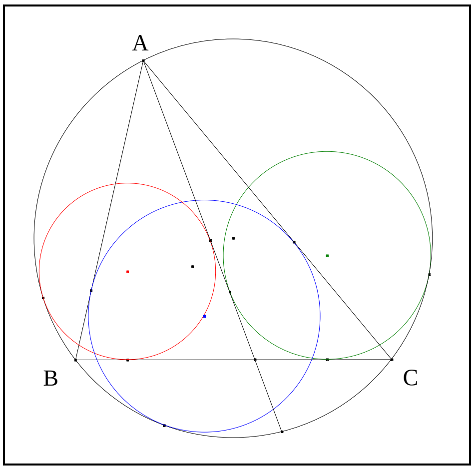
A NEW MIXTILINEAR INCIRCLE ADVENTURE III

Jean – Louis AYME



Trois cercles y règnent sans partage

Résumé : nous présentons une San Gaku i.e. une énigme géométrique japonaise gravée sur une tablette votive, voire un cercle de Longchamps associé à deux cercles de Thébault, le tout accompagné de nombreuses propriétés, de notes historiques, de commentaires et de références connues par l'auteur.
Les figures sont toutes en position générale et les théorèmes cités peuvent tous être prouvés synthétiquement.

Sommaire

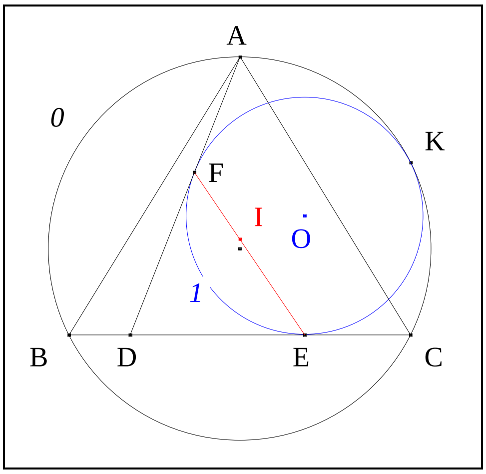
Avertissement les références sont celles que j'ai trouvée et peuvent donc être remises en question
Les notations peuvent changées d'une situation à l'autre

I. SAWAYAMA AND THÉBAULT's THEOREM

1. La droite de contact de Sawayama[1]

VISION

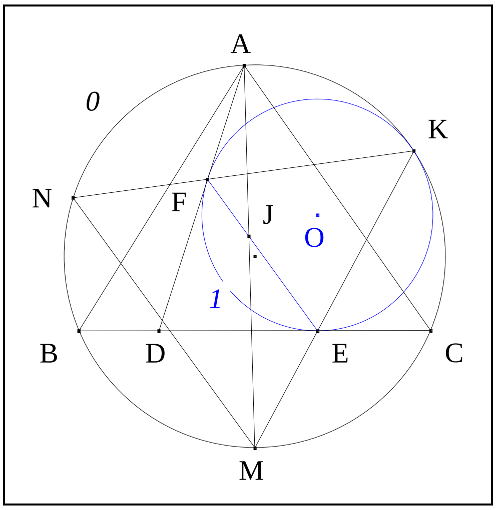
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
D un point de [BC],
1 le cercle tangent intérieurement à *0*, à (AD), à (BC),
et K, F, E les point de contact de *1* resp. avec *0*, (AD), (BC).

Donné : (EF) passe par I.

VISUALISATION



- Notons M, N les points d'intersection resp. de (KE), (KF) avec *0*

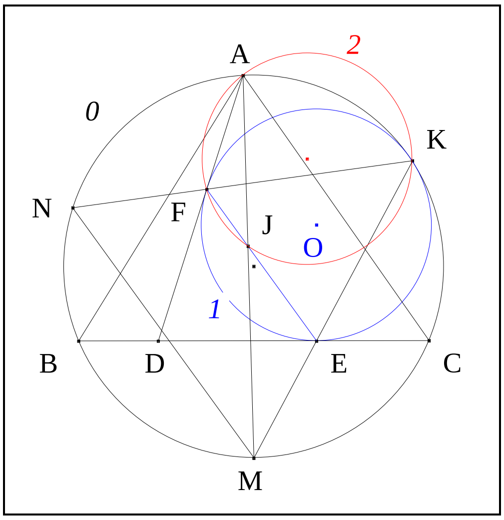
[1] Sawayama Y., A new geometrical proposition, *American Mathematical Monthly* vol. 12, 12 (1905) 222-224.

et J le point d'intersection de (AM) et (EF).

- D'après "Une bissectrice intérieure" [2], (KE) est la bissectrice intérieure de l'angle <BKC.

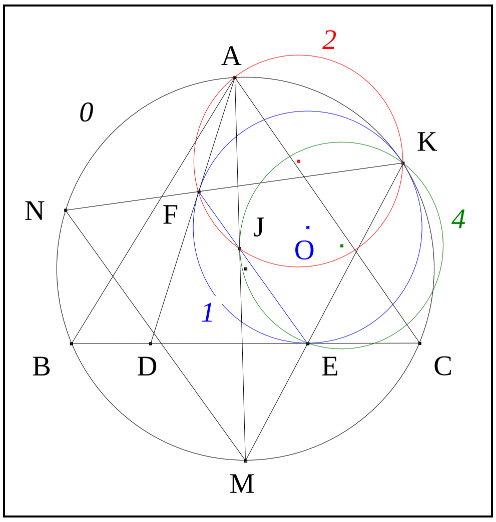
- **Conclusion partielle :** M étant le second A-perpoint de ABC,
  (AM) est la A-bissectrice intérieure de ABC.

- Les cercles *1* et *0* conduisent au théorème **7** de Reim ; il s'en suit que (EF) // (MN).



- Le cercle *0*, les points de base A et K, les moniennes (MAJ) et (NKF), les parallèles (MN) et (JF), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, A, K, F et J sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

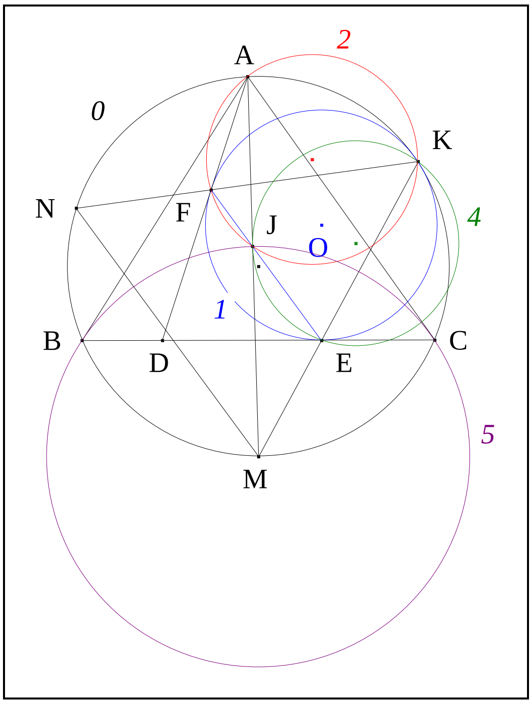


- Notons *4* le cercle circonscrit au triangle EJK.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1), appliqué au triangle AFJ en considérant F sur (AF), E sur (FJ) et J sur (AJ), *4* est tangent à (AJ) en J.

---

2 Ayme J.-L., II. 1. Une bissectrice intérieure, A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, P. 8.



- D'après "Un cercle de Mention" (Cf. Annexe 2), *5* passe par I.

- D'après "Une autre San Gaku d'Iwate 1842" [3], *5* est orthogonal à *1*.

- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 3), *5* est aussi orthogonal à *4*.
  en conséquence, MB = MJ i.e. J = I.

- **Conclusion :** (EF) passe par I.

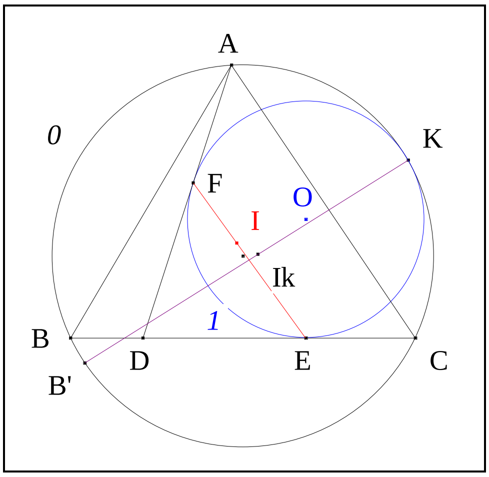
Commentaire : cette preuve a été reprise dans le site *cut-the-Knot* d'Alexander Bogomolny[4] où il précise :

"The proof by Ayme is a slight modification of that by Sawayama. Along the way, Ayme corrects a logical gap in the original proof".

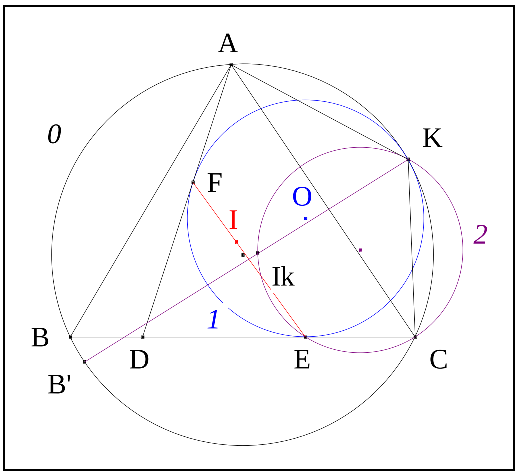
Scolies : **(1)** (EF) est "la K-droite de contact de ABC relativement à D".

(2) Position de K[5]

3 Ayme J.-L., V. 1. Une autre San Gaku d'Iwate, A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 41.
4 http://www.cut-the-Knot/curriculum/Geometry/DrozFarny.html.
5 Ayme J.-L., Point of contact of a Thébault's circle, *Mathlinks* (23/10/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=233718.



- Notons Ik le centre du triangle ADC
  et B' le premier B-perpoint de ABC.



- D'après "Un remarquable résultat de Vladimir Protassov"[6], (KIk) est la K-bissectrice du triangle KAC.

- **Conclusion :** K, Ik, B' sont alignés.

Contexte : les deux résultats précédents peuvent s'interpréter comme une généralisation de ceux obtenus en considérant un cercle de Longchamps[7] de ABC.

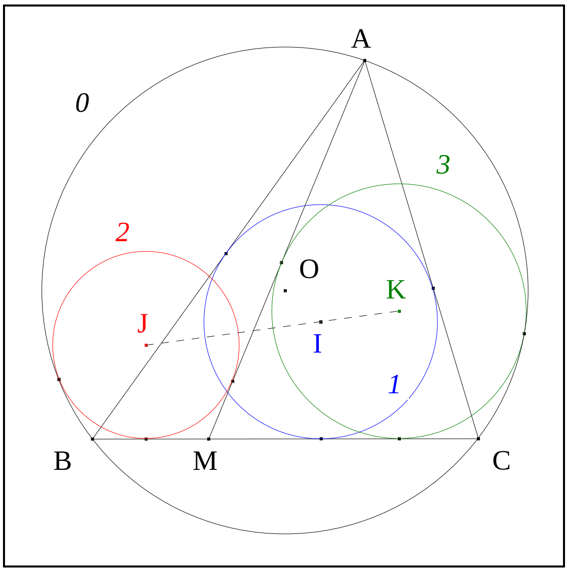
Note historique : Y. Sawayama a été instructeur à l'École centrale militaire de Tokyo (Japon).
Il est aussi connu pour avoir trouvé 9 démonstrations du théorème de Feuerbach[8].

2. "La grande conjecture" de Victor Thébault

VISION

6 Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protassov, G.G.G. vol. 2, p. 5.
7 Ayme J.-L., I. 2. et 4., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4.
8 Sawayama Y., l'*Enseignement mathématique* (1911) 31-49.

Figure :

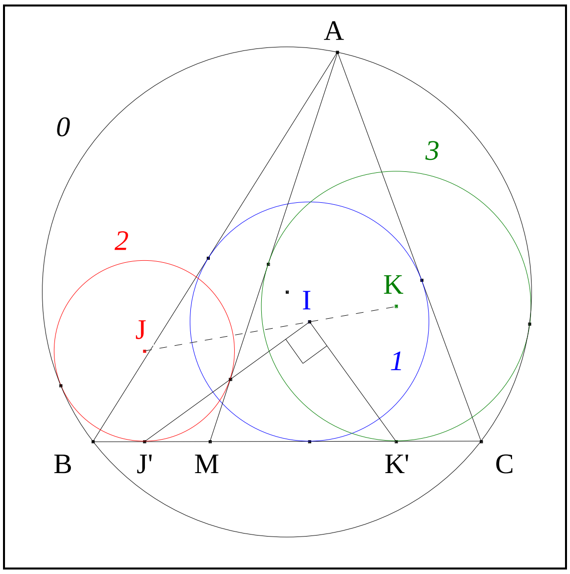


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de [BC],
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
2, *3* les cercles tangents à *0*, [AM], resp. [MB], [MC]
et J, K les centres resp. de *2*, *3*.

Donné : I, J et K sont alignés[9].

Scolies : **(1)** *2*, *3* sont resp. "les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M".

(2) Un angle droit

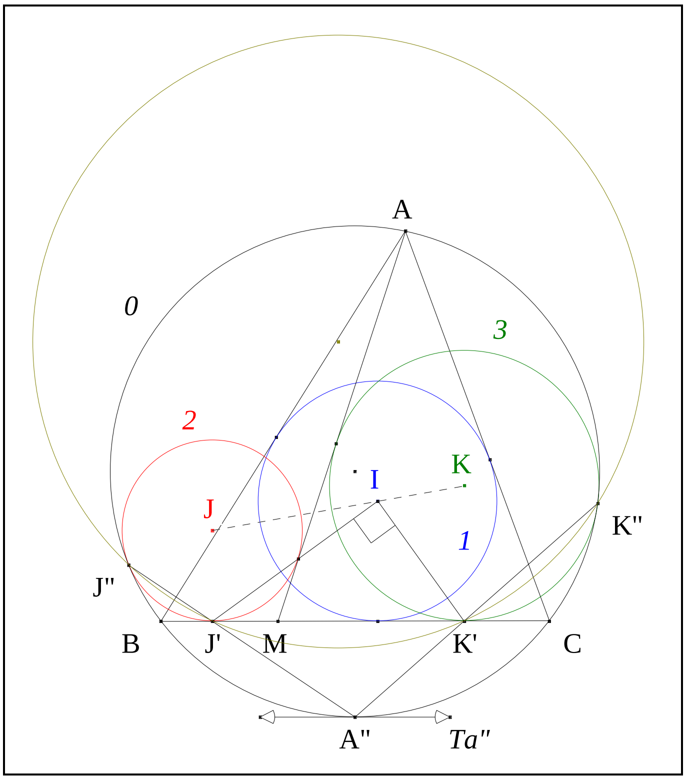


[9] Sawayama Y., *American Mathematical Monthly* vol. 12, 12 (1905) 222-224.
Thébault V., Problem 3887, Three circles with collinear centers, *Amer. Math.* Monthly 45 (1938) 482-483.
Ayme J.-L., Sawayama and Thébault's theorem, G.G.G. vol. 1.
Ayme J.-L., Sawayama and Thébault's theorem, *Forum Geometricorum* (2003).

- Notons J', K' les points de contact resp. de *1*, *2* avec (BC).

- **Conclusion :** <J'IK' est droit.

(3) Quatre points cocycliques



- Notons J", K" les points de contact resp. de de *1*, *2* avec *0*,
  A" le second perpoint de ABC
  et *Ta"* la tangente à *0* en A".

- Nous avons : J", J', A" alignés , K", K', A" alignés , *Ta"* // (J'K').

- **Conclusion :** le cercle *0*, les points de base J" et K", les moniennes naissantes (A"J"J') et (A"K"K'), les parallèles *Ta"* et (J'K'), conduisent au théorème **1"** de Reim ;
  en conséquence, J", K", J', K' sont cocycliques.

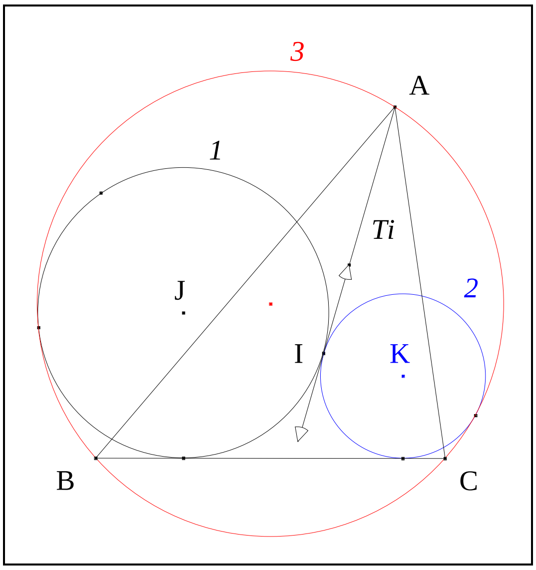
Une courte biographie de Victor Thébault :

Victor Michel Jean-Marie Thébault est né à Ambrières-le-Grand (Mayenne, France), le 6 mars 1882. Élève de l'École normale de Laval de 1898 à 1900, puis instituteur à Pré-en-Pail de 1902 à 1905, puis professeur à l'École technique d'Ernée (Mayenne), il rejoint l'École normale en 1909. Trouvant son salaire insuffisant pour sa grande famille (six enfants), il quitte l'enseignement pour devenir un superintendant d'une usine à Ernée de 1910 à 1923. De 1924 à 1940, il est Chef inspecteur dans une compagnie d'assurance au Mans (Sarthe). En 1940, il prend sa retraite à Tennie, un petit village de la Sarthe d'environ 200 habitants, dans un petit château qu'il appelait "Le Paradis" et qu'il proposera de vendre à Léon Bankoff.
Sa contribution dans la rubrique des Problèmes du *Monthly* dépasse 600 interventions si bien que celle-ci éditera un In Memoriam lors de son décès.
Il décède le 19 mars 1960.

