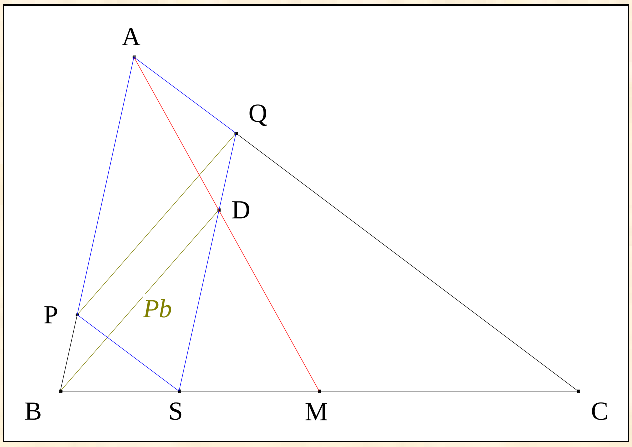
SIMPLICITY 1

Dans chaque château,
il y a un donjon où réside une princesse.
La Haute Dame de ce château a ravi mon cœur
et
est devenue la source de mon inspiration.

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente *Simplicity* où une figure simple appelle une solution simple…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents *Simplicity* where a simple figure called a simple solution...
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 17/02/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Resumen. El autor presenta *Simplicity* donde una simple figura llama una solución simple...
Las figuras están en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

Avertissement. L'auteur rappelle que la vision triangulaire d'un résultat est laissée aux soins du lecteur.
Un renvoi comme "Problème **5**" signifie que le lecteur se référera au "Problème 5" de la même section.
Un renvoi comme "**12.** Problème **5**" signifie que le lecteur se référera au "Problème **5**" de " *Simplicity* **12**".
Un foot note précise une origine du problème, une signification ou renvoie à un article de l'auteur.

Warning. The author recalls that the triangular vision of a result is left to the reader care.
A reference as "Problem **5**" means that the reader refers to the "Problem **5**" of the same section.
A reference like "**12.** Problem **5**" means that the reader refers to the "Problem **5**" of "*Simplicity* **12**".
A foot note specifies an origin of the problem, a meaning or refers to an article of the author.

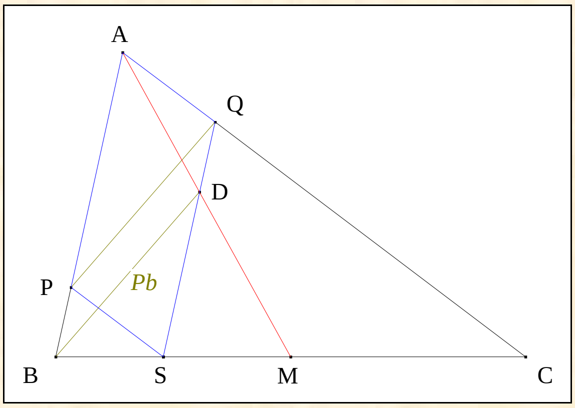
Advertencia. El autor recuerda que la visión triangular del resultado queda al cuidado del lector.
Una referencia como "Problema **5**" significa que el lector consulte la sección "Problema **5**" de la misma. Una referencia como "**12.** Problema **5**" significa que el lector consulte "Problema **5**" de "*Simplicity* **12**".
Una nota especifica un origen del problema, un significado o se refiere a un artículo del autor

Sommaire

1. UN MILIEU [2]

VISION

Figure :

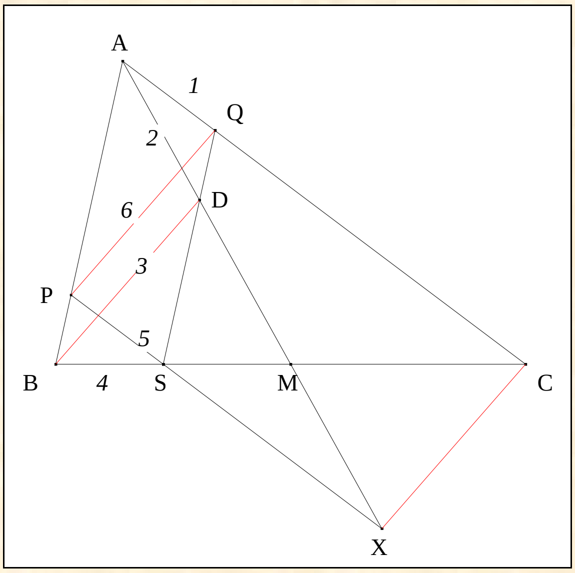


Traits :		ABC	un triangle,
		M	le milieu de [BC],
		S	un point de [BC],
		P, Q	deux points resp. de (AB), (AC)
			tels que le quadrilatère APSQ soit un parallélogramme,
		Pb	la parallèle à (PQ) issue de B
	et	D	le point d'intersection de *Pb* et (SQ).

Donné : (AD) passe par M.

VISUALISATION

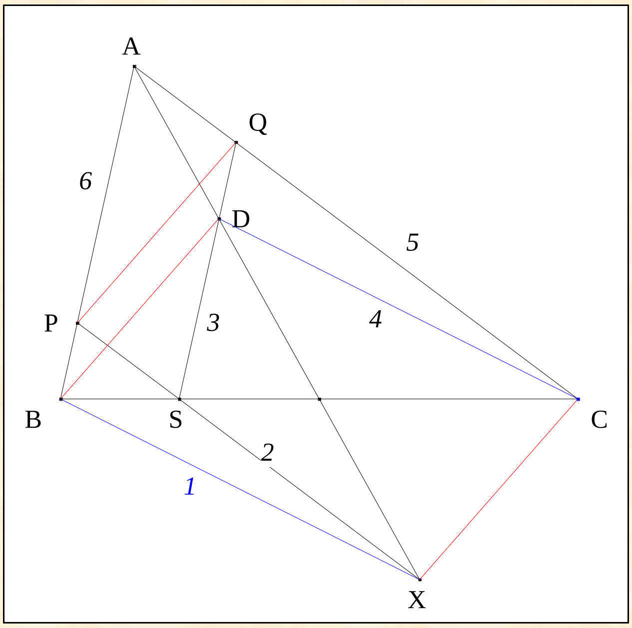
[2] Lemma of parallels, AoPS du 13/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1382807_lemma_of_parallels



- Notons X le point d'intersection de (AD) et (PS).

- D'après Pappus d'Alexandrie "La proposition **139**" [3]
  appliqué à
  l'hexagone sectoriel QADBSPQ de frontières (AB) et (QS), **(1)** (CX) en est la pappusienne

  (2) (CX) // (BD).

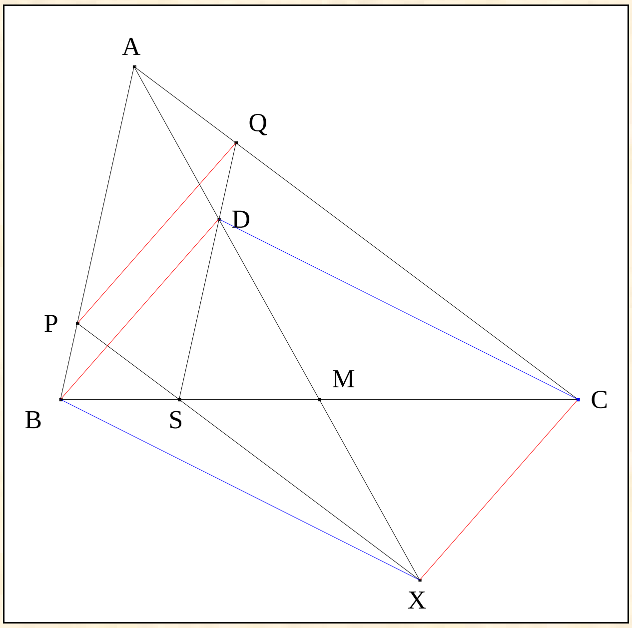


- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [4]
  appliqué à
  l'hexagone sectoriel BXSDCAB de frontières (AB) et (ADX), **(1)** (BX) en est la pappusienne

  (2) (BX) // (CQ).

