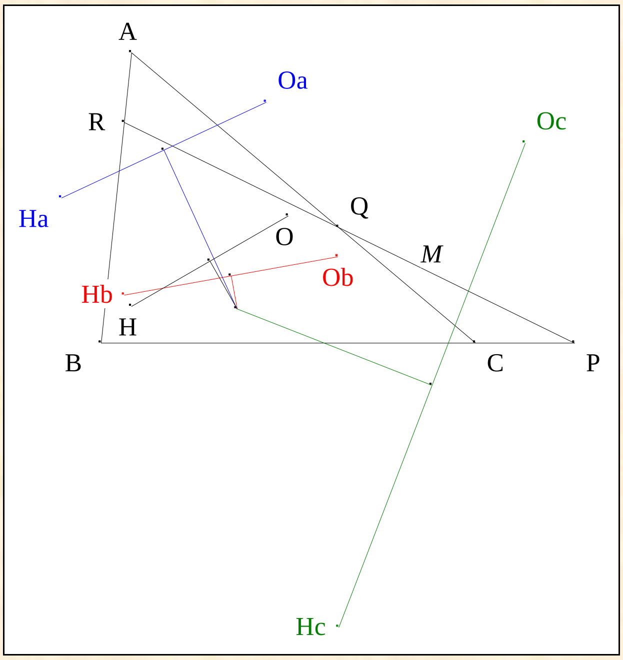
LE POINT DE KANTOR – HERVEY

THE KANTOR – HERVEY's POINT

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique concernant le point de Kantor-Hervey d'un delta déterminé par un triangle ABC et une ménélienne *M*. La preuve de ce résultat découvert en 1879, se rapproche *in fine* de celle de John Wentworth Clawson établie en 1921.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent être tous démontrés synthétiquement.

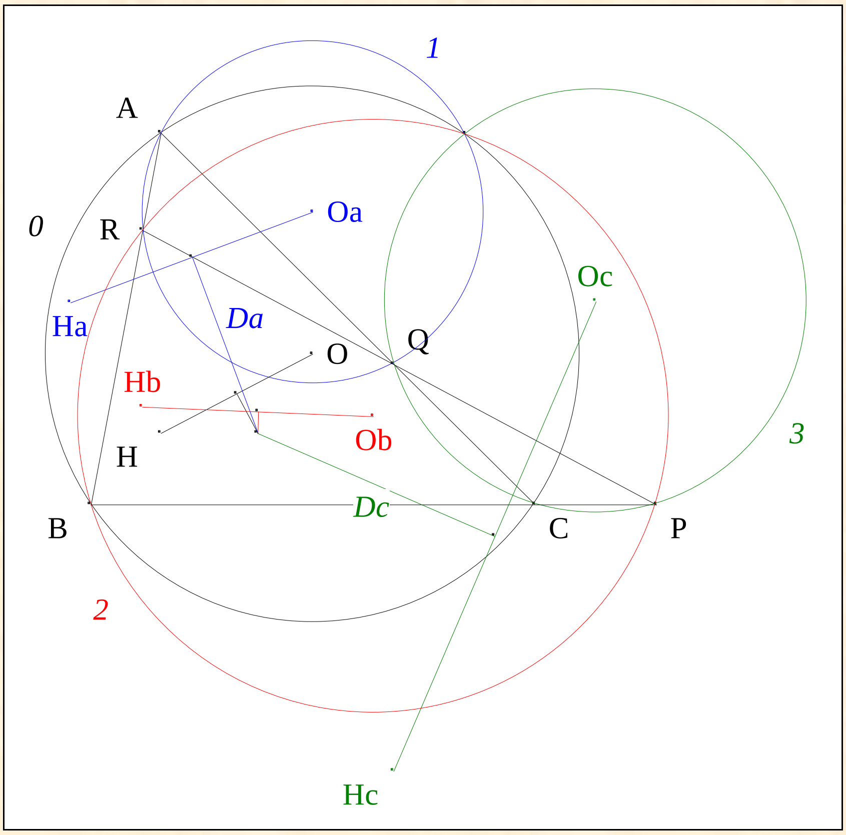
---

[1] St-Denis, Île de la Réunion, le 28/02/2011.

Sommaire

A. VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
M une ménélienne de ABC,
P, Q, R les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
H, Ha, Hb, Hc les orthocentres resp. des triangles ABC, AQR, BRP, CPQ,
0, *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. à ABC, AQR, BRP, CPQ,
O, Oa, Ob, Oc les centres resp. de *0*, *1*, *2*, *3*
et *D*, *D*a, *D*b, *D*c les médiatrices resp. de [OH], [OaHa], [ObHb] et [OcHc].

Donné : *D*, *D*a, *D*b et *D*c sont concourantes [2].

---

[2] Kantor S., *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* (1879) 138 ;

Archive :

10088 & 10122. (F. R. J. Hervey.)—(10088.) Prove that, if, for each of the four triangles formed by four lines, a line be drawn bisecting perpendicularly the distance from circumcentre to orthocentre, the four bisecting lines are concurrent.

(10122.) Supposing the nine-point circle of a triangle to vary so that its radius retains a constant ratio to the distances of its centre from circumcentre and orthocentre, show that it will always meet the lines of the triangle at the vertices of two triangles similar to the given and pedal triangles respectively.

Solution by the Proposer.