3. "La petite conjecture"

VISION

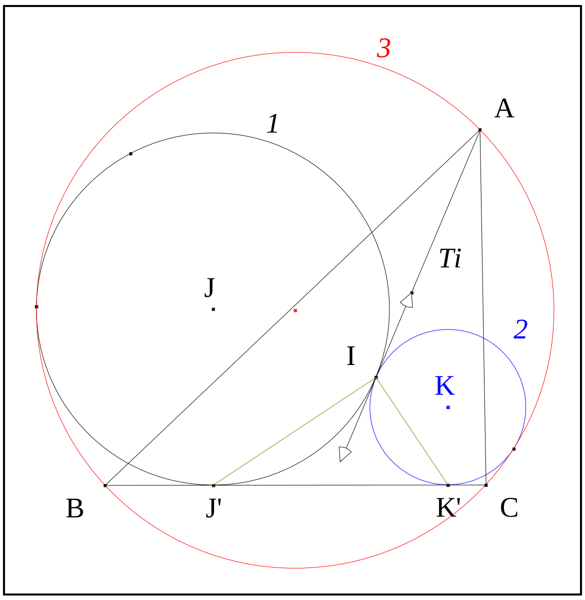
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles tangents extérieurement,
	J, K	les centres de *1*, *2*,
	I	le point de contact de *1* et *2*,
	3	un cercle tangent intérieurement à *1* et *2*,
	T	l'une des deux tangentes communes extérieures à *1* et *2*,
	B, C	les points d'intersection de *T* avec *3*,
	Ti	la tangente commune intérieure à *1* et *2*,
et	A	le point d'intersection de *Ti* avec *3*, situé du même côté que I par rapport à (BC).

Donné : I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

VISUALISATION



- Notons J', K' les points de contact de *1*, *2* avec (BC).
- D'après I. 1. La droite de contact de Sawayama, (J'I) et (K'I) passent par le centre du cercle inscrit à ABC.
- **Conclusion :** I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Scolie : cette situation qui peut être appelée "La petite conjecture" est un cas particulier de "La grande conjecture".

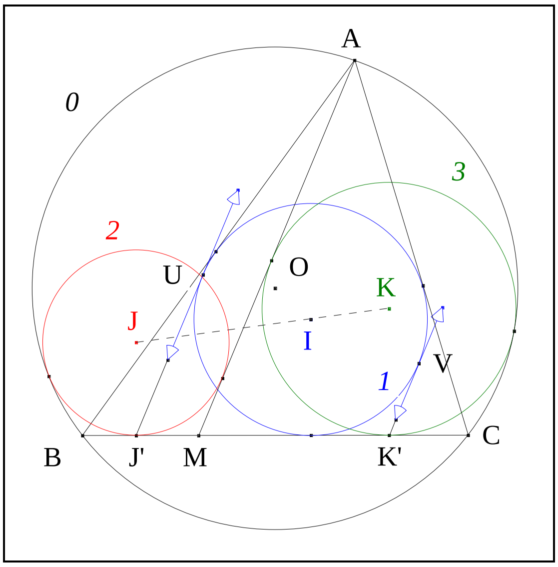
Note historique : rappelons que ce problème qui n'a pas été retenu, a été proposé par l'Inde pour les 33-ième I.M.O. qui ont eu lieu en 1992 à Moscou (Russie).
La représentante de Colombie aux O.I.M. commenta, à voix haute, ce rejet en disant :

"Se acaba de rechazar el mas bello problema de Geometria de este ano".

4. Deux tangentes parallèles

VISION

Figure :

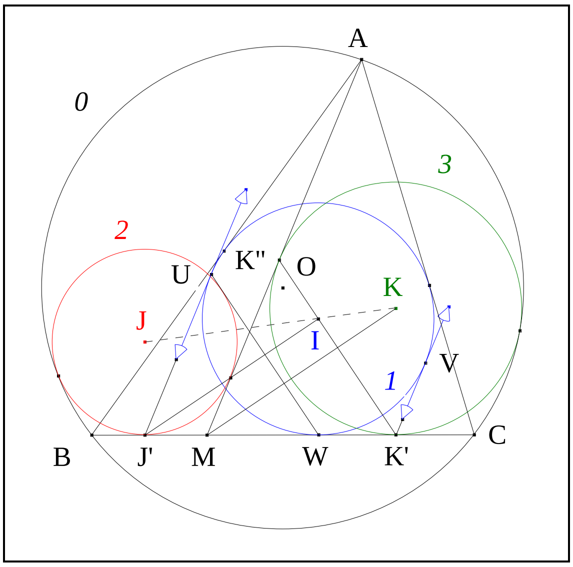


Traits :

ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de [BC],
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
2, *3* les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M,
J, K les centres resp. de *2*, *3*,
J', K' le point de contact resp. de *2*, *3* avec [BC],
U le point de contact de la tangente à *2* passant par J'
et V le point de contact de la tangente à *3* passant par K'.

Donné : (J'U), (K'V) et (AM) sont parallèles entre elles[10].

VISUALISATION



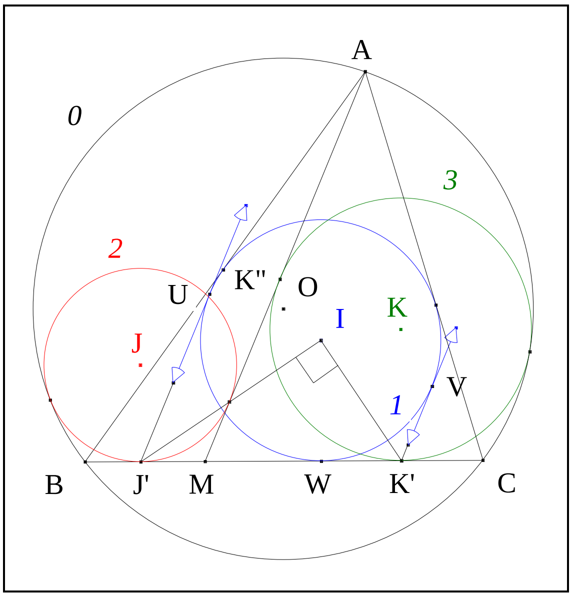
- Notons W le point de contact de *1* avec [BC]
  et K" le point de contact de *3* avec [AM].

- D'après I. 2. La grande conjecture, (J'I) // (MK) ;
  nous avons, (J'I) ⊥ (UW) et (MK) ⊥ (K'K") ;
  la relation // étant compatible avec ⊥ , (UW) // (K'K").

- **Scolie :** les triangles MK'K" et J'WU sont isocèles.

- Les triangles isocèles MK'K" et J'WU ayant deux côtés parallèles deux à deux,
  leur troisième côté le sont aussi

- **Conclusion partielle :** (J'U) // (AM).



[10] Sharygin I., *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986) Problème II 284 p. 130.

- D'après I. 2. "La grande conjecture", (J'I) $\perp$ (K'I).
- D'après "Bande circonscrivant un cercle" (Cf. Annexe 4), (J'U) // (K'V).
- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, (J'U), (K'V) et (AM) sont parallèles entre elles.

Note historique : le problème de Victor Thébault contenait un deuxième résultat de nature métrique. Pour l'établir, je pense que Thébault a dû observer ce parallélisme.

II. COSMIN POHOATA AND VLADIMIR ZAJIC

1. Une historique des résultats et de la preuve présentée

tout commence le 4 janvier 2008 par une communication du roumain Cosmin Pohoata[11] au groupe *Hyacinthos* et à laquelle répond Jean-Pierre Ehrmann[12].
Le premier février 2008, Pohoata[13] livre son observation géométrique sur le site *Mathlinks*. Le 2, l'américain Vladimir Zajic affirmant

I could not resist

propose une solution basée sur l'inversion qu'il affectionne tant. Le 5, Pohoata, à son tour, nous confie cette réflexion

It appears that I had the same solution as Vladimir

et ajoute

It would be interesting to see a proof without inversion.

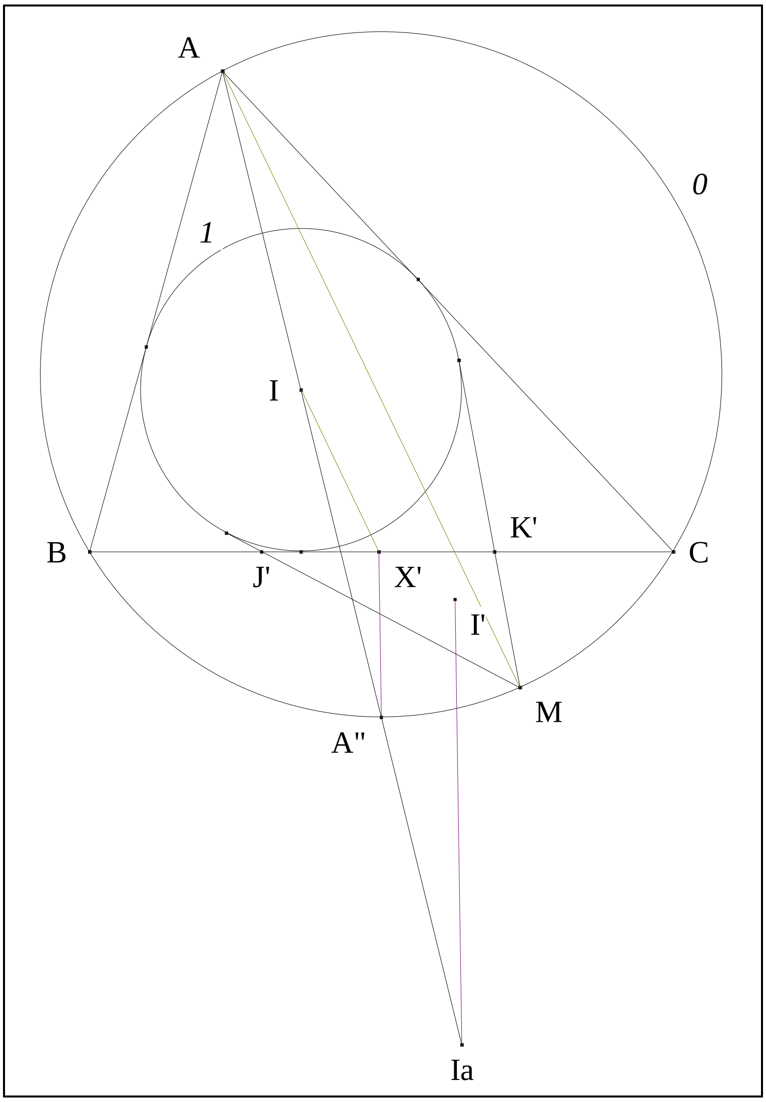
Le 15 juin 2008, Zajic, suite à la résolution d'un problème de construction, soumet une généralisation du résultat de Pohoata. Après avoir oublié momentanément sa preuve, il la propose le 3 juillet en considérant un faisceau de cercles à points de base, puis la termine en s'appuyant sur celle concernant le résultat de Pohoata.
Acceptant cette stratégie où tout repose sur le résultat de Pohoata, je pensais qu'une preuve synthétique pouvait se substituer à celle recourant à l'inversion. C'est sous ce point de vue que je contactais Vladimir, le 24 octobre, en lui demandant s'il avait une idée pour résoudre sa généralisation dans le cas particulier où le sommet du cône des tangentes était à l'infini. Le 29 du mois, il me proposait sa seconde démonstration. C'est en la travaillant et en l'améliorant que je découvrais un parallélisme remarquable qui allait me permettre de présenter un preuve entièrement synthétique des ces deux résultats.

2. L'observation de l'auteur ou un parallélisme remarquable

VISION

Figure :

[11] Pohoata C., On the Thébault circles of a cevian, message *Hyacinthos* # 15977 du 04/01/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/15977.
[12] Ehrmann J.-P., On the Thébault circles of a cevian, message *Hyacinthos* # 15979 du 05/01/2008.
[13] Pohoata C., Mixtilinear incircles and somehow Poncelet's porism, *Mathlinks* (31/01/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1968592250&t=186117.

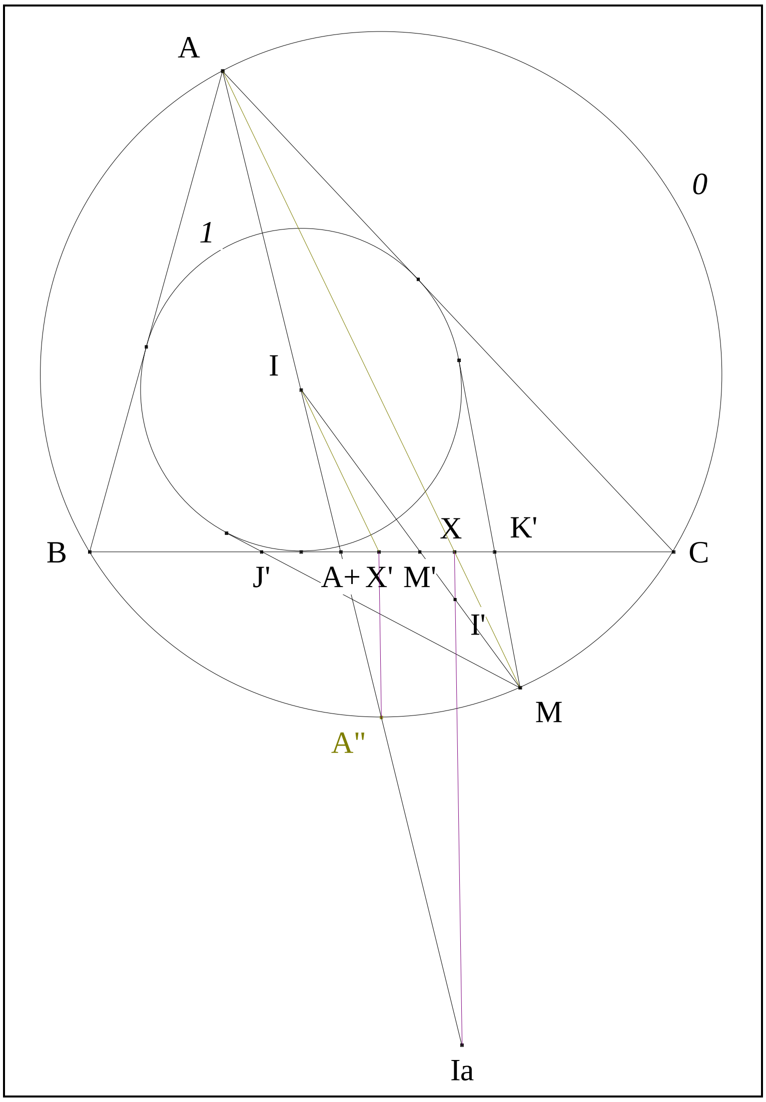


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	I	le centre de *1*,
	M	un point de l'arc BC ne contenant par A,
	J', K'	les points d'intersection des tangentes à *1* issue de M avec (BC),
	I'	le centre du triangle MJ'K',
	X'	le point d'intersection de la parallèle à (AM) passant par I avec (BC),
	A"	le second perpoint de ABC
et	Ia	le A-excentre de ABC.

Donné : (A"X') est parallèle à (IaI')[14].

VISUALISATION

[14] L'auteur.



- **Scolies :** **(1)** A, I, A'', Ia sont alignés
  (2) I est le M-excentre de MJ'K'
  (3) M, I', I sont alignés.

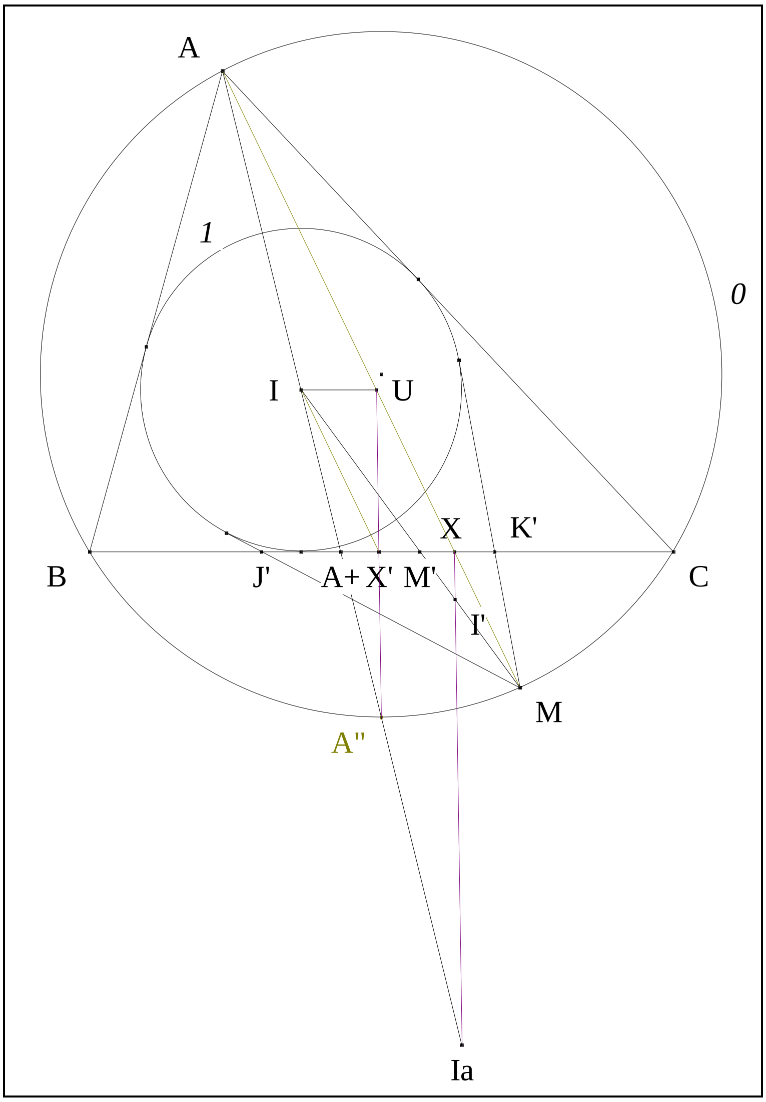
- Notons A+ le point d'intersection de (AI) et (BC),
  M' le point d'intersection de (IM) et (BC),
  et X le point d'intersection de (AM) et (BC).

- **Scolies :** **(1)** la quaterne (A, A+, I, Ia) est harmonique
  (2) la quaterne (M, M', I, I') est harmonique.

- D'après Pappus[15], ces deux quaternes harmoniques ayant un point commun I,
  (MA), (M'A+) et (I'Ia) sont concourantes ;

- X étant le point d'intersection de (MA) et (M'A+), I', Ia et X sont alignés.

[15] Pappus, υναγωγ´η ou *Collection*, Livre 7, propositions 136 et 142.

