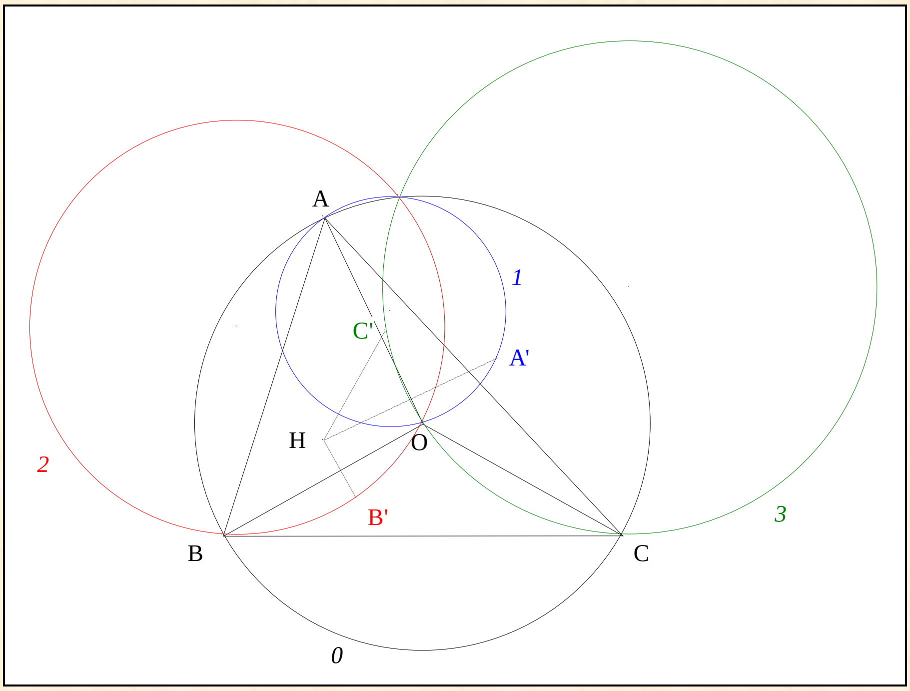
LES POINTS DE G. C. BOUBALS

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique des deux points de G. C. Boubals.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. We present a purely synthetic proof of the two points of G. C. Boubals.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/06/2012.

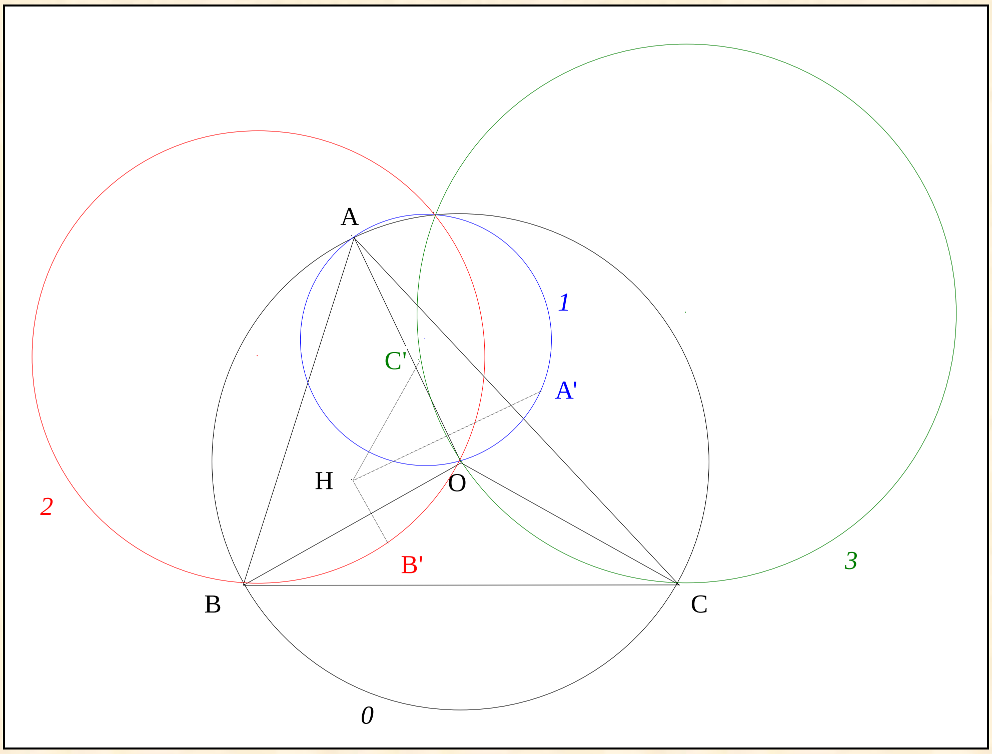
Sommaire

A. LE LEMME D'AUGUSTE BOUTIN [2]

1. Le lemme

VISION

Figure :



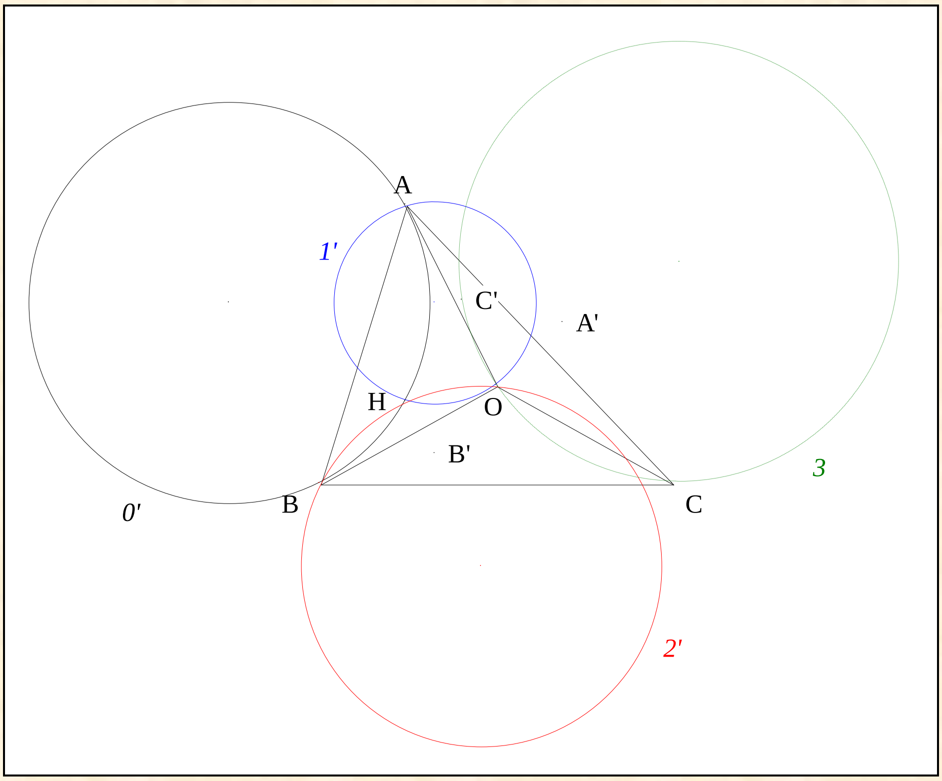
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
H l'orthocentre de ABC,
A', B', C' les symétriques de H resp. par rapport à (AO), (BO), (CO)
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles OAA', OBB', OCC'.