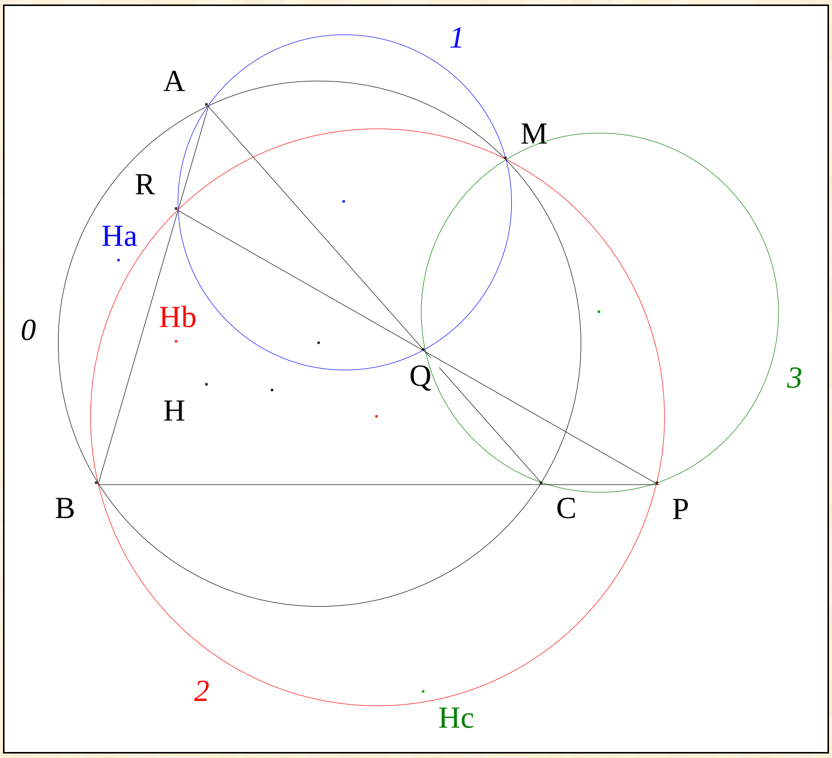
Suppose three tangents to a three-cusped hypocycloid to revolve together, forming a variable triangle ABC of constant shape, having circumcentre K and orthocentre O. A position will be arrived at in which the vertex circle S of the cycloid becomes the nine-point circle of the triangle. [See Solution of 9525, Vol. lii.] Let the intersections on S which are then mid-points of sides be *a*, *b*, *c*, and the others *p*, *q*, *r*. The triangles *abc* and *pqr* simply rotate. For convenience, let the cycloid rotate so that *abc* is fixed. Then K is fixed, and A, B, C describe circles having KA, KB, KC (of above position) for diameters; hence, O describes a circle having KO for diameter. Thus, the centre of the hypocycloid is always equally distant from the circumcentre and orthocentre of a tangent triangle, and this distance is constant for a triangle of given species. Questions 10088 and 10122 follow; 10122 by introducing rotation and expansion so as to make ABC the fixed triangle, in place of *abc*; and 10088, since (by 10015, Vol. lii.) a three-cusped hypocycloid can generally be determined so as to touch four given lines.

Remerciements : ils vont tout particulièrement au professeur Francisco Bellot Rosado qui m'a communiqué gracieusement cette référence.

Hervey F. R. J., Problem 10088 and solution, *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, (ed. W. C. Miller), **54** (1891) 37.

B. VISUALISATION

1. Le point de Miquel



- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à ABC relativement à P, Q, R, *1*, *2*, *3* sont concourants.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à ARQ relativement à B, C, P, *0*, *3*, *2* sont concourants.

- **Conclusion :** *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

- Notons M ce point de concours.

Scolie : *1*, *2* et *3* sont "les cercles de Miquel du delta déterminé par ABC et *M* ".

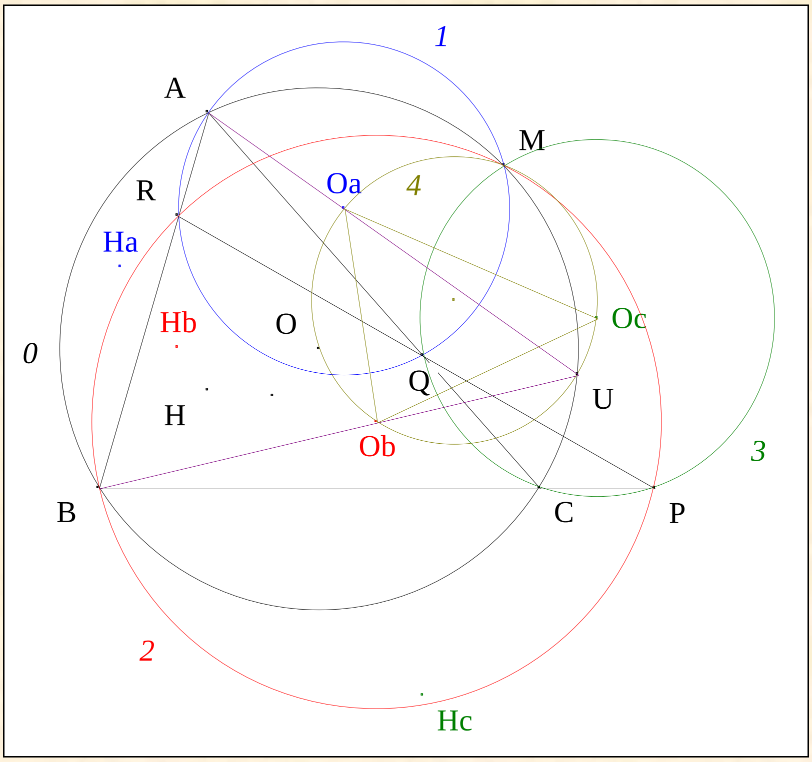
Note historique : M est "le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M* ".
Ce nom a été donné par le géomètre Seligmann Kantor de Vienne en 1878.
Rappelons que ce résultat attribué à Auguste Miquel[3], puis à Jacob Steiner[4], est de

---

[3] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de Mathématiques* de Liouville, vol. 3 (1838) 485-487.

