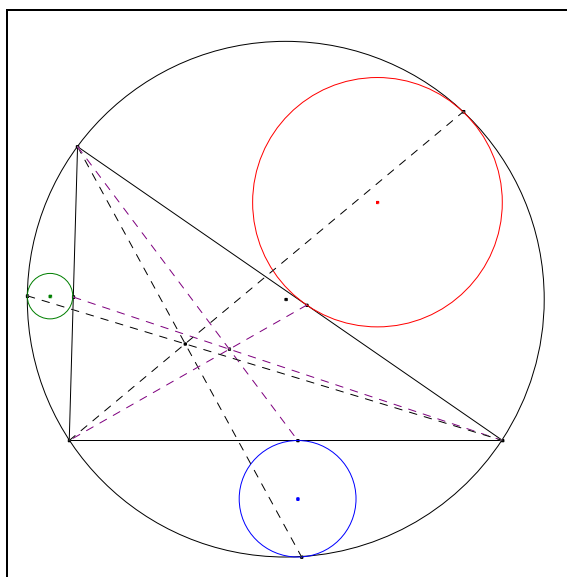


# LA PROMESSE - LE TOUR - LE PRESTIGE

OU

## LA GÉOMÉTRIE MAGIQUE

Jean – Louis AYME



**Résumé :** l'auteur s'est permis de s'identifier à "un artiste aux doigts prestes" i.e. à un prestidigitateur, voire à un magicien, pour présenter cet article comme un tour de magie où l'illusion s'efface devant la réalité du résultat. Cette démarche s'inspire du film *Le Prestige*<sup>1</sup> de Christopher Nolan (2006) basé sur le roman éponyme de Christopher Priest (1995).  
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

### Sommaire

- I. Les arcanes
  - 1. Commentaire
  - 2. Le gimmick ou la figure auxiliaire
  - 3. Le baron ou le résultat classique
  - 4. La première passe ou le premier lemme
  - 5. La seconde passe ou le second lemme
- II. Le tour de magie
  - 1. La promesse
  - 2. Le tour avec son boniment ou la visualisation par équivalence logique
  - 3. Le prestige ou la conclusion
- III Annexe

<sup>1</sup> La signification du titre provient de l'une des trois étapes (inventées dans le livre) que comporte un tour de magie.

## I. LES ARCANES

### 1. Commentaire

l'arcane est l'explication gardée secrètement du fonctionnement ou de la série de passes grâce auxquelles est réalisé le tour de magie.

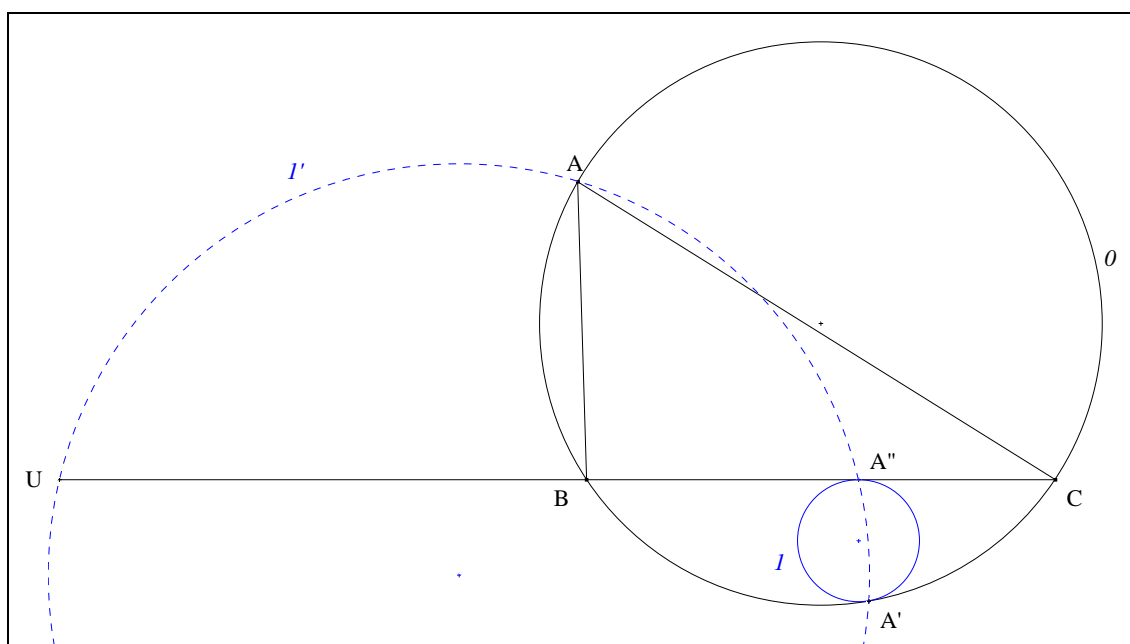
Rappelons que certains mathématiciens ont souvent été avares dans leurs publications comme Karl Friedrich Gauss (1777-1855) qui avait une peur viscérale de voir ses découvertes pillées par ses rivaux, notamment par Isaac Newton (1642-1727). À ce sujet, Niels Henrik Abel (1802-1829) écrivait à propos de Gauss

*Il est comme un renard qui efface ses traces dans le sable avec sa queue* <sup>2</sup>

### 2. Le gimmick<sup>3</sup> ou la figure auxiliaire

#### VISION

Figure :



**Traits :**

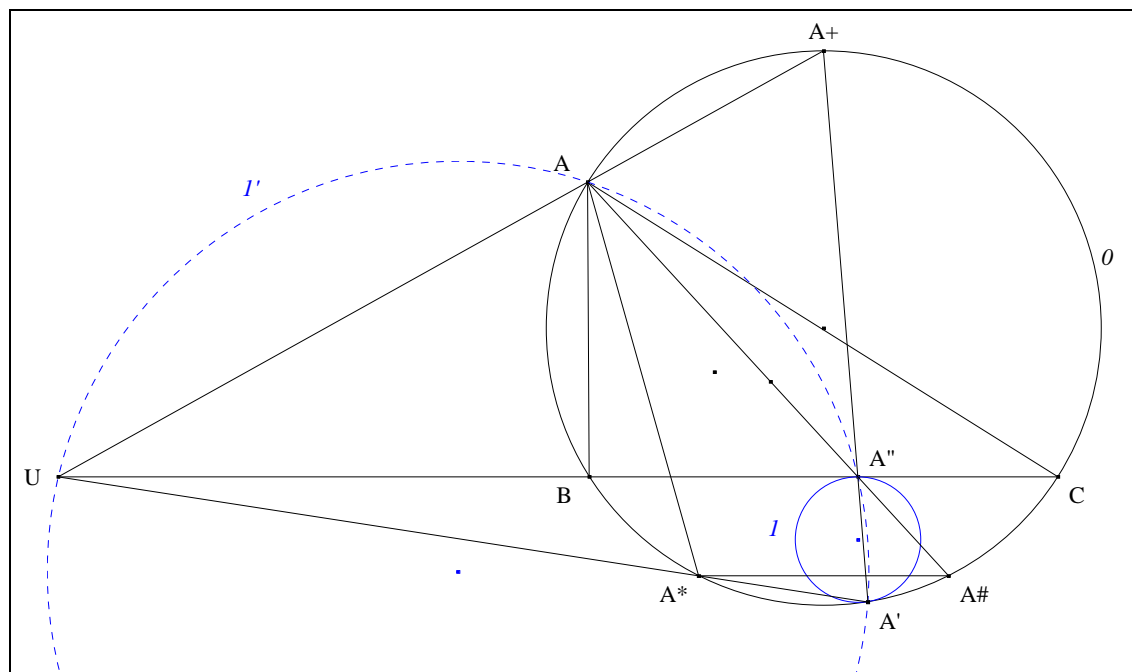
ABC	un triangle,
$\mathcal{O}$	le cercle circonscrit de ABC,
$A'$	un point de l'arc BC ne contenant pas A,
$I$	le cercle tangent intérieurement à $\mathcal{O}$ en $A'$ et à (BC),
$A''$	le point de contact de $I$ avec (BC),
$I''$	le cercle passant par A, $A'$ , $A''$
et U	le second point d'intersection de $I'$ avec (BC).