Donné : *1*, *2*, *3* et *0* sont concourants.

VISUALISATION

---

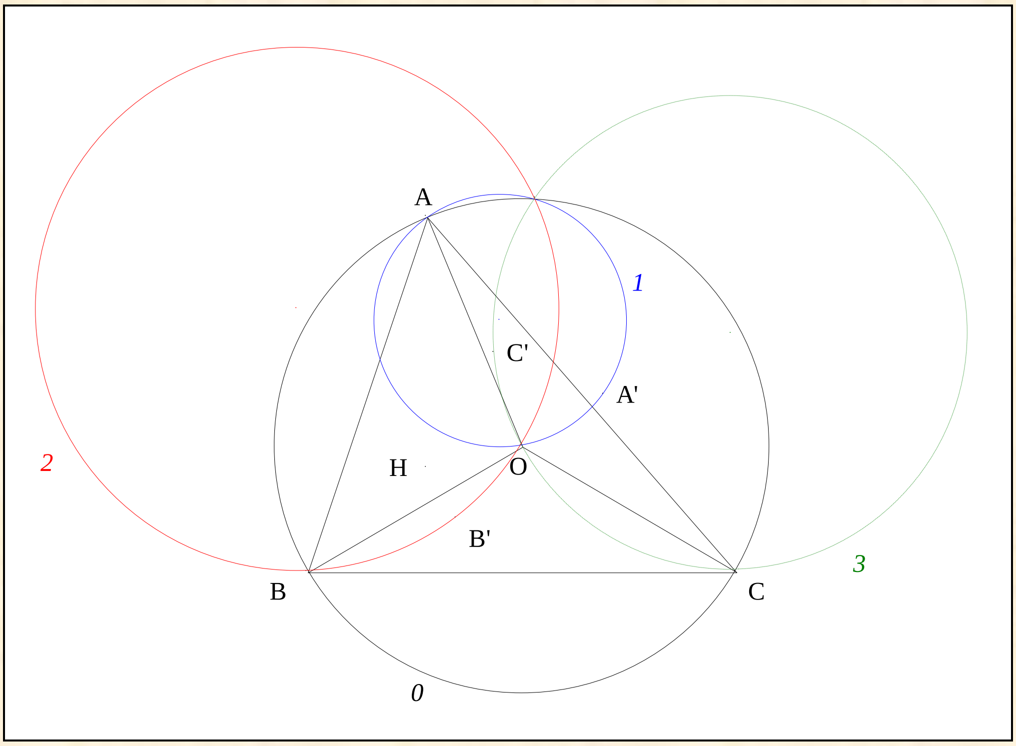
[2] Boutin Aug., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 215-216



- Notons *0'*, *1'*, *2*' les symétriques de *0, 1, 2* resp. par rapport à (AB), (AO), (BO).

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe **1**), *0* passe par H.

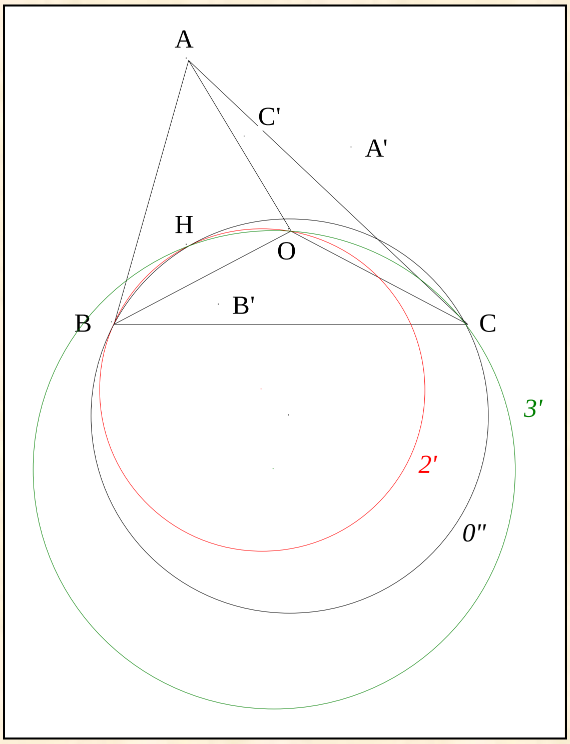
- Par hypothèse, *1'* et *2'* passent par H.



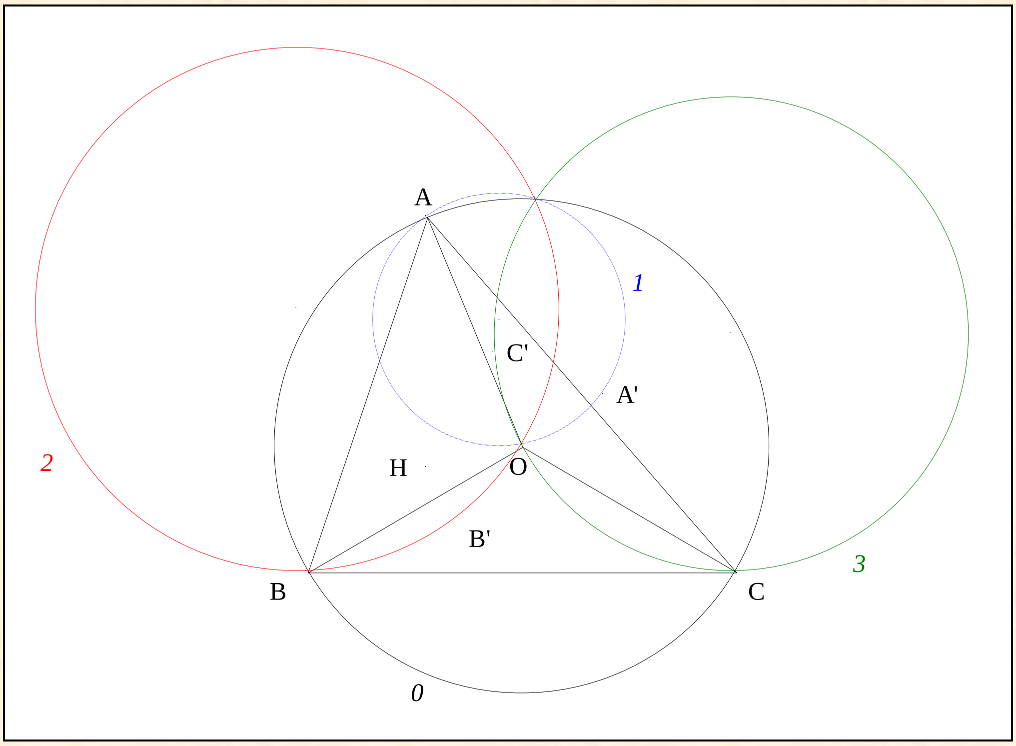
- D'après "Les cercles de Schoute" [3], *0, 1* et *2* sont concourants i.e. *1* et *2* se coupent sur *0.*

---

[3] Ayme J. –L., Les points jumeaux de Schoute, G.G.G. vol. **2**, p. 11-14 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons $0''$, $2'$, $3'$ les symétriques de 0, 2, 3 resp. par rapport à (BC), (BO), (CO).
- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe **1**), $0''$ passe par H.
- Par hypothèse, $2'$ et $3'$ passent par H.



