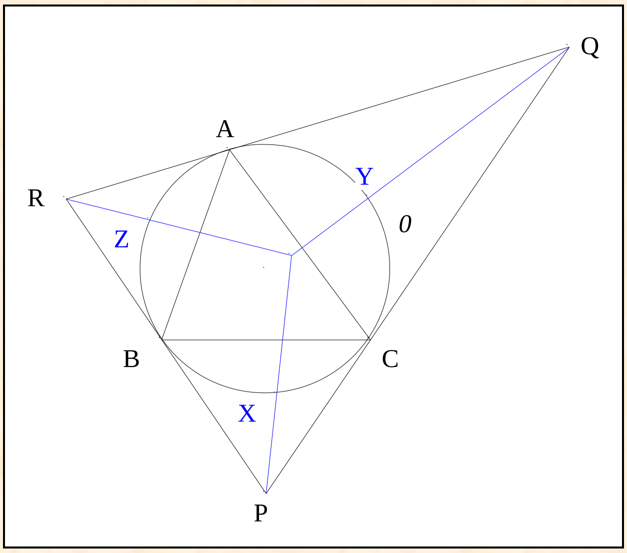
LE POINT

DE

L'ACADÉMIE PHILLIPS D'EXETER

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Un centre du triangle qui ne porte pas le nom d'un géomètre mais celui d'une Académie est présenté et résolu originalement par l'auteur. L'étude de ce point se poursuit pour en connaître une relation avec le point de Gergonne du triangle tangentiel et sa position sur la droite d'Euler du premier triangle. Deux généralisations sont présentées.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. A center of a triangle which don't bears the name of a geometer, but of an Academy is presented and originally solved by the author. The study of this point continues to find a relationship with the Gergonne's point of the tangential triangle and its position on the Euler's line of the first triangle. Two generalizations are presented.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] St.-Denis, Île de la Réunion (France) 2011.

Sommaire

I. À PROPOS

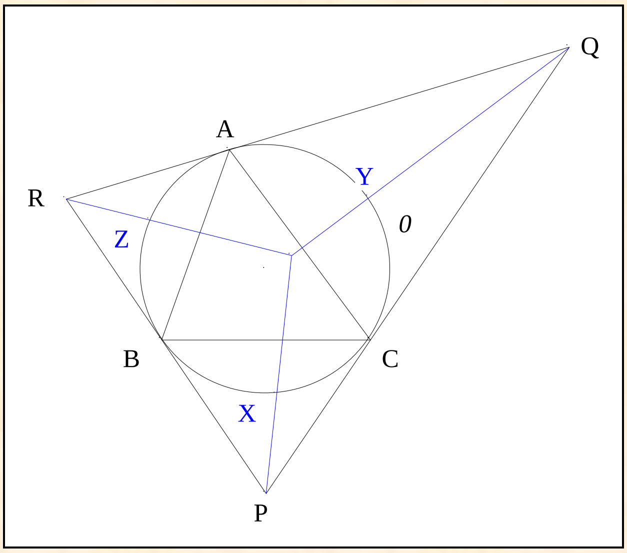
DU

POINT D'EXETER

1. Le point d'Exeter

VISION

Figure :



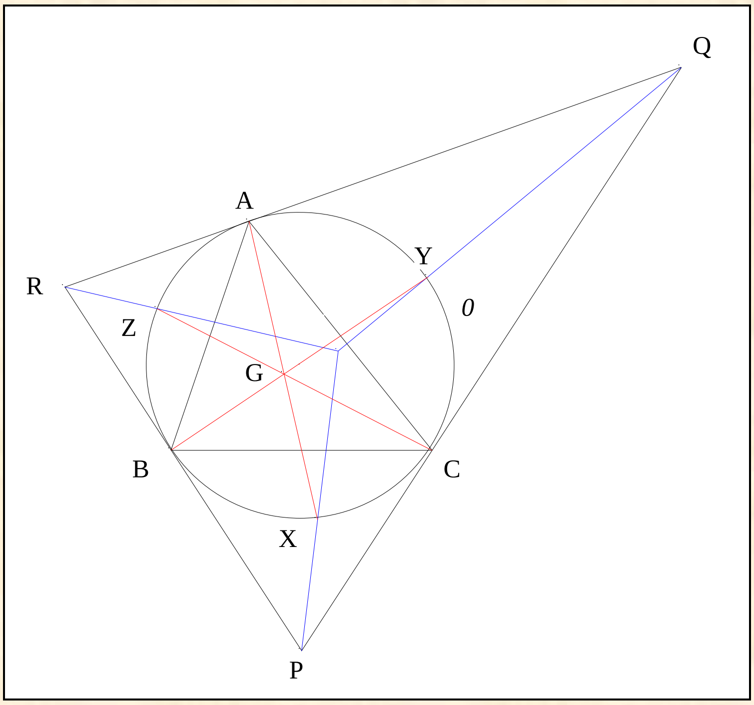
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	PQR	le triangle tangentiel de ABC
et	X, Y, Z	les seconds points d'intersection des médianes de ABC avec *0*.

Donné : (PX), (QY) et (RZ) sont concourantes.[2]

VISUALISATION COURTE[3]

[2] Kimberling C., Point on the Euler line, Advanced problem **6557**, *American Mathematical Monthly* (1987) 884 ; solution, *American Mathematical Monthly* (1990) 535.

[3] L'auteur fait une analogie avec la Voie courte et brève en Alchimie.



- Notons G le point médian de ABC.

- **Conclusion :** d'après "Le point de Steinbart"[4], (PX), (PY) et (PZ) sont concourantes.

Scolies : **(1)** le point de concours, noté Ex, est "le point d'Exeter de ABC" ;
il est répertorié sous X_{22} par rapport à ABC ou X_{55} par rapport à PQR chez ETC[5].

(2) XYZ est "le triangle circummédian de ABC".

Énoncé traditionnel :

les triangles tangentiel et circummédian d'un triangle sont en perspective.

Note historique :

[4] Ayme J.-L., Les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

[5] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

ce résultat a été découvert en 1986 lors d'un atelier portant sur les ordinateurs à l'Académie Phillips Exeter situé à 60 km de Boston (New-Hampshire, États-Unis) en 1986 et proposé l'année suivante par Clark Kimberling[6] comme problème dans le *Monthly* ; une solution différente de la précédente en a été donnée dans la même revue par le hollandais O. P. Lossers[7] de l'université de technologie d'Eindhoven (Pays-Bas).
Rappelons que Clark Kimberling et le suisse Lauwerenz Kuipers ont calculé les coordonnées homogènes du point d'Exeter.

2. Une courte note sur la recherche par ordinateur assisté :

c'est en 1852, qu'un étudiant anglais Francis Guthrie, émet l'hypothèse qu'il est possible de colorier n'importe qu'elle carte géographique plane à l'aide de quatre couleurs seulement de façon que deux régions adjacentes quelconques ne soient pas de la même couleur.
En 1879, Arthur Cayley reprend cette idée à son compte.
En 1976, Kenneth Appel et Wolfgang Haken donnent une réponse négative à ce problème en ramenant le cas général à une liste de 1936 cartes réductibles i.e. que ces cartes peuvent être coloriées avec quatre couleurs et de même pour toute carte contenant une carte réductible. Pour arriver au résultat i.e. pour prouver que toute carte contient une carte réductible, ces deux mathématiciens ont eu recours en 1982, pour la première fois dans l'histoire de la démonstration, à un ordinateur qui tourna 1200 heures environ.

Avec l'émergence des ordinateurs et leur rapide implantation dans tout le domaine scientifique, peu de mathématiciens aurait pu concevoir que la réalisation d'un logiciel de démonstration pourrait prouver des théorèmes connus de Géométrie comme celui de Karl Feuerbach et même répondre à des conjectures.
C'est ce qui arriva en janvier 1987, lorsque l'un des élèves de Wu, Shang-Ching Chou de l'université d'Austin (Texas, États-unis), réalisa un tel logiciel pour sa thèse.

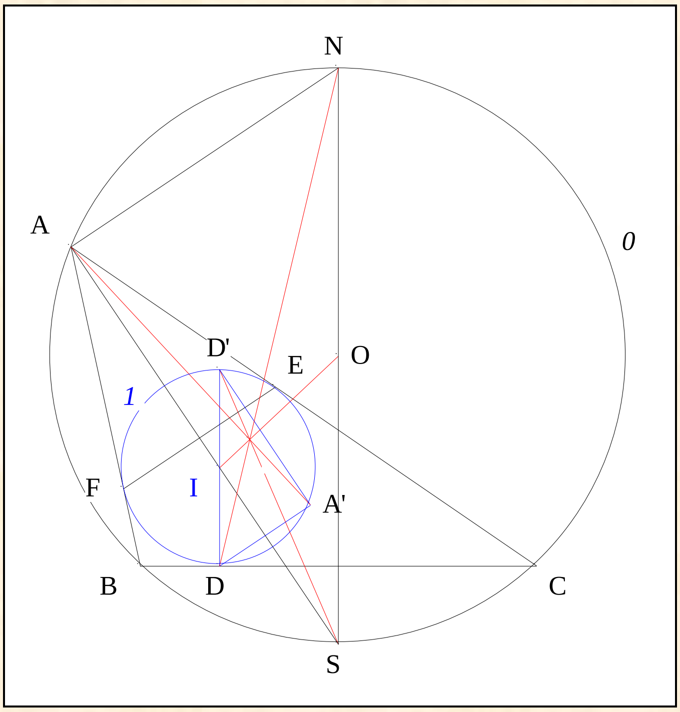
En 1995, Adrian Oldknow utilisant le logiciel Sketchpad découvrait que le point intérieur et extérieur de Soddy[8], le centre du cercle inscrit et le point de Gergonne d'un triangle, sont quatre points alignés ; de la même façon, il trouvait une généralisation du théorème de Hendricus van Aubel[9]...
C'est de telles avancées qui permirent à Philip Davies de prédire en 1995, un futur rose pour la géométrie du triangle.