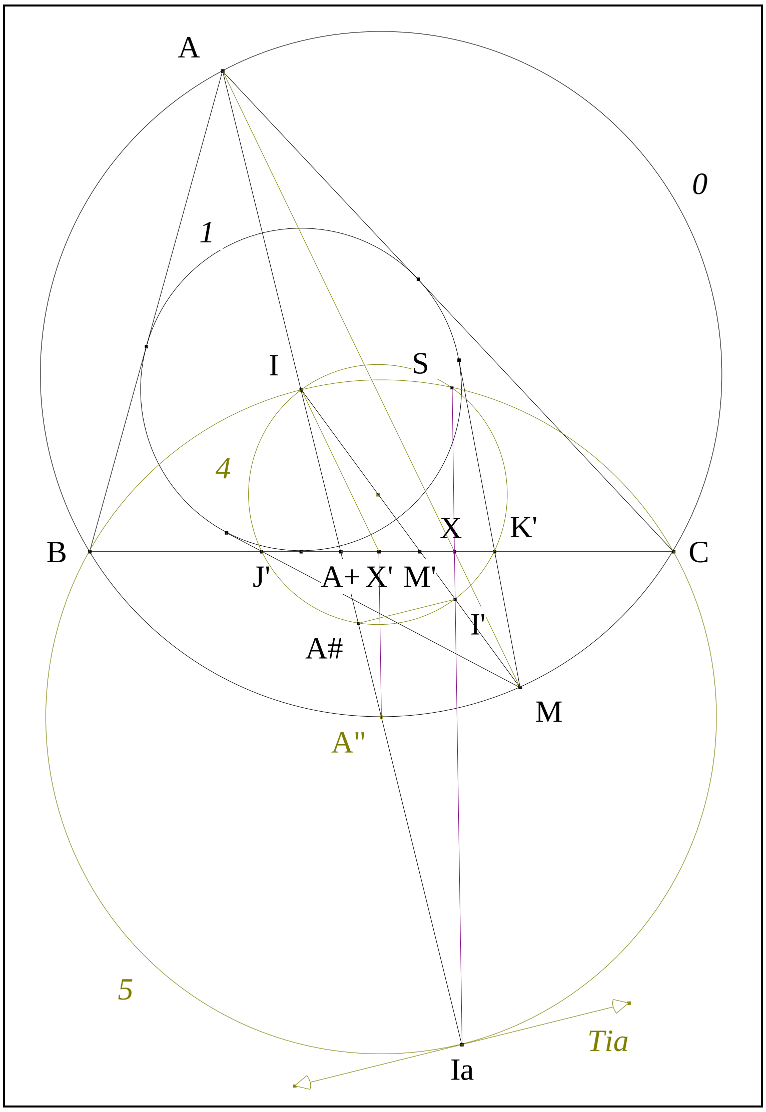


- Notons U le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par I avec (AXM).
- D'après Ayme "The paracevian perspector" [16], (UX') est parallèle à (IaI'X).
- Le quadrilatère IX'XU étant un patallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu.
- **Scolies :** **(1)** (UX') passe par le milieu de [II'] [17]
  (2) A" est le milieu de [IIa].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle IIaX, (UX') passe par A".
- **Conclusion :** (UX'A") est parallèle à (IaI'X).

Scolies : **(1)** avec deux cercles de Mention

---

16 Ayme J.-L., The paracevian perspector, G.G.G. vol. 4, p. 8.
17 Ayme J.-L., Three collinear points, *Mathlinks* (20/11/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=240786.

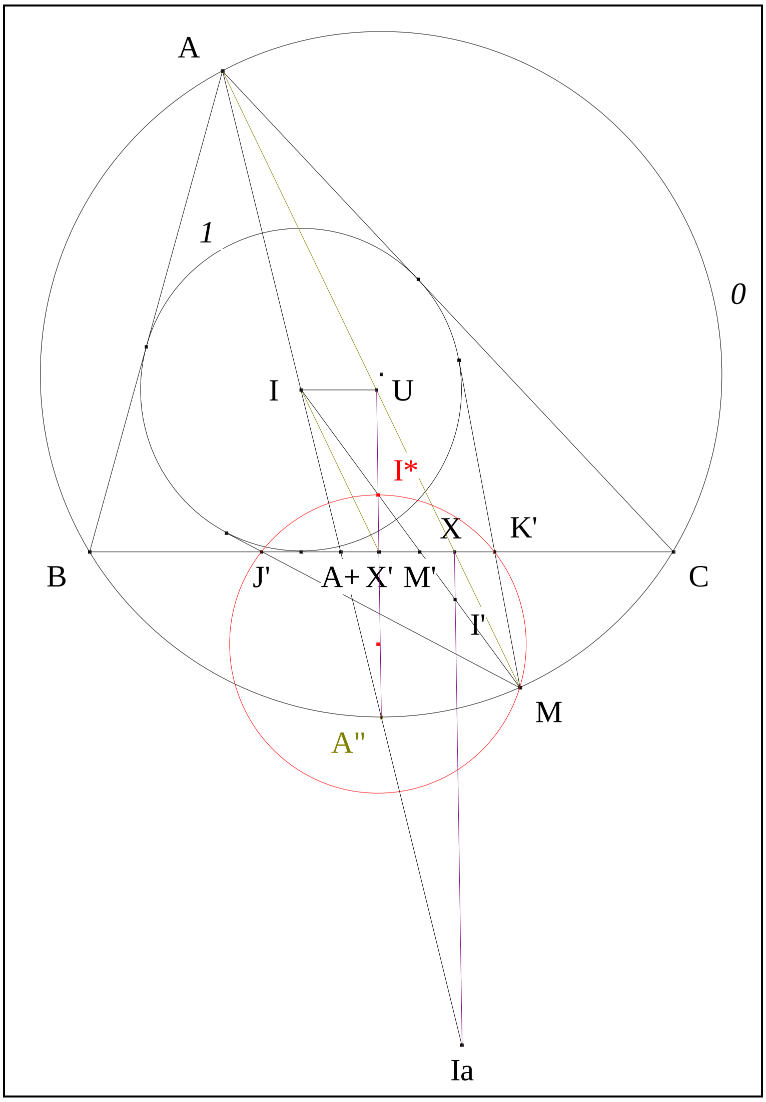


- Notons *4* le M-cercle de Mention de MJ'K' ; il a pour diamètre [II'] ;
  A# le second point d'intersection de (AI) avec *4*,
  5 le A-cercle de Mention de ABC,
  Tia la tangente à *5* en Ia
  et S le second point d'intersection de *4* et *5*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A#I') ⊥ (IaA#I) ;
  par définition d'une tangente, (IaA#I) ⊥ *Tia* ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A#I') // *Tia*.

- **Conclusion :** les cercles *4* et *5*, les points de base I et S, la monienne (A"IIa), les parallèles (A#I') et *Tia*, conduisent au théorème **1'** de Reim ; en conséquence, I', S, Ia sont alignés.

(2) Le cercle circonscrit du triangle MJ'K'



- Notons I* le milieu de [II'];

- Le cercle circonscrit du triangle MJ'K' passe par I*.

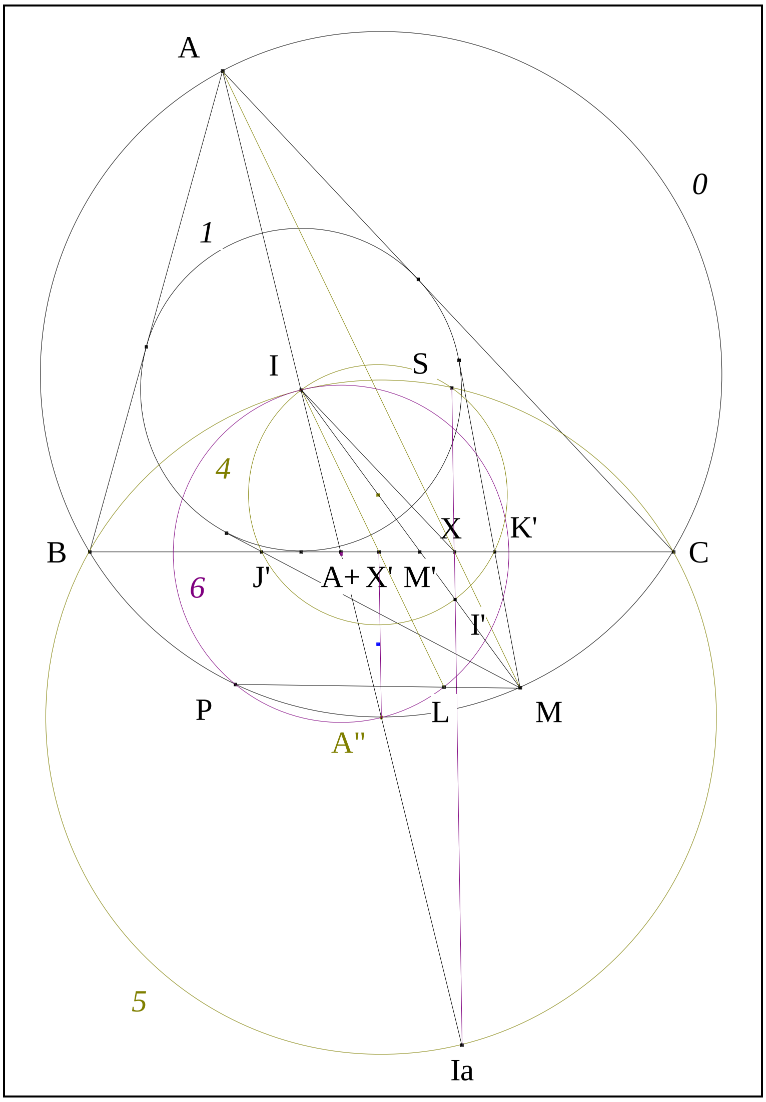
- **Conclusion :** A", X', I* sont alignés [18].

(3) Les parallèles de Vladimir Zajic dit "Yetti"[19]

---

[18] Ayme J.-L., Three collinear points, *Mathlinks* (20/11/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=240786.

[19] Ayme J.-L., Three mixtilinear circles, *Mathlinks* (30/10/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=370678991&t=233986.

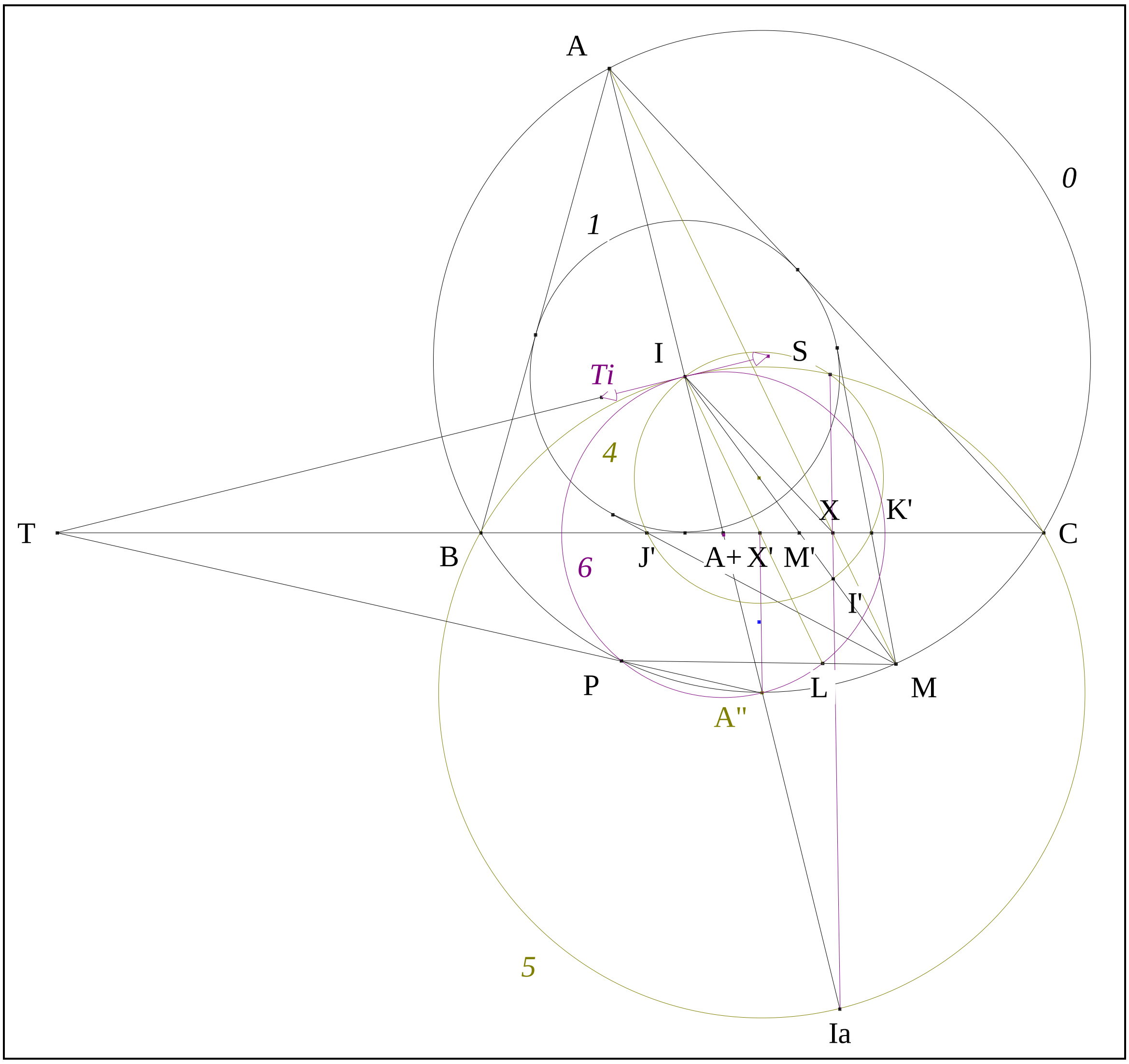


- Notons P le A-point de Longchamps de ABC,
  6 le cercle passant par I, P, A" ; il a pour diamètre [IA"] ;
  et L le second point d'intersection de (PM) avec *6*.

- Les cercles *6* et *0*, les points de base A" et P, les moniennes (IA"A) et (LPM), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que, (IL) // (AM) ;
  nous savons que (AM) // (IX') ;
  par transitivité de la relation //, (IL) // (IX') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (IL) = (IX') ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, I, L et X' sont alignés.

- **Conclusion :** (IX'L) est parallèle à (AM).

(4) Trois droites concourantes



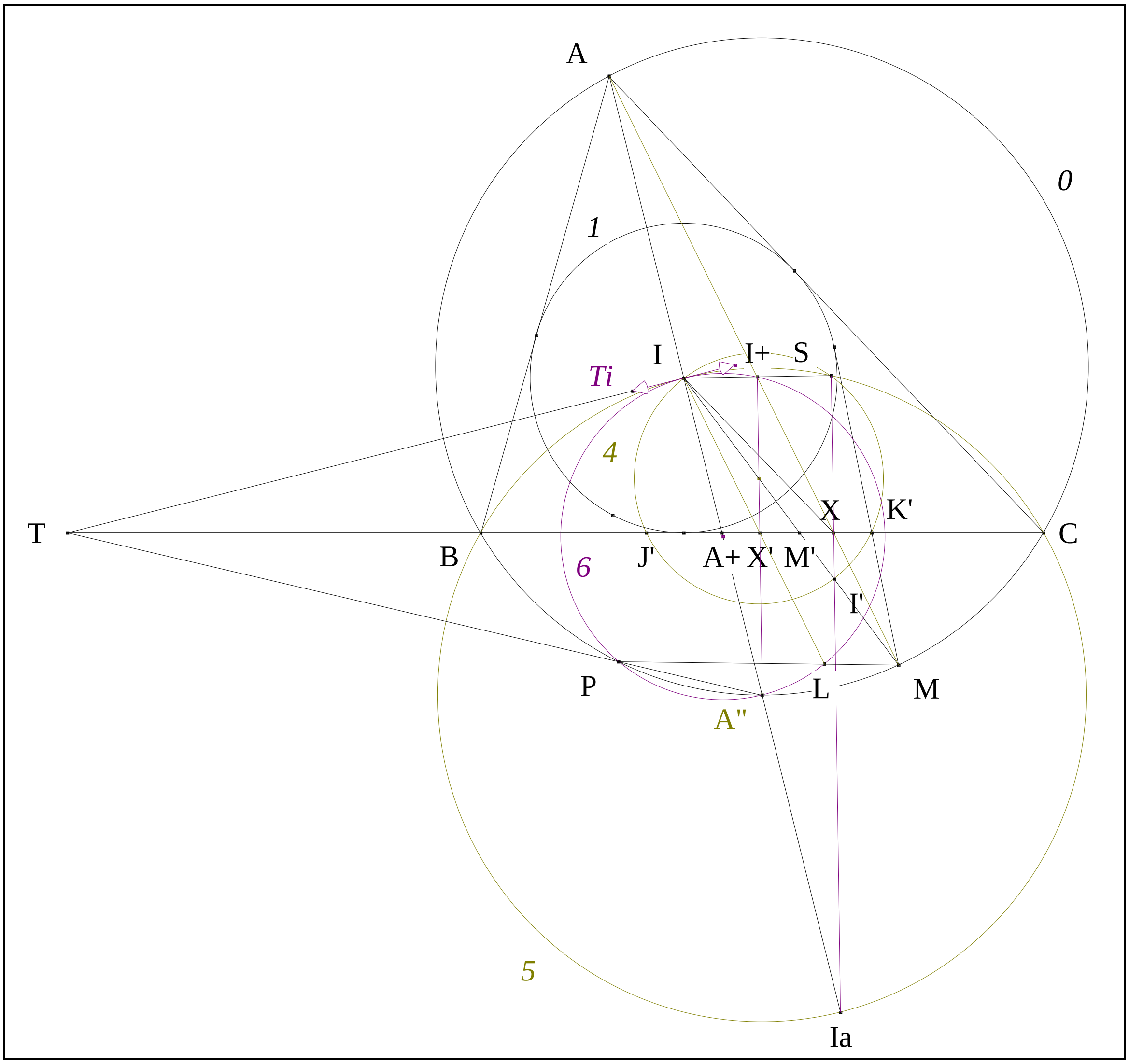
- Notons Ti la tangente à *6* en I.

- **Conclusion :** d'après Ayme "A new mixtilinear incircle adventure I" [20], (PA"), (BC) et *Ti* sont concourantes.

