Mathématiques et Pédagogie **144**

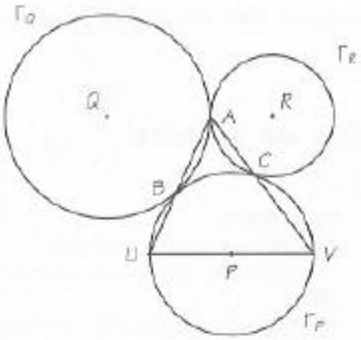
(Belgique) 2003

À propos du théorème de Boutin

J.-L. AYME, *Lycée Geoffroy, St-Denis-de-la-Réunion*

Dans la forêt, vaste et obscure, des théorèmes portant sur la géométrie du triangle, il m'a été permis d'entrevoir une clairière, voir le théorème de Boutin (1) dont les différentes versions contribuent dans un souci d'élégance et de clarté, à rendre plus aisées et plus simples certaines démonstrations considérées comme ardues.

Le théorème de Boutin



Hypothèses :

Γ_P, Γ_Q, Γ_R trois cercles de centre P, Q et R, deux à deux tangents extérieurement.

A, B, C les points de contacts respectivement de Γ_R et Γ_Q, de Γ_Q et Γ_P, de Γ_P et Γ_R.

U, V les points d'intersection respectivement des droites (AB) et (AC) avec Γ_P.

Thèse :

(UV) est parallèle à (QR) passant par P.

Démonstration :

• Notons T_A la tangente commune intérieure à Γ_R et Γ_Q, et T_U, T_V les tangentes à Γ_P en U et V.

Adresse de l'auteur: Jean-Louis AYME, rue Ste-Marie, 37, 97400 St-Denis-de-la-Réunion

(1) M. A. Boutin est né à Paris en 1858. Professeur de mathématiques, il entre en 1885 à la Société mathématique de France et publie dans le Journal de mathématiques élémentaires de 1890, un théorème qui aujourd'hui, porte son nom. En 1889, il découvre une propriété caractérisant tous les points de la droite d'Euler.

Scolie :

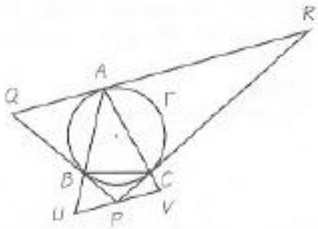
H est l'orthocentre du triangle AUV ; la hauteur (AH) étant perpendiculaire à (UV) et à la tangente T_A de Γ en A en tant que diamètre de Γ, T_A est parallèle à (UV).

Démonstration :

• **C.N.** : d'après le théorème de Möbius ([3]), le cercle de diamètre $[UV]$ passant par B et C, est orthogonal à Γ ce qui revient à dire que les droites (PB) et (PC) sont tangentes à Γ.

• **C.S.** : d'après le théorème de Pascal, (UPV) est la pascale ([4]) de l'hexagone dégénéré ABT_BHCT_CA ; les triangles BUV et CUV étant rectangles en B et C sont inscriptibles dans le demi-cercle de diamètre $[UV]$; puis, en appliquant le théorèmede Boutin, on conclut.

Version à partir du triangle tangentiel



Hypothèses :
PQR est un triangle,
Γ le cercle inscrit dans PQR,
ABC le cercle de contact de PQR,
et Δ_P une droite passant par P telle que U, V soient les points d'intersection de Δ_P avec (AB) et (AC)
Thèse :
Δ_P est parallèle à (QR) si, et seulement si, P est le milieu de $[UV]$.

Démonstration :

Le cercle Γ_P de centre P passant par B et C coupe (AB) en U' et (AC) en V' ; d'après le théorème de Bouin, $(U'V')$ est la parallèle à (QR) passant par le milieu P de $[U'V']$.

([3]) Möbius A. F., mathématicien allemand (1790-1868) ; le théorème : une sécante mobile étant menée par l'un des points d'intersection de deux cercles, les droites qui joignent l'autre point d'intersection aux deux extrémités de la sécante déterminent entre elles un angle constant égal à l'angle déterminé par les droites qui joignenet ce même point d'intersection aux deux centres.

([4]) Cf. appendice 3.

• Les cercles Γ_P et Γ_Q, Γ_R et Γ_P conduisent au théorème de Reim (^), $T_U // T_A$ et $T_A // T_V$;

par transitivité de la relation //, $T_U // T_V$;

par définition d'une tangente, $T_U \perp (PU)$ et $T_V \perp (PV)$;

sachant que la relation // est compatible avec la relation $\perp$, $(PU) // (PV)$;

d'après le postulat d'Euclide, $(PU) = (PV)$, i;e; (UV) passe par P.