**Donné :** U est le pied de la A-bissectrice extérieure de ABC.

<sup>2</sup> Abel N. H., Simmons G. F., *Calculus Gems*, New York, McGraw Hill Inc. (1992) 177.

<sup>3</sup> Un *gimmick* est un petit accessoire qui permet la réalisation d'un tour de prestidigitation. L'existence même du *gimmick* doit rester ignorée du spectateur.





- Notons  $A\#$  le second point d'intersection de  $(AA'')$  avec  $O$   
et  $A^*$  le second point d'intersection de la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A\#$  avec  $O$ .
- Les cercles  $O$  et  $I'$ , le point de base  $A$  et  $A'$ , la monienne  $(A\#AA'')$ , les parallèles  $(A\#A^*)$  et  $(A''U)$ , conduisent au théorème 8' de Reim ; en conséquence,  $A^*, A'$  et  $U$  sont alignés.
- **Conclusion :**  $(AA^*)$  est la  $A$ -isogonale de  $(AA\#)$  relativement à  $ABC$ .

**Note historique :** l'idée de considérer le cercle  $I'$  s'inspire du lemme 1 d'un article de 2008 signé par Cosmin Pohoata et Vladimir Zajic<sup>4</sup> et démontré métriquement à l'aide de rapports.

Lemma 1.

Let  $P$  be an arbitrary point in the plane of  $ABC$  and  $XYZ$  the cevian triangle of the point  $P$ . Let three arbitrary circle  $U, V, W$ , passing through the endpoints of the segments  $AX, BY, CZ$ , meet the triangle circumcircle  $O$  again at points  $A', B', C'$  and the sidelines  $BC, CA, AB$  again at the points  $U, V, W$ , respectively. The points  $U, V, W$  are collinear, if and only if the lines  $AA', BB', CC'$  are concurrent.

### 3. Le baron<sup>5</sup> ou le résultat classique

#### VISION

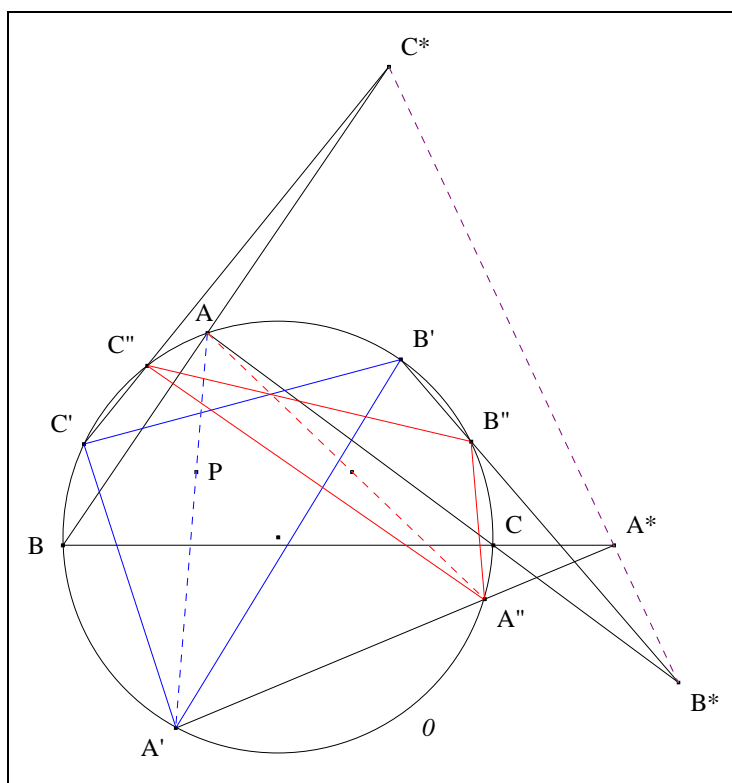
**Figure :**

<sup>4</sup> Pohoata C., Zajic V., Generalization of the Apollonius circles (07/07/2008), lemme 1 p. 1.  
[http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0807/0807.1131v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0807/0807.1131v1.pdf).

<sup>5</sup> Un baron est une personne faisant prétendument partie du public, mais en fait complice de l'illusionniste, dont ce dernier peut avoir besoin pour certains tours.



Figure :



**Traits :**

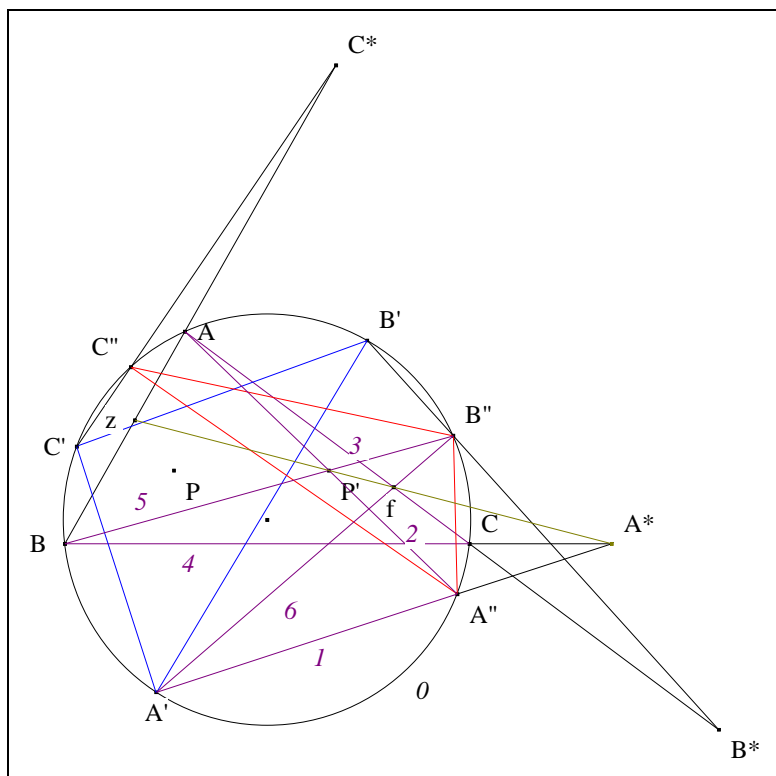
ABC	un triangle,
$O$	le cercle circonscrit de ABC,
P	un point,
$A'B'C'$	le triangle P-circumcévien de ABC,
$A'', B'', C''$	trois points de $O$ ,
$A^*, B^*, C^*$	le point d'intersection de $(A'A'')$ et $(BC)$ , de $(B'B'')$ et $(CA)$ , de $(C'C'')$ et $(AB)$ .