- Notons T ce point de concours.

(5) Trois points alignés

[20] Ayme J.-L., I. 4. scolie 3 et III. 1. scolie 1, A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4.



- Notons I+ le second point d'intersection de (A"X') avec *6*.

- **Conclusion :** les cercles tangents *5* et *6*, le point de base I, la monienne (IaIA"), les parallèles (A"I+) et (IaS), conduisent au théorème **7'** de Reim ; en conséquence, I+, I et S sont alignés.

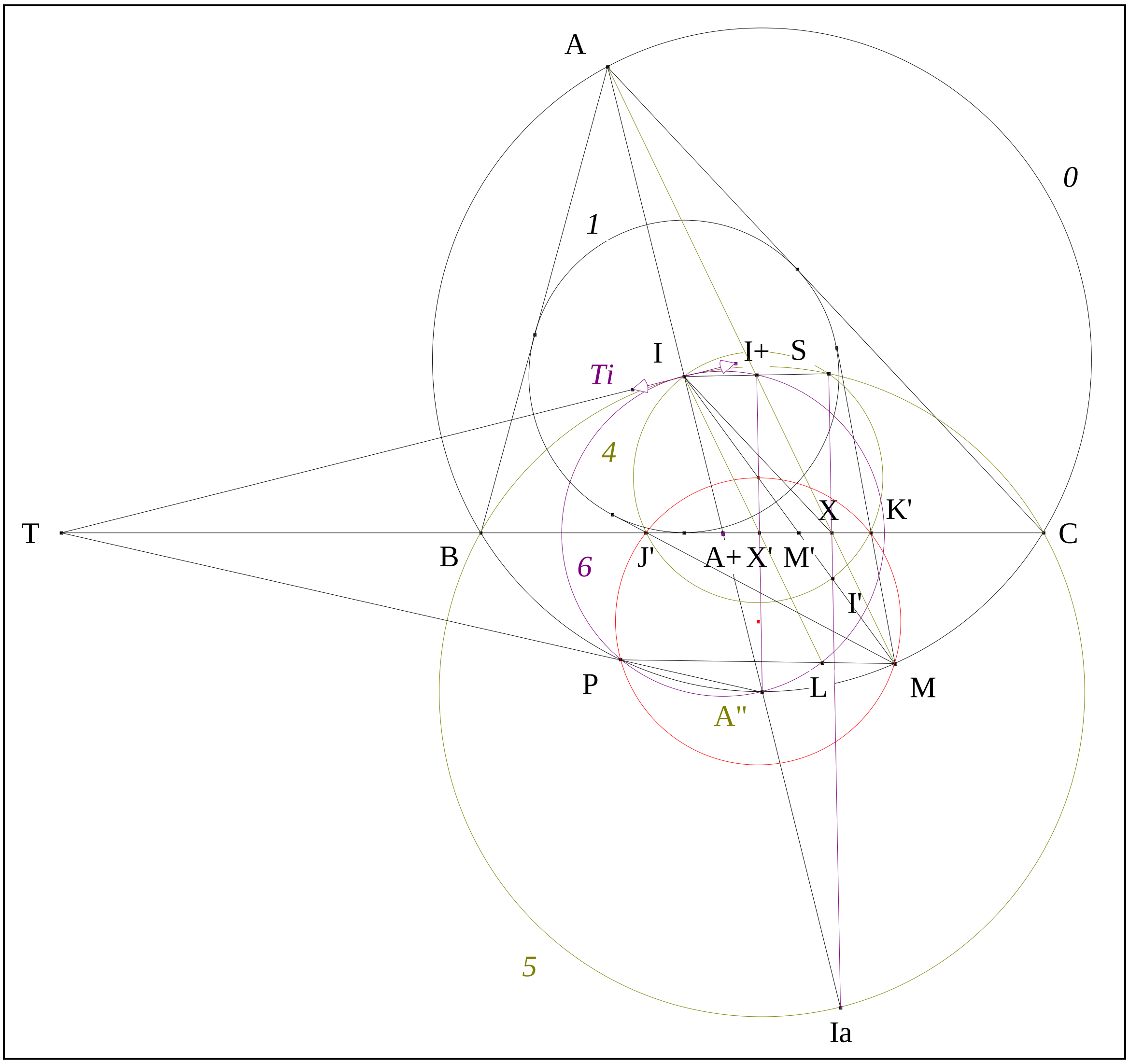
Commentaire : l'auteur a pris en compte des arguments[21] de Vladimir Zajic présentés sur *Mathlinks*.

3. Le résultat de Cosmin Pohoata

VISION

Figure :

[21] Ayme J.-L., Three mixtilinear circles, *Mathlinks* (30/10/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=370678991&t=233986.

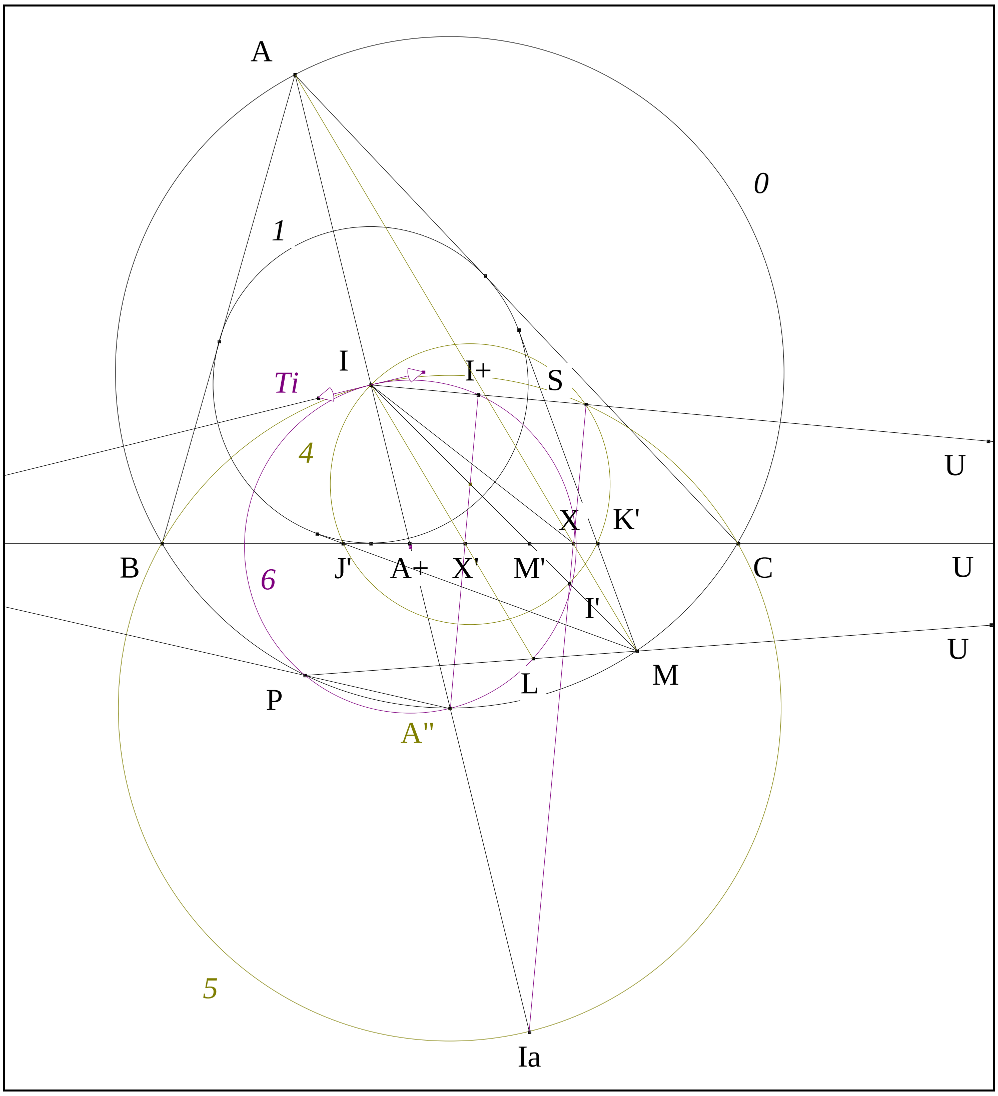


Traits : aux hypothèses et aux notations précédentes, nous ajoutons
U le point d'intersection de (II+) et (PM).

Donné : M, P, J', K' cocycliques.[22]

VISUALISATION

[22] Pohoata C., Mixtilinear incircles and somehow Poncelet's porism, *Mathlinks* (01/02/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1968592250&t=186117.

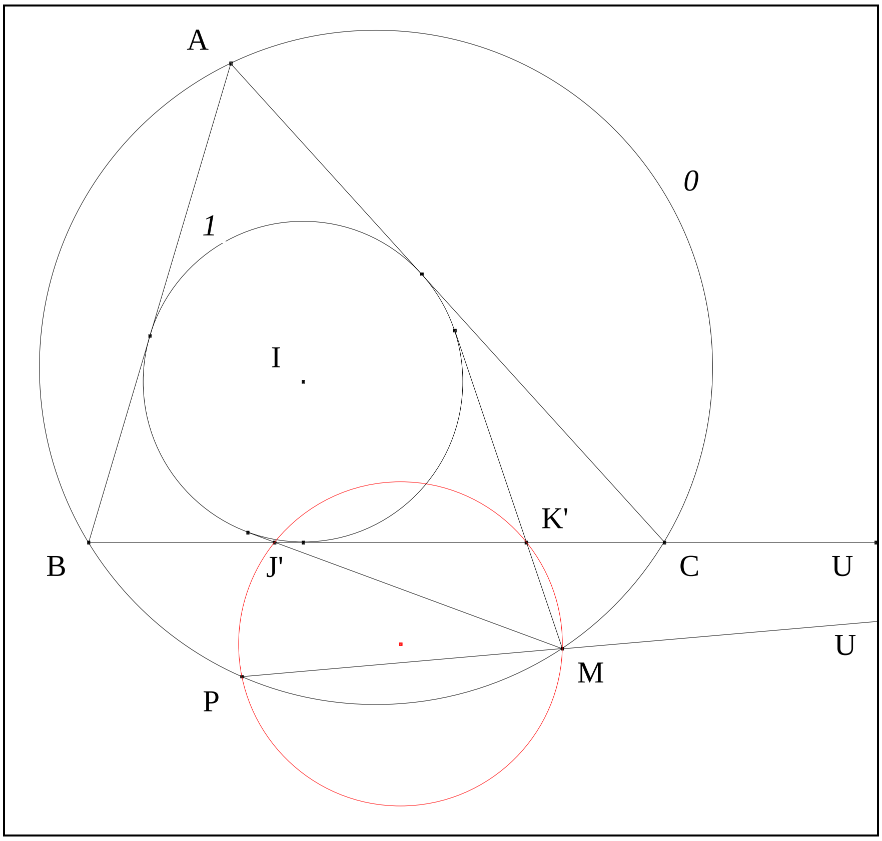


* D'après Carnot "Pentagramma mysticum", (TX'U) est la pascale de l'hexagone dégénéré Ti LPA"I+I.

* **Conclusion partielle :** U est sur (BC).

* Nous avons :

  * puissance de U par rapport à *4* : $\overline{UJ'}.\overline{UK'} = \overline{UI}.\overline{US}$
  * puissance de U par rapport à *5* : $\overline{UI}.\overline{US} = \overline{UB}.\overline{UC}$
  * puissance de U par rapport à *0* : $\overline{UB}.\overline{UC} = \overline{UP}.\overline{UM}$.



- Par transitivité de la relation =, $\overline{UJ'} . \overline{UK'} = \overline{UP} . \overline{UM}$.

- **Conclusion :** M, P, J', K' cocycliques.

Contexte : ce résultat se retrouve dans le cas particulier[23] mentionné par la référence.

Scolie : M est "le sommet du cône des tangentes au cercle inscrit de ABC".

Note historique : Cosmin Pohoata est élève de terminale au Tudor Vianu National College de Bucarest (Roumanie) et propose d'intéressants articles de Géométrie sur son site web[24].
L'idée de la preuve synthétique revient à Vladimir Zajic.
Rappelons que la preuve initiale de Zajic utilisait l'inversion et Pohoata dans sa réponse, disait :

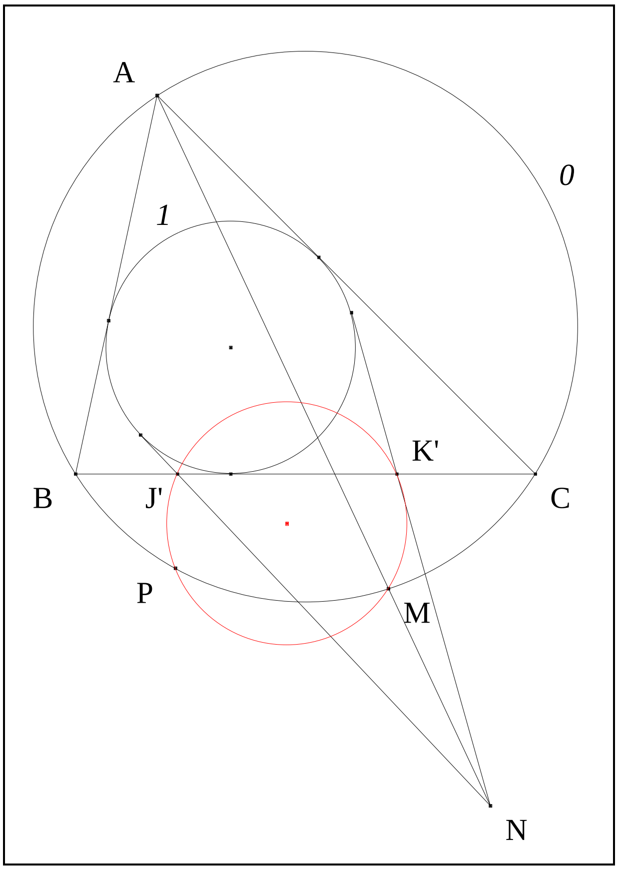
It would be interesting to see a proof without inversion.

5. La généralisation de Vladimir Zajic

VISION

Figure :

23 Ayme J.-L., II. 7. scolie 8, A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 28.
24 http://www.cpohoata.com/.

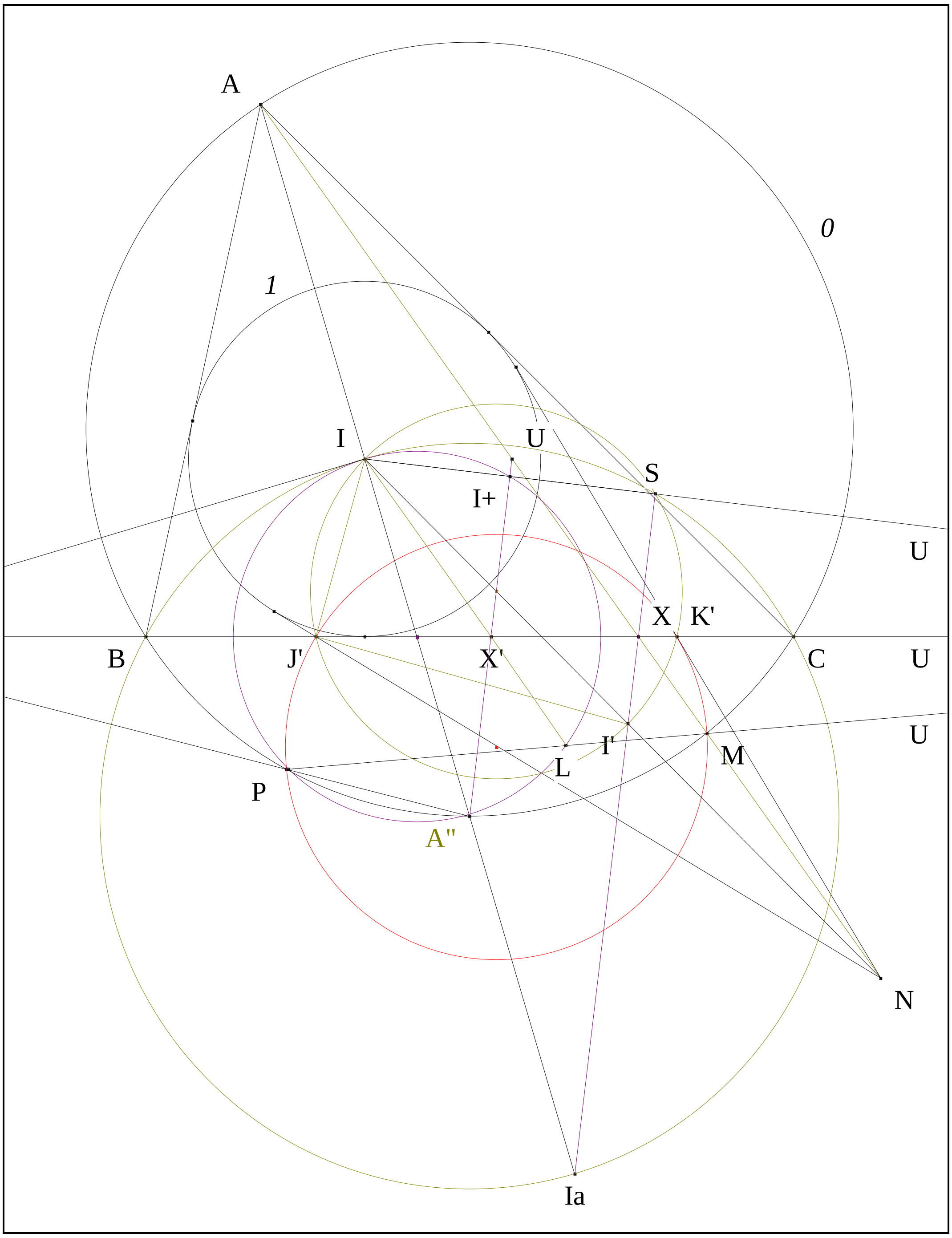


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
1 le cercle inscrit de ABC,
M un point de l'arc BC ne contenant par le sommet A,
P le A-point de Longchamps de ABC,
N un point de (AM),
et J', K' les points d'intersection des tangentes à *1* issue de M avec (BC).

Donné : M, P, J', K' sont cocycliques[25].

VISUALISATION

[25] Zajic V., Cevian and mixtilinear incircle, *Mathlinks* (15/06/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1968592250&t=209898.



- La preuve se calque sur celle du "résultat de Cosmin Pohoata" comme peut l'indiquer la figure ci-dessus.