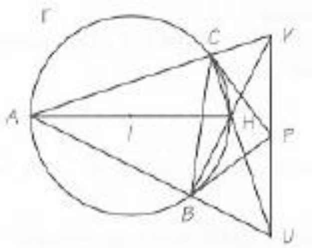
• Sachant que $PQ + AR = PR + AQ$, $RP + BQ = RQ + BP$ et $QR + CP = QP + CR$, le cercle Γ circonscrit au triangle ABC est inscrit dans le triangle des centres PQR.

• Les cercles Γ_P et Γ conduisent au théorème de Reim : (UV) est parallèle à QAR i.e. à la tangente de Γ en A.

Scolies :

1. (UC) et (VB) sont deux hauteurs du triangle AUV dont l'orthocentre H est sur Γ.
2. le triangle de contact ABC est acutangle sinon son triangle tangentiel PQR lui serait extérieur.

Version à partir du triangle de contact



Hypothèses :
ABC est un triangle acutangle,
Γ le cercle de centre I, circonscrit à ABC,
H le point de *Gamma* diamétralement opposé à A,
U, V les points d'intersection de (AB) et (CH), de (AC) et (BH),
et P un point de $[UV]$
Thèse :
P est le milieu de $[UV]$, si et seulement si, les droites (PB) et (PC) sont tangentes à Γ.

(^) Cf. appendice 1.

B en pâtissait un peu, cet inconvénient serait largement compensé par des puis, comme dans le deuxième point de la démonstration du théorème de Boutin, on conclut.

Scolies :

1. Le résultat reste vrai lorsque deux points coïncident en considérant la tangente en ce point.
2. Nous retrouvons le théorème de Boutin lorsque X et Y coïncident avec A.
3. PQR est le triangle tangentiel de ABC.
4. Une droite parallèle à (UV);

   notons U', V' les seconds points d'intersection de (AB) et (AC) avec Γ_P; le quadrilatère $UU'VV'$ ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P est un parallélogramme; en conséquence, $(UU')//(VV')$.

   Notons D le second point d'intersection de (CU) avec le cercle Γ circonscrit à ABC; les cercles Γ et Γ_P conduisent au théorème de Reim : $(AD)//(UU')$; d'où par transitivité, $(AD)//(VV')$. Les cercles Γ et Γ_P, la droite $(ACV4)$ et les parallèles (AD) et les parallèles (AD) et (VV'), conduisent à l'alignement des points D, B et V; en conséquence, d'après le théorème de Reim appliqué aux mêmes cercles, la tangente à Γ en D est parallèle à (UV).
5. Position de D :

   les cercles Γ_P et Γ_Q conduisent au théorème de Reim : $(U'U)//(AX)$ et par transitivité $(AD)//(AX)$; d'après le postulat d'Euclide, D est sur la droite (XY).
6. D étant le point d'intersection des droites (UC) et (VB), les céviennes [7] (UB) et (VC) sont deux hauteurs du triangle DVU dont l'orthocentre H est sur Γ.

Appendice 1 : le théorème de Reim

Ce théorème de Reim [8] a été proposé aux Maxi Olympiades belges de 1982.

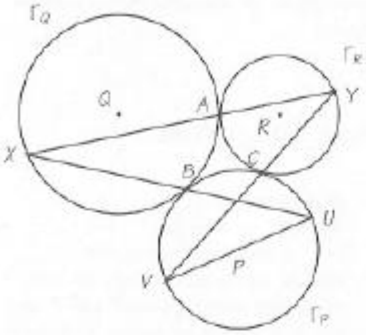
[7] Nom donné aux droites passant par un sommet d'un triangle en l'honneur de Jean de Céva (1648-1734).

[8] Anton Reim (1832-1922), mathématicien allemand.

C.N. : d'après le postulat d'EUCLIDE, $\Delta_P = (U'V')$; en conséquence, P est le milieu de $[UV]$.

C.S. : raisonnons par l'absurde en supposant que Δ_P n'est pas parallèle à (QR) ; le quadrilatère $UU'VV'$ ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ; en conséquence, (AUU') serait parallèle à $(AV'V)$ ce qui est contradictoire.

Une généralisation de YAGLOM (5)



Hypothèses :
Γ_P, Γ_Q, Γ_R trois cercles de centre P, Q, R, deux à deux tangents extérieurement.
A, B, C les points de contacts de Γ_R et Γ_Q, de Γ_Q et Γ_P, Γ_P et Γ_R,
U un point de Γ_P,
X, Y, V les seconds points d'intersection de (UB) avec Γ_Q, (XA) avec Γ_R, (YC) avec Γ_P.
Thèse :
la droite (UV) passe par P.