**Donné :**

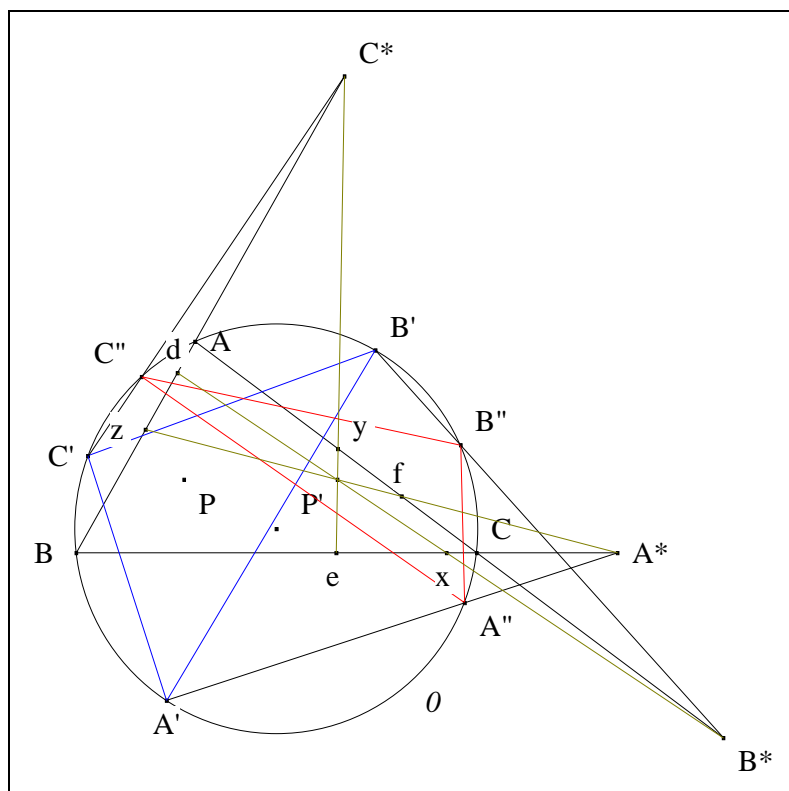
$(AA''), (BB''), (CC'')$  sont concourantes  
*si, et seulement si,*  
 $A^*, B^*$  et  $C^*$  sont alignés.

### VISUALISATION NÉCESSAIRE <sup>7</sup>



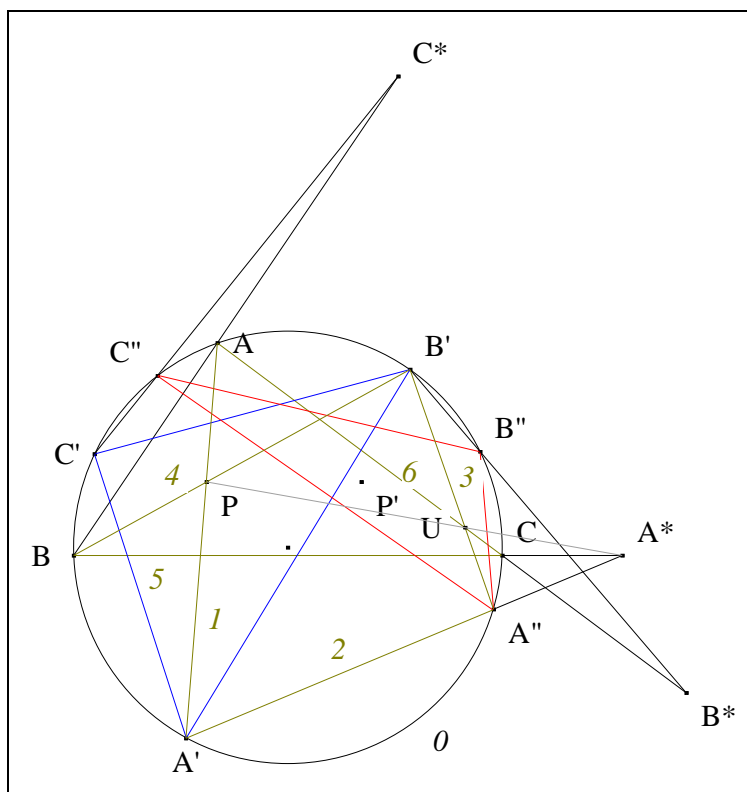


- Notons  $f$  le point d'intersection de  $(CA)$  et  $(A'B'')$ .
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2)  
 $(A^*P'f)$  est la pascale de l'hexagone cyclique  $A'A''ACBB''A'$ .
- **Conclusion partielle** : d'après l'axiome d'incidence Ia,  $A^*, P', f$  et  $z$  sont alignés.

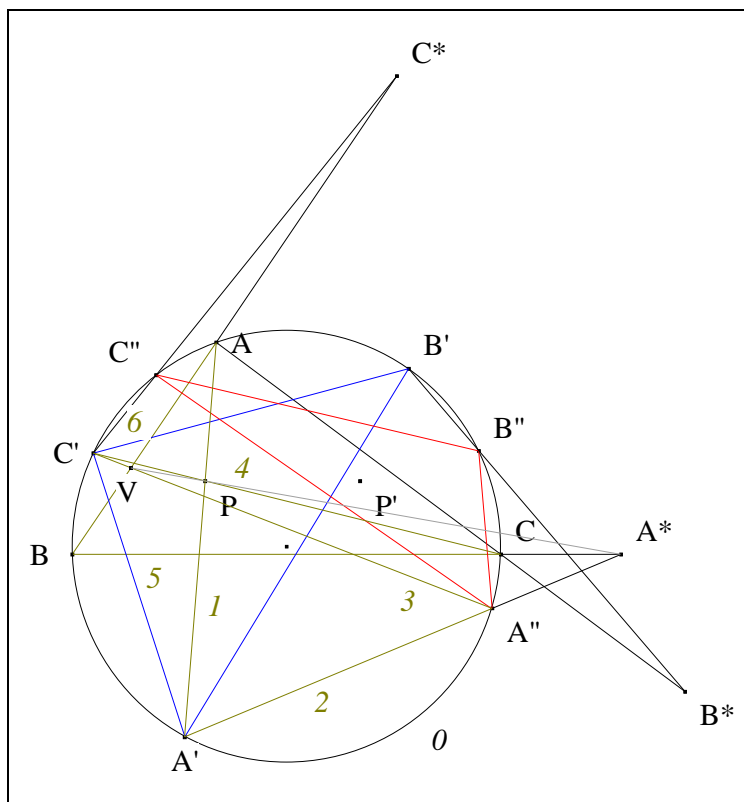




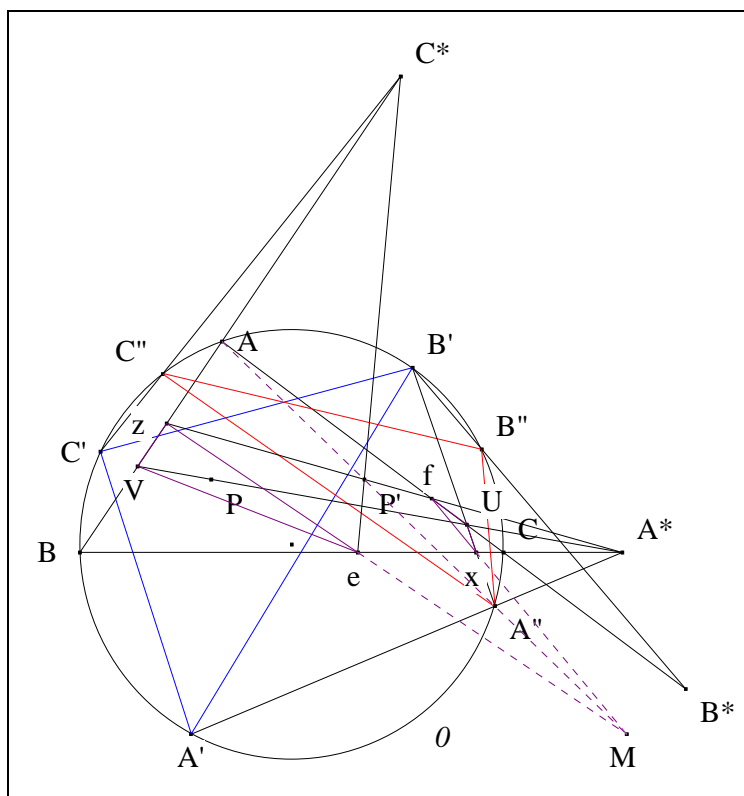
- Notons  $x, y$  les points d'intersection de  $(BC)$  et  $(B'A'')$ ,  $(CA)$  et  $(C'B'')$   
 et  $d, e$  les points d'intersection de  $(AB)$  et  $(B'C'')$ ,  $(BC)$  et  $(C'A'')$ ,
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  - (1)  $B^*, P', d$  et  $x$  sont alignés
  - (2)  $C^*, P', e$  et  $y$  sont alignés.