- D'après "Les cercles de Schoute" [4], *0*, *2* et *3* sont concourants i.e. *2* et *3* se coupent sur *0*.

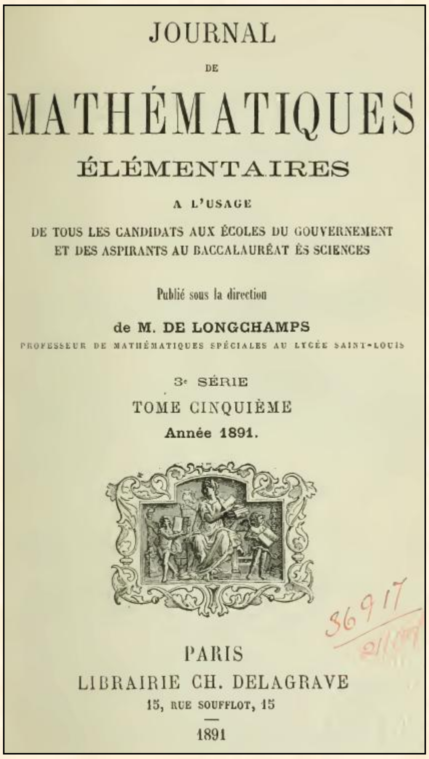
[4] Ayme J. –L., Les points jumeaux de Schoute, G.G.G. vol. **2**, p. 11-14 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- **Conclusion :** *1*, *2*, *3* et *0* sont concourants.

Scolie : le résultat reste inchangé lorsque O est remplacé par un point quelconque distinct de A, B et C.

Commentaire : ce lemme a été établi pour répondre à une question de G. C. Boubals.

2. Archive

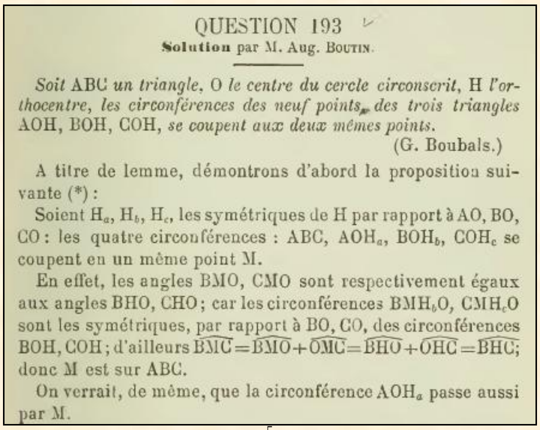


JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES
A L'USAGE
DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction
de M. DE LONGCHAMPS
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

3e SÉRIE
TOME CINQUIÈME
Année 1891.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15
1891



QUESTION 193
Solution par M. Aug. Boutin.

Soit ABC *un triangle*, O *le centre du cercle circonscrit*, H *l'orthocentre, les circonférences des neuf points, des trois triangles* AOH, BOH, COH, *se coupent aux deux mêmes points.*

(G. Boubals.)

A titre de lemme, démontrons d'abord la proposition suivante (*) :

Soient H_a, H_b, H_c, les symétriques de H par rapport à AO, BO, CO : les quatre circonférences : ABC, AOH_a, BOH_b, COH_c se coupent en un même point M.

En effet, les angles BMO, CMO sont respectivement égaux aux angles BHO, CHO ; car les circonférences BMH_bO, CMH_cO sont les symétriques, par rapport à BO, CO, des circonférences BOH, COH ; d'ailleurs $\widehat{BMC} = \widehat{BMO} + \widehat{OMC} = \widehat{BHO} + \widehat{OHC} = \widehat{BHC}$; donc M est sur ABC.

On verrait, de même, que la circonférence AOH_a passe aussi par M.

[5]

3. Une courte biographie d'Auguste Boutin

Auguste Boutin est né à Paris en 1858.

[5] Boutin Aug., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 215

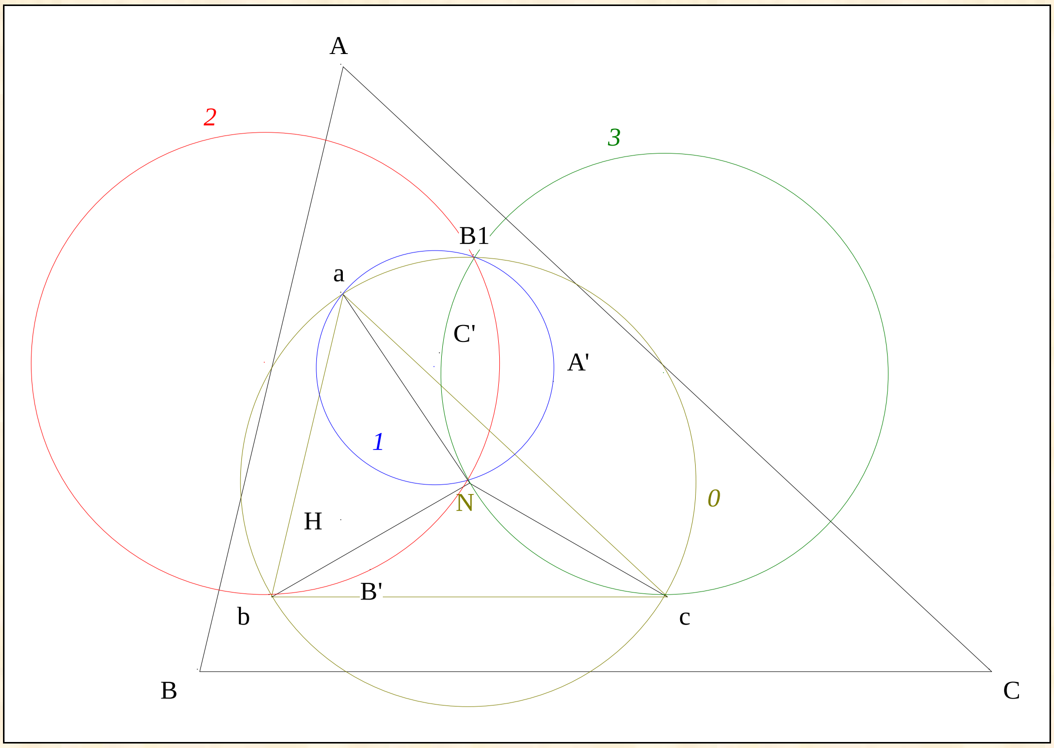
Devenu professeur de mathématiques, il écrit de nombreux articles dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires* et aussi dans le *Journal de Mathématiques Spéciales.*
En 1869, il s'intéresse aux centres isodynamiques [6] et aux quadrilatères à la fois inscrit et circonscrit.
En 1885, il devient membre de la Société Mathématiques de France et publie dans le *Journal de mathématiques élémentaires* de 1890, le théorème qui aujourd'hui, porte son nom.
En 1889, il découvre en même temps qu'Émile Lemoine, une propriété remarquable caractérisant tous les points de la droite d'Euler, qui sera redécouverte par le japonais Karya et par l'allemand Gustave Franke, en 1904.