---

[3] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 15-17 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[4] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



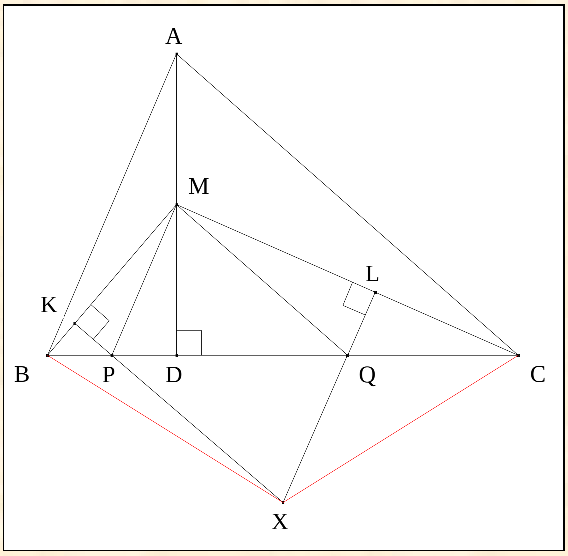
- Le quadrilatère BCCD étant un parallélogramme,
  ses diagonales [DX] et [BC] se coupent en leur milieu.

- **Conclusion :** (AD) passe par M.

2. DEUX SEGMENTS ÉGAUX [5]

VISION

Figure :

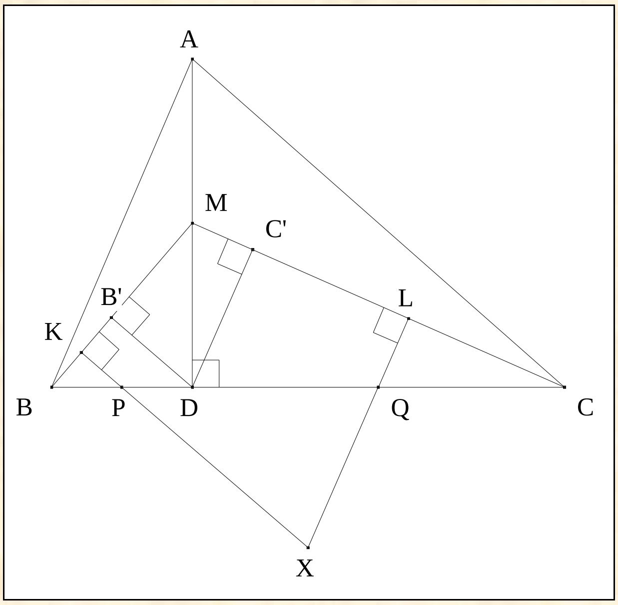


Traits :	ABC	un triangle,
	D	le pied de la A-hauteur de ABC,
	M	un point de [BC],
	P, Q	les milieux resp. de [BD], [CD],
	K, L	les pieds des P, Q-hauteurs resp. des triangles PBM, QCM
et	X	le point d'intersection de (KP) et (LQ).

Donné : XB = XC.

VISUALISATION

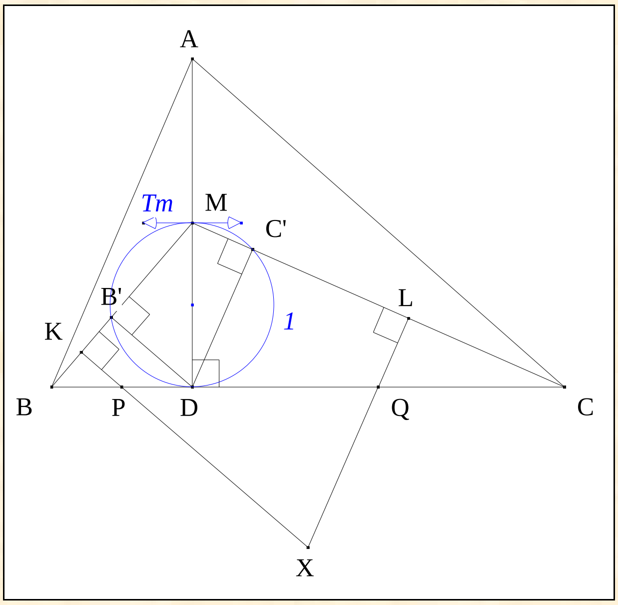
[5] Midpoints and perpendiculars, AoPS du 14/02/2017 ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1383527_midpoints_and_perpendiculars



- Notons B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à K, L.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle DBB', (DB') // (PK) ;
  Par hypothèse, (PK) $\perp$ (BM)
  En conséquence, (DB') $\perp$ (BM).

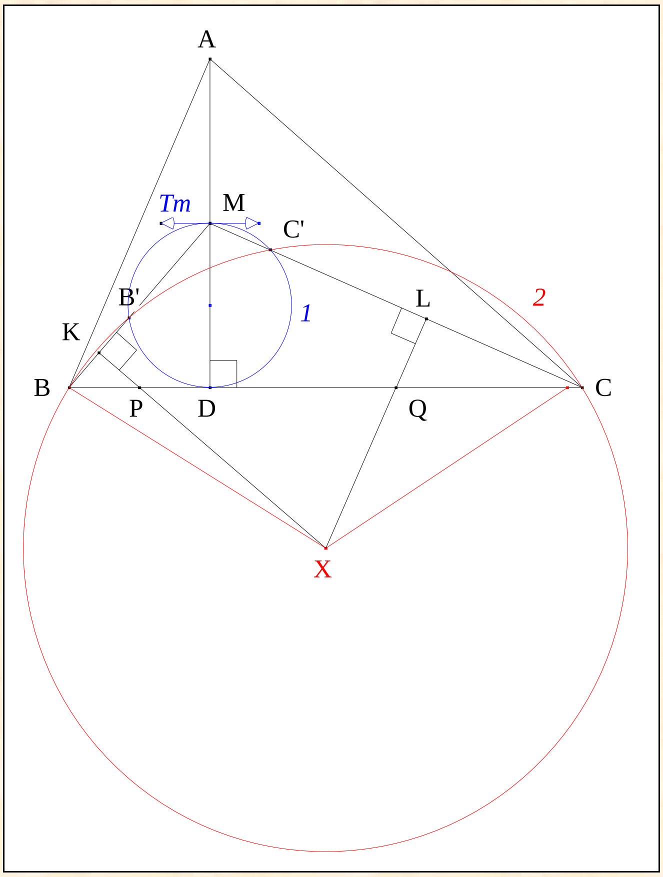
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (DC') $\perp$ (CM).



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle",
  B' et C' sont sur le cercle de diamètre [DM].

- Notons *1* ce cercle
  et *Tm* la tangente à 1 en M.

- **Scolie :** *Tm* // (BC).



- Le cercle *1*, les points de base B' et C', les moniennes naissantes (MB'B) et (MC'C), conduisent au théorème **1** de Reim ; en conséquence, B, B', C' et C sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

- (PK) et (QL) étant les médiatrices resp. de [BB'], [CC'], X est le centre de *2*.

- **Conclusion :** XB = XC.

3. UN CERCLE

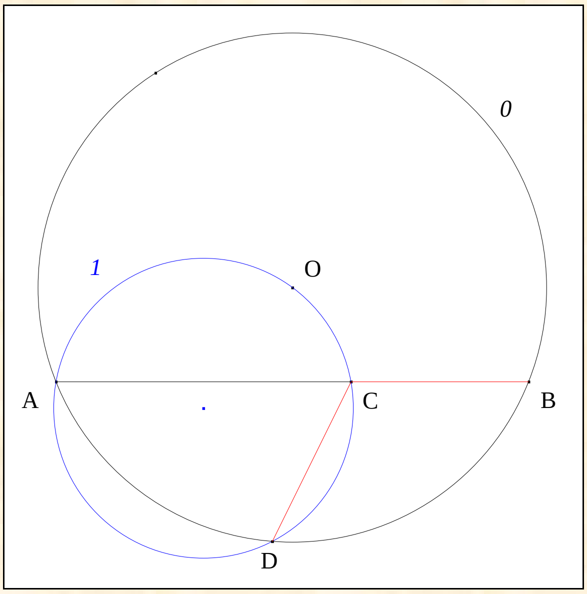
PASSANT

PAR

LE CENTRE D'UN CERCLE 1 [6]

VISION

Figure :

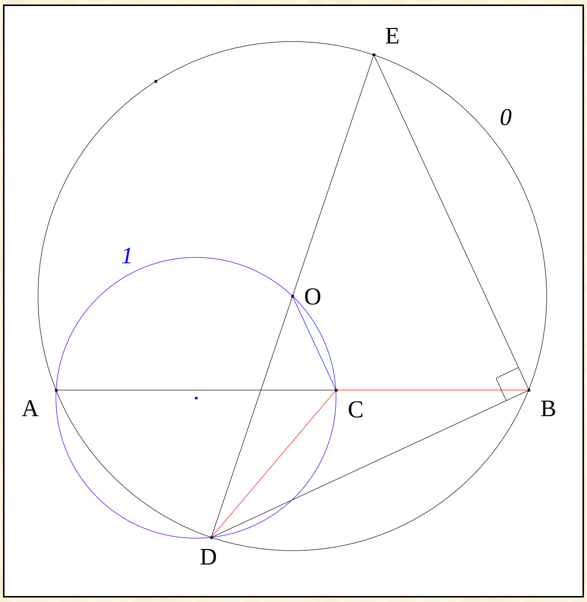


Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
[AB] une corde de *0*,
C un point de [AB]
1 le cercle passant par A, O, C
et D le second point d'intersection de *1* et *0*.