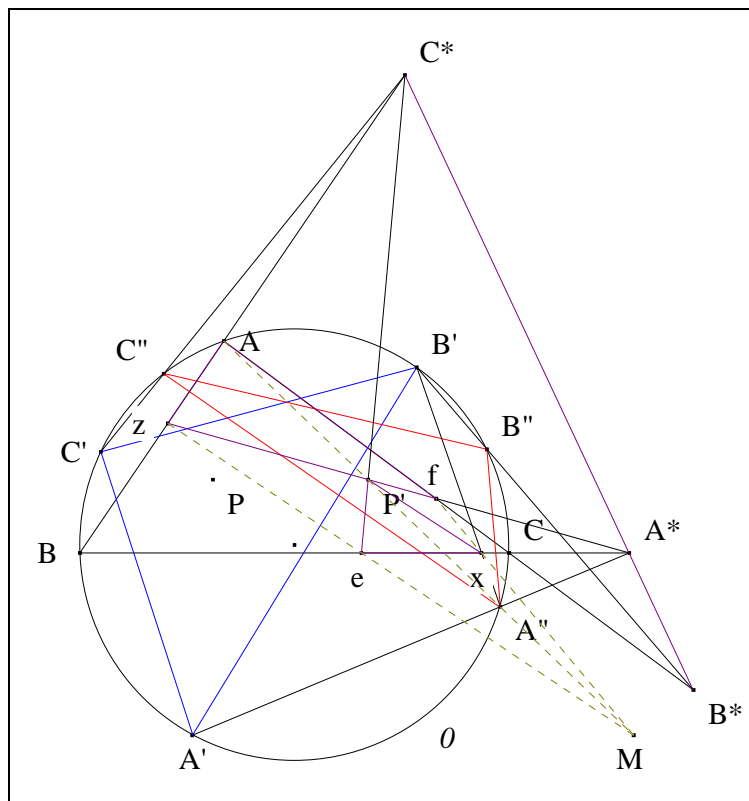
- Notons  $U$  le point d'intersection de  $(B'xA'')$  et  $(A''fCB^*)$ .
- D'après Pascal "Hexagrammum mysticum" (Cf. Annexe 2),  $(PA^*U)$  est la pascale de l'hexagone cyclique  $AA'A''B'BCA$ .



- Notons  $V$  le point d'intersection de  $(C'eA'')$  et  $(BzdAC^*)$ .
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),  $(PA^*V)$  est la pascale de l'hexagone cyclique  $AA'A''C'CBA$ .
- **Conclusion partielle** : d'après l'axiome d'incidence Ia,  $P, A^*, U$  et  $V$  sont alignés.



- Les triangles  $fxU$  et  $zeV$  étant en perspective de centre  $A^*$ , d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 3),  $(fx)$  et  $(ze)$  se coupent sur l'axe de perspective ( $A''A$ ).
- Notons  $M$  ce point d'intersection.



- Les triangles  $Azf$  et  $P'ex$  étant en perspective de centre  $M$ , d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2),  $(C^*A^*B^*)$  est l'axe de cette perspective.
- **Conclusion :**  $A^*, B^*$  et  $C^*$  sont alignés.

**Commentaire :** ce résultat apparaît comme une généralisation du "Point de Steinbart"<sup>8</sup> d'Oliver Funck.

**Note historique :** dans son Message *Hyacinthos*, Bernard Gibert<sup>9</sup> commence par

*a very good friend of mine is offering you this little problem...*

continue en présentant ce problème

*Let ABC a triangle inscribed in a conic [can be a circle]...*

et termine par

*Can you "synthetically" prove that the points  $A', B', C'$  are collinear?*

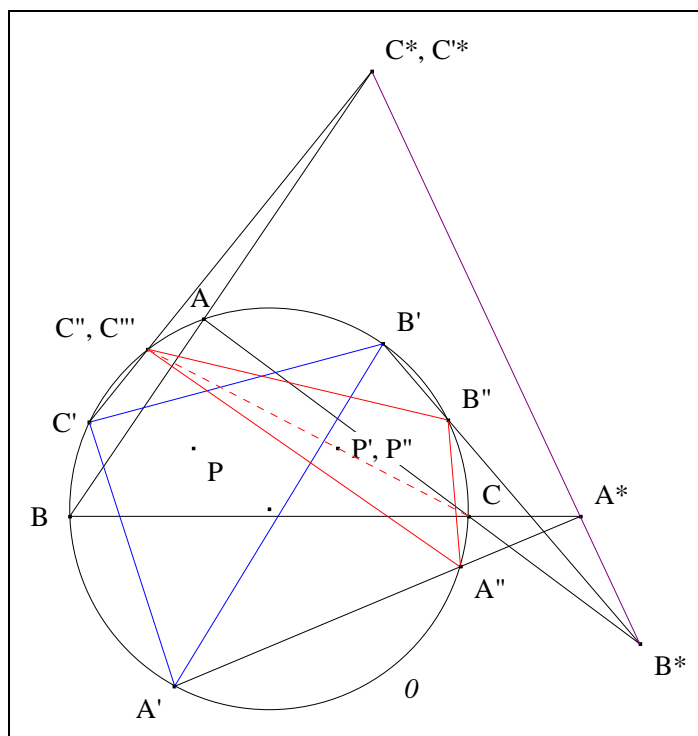
<sup>8</sup> Ayme J.-L., Les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. 3 ;  
<http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>

<sup>9</sup> Gibert B., A synthetical challenge, Message *Hyacinthos* # 523 du 16/03/2000 ;  
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/messages/523>

La solution de Darij Grinberg<sup>10</sup> concernant le cercle, a recours à "la loi des sinus", puis au théorème de Ceva dans sa version trigonométrique suivi du théorème de Ménélaüs. Dans un dernier message<sup>11</sup>, Grinberg répond à une remarque de Gibert en disant

*but I think the problem was posed for circles, because it is hard to understand what means the word "synthetical" for conics.*

### VISUALISATION SUFFISANTE



- $A^*, B^*$  et  $C^*$  sont alignés.
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que  $(AA''), (BB''), (CC'')$  ne sont pas concourantes.
- Notons
 

$P''$	le point d'intersection de $(AA'')$ et $(BB'')$ ,
$C'''$	le second point d'intersection de $(CP'')$ avec $O$
et $C'^*$	le point d'intersection de $(C'C''')$ et $(AB)$ .
- D'après la visualisation nécessaire,
 

en conséquence,	$A^*, B^*$ et $C^*$ sont alignés ;
il s'en suit que	$C'^*$ et $C^*$ sont confondus ;
il en résulte que	$C''$ et $C'''$ sont confondus ;
	$P'$ et $P''$ sont confondus,

 ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :**  $(AA''), (BB''), (CC'')$  sont concourantes.

**Note historique :** cette équivalence n'est pas présente dans le message de Bernard Gibert.

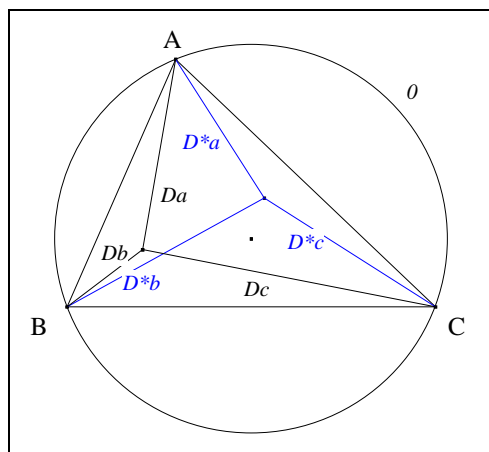
<sup>10</sup> Grinberg D., Proof of a "synthetical challenge", Message *Hyacinthos* # 6208 du 25/12/2002.  
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6208>.