- **Conclusion :** M, P, J', K' sont cocycliques.

Note historique : ce beau résultat qui généralise celui de Cosmin Pohoata a été proposé et prouvé par Vladimir Zajic. Dans sa preuve, il précise d'où vient son inspiration[26], il recourt à un faisceau de cercle à point de base et termine en s'appuyant sur sa preuve par inversion concernant le résultat de Pohoata.

---

[26] http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=207250.

Une courte biographie de Vladimir Zajic :

Vladimir Zajic est en Tchécoslovaquie (actuellement République Tchèque) en 1953.
Il étudie de 1971 à 1976, la physique à l'Université Charles de Prague. Après son appel sous les drapeaux, il travaille une année sur la physique des plasmas mais ne peut en vivre.
Après sept années de recherche sur la standardisation des radionucléides, il obtient en 1983 son Ph. D. en physique nucléaire. Il part pour l'Italie en passant par les montagnes de Yougoslavie et se retrouve durant la moitié d'une année dans un camp de réfugiés.
En 1986, il obtient l'asile politique aux États-unis et se contente de petits boulots manuels. En 1988, il obtient enfin un travail au Brookhaven National Laboratory pour développer un centre de test pour les chips électroniques utilisées le plus souvent dans les satellites….
Toujours dans le même centre…
Marié, ayant trois enfants, le plus jeune les ayant suivi dans les montagnes lors de leur fuite à l'ouest.

5. Deux cas particuliers

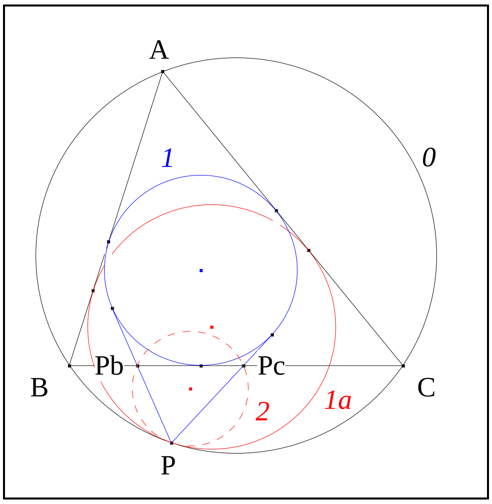
B. Le sommet du cône des tangentes

est

un point de Longchamps

VISION

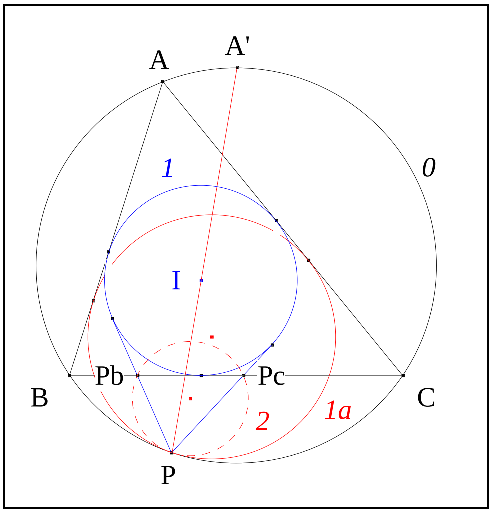
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
1 le cercle inscrit de ABC,
1a le A-cercle de Longchamps de ABC,
P le A-point de Longchamps de ABC,
Pb, Pc les points d'intersection des tangentes à *1* issue de P avec (BC)
et *2* le cercle passant par P, Pb, Pc.

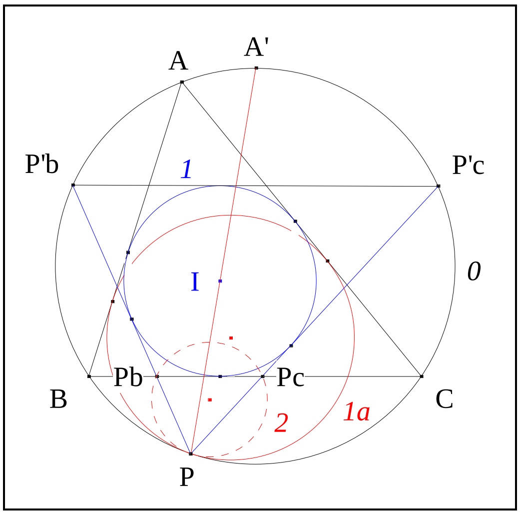
Donné : *2* est tangent à *0* en P.

VISUALISATION



- Notons I le centre de ABC,
  et A' le premier A-perpoint de ABC.

- D'après Ayme "Une bissectrice"[27], (PI) est la P-bissectrice du triangle PPcPb.



- Notons P'b, P'c les seconds points d'intersection resp. de (PPb), (PPc) avec *0*.

- **Scolie :** le triangle A'P'bP'c est A'-isocèle.

- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 5), (P'bP'c) // Ta' ;
  nous avons : Ta' // (BC) ;
  par transitivité de la relation //, (P'bP'c) // (BC) ou encore P'bP'c // (PbPc).

- **Conclusion :** le cercle *0*, le point de base P, les moniennes naissantes (P'bPPb) et (P'cPPc),
  les parallèles (P'bP'c) // (PbPc), conduisent au théorème **7"** de Reim ;
  en conséquence, *2* est tangent à *0* en P.

Note historique : Cosmin Pohoata[28] a signalé ce cas particulier dans un message *Hyacinthos*

[27] Ayme J.-L., II. 4. scolie 1, A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 16.

[28] Pohoata C., From mixtilinear incircles to the Thébault's circles, Message *Hyacinthos* # 16221 du 20/03/2008 ;

en indiquant

I have a neat synthetic proof by inverting wrt. the incircle, but I'm afraid it is not enough for the next few remarks…

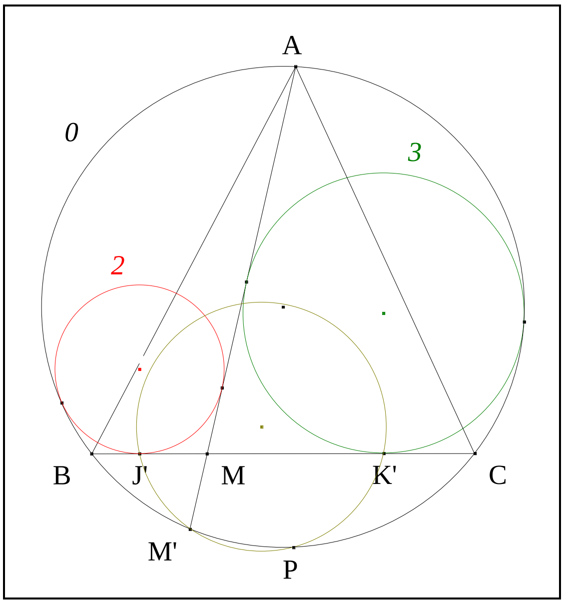
B. Le sommet du cône des tangentes

est

à l'infini

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de [BC],
M' le second point d'intersection de (AM) avec *0*,
2, 3 les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M,
J', K' les points de contact resp. de *2*, *3* avec [BC]
et P le A-point de Longchamps de ABC.

Donné : M', P, J', K' sont cocycliques[29].

VISUALISATION

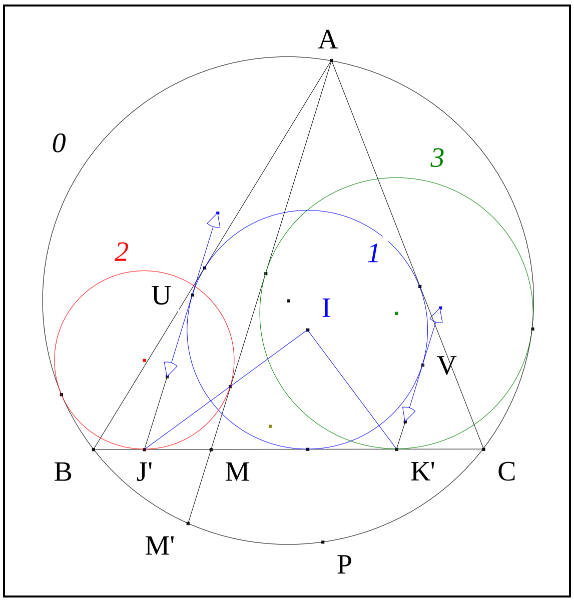
- Nous présentons la preuve retravaillée et améliorée de Vladimir Zajic[30].

---

http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/16221.

29 Pohoata C., on the Thebault circles of a cevian (c), Message *Hyacinthos* # 15977 du 04/01/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/15977.
Pohoata C., From mixtilinear incircles to the Thébault's circles, *Mathlinks* (03/07/2008) ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=213098.

30 Ayme J.-L., Three mixtilinear circles, *Mathlinks* (24/10/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=294312409&t=233986.



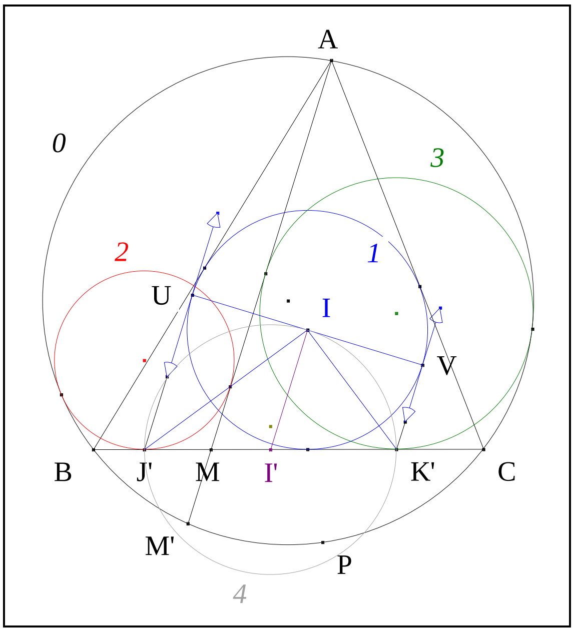
- Notons   *1*   le cercle inscrit à ABC,
  I   le centre de *1*,
  U   le point de contact de la tangente à *1* issue de J'
  et   V   le point de contact de la tangente à *1* issue de K'.

- D'après I. 4. Deux tangentes parallèles, (J'U), (K'V) et (AM) sont parallèles entre elles.

- **Conclusion partielle :** d'après "Bande circonscrivant un cercle" (Cf. Annexe 4),
  le triangle IJ'K' est I-rectangle.

Commentaire : le problème peut se réinterpréter de la façon suivante :

"du point à l'infini de (AM), on mène deux tangentes au cercle inscrit".

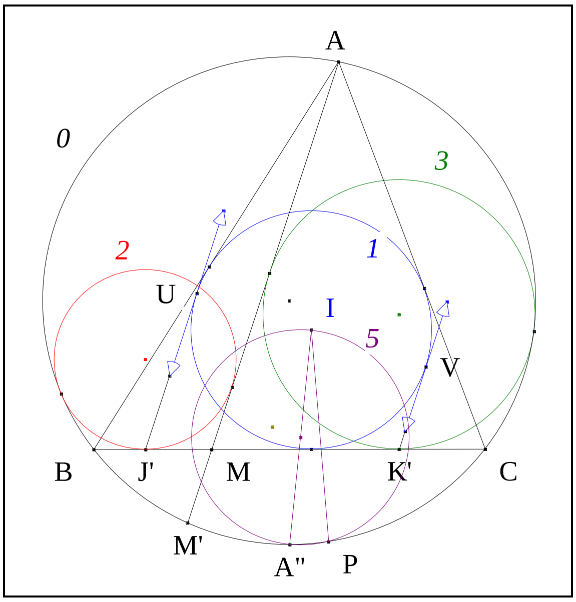


- Notons   I'   le milieu de [J'K'].

- **Scolie :** I est le milieu de [UV].

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome de passage IIIb, (II') est parallèle à (AM).

- Notons *4* le cercle de centre I' passant par I ; il passe par J' et K'.

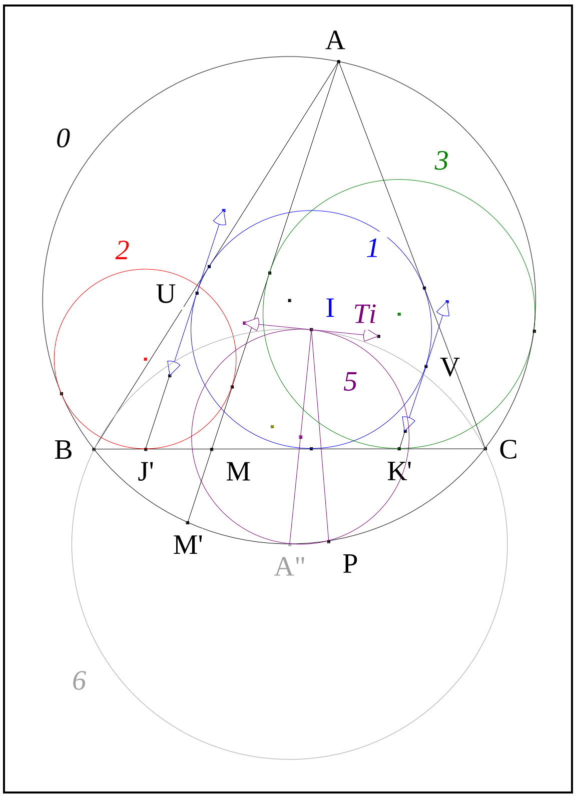


- Notons A" le second perpoint de ABC
  et *5* le cercle de diamètre [A"I].

- D'après Ayme "Avec le second perpoint" [31], le triangle PIA" est P-rectangle.

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", P est sur *5*.

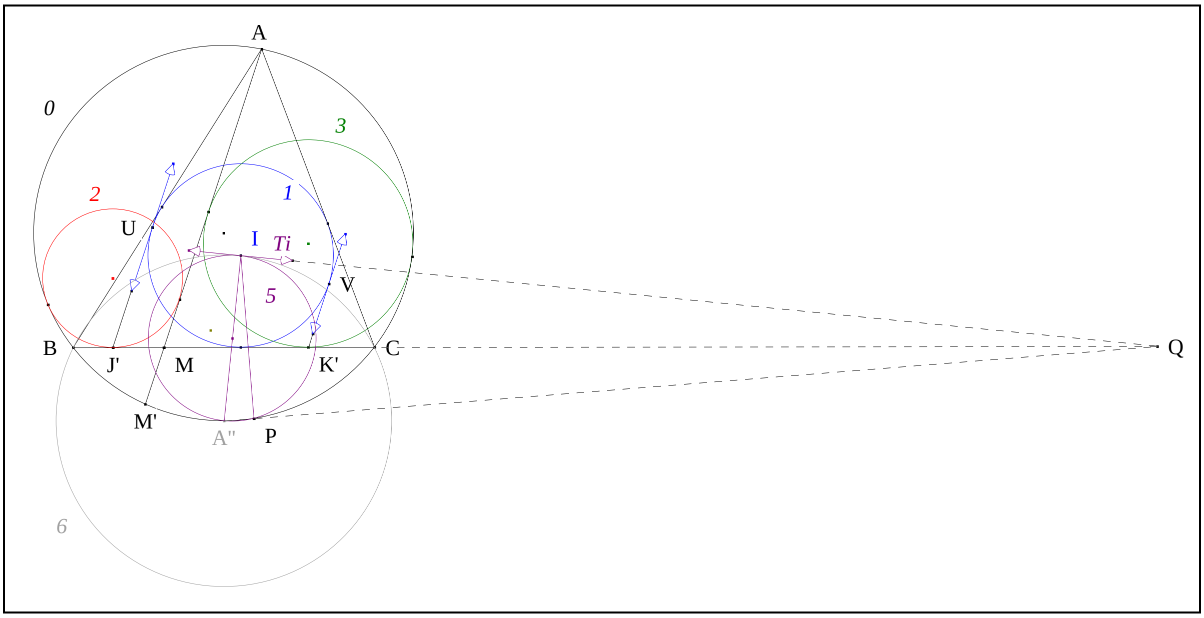
[31] Ayme J.-L., II. 4. scolie 2, A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 17.



- Notons *6* le A-cercle de Mention de ABC.

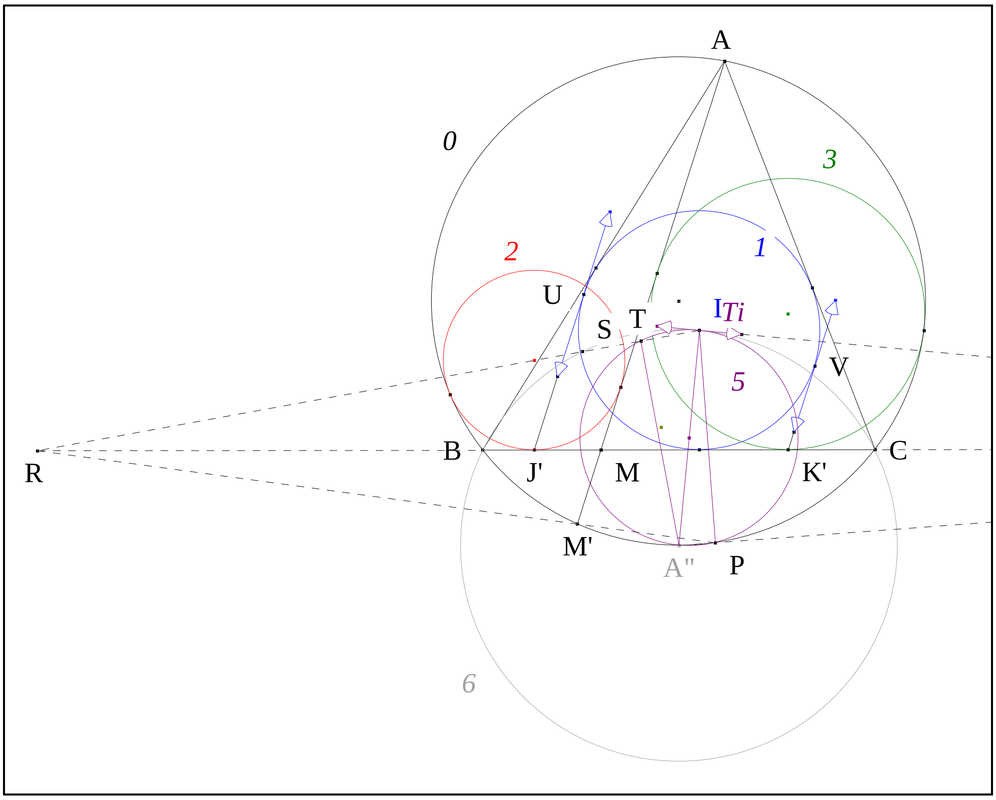
- **Scolies :** **(1)** *6* a pour centre A" et passe par B, I et C
  (2) *5* et *6* sont tangents en I.