Donné : CB = CD.

VISUALISATION

[6] Easy Geometry, AoPS du 22/04/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1080717_easy_geometry
Un charmant exercice, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8



- Notons E le second point d'intersection de (DO) avec *0*.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base D et A, les moniennes (ODE) et (CAB), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (OC) // (EB).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (EB) ⊥ (BD) ;
  en conséquence, (OC) ⊥ (BD).

- **Conclusion :** (OC) étant la médiatrice de [BD],
  d'après "Le théorème de la médiatrice", CB = CD.

4. UN CERCLE

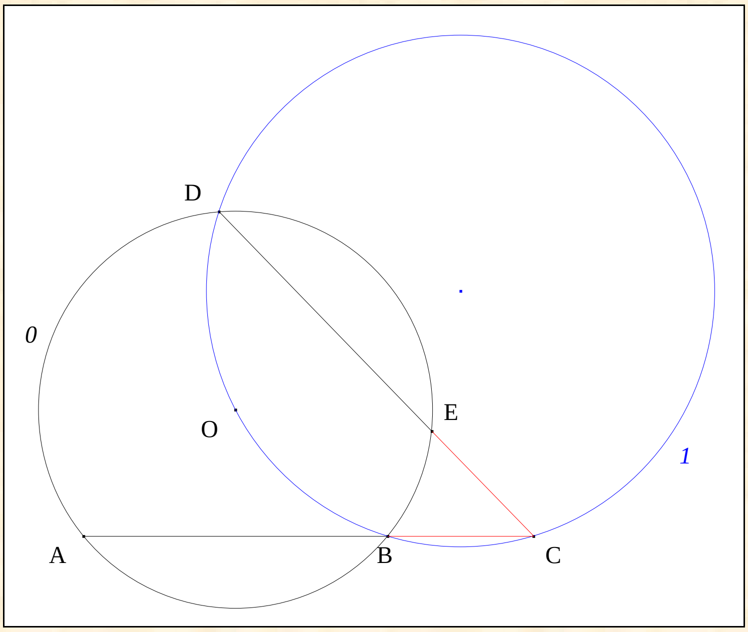
PASSANT

PAR

LE CENTRE D'UN CERCLE [7]

VISION

Figure :

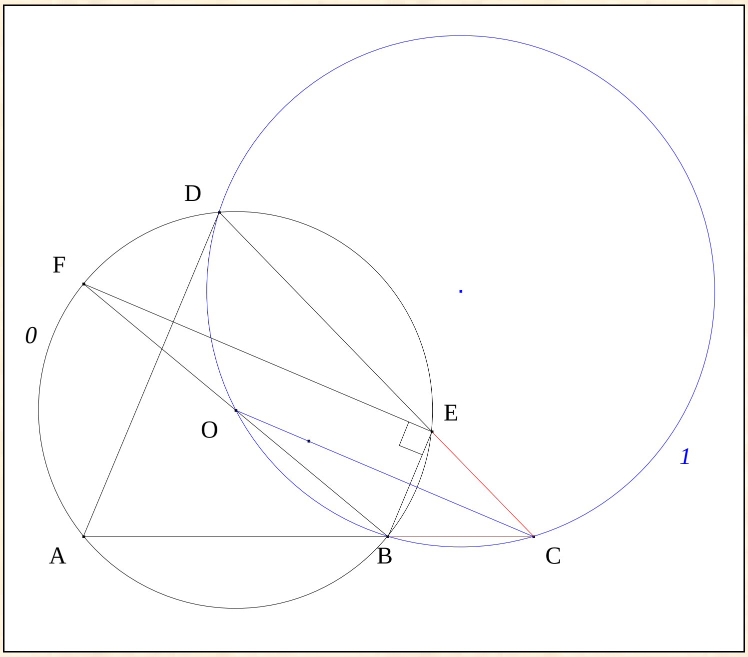


Traits :	*0*	un cercle,
	O	le centre de *0*,
	[AB]	une corde de *0*,
	C	un point de (AB) dans l'ordre A, B, C
	1	le cercle circonscrit au triangle BCO,
	D	le second point d'intersection de *1* et *0*,
et	E	le second point d'intersection de (CD) avec *1*.

Donné : CE = CB.

VISUALISATION

[7] Ayme J.-L., Two equal segments, AoPS du 18/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1385528_two_equal_segments



- Notons F le second point d'intersection de (BO) avec *0*.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base B et D, les moniennes (OBF) et (CDE), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (OC) // (FE).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (FE) ⊥ (BD) ; en conséquence, (OC) ⊥ (BD).

- **Conclusion :** (OC) étant la médiatrice de [BE], d'après "Le théorème de la médiatrice", CB = CE.

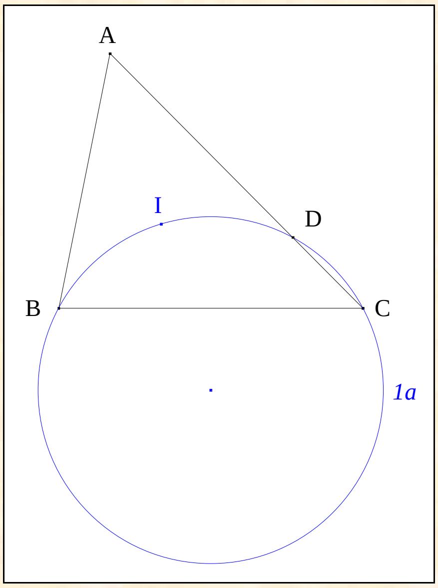
Scolie : mutatis mutandis [8], nous montrerions que CA = CD.

[8] en considérant l'antipôle de D relativement à *0*

5. UN TRIANGLE ISOCÈLE [9]

VISION

Figure :

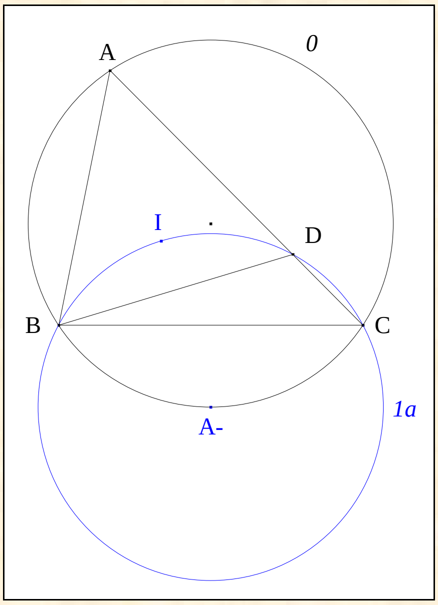


Traits : ABC un triangle tel que AB < AC,
I le centre de ABC
1a le A-cercle de Mention de ABC ; il passe par B, I, C ;
et D le second point d'intersection (AC) avec *1a*.

Donné : AD = AB.

VISUALISATION

[9] Two equal segments, AoPS du 20/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1386458_two_equal_segment



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC
  et A- le second A-perpoint de ABC.

- **Scolies :** **(1)** A- est sur *0*

  (2) A- est le centre de *1a*

  (3) *0* passe par A-.