<sup>11</sup> Grinberg D., Proof of a "synthetical challenge", Message *Hyacinthos* # 6214 du 26/12/2002.  
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6214>.

## 5. La seconde passe ou le second lemme

### VISION

Figure :



**Traits :** ABC un triangle,  
 $O$  le cercle circonscrit de ABC,  
 $Da, Db, Dc$  resp. les A, B, C-céviennes de ABC  
 et  $D^*a, D^*b, D^*c$  les A, B, C-isogonales resp. de  $Da, Db, Dc$  relativement à ABC.

**Donné :**  $Da, Db, Dc$  sont concourantes en un point non situé sur  $O$   
*si, et seulement si,*  
 $D^*a, D^*b, D^*c$  sont concourantes.<sup>12</sup>

## II. LE TOUR DE MAGIE

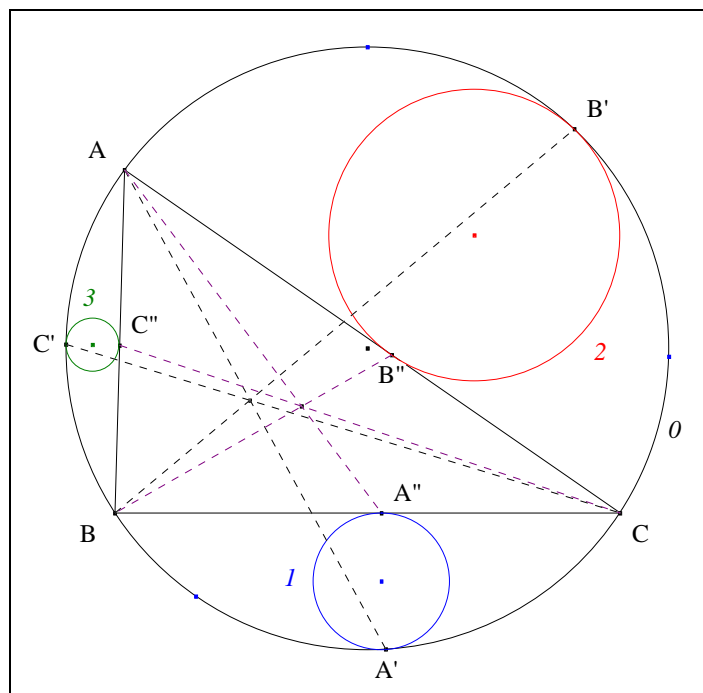
### 1. La promesse<sup>13</sup>

### VISION

Figure :

<sup>12</sup> Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.

<sup>13</sup> La "promesse" est la première étape d'un tour de magie, où le magicien montre au public quelque chose qui semble ordinaire, mais ne l'est pas.



**Traits :**

- ABC un triangle,
- $O$  le cercle circonscrit de ABC,
- $A'B'C'$  un triangle inscrit dans  $O$ ,
- $I$  le cercle tangent intérieurement à  $O$  en  $A'$  et à  $(BC)$ ,
- $A''$  le point de contact de  $I$  avec  $(BC)$ ,
- $2$  le cercle tangent intérieurement à  $O$  en  $B'$  et à  $(CA)$ ,
- $B''$  le point de contact de  $I$  avec  $(CA)$ ,
- $3$  le cercle tangent intérieurement à  $O$  en  $C'$  et à  $(AB)$ ,
- et  $C''$  le point de contact de  $I$  avec  $(AB)$ .

**Donné :**

$(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes  
*si, et seulement si,*  
 $(AA'')$ ,  $(BB'')$  et  $(CC'')$  sont concourantes.

**Note historique :**

en 2003, Floor van Lamoen de Goes (Pays-Bas) rappelle dans un Message *Hyacinthos*<sup>14</sup> que la condition nécessaire a déjà été présentée sans préciser où, et signale que ce résultat peut être étendu au cas où le point de concours de  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  est à l'extérieur de ABC.

Dans l'une de ses deux réponses, le russe Alexey A. Zaslavsky<sup>15</sup> affirme qu'il a travaillé sur cette situation cinq années auparavant.

En 2005, le regretté vénézuélien Juan Carlos Salazar (†30/03/2008) propose la condition suffisante au site web *Trianguloscabri* dirigée par Ricardo Barroso Campos<sup>16</sup> de Séville (Espagne). Une solution barycentrique assistée par le logiciel *Mathematica* est donnée par Francisco Javier Garcia Capitan<sup>17</sup> de Cordoba (Espagne) qui dirige un site de Géométrie<sup>18</sup> sur le web.

Une recherche m'a permis de constater que l'allure de la figure pouvait s'identifier à celle d'une San Gaku<sup>19</sup> de la préfecture de Tokyo (Japon), datant de 1796 et à une autre

<sup>14</sup> Lamoen (van) F., Message *Hyacinthos* # 7819 du 08/09/2003 ;  
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7819>.

<sup>15</sup> Zaslavsky A. A., Messages *Hyacinthos* # 7822, 7823 du 09/09/2003.  
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7822>.

<sup>16</sup> <http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>,  
 problème 245.

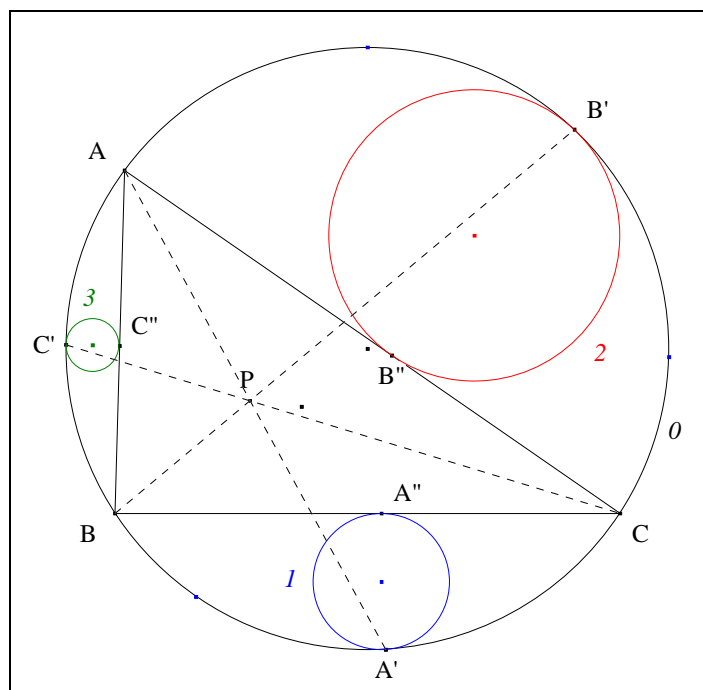
<sup>17</sup> <http://garciacapitan.auna.com/problemas/sol245garcap>.

<sup>18</sup> <http://garciacapitan.auna.com/>.

<sup>19</sup> Fukagawa H., Pedoe D., Exemple 2.6, *Japanese Temple Geometry Problems*, p. 115,

de la préfecture de Saitama (Japon), datant de 1816, toutes les deux ayant aujourd'hui disparues.

## 2. Le tour<sup>20</sup> avec son boniment<sup>21</sup> ou la visualisation par équivalence logique



$(AA'), (BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en P

\*

Le baron

Charles Babbage Research Centre (1989) ; ISBN 0-919611-21-4.

Fujita K. (1772-1828), Sinpeki Sanpo, *Mathematical Tablets* vol. 1 (1789).