- Notons *Ti* la tangente commune à *5* et *6* en I.



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 6) appliqué à *0*, *5* et *6*, (A"P), *Ti* et (BC) sont concourantes.

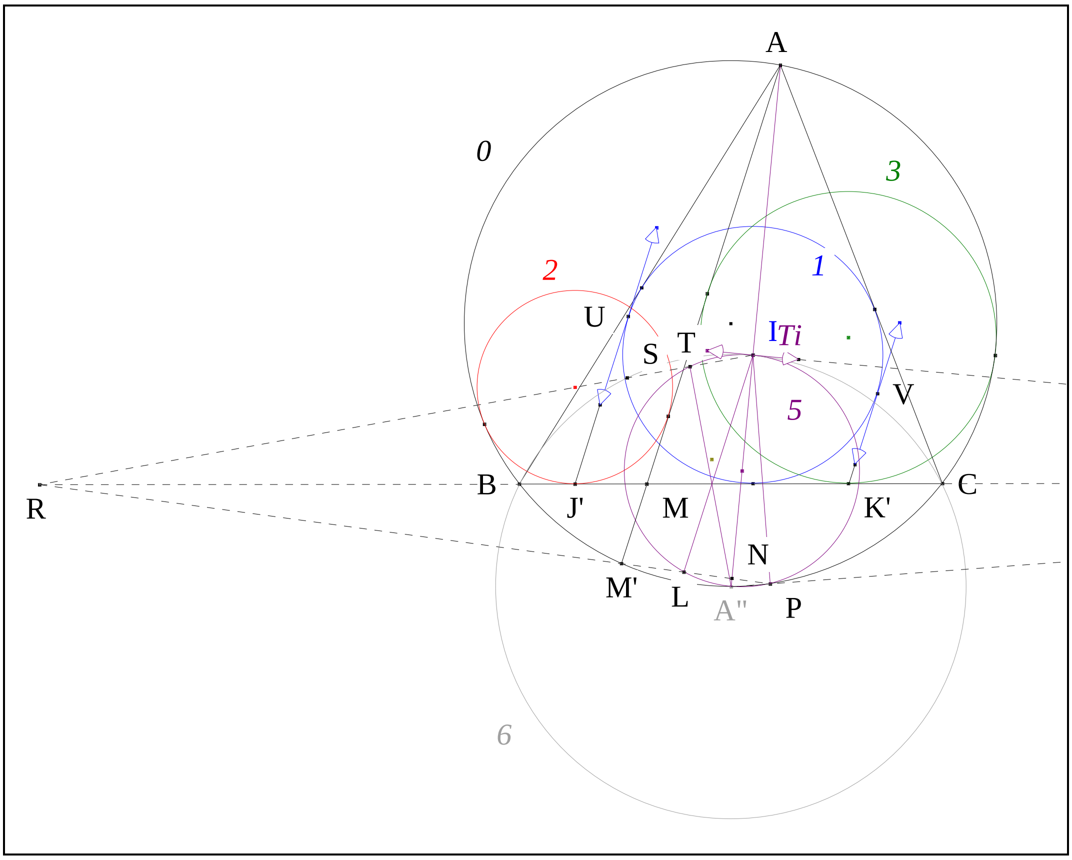
- Notons Q ce point de concours.



- Notons R le point d'intersection de (PM') et (BC),
  S le second point d'intersection de (RI) avec *6*
  et T le milieu de [SI].

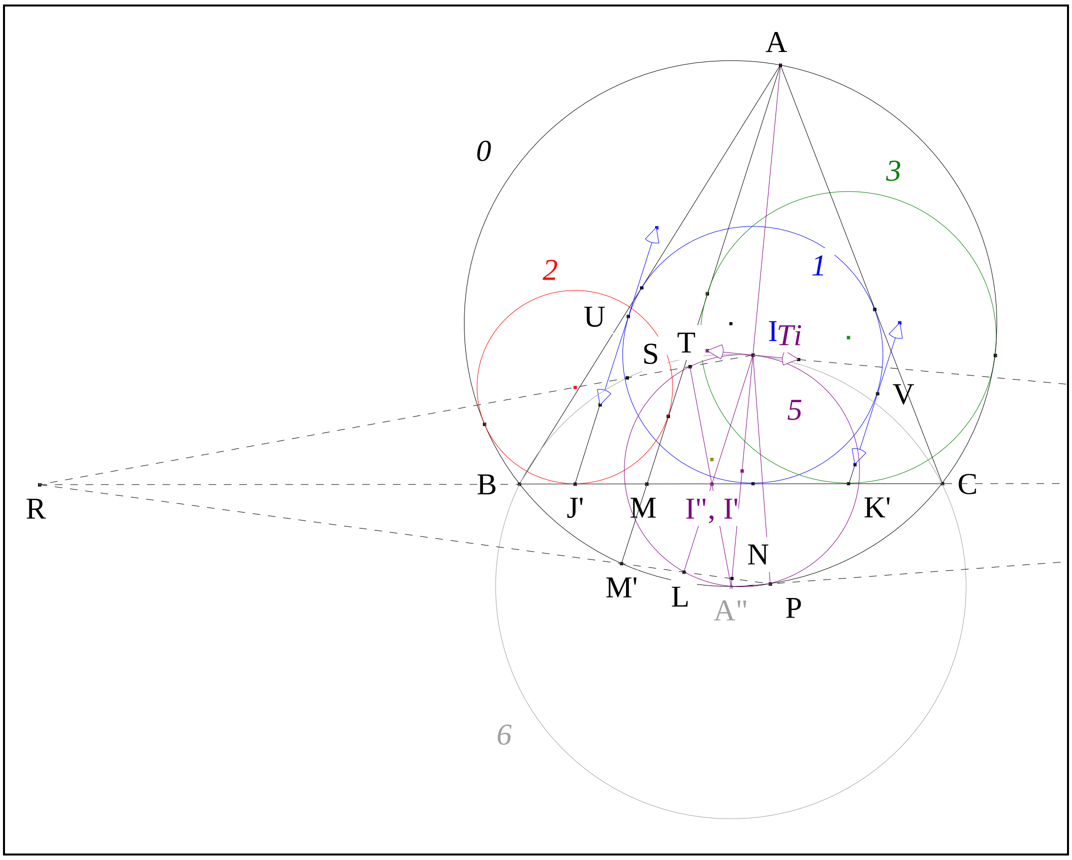
- Nous savons que la médiatrice de [SI] passe par A".

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", T est sur *5*.



- Notons L le second point d'intersection de (RPM') avec *5*
  et N le point d'intersection de (RPM') et (AIA").

- Les cercles *5* et *0*, les points de base A" et P, les moniennes (IA"A) et (LPM'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (IL) // (AM').



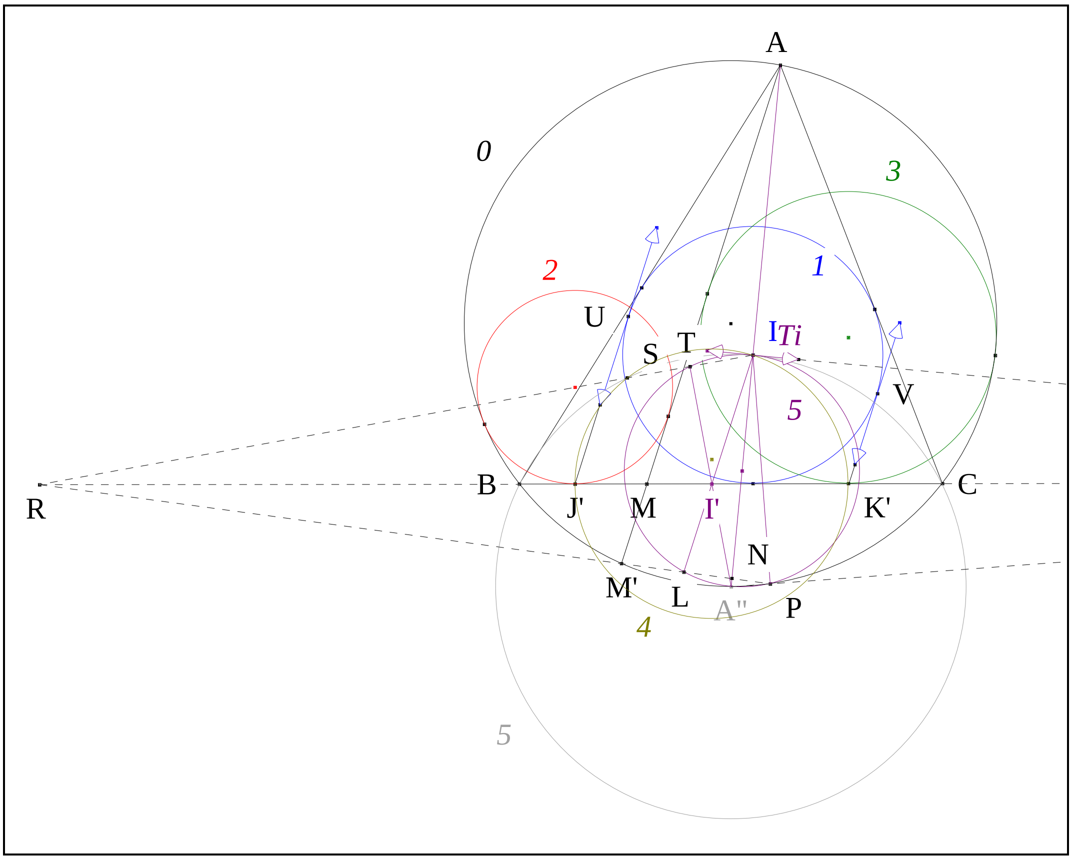
- Notons I" le point d'intersection de (IL) et (TA").

- D'après Carnot "Pentagramma mysticum" (Cf. Annexe 7),
  (RQI") est la pascale de l'hexagone dégénéré TI Ti LPA"T.

- **Scolie :** R, B, C et Q sont alignés.

- D'après l'axiome d'incidence Ia, I" est sur (BC).

- **Conclusion partielle :** I" et I' sont confondus.



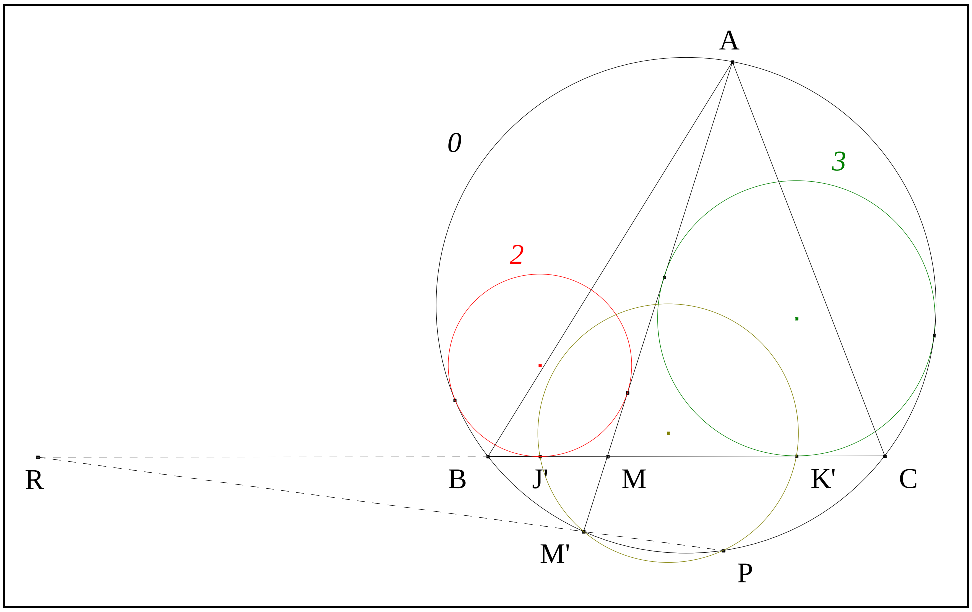
- **Scolies :** **(1)** *4* passe par I, J' et K'
  (2) *4* passe par S car le centre I' de 4 est sur médiatrice de [IS] et que I'I= I'S.

- Nous avons :

  * puissance de R par rapport à *4* : $\overline{RJ'} \cdot \overline{RK'} = \overline{RI} \cdot \overline{RS}$

  * puissance de R par rapport à *5* : $\overline{RI} \cdot \overline{RS} = \overline{RB} \cdot \overline{RC}$

  * puissance de R par rapport à *0* : $\overline{RB} \cdot \overline{RC} = \overline{RM'} \cdot \overline{RP}$.



- Par transitivité de la relation =, $\overline{RJ'} \cdot \overline{RK'} = \overline{RM'} \cdot \overline{RP}$.

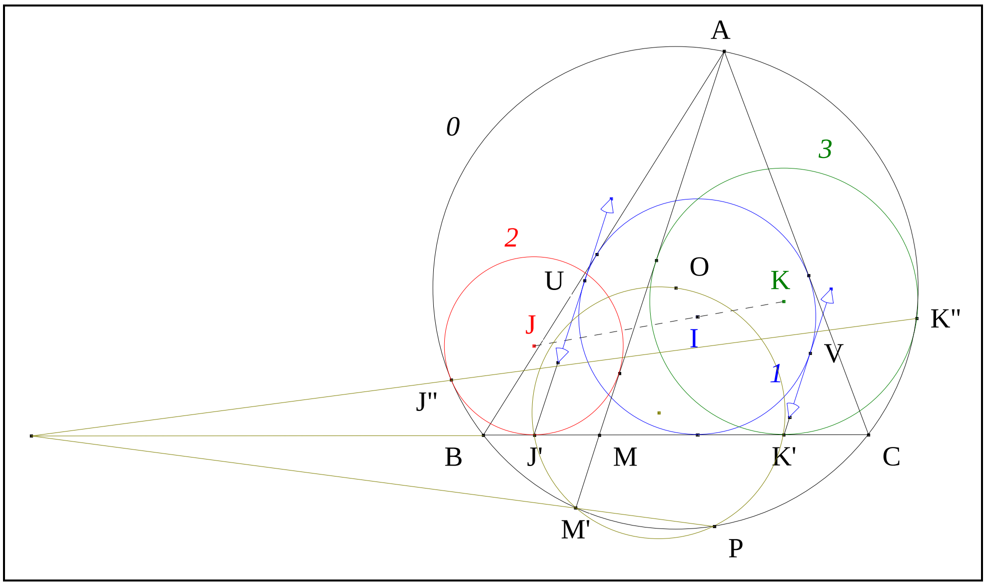
- **Conclusion :** M', P, J', K' sont cocycliques.

III. JIANHUA FANG

1. Une "concourance"

VISION

Figure :

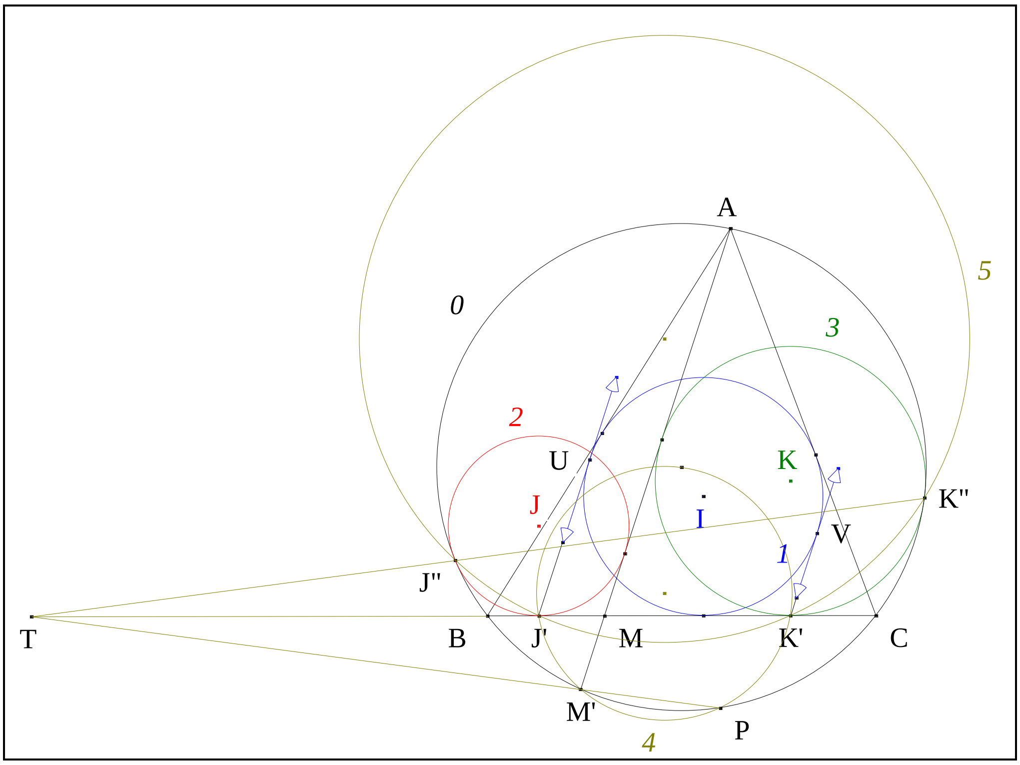


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de [BC],
M' le second point d'intersection de (AM) avec *0*,
2, *3* les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M,
J', K' les points de contact resp. de *2*, *3* avec [BC]
et P le A-point de Longchamps de ABC.

Donné : (PM'), (J'K') et (J"K") sont concourantes[32].

VISUALISATION

[32] Fang-jh, On mixtilinear incircles and the Thebault circles, *Mathlinks* (12/07/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1968592250&t=214426.