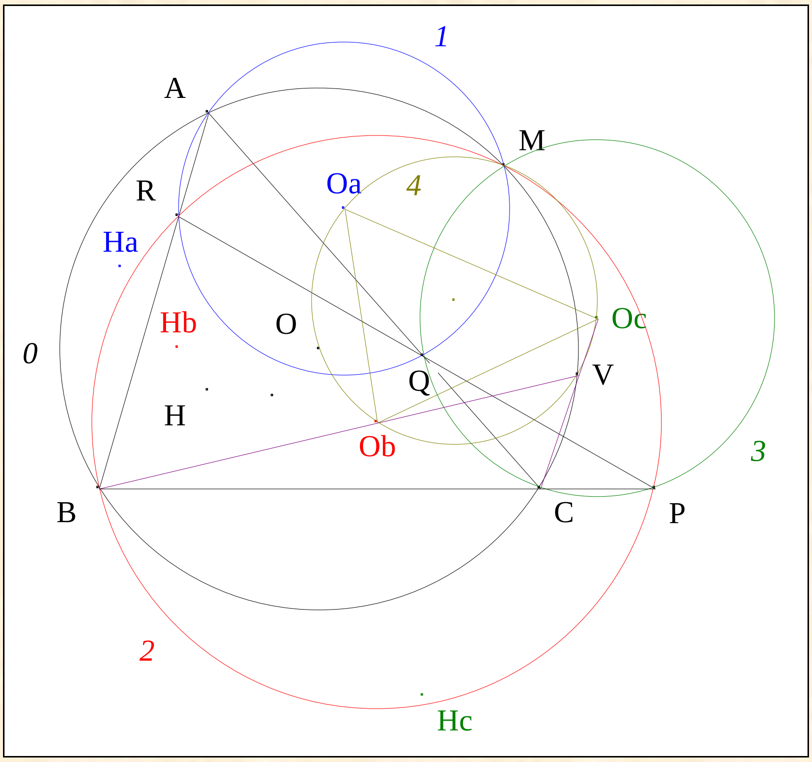
William Wallace[5].
Notons que ce résultat correspond à la première question à démontrer de Jacob Steiner sur le quadrilatère complet ; pour cette raison, ce résultat est aussi connu sous le nom de "The Steiner-Miquel theorem" en anglais.

2. Le triangle de Miquel



- Notons U le point d'intersection de (AOa) et (BOb).
- D'après "Concours général de 1873" (Cf. Annexe 2) appliquée à *1* et *2*, A, B, U et M sont cocycliques.
- D'après "Le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M* " A, B, U et M sont sur *0*.

[4] Steiner J., *Annales* de Gergonne 18 (1827-28) 302-303, Questions 1°, 2°, 3°, 4°.
[5] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.



- Notons V le point d'intersection de (BOb) et (COc).

- D'après "Concours général de 1873" appliquée à *2* et *3* (Cf. Annexe 2), B, C, V et M sont cocycliques.

- D'après "Le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M*", B, C, V et M sont sur *0*.
  en conséquence, U et V sont confondus.

- **Conclusion :** (AOa), (BOb) et (COc) sont concourantes sur *0*. [6]

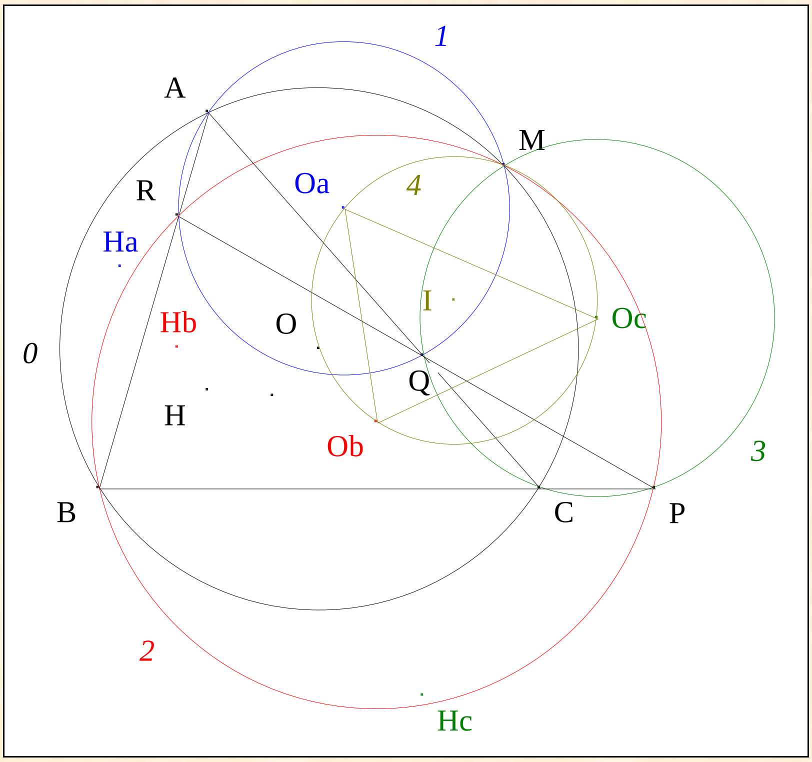
Scolies : **(1)** par définition, OaObOc et ABC sont en perspective de centre U

(2) OaObOc est "le triangle de Miquel du delta déterminé par ABC et *M* ".

---

[6] Clawson J. W., The Complete Quadrilateral, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., vol. 20, N°4 (Jul., 1919) 232-261 ; résultat (5) p. 235.

3. Le cercle de Miquel [7]



- **Conclusion :** d'après Auguste Miquel[8], O, Oa, Ob, Oc et M sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle
  et I le centre de *4*.