3. Le point d'Exeter d'un triangle et le point de Gergonne du triangle tangentiel

VISION

Figure :

[6] Kimberling C., Advanced Problems 6557, *American Mathematical Monthly* vol. **94**, **9** (1987) 884.
[7] Lossers O. P., *American Mathematical Monthly* vol. **97**, **6** (1990) 535-537.
[8] En mémoire de Frédérick Soddy, prix Nobel de chimie qui trouva ce centre en 1936.
[9] En remplaçant les carrés construits sur les côtés d'un quadrilatère par des rectangles semblables.



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	S, N	les milieux resp. de l'arc BC ne contenant pas A, contenant A,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	D'	le second point d'intersection de (DI) avec *1*
	A'	le point symétrique de D par rapport à (AI).

Donné : (AA'), (SD'), (ND) et (OI) sont concourantes. [10]

VISUALISATION

Commentaire : pour plus de lisibilité et de retrouver les notations habituelles,
au lieu de partir d'un triangle pour aller à son triangle tangentiel,
nous procédons inversement i.e. partir d'un triangle pour aller à son triangle inscrit.

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué aux triangles rectangles et homothétiques ASN et A'D'D,
  (AA'), (SD') et (ND) sont concourantes.

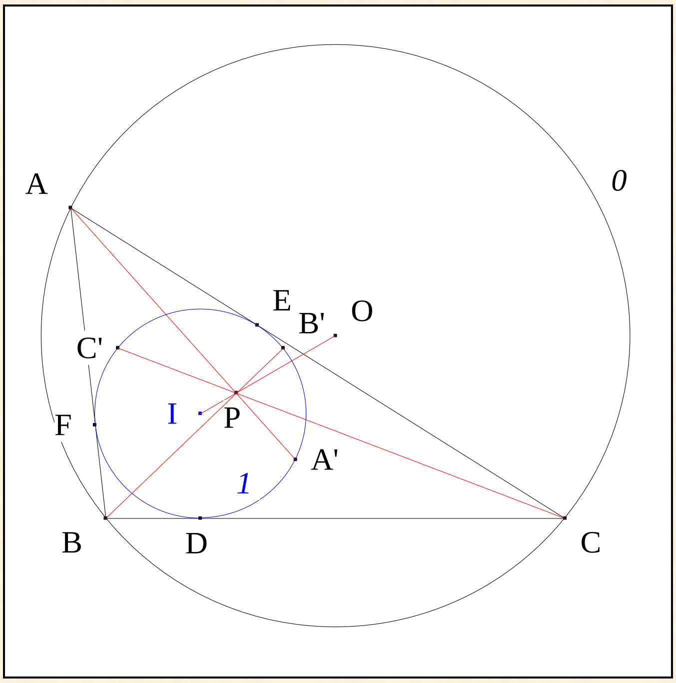
- Notons P ce point de concours.

- P étant le centre interne d'homothétie de *0* et *1*, O, P et I sont alignés.

- **Conclusion :** (AA'), (SD'), (ND) et (OI) sont concourantes en P.

Scolies : **(1)** vision triangulaire

[10] Grinberg D., Heureka X(55)! (was: Problem 2 of XXIII IMO (1982)), Message # **7376** *Hyacinthos* (18/07/2003) ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- Notons B', C' les points symétriques resp. de E, F resp. par rapport à (BI), (CI).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB') passe par P
(CC') passe par P.

- **Conclusion :** (AA'), (BB'), (CC') et (OI) sont concourantes en P.

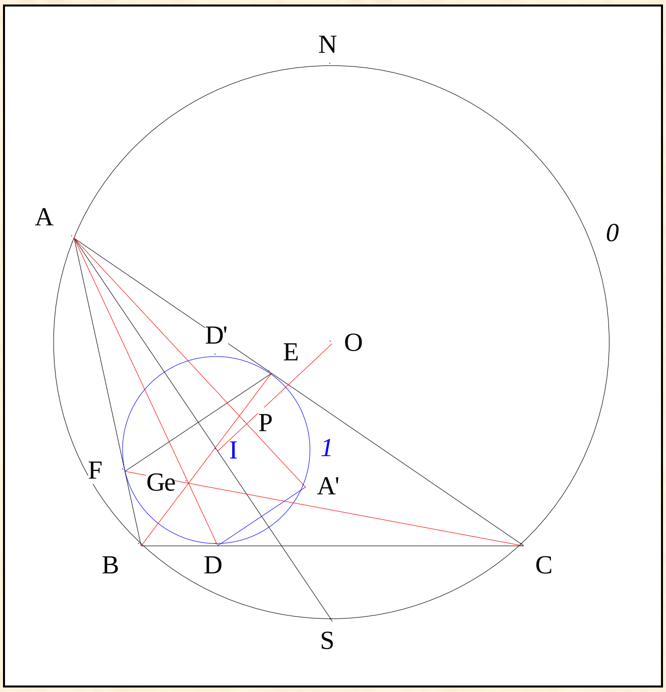
(2) Situation de P

- I étant le centre du cercle circonscrit à DEF et A*B*C* le triangle tangentiel de DEF,
d'après le résultat d'Antoine Gob[11] (OI) est la droite d'Euler de DEF.

- **Conclusion :** P est sur la droite d'Euler de DEF.

(2) Isogonal du point de Gergonne de ABC

[11] Ayme J-L., Droite de Simson de pôle Fe relativement au triangle de contact, G.G.G. vol. **6** p. 12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Par symétrie, (AD) et (AA') sont deux A-isogonales de ABC.

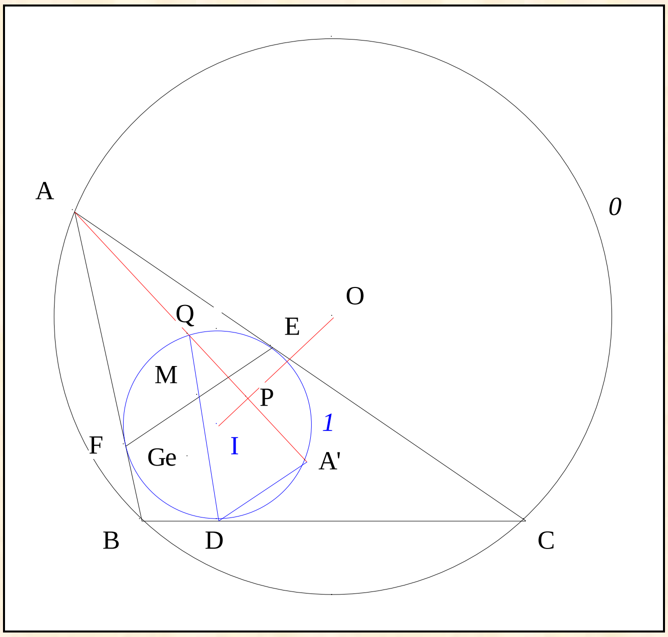
- Mutatis mutandis, (BE) et (BB') sont deux B-isogonales de ABC
  (CF) et (CC') sont deux C-isogonales de ABC.

- Notons Ge le point de Gergonne de ABC.

- D'après "Le point de Gergonne" (Cf. Annexe **2**), (AD), BE) et (CF) sont concourantes en Ge.

- **Conclusion :** d'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe **3**), P est l'isogonal de Ge.

(3) Le milieu de [EF]



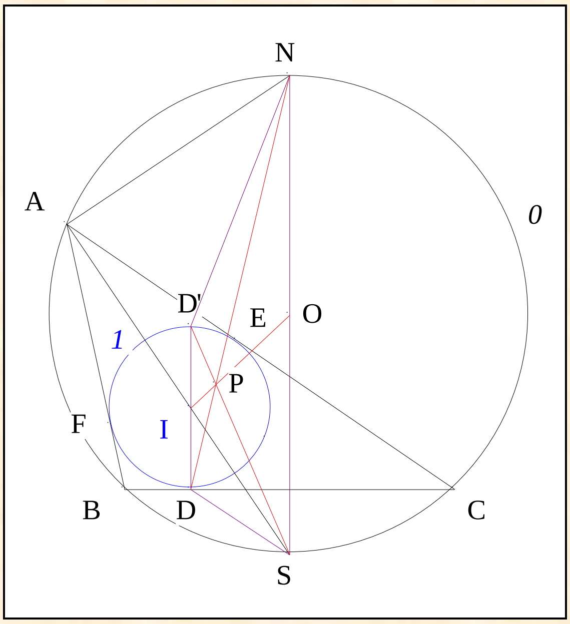
- Notons Q le second point d'intersection de (APA') avec *1*
  et M le point d'intersection de (DQ) et (EF).

