D'après la visualisation nécessaire, (AM') ⊥ (DH) ;
  par hypothèse, (DH) ⊥ (AM) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AM') // (AM) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AM') = (AM) ;
  en conséquence, M' et M sont confondus ce qui est contradictoire.

- **Conclusion :** M est le milieu de [BC].

5. Trois droites concourantes

VISION

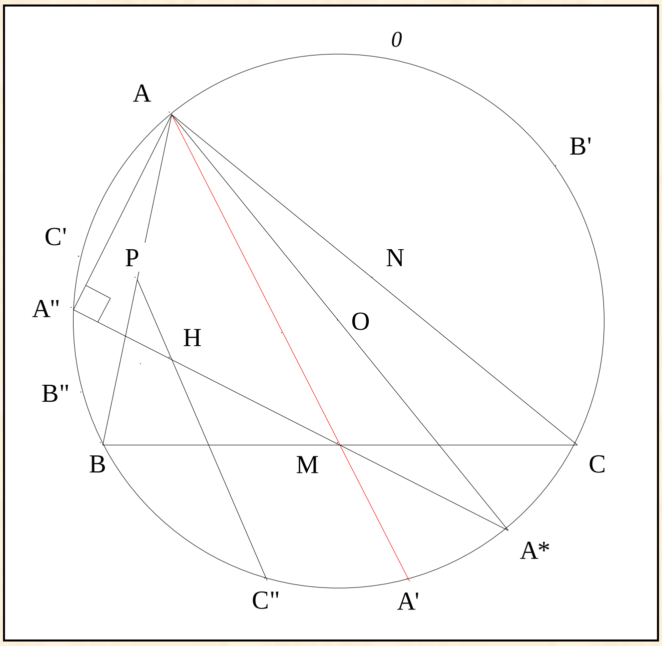
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
M, N, P les milieux resp. de [BC], [CA], [AB],
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A', B', C' les circumtraces resp. des A, B, C-médianes de ABC avec *0*
et A", B", C" les seconds point d'intersection resp. de (MH), (NH), (PH) avec *0*.

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.[22]

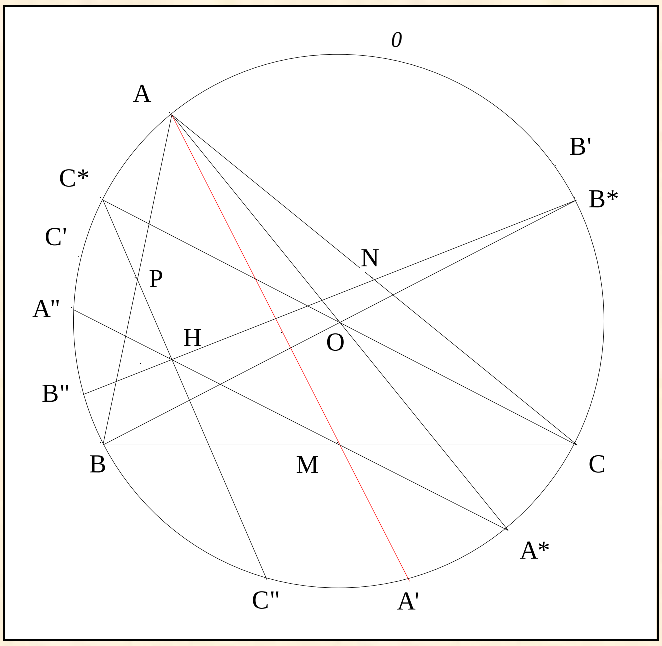
VISUALISATION



- D'après A. 3. Un excercice de Papelier, (AA") ⊥ (A"HM).
- Notons A* l'antipôle de A relativement à *0*.

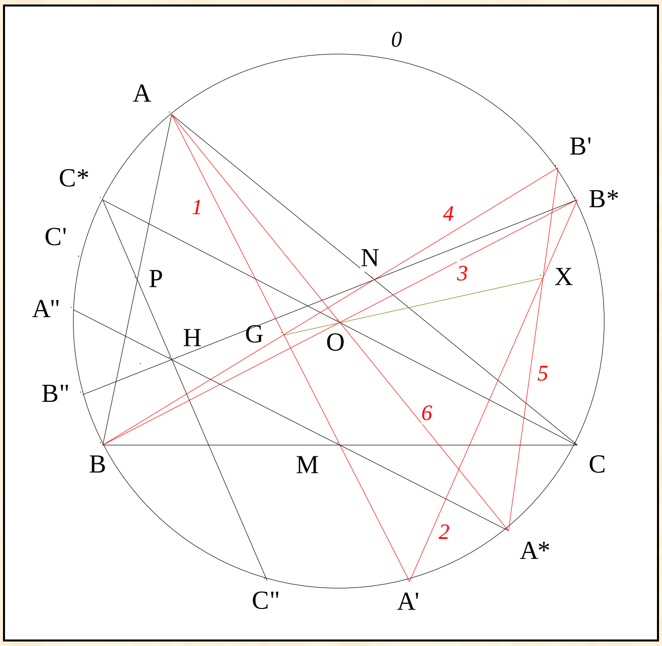
[22] Concurent 2, *Mathlinks* du 16/06/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=353170.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A"HM) passe par A*.



- Notons B*, C* les antipôles resp. de B, C relativement à *0*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B"HN) passe par B*
  (C"HP) passe par C*.



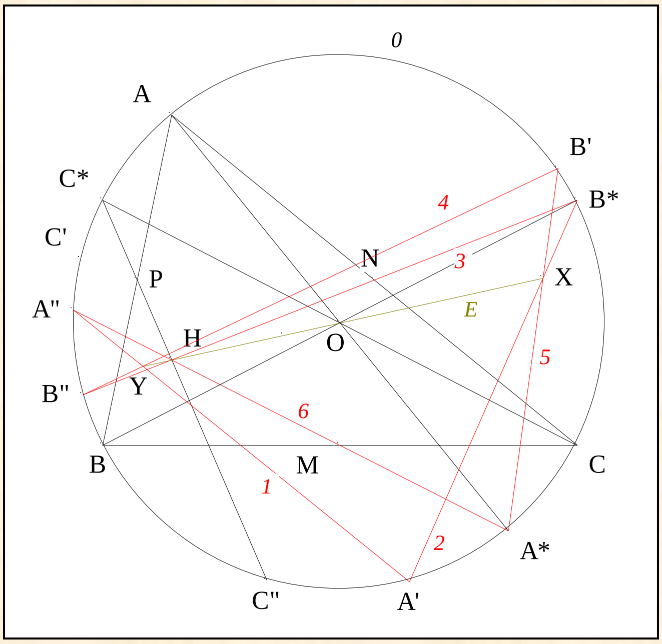
- Notons G le point médian de ABC,
  X le point d'intersection de (A'B*) et (B'A*),
  et *E* la droite d'Euler de ABC.

- **Scolie :** *E* = (HGO).[23]

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **3**),

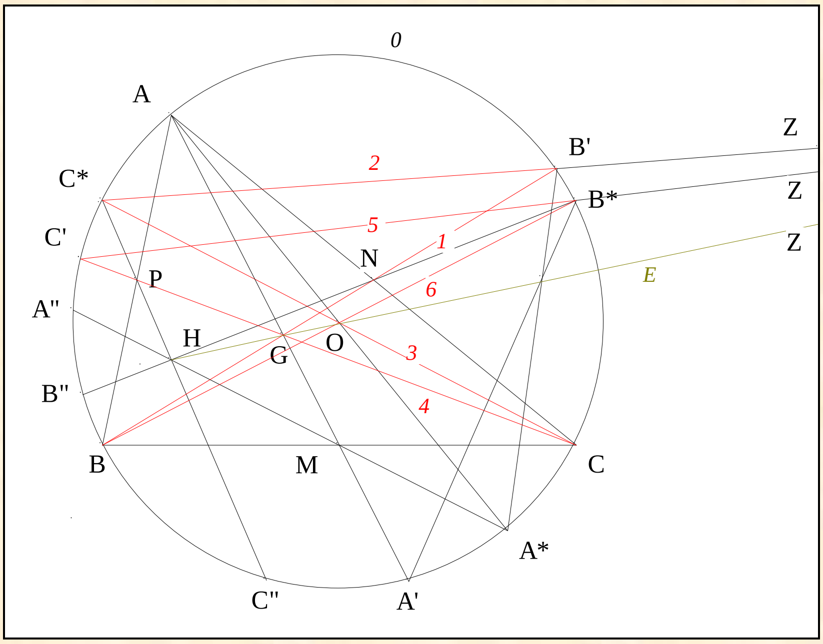
[23] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. **2** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

appliqué à l'hexagone cyclique AA'B*BB'A*A, X est sur *E*.



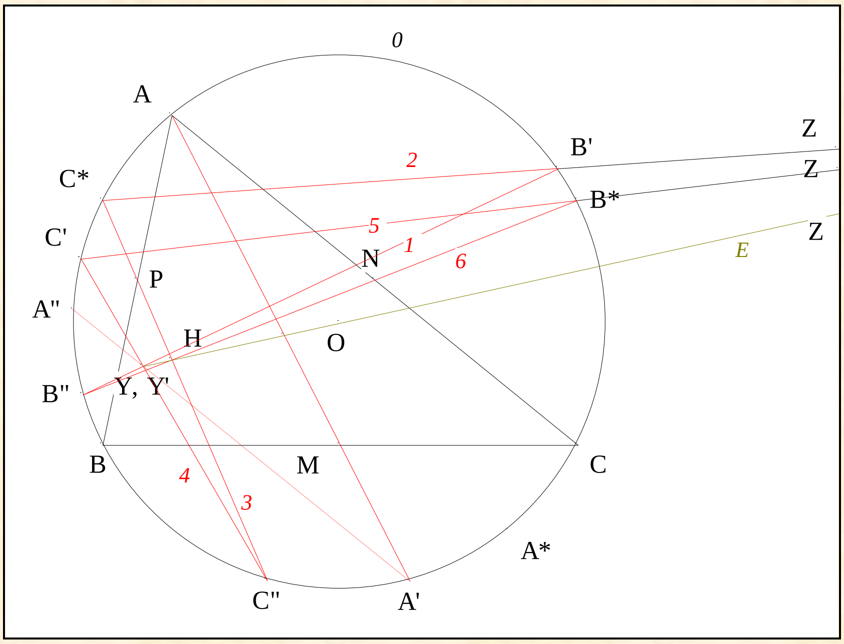
- Notons Y le point d'intersection de (A'A") et (B'B").

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **3**), appliqué à l'hexagone cyclique A"A'B*B"B'A*A", Y est sur *E*.



- Notons Z le point d'intersection de (B'C*) et (C'B*).

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **3**), appliqué à l'hexagone cyclique BB'C*CC'B*B, Z est sur *E*.



- Notons Y' le point d'intersection de (A'A") et (B'B").

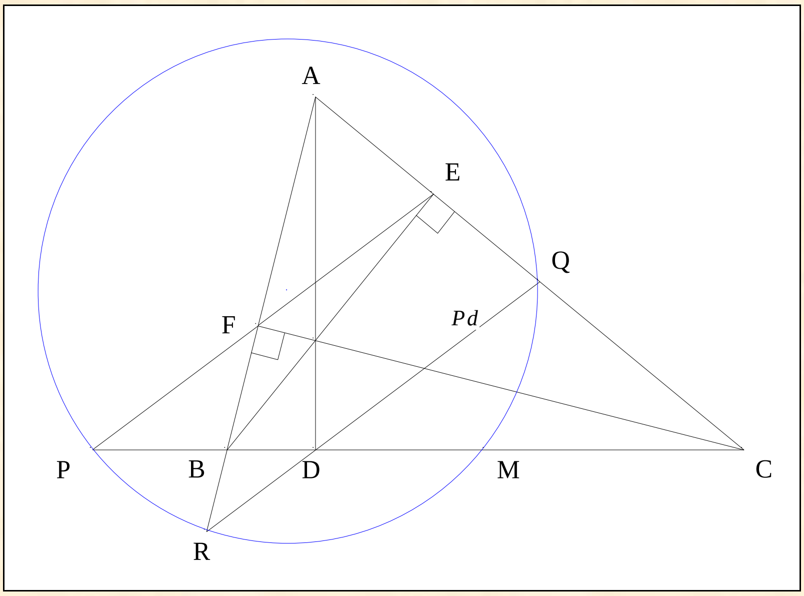
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **3**),
  appliqué à l'hexagone cyclique B"B'C*C"C'B*B", Y' est sur *E* ;
  en conséquence, Y et Y' sont confondus.

- **Conclusion :** (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes sur *E*.

6. O.M. Iran (1998)

VISION

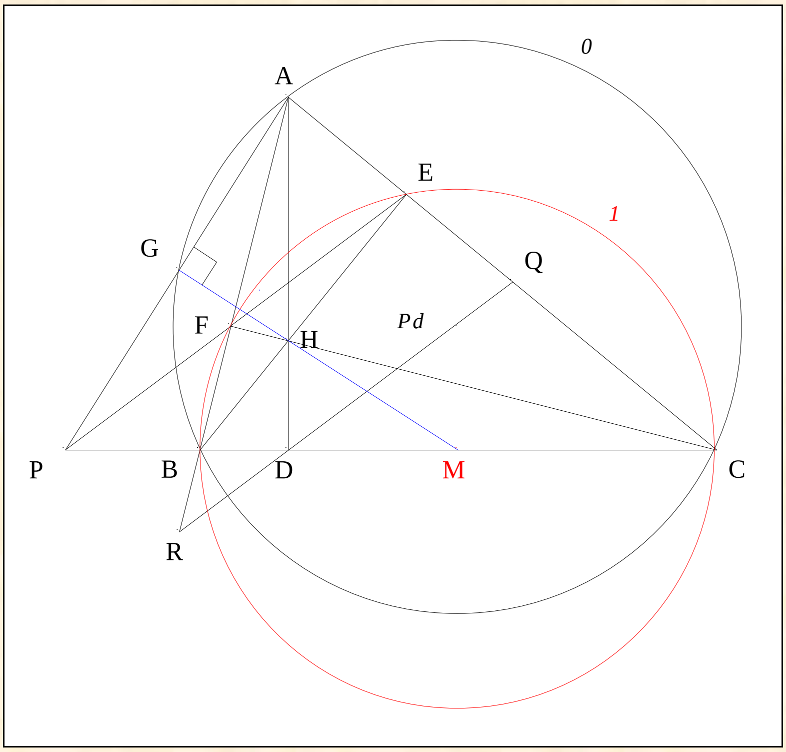
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
E, F les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC,
P le point d'intersection de (EF) et (BC)
Pd une parallèle à (EF) passant par D,
Q, R les points d'intersection de *Pd* resp. avec (AC), (AB)
et M le milieu de [BC]

Donné : P, Q, R et M sont cocycliques.[24]

VISUALISATION



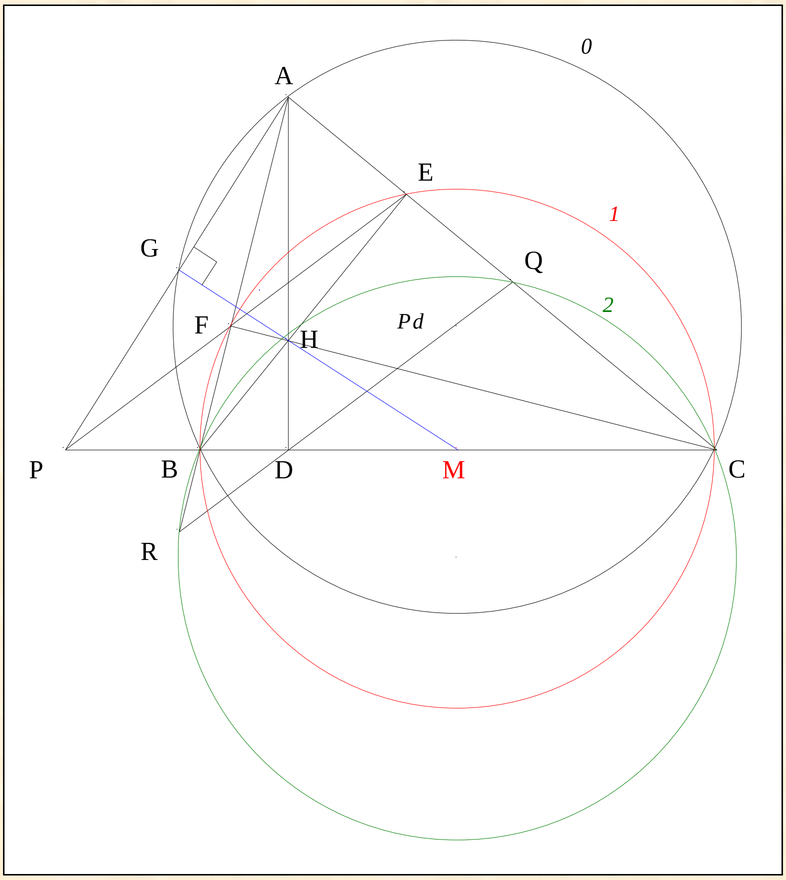
- Notons H l'orthocentre de ABC,
  0 le cercle circonscrit à ABC
  et G le second point d'intersection de (AP) avec *0*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", B, F, E et C sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle de centre M.