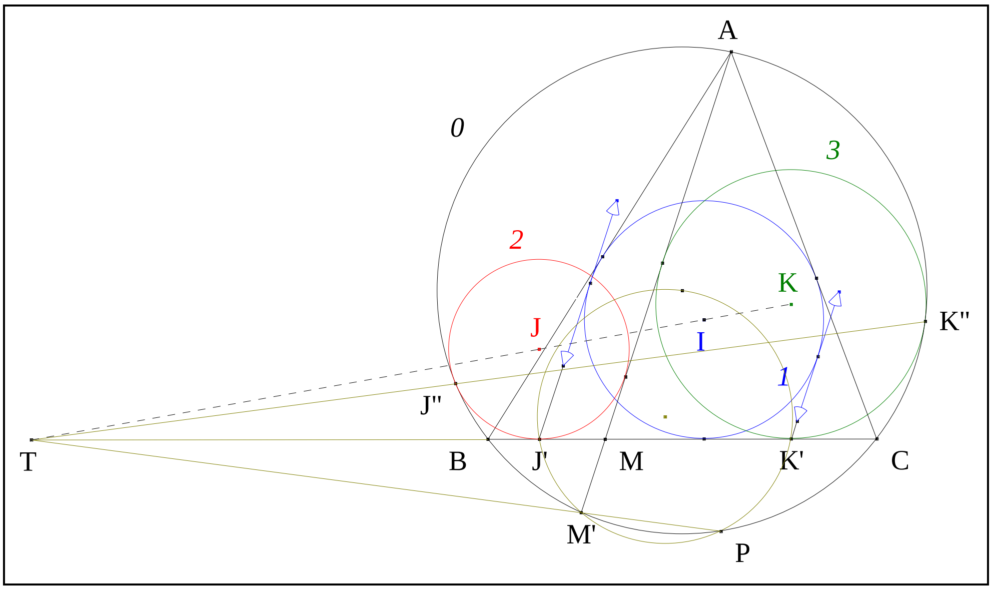


- Notons 4 le cercle passant par M', P, K', J'
  et 5 le cercle passant par J", J', K', K" voir avant référence

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 6) appliqué à *0*, *4*, *5*, (PM'), (J'K'), (J"K") sont concourantes.

- Notons T ce point de concours.

Scolies : **(1)** une autre droite passant par T

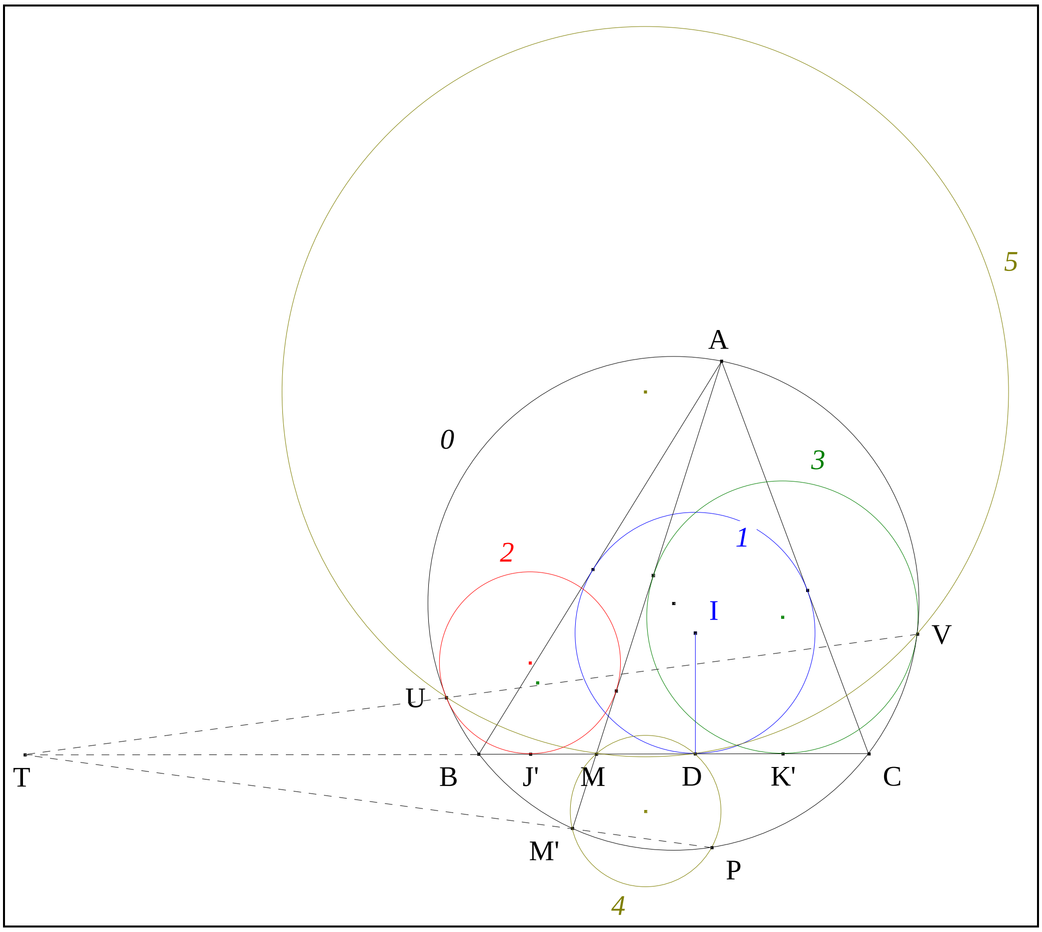


- Notons J, K les centre resp. de *2*, *3*.

- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe 8) appliqué à *0*, *2*, *3*,
  T étant le centre externe d'homothétie de *2* et *3*.

- **Conclusion :** la droite des centres (IJK) passe par T.

(2) Quatre points cocycliques [33]



- Notons D le point de contact de *1* avec (BC).

- D'après "Une famille de cercle passant par P" [34], M', P, D, M sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 6) appliqué à *0* et *4*, et aux "cordes concourantes" [M'P], [MD], [UV], U, M, D, V sont cocycliques.

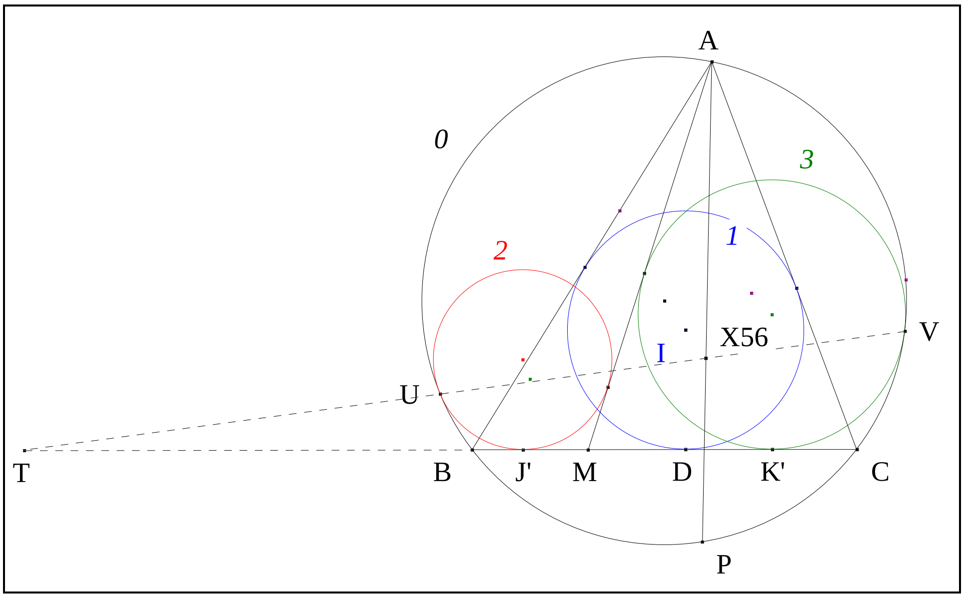
- Notons *5* ce cercle.

(3) X_{56} est sur (UV)

---

33 Pohoata C., on the Thebault circles of a cevian (b), Message *Hyacinthos* # 15977 du 04/01/2008.
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/15977.

34 Ayme J.-L., II. 7. scolie 7, A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 27.



- Notons X_{56} le centre externe d'homothétie de *0* et *1*.
- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe 8) appliqué à *0*, *1* et *2*, X_{56}, T, U sont alignés.
- Nous savons que T, U, V sont alignés ;
  en conséquence, d'après l'axiome d'incicence Ia, X_{56}, U, V sont alignés.
- **Conclusion :** X_{56} est sur (UV).

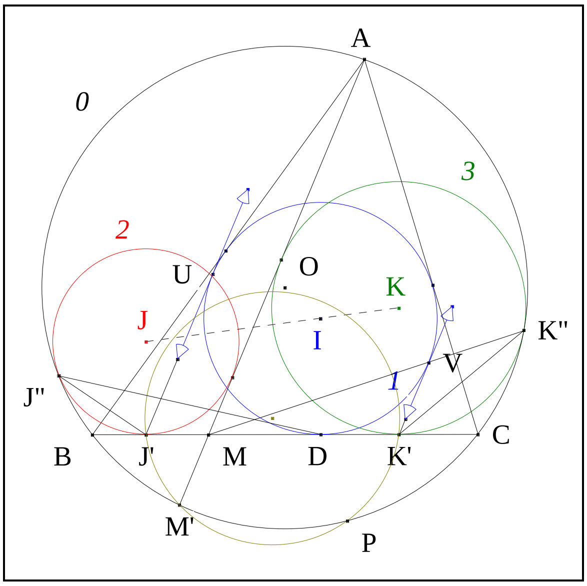
Note historique : ce résultat est de Jean-Pierre Ehrmann[35].

2. Deux angles égaux

VISION

Figure :

[35] Ehrmann J.-P., On the Thébault circles of a cevian, Message *Hyacinthos* #15979 du 05/01/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/15979.



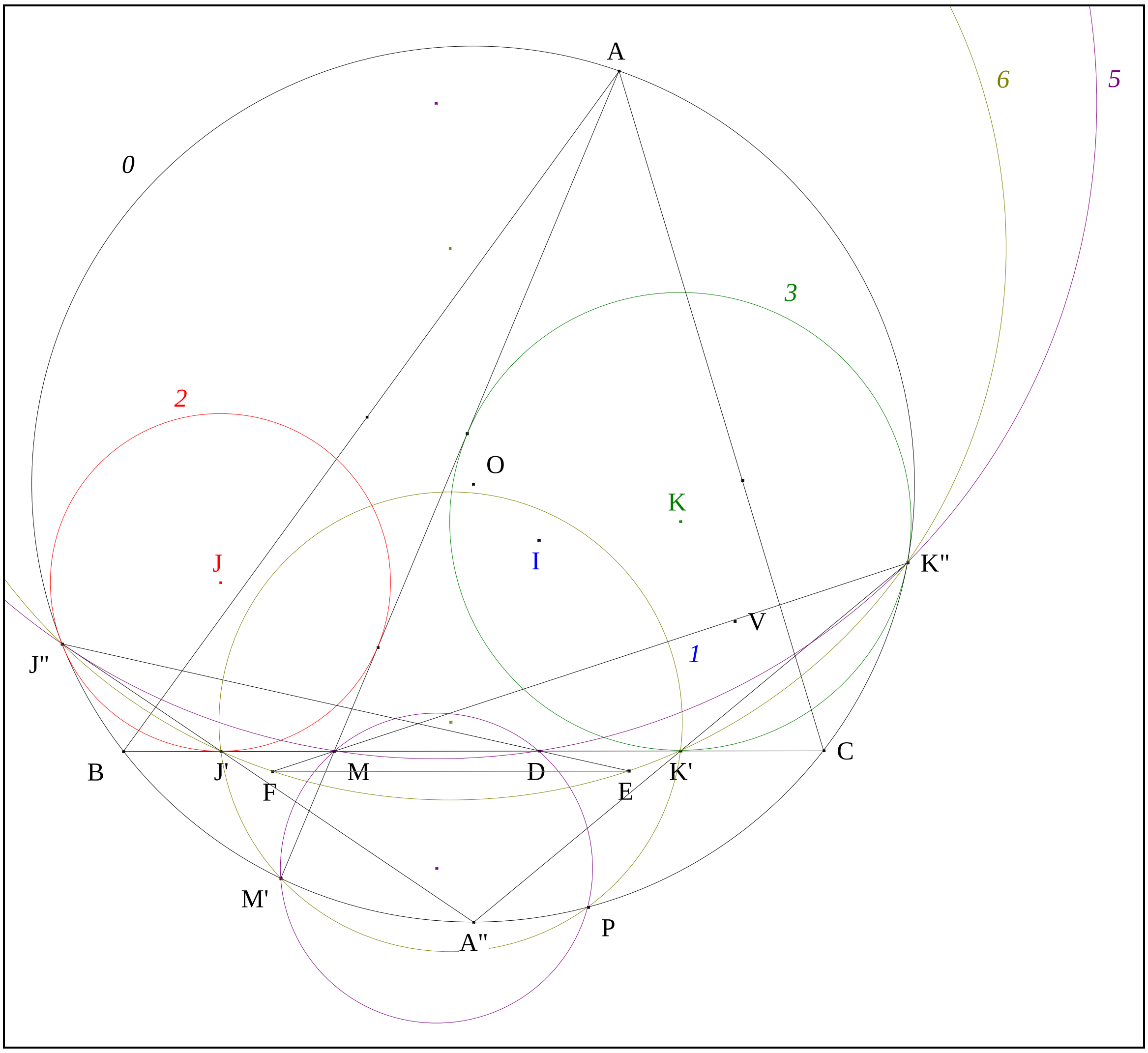
Traits :

	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M	un point de [BC],
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	2, *3*	les cercles tangents resp. à *0*, [BC], [AM],
	J, K	les centres resp. de *2*, *3*,
	J'	le point de contact de *2* avec [BC],
	K'	le point de contact de *3* avec [BC],
	U	le point de contact de la tangente à *2* passant par J',
	V	le point de contact de la tangente à *3* passant par K',
	P	le point de contact du A-cercle de Longchamps de ABC avec *0*
et	*4*	le cercle passant par M', J', K'.

Donné : <J'J"D = <K'K"M [36].

VISUALISATION

[36] Fang-jh, On mixtilinear incircles and the Thebault circles, *Mathlinks* (12/07/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1968592250&t=214426.



- Notons *5* le cercle passant par J", M, D, K",
  6 le cercle passant par J", J', K', K",
  E, F les seconds points d'intersection resp. de (J"D), (K"M) avec *6*
  et A" le second perpoint de ABC.

- **Scolies :** **(1)** J", J', A" sont alignés
  (2) K", K', A" sont alignés.

- Les cercles *5* et *6*, les points de base J" et K", les moniennes (DJ"E) et (MK"F), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (DM) // (EF).

- Un chasse angulaire

  le quadrilatère EFJ'K' étant un trapèze cyclique est isocèle ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit relativement à *6*, <J'K"F = < EJ"K' ;

  d'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe 9) appliqué à *0* et *6*, <J'K"A" = <A"J"K'.

- **Conclusion :** par "soustraction membre à membre", <J'J"D = <K'K"M.

Une courte note biographique de Jianhua Fang :

Jianhua Fang est un chirurgien du Wuhan (Chine) qui a comme loisir, la Géométrie et la Physique.

Note historique : c'est durant la discussion sur "La concourance" précédente que Jianhua Fang a découvert le samedi 12 juillet "an interesting conclusion" concernant l'égalité de deux angles. Le dimanche 13, coïncidence ou non, Zhang Fangyu[37] proposait à nouveau ce résultat, remerciant quelques heures après, Cosmin Pohoata pour sa preuve par inversion et Jianhua Fang pour sa "nice discovery". Notons que la preuve de Fang publiée le lendemain 14, a recours à la technique des aires et des rapports.

Une réflexion ésotérique :

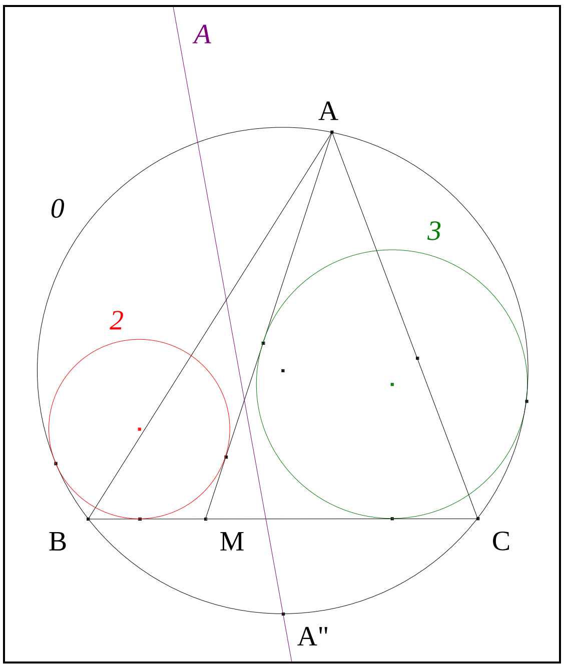
émettre une idée, c'est aussi réveiller une énergie latente, voir créer un être ou plutôt à l'appeler à un certain degré de réalité. Émise par une personne, une idée devient présente et peut être captée par tout être sensible aux vibrations de l'inconscient universel...
Sous ce point de vue, nous pouvons mieux comprendre que la plupart des découvertes peuvent être revendiquées par au moins deux chercheurs…

JEAN-PIERRE EHRMANN

1. Axe radical de deux cercles de Thébault

VISION

Figure :

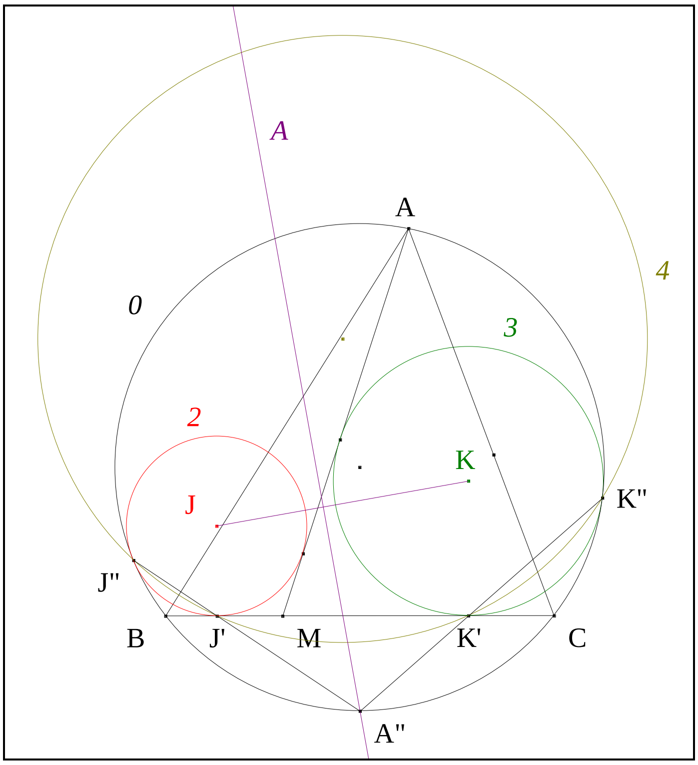


[37] Zhang Fangyu, Very nice, *Mathlinks* (13/07/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=246671477&t=214687.

Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de [BC],
2, *3* les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M,
A l'axe radical de *2* et *3*
et A" le second perpoint de ABC.

Donné : *A* passe par A".[38]

VISUALISATION



- Notons J, K les centres resp. de *2*, *3*,
  J', K' le point de contact resp. de *2*, *3* avec [BC]
  et *4* le cercle passant par J", J', K', K". **(référence)**

- **Scolies :** **(1)** J", J', A" sont alignés
  (2) K", K', A" sont alignés
  (3) A" est le centre radical de *0*, *2*, *3*.

- **Conclusion :** d'après Gaultier "Axe radical de deux cercles non sécants" (Cf. Annexe 3), *A* passe par A".

Scolie : *A* est perpendiculaire à (JK).

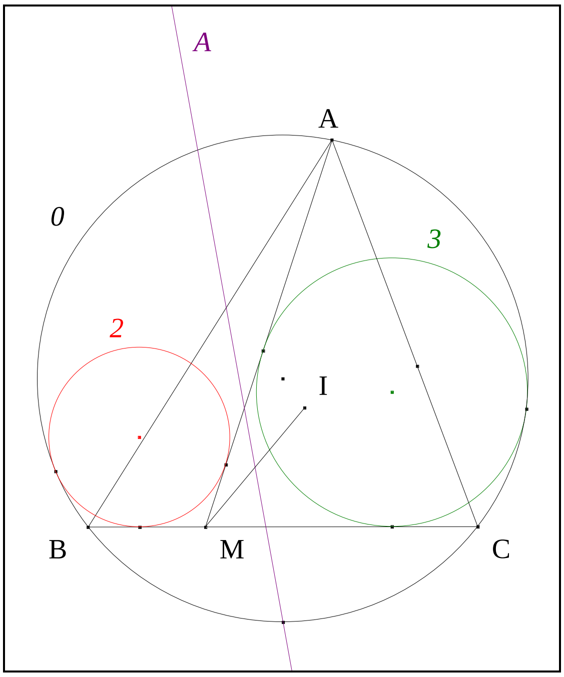
2. Le milieu de [IM]

---

[38] Ehrmann J.-P., on the Thebault circles of a cevian (b), Message *Hyacinthos* # 15979 du 05/01/2008. http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/15979.

VISION

Figure :

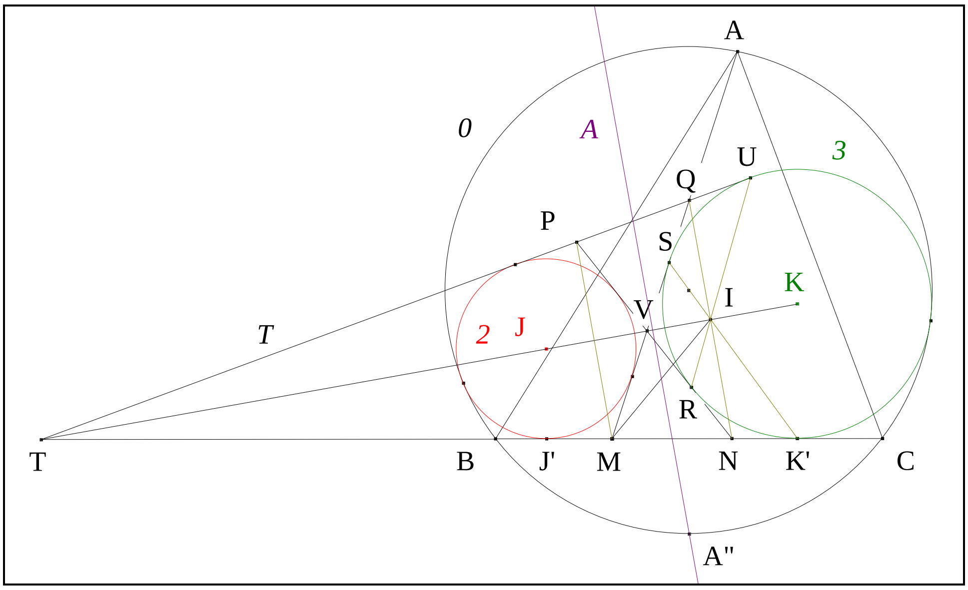


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de [BC],
2, *3* les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M
et *A* l'axe radical de *2* et *3*.

Donné : *A* passe par le milieu de [IM].[39]

VISUALISATION

[39] Ehrmann J.-P., on the Thebault circles of a cevian (b), Message *Hyacinthos* # 15979 du 05/01/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/15979.



- Notons J, K les centres resp. de *2*, *3*,
  T la seconde tangente commune extérieure à *2* et *3*,
  N, P le point d'intersection de la seconde tangente commune intérieure resp avec (BC), *T*,
  Q le point d'intersection de *T* avec (AM),
  R, S, U les points de contact de *3* resp. avec (PN), (AM), *T*
  et V le point d'intersection de (PN) et (AM).

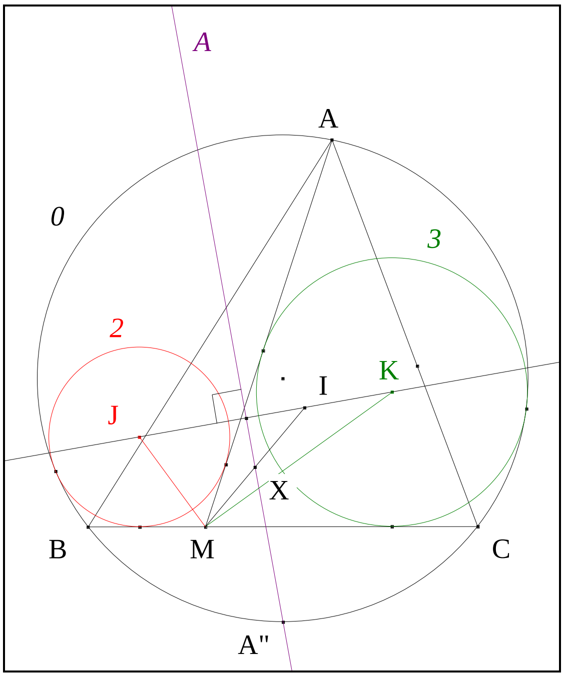
- **Scolies :** **(1)** I, J, K, T sont alignés
  (2) K', I, S sont alignés
  (3) par symétrie d'axe (JK), V est sur (TJK).

- D'après "Un quadrilatère circonscriptible" (Cf. Annexe 10) appliqué au quadrilatère circonscriptible TNVQ, (TV), (NQ), (RU), (SK') sont concourantes I.

- **Scolies :** **(1)** par symétrie d'axe (JK), (PM) est parallèle à (QN)
  (2) *A* est l'axe médian de la bande de frontières (PM) et (QN)
  (3) *A*, (PM) et (QN) sont parallèles entre elles.

- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIa, *A* passe par le milieu de [IM].

Scolie : une construction des centres de *2* et *3*



- Notons X le milieu de [IM]
  et A" le second perpoint de ABC

- **Conclusion :** la perpendiculaire à *A* i.e. (A"X) passant par I coupent resp. les M-bissectrices des triangles MAB, MCA en J, K.

Note historique : ces résultats ont été proposés en 2008 par Jean-Pierre Ehrmann[40] comme complément de réponse à la proposition (b) de Cosmin Pohoata.
Deux approches différentes ont été resp. proposées par Vladimir Zajic et Cosmin Pohoata[41].

V. ANNEXE

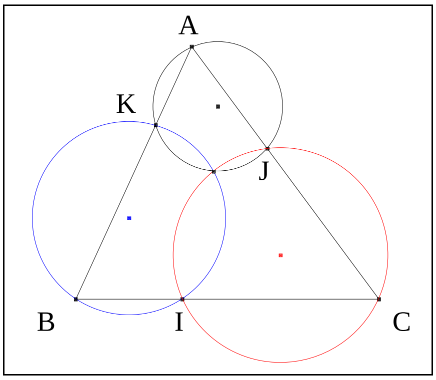
1. Le théorème du pivot[42]

---

40 Nguyen K. L. and Salazar J. C, On mixtilinear incircles and excircles, *Forum Geometricorum* 6 (2006) 1-16 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200601.pdf

41 http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=243560.

42 Miquel A., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville 3 (1838) 485-487.

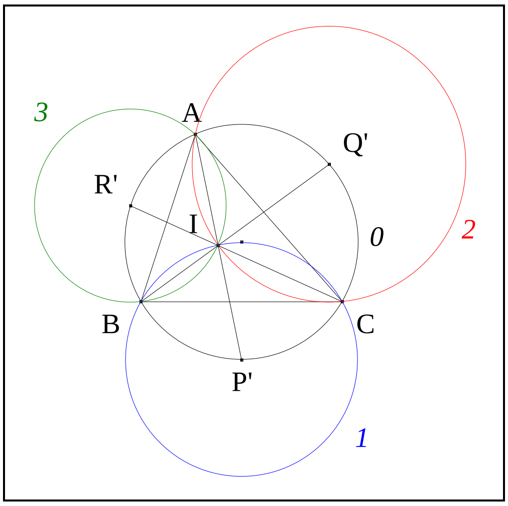


Traits : ABC un triangle,
I un point de (BC),
J un point de (CA)
et K un point de (AB).

Donné : les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK et CJI sont concourants.

Commentaire : ce résultat reste vraie dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

2. Un cercle de Mention

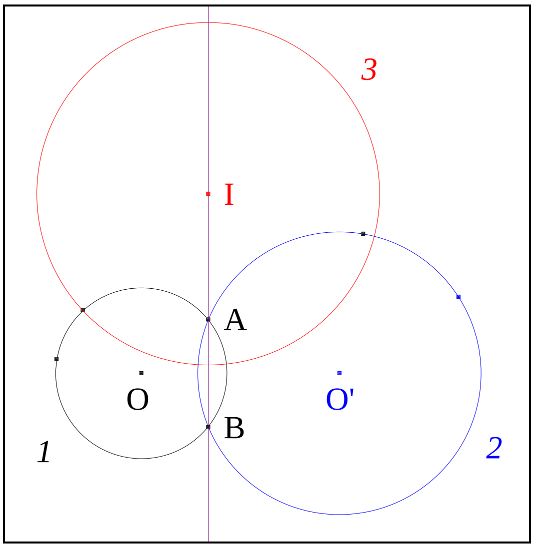


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
I le centre de ABC,
P', Q', R' le points d'intersection resp. de(IA), (IB), (IC) avec *0*
et *1*, *2*, *3* les cercles de centres resp. P', Q', R' passant resp. par B et C, C et A, A et B.

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants en I.

3. Axe radical de deux cercles sécants[43]

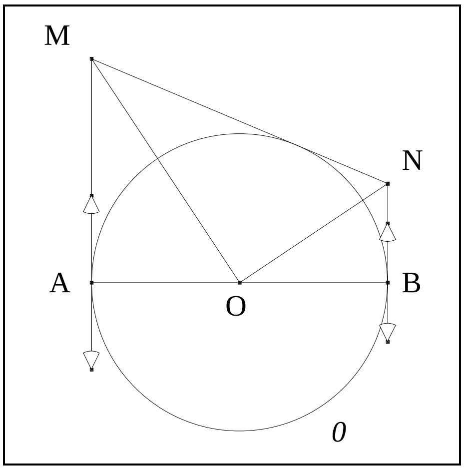
[43] Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique, Cahier* **16** (1813) 124-214.



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
3 un cercle orthogonal à *2*
et I le centre de *3*.

Donné : I est sur la droite (AB) *si, et seulement si,* *3* est orthogonal à *2*.

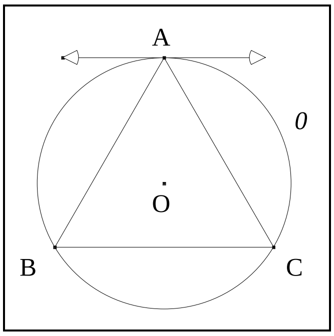
4. Bande circonscrivant un cercle



Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
A, B deux points diamétraux de *0*,
Ta, Tb les tangentes à *0* en A, en B,
et M, N deux points du même demi-plan de frontière (AB), situés sur Ta et Tb.

Donné : le triangle ONM est rectangle en O *si, et seulement si,* (MN) est tangente à *0*.

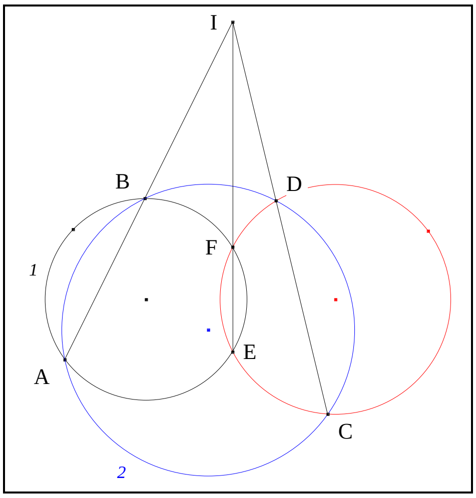
5. La tangente au sommet



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et Ta la tangente à *0* en A.

Donné : ABC est isocèle en A *si, et seulement si,* Ta est parallèle à la base (BC).

6. Le théorème des trois cordes

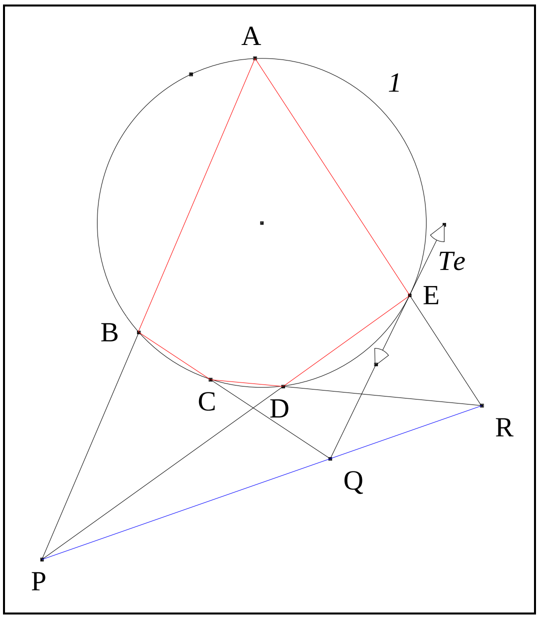


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
C, D deux points de *2*,
E, F deux points de *1*
et I le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

7. Pentagramma mysticum[44]

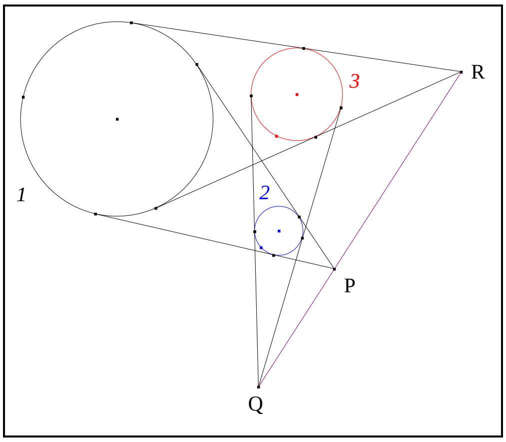
[44] Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456.



Traits : *1* un cercle,
ABCDEA un pentagone tels que les points A, B, C, E soient sur *1*,
Te la tangente à *1* en E
et P, Q, R les points d'intersection des droites (AB) et (DE), (BC) et Te, (CD) et (EA).

Donné : D est sur *1* *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.

8. La droite de D'Alembert[45]



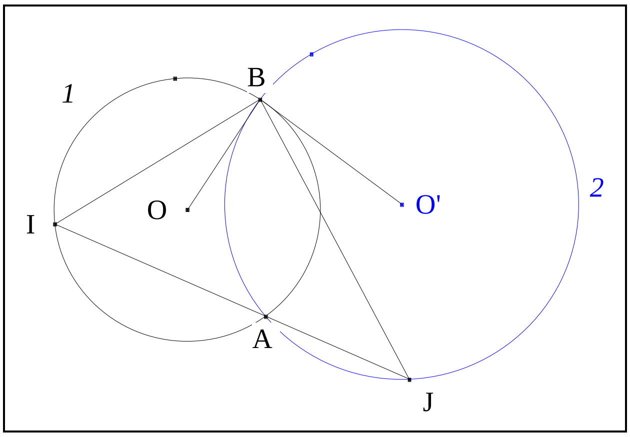
Traits : *1, 2, 3* trois cercles deux à deux extérieurs
et P, Q, R les points d'intersections des tangentes communes extérieures
de *1* et *2*, de *2* et *3*, de *3* et *1*.

Donné : P, Q et R sont alignés.

9. Un triangle de Möbius[46]

---

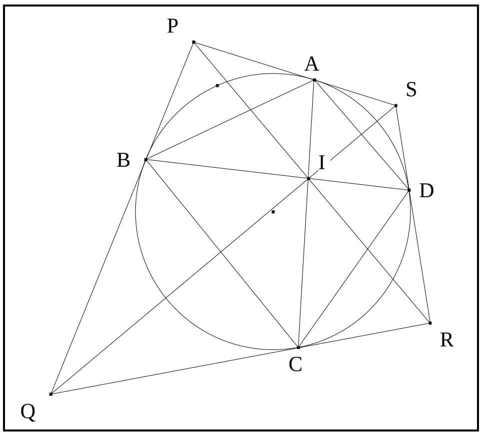
[45] Chasles M., Note VI, *Aperçu historique* (1837) 293.
[46] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
et	(IBJ)	une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

9. Un quadrilatère circonscriptible[47]



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCD	un quadrilatère inscrit dans *1*
et	PQRS	le quadrilatère tangentiel de PQRS.

Donné : les diagonales [PR], [SQ], [AC] et [BD] sont concourantes.

[47] Newton I., *Principes* (1686), corollaire II du lemme XXIV.