Une San Gaku est une énigme géométrique japonaise gravée sur une tablette votive ;

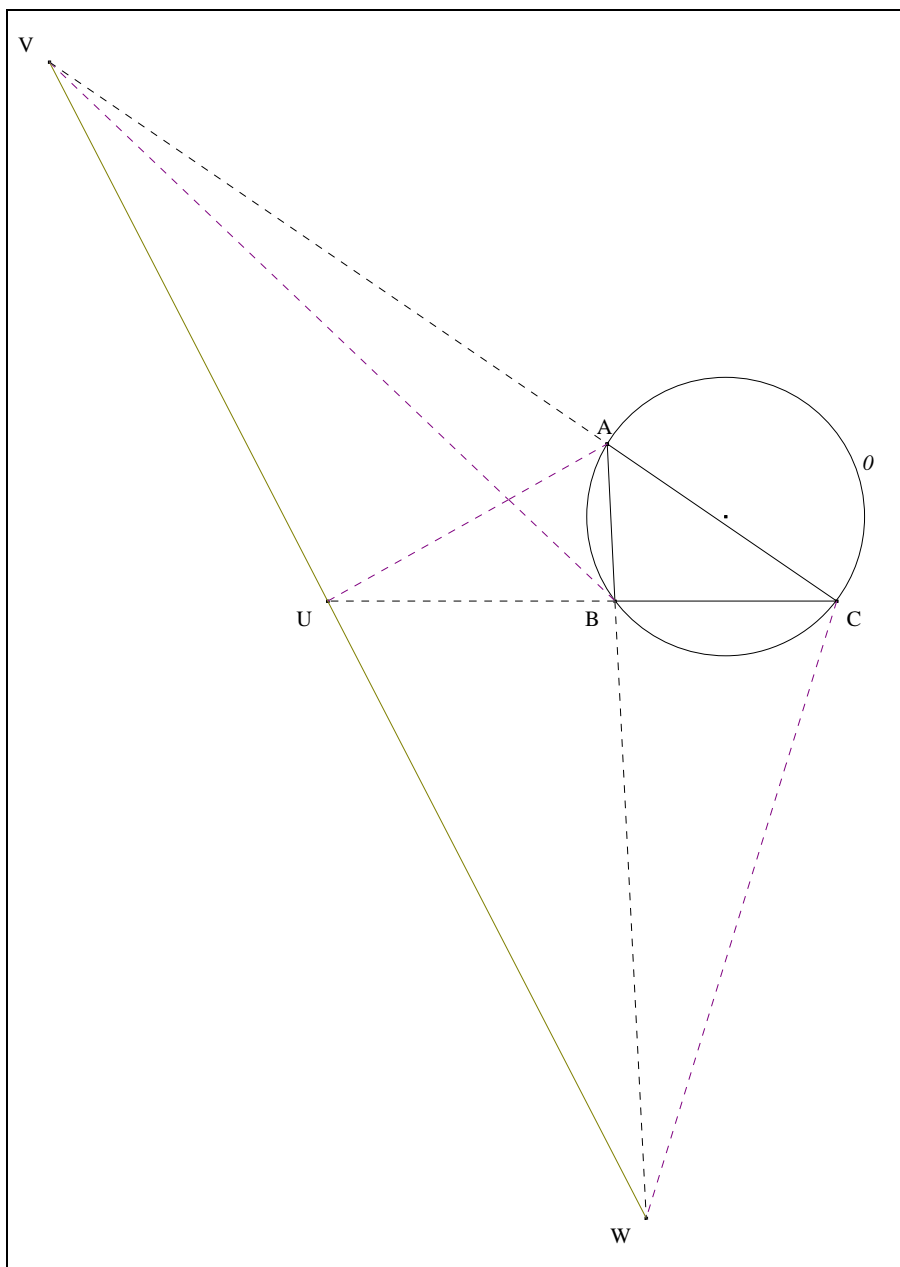
Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4 p. 4.

La seconde étape d'un tour de magie consiste en l'exécution, le "tour", où le magicien rend l'acte ordinaire extraordinaire.

Le boniment est un discours qui accompagne l'exécution du tour.

<sup>20</sup>

<sup>21</sup>



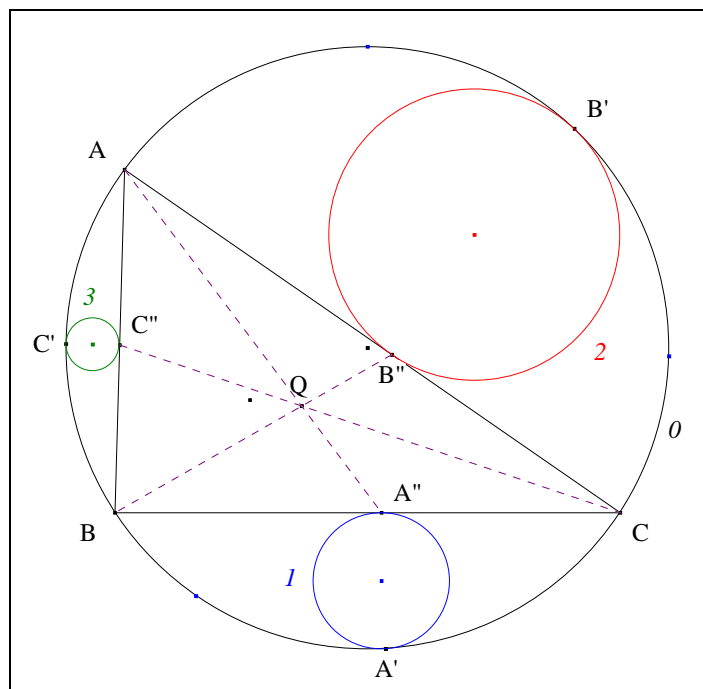
U, V et W sont alignés.

\*

Première passe





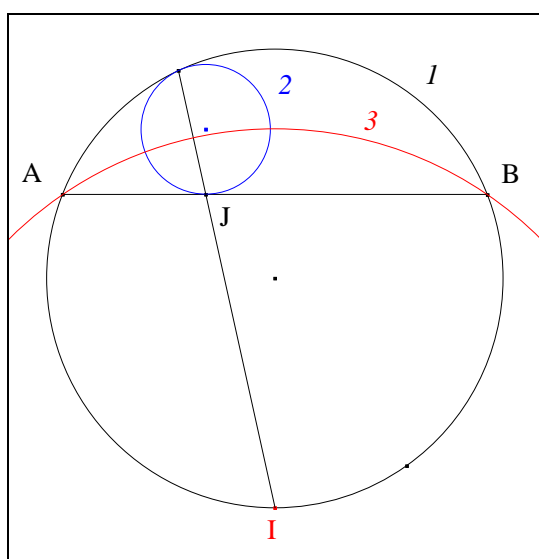


$(AA'')$ ,  $(BB'')$  et  $(CC'')$  sont concourantes en  $Q$ .

**Commentaire :** les visualisations nécessaire et suffisante seront présentées en Annexe 4.

### III. ANNEXE

#### 1. Une autre San Gaku d'Iwate<sup>24</sup>



<sup>24</sup>

*Leybourn's Mathematical repository* (Nouvelle série) 6 tome I (1811) 209.