B. LES DEUX POINTS DE BOUBALS

1. Le premier point de Boubals

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	abc	le triangle d'Euler de ABC,
	0	le cercle circonscrit à abc,
	N	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A', B', C'	les symétriques de H par rapport à (aN), (bN), (cN)
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits aux triangles NaA', NbB' et NcC'.

Donné : *1, 2, 3* et *0* sont concourants. [7]

---

6 Points de concours des trois cercles d'Apollonius d'un triangle
7 Boubals J. C., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) Question **193**
Solution de Boutin Aug., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 215-216

VISUALISATION

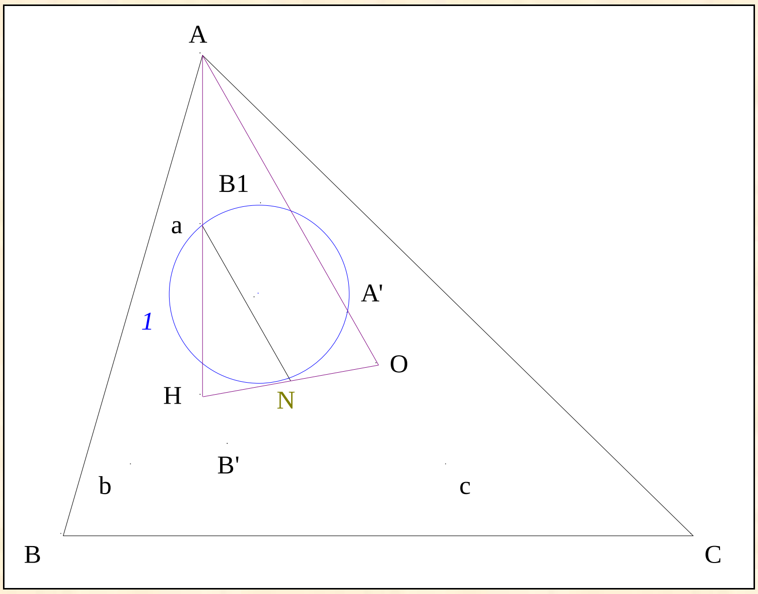
- D'après Poncelet "Le cercle des neuf points", H est l'orthocentre de abc.

- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Le lemme de Boutin appliqué au triangle abc, *1*, *2*, *3* et *0* sont concourants.

- Notons B1 ce point de concours.

Scolies : **(1)** B1 est "le premier de Boubals de ABC" ; il est répertorié sous X_{125} chez ETC [8]

(2) Nature géométrique de *1*, *2* et *3*



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC.

- Par hypothèse, *1* passe par
  - * N (milieu de [OH])
  - * a (milieu de [AH])
  - * A'.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AHO, (Na) // (OA) ;
  en conséquence, A' est sur (OA).

- **Conclusion partielle :** *1* est le cercle d'Euler-Bevan du triangle AHO. [9]

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *2* est le cercle d'Euler-Bevan du triangle BHO
  3 est le cercle d'Euler-Bevan du triangle CHO.

- **Conclusion :** les cercles d'Euler-Bevan des triangles AHO, BHO, CHO sont coaxiaux et passent par les points de base B1 et N.

Archive :

[8] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
[9] Ayme J.-L ., Les cercles de Morley, Euler,…, G.G.G. vol. **2**, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

QUESTION 193

Solution par M. Aug. BOUTIN.

Soit ABC *un triangle*, O *le centre du cercle circonscrit*, H *l'orthocentre, les circonférences des neuf points, des trois triangles* AOH, BOH, COH, *se coupent aux deux mêmes points.*

(G. Boubals.)

A titre de lemme, démontrons d'abord la proposition suivante (*) :

Soient H_a, H_b, H_c, les symétriques de H par rapport à AO, BO, CO : les quatre circonférences : ABC, AOH_a, BOH_b, COH_c se coupent en un même point M.

En effet, les angles BMO, CMO sont respectivement égaux aux angles BHO, CHO ; car les circonférences BMH_bO, CMH_cO sont les symétriques, par rapport à BO, CO, des circonférences BOH, COH ; d'ailleurs $\widehat{BMC}=\widehat{BMO}+\widehat{OMC}=\widehat{BHO}+\widehat{OHC}=\widehat{BHC}$; donc M est sur ABC.

On verrait, de même, que la circonférence AOH_a passe aussi par M.

Ceci posé, les trois circonférences considérées dans l'énoncé ont déjà, en commun, le centre E du cercle des neuf points de ABC.

Considérons le triangle $A_1B_1C_1$ qui a pour sommets les milieux des distances AH, BH, CH, et appliquons-y le lemme précédent, H étant l'orthocentre de $A_1B_1C_1$, H_a le symétrique de H, par rapport à EB_1.

Les trois circonférences B_1EH_b, C_1EH_c, A_1EH_a se coupent au même point M, situé sur la circonférence des neuf points

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

216 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

de ABC. Mais EB_1 étant parallèle à OB, H_b est le pied de la hauteur HH_b du triangle HBO, et la circonférence B_1EH_b est la circonférence des neuf points du triangle BOH. Le théorème est donc démontré.

Les deux points communs sont donc E et un point remarquable M de la circonférence des neuf points.