- **Conclusion :** d'après *Simplicity* **4**.
  appliqué
  au triangle DBC et à son cercle circonscrit *1a*, AD = AB.

6. UNE PARALLÈLE

À

LA BASE D'UN TRIANGLE [10]

Sharygin Geometry Olympiad Correspondence round 2016 P-**3** Grade **8**

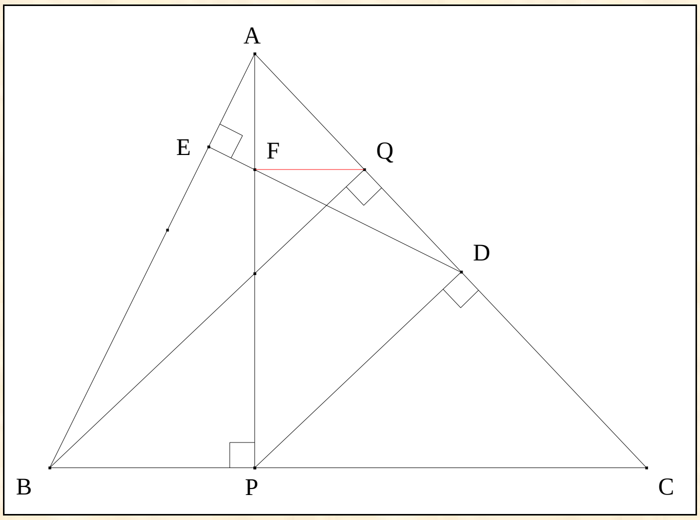
Proposed

by

E. Diomidov

VISION

Figure :

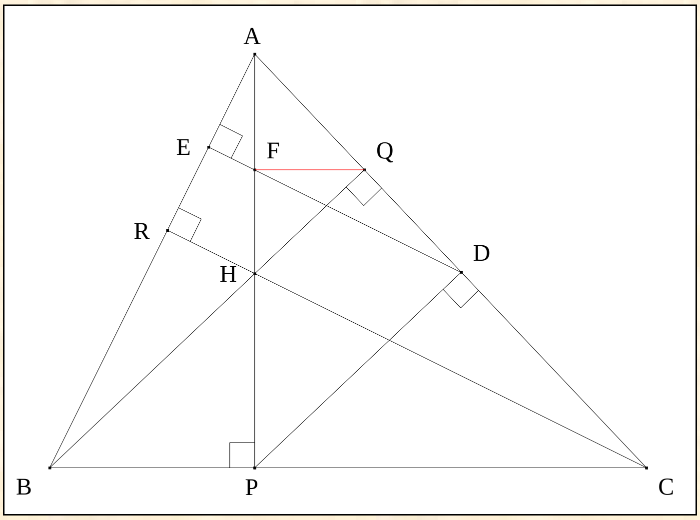


Traits : ABC un triangle,
P, Q les pieds des A, B-hauteurs de ABC,
D le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de P,
E le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de D
et F le point d'intersection (DE) et (AP).

Donné : (FQ) est parallèle à (BC).

VISUALISATION

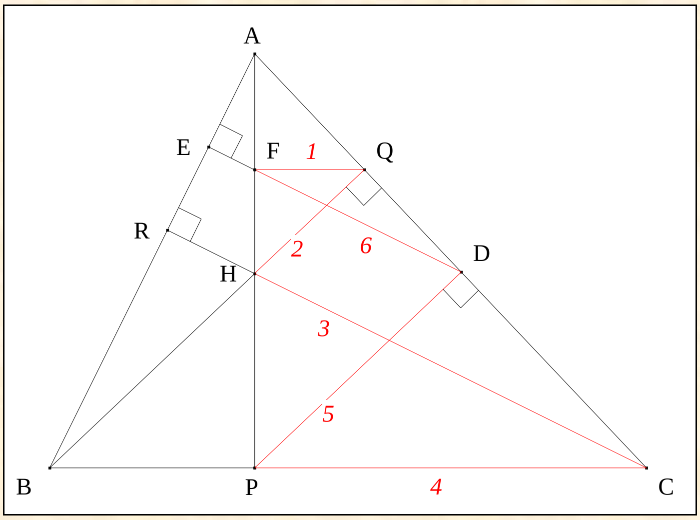
[10] Lines are parallel, AoPS du 20/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1386424_lines_are_parallel



- Notons R le pied de la C-hauteur de ABC
  et H l'orthocentre de ABC.

- **Scolies :** **(1)** (PD) // (HQ)

  (2) (DF) // (HC).



- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [11]
  appliqué à l'hexagone sectoriel FQHCPDF de frontière (AP) et (AC), (FQ) // (CP).

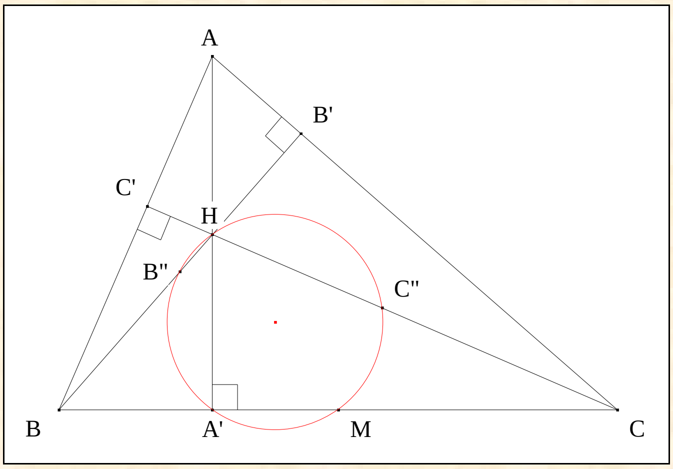
- **Conclusion :** (FQ) est parallèle à (BC).

[11] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

7. CINQ POINTS COCYCLIQUES [12]

VISION

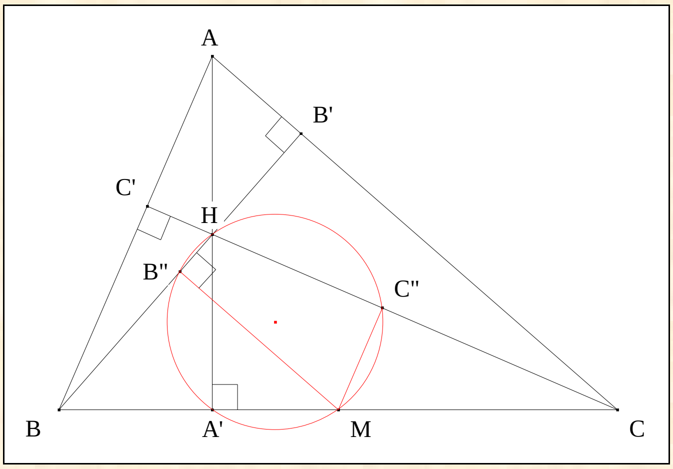
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	M	le milieu de [BC],
	H	l'orthocentre de ABC,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC
et	B", C"	les milieux resp. de [BB'], [CC'].

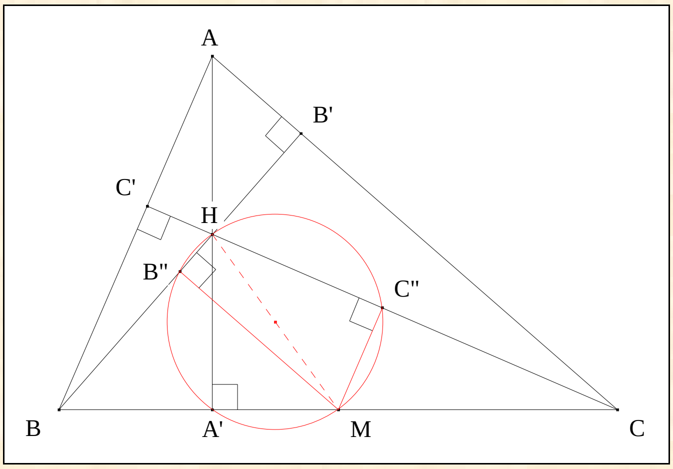
Donné : B", C", A', H et M sont cocycliques.

VISUALISATION



- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle BB'C, (MB") // (CB') ;
  par définition d'une hauteur, (CB') ⊥ (BB"HB') ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (MB") ⊥ (B"H).