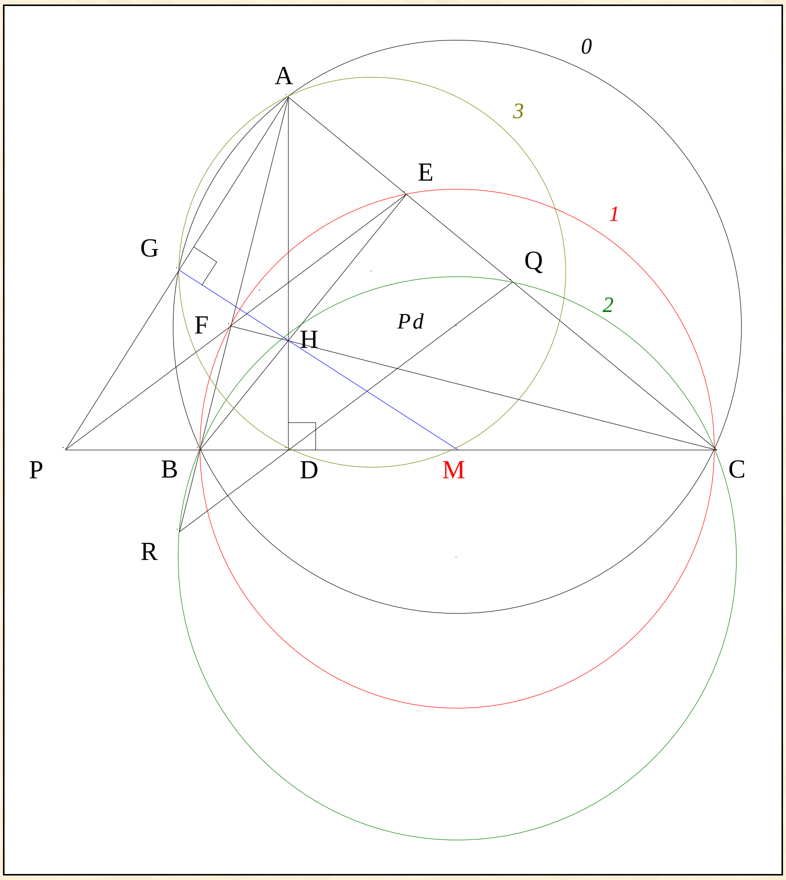
- D'après **A. 3.** Un excercice de Papelier, (MHG) ⊥ (AGP).

[24] Hubei Math Contest (1994) ; O.M. Iran (1998).

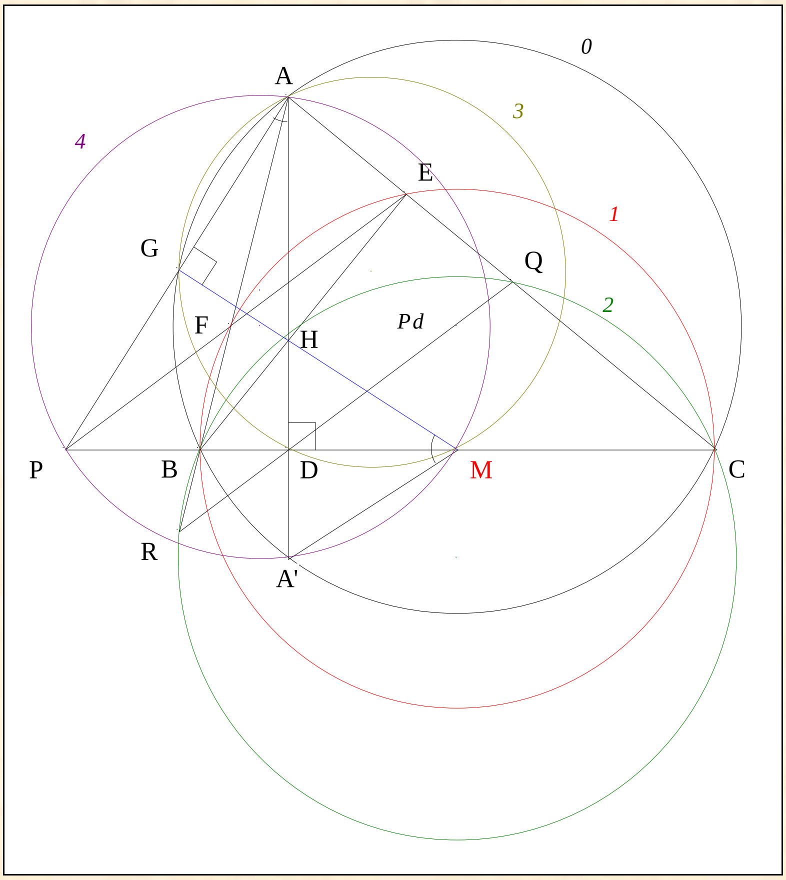


- Le cercle *1*, les points de base B et C, les moniennes (FBR) et (ECQ), les parallèles (EF) et (RQ), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, B, C, R, Q sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", A, G, D et M sont cocycliques.
- Notons *3* ce cercle.



- Notons A' le second point d'intersection de (AH) avec *0*.

- Une chasse angulaire à 2.π près :
  d'après le théorème de angle côtés perpendiculaires, <PAA' = <HMB ;
  d'après Carnot "symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 4), <HMB = <PMA' ;
  en conséquence, P, A, M et A' sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle
  et P_i(X) la puissance du point X relativement au cercle i (i = *0*, *2*, *4*)

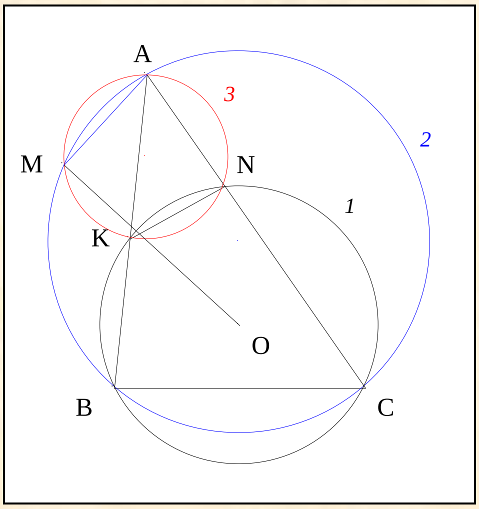
- Un chasse de "puissance" : $P_4(D) = \overline{DP}.\overline{DM} = \overline{DA}.\overline{DA'}$;
  $P_0(D) = \overline{DA}.\overline{DA'} = \overline{DB}.\overline{DC}$;
  $P_2(D) = \overline{DB}.\overline{DC} = \overline{DQ}.\overline{DR}$;
  par transitivité de la relation =, $\overline{DP}.\overline{DM} = \overline{DQ}.\overline{DR}$.

- **Conclusion :** P, Q, R et M sont cocycliques.

7. Problème 5 de la 26-ème O.I.M. (1985)

VISION

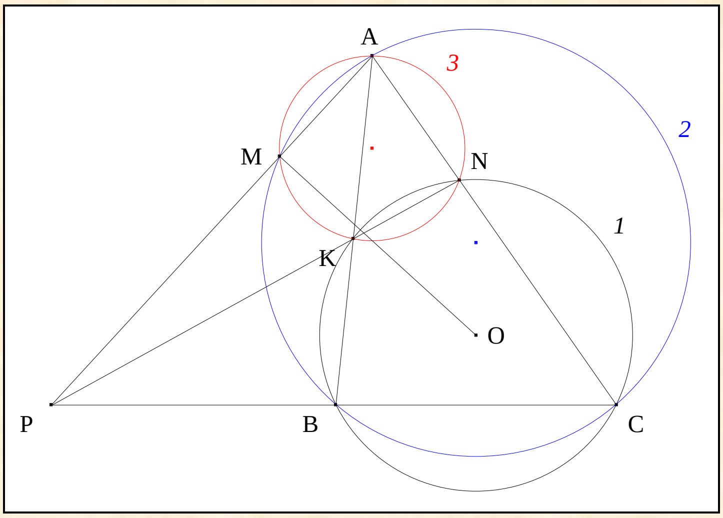
Figure :



Traits : ABC un triangle non isocèle,
1 un cercle passant par B et C,
O le centre de *1*,
K, N les seconds points d'intersection de *1* resp. avec [AB], [AC],
2, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles ABC, AKN
et M le second point d'intersection de *2* et *3*.

Donné : (OM) est perpendiculaire à (AM).[25]

VISUALISATION



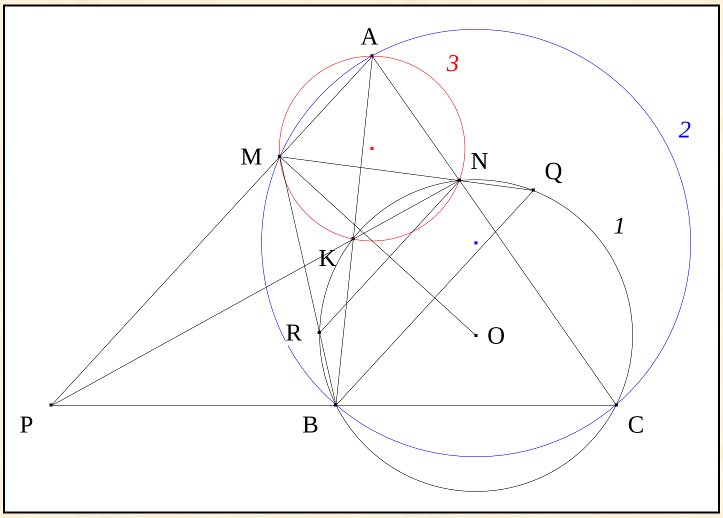
- Notons P le point d'intersection de (KN) et (BC).

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [26], (AM) passe par P.

---

[25] Problème **5** de la 26-ème O.I.M. (1985) ;
Circle center O passes through the verices A and C, *Mathlinks* du 11/11/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=60787&start=0.

[26] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



- Notons Q, R les seconds points d'intersection resp. de (MN), (MB) avec *1*.

- Les cercles *1* et *3*, les points de base K et N, les moniennes (BKA) et (QNM), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BQ) // (AM).

- Les cercles *2* et *1*, les points de base B et C, les moniennes (ACN) et (MBR), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AM) // (NR) ;
  par transitivité de la relation //, (BQ) // (NR).

- Le trapèze BQNR étant inscriptible dans le cercle *1*, est isocèle ;
  en conséquence, le triangle MBQ et M-isocèle

- D'après le théorème de la médiatrice, (OM) ⊥ (BQ) ;
  nous avons : (BQ) // (AM) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OM) ⊥ (AM).

- **Conclusion :** (OM) est perpendiculaire à (AM).

Scolies : **(1)** M est le point de Miquel-Wallace de ABC et de la ménélienne (PNK)

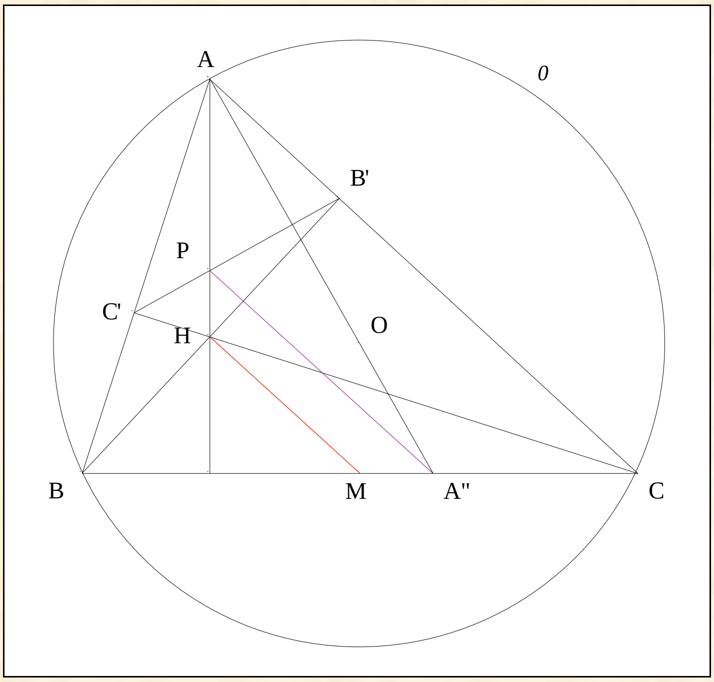
(2) Les diagonales (BN) et (QR) se coupent sur (AO).[27]

8. Une parallèle à (MH)

VISION

Figure :

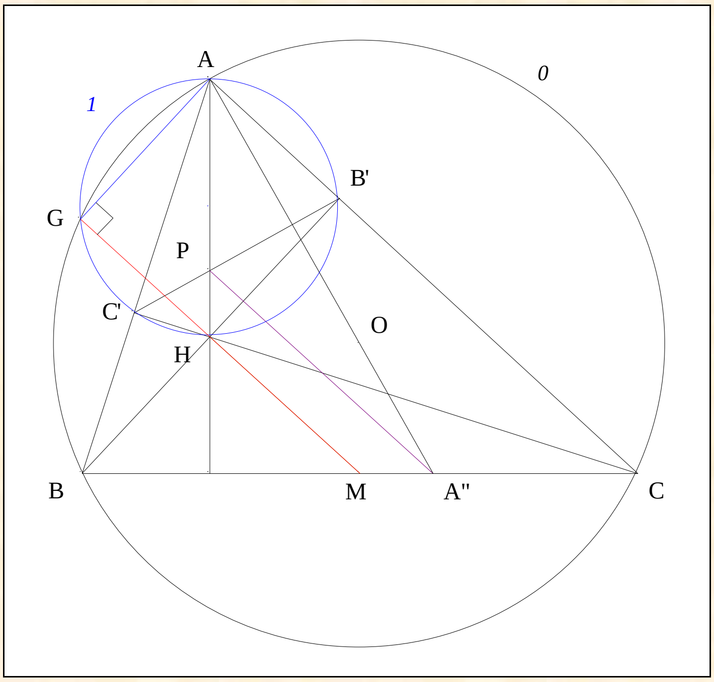
[27] Trapèze complet.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
O le centre de *à*,
H l'orthocentre de ABC,
B', C' les pieds resp. de B, C-hauteurs de ABC,
P le point d'interstion de (AH) et (B'C')
et A" le point d'intersection de (AO) et (BC).