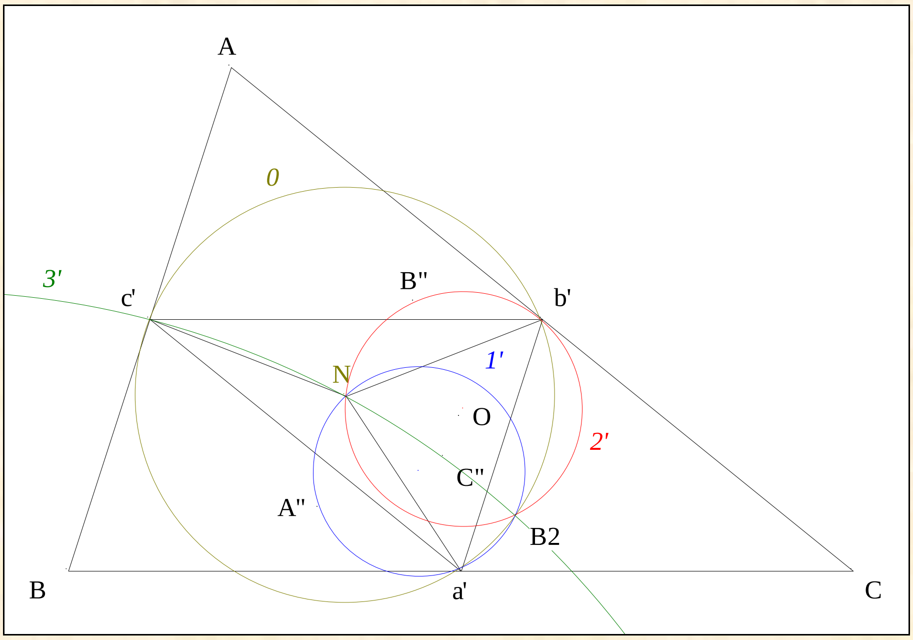
[10]

2. Le second point de Boubals

VISION

Figure :

[10] Boutin Aug., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 215-216



Traits : ABC un triangle,
a'b'c' le triangle médian de ABC,
0 le cercle circonscrit à a'b'c',
N le centre de *0*,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'', B'', C'' les symétriques de O resp. par rapport à (a'N), (b'N), (c'N)
et *1'*, *2'*, *3'* les cercles circonscrits aux triangles Na'A'', Nb'B'' et Nc'C''.

Donné : *1'*, *2'*, *3'* et *0* sont concourants.[11]

VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** *0* est le cercle d'Euler de ABC
  (2) N est le centre de *0*
  (3) O est l'orthocentre de ABC.

- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Le lemme de Boutin appliqué au triangle a'b'c', *1'*, *2'*, *3'* et *0* sont concourants.

- Notons B2 ce point de concours.

Scolie : (B2) est "le second point de Boubals de ABC" ; il est répertorié sous X_{113} chez ETC [12].

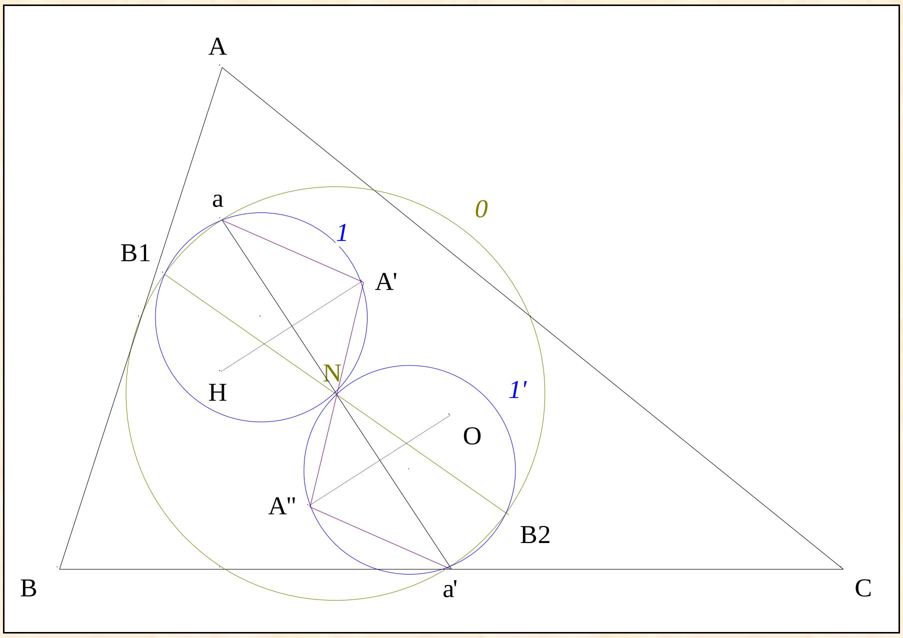
3. Les deux points de Boubals

VISION

Figure :

---

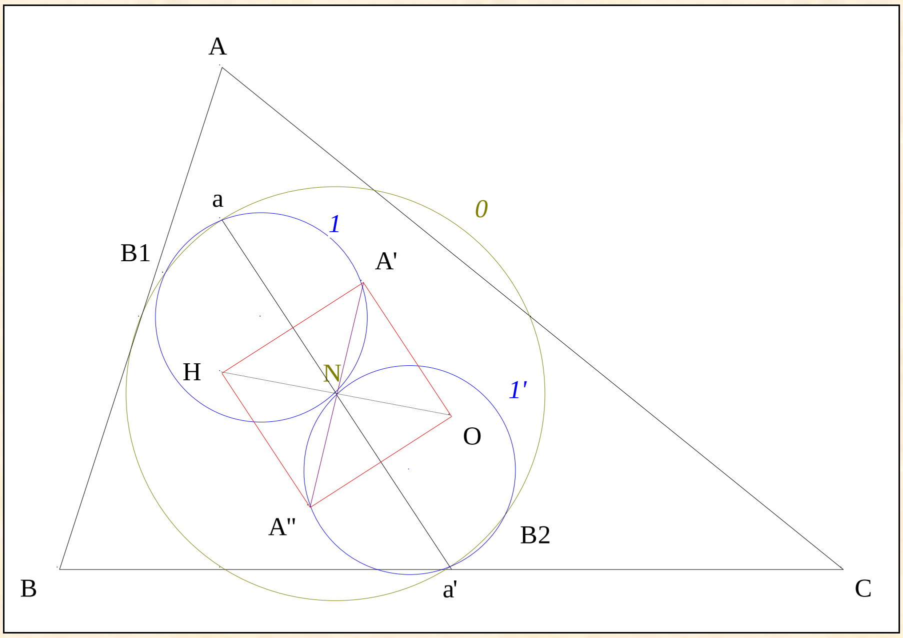
[11] 1891
[12] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle d'Euler de ABC,
	a	le A-point d'Euler de ABC,
	A'	le symétrique de H par rapport à (aN),
	1	le cercle circonscrit au triangle aNA',
	B1	le premier point de Boubals,
	a'	le milieu de [BC],
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	A"	le symétrique de O par rapport à (a'N),
	1'	le cercle circonscrit au triangle a'NA"
et	B2	le second point de Boubals.

Donné : B1 et B2 sont deux points diamétraux de *0*.