[12] Honsberger R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, New Mathematical Library (1995) exercice **3**. **2** p.33
A nice lemma, AoPS du 22/02/2017 ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1387927_a_nice_lemma



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (MC") ⊥ (C"H).

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", B", C", A', H et M sont sur le cercle de diamètre [MH].

8. ISOTOME DU PIED D'UNE HAUTEUR [13]

All Russian MO 2015, grade **10**, problem **7**

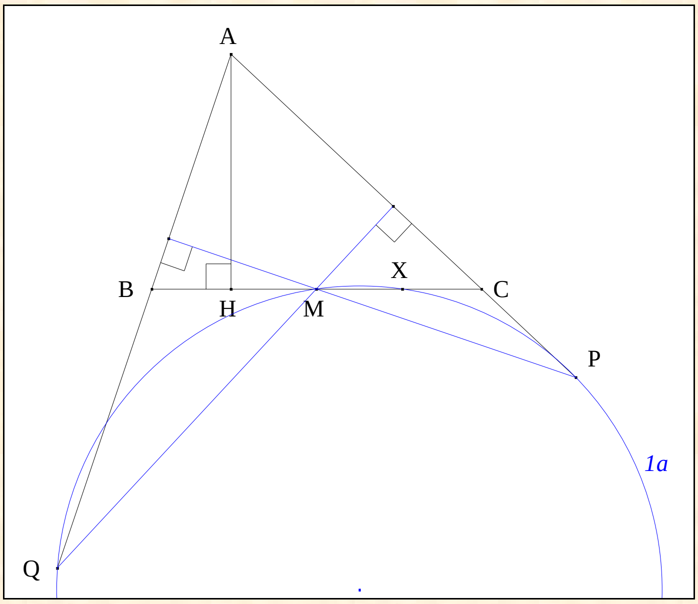
Proposed

by

M. Didin

VISION

Figure :

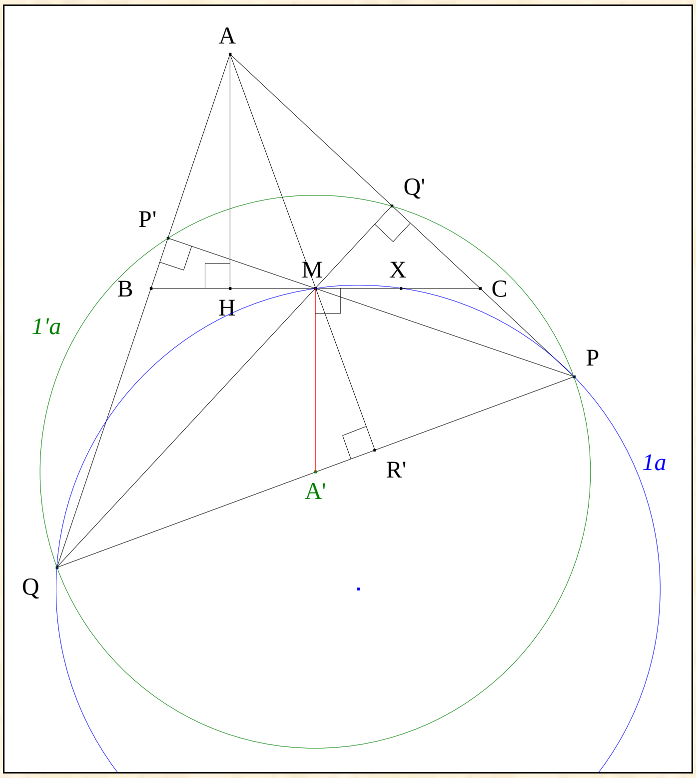


Traits :	ABC	un triangle,
	H	le pied de la A-hauteur de ABC,
	M	le milieu de [BC],
	P	le point de (AC) tel que (PM) soit perpendiculaire à (AB),
	Q	le point de (AB) tel que (QM) soit perpendiculaire à (AC),
	1a	le cercle circonscrit au triangle MPQ
et	X	le second point d'intersection *1a* avec (BC).

Donné : X est l'isotome de H relativement à [BC].

VISUALISATION

[13] Isotomic point of the height foot, AoPS du 07/08/2015 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1126020_isotomic_point_of_the_height_foot

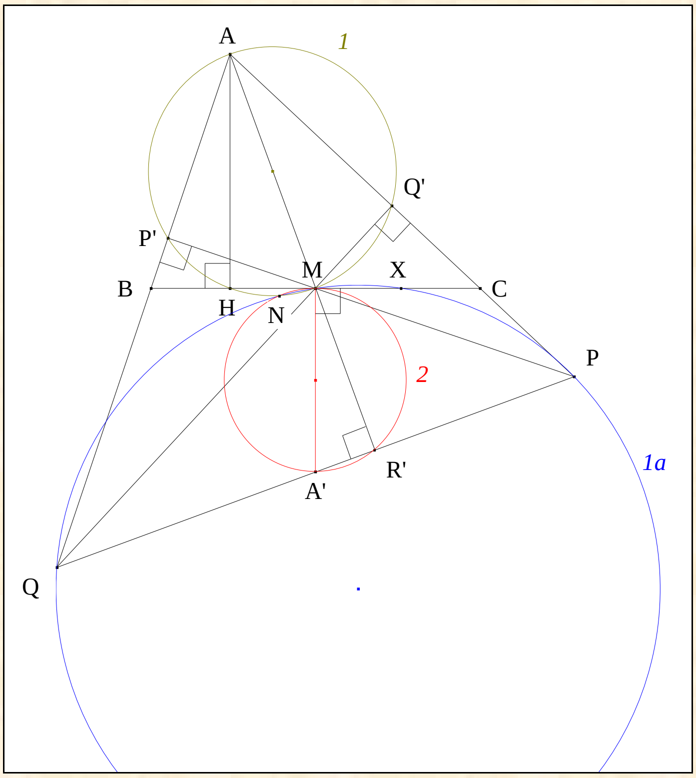


* Notons P'Q'R' le triangle orthique de APQ,
  A' le milieu de [PQ]
  et *1'a* le cercle de diamètre [PQ] ; il passe par P', Q' et a pour centre A'.

* **Scolie :** M est l'orthocentre du triangle APQ.

* D'après "Le théorème du papillon" [14]
  appliqué au quadrilatère PP'QQ' croisé en M milieu de [BC], (A'M) ⊥ (BC).

[14] Ayme J.-L., A new metamorphosis of the butterfly theorem , G.G.G. vol. **7**, p. 13-14 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons *1* le cercle de diamètre [AM] ; il passe par H, P', Q' ;
  2 le cercle de diamètre [A'M] ; il passe par R' ;
  et N le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après Problème **7** et "The midcircle theorem" [15], *2* est le cercle des milieux de *1* et *1a*.

- **Scolies :** **(1)** (BC) est tangente à *2* en M

  (2) M est le milieu de [HX].

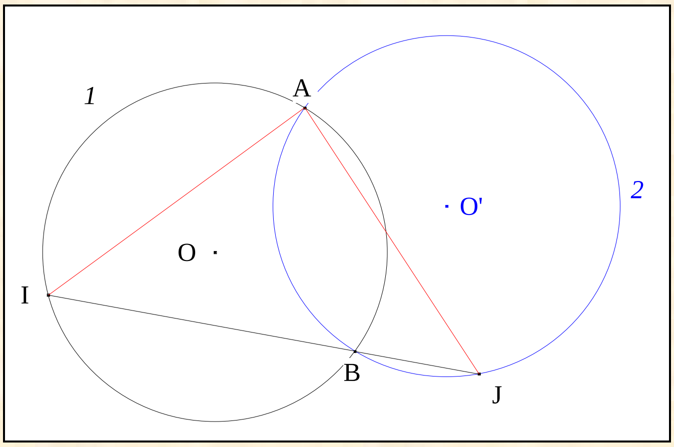
- **Conclusion :** X est l'isotome de H relativement à [BC].