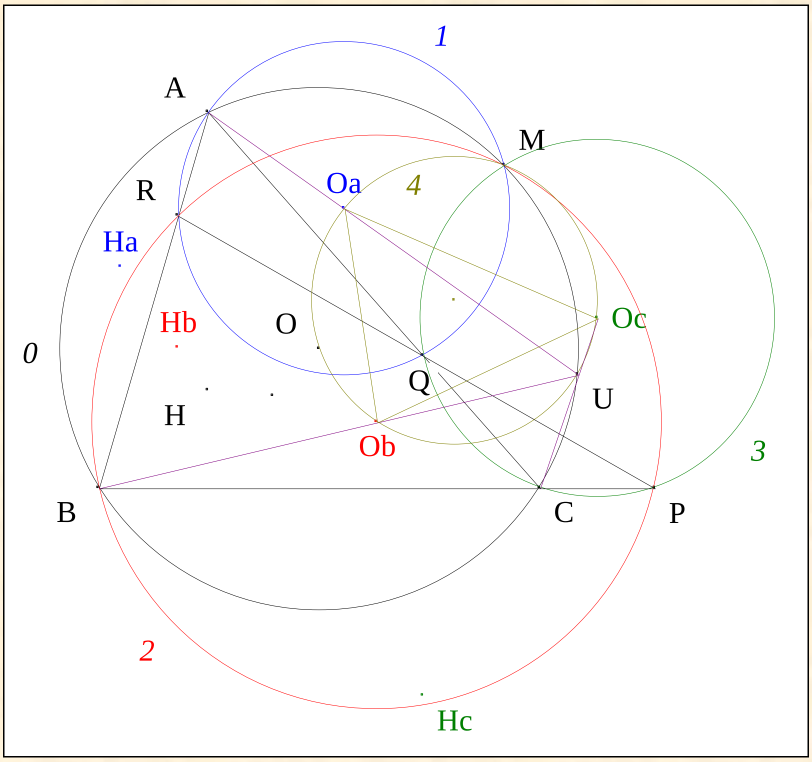
Scolie : *4* est "le cercle de Miquel du delta déterminé par ABC et *M* ".
Il est aussi connu sous le nom du "cercle de Steiner", du "cercle des centres"[9], du "cercle des huit points" après que Johann Gustav Hermes ait découvert trois autres points sur ce cercle, du "cercle circumcentrique" d'après Clawson[10].

Note historique : suite aux 10 questions de Jacob Steiner[11] posées en 1827-28, Auguste Miquel a répondu en 1836 aux quatre premières dans la revue *Le Géomètre*. Certains auteurs ont procédé de même et le Leybourn's *Mathematical Repository*[12] comme les *Nouvelles Annales* ont relaté leurs résultats.
Ce résultat de Miquel correspond à la deuxième question de Steiner donnée sans preuve.
Pour plus de précision, Thomas Stephens Davies[13] avait déjà relaté et prouvé ce résultat en 1835. Probablement avait-il trouvé ce résultat indépendamment de Jacob Steiner car sa solution de la Question 524 dans le même volume du *Repository*, nous permet de le penser. L'historien John Sturgeon Mackay[14] arrive a la même conclusion en s'appuyant sur une question posée ayant trait au quadrilatère complet, par Davies, dans le *Leeds Correspondent* en 1821.

---

7 Miquel A., *Le Géomètre* (1836).
8 Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. **2** (2008) 10.
9 Gallatly, Modern Geometry of the Triangle, London, N. D., (1922) 5.
10 Clawson J. W., The Complete Quadrilateral, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., vol. 20, N°4 (Jul., 1919) 232-261.
11 Steiner J., Questions 1°, 2°, 3°, 4°, *Annales* 18 (1827-28) 302-303.
12 Davies, Réponse à la question 555, Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. VI (1835).
13 Davies T. S., Question 555, *Leybourn's Mathematical Repository*, vol. 6 (1835).
14 Mackay J. S., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 9, (1890) 83-91.

4. Le triangle de Miquel est semblable à ABC

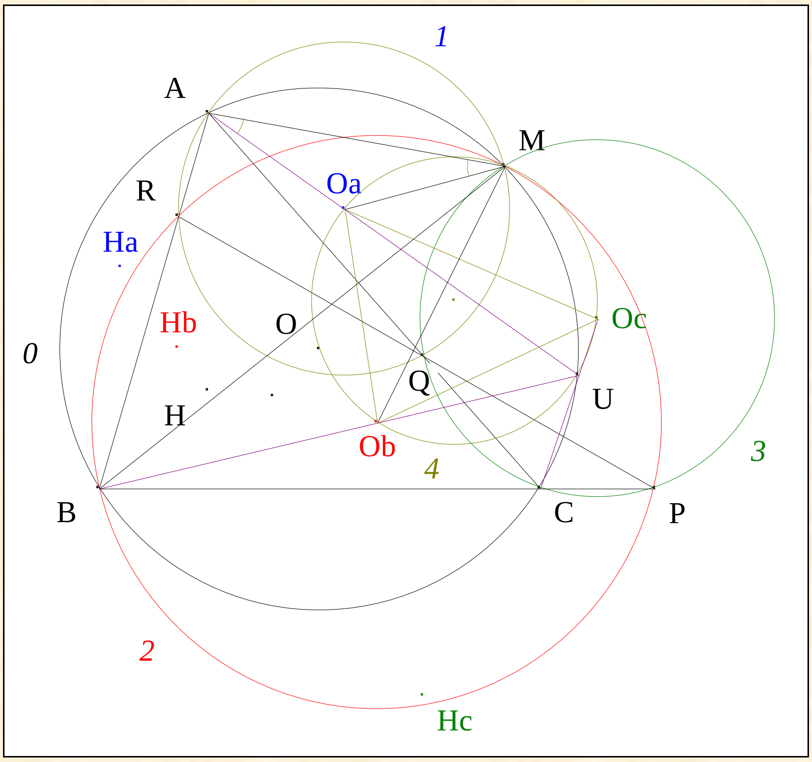


- Une chasse angulaire à Π près :
  le quadrilatère OaObUOc étant cyclique, <ObOaOc = <ObUC ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <ObUC = <BAC ;
  par transitivité de la relation =, <ObOaOc = <BAC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <OcObOa = <CBA
  <OaOcOb = <ACB.