- D'après **III.** Appendice **3.** La figure de Chasles, (QA') est la Q-symédiane du triangle QEF.
- **Scolie :** (A'D) est parallèle à (EF).
- D'après **III.** Appendice **1.** Première construction d'une symédiane, (QD) est la Q-médiane de QEF.
- **Conclusion :** M est le milieu de [EF].

(4) Nature géométrique de P

- **Conclusion :** d'après **I. 1.** Le point d'Exeter, P est le point d'Exeter de DEF.

(5) Position de P sur [IO]



- Notons r, R le rayon resp. de *1*, *0*.
- Nous avons : * r = ID et R = OS
  * (DID') // SON).
- **Conclusion :** d'après Thalès, P divise le segment [IO] dans le rapport r/R.

(6) P est le centre interne d'homothétie entre *0* et *1*.

Énoncé traditionnel :

le point d'Exeter d'un triangle
est
l'isogonal du point de Gergonne de son triangle tangentiel
et est situé sur
la droite d'Euler du triangle de départ.

Note historique : Jakob Tjakko Groenman[12] a proposé en 1981 le problème suivant :

[12] Groenman J. T., *Nieuw Archief voor Wiskunde* **29** (1981) 104, 305.

les conjugués isogonaux des points de Gergonne et de Nagel d'un triangle
sont alignés avec
le centre du cercle circonscrit de ce triangle.

Notons que cette question avait été posée en 1927.
La démarche proposée par l'auteur s'inspire de celle de Darij Grinberg[13] qui lui-même en a eu l'idée en se basant sur le problème **2** des Olympiades[14] qui se sont déroulées en 1982 à Budapest (Hongrie) :

A non-isosceles triangle $A_1A_2A_3$ has sides a_1, a_2, a_3 with the side lying opposite to the vertex A_i. Let M_i be the midpoint of the side a_i, and let T_i be the point where the inscribed circle of triangle $A_1A_2A_3$ touches the side a_i. Denote by S_i the reflection of the point T_i in the interior angle bisector of the angle A_i.
Prove that the lines M_1S_2, M_2S_2 and M_3S_3 are concurrent.

4. Une courte biographie de Jakob Groenman

Jakob Tjakko Groenman est né en 1911.
Il obtient son doctorat en 1950 à l'École Technique de Delft (Pays-Bas).
A cette période, il est directeur du "Rijks HBS" i.e. du lycée public d'Assen dans le nord du pays.
Quelques années après, il dirige le lycée public de Groningen.
Une trace de Jakob Groenman peut se lire dans la revue *Crux Mathematicorum* [15] de septembre 1991 où le professeur R. H. Eddy commence son article intitulé "On an idea of Groenman" avec les mots suivants :

In Crux 1987, the late J.T.Groenman, a prolific and much appreciated contributor, proposed the following two related problems...

Le professeur Francisco Bellot Rosado avance l'idée que la date de sa mort serait antérieure à septembre 1992 car le dernier signe donné par Groenman à la revue *Crux Mathematicorum* est de 1992. Continuant sans relâche sa recherche, Francico Bellot Rosado découvre dans cette même revue[16] datant de 1989, une note de l'éditeur Bill Sands :

With regret, the editor informs the readers of Crux Mathematicorum of the passing, in early March, of one of Crux's longtime regular contributors, Dr. J.T. Groenman of Arnhem, the Netherlands. Dr. Groenman's name has been appearing on these pages since 1980 and in virtually every issue the past few years. He was one of the most frequent correspondents with this office. He solved problems in a likeably ingenuous manner, writing in a rather old-fashioned inky script that, although a challenge to eyes spoiled by the word processor, gave his solutions unusual warmth. The editor shall miss his letters. He was also a prolific problem proposer ; in fact there remain in the files of Crux well over a year's worth of his proposals still to be used Dr.Groenman will thus be entertaining Crux readers for some time to come.

Après le décès de sa femme, Groenman quitte Groningen pour Arnhem où il y décèdera en mars 1989.

Remerciements : je remercie tout particulièrement Dick Klingens, éditeur de la revue *Euclides*, Martinus van Hoorn ancien directeur de cette même revue et le professeur Francisco Bellot Rosado directeur de la revue *Revistaoim* pour avoir communiqué au site *Hyacinthos* ces informations.

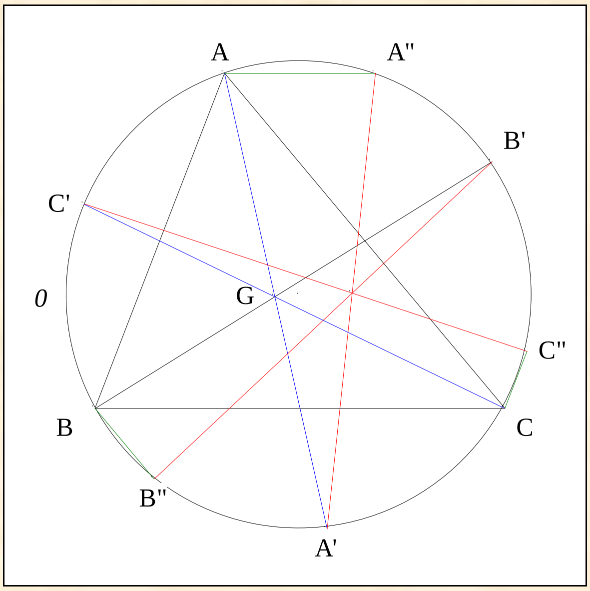
---

13 Grinberg D., Heureka X(55)! (was: Problem **2** of XXIII IMO (1982)), message #**7376** *Hyacinthos* du 18/07/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.
14 O.I.M. 1982, premier jour, problème **2**.
15 *Crux Mathematicorum* **7** (septembre 1991) ; http://math.ca/crux/.
16 *Crux Mathematicorum* **3** (mars 1991) p. 96 ; http://math.ca/crux/.

5. Trois droites concourantes au point d'Exeter

VISION

Figure :

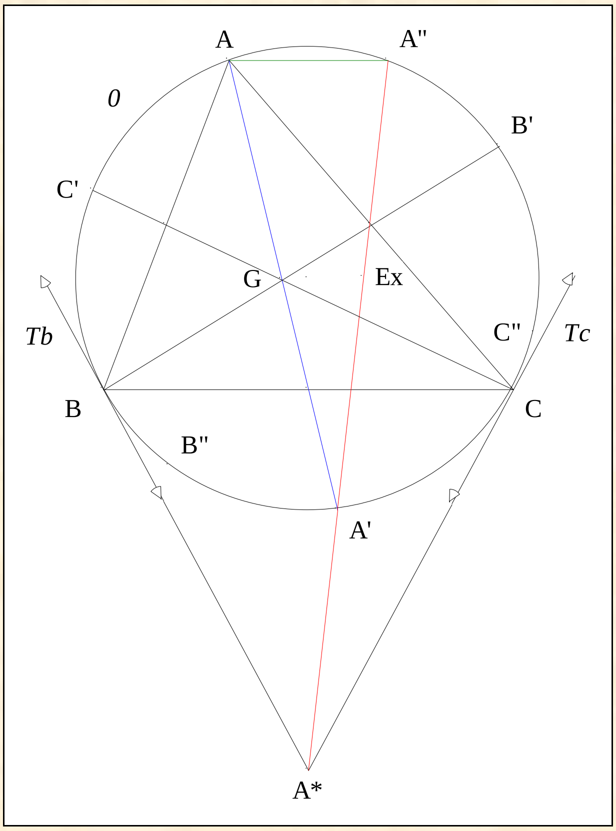


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
G le point médian de ABC,
A'B'C' le triangle G-circummédian de ABC,
A" le second point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par A avec *0*,
B" le second point d'intersection de la parallèle à (CA) passant par B avec *0*
et C" le second point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par C avec *0*.

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.[17]

VISUALISATION

[17] Zaslavsky A., concurrence, Message # **12201**, *Hyacinthos* du 01/03/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- Notons *Tb*, *Tc* les tangentes à *0* resp. en B, C,
  A* le point d'intersection de *Tb* et *Tc*,
  et Ex le point d'Exeter de ABC.

- D'après **III.** Seconde construction d'une symédiane, (A'A*) est la A'-symédiane du triangle A'BC.

- **Scolie :** (A'A) est la A-médiane de A'BC.

- D'après **III.** Première construction d'une symédiane, (A'A*) passe par A'.

- D'après **I. 1.** Le point d'Exeter, (A'A") passe par Ex.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B") passe par Ex
  (C'C") passe par Ex.

- **Conclusion :** (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes au point d'Exeter de ABC.

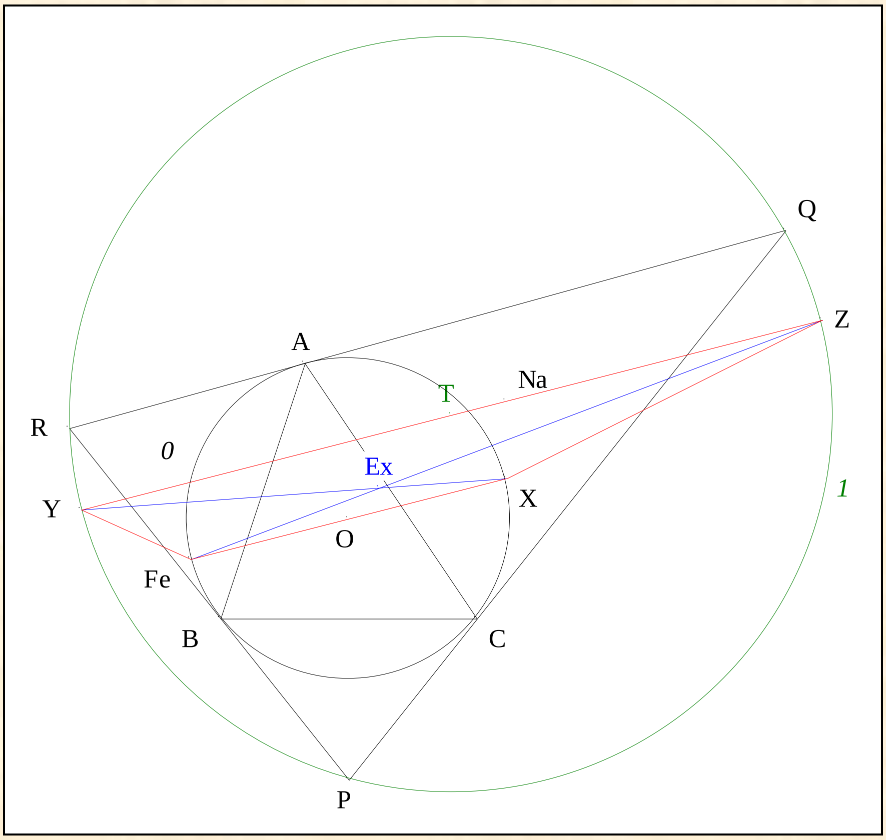
Note historique : c'est Wilson Stothers[18] qui a précisé la nature de ce point de concours.

6. Des points sur la voilette de la Dame

VISION

Figure :

[18] Stothers W., concurrence, Message # **12202**, *Hyacinthos* du 01/03/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

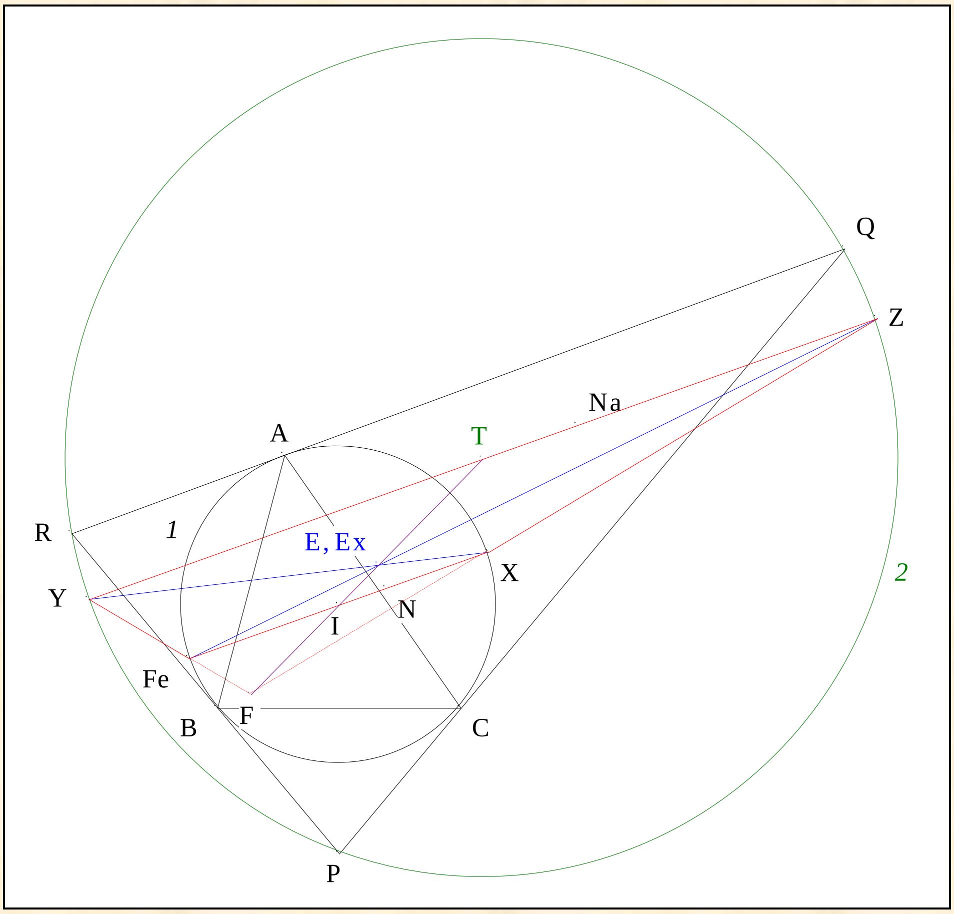


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
PQR le triangle tangentiel de ABC,
1 le cercle circonscrit à PQR,
T le centre de *1*,
Fe le point de Feuerbach de PQR,
Na le point de Nagel de PQR,
X le second point d'intersection de (IFe) avec *0*,
Y, Z les point d'intersection resp. de (TNa) avec *1*
et Ex le point d'Exeter de ABC.

Donné : Ex est le point d'intersection de (XY) et (ZFe). [19]

VISUALISATION

[19] Funck O., Geometrische Untersuchungen mit Computerunterstützung ; http://www.matheraetsel.de/texte/exeterpunkt.doc.



- Notons I le centre du cercle inscrit dans PQR
  et N le centre du cercle d'Euler de PQR.

- D'après "Le théorème de Feuerbach"[20], I, N et Fe sont alignés.

- D'après **III.** Appendice **4**. La voilette de la Dame**,** (INFeX) // (YTNaZ) ;
  en conséquence, le quadrilatère FeXZY est un trapèze.

- Notons E le point d'intersection de (XY) et (ZFe),
  et F le point d'intersection de (YFe) et (XZ).

- D'après Thalès "Le trapèze complet", F, I, E et T sont alignés.

- D'après **I. 3.** Le point d'Exeter…, scolie 5, E est le point d'Exeter de ABC.

- **Conclusion :** Ex est le point d'intersection de (XY) et (ZFe).

Note historique : cette figure a été étudiée en 1866 par le professeur allemand Carl Gustave Reuschle[21] du lycée de Stuttgart (Westphalie, Allemagne). Elle lui a permis de construire quatre nouveaux "couples de points de von Nagel"[22] comme (Y, U) et (Fe, Z) dans la figure suivante.

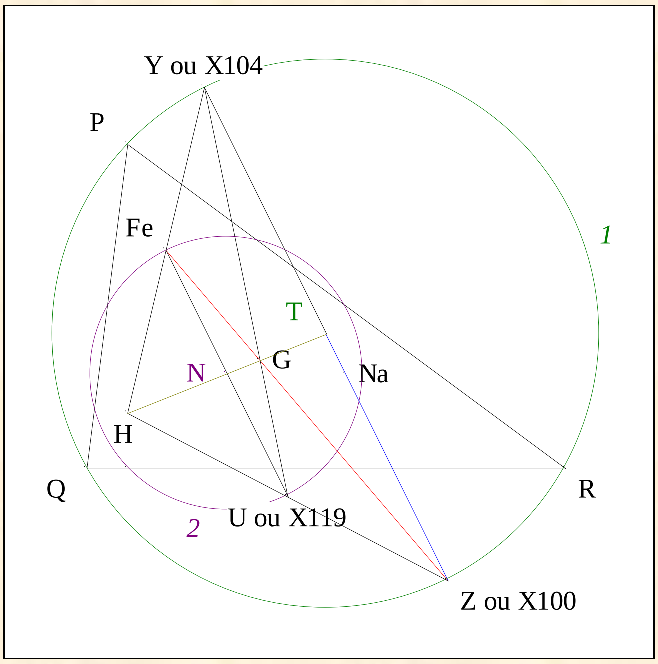
---

[20] Ayme J.-L, Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange .fr/jl.ayme.

[21] Reuschle C. G. (1812-1875), Über die Punckte des dreiecks, deren Verbindungsstrecken wom Schwerpunckt gedrittelt, *Zeitschrift für Mathemùatik und Physik* **11** (1866) 475-493.
Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992) 82.

[22] Ayme J.-L., Cinq theorems de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

Scolies : **(1)** les points Y et Z



- Notons aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons,
  H l'orthocentre de ABC,
  2 le cercle d'Euler de PQR
  et U le second point d'intersection de (NFe) avec *2*.

- D'après "La droite d'Euler"[23],
  * H, N et G sont alignés
  * N est le milieu de [HT]
  * G divise [NT] dans le rapport 1:2.

- D'après "Le cercle d'Euler-Bevan", 2. FeU = YZ.

- D'après "Le résultat d'Antoine Gob"[24], T est sur (HNG).

- **Conclusion :** le quadrilatère FeUZY étant un trapèze dont les bases sont resp. les diamètres de *1* et *2*, d'après Thalès,
  * H est le point d'intersection de (FeY) et (UZ)
  * G est le point d'intersection de (FeZ) et (UY).

(2) U est répertorié sous X_{119} cher ETC
Y est répertorié sous X_{104} cher ETC
Z est répertorié sous X_{100} cher ETC.

(3) Fe, G, Ex et X_{100} sont alignés.

(4) Les couples (Y, U) et (Fe, Z)

- Nous avons : GY = 2.GU et GZ = 2.GFe.

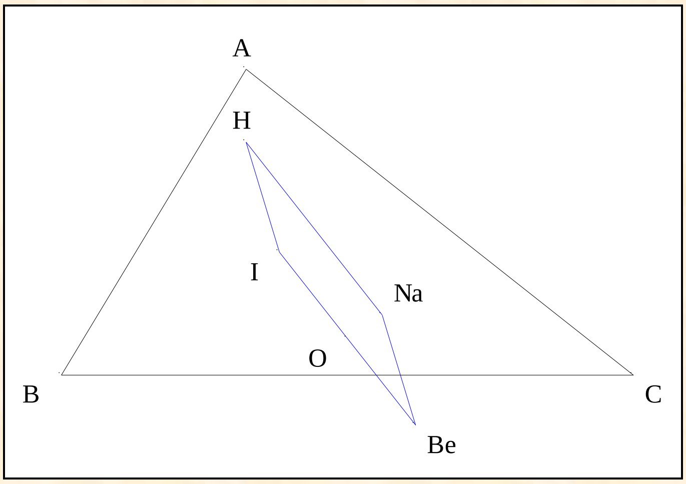
- **Conclusion :** par définition, U est le point complémentaire de Y
  et Fe est le point complémentaire de Z.

---

23 Ayme J.-L, La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. **2**, p.3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

24 Atme J.-L., Droite de Simson de pôle Fe relativement au triangle de contact, G.G.G. vol. **6**, p.12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

Un point de vue de l'auteur



Le parallélogramme de P. D. Thomas

Au sixième siècle avant notre ère, la Géométrie prenait corps de doctrine sous l'impulsion de Thalès de Milet et de Pythagore de Samos.
Trois siècles plus tard, Euclide fut l'un des premiers penseurs de l'époque, à sentir la nécessité de fixer par l'écriture toute la connaissance géométrique alors que d'autres, par la suite, fascinés uniquement par la beauté de cette science, s'attachèrent à la mode des "Grecs", à l'embellir en la parant de théorèmes. Jusqu'au début de la Renaissance, la Géométrie pure i.e. synthétique se présentait aux regards des philosophes comme une Dame pleine de charme, venue de la plus haute Antiquité et dont le visage était recouvert entièrement par une voilette. Pour l'auteur, la distribution de certains centres du triangle[25] qui conduit à des figures remarquables, lui évoque, par analogie, des motifs constitués par les points de cette voilette.

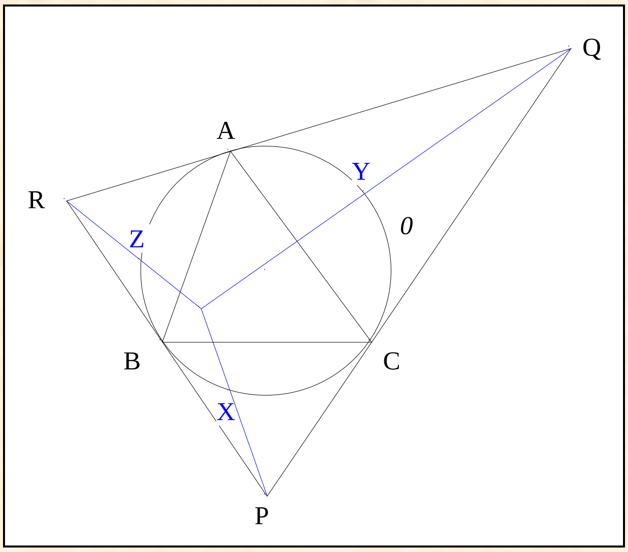
II. DEUX GÉNÉRALISATIONS

1. La généralisation de Clark Kimberling

VISION

Figure :

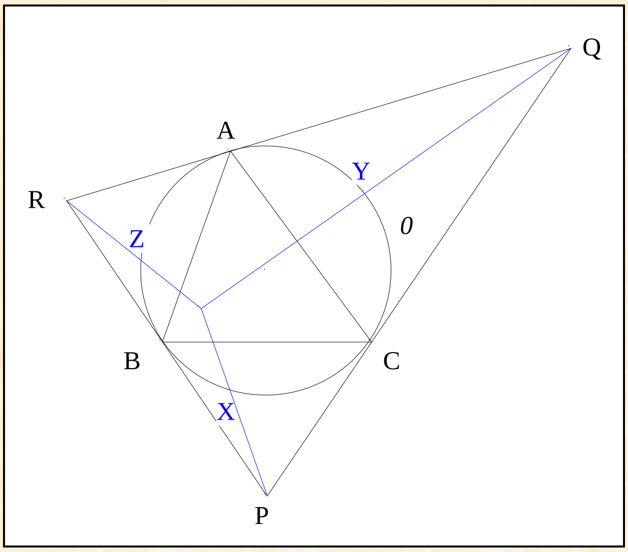
[25] Thomas P. D., Problems and Questions [150, 1952],
A parallelogram associated with a triangle, *Mathematics Magazine* **26** (1953) 283.



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	PQR	le triangle tangentiel de ABC
et	X, Y, Z	les seconds points d'intersection des hauteurs de ABC avec *0*.

Donné : (PX), (QY) et (RZ) sont concourantes sur la droite d'Euler de ABC.[26]

VISUALISATION COURTE [27]



- Notons H l'orthocentre de ABC.
- **Conclusion :** d'après "Le point de Steinbart"[28], (PX), (PY) et (PZ) sont concourantes.

Scolie : la preuve du fait que ce point de concours est sur la droite d'Euler de ABC est laissée aux lecteurs.[29]

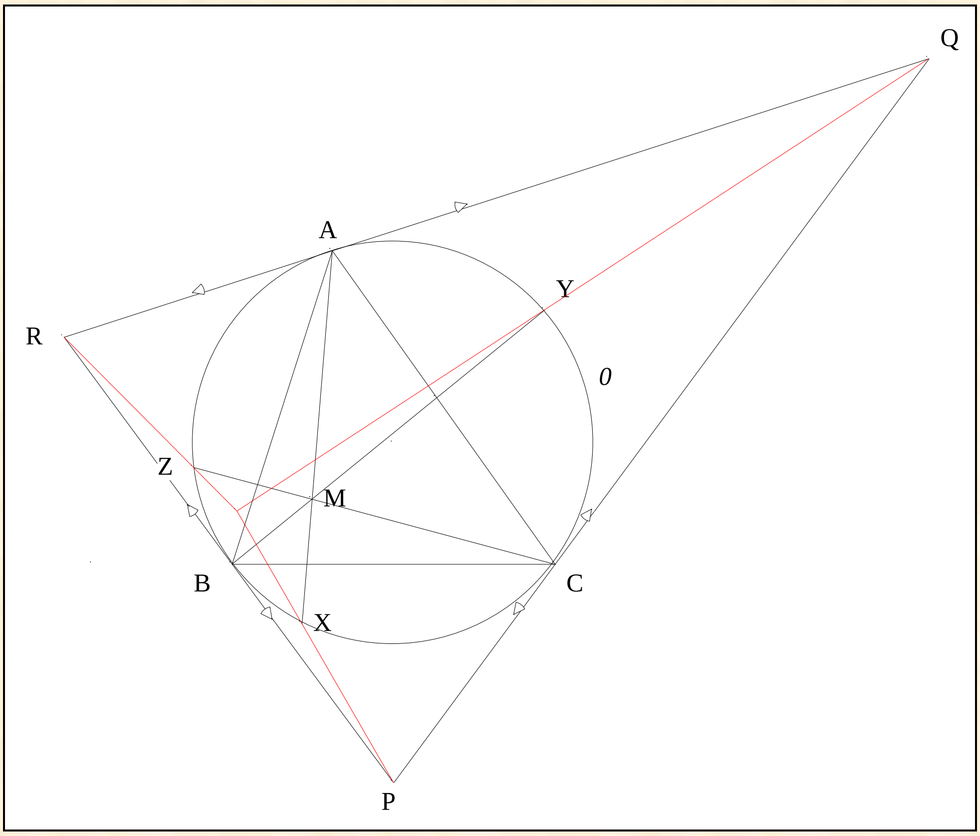
26 Kimberling C., Point on the Euler line, Advanced problem **6557**, *American Mathematical Monthly* (1987) 884 ; solution, *American Mathematical Monthly* (1990) 535.
27 L'auteur fait une analogie avec la Voie courte et brève en Alchimie.
28 Ayme J.-L., Les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
29 Considérer le point de Nagel et suivre la même procédure qu'en **I. 3.**

Remerciements : je remercie encore tout particulièrement le professeur Francisco Bellot Rosado directeur de la revue *Revistaoim* [30] pour avoir confirmé la référence concernant la généralisation de Clark Kimberling. Il m'a signalé que l'amiral espagnol José Yusty Pita (en retraite et probablement décédé à ce jour) a résolu ce problème et m'a confié qu'il a traduit en anglais ce problème pour le *Monthly* car l'amiral ne savait pas parler cette langue.

2. La généralisation de Darij Grinberg

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle
	0	le cercle circonscrit de ABC,
	M	un point,
	PQR	le triangle tangentiel de ABC,
	X, Y, Z	les circumtraces resp. de (AM), (BM), (CM)

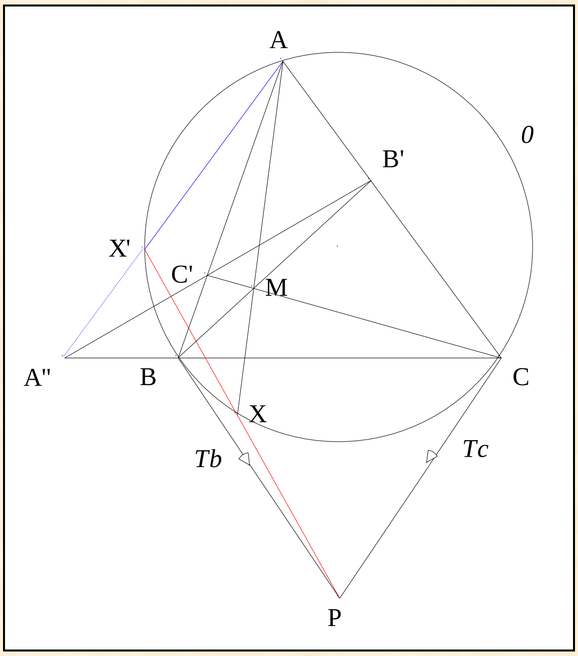
Donné : (PX), (PY) et (PZ) sont concourantes.

VISUALISATION

[30] Bellot Rosado F., *Revistaoim* ; http://www.oei.es/oim/revistaoim/index.html.

- **Conclusion :** d'après "Le point de Steinbart"[31], (PX), (PY) et (PZ) sont concourantes.

Scolie : trois droites concourantes



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A" le point d'intersection de (B'C') et (BC)
et X' le second point d'intersection de (IX) avec *0*.

Donné : A, X' et A" sont alignés.[32]

Commentaire : une preuve de ce résultat peut être vue dans l'article "Les points de Steinbart et de Rabinowitz".[33]

Scolie : lorsque M est le point de Lemoine K de ABC, (AX') est la tangente à *0* en A.

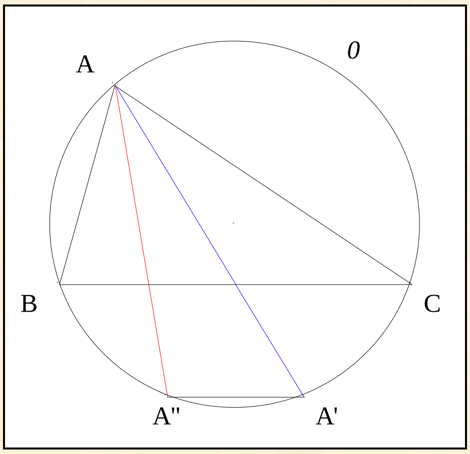
III. APPENDICE

1. Première construction d'une symédiane[34]

VISION

[31] Ayme J.-L., Les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. **3**, p. 1-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[32] Grinberg D., Message *Hyacinthos*.
[33] Ayme J.-L., Les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. **3**, p. 17 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[34] Chasles M..

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	A'	la circumtrace de la A-médiane de ABC
et	A"	le point de *0* tel que (ED) soit parallèle à (BC).

Donné : (AA") est la A-symédiane de ABC.

VISUALISATION

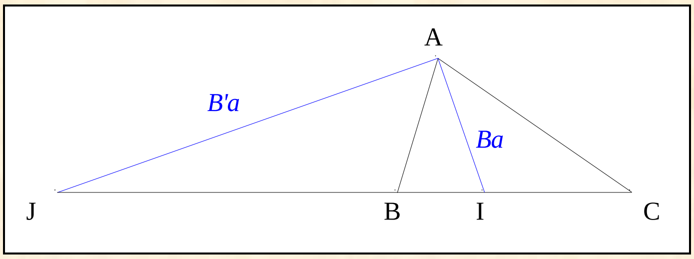
- Le trapèze cyclique BCA'A" est isocèle ; en conséquence, BA" = CA'.
- les angles <BAE et <DAC sous tendant des cordes égales, sont égaux.
- **Conclusion :** (AA") est la A-symédiane de ABC.

Note historique : Nathan Altshiller-Court[35] attribue le concept de symédiane à Michel Chasles.

2. Une quaterne harmonique

VISION

Figure :



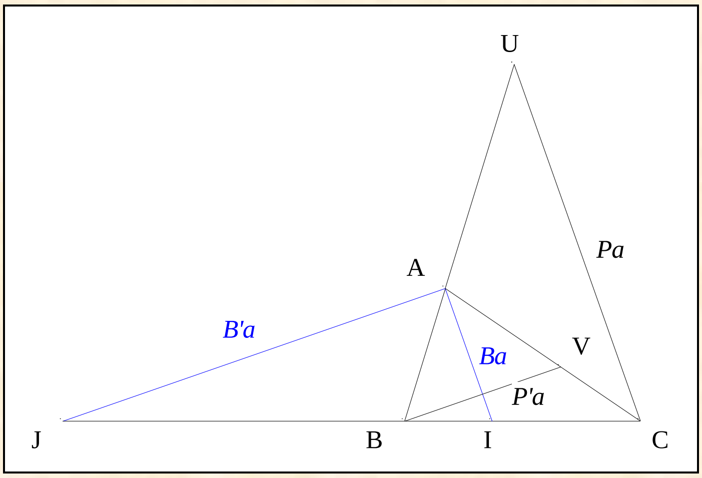
Traits : ABC un triangle,

[35] Altshiller-Court Nathan, *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936) n° **558**.

	Ba, *B'a*	la A-bissectrice resp. intérieure, extérieure de BAC
et	I, J	les points d'intersection resp. de *Ba*, de *B'a* avec (BC).

Donné : $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$.[36]

VISUALISATION



- Notons *Pa* la parallèle à *Ba* passant par C,
  U le point d'intersection de Δc et (AB)
  P'b la parallèle à *B'a* passant par B
  et V le point d'intersection de *Pb* et (AC).

- Par une chasse angulaire, nous montrons que
  (1) le triangle ACU est A-isocèle : AU = AC.
  (2) le triangle ABV est A-isocèle : AV = AB.

- D'après Thalès "Rapport", $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AU}$, $\frac{JB}{JC} = \frac{AV}{AC}$.

- **Conclusion :** $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$.

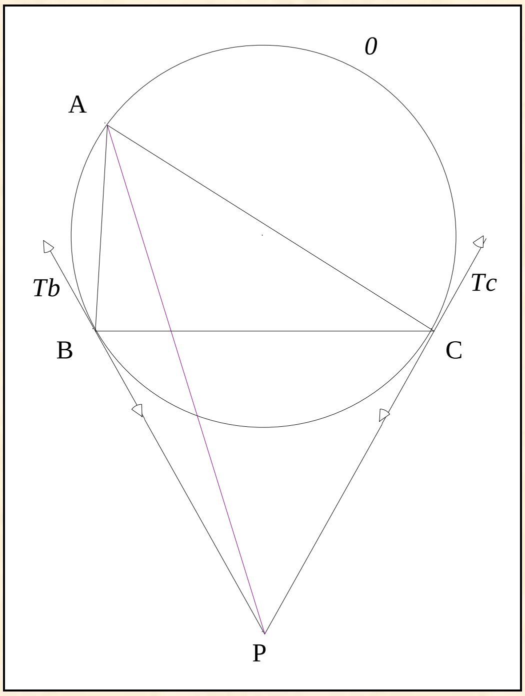
Scolie : la quaterne (B, C, I, J) est harmonique.

3. La figure de Chasles ou la seconde construction d'une symédiane

VISION

Figure :

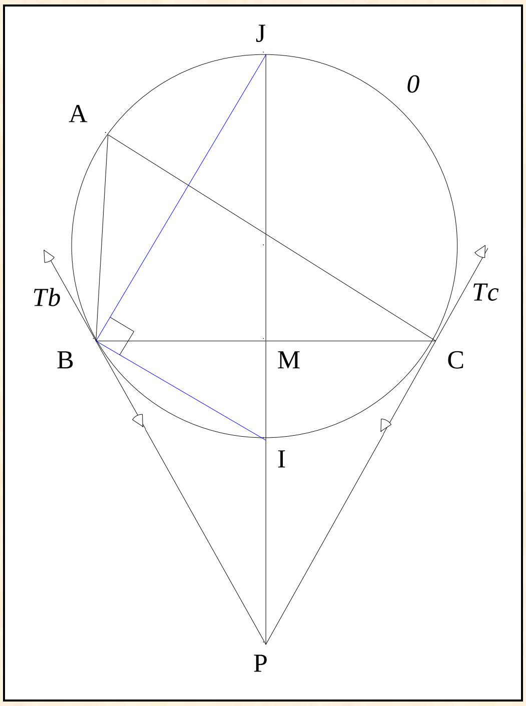
[36] Euclide



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Tb, *Tc*	les tangentes à *0* resp. en B, C
et	P	le point d'intersection de *Tb* et *Tc*.