[15] Ayme J.-L., The midcircle theorem , G.G.G. vol. **25**, p. 3-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

9. UN TRIANGLE ISOCÈLE
DE
FERDINAND MÖBIUS [16]

VISION

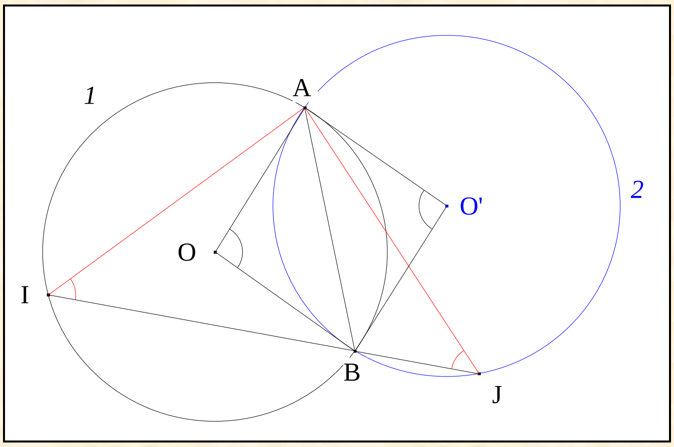
Figure :



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
et (IBJ) une monienne de *1* et *2*.

Donné : *1* et *2* sont égaux *si, et seulement si,* le triangle AIJ est A-isocèle.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- D'après "Le théorème c.c.c. "
  appliqué aux triangles OAB et O'AB, <BOA = <AO'B.

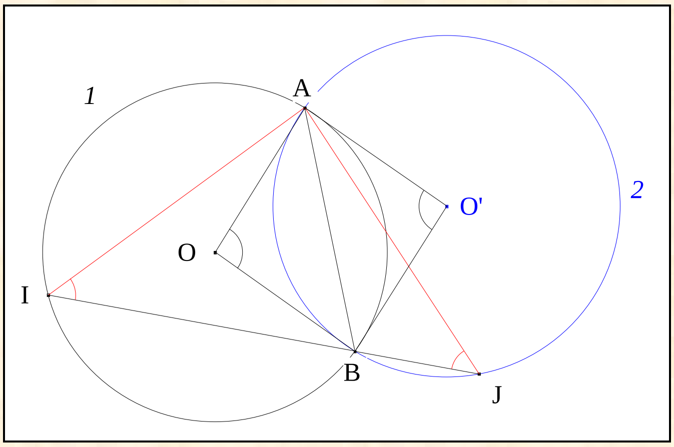
- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BOA = 2 <BIA et <AO'B = 2 <AJB ;

16 An equivalence, AoPS du 25/02/2017 ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1389512_an_equivalence

par substitution et simplification, <BIA = <AJB.

- **Conclusion :** le triangle AIJ est A-isocèle.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Le triangle AIJ étant A-isocèle, <BIA = <AJB
- D'après "Le théorème de l'angle au centre", <BIA = ½ <BOA et <AJB = ½ <AO'B ;

  par substitution et simplification, <BOA = AO'B
- D'après "Le théorème a.c.c. "
  appliqué aux triangles OAB et O'AB resp. O, O'-isocèle, AO = AO'.
- **Conclusion :** *1* et *2* sont égaux.

10. UN CERCLE

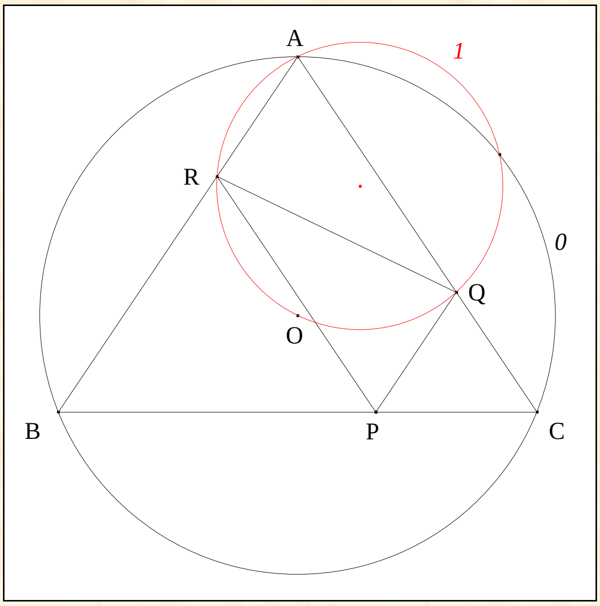
PASSANT

PAR

LE CENTRE D'UN CERCLE 3 [17]

VISION

Figure :

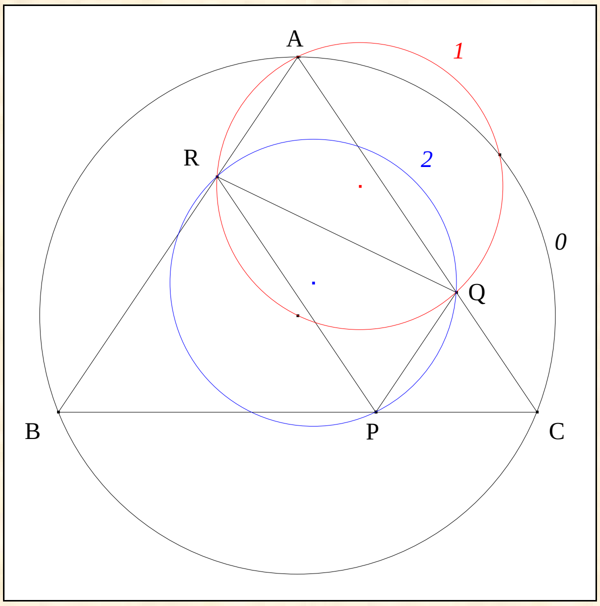


Traits : ABC un triangle A-isocèle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
P un point de [BC],
Q, R deux points resp. de [AC], [AB] tel que le quadrilatère AQPR soit un parallélogramme
et *1* le cercle circonscrit au triangle AQR

Donné : *1* passe par O.

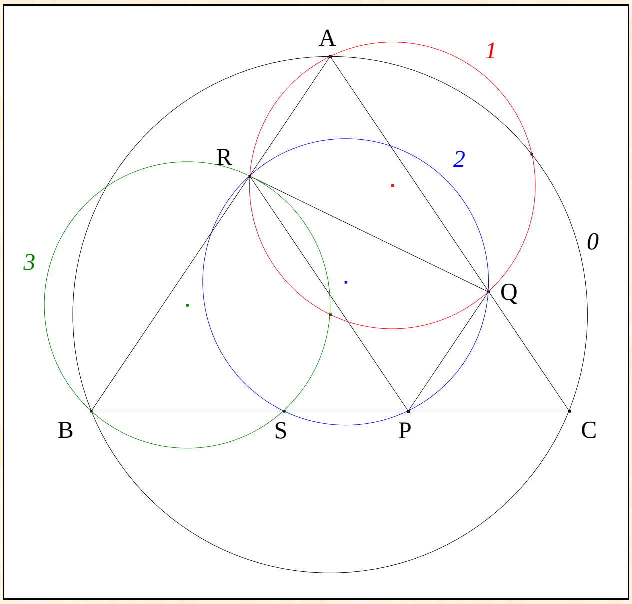
VISUALISATION

[17] A circle through the circumcenter, AoPS du 24/02/2017 ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1389072_a_circle_throug_the_circumcenter



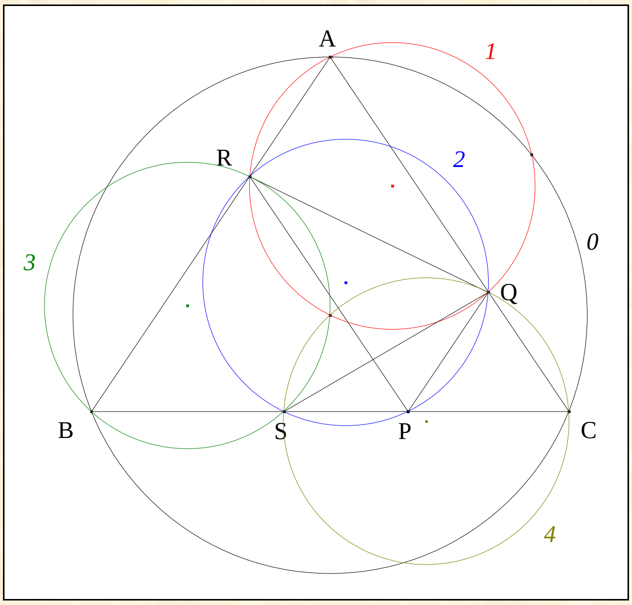
- Notons M le milieu de [QR]
  et *2* le cercle circonscrit au triangle PQR.