- **Conclusion :** par définition, OaObOc est semblable à ABC.

Scolies : **(1)** trois angles égaux

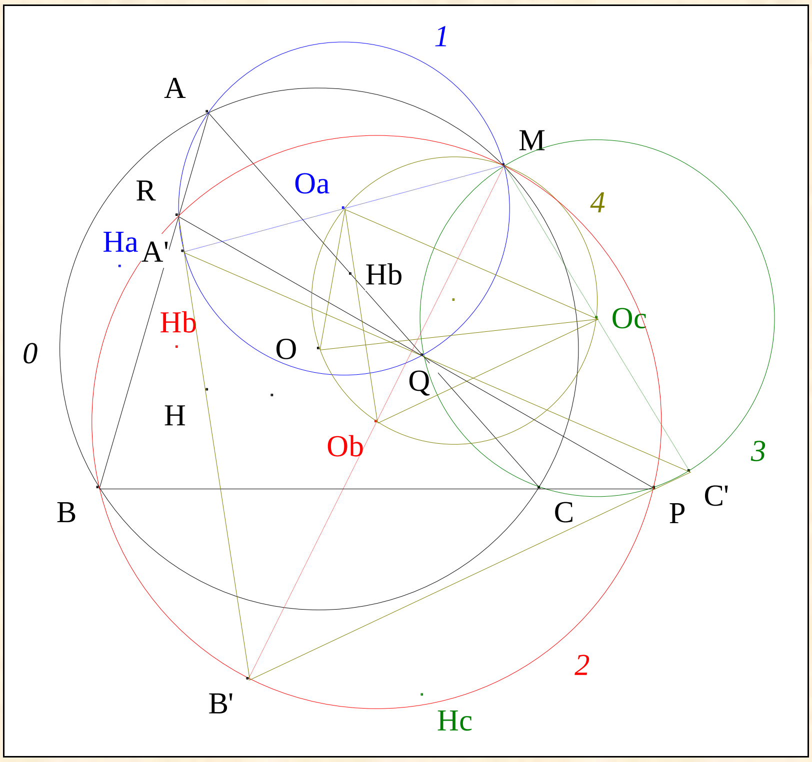


- Une chasse angulaire à Π près :
  le triangle OaMA étant isocèle en Oa, <AMOa = <OaAM ;
  nous avons : <OaAM = <UAM ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <UAM = <UBM ;
  nous avons : <UBM = <ObBM ;
  le triangle ObMB étant isocèle en Ob, <ObBM = <BMOb ;
  par transitivité de la relation =, <AMOa = <BMOb.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <BMOb = <CMOc.

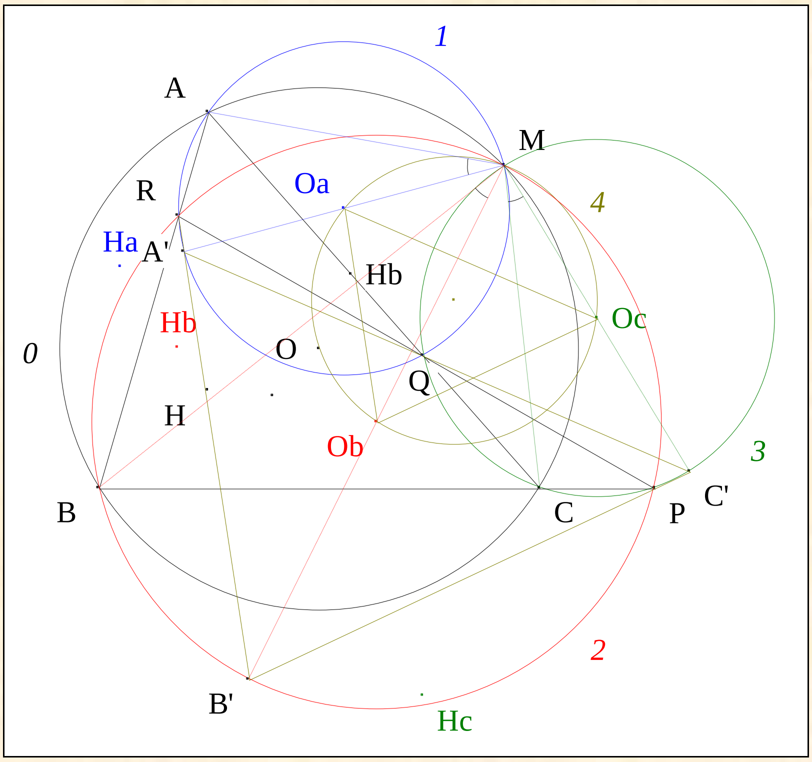
- **Conclusion :** <AMOa = <BMOb = <CMOc.

(2) Un triangle homothétique à OaObOc



- Notons A', B', C' les points diamétralement opposés à M resp. à *1*, *2*, *3*.
- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux", le triangle A'B'C' est homothétique à ABC.

(3) Nature de M

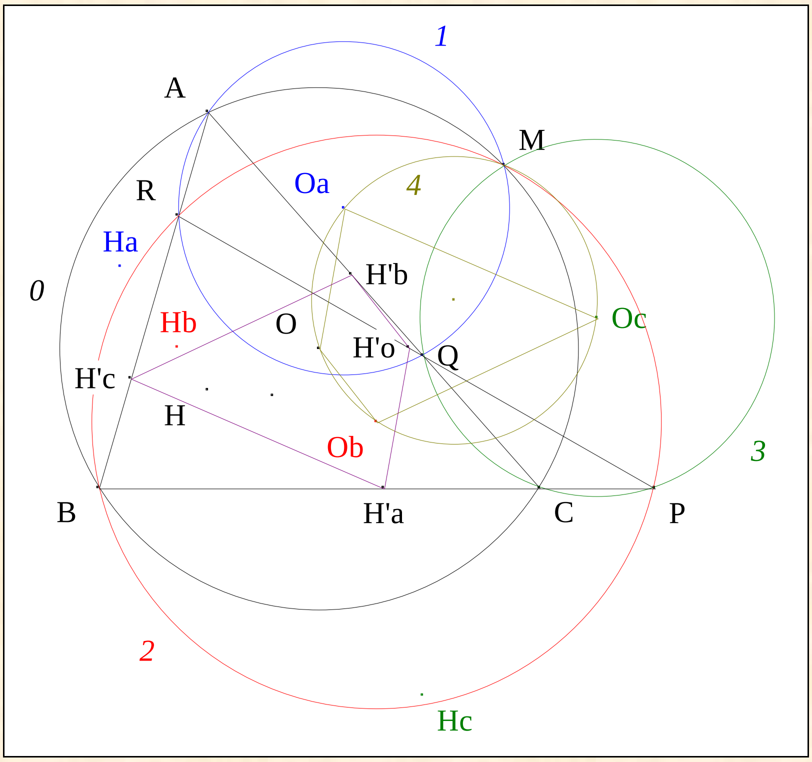


- D'après "Une monienne diamétralement brisée" (Cf. Annexe 3),
  appliqué à **(1)** *2* et *3*, (B'C') passe par P
  (2) *3* et *1*, (C'A') passe par Q

(3) *1* et *2*, (A'B') passe par R.

- **Conclusion :** d'après **B. 4.** Scolie 1, M est le centre de similitude de OaObOc et ABC.

5. L'orthocentre du quadrilatère cyclique OOaOcOb

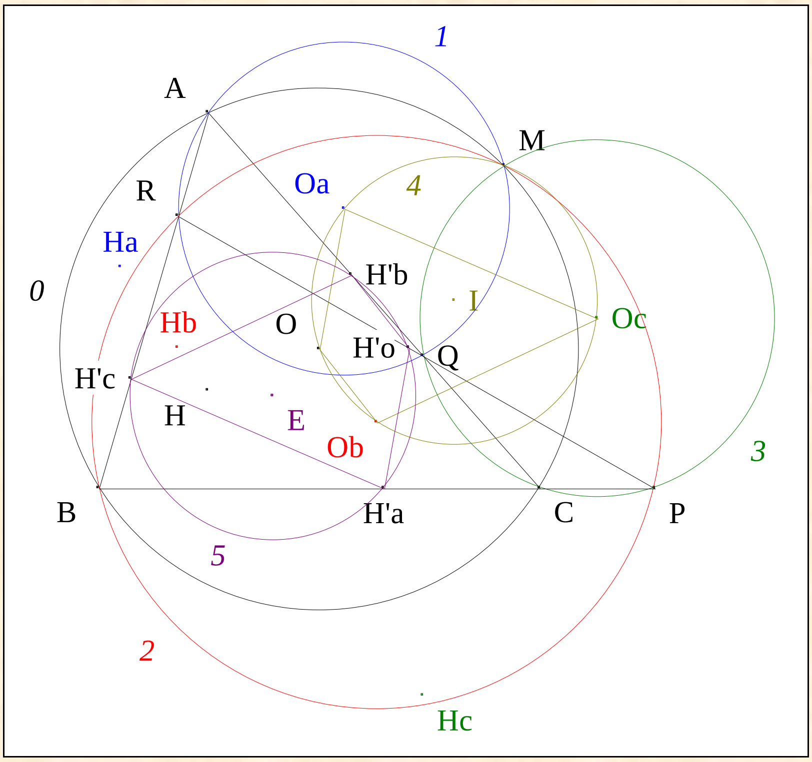


- Notons H'o, H'a, H'b, H'c les orthocentres resp. de OaObOc, OOcOb, OOaOc, OObOa.

- D'après "Un parallélogramme" (Cf. Annexe 4)
  appliqué à OaObOc et OObOc, (H'oH'a) // (OOa) et H'oH'a = OOa ;

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (H'aH'c) // (OaOc) et H'aH'c = OaOc
  (H'cH'b) // (OcOb) et H'cH'b = OcOb
  (H'bH'o) // (ObO) et H'bH'o = ObO.

- Par définition, les quadrilatères H'oH'aH'cH'b et OOaOcOb sont homothétiques et égaux.



- **Conclusion :** H'oH'aH'cH'b étant homothétique au quadrilatère cyclique OOaOcOb, H'oH'aH'cH'b est cyclique.

- Notons *5* ce cercle
  et E le centre de *5*.

Scolies : **(1)** [OH'o], [OaH'a], [ObH'b], [OcH'c] et [IE] concourent en leur milieu

(2) par définition, E est "l'orthocentre du quadrilatère cyclique OOaOcOb"

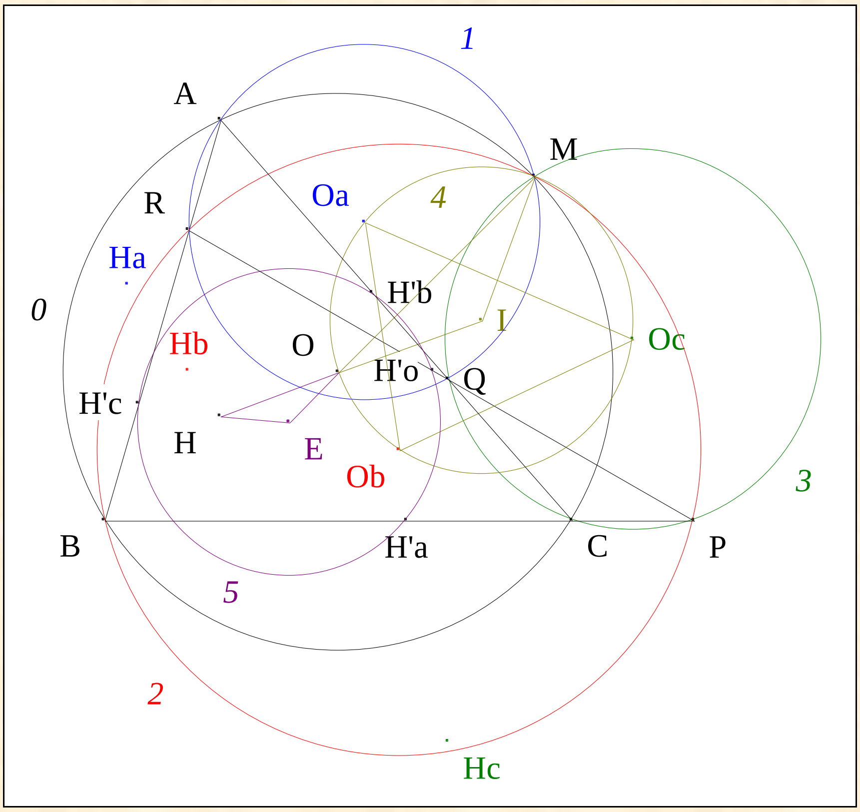
Note historique : ces résultats datant de 1828 de Franz Heinen[15] se retrouvent en 1845 chez Jules Alexandre Mention[16].

6. Le triangle EOH est E-isocèle

---

15 Heinen F., *Journal* de Crelle 3 (1828) 288.

16 Mention J., *Nouvelles Annales*, vol. 4 (1845) 654. Cf. (ε) et (μ) dans la partie III.



- Considérons les triangles ABC et OaObOc et leurs cercles circonscrits resp., *0* et *4* et opérons avec leurs éléments homologues.

- **Scolie :** (OH) et (IH'o) sont resp. les droites d'Euler de ABC, OaObOc.

- Sachant que [OH'o] et [IE] concourent en leur milieu, le quadrilatère OEH'oI est un parallélogramme ; en conséquence, IH'o = OE.

- Considérons les triangles EOH et IMO.

- ABC et OaObOc étant semblables, OH/IH'o = OM/IM ;
  par substitution, OH/OE = OM/IM.

- M étant le centre de similitude de ABC et OaObOc,
  l'angle déterminé par [OH] et [IH'o] est égal à <OMI ;
  en conséquence, <HOE = <AMOa = <OMI en considérant *0* et *4*.

- Les triangles EOH et IMO ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables.

- Le triangle IMO étant I-isocèle, EOH est E-isocèle.

- **Conclusion partielle :** la médiatrice *D* de [OH] passe par E.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que la médiatrice *D*a de [OaHa] passe par E
  la médiatrice *D*b de [ObHb] passe par E
  la médiatrice *D*c de [OcHc] passe par E.

- **Conclusion :** *D*, *D*a, *D*b et *D*c sont concourantes en E.

Scolies : **(1)** [OH] est "le segment d'Euler de ABC"

(2) *D* est "la médiatrice d'Euler de ABC"

(3) E est "le point de Kantor-Hervey du delta déterminé par ABC et par *M* ".

Énoncé traditionnel : les médiatrices d'Euler d'un delta sont concourantes

Commentaire : un delta étant aussi "un 4-droites", ce résultat ne se généralise pas à un 5-droites car les 5 points de Kantor-Hervey ne sont pas alignés. Une généralisation "cliffordienne" n'est pas envisageable.

Note historique : ce point E a été pour la première fois signalé et prouvé par Seligmann Kantor[17] de Vienne (Autriche) en 1879. Il réapparaît en 1891 sous la signature de F. R. J. Hervey[18] et est présenté comme exercice en 1893 dans *Modern Pure Geometry* de Robert Lachlan[19] qu'il l'attribue à Hervey.
Un article concernant ce résultat est publié en 1911 par E. Liénard[20] dans la revue belge *Mathesis*. En 1919, puis en 1921, John Wentworth Clawson[21] s'intéressant dans deux longs articles au quadrilatère complet, propose une preuve du résultat dans *The Annals of Mathematics*. En 1954, Victor Thébault traite de ce point dans le *Monthly*[22].
En 2003, Floor van Lamoen et Darij Grinberg[23] ont proposé le point de Kantor-Hervey à résoudre en six étapes dans la rubrique des problèmes du *Monthly* sous le titre "Six Surprises from Four Lines".
Le point de Kantor-Hervey est aussi appelé "point de MacBeath"[24] suite à trois remarquables articles donnant un nouveau éclairage de ce point.

Rappelons que Joseph Neuberg a demandé où le théorème de Hervey a été publié pour la première fois et comment l'auteur y est parvenu. René Goormaghtigh[25] répond en donnant la référence concernant Hervey. C'est Victor Thébault[26] qui précise à son tour que ce théorème est de Kantor.

Pour terminer, signalons qu'Alain Levelut[27] publie en 2011 un article sur ce sujet avec une approche vectorielle dans la revue électronique *Forum Geometricorum*.

---

17 Kantor S., *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* (1879) 138.

18 Hervey F. R. J., Problem 10088 and solution, *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, (ed. W. C. Miller), **54** (1891) 37.

19 Lachlan R., *Modern Pure Geometry* (1893) Exercice 4 p. 92.

20 Liénard E., Sur un théorème de Hervey, *Mathesis* (**4**) 1 (1911) 89-91.

21 Clawson J. W., The Complete Quadrilateral, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., vol. **20**, N°4 (Jul., 1919) 232-261, voir résultat (25) 244 ;
More Theorems on the Complete Quadrilateral, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., vol. **23**, N°1 (Sep., 1921) 40-44 ; voir résultat 2. p. 41-43.

22 Thébault V., Concerning the complete quadrilateral, *The American mathematical Monthly*, vol. **61**, 9, (1954) 603-606.

23 Lamoen (van) F., Grinberg D., problème 11025, *The American mathematical Monthly*, vol. **110**, 3, (2003) 543 ; solution dans la même revue, vol. **112**, (December 2005) 930-932.

24 Macbeath A.M., The Deltoid, *Eureka* **10** (1948) 20-25.
Macbeath A.M., The Deltoid (II), *Eureka* **11** (1949) 26-29.
Macbeath A.M., The Deltoid (III), *Eureka* **12** (1950) 5-6.

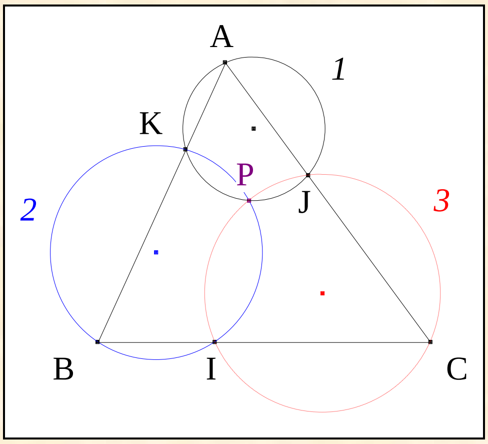
25 Goormaghtigh R., Sur le point de Hervey d'un quadrilatère et sur les quadrilatères de Zeeman, *Mathesis* **56** (1947) page 175-178.

26 Thébault V., *Bulletin* de la Société royale des Sciences de Liège (1944) 293.

27 Levelut A., On the Hervey point of a complete quadrilateral, *Forum Geometricorum* **11** (2011) 1-9 ; http://forumgeom.fau.edu/.

C. ANNEXE

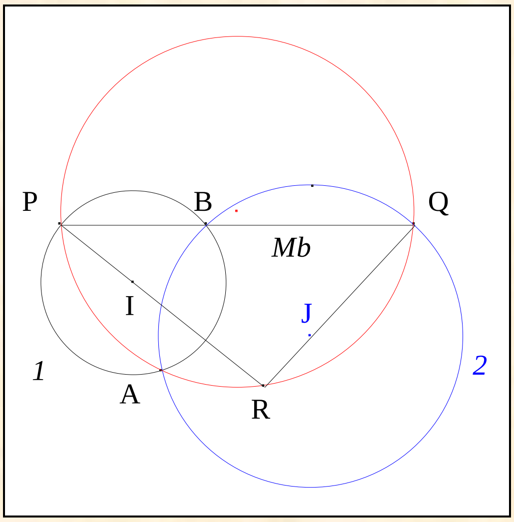
1. Le théorème du pivot [28]



Traits : *1, 2, 3* trois cercles sécants deux à deux,
K, P les points d'intersection de *1* et *2*,
I l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
J l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
A un point de *1*,
B le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et C le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

2. Concours général des classes de troisième (1873)

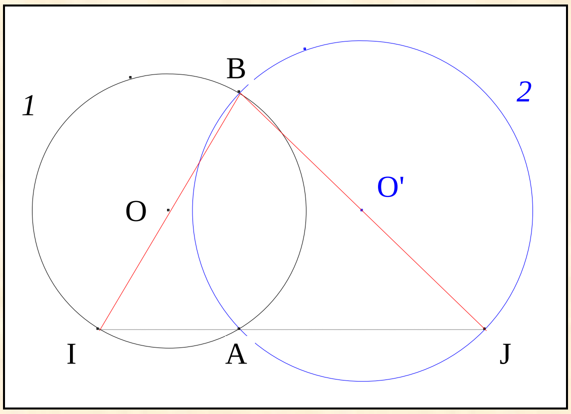


Traits : *1, 2* deux cercles sécants,
I, J les centres resp. de *1, 2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
*M*b une monienne passant par B,
P, Q les seconds points d'intersection de *M*b resp. avec *1, 2*,
et R le point d'intersection de (PI) et (QJ).

[28] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.

Donné : R, P, Q et A sont cocycliques.

3. Une monienne brisée diamétralement

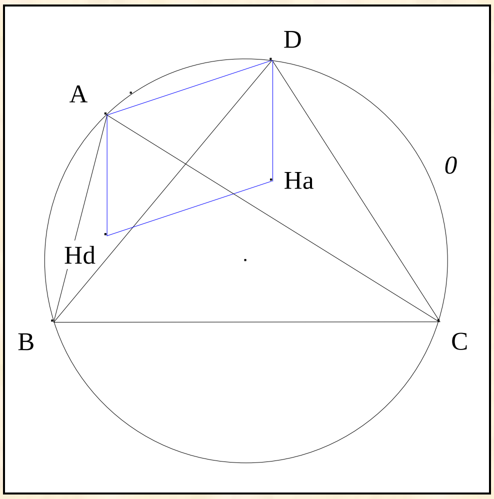


Traits :

	1, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	le second point d'intersection de la droite diamétrale (BO) avec *1*
et	J	le second point d'intersection de la droite diamétrale (BO') avec *2*.

Donné : I, A et J sont alignés.

4. Un parallélogramme [29]



Traits :

	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	D	un point de *0*,
et	Hd, Ha	les orthocentres resp. des triangles ABC, DBC.

Donné : le quadrilatère AHdHaD est un parallélogramme.

---

[29] *Arbelos*, mars 1987.