Scolie :

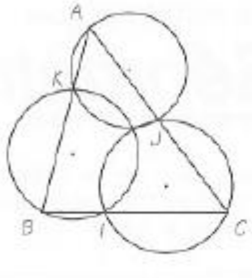
U est distincte de V, sinon les cercles Γ_P, Γ_Q et Γ_R seraient concourants d'après le théorème du pivot (6) en considérant le triangle UXY avec A sur (XY), B sur (UX) et C sur (UY).

Démonstration :

Notons T_U, T_X, T_Y et T_V les tangentes à Γ_P, Γ_Q, Γ_R et Γ_P en U, X, Y et V ;

les cercles Γ_P et Γ_Q, Γ_Q et Γ_R, Γ_R et Γ_P conduisent au théorème de REIM ; il s'en suit que $T_U // T_X$, $T_X // T_Y$, $T_Y // T_V$ et par transitivité, $T_U // T_V$;

(5) YAGLOM I. M., *Transformations géométriques II*, MAA, p. 31. ISAAC MOISEVITCH YAGLOM est né en Ukraine en 1921.
(6) Cf. appendice 2.

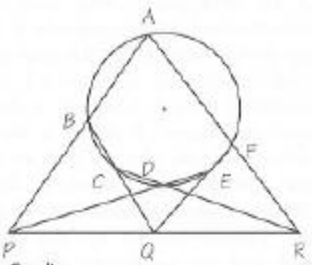


Hypothèse :
ABC un triangle,
I un point de la droite (*BC*),
J un point de la droite (*CA*),
et *K* un point de la droite (*AB*).
Thèse :
les cercles circonscrits aux triangles *AKJ*, *BIK* et *CJI* sont concourants.

Une démonstration de ce théorème peut se faire par la méthode des angles ou à partir du théorème de Reim.

Appendice 3 : le théorème de Pascal

Les côtés opposés d'un hexagone inscrit à un cercle se rencontrent en trois points alignés. Ce théorème énoncé par Blaise Pascal est aussi appelé l' « Hexagramma mysticum ».

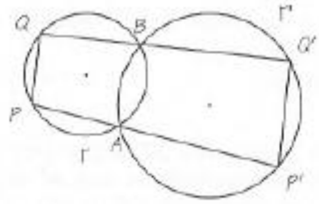


Hypothèse :
Γ un cercle,
ABCDEF un hexagone inscrit dans Γ,
et *P*, *Q*, *R* les points d'intersection des droites (*AB*) et (*DE*), (*BC*) et (*EF*), (*CD*) et (*FA*).
Thèse : les points *P*, *Q* et *R* sont alignés.

Scolie :

1. la droite (*PQR*) est la pascale de l'hexagone *ABCDEF*.
2. Le résultat reste vrai lorsque les points *C* et *D*, *E* et *F* sont confondus ; dans ce dernier cas, on remplace les côtés [*CD*] et [*EF*] par les tangentes à Γ en *C* et *E*. Cette situation particulière a été étudiée par MacLaurin ou Mac-Laurin Colin, *Traité des Fluxions* (1745), Appendice § 36.

Si deux cercles (Γ) et (Γ') se coupent en A et B, une droite passant par A recoupe (Γ) et (Γ') en P et P' respectivement, une droite passant par B les recoupe en Q et Q' respectivement, alors (PQ) est parallèle à $(P'Q')$.



Hypothèses :
Γ, Γ' deux cercles sécants,
A, B les deux points d'intersection de Γ et Γ',
D_A une droite passant par A,
Q un point de Γ,
Q' un point de Γ',
et D_B la droite brisée (QBQ').

Thèse :

D_B est une droite si, et seulement si, (PQ) est parallèle à $(P'Q')$.

Une démonstration de cette équivalence peut se faire par la méthode des angles.

Scolie : ce théorème reste vrai lorsque les cercles sont tangents ou que les poins P et Q sont confondus ; dans ce dernier cas, on envisage la tangente.

Appendice 2 : le théorème du pivot

Ce théorème [9] a été découvert par Miquel A. [10] ;

Si les sommets I, J, K d'un triangle sont situés respectivement sur les droites latérales (BC), (CA), (AB) d'un triangle ABC, alors les cercles circonscrits aux triangles AKJ, BIK et CJI, sont concourants.

[9] Il doit son nom à Forder H. G. dans Higher Course geometry, Cambridge Presse, 1949.
[10] Théorèmes de Géométrie, Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville, 1838.