- **Conclusion partielle :** par symétrie de centre M, *1* et *2* sont égaux.



- Notons S le second point d'intersection de 2 avec (BC)
  et *3* le cercle circonscrit au triangle BRS.

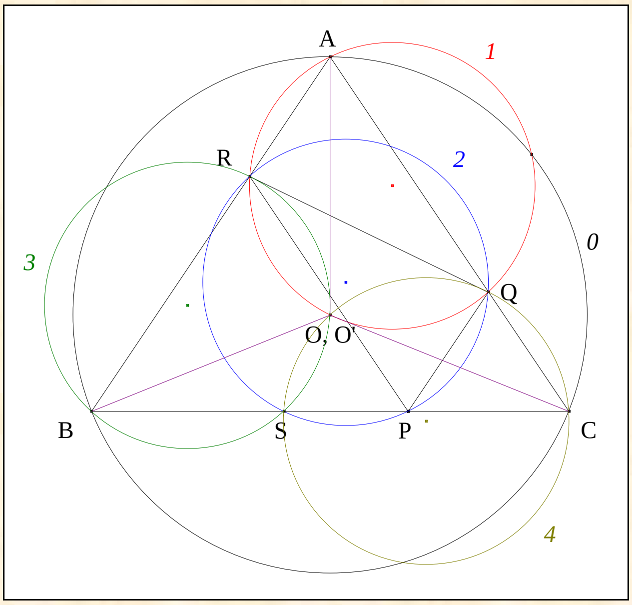
- D'après Problème **9.** appliqué au triangle R-isocèle RBP, *2* et *3* sont égaux.



- Notons 4 le cercle circonscrit au triangle SCQ.

- D'après Problème **9.** appliqué au triangle Q-isocèle QCP, *2* et *4* sont égaux.

- **Conclusion partielle :** *1*, *2*, *3* et *4* sont égaux entre eux.



- D'après Auguste Mique "Le théorème du pivot" [18], *1*, *3* et *4* sont concourants.

- Notons O' ce point de concours.

- D'après Problème **9.** appliqué aux cercles égaux *1* et *3*, O'A = O'B.

- D'après Problème **9.** appliqué aux cercles égaux *3* et *4*, O'B = O'C.

- O' étant équidistant de A, B et C, O' et O sont confondus.

- **Conclusion :** *1* passe par O.

[18] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

11. UN POINT

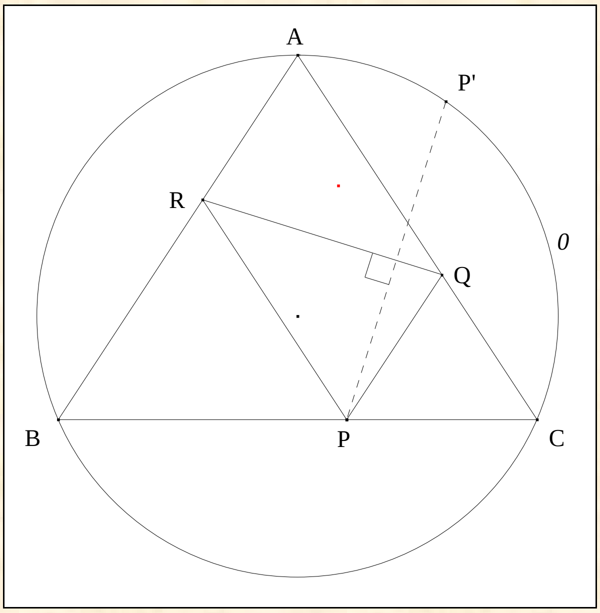
SUR

LE CERCLE CIRCONSCRIT [19]

Tournament of Towns Spring 2015 Senior A-level

VISION

Figure :



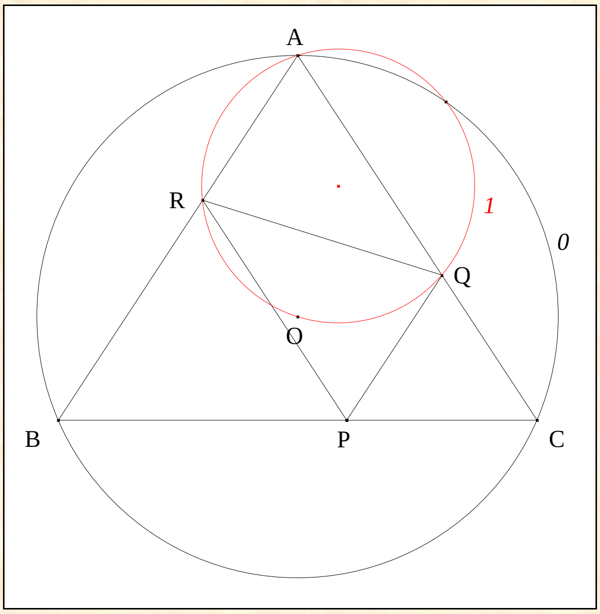
Traits : ABC un triangle A-isocèle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point de [BC],
Q, R deux points resp. de [AC], [AB] tel que le quadrilatère AQPR soit un parallélogramme
et P' le symétrique de P par rapport à (QR).

Donné : P' est sur *0*.

VISUALISATION

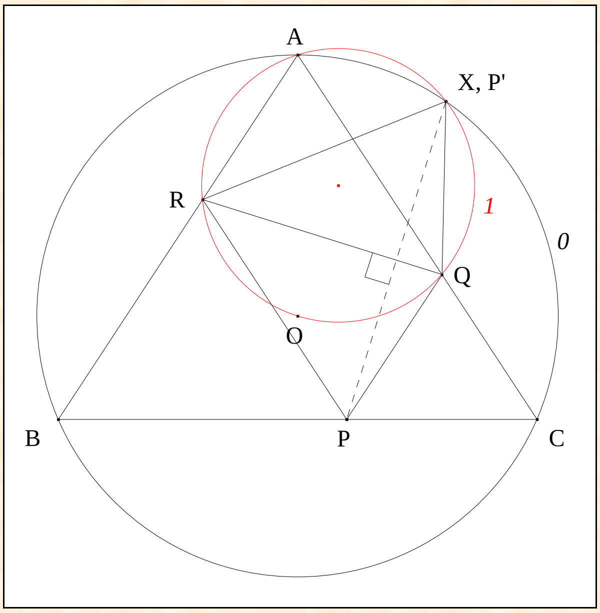
---

[19] Reflection of a Point lying on Circumcircle, AoPS du 24/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1389049_reflection_of_a_point_lying_on_circumcircle



- Notons O le centre de *0*
  et *1* le cercle circonscrit au triangle AQR.

- D'après Problème **9.**, *1* passe par O.



- Notons X le second point d'intersection de *1* avec *0*.

- **Scolies :** RP = RB et QP = QC.

- D'après Problème **3.**, RB = RX et QC = QX.

- Par transitivité de =, RP = RX et QP = QX ;

- D'après "Le théorème de la médiatrice", (QR) est la médiatrice de [PX] ;
  en conséquence, X et P' sont confondus.

- **Conclusion :** P' est sur *0*.