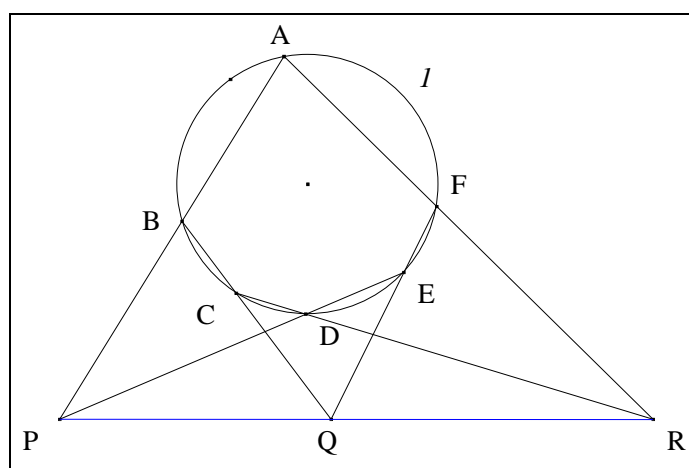
**Traits :**  $I$  un cercle,  
 $[AB]$  une corde horizontale de  $I$ ,  
 $J$  un point de  $[AB]$ ,  
 $2$  un cercle nordique tangent à  $(AB)$  en  $J$ ,  
 $I$  le pôle sud de  $I$   
 et  $3$  le cercle de centre  $I$ , passant par  $A$ .

**Donné :**  $2$  est tangent à  $I$  si, et seulement si,  $2$  est orthogonal à  $3$ .

**Commentaire :** ce résultat s'apparente à un théorème de F. G.-M.<sup>25</sup>.

**Note historique :** ce type de San Gaku<sup>26</sup> se retrouve aussi à la préfecture d'Aichi (Japon) sur une tablette datant de 1843 qui, aujourd'hui, a disparue.

## 2. Hexagramma mysticum<sup>27</sup>

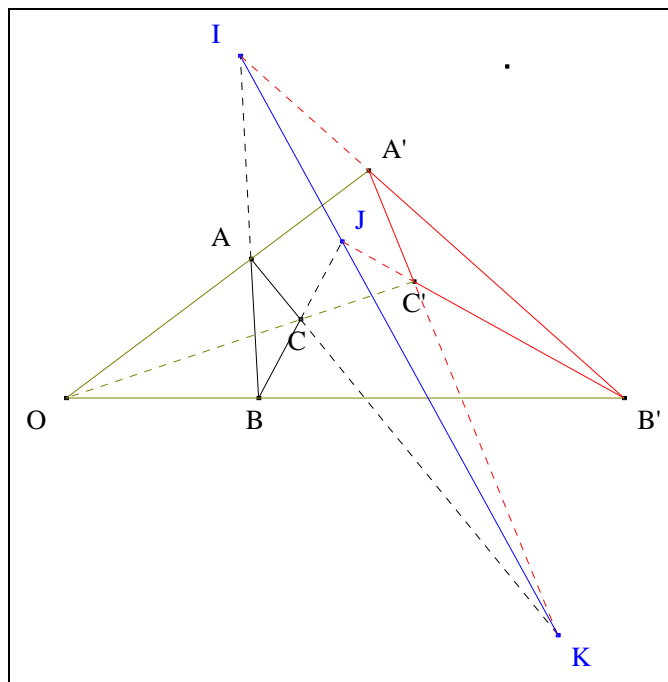


**Traits :**  $I$  un cercle,  
 $ABCDEF$  un hexagone tels que les points  $A, B, C, D, E$  soient sur  $I$ ,  
 et  $P, Q, R$  les points d'intersection de  $(AB)$  et  $(DE)$ ,  $(BC)$  et  $(EF)$ ,  $(CD)$  et  $(FA)$ .

**Donné :**  $F$  est sur  $I$  si, et seulement si,  $P, Q$  et  $R$  sont alignés.

## 3. Le théorème des deux triangles de Desargues<sup>28</sup>

<sup>25</sup> F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th éd., (1920) ; rééditions Jacques Gabay, Paris, (1991) théorème 408 III p. 600.  
<sup>26</sup> Fukagawa H., Pedoe D., 1. 6., Japanese Temple Geometry Problems, Charles Babbage Research Centre (1989) 14, 88-89.  
<sup>27</sup> Pascal B. (1640)  
<sup>28</sup> Bosse A..

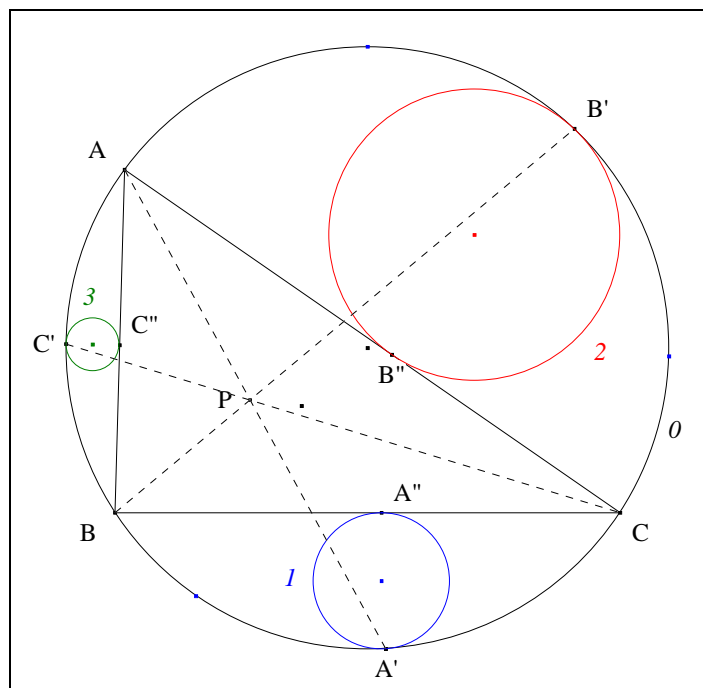


**Hypothèses :**  $ABC$  un triangle,  
 $A'B'C'$  un triangle tel que les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  soient concourantes,  
 $O$  le point de concours de  $(AA')$  et  $(BB')$ ,  
 et  $I, J, K$  le point d'intersection de  $(AB)$  et  $(A'B')$ , de  $(BC)$  et  $(B'C')$ , de  $(CA)$  et  $(C'A')$ .

**Conclusion :**  $(CC')$  passe par  $O$  si, et seulement si,  $I, J$  et  $K$  sont alignés.

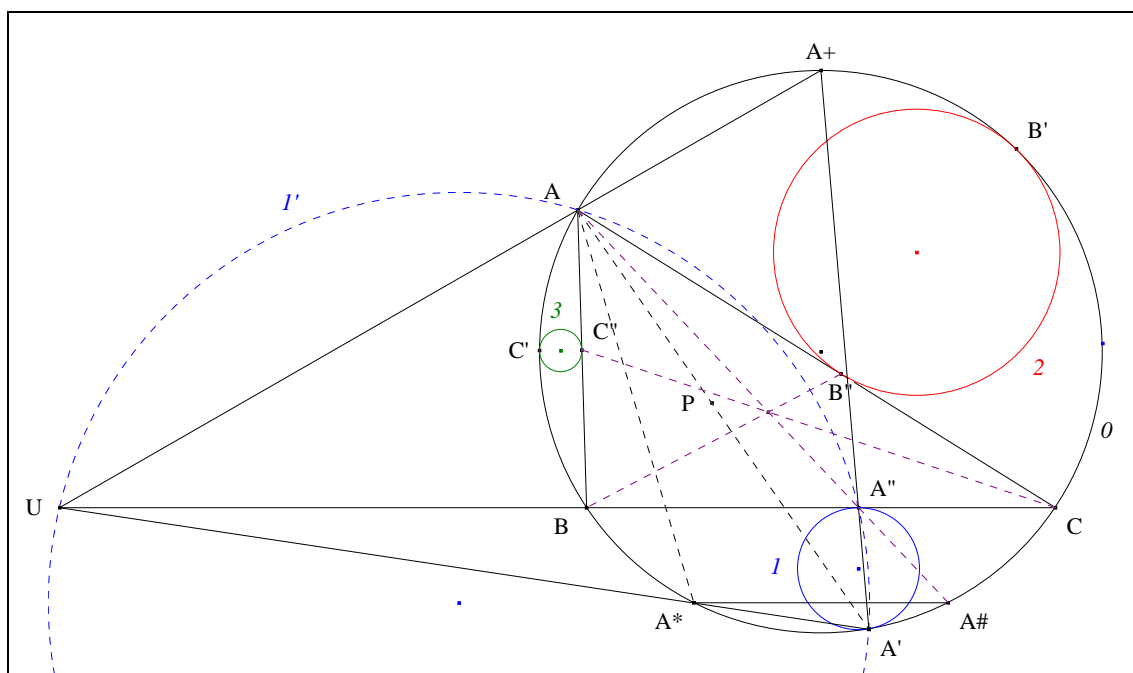
#### 4. Visualisation

##### VISUALISATION NÉCESSAIRE



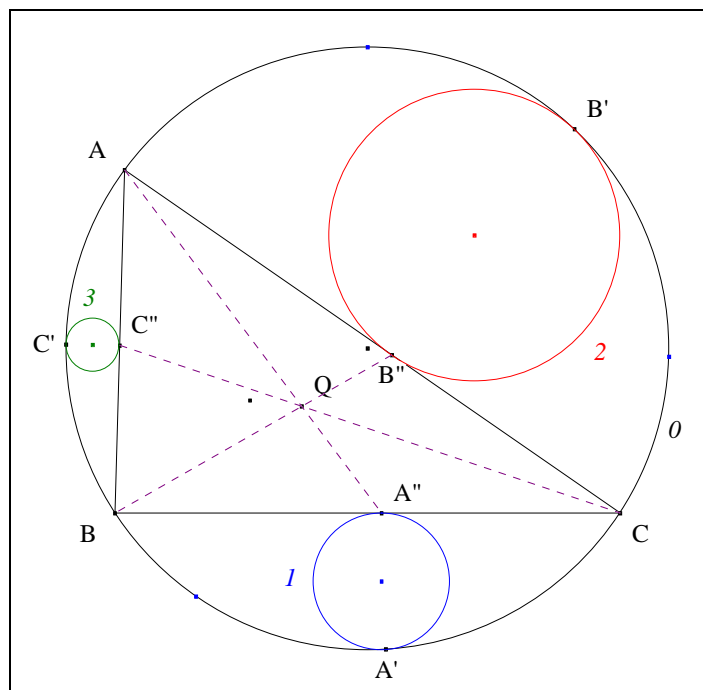
- $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

- Notons  $P$  ce point de concours.

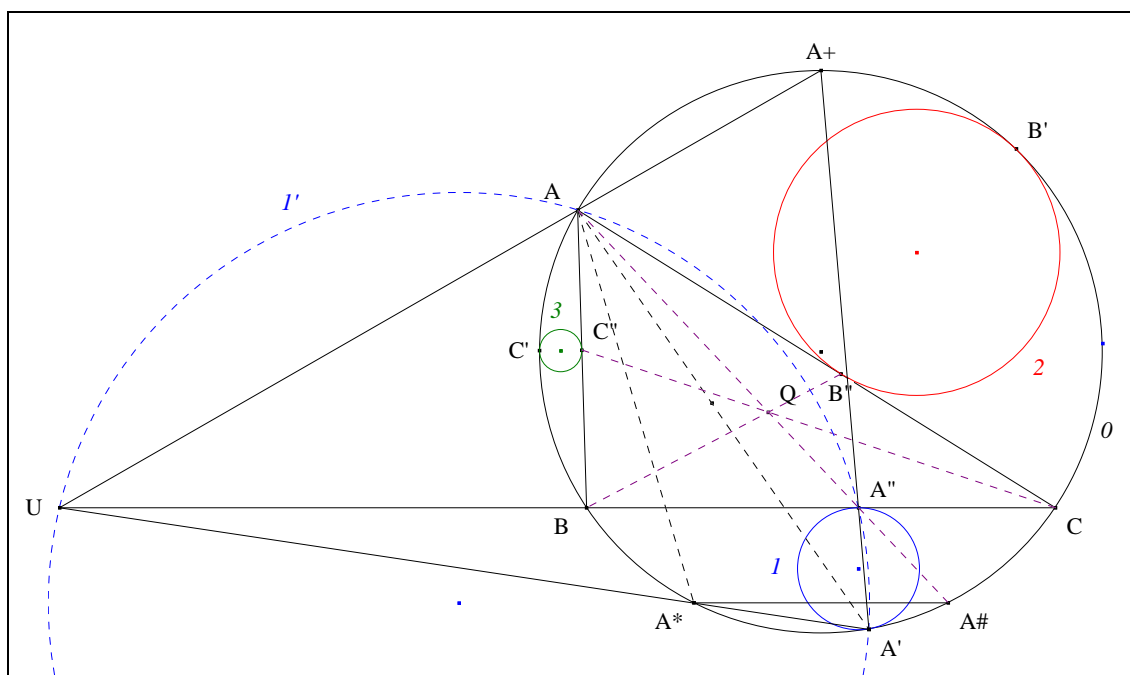


- Notons  $A^+$  le premier A-point de ABC,  
 $I'$  le cercle passant par A, A', A",  
 $U$  le second point d'intersection de  $I'$  avec (BC),  
 $A\#$  le second point d'intersection de (AA") avec  $\theta$ ,  
 $A^*$  le second point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par A# avec  $\theta$   
et ..... circulairement.
- D'après I. 2. La figure auxiliaire,  $U, V, W$  sont les pieds des A, B, C-bissectrices extérieure de ABC.
- D'après I. 3. Le résultat classique,  $U, V, W$  sont alignés.
- D'après I. 4. Le premier lemme,  $(AA^*), (BB^*), (CC^*)$  sont concourantes en un point non situé sur  $\theta$ .
- Notons  $Q^*$  ce point de concours.
- D'après I. 2. scolie,  $(AA\#), (BB\#), (CC\#)$  sont resp.  
les A, B, C-isogonales de  $(AA^*), (BB^*), (CC^*)$  relativement à ABC.
- D'après I. 5. Le second lemme,  $(AA\#), (BB\#), (CC\#)$  sont concourantes en un point non situé sur  $\theta$ .
- Notons  $Q$  ce point de concours.
- **Conclusion :**  $(AA''), (BB'')$  et  $(CC'')$  sont concourantes en  $Q$ .

## VISUALISATION SUFFISANTE



- $(AA'')$ ,  $(BB'')$  et  $(CC'')$  sont concourantes en un point non situé sur  $O$ .
- Notons  $Q$  le point de concours de  $(AA'')$ ,  $(BB'')$  et  $(CC'')$ .



- Notons  $A^+$  le premier A-perpoint de ABC,  
 $I'$  le cercle passant par A,  $A'$ ,  $A''$ ,  
 $U$  le second point d'intersection de  $I'$  avec  $(BC)$ ,  
 $A\#$  le second point d'intersection de  $(AA'')$  avec  $O$ ,  
 $A^*$  le second point d'intersection de la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A\#$  avec  $O$   
 et ..... circulairement.
- D'après I. 2. scolie,  $(AA^*)$ ,  $(BB^*)$ ,  $(CC^*)$  sont resp.  
 les A, B, C-isogonales de  $(AA\#)$ ,  $(BB\#)$ ,  $(CC\#)$  relativement à ABC.

- D'après I. 5. Le second lemme,  $(AA^*), (BB^*), (CC^*)$  sont concourantes.
- Notons  $Q^*$  ce point de concours.
- D'après I. 2. La figure auxiliaire,  $U, V, W$  sont les pieds des A, B, C-bissectrices extérieure de ABC.
- D'après I. 3. Le résultat classique,  $U, V, W$  sont alignés.
- **Conclusion :** d'après I. 4. Le premier lemme,  $(AA'), (BB'), (CC')$  sont concourantes.