Donné : (AP) est la A-symédiane de ABC.[37]

VISUALISATION



- Notons I, J les premier, second perpoints de ABC

[37] Chasles M., (1816).

et M le milieu de [BC].

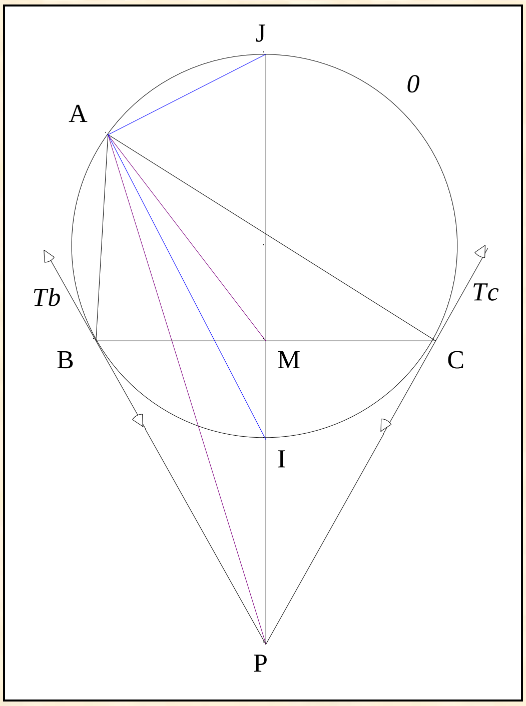
- **Scolies :** **(1)** P, M, I et J sont alignés
  (2) (BI), (BJ) sont resp. les B-bissectrices intérieure, extérieure du triangle PBC.

- D'après **III. 2.** Un quaterne harmonique, (P, M, I, J) est harmonique.

- Sachant qu'un quaterne ne change pas si l'on permute en même temps le premier avec le deuxième point, le troisième avec le quatrième, (M, P, J, I) est harmonique.

- Notons *Pb* le pinceau d'origine B et de rayons (BM), (BP), (BJ), (BI) i.e. *Pb* = (B ; M, P, J, I).

- *Pb* est harmonique.



.

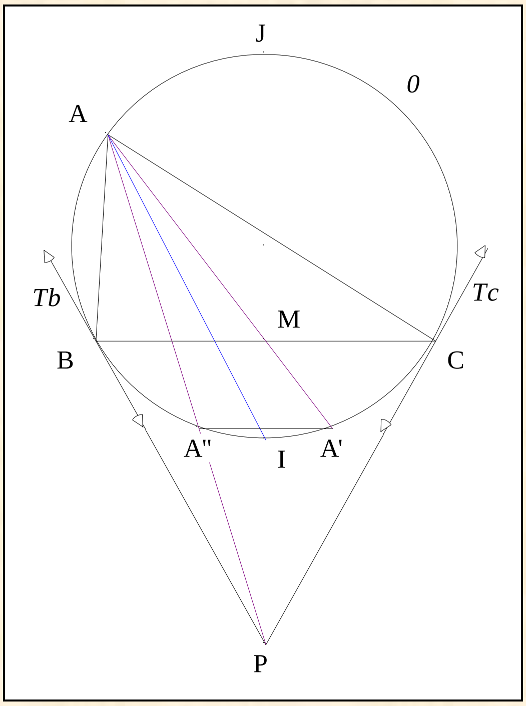
- Notons *Pa* le pinceau d'origine A et de rayons (AM), (AP), (AJ), (AI) i.e. *Pa* = (A ; M, P, J, I).

- Par déplacement du sommet B en A, *Pa* est harmonique ;
  Pa ayant deux rayons conjugués perpendiculaires, ils sont les bissectrices de l'angle des deux autres rayons.

- (AM) est la A-médiane de ABC.

- **Conclusion :** (AP) est la A-symédiane de ABC.

Scolies : **(1)** deux parallèles



- Notons A', A" les seconds points d'intersection resp. de (AM), (AP) avec *0*.

- **Conclusion :** d'après **II. 1.** Première construction d'une symédiane, (A'A") est parallèle à (BC).

  (2) P est "le point exsymédian de ABC".

Commentaire : ce résultat apparaît comme une retombée du théorème suivant de Chasles découvert en 1816 et republié dans les *Annales* de Gergonne[38] et de Liouville[39] avec la démonstration de Chasles :

le centre N' *d'un cercle obtenu par projection conique d'un cercle* AMB *d'une sphère*
est
la projection conique du sommet N *du cône circonscrit à la sphère, suivant le cercle* AMB.

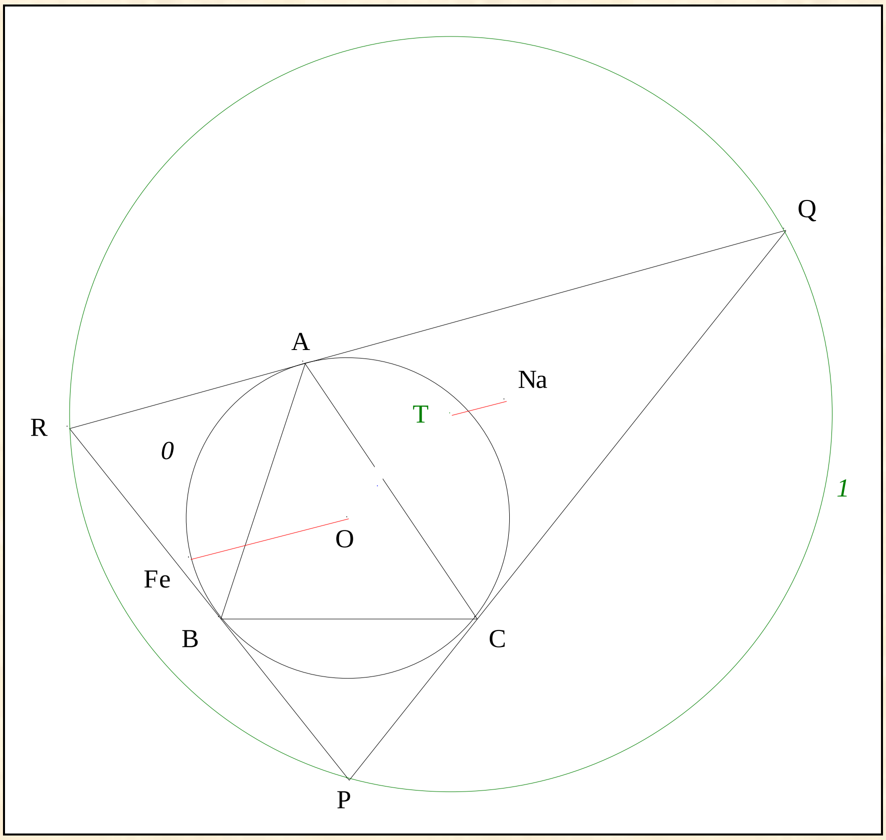
Rappelons que ce résultat avait été communiqué à Jean Hachette, et inséré dans ses *Éléments de Géométrie à trois dimensions*, partie algébrique, à la page 270.

4. La voilette de la Dame

VISION

Figure :

[38] *Annales* de Gergonne 19, p.157.
[39] *Annales* de Liouville 7 (1842) 272.

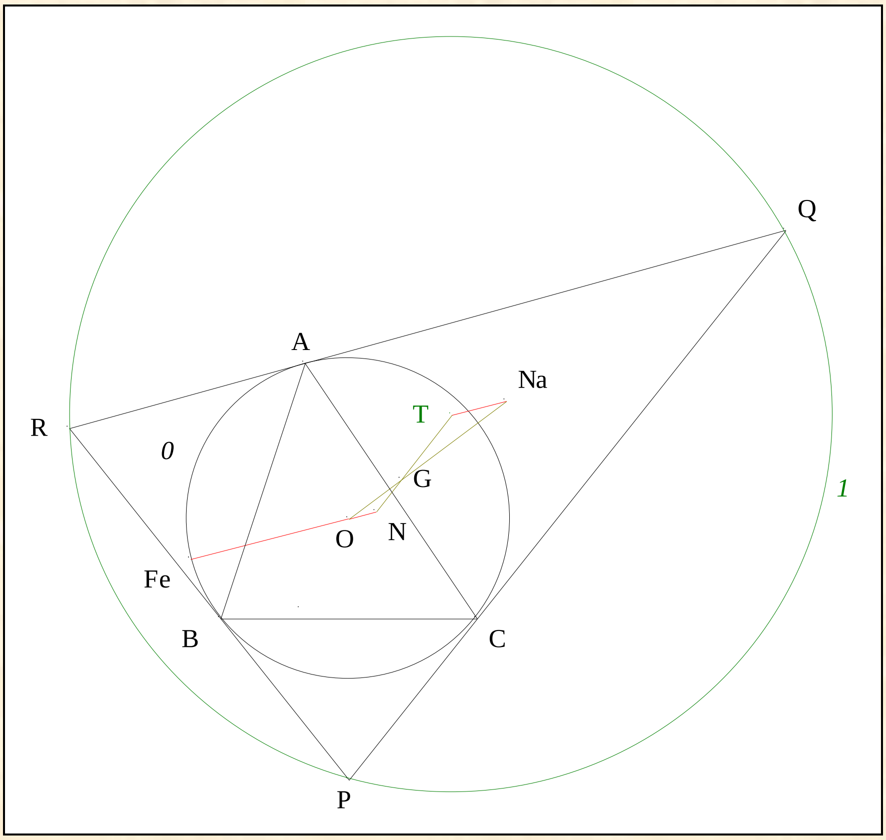


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	PQR	le triangle tangentiel de ABC,
	1	le cercle circonscrit à PQR,
	T	le centre de *1*,
	Fe	le point de Feuerbach de PQR
et	Na	le point de Nagel de PQR.

Donné : (TNa) est parallèle à (OFe).[40]

VISUALISATION

[40] Ayme J.-L., Two parallels for pleasure, *Mathlinks* du 23/05/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=47



- Notons N le centre du cercle d'Euler de PQR
  et G le point médian de PQR.

- D'après "La fascinante figure de Cundy"[41], T, G et N sont alignés dans le rapport 2:1.

- D'après "Le théorème de Feuerbach"[42], O, N et Fe sont alignés.

- D'après "Cinq théorèmes de von Nagel"[43], Na, G et O sont alignés dans le rapport 2:1.

- D'après Thalès, (TNa) //(NFe).

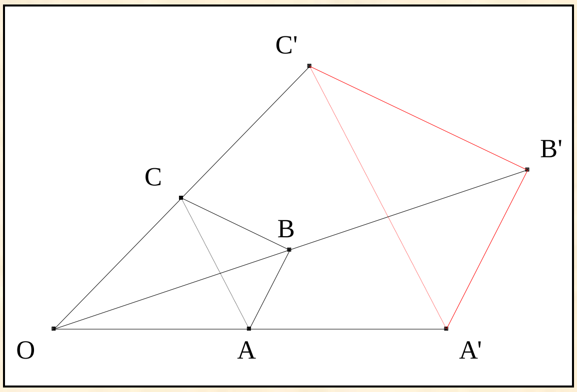
- **Conclusion :** (TNa) est parallèle à (OFe).

---

[41] Ayme J.-L, La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. **2**, p.3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[42] Ayme J.-L, Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[43] Ayme J.-L, Cinq théorèmes de von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p.10-12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

IV. ANNEXE

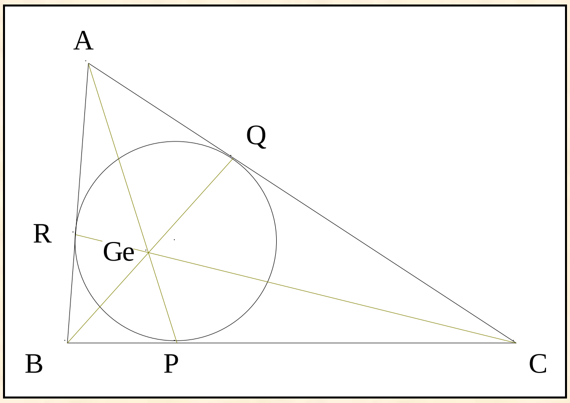
1. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que **(1)** (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

2. Le point de Gergonne[44]



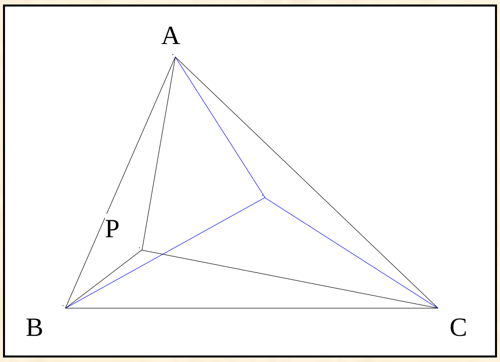
Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC
et P, Q, R les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB).

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Scolie : ce point de concours est "le point de Gergonne de ABC" ;
il est noté Ge et répertorié sous X_7 chez ETC.

3. The isogonal theorem[45]

44 Gergonne, *Annales de Gergonne* **IX** (1818-19).
45 Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et *Da* , *Db* , *Dc* les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné : *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

V. ARCHIVE [46]

1990] PROBLEMS AND SOLUTIONS 535

SOLUTIONS OF ADVANCED PROBLEMS

Points on the Euler Line

6557 [1987, 884]. *Proposed by Clark Kimberling, University of Evansville.*

Let Γ denote the circumcircle of a triangle *ABC*. Let *A'* be the point, other than *A*, where the *A*-median of *ABC* meets Γ. Let *A''* be the point, other than *A*,

[46] Communiqué par le professeur Francisco Bellot Rosado.

where the A-altitude of ABC meets Γ. Similarly define B', C', and B'', C''. Let DEF be the tangential triangle of ABC (e.g., D is the point where the line tangent to Γ at B meets the line tangent to Γ at C). Define (as usual) the Euler line of ABC to be the line containing the orthocenter, the circumcenter, and the centroid of ABC. Prove that the lines DA', EB', FC' and the lines DA'', EB'', FC'' concur in points that lie on the Euler line of ABC.

Solution by O. P. Lossers, Eindhoven University of Technology, The Netherlands. Let O be the center and R the radius of Γ. Let M denote the circumcenter of $\triangle DEF$ and Ω the circumcircle of this triangle. We now introduce some further notation, and some facts of advanced Euclidean geometry.

1. If U, V and W are in this order the midpoints of $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ and $\overline{AB}$ we have
$$\overline{OU} \times \overline{OD} = \overline{OV} \times \overline{OE} = \overline{OW} \times \overline{OF} = R^2.$$
It follows that the inversion (O, R^2) transforms Ω into the nine-point-circle ν of $\triangle ABC$. The center of ν is therefore on OM. *Hence the Euler line of* $\triangle ABC$ *coincides with* OM.
2. Let G and N be the points of Gergonne and Nagel, respectively, of a triangle T. A well-known theorem states that the isogonal conjugates of G and N with respect to T are the internal and the external center of similitude of the incircle and the circumcircle of T.

We are now ready to prove the result. Since the symmedians of a triangle pass through the poles of the sides with respect to the circumcircle, the lines AD, BE and CF have the point L of Lemoine in $\triangle ABC$ in common. With respect to $\triangle ABC$ these lines are isogonal conjugates of AA', BB', and CC' respectively. Hence they are isogonal conjugates of DA', EB' and FC' in $\triangle DEF$. It follows that DA', EB' and FC' are concurrent in a point S, the isogonal conjugate of L with respect to $\triangle DEF$.

Since L is the Gergonne-point of $\triangle DEF$, the point S is (by 2) the internal center of similitude of Γ and Ω and as such on OM, that is (by 1) on the Euler-line of $\triangle ABC$.

Let A_1, B_1 and C_1 be the diametral points on Γ of A, B and C respectively. Let X be the point of contact of EF with the excircle Γ_1 of $\triangle DEF$ having its center on DO. Similarly define Y and Z. Now AA'' and AA_1 are isogonal conjugates in $\triangle ABC$. It follows that DA'' and DA_1 are isogonal conjugates in $\triangle DEF$. Also, D is the external center of similitude of Γ and Γ_1. Thus D, A_1 and X are collinear. Hence DA'' and DX are isogonal conjugates with respect to $\triangle DEF$. This is also true of EB'' and EY as well as FC'' and FZ. The lines DX, EY and FZ are concurrent, and their common point N is Nagel's point in $\triangle DEF$. We conclude (by 2) that DA'', EB'' and FC'' meet at the external center of similitude T of Γ and Ω and thus on the Euler line of $\triangle ABC$.

Editorial Comment. L. Kuipers (Switzerland) and the proposer both provided somewhat less erudite solutions based on the mechanism of "homogeneous trilinear coordinates." For example, the centroid has coordinates (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}) where a, b, and c designate the sides of ABC. It turns out that DA', EB', and FC' concur at

$$\left(a\{-a^4+b^4+c^4\}, b\{a^4-b^4+c^4\}, c\{a^4+b^4-c^4\}\right)$$

while DA'', EB'', FC'' concur at

$$\left(a\{-a'+b'+c'\}, b\{a'-b'+c'\}, c\{a'+b'-c'\}\right) \sim \left(\frac{\cos 2A}{\cos A}, \frac{\cos 2B}{\cos B}, \frac{\cos 2C}{\cos C}\right)$$

where $a' = \sin^2 2A$, etc.

Solved also by M. Orlowski and M. Pachter (South Africa), Martine Pages (France), Admiral Jose Yusty Pita (Spain), Raul A. Simon (Chile), an anonymous contributor, and the proposer.