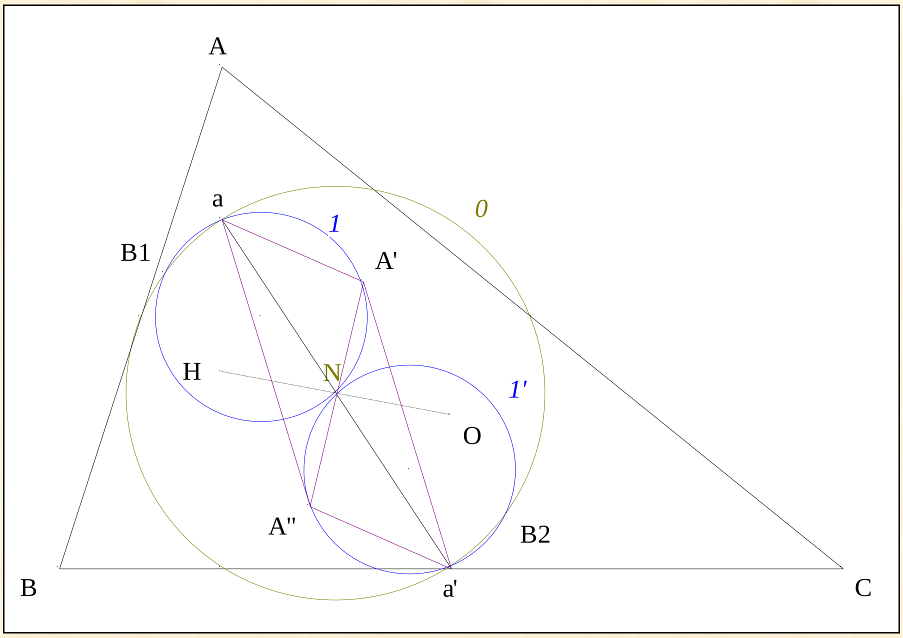
VISUALISATION



- **Scolie :** O est l'orthocentre du triangle médian de ABC.

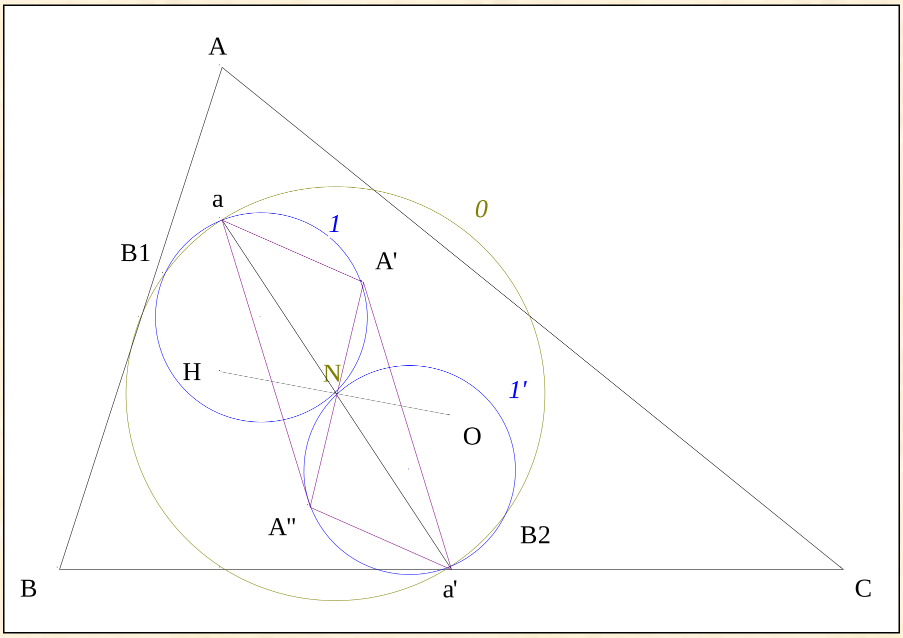
- Par culture géométrique, **(1)** a, N et a' sont alignés
  (2) N est le milieu de [aa']
  (3) H, N et O sont alignés.

- Le quadrilatère HA"OA' étant un trapèze isocèle d'axe (aa'), N est le milieu de [AA'].



- Le quadrilatère aA"a'A' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu N, est un parallélogramme ; en conséquence, (a'A") // (aA').

- Le cercle *1'*, le point de base N, les moniennes naissantes (a'Na) et (A"NA'), les parallèles (a'A") et (aA'), conduisent au théorème **7''** de Reim ; en conséquence, *1* est tangent à *1'* en N.



- Le symétrique de B1 par rapport à N étant à la fois sur *1'* et *0*, n'est d'autre que B2.

- **Conclusion :** B1 et B2 sont deux points diamétraux de *0*.

4. Sur G. C. Boubals

Il a été Professeur à l'École du Génie à Montpellier en 1885 et est connu des géomètres pour avoir donné un procédé très simple [13] pour diviser la base d'un triangle en segments proportionnels et inversement proportionnels aux puissances quelconques des côtés adjacents.

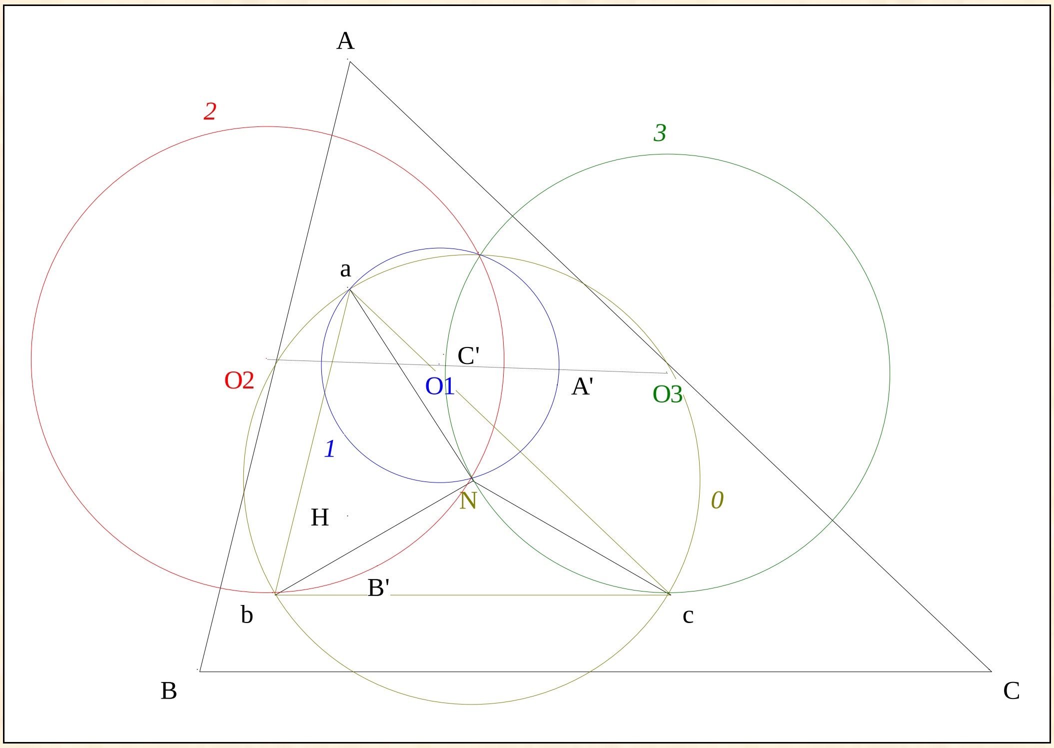
C. REMARQUES DE BOUTIN

1. Première remarque

VISION

Figure :

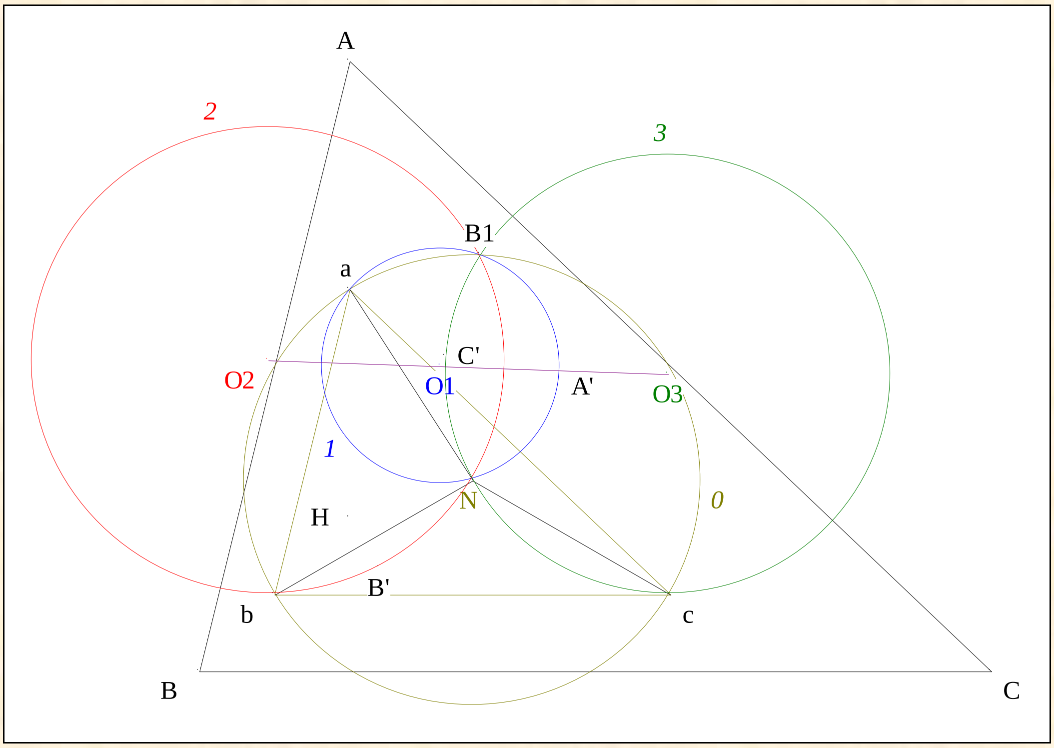
[13] Boubals G. C., *Journal de Mathématiques Élémentaires* **1** (1885) 31 et 204



Traits :	ABC	un triangle,
	abc	le triangle d'Euler de ABC,
	0	le cercle circonscrit à abc,
	N	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A', B', C'	les symétriques de H par rapport à (aN), (bN), (cN),
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles NaA', NbB' et NcC'
et	O1, O2, O3	les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

Donné : O1, O2 et O3 sont alignés.

VISUALISATION

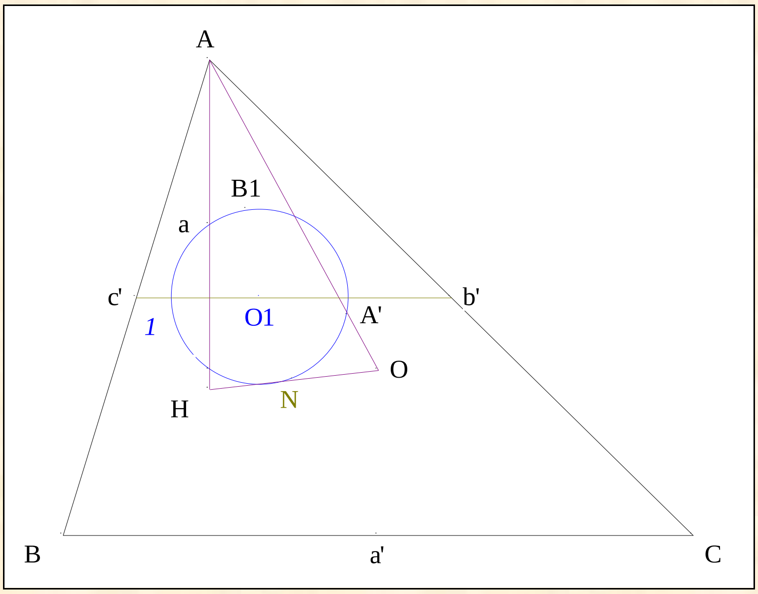


- D'après **B. 1.** Le premier point de Boubals, *1*, *2* et *3* concourent sur *0*.
- Notons B1 ce point de concours.
- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* admettant [NB1] pour corde commune, O1, O2 et O3 sont alignés.

2. Seconde remarque

VISION

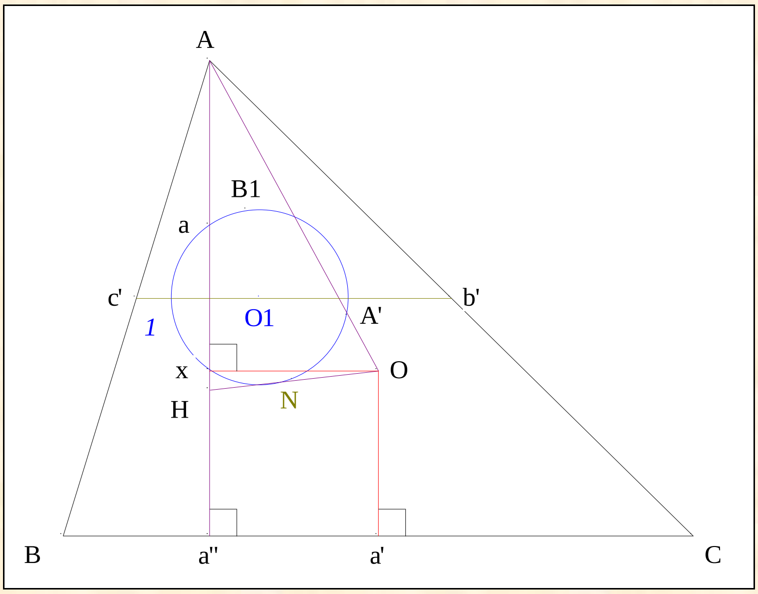
Figure :



Traits : aux hypothèses précédentes, nous ajoutons
a'b'c' le triangle médian de ABC.

Donné : O1 est sur (b'c').

VISUALISATION



- D'après **B. 1.** Scolie **2**, *1* est le cercle d'Euler du triangle AHO.

- Notons x le second point d'intersection de (AH) avec *1*
  et a" le pied de la A-hauteur de ABC.

- Par culture géométrique, Aa = Oa' et Oa' = a"X ;
  par transitivité de la relation =, Aa = a"X ;
  en conséquence, a et x sont deux points isotomiques de [Aa"].

- **Conclusion :** O1 est sur (b'c').

- Mutatis mutandis, nous montrerions que O2 est sur (c'a').
  O3 est sur (a'b').

3. Archive

QUESTION 193

Solution par M. Aug. Boutin.

Soit ABC *un triangle,* O *le centre du cercle circonscrit,* H *l'orthocentre, les circonférences des neuf points, des trois triangles* AOH, BOH, COH, *se coupent aux deux mêmes points.*

(G. Boubals.)

A titre de lemme, démontrons d'abord la proposition suivante (*) :

Soient H_a, H_b, H_c, les symétriques de H par rapport à AO, BO, CO : les quatre circonférences : ABC, AOH_a, BOH_b, COH_c se coupent en un même point M.

En effet, les angles BMO, CMO sont respectivement égaux aux angles BHO, CHO ; car les circonférences BMH_bO, CMH_cO sont les symétriques, par rapport à BO, CO, des circonférences BOH, COH ; d'ailleurs $\widehat{BMC} = \widehat{BMO} + \widehat{OMC} = \widehat{BHO} + \widehat{OHC} = \widehat{BHC}$; donc M est sur ABC.

On verrait, de même, que la circonférence AOH_a passe aussi par M.

Ceci posé, les trois circonférences considérées dans l'énoncé ont déjà, en commun, le centre E du cercle des neuf points de ABC.

Considérons le triangle $A_1B_1C_1$ qui a pour sommets les milieux des distances AH, BH, CH, et appliquons-y le lemme précédent, H étant l'orthocentre de $A_1B_1C_1$, H_a le symétrique de H, par rapport à EB_1.

Les trois circonférences B_1EH_b, C_1EH_c, A_1EH_a se coupent au même point M, situé sur la circonférence des neuf points

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

216 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

de ABC. Mais EB_1 étant parallèle à OB, H_b est le pied de la hauteur HH_b du triangle HBO, et la circonférence B_1EH_b est la circonférence des neuf points du triangle BOH. Le théorème est donc démontré.

Les deux points communs sont donc E et un point remarquable M de la circonférence des neuf points.

Remarques. — On peut encore remarquer ce qui suit :

1° Soient O_a, O_b, O_c les centres des trois circonférences considérées dans l'énoncé. Ces points sont respectivement situés à l'intersection de la perpendiculaire élevée sur le milieu de EM, et des côtés du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de ABC.

2° La transformée, par points anti-complémentaires, de la droite $O_aO_bO_c$ est une droite qui lui est parallèle et passant par E.

[14]

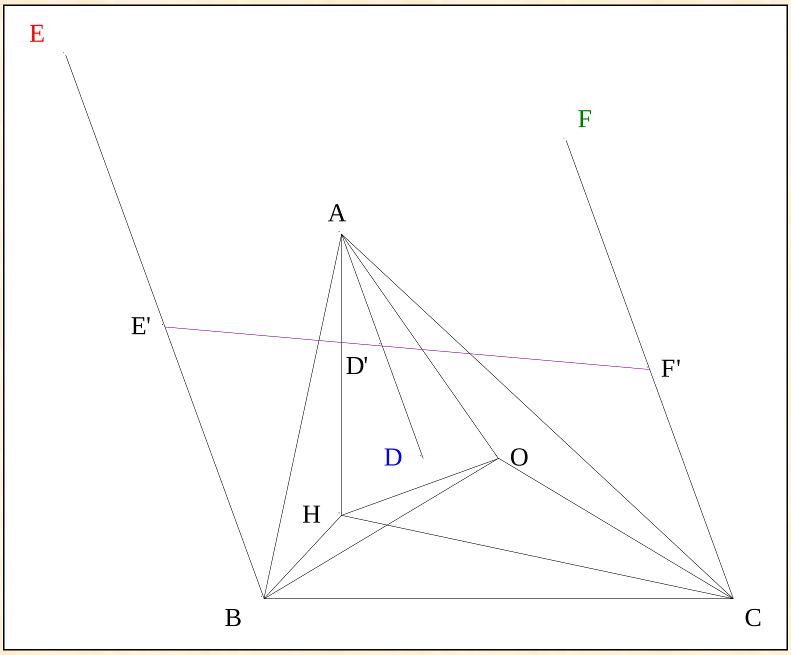
D. APPLICATION

[14] Boutin Aug., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 215-216

1. Avec les orthocentres des triangles AHO

VISION

Figure :

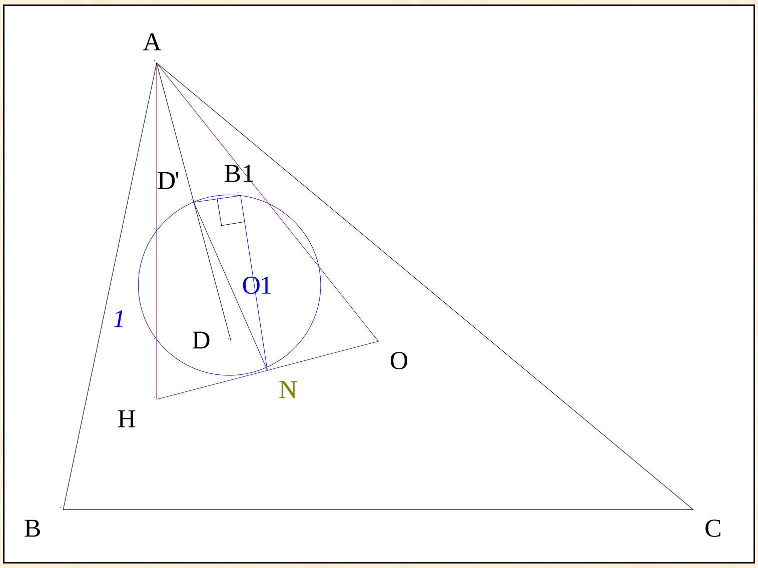


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	D, E, F	les orthocentres resp. des triangles AHO, BHO, CHO
et	D', E', F'	les milieux resp. de [AD], [BE], [CF].

Donné : D', E' et F' sont alignés.[15]

VISUALISATION

[15] 5th Kolmogorov cup (2001) 4th round, superior league



- Notons N le milieu de [HO],
  B1 le premier point de Boubals de ABC
  et *1* le cercle d'Euler de AHO.

- **Scolies :** **(1)** B1, N et D' sont sur *1*
  (2) D' et N sont deux points diamétraux de *1*.

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (D'B1) ⊥ (B1N).

- Notons *2*, *3* les cercles d'Euler resp. des triangles BHO, CHO.

- D'après **B. 1.** Le premier point de Boubals, *2*, *3* passent par B1.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (E'B1) ⊥ (B1N)
  (F'B1) ⊥ (B1N).

- **Conclusion :** d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,
  la transitivité de la relation // et le postulat d'Euclide, D', E' et F' sont alignés.

Scolie : (D'E'F') est tangente au cercle d'Euler de ABC en B1.