Donné : (PA") est parallèle à (MH).[28]

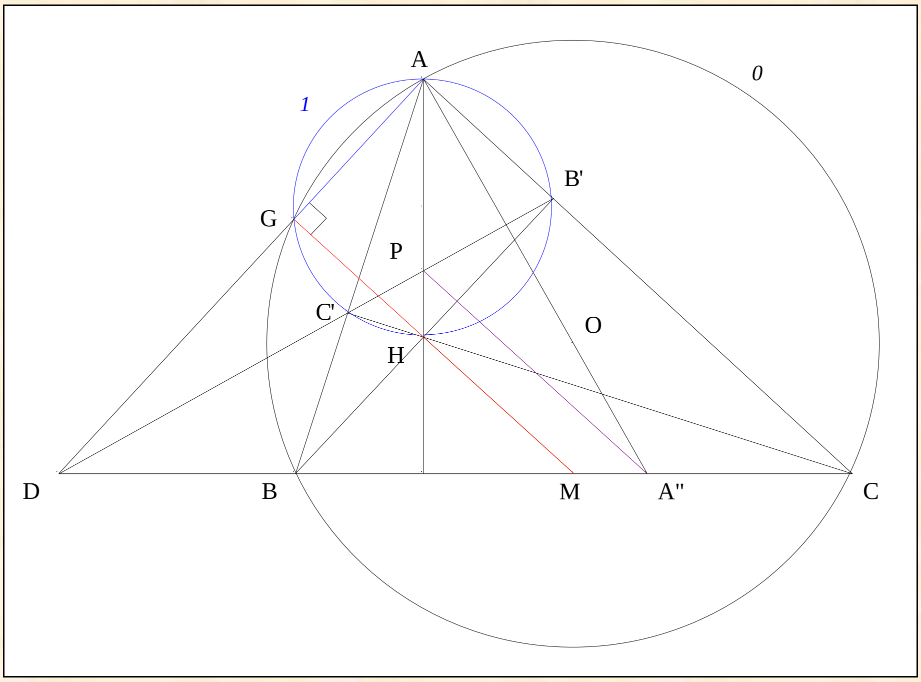
VISION



[28] Ayme J.-L., Two parallèles, *Mathlinks* du /06/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=352935.

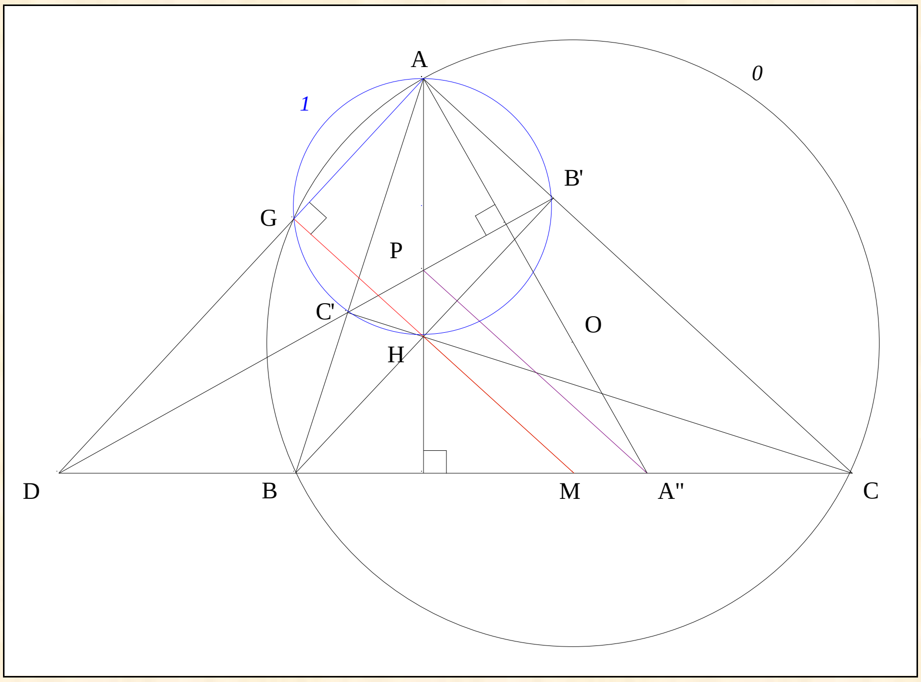
- Notons 1 le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B' et C' ;
  et G le second point d'intersection de *1* et *0*.

- D'après **A. 3.** Un exercice de Papelier, (MHG) ⊥ (AG).



- Notons D le point d'intersection de (AG) et (BC).

- D'après **A. 3.** Un exercice de Papelier, (B'C') passe par D.



- D'après Nagel "Un rayon"[29], (B'C') ⊥ (AO).

[29] Ayme J.-L., Cinq théorème de Christian von Nagel, vol.**3**, p.19-20 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

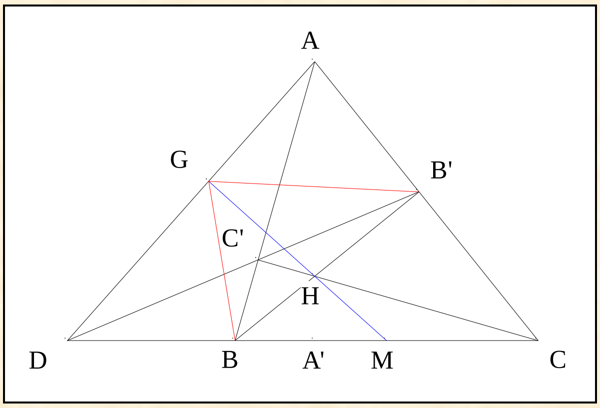
- Par définition, P est l'orthocentre du triangle AA"D ;
  en conséquence, (AGD) ⊥ (A"P) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (MHG) // (A"P).

- **Conclusion :** (PA") est parallèle à (MH).

9. (MH) comme bissectrice

VISION

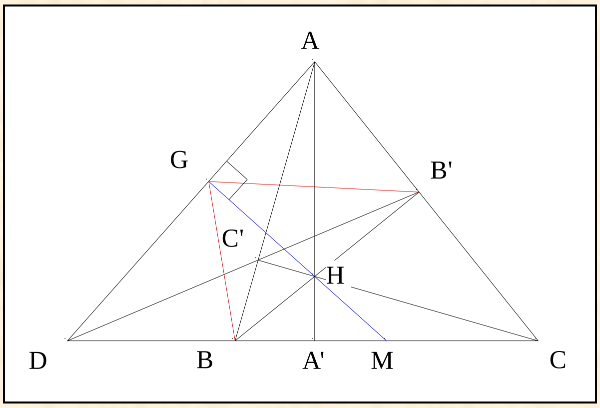
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
D le point d'intersection de (EF) et (BC),
M un point de [BC]
et G le point d'intersection de (MH) et (AD).

Donné : (GHM) est la G-bissectrice intérieure du triangle GBB'.[30]

VISUALISATION

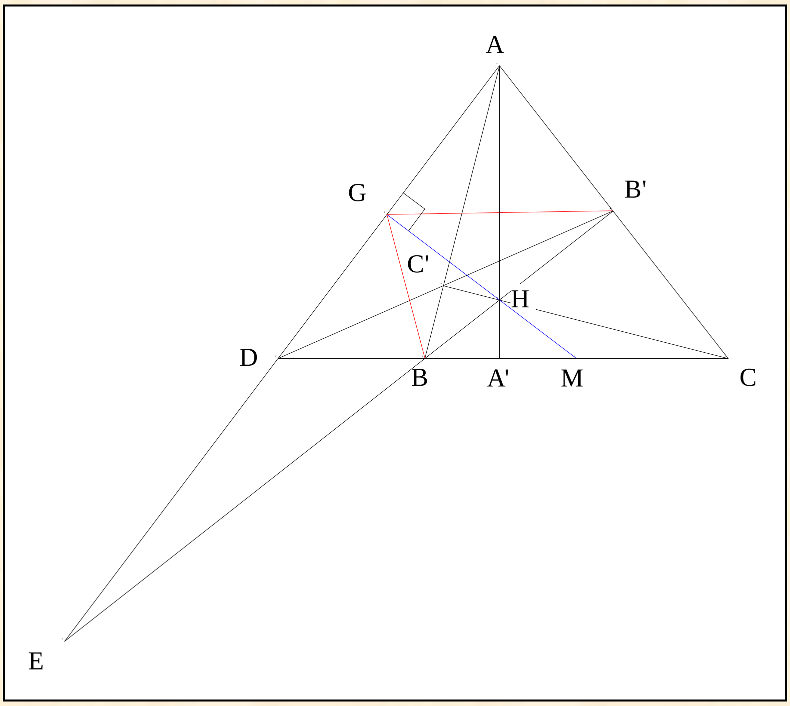


- D'après A. 3. Un excercice de Papelier, (MHG) ⊥ (AGD).

---

[30] Kazakhstan NO Geometry, *Mathlinks* du 09/05/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=275846.

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe **5**) [31],
  appliqué au quadrilatère AC'HB', la quaterne (B, C, A', D) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (A ; B, C, A', D) est harmonique.



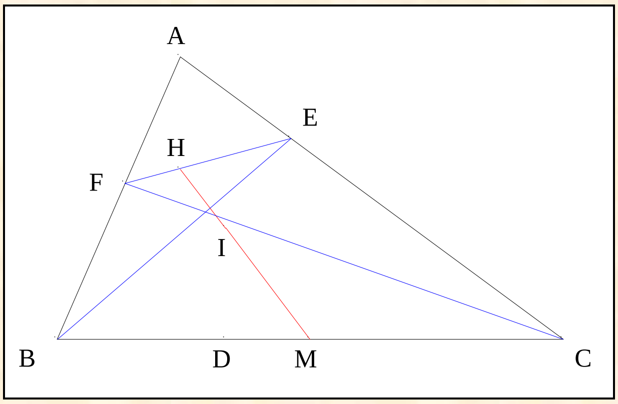
- En considérant la transversale (BB')
  relativement au pinceau précédent, la quaterne (B, B', H, E) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (G ; B, B', H, E) est harmonique.

- **Conclusion :** le pinceau précédent ayant deux rayons perpendiculaires (GH) et (GE),
  ceux-ci sont resp. la G-bissectrice intérieure, extérieure du triangle GBB'

10. Un problème de *KöMal*

VISION

Figure :

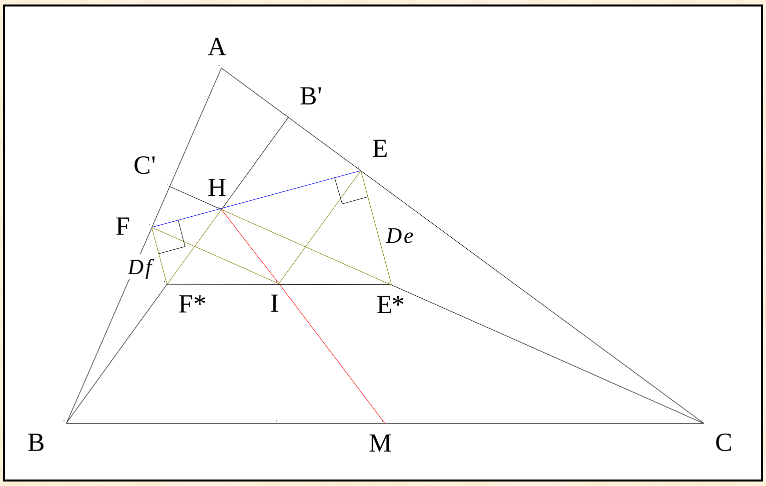


[31] Pappus, *Collections* **υναγωγ΄η,** Livre **VII**, proposition 131.

Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	M	le milieu de [BC]
et	H	l'orthocentre de ABC.

Donné : *si,* H est sur (EF) *alors,* M, I et H sont alignés.[32]

VISUALISATION



- Notons B', C' les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC,
  De , *Df* les perpendiculaires à (EF) resp. en E, F
  et D*, F* les points d'intersection de *Df* et (BB'), de *De* et (CC').

- D'après Goormaghtigh "Une parallèle à (BC)" (Cf. Appendice **1**) , (E*F*) // (BC).

- D'après Pappus "Le petit théorème"[33]
  appliqué à l'hexagone FIEE*HF*F, E*, I et F* sont alignés.

- D'après le théorème de la médiatrice, (AI) est la médiatrice du segment [EF] ;
  en conséquence, (AI) est l'axe médian de la bande de frontières *De* et *Df* ;
  d'après l'axiome de passage IIIb, I est le milieu de [E*F*].

- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" (Cf. Annexe **6**)
  appliqué au trapèze BCE*F*, M, I et H sont alignés.

Note historique : il y a plus de cent ans que Daniel Arany, professeur au lycée de Györ (Hongrie) décida de fonder un journal de Mathématiques destinée au élèves du secondaire. Le premier journal intitulé *Kvant* parut le 1er janvier 1894. Depuis plus de 40 ans, tous les nouveaux problèmes apparaissent en Anglais et en Hongrois.

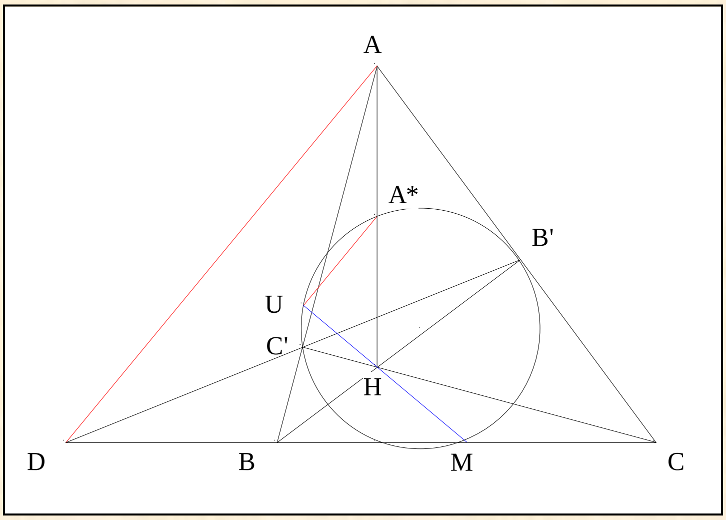
Commentaire : une réciproque de ce résultat est laissée aux soins du lecteur.

11. Un point remarquable sur (MH)

32 *Kvant* est une revue hongroise de mathématiques.
33 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, vol.**6** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

VISION

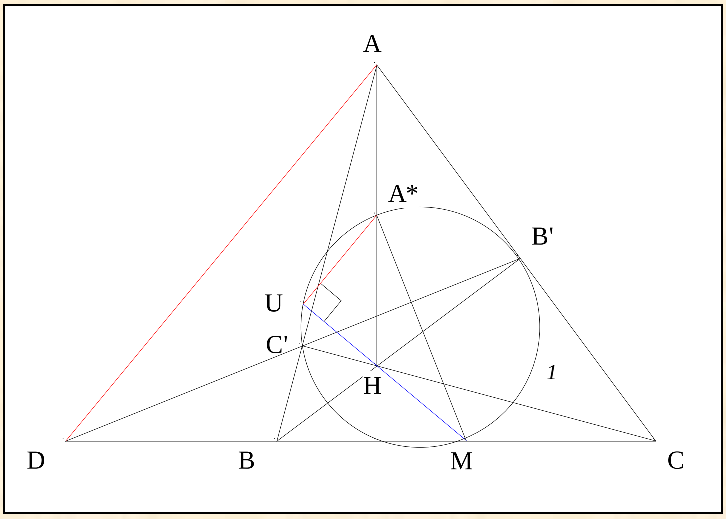
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	B', C'	les pieds des B, C-perpendiculaires de ABC,
	D	le point d'intersection de (B'C') et (BC),
	M	le milieu de [BC],
	1	le cercle d'Euler de ABC,
	A*	le A-point d'Euler de ABC
et	U	le second point d'intersection de la parallèle à (AD) passant par A* avec *1*

Donné : M, H et U sont alignés. [34]

VISUALISATION



- D'après **A. 3.** Un exercice de Papelier, (MH) ⊥ (AD) ;
  par hypothèse, (AD) // (A*U) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (MH) ⊥ (A*U).

[34] Ayme J.-L., Line MH, *Mathlinks* du 12/03/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=337718&p=1807327&hilit=line+MH#p1807327.

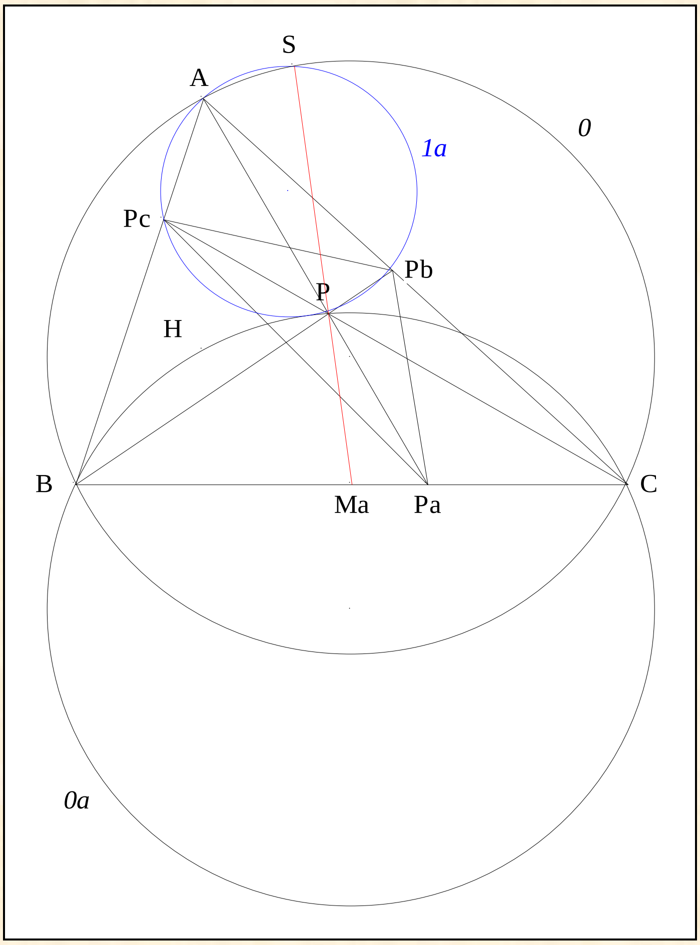
- **Scolie :** A* est l'antipôle de M relativement à *1*.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (MH) passe par U.
- **Conclusion :** M, H et U sont alignés.

Commentaire : ce résultat de l'auteur a été utilisé dans l'article "A new point on the Euler line"[35] initialisé par Yakub Aliyev.

12. Une généralisation : trois points alignés

VISION

Figure :



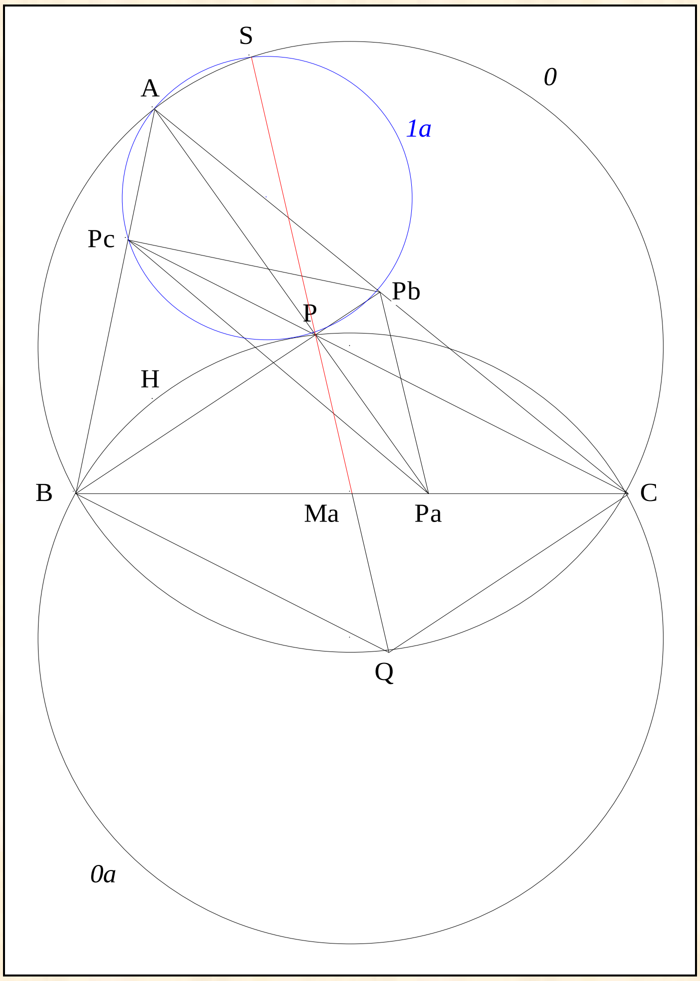
Traits : ABC un triangle acutangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
H l'orthocentre de ABC,
0a le cercle passant par H, B, C,
P un point de *0a*,
PaPbPc le triangle P-cévien de ABC,

[35] Ayme J.-L., A new point on Euler line, vol.**5**, p.8-9 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

	1a	le cercle passant par A, Pb, Pc,
	S	le second point d'intersection de *1a* et *0*,
et	Ma	le milieu de [BC].

Donné : P, S et Ma sont alignés. [36]

VISUALISATION



- Notons Q le second point d'intersection de (SP) avec *0*.

- **Scolies :** **(1)** S, P et Q sont alignés
  (2) Par une chasse angulaire, nous montrerions que *1a* passe par P.

- Les cercles *0* et *0a*, les points de base A et S, les moniennes (CAPb) et (QSP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (CQ) // (PbP).

- Les cercles *0* et *0a*, les points de base A et S, les moniennes (BAPc) et (QSP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BQ) // (PcP).

- Le quadrilatère PBQC ayant ses côtés opposés deux à deux parallèles, est un parallélogramme ; en conséquence, ses diagonales [BC] et [PQ] se coupent en leur milieu Ma.

- **Scolie :** P, Ma et Q sont alignés.

---

[36] Lopes L., S, H, Ma are collinear, Message *Hyacinthos* # **20014** du 13/05/2011 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

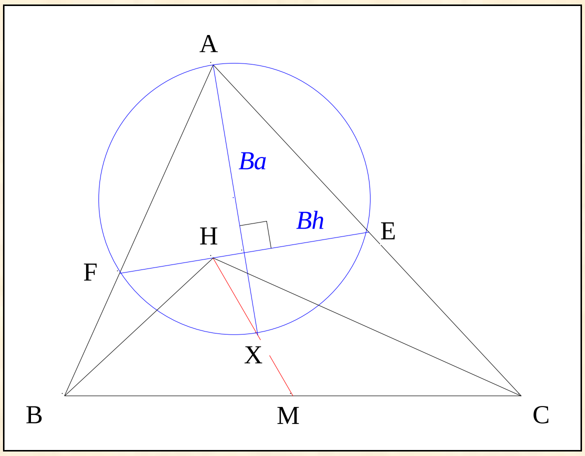
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, P, S et Ma sont alignés

B. LE POINT X

4. 26-ième Olympiades Mathématiques de Russie (2000)

VISION

Figure :

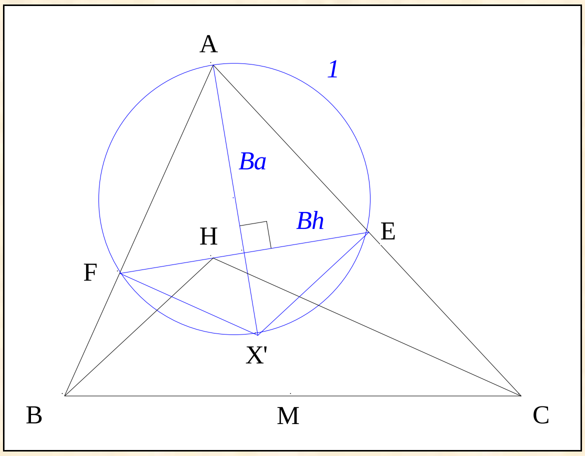


Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
M le milieu de [BC],
Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,
Bh la H-bissectrice extérieure du triangle HBC,
E, F les points d'intersection de *Bh* resp. avec (AC), (AB)
et X le point d'intersection de *Ba* et (MH).

Donné : A, F, X et E sont cocycliques.[37]

VISUALISATION [38]

[37] 26-ième Olympiades Mathématiques de Russie (2000).
[38] M.O. Russie (2000), 10th grade, problem **3**.

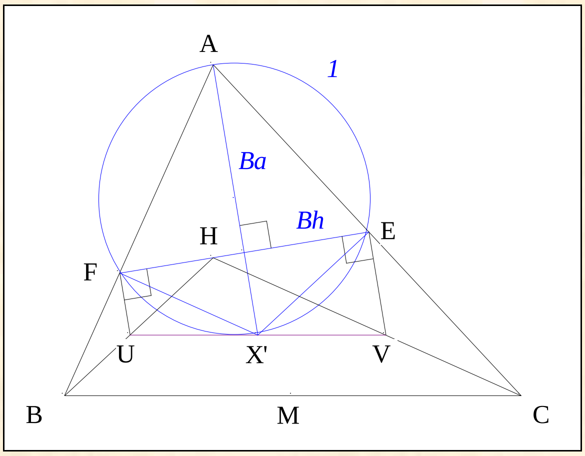


- Notons   *1*   le cercle circonscrit au triangle AEF
  et   X'   le second point d'intersection de *B*a avec *1*.

- Le triangle AFE étant A-isocèle, *Ba* i.e. (AX') est aussi la A-hauteur de AFE ;
  en conséquence, (AX') ⊥ (FHE).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (X'E) ⊥ (AC) ;
  par définition d'une hauteur, (AC) ⊥ (BH) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaire, (XE') // (BH).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (X'F) // (CH).



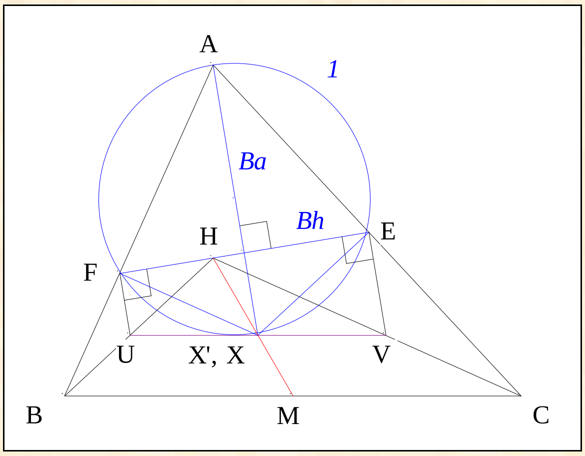
- Notons   U   le point d'intersection de la perpendiculaire à (EF) issue de F avec (BH)
  et   V   le point d'intersection de la perpendiculaire à (EF) issue de E avec (CH).

- D'après Appendice **1**. Une parallèle à (BC) (UV) // (BC).

- D'après Pappus "Le petit théorème" [39] appliqué à l'hexagone FUHVEXF, X' est sur (UV).

- D'après le théorème de la médiatrice, (AX') est la médiatrice du segment [EF] ;
  en conséquence, (AX') est l'axe médian de la bande de frontières (FU) et (EV) ;
  d'après l'axiome de passage IIIb, X' est le milieu de [UV].

[39] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, vol.6 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



- D'après Thalès "Le trapèze complet" (Cf. Annexe **6**) appliqué au trapèze BCVU, H, X' et M sont alignés ; en conséquence, X' et X sont confondus.

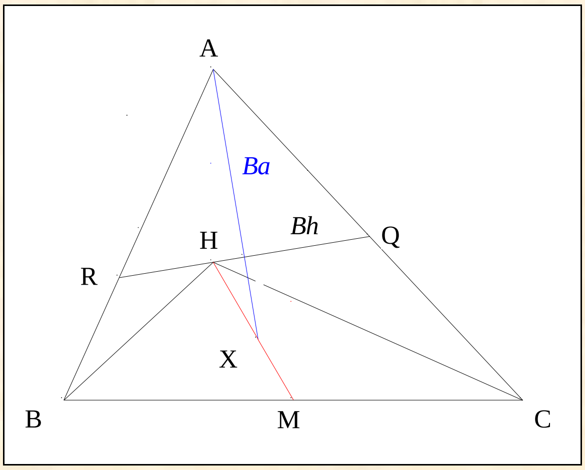
- **Conclusion :** A, F, X et E sont cocycliques.

Commentaire : ce problème a été posé d'une façon équivalente sur le site *Mathlinks*.[40]

2. L'approche par une tangente de l'auteur [41]

VISION

Figure :



Traits :

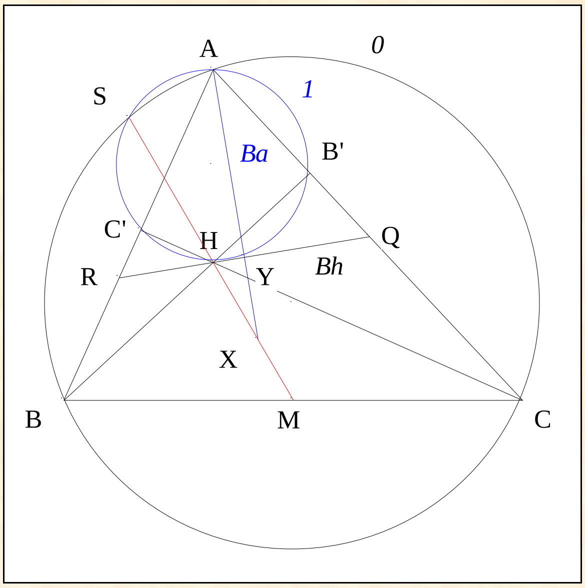
	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	M	le milieu de [BC],
	Ba	la A-bissectrice intérieure de ABC,
	Bh	la H-bissectrice extérieure du triangle HBC,
	Q, R	les points d'intersection de *Bh* resp. avec (AC), (AB)

[40] Beautiful collinearity, *Mathlinks* du 01/06/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=1512816#1512816.

[41] Ayme J.-L., Three concurrent lines, *Mathlinks* du 15/06/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&p=1909959#p1909959 ;
Collinear problem, *Mathlinks* du 26/072010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=358736.

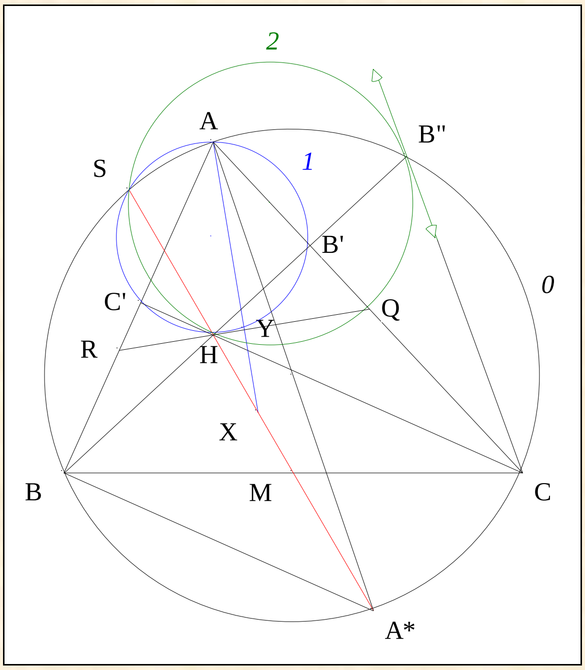
et X le point d'intersection de *Ba* et (MH).

VISUALISATION



- Notons B', C' les pieds des B, C-hauteurs de ABC,
  0 le cercle circonscrit de ABC,
  1 le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B' et C' ;
  S le second point d'intersection de *0* et *1*,
  et Y le point d'intersection de (QR) et (AX),

- **Scolies :** **(1)** S est sur (MXH)
  (2) (SA) ⊥ (SM)
  (3) Y est sur *1*.



- Notons A* le second point d'intersection de (SHM) avec *0*
  et B" le second point d'intersection de (BHB') avec *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre" (Cf. Annexe **2**), A* est l'antipôle de A relativement à *0* ;
  d'après Thalès "Triangle inscriptible, dans un demi cercle", (BA*) ⊥ (AB) ;
  par définition d'une hauteur, (AB) ⊥ (CHC') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BA*) // (CHC').

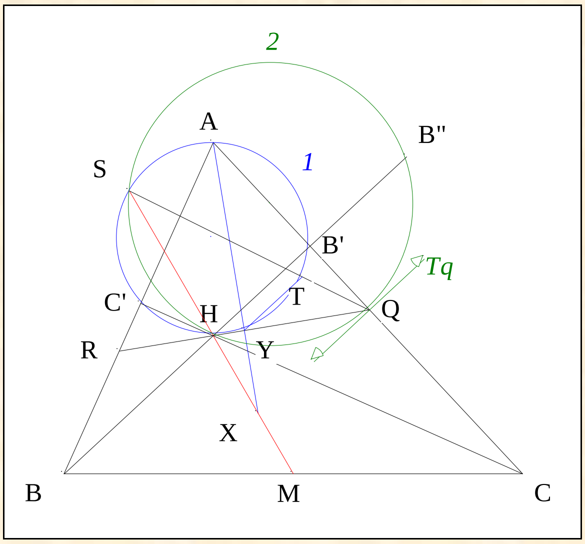
- Le cercle *0*, les points de base B" et S, les moniennes naissantes (BB"H) et (A*SH),
  les parallèles (BA*) et (CHC'), conduisent au théorème **1"** de Reim ;
  en conséquence, le cercle passant par B", S et H est tangent à (CHC') en H.

- Notons *2* ce cercle.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre" (Cf. Annexe **4**),
  B" étant le symétrique de H par rapport à (AC), (CB") est tangente à *2* en B".

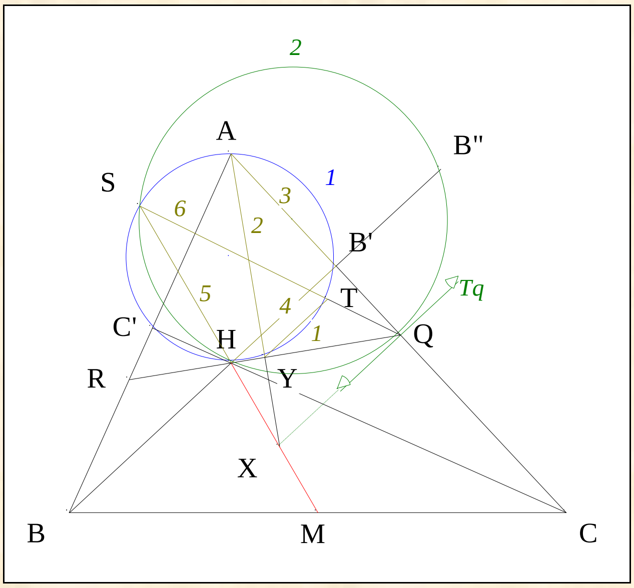
- **Scolies :** **(1)** (AC) est une droite diamétrale de *2*
  (2) le triangle CB"H est C-isocèle
  (3) Q est le centre de CB"H.

- **Conclusion partielle :** par une chasse angulaire en utilisant le théorème de la tangente,
  nous montrerions que Q est sur *2*.



- Notons T le second point d'intersection de (SQ) avec *1*
  et *Tq* la tangente à *2* en Q.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base H et S, les moniennes (YHQ) et (TSQ),
  conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (YT) // *Tq* ;
  par définition d'une tangente, *Tq* ⊥ (AQ) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (YT) ⊥ (AQ) ;
  par hypothèse, (AQ) ⊥ (HB') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (YT) // (HB').



- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe **7**),

  (1) (XQ) est la pascale de l'hexagone TYAB'HST

  (2) (YT) // (XQ).

- (XQ) et *Tq* sont confondues i.e. (XQ) $\perp$ (AC).

- **Conclusion :** *Tq* passe par X.[42]

- Notons *Tr* la tangente à *2* en R.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *Tq* passe par X

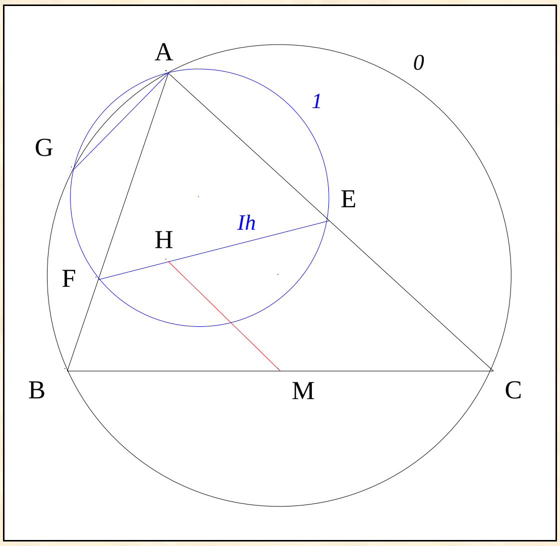
Scolie : d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", A, R, X et Q sont cocycliques.

3. Une perpendiculaire à (MH) passant par A

VISION

Figure :

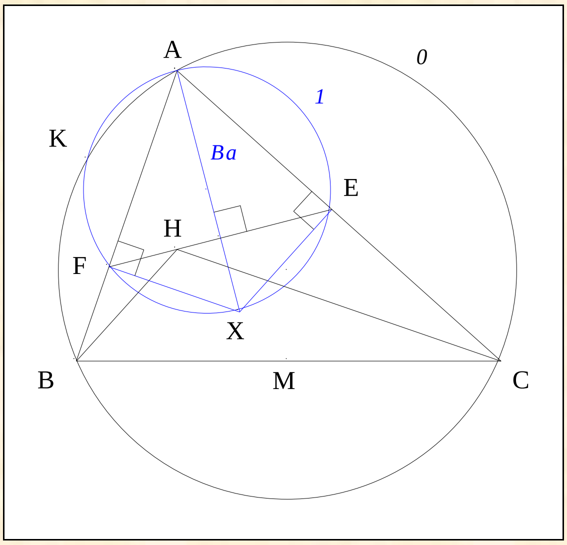
[42] O.M., Pologne (1915) question **3**.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
H l'orthocentre de ABC,
Ih la A-isocélienne de ABC passant par H,
E, F les points d'intersection de *Ih* resp. avec (CA), (AB),
1 le cercle circonscrit du triangle AFE
et G le second point d'intersection de *1* et *0*.

Donné : (AG) est perpendiculaire à (MH). [43]

VISUALISATION



- Notons *Ba* la A-bissectrice intérieure de ABC,
  et X le second point d'intersection de *B*a avec *1*.

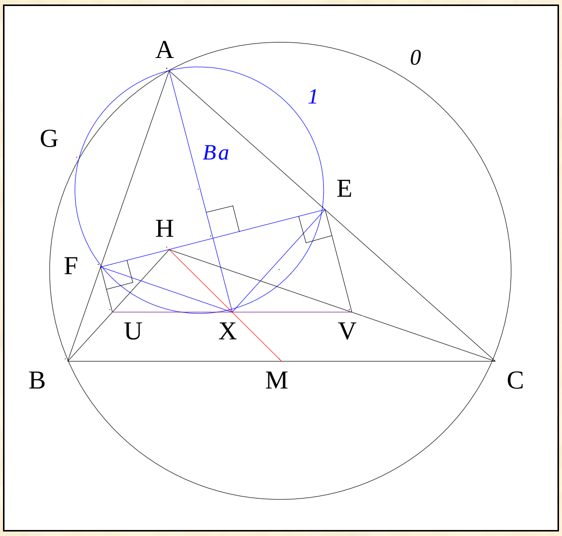
---

[43] Russia 2000 ;
HM is perpendicular to a common chord, Thailand 2005, *Mathlinks* du 01/06/ 2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=409570
Hard to approach it !, *Mathlinks* du 25/04/2006 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=89098
TST Suisse Problem **9** (2006) ; TST Vietnam (2006) Day **1**, Problem **1** ;
Wester China Olympiad (2009), Day 1, problem **3**, *Mathlinks* du 03/08/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1971772#p1971772
Geometry Problem, *Mathlinks* du 28/01/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=388742

- Le triangle AFE étant A-isocèle, *B*a i.e. (AX) est aussi la A-hauteur de AFE ;
  en conséquence, (AX) ⊥ (FHE).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (XE) ⊥ (AC) ;
  par définition d'une hauteur, (AC) ⊥ (BH) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaire, (XE) // (BH).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (XF) // (CH).



- Notons U le point d'intersection de la perpendiculaire à (EF) issue de F avec (BH)
  et V le point d'intersection de la perpendiculaire à (EF) issue de E avec (CH).

- D'après Appendice **1**. Une parallèle à (BC) (UV) // (BC).

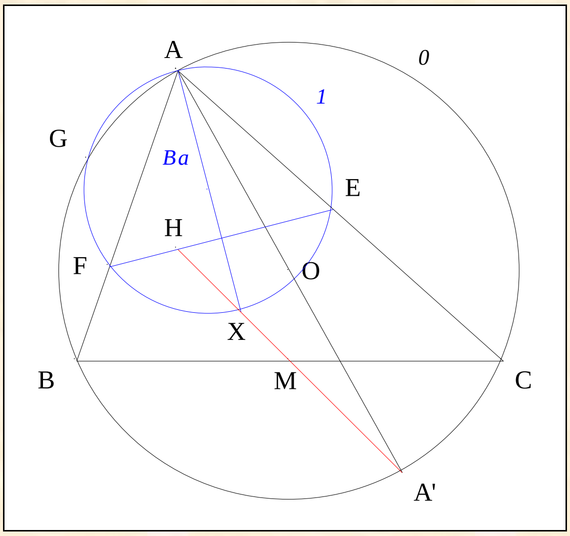
- D'après Pappus "Le petit théorème" [44] appliqué à l'hexagone FUHVEXF, X est sur (UV).

- D'après le théorème de la médiatrice, (AI) est la médiatrice du segment [EF] ;
  en conséquence, (AI) est l'axe médian de la bande de frontières (FU) et (EV) ;
  d'après l'axiome de passage IIIb, I est le milieu de [UV].

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Le trapèze complet" appliqué au trapèze BCVU,
  H, X et M sont alignés.

---

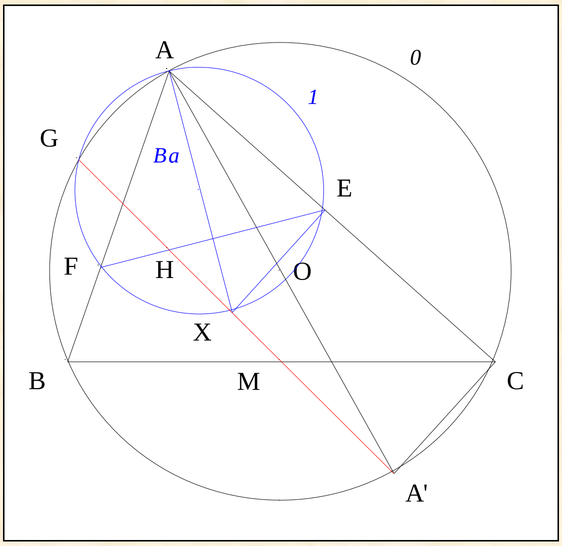
[44] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, vol.**6** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/



- Notons O le centre de *0*
  et A' le second point d'intersection de (AO) avec A'.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre" (Cf. Annexe 2), H, M et A' sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia, H, X, M et A' sont alignés.



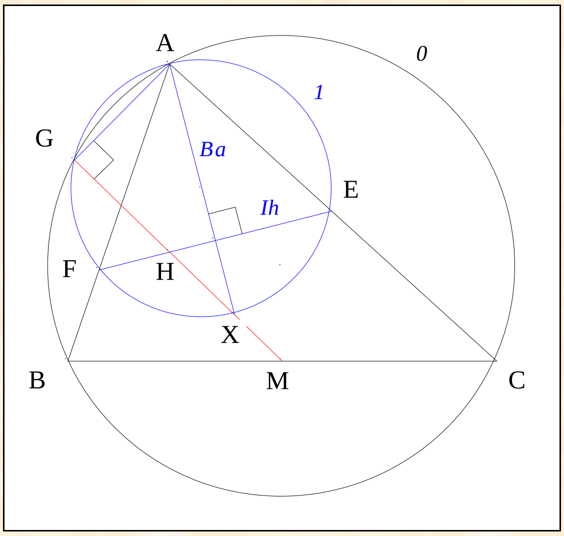
- Le triangle AFE étant A-isocèle, *Ba* est aussi la A-médiatrice de AFE ;
  en conséquence, [AX] est un diamètre de *1*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (EX) ⊥ (CA).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (CA) ⊥ (CA') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (EX) // (CA').

- Les cercles *1* et *0*, les points de base A et K, la moniennes (EAC), les parallèles (EX) et (CA'), conduisent au théorème **0'** de Reim ;
  en conséquence, X, A' et K sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia, K, H, X, M et A' sont alignés.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AG) est perpendiculaire à (GX).

- **Conclusion :** (AG) est perpendiculaire à (MH).

Note historique : ce problème posé en 2006 apparaît comme une réciproque de celui donné à la 26-ième O.M. de Russie en 2007.
Une variante

montrer que (GH) passe par M

a été proposé comme problème **1** le premier jour du TST du Vietnam[45] en 2006.

Commentaire : ce problème a été considéré comme difficile.

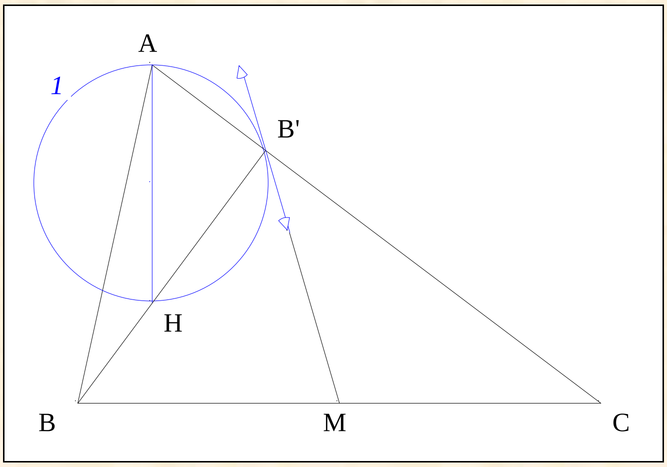
C. RÉSULTATS COLLATÉRAUX

1. Une tangente au cercle de diamètre [AH]

VISION

Figure :

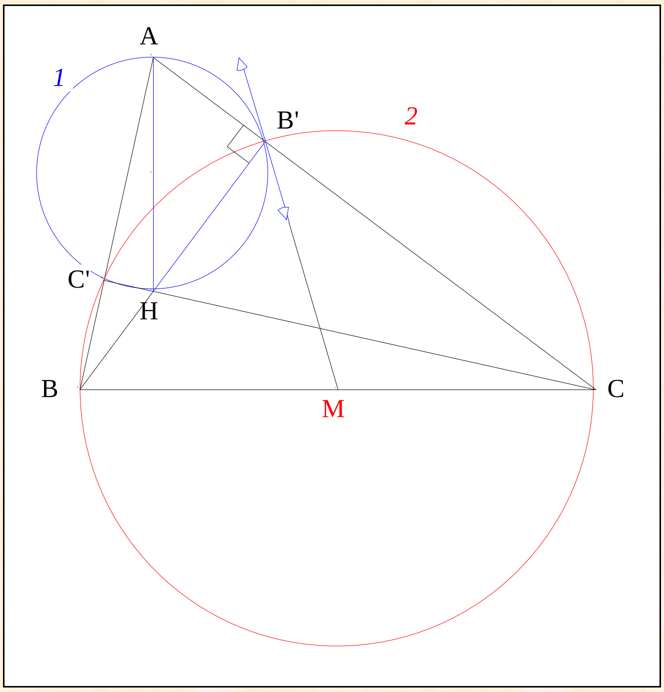
[45] Problem **1**, day **1**, vietnamese tst 2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=486150



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	B'	le pied de la B-hauteur de ABC,
	1	le cercle de diamètre [AH]
et	M	le milieu de [BC].

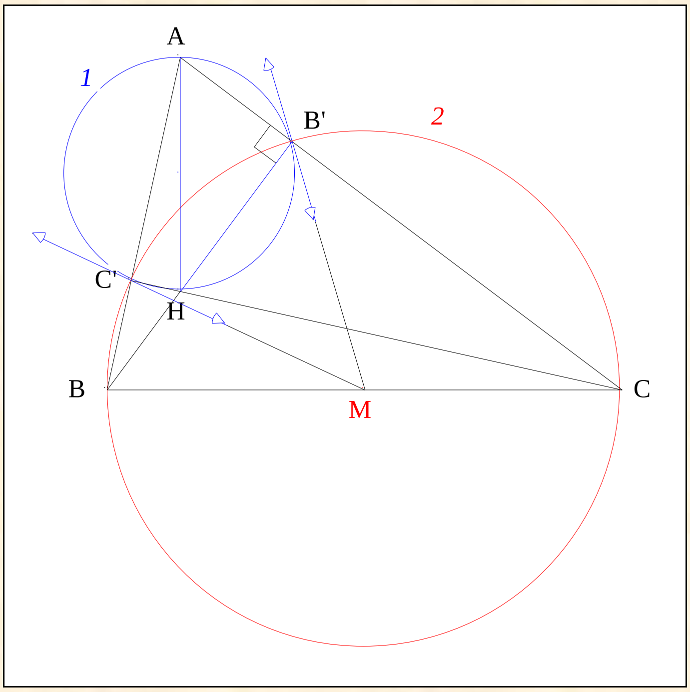
Donné : (B'M) est la tangente à *1* en B'.

VISUALISATION



- **Scolie :** *1* passe par B'.
- Notons C' le pied de la C-hauteur de ABC,
  et *2* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C'.
- D'après Altshiller "Deux cercles orthogonaux" (Cf. Appendice **2**), *1* est orthogonal à *2*.
- **Conclusion :** (B'M) est la tangente à *1* en B'.

Scolie : une autre tangente

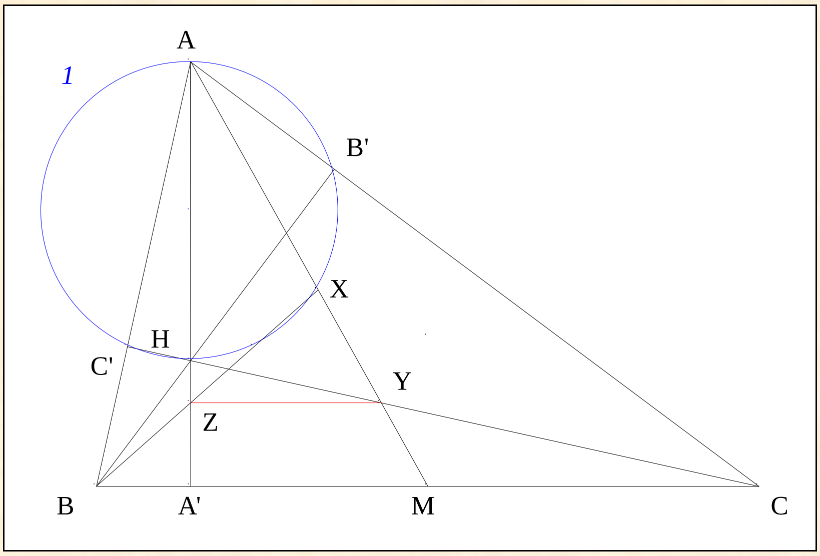


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (C'M) est la tangente à *1* en B'.

2. Une parallèle à (BC)

VISION

Figure :

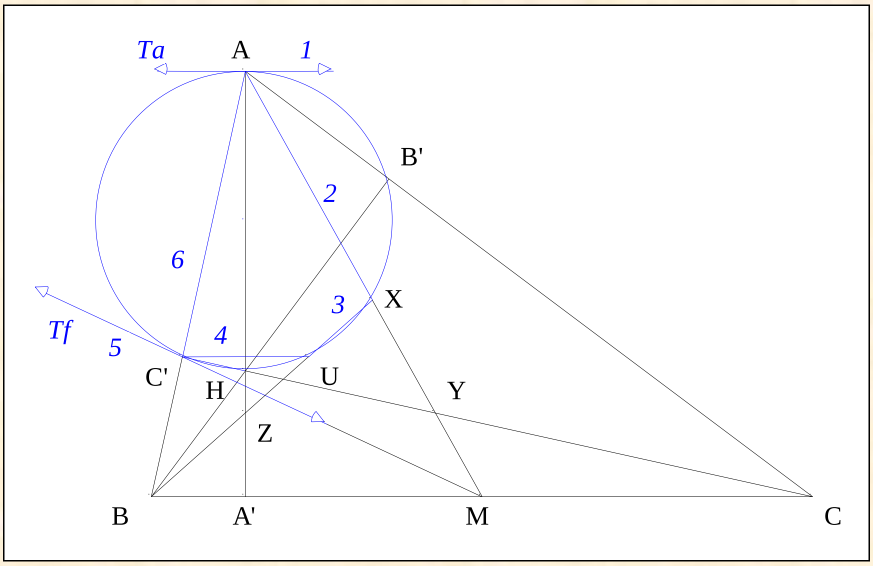


Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,

	M	le milieu de [BC],
	1	le cercle de diamètre [AH],
	X	le second point d'intersection de (AM) avec *1*,
	Y	le point d'intersection de (AM) et (CF),
et	Z	le point d'intersection de (AD) et (BX)

Donné : (YZ) est parallèle à (BC).[46]

VISUALISATION

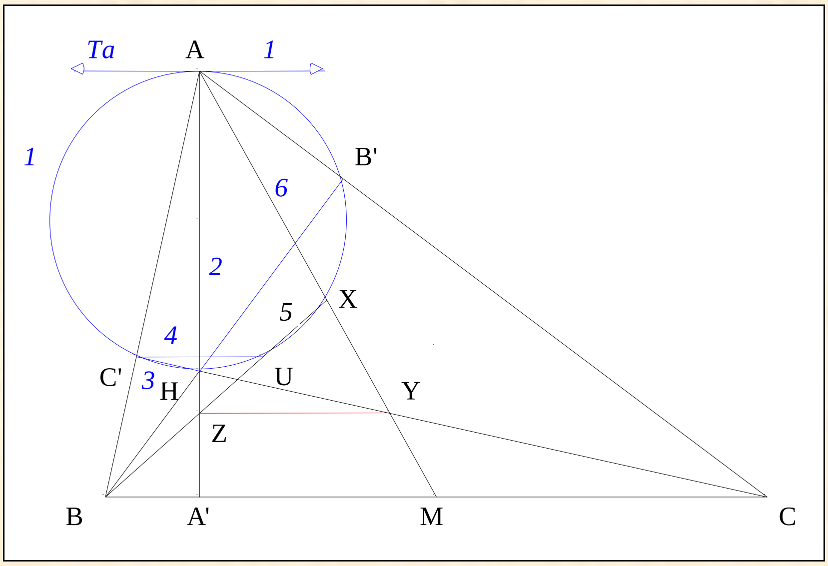


- Notons U le second point d'intersection de (BX) avec *1*,
  Ta la tangente à *1* en A
  et *Tc'* la tangente à *1* en C'.

- **Scolies :** **(1)** *Ta* // (BMC).
  (2) d'après C. 1. Une tangente au cercle de diamètre [AH], *Tc'* passe par M.

- **Conclusion partielle :** d'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe **8**), appliqué à l'hexagone cyclique *Ta* XUC' *Tc'* A, **(1)** (BM) est la pascale
  (2) (C'U) // (BMC).

46 Cono Sur Olympiad (2007).

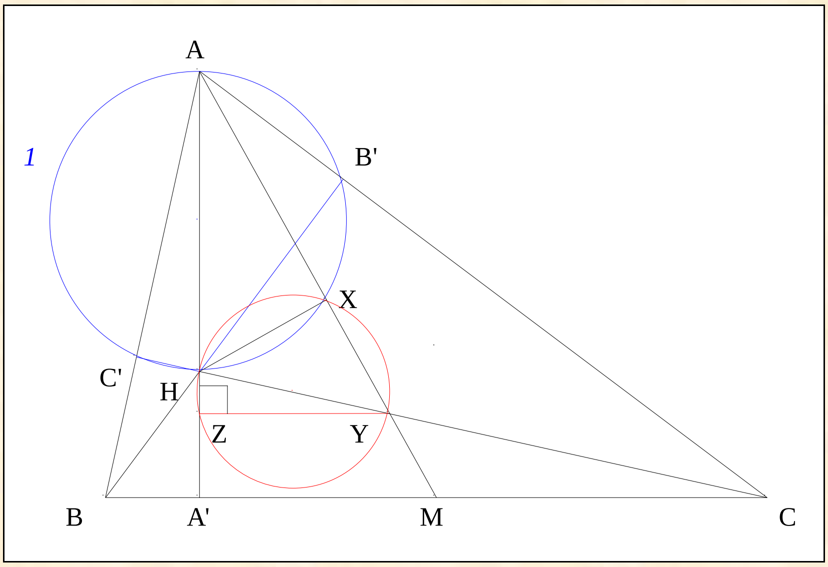


- **Scolie :** *Ta* // (C'U).

- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe **8**), appliqué à l'hexagone cyclique *Ta* HC'UXA, **(1)** (YZ) est la pascale
(2) (YZ) // (C'U).

- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, (YZ) est parallèle à (BC).

Scolie : quatre points cocycliques



- D'après le résultat précédent, (YZ) ⊥ (AH).

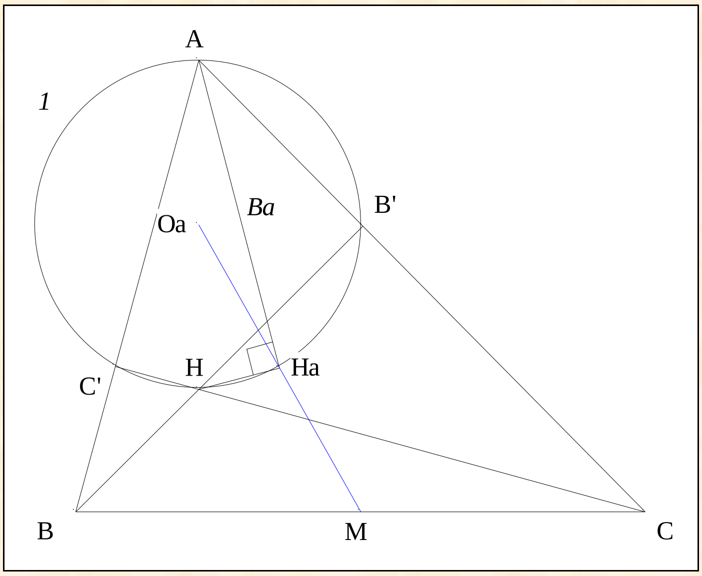
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (HX) ⊥ (AM).

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", H, X, Y et Z sont cocycliques.

3. Trois points alignés

VISION

Figure :

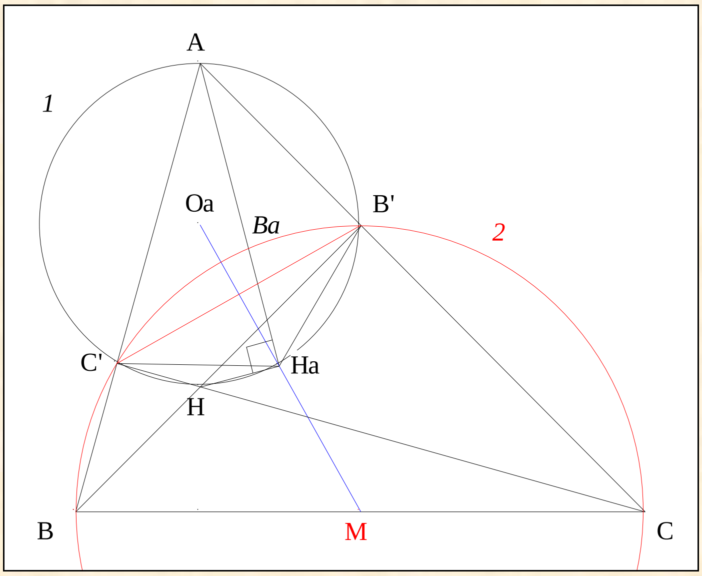


Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
B', C' les pied des B, C-hauteurs de ABC,
*B*a la A-bissectrice intérieure de ABC,
Ha le pied de la perpendiculaire à *Ba* issue de H,
M le milieu de [BC],
1 le cercle de diamètre [AH]
et Oa le centre de *1*.

Donné : Oa, Ha et M sont alignés. [47]

VISUALISATION

[47] Tudosi M., Ivory Coast 1976 [projections from H on bisectors of <CAB], *Mathlinks* du 13/01/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=23523



- **Scolies :** **(1)** B', C' et Ha sont sur *1*
  (2) OaB' = OaC'.

- *Ba* étant la A-bissectrice de ABC, HaB' = HaC'.

- **Conclusion partielle :** d'après le théorème de la bissectrice, (OaHa) est la médiatrice de [B'C'].

- Notons *2* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C'.

- M étant le centre de *2*, (OaHa) passe par M.

- **Conclusion :** Oa, Ha et M sont alignés.

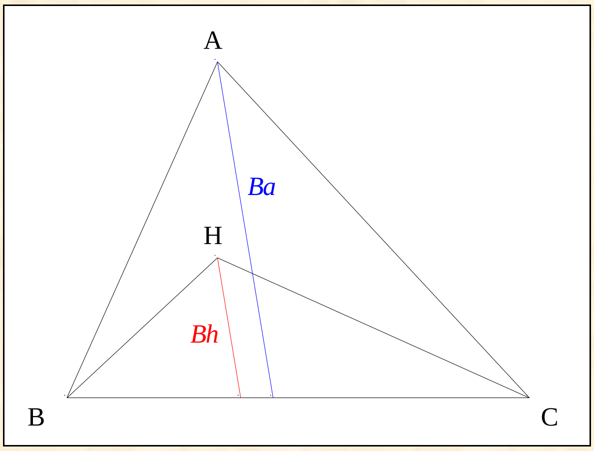
Commentaire : ce résultat a été redécouvert par l'auteur.[48]

4. Parallèle à une bissectrice

VISION

Figure :

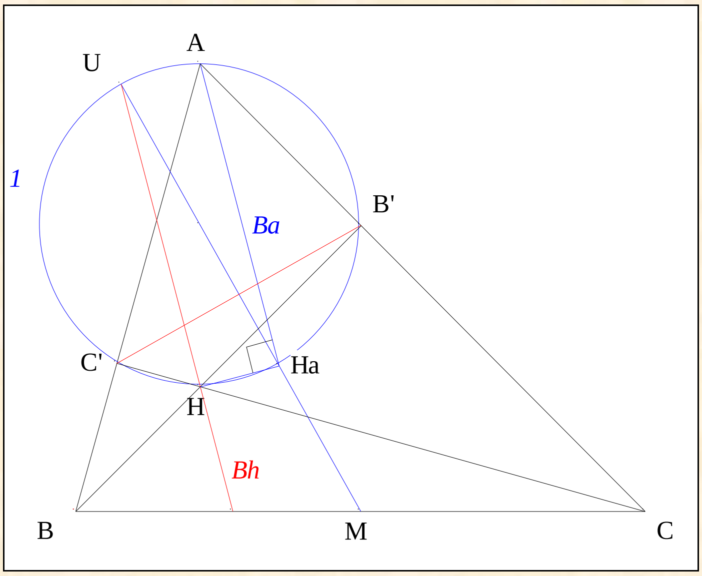
[48] Ayme J.-L., Collinear for fun again, *Mathlinks* du /06/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&p=1907052



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
Ba la A-bissectrice intérieure de ABC
et *Bh* la H-bissectrice intérieure du triangle HBC.

Donné : *Bh* est parallèle à *Ba*.

VISUALISATION



- Notons B', C' les pied des B, C-hauteurs de ABC,
  Ha le pied de la perpendiculaire à *Ba* issue de H,
  M le milieu de [BC],
  1 le cercle de diamètre [AH],
  Oa le centre de *1*
  et U le second point d'intersection de (MHa) avec *1*.

- D'après **C. 3.** Trois points alignés, (MhaOa) est la médiatrice de [B'C'] ;
  en conséquence, U est le second perpoint du triangle HB'C' ;
  il s'en suit que (HU) est la H-bissectrice de HB'C'.

- **Scolie :** *Ba* // (HU).

- D'après le théorème "Angles opposés", (HU) est la H-bissectrice du triangle HBC ;
  en conséquence, (HU) // *Bh* ;

par transitivité de la relation //, *Ba* // *Bh*.

- **Conclusion :** *Bh* est parallèle à *Ba*.

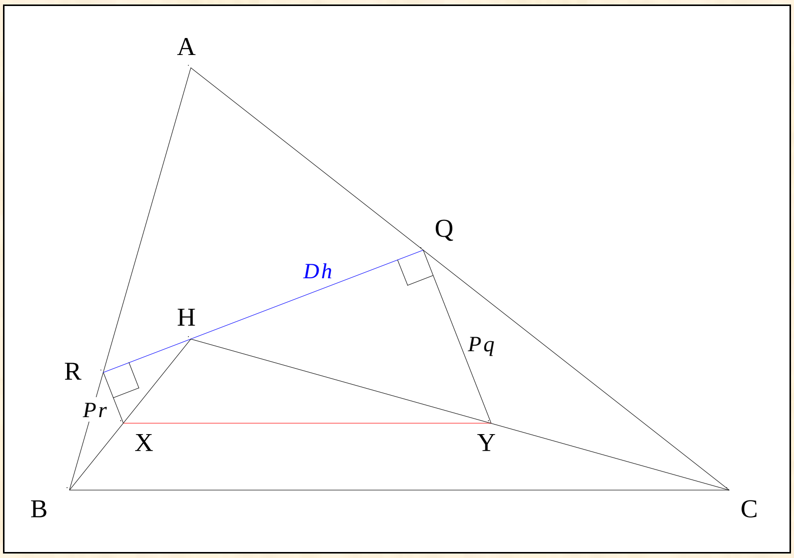
Scolie : (Hha) étant perpendiculaire à *Bh*, (Hha) est la A-bissectrice extérieure de HBC.

D. APPENDICE

1. Une droite parallèle à (BC)

VISION

Figure :

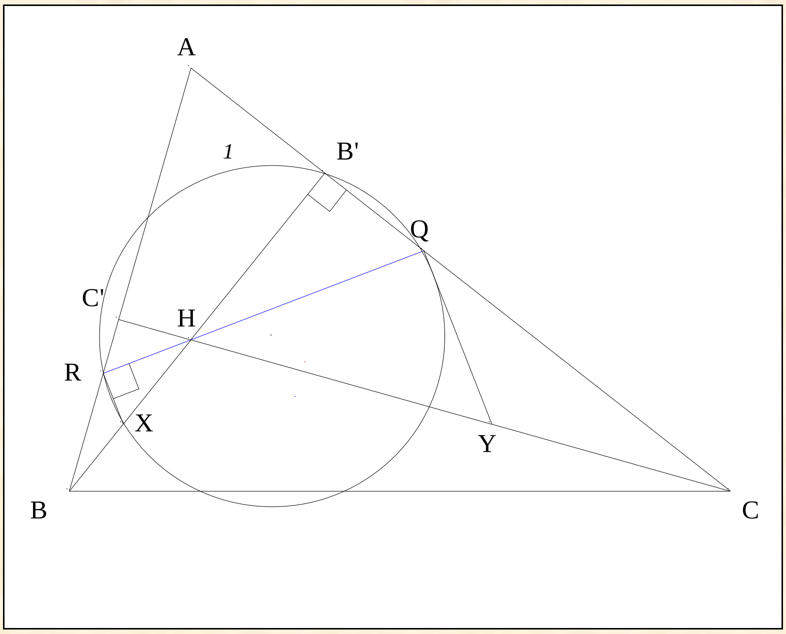


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
Dh une H-ménélienne,
Q, R les points d'intersection de *Dh* resp. avec (AC), (AB),
Pq la droite perpendiculaire à *Dh* passant par Q,
Pr la droite perpendiculaire à *Dh* passant par R,
X le point d'intersection des droites *Pr* et (BH)
et Y le point d'intersection des droites *Pq* et (CH).

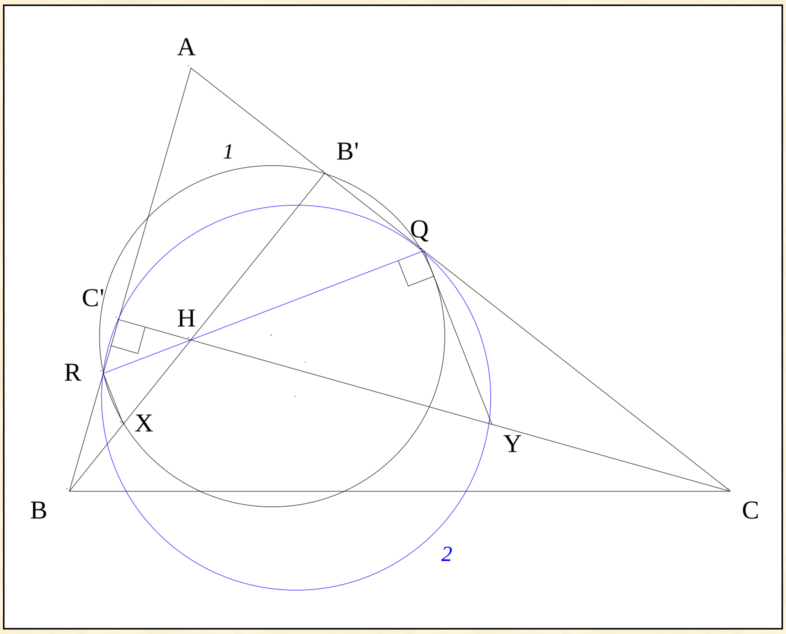
Donné : (XY) est parallèle à (BC).[49]

VISUALISATION

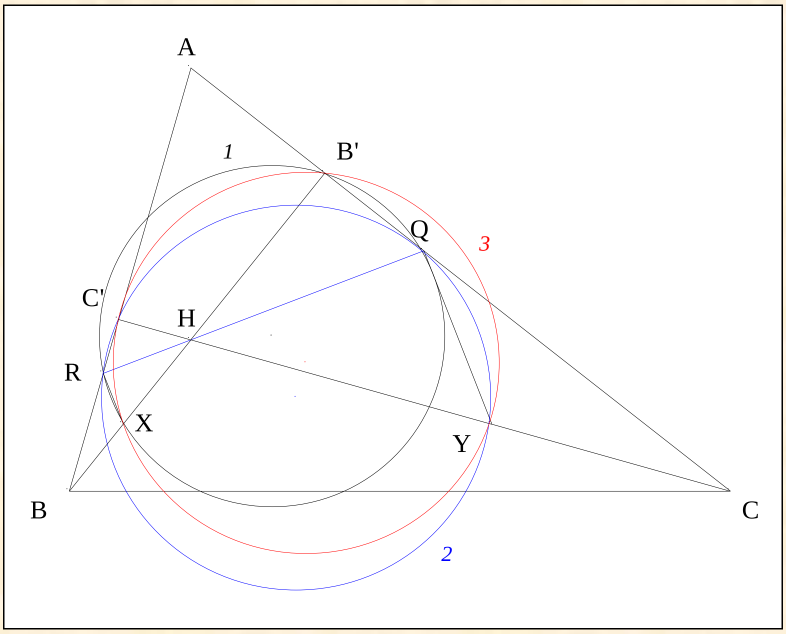
[49] Parallel lines in a triangle, *Mathlinks* du 25/07/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=358736.



- Notons B', C' les pieds des B, C-hauteurs de ABC.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", X, R, B', Q sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle de diamètre [XQ].

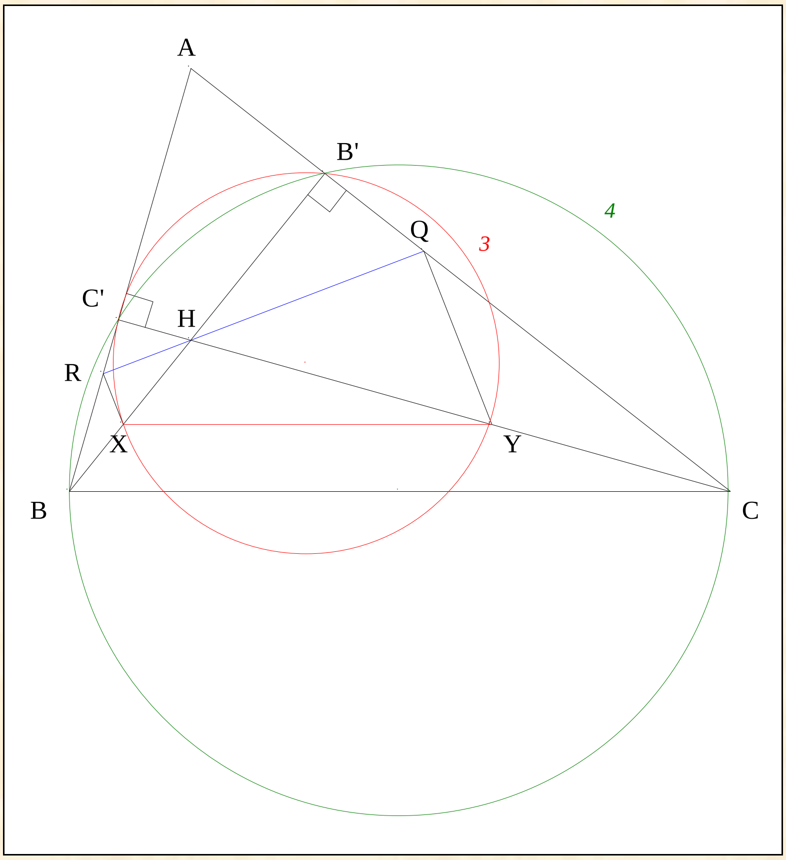


- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", Y, Q, C', R sont cocycliques.
- Notons *2* ce cercle de diamètre [YR].



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [50], X, C', B', Y sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", B, C', B', C sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle de diamètre [BC].

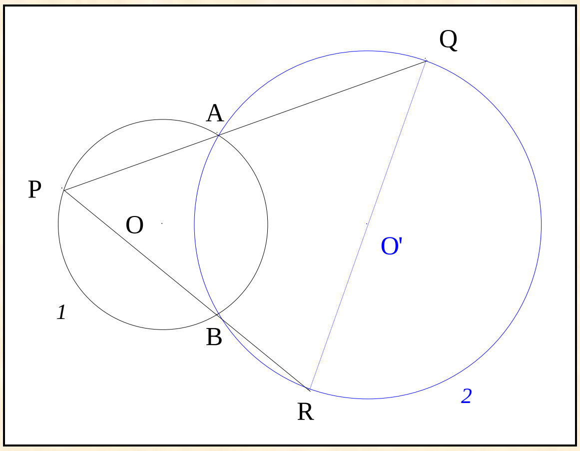
[50] Ayme J.-L., Le théorème des trios cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

- **Conclusion :** les cercles *3* et *4*, les points de base B' et C', les moniennes (XB'B) et (YC'C), conduisent au théorème **0** de Reim ;
  en conséquence, (XY) est parallèle à (BC).

2. Deux cercles orthogonaux [51]

VISION

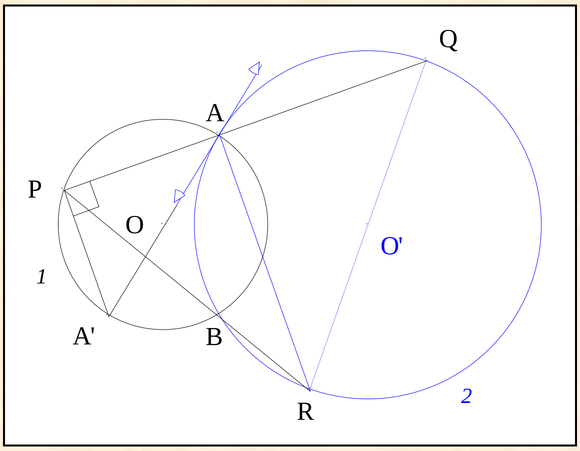
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les deux points d'intersection de *1* et *2*,
	P	un point de *1*
et	Q, R	les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec *2*.

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux *si, et seulement si,* (QR) est une droite diamétrale de *2*.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons A' l'antipôle de A relativement à *1*.

- Par définition, la droite diamétrale (AA') est la tangente à *2* en A.

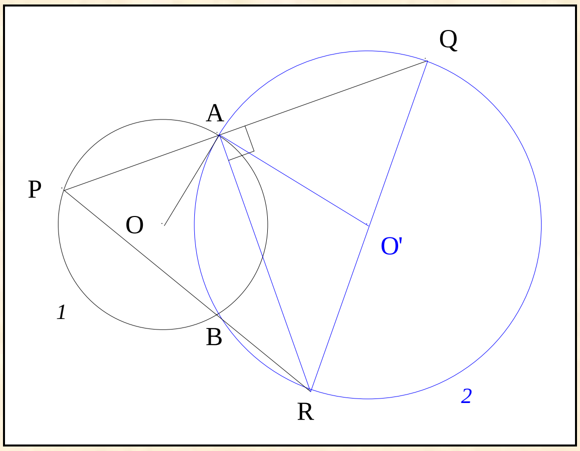
[51] Altshiller-Court N., Note on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* (**34**) 500-501.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  le triangle PA'A étant P-rectangle en P i.e. (PAQ) ⊥ (PA').

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (A'AA) et (PBR),
  conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (A'P) // (AR) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PAQ) ⊥ (AR) ;
  en conséquence, le triangle ARQ est A-rectangle en A.

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", [QR] est une droite diamétrale de *2*.

VISUALISATION SUFFISANTE

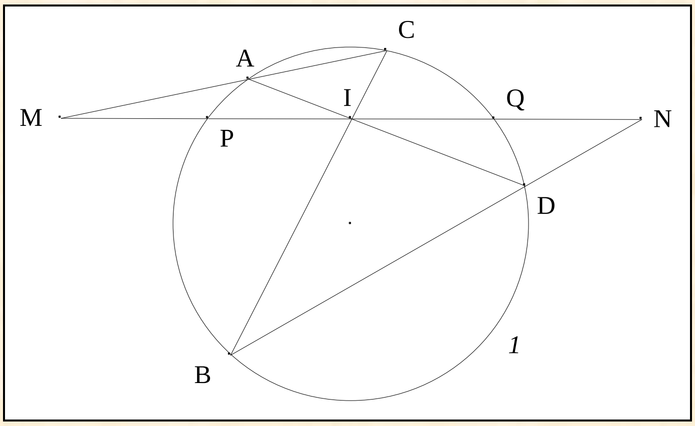


- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", ARQ est A-rectangle ;
  en conséquence, (PAQ) ⊥ (RA).

- **Conclusion :** d'après "Un Triangle de Möbius" (Cf. Annexe **9**)
  appliqué à la monienne (PAR) brisée perpendiculairement, *1* et *2* sont orthogonaux.

E. ANNEXE

1. Le papillon d'Howard Eves [52]

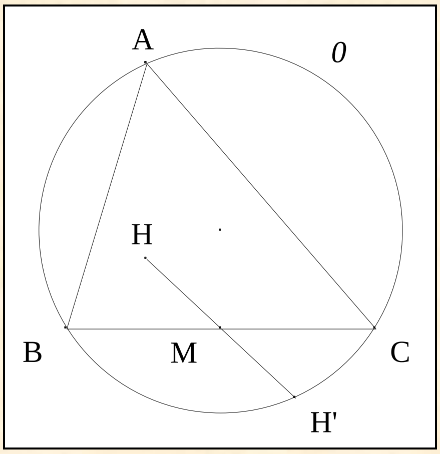


[52] Eves H., *A survey of geometry*, Allyn and Bacon, Boston (1963) 171.

Traits :	*1*	un cercle,
	[PQ]	une corde de *1*,
	I	le milieu de [PQ],
	ABCD	un quadrilatère croisé inscrit dans *1* tel que [AD] et [BC] se coupent en I
et	M, N	les points d'intersection resp. de (AC), (BD) avec (PQ).

Donné : I est le milieu de [MN].

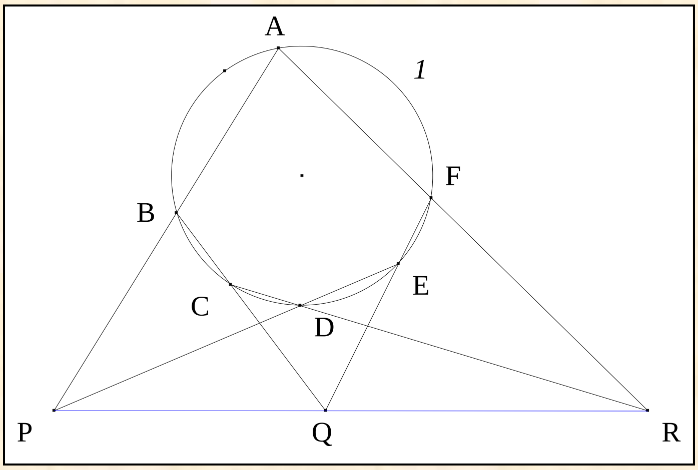
2. Symétrique de l'orthocentre par rapport au milieu d'un côté [53]



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	M	un point de [BC]
et	H'	le symétrique de H par rapport à M.

Donné : M est le milieu de [BC] *si, et seulement si,* H' est sur *0.*

3. Hexagramma mysticum [54]

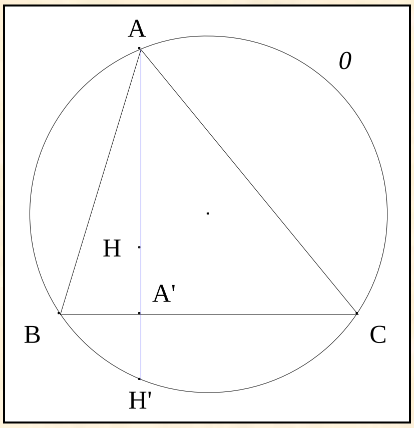


Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEF	un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
et	P, Q, R	les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

53 Carnot.
54 Pascal B. (1640)

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

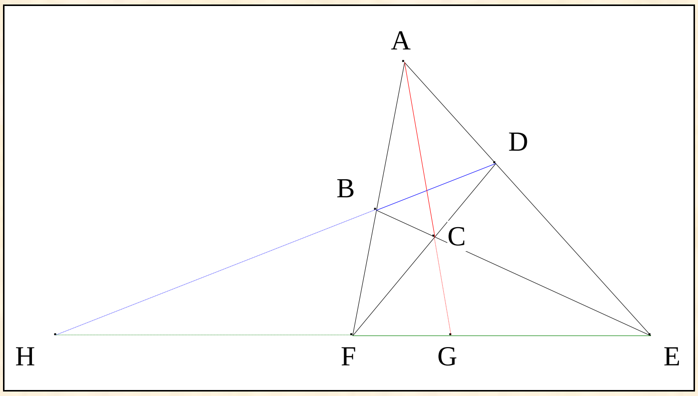
5. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté [55]



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre du triangle,
A' le pied de la hauteur de ABC en A,
0 le cercle circonscrit à ABC
et H' le pied de la hauteur de ABC en A sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

5. Diagonales d'un quadrilatère [56]

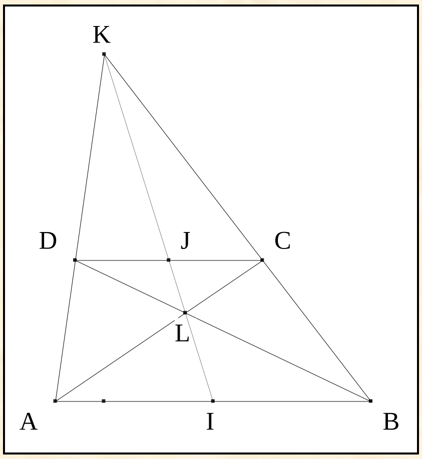


Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
G, H le point d'intersection de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

6. Le trapèze complet

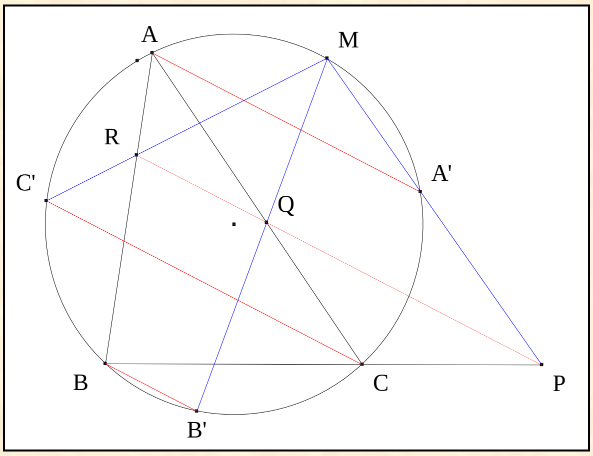
55 Carnot, n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101.
56 Pappus, *Collections*, Livre **7**, proposition **131**.



Traits : ABCD un quadrilatère,
I le milieu de [AB],
J le milieu de [CD],
K le point d'intersection de (AD) et (BC)
et L le point d'intersection de (AC) et (BD).

Donné : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD) *si, et seulement si,* I, J, K et L sont alignés.

7. L'équivalence d'Aubert-MacKensie [57]



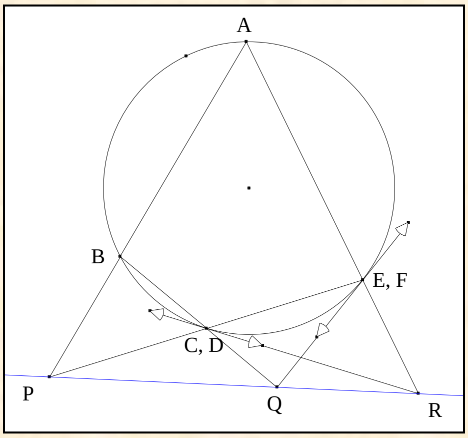
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A', B', C' trois points de *0* tels que (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles entre elles,
M un point,
et P, Q, R les point d'intersection de (MA') et (BC), (MB') et (CA), (MC') et (AB).

Donné : M est sur *0* *si, et seulement si,* (PQR) est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA').

Scolie : la visualisation nécessaire est de Paul Aubert[58] et suffisante de M'Kensie[59].

8. Tetragramma mysticum

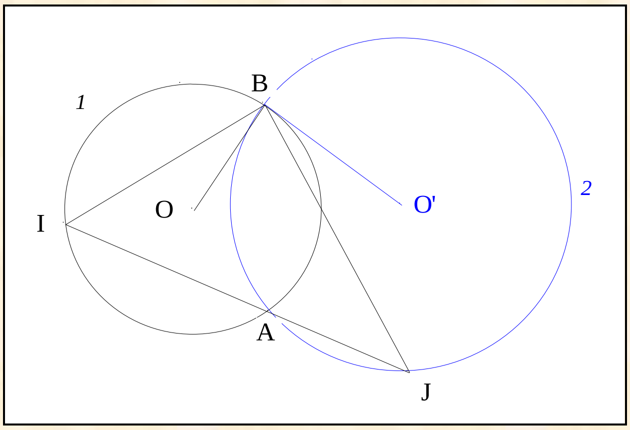
[57] Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. volume **2**.
[58] Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899).
[59] M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201.



Traits : *0* un cercle,
ABCEA un quadrilatère tels que les points A, C, E soient sur *0*,
Tc, Te les tangentes à *0* resp. en C, E
et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (CE), (BC) et Te, Tc et (EA).

Donné : B est sur *0* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

9. Un triangle de Möbius [60]



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
et (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

[60] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.