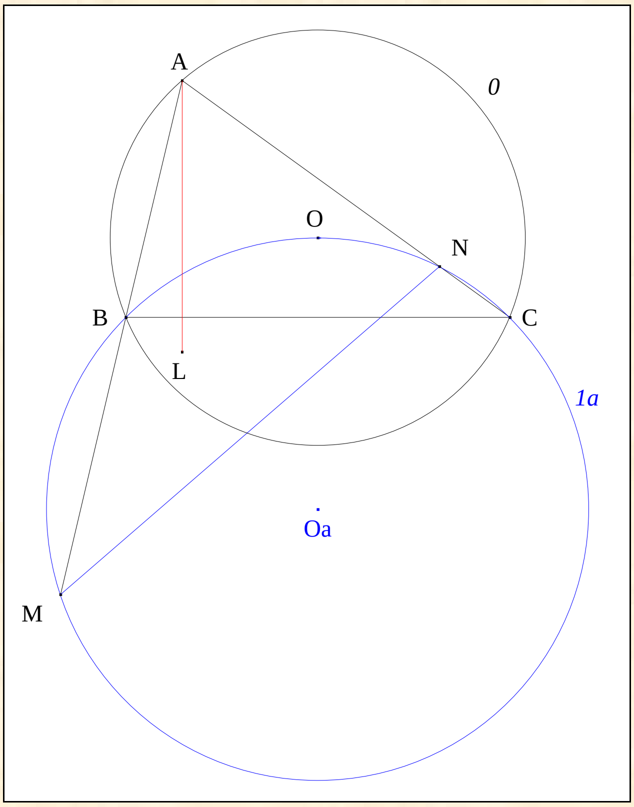
12. UNE HAUTEUR [20]

All-Russian MO 2000

Grade level **9**, Day **1**, Problem **3**

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle A-isocèle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
1a le cercle circonscrit au triangle BOC,
Oa le centre de *0a*,
M, N les points d'intersection de *0a* resp. avec (AB), (AC),
et L le symétrique de Oa par rapport à (MN).

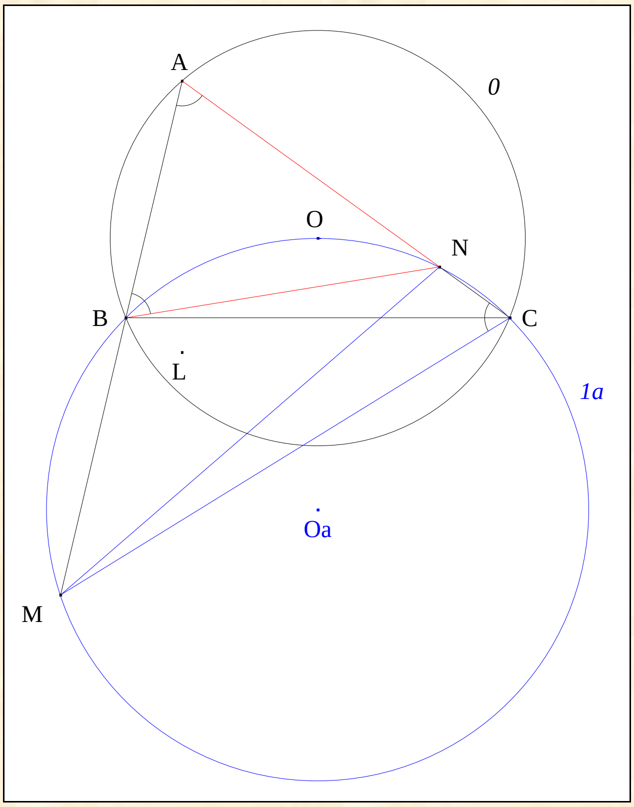
Donné : (AL) est la A-hauteur de ABC.

VISUALISATION

[20] Barroso R., Problema **802**, *Triangulos Cabri* ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
Ronda final de las olimpiadas rusas de 2000. Kazan 14-15 de abril
http://www.imomath.com/othercomp/Rus/RusMO00.pdf

https://www.artofproblemsolving.com/community/c5160_2000_allrussian_olympiad

K is the circumcenter of triangle AOC, AoPS du 30/12/2012 ;
All-Russian MO 2000
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h514286p2889224

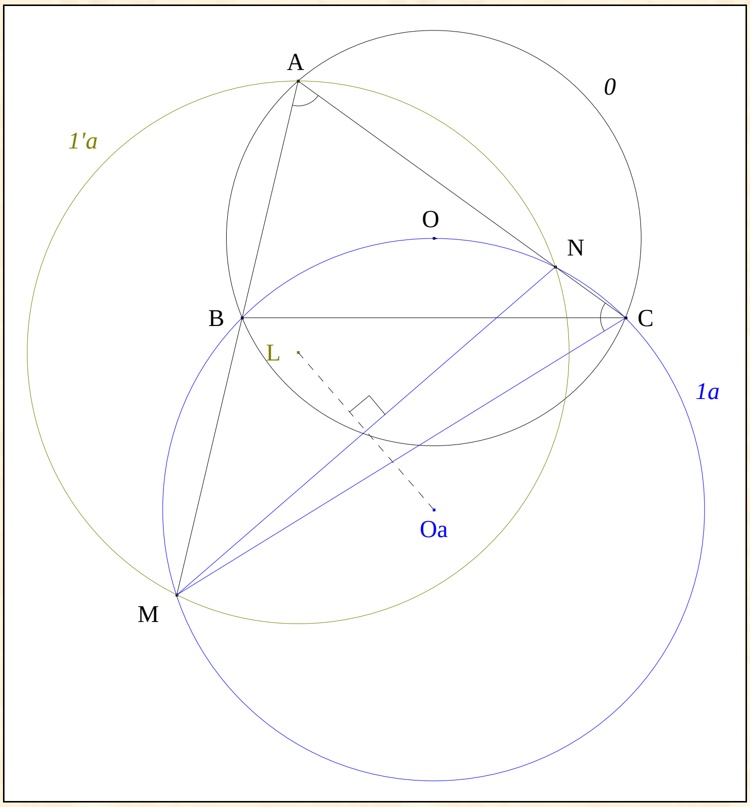


- D'après *Simplicity* **3**. appliqué
  au triangle BNC et à son cercle circonscrit *1a*, le triangle NAB est N-isocèle.

- Une chasse angulaire ;

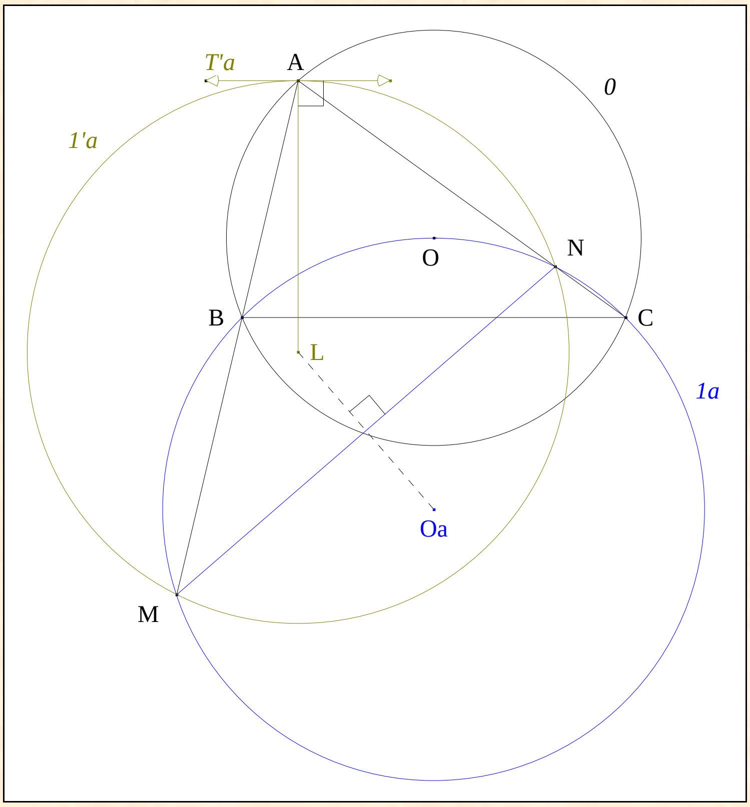
*	par une autre écriture,	<MAN = <BAN
*	LAB étant L-isocèle,	<BAN = <NBA
*	par "Angle de *0* et*1a*",	<NBA = <ACM
*	par une autre écriture,	<ACM = <NCM.

- **Conclusion partielle :** par transitivité de =, <MAN = <NCM.



- Notons *1'a* le symétrique de *1a* par rapport à (MN).
- **Scolies :** **(1)** *1'a* passe par A

  (2) L est le centre de *1'a*.



- Notons *T'a* la tangente à *1'a* en A.

- Les cercles *1a* et *1'a*, les points de base M et N, les moniennes (BMA) et (CNA), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (BC) // *T'a*.

- Par définition d'une tangente, *T'a* ⊥ (AL) ; en conséquence, (BC) ⊥ (AL).

- **Conclusion :** par symétrie de ⊥ , (AL) est la A-hauteur de ABC.

LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle