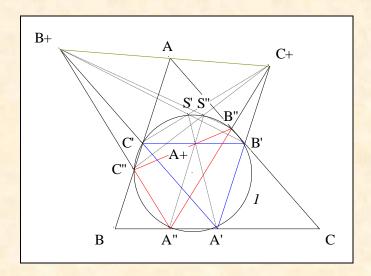
# LES DEUX POINTS DE SCHROETER

#### Jean-Louis AYME



Résumé.

Nous présentons cinq résultats de Schroeter<sup>1</sup>, datant de 1864, dans l'ordre proposé par Roger Arthur Johnson<sup>2</sup> concernant un triangle avec ses triangles orthique et médian, précédés d'une courte note biographique. Ces résultats dont la plupart des preuves sont difficiles sans le recours aux quaternes harmoniques, sont généralisables par la même technique.

Ces résultats qui découlent d'une figure "well-nigh inexhaustible" comme le dit Johnson, ont été démontrés par Louis Lacauchie<sup>3</sup>, élève du collège Ste-Barbe (classe de Moutard) à Paris et par l'allemand Wilhelm Fuhrmann<sup>4</sup> en 1865 selon une procédure non connue par l'auteur. Un sixième résultat de l'auteur est présenté.

Tous les théorèmes cités en annexe peuvent tous être démontrés synthétiquement.

| Sommaire   |    |
|--|----|
| I. Heinrich Eduard Schroeter   | 2  |
| II. Les cinq résultats de Schroeter  | 2  |
| 1. Un alignement sur la droite d'Euler ou le premier résultat de Schroeter           | 2  |
| 2. Trois perpendiculaires parallèles à <i>E</i> ou le deuxième résultat de Schroeter | 4  |
| 3. Quatre points alignés ou le troisième résultat de Schroeter                       | 8  |
| 4. Les deux points de Schroeter ou le troisième résultat de Schroeter                | 11 |
| 5. Trois points sur (S'S") ou le septième résultat de Schroeter                      | 13 |
| III. Trois résultats de l'auteur   | 15 |
| 1. Le triangle tangentiel du triangle médian   | 15 |
| 2. Milieu d'un côté de A*B*C*  | 17 |
| 3. Deux arguésiennes   | 21 |
| IV. Annexe   | 23 |
| V. Archive   | 28 |
|  |    |

Schroeter H. E., Question 710, Nouvelles Annales de Mathématiques 2-ème série 3 (1864) 442; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

Johnson R. A., Advanced Euclidean Geometry, Dover, New York, 1960 (from 1929 original), article 431, p. 261.

Lacauchie L., Question 710, Nouvelles Annales de Mathématiques 2-ème série 4 (1865) 178-182; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Fuhrmann W., Synthetische Beweise Planimetrischer, Sätze, Berlin (1890).

#### I. HEINRICH EDUARD SCHROETER



Heinrich Eduard Schroeter ou Schröter est né à Königsberg<sup>5</sup> (Allemagne), le 8 janvier 1829. Après des études au Lycée de Königsberg, il entre en 1841 à l'université de cette même ville pour étudier les mathématiques et la physique. Après son service militaire, il rejoint l'université de Berlin. Durant ses deux années d'étude, il suit les cours de Dirichlet et de Steiner qui auront une forte influence sur lui. Il passe son doctorat en 1854 à l'université de Königsberg. Lecteur à l'université de Breslau, il en devient l'un de ses professeurs en 1858 et aura pour élève Rudolf Sturm. En 1880, il écrit un livre majeur sur *La théorie des surfaces* qui continue l'oeuvre de Steiner et publie des articles dans les journaux de Crelle et de Clebsch. Paralysé durant les dernières années de sa vie, il décède à Breslau<sup>6</sup> (Allemagne), le 3 janvier 1892. Rappelons qu'un cratère lunaire porte aujourd'hui son nom.

## II. LES CINQ RÉSULTATS DE SCHROETER

### 1. Un alignement sur la droite d'Euler ou le premier résultat de Schroeter

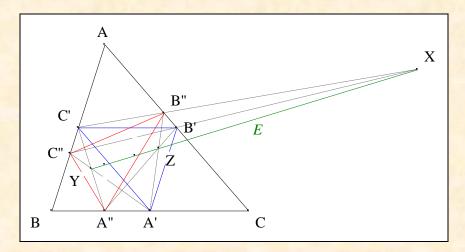
**VISION** 

**Figure** 

-

Actuellement Kaliningrad en Russie.

Actuellement Wroclaw en Pologne.



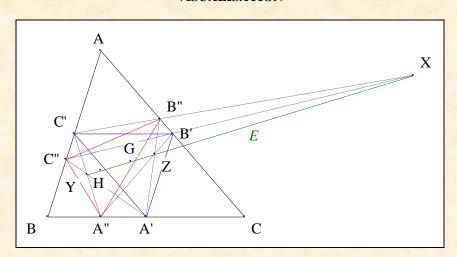
A'B'C' le triangle médian de ABC, A"B"C" le triangle orthique de ABC, E la droite d'Euler de ABC

et X, Y, Z les points d'intersection de (B'C") et (B"C'), de (C'A") et (C"A'),

de (A'B") et (A"B').

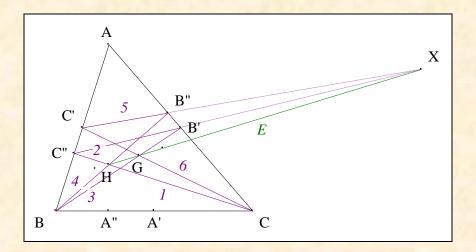
**Donné :** X, Y, Z sont sur E.

# VISUALISATION



• Notons G le point médian de ABC, et H l'orthocentre de ABC.

• Scolie: E = (GH).



D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 1),
 (HXG) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel CC"B'BB"C'C.

• Conclusion partielle : X est sur E.

Mutatis mutandis, nous montrerions que
 Y est sur E
 Z est sur E.

• Conclusion : X, Y, Z sont sur E.

**Commentaire :** A'B'C' est le triangle G-cévien de ABC et A"B"C", le triangle H-cévien de ABC.

Ce résultat se généralise au cas deux triangles P et Q-céviens de ABC par la même

procédure technique.

**Note historique :** cette généralisation a été proposée comme exercice par Georges Papelier<sup>7</sup> en 1927 et

reproposé en troisième position dans la liste de Darij Grinberg<sup>8</sup> de 2003.

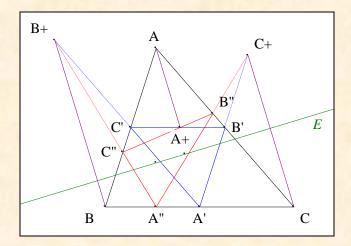
# 2. Trois parallèles perpendiculaires à E ou le deuxième résultat de Schroeter

**VISION** 

Figure:

Papelier G., Rapport anharmonique, Exercices de Géométrie Moderne, Paris (1927), réédition J. Gabay (1996), n° 78, p. 62.

<sup>8</sup> Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message Hyacinthos # 8743 du 28/11/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



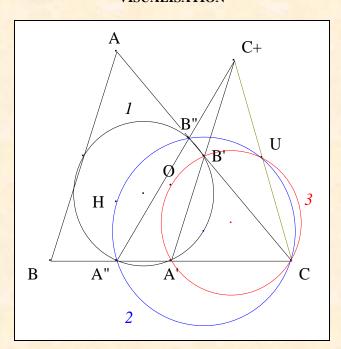
A'B'C' le triangle médian de ABC, A"B"C" le triangle orthique de ABC, E la droite d'Euler de ABC

et A+, B+, C+ les points d'intersection de (B'C') et (B"C"), de (C'A') et (C"A"),

de (A'B') et (A"B").

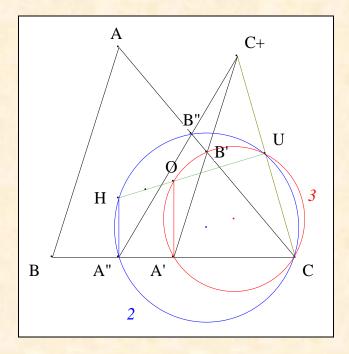
**Donné :** (AA+), (BB+) et (CC+) sont parallèles entre elles et perpendiculaires à E.

## VISUALISATION



- Notons G le point médian de ABC,
  - et O le centre du cercle circonscrit à ABC.
- Scolie: E = (OH).
- Notons 1 le cercle d'Euler de ABC; il passe par A', A", B' et B";
  - le cercle de diamètre [CH] ; il passe par A" et B" ;
  - 3 le cercle de diamètre [CO] ; il passe par A' et B' ;
  - et U le second point d'intersection de 2 et 3.

D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 2),
 (A'B'), (A"B") et CU) sont concourantes en C+;
 en conséquence,
 C, U et C+ sont alignés.



• Scolie: (A"H) // (A'O).

Les cercles 2 et 3, les points de base C et U, la monienne (A"CA'), les parallèles (A"H) et (A'O), conduisent au théorème 0' de Reim; en conséquence,
 H, U et O sont alignés.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", les triangles UHC et UOC sont rectangles en U ; en conséquence, (CUC+) ⊥ (HOU).
- **Conclusion partielle :** (CC+) et *E* sont perpendiculaires.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AA+) et *E* sont perpendiculaires (BB+) et *E* sont perpendiculaires.
- Conclusion: (AA+), (BB+) et (CC+) sont parallèles entre elles et perpendiculaires à E.

Scolies: (1) A+B+C+ est le triangle de Schroeter de ABC.

(2) Par définition, A+B+C+ et ABC sont perspectifs.

**Note historique :** ce résultat a été reproposé par Lev Emelyanov<sup>9</sup> en 2005.

Commentaire: A'B'C' est le triangle O-pédal de ABC et A"B"C", le triangle H-pédal de ABC. Lorsque P et P\* sont deux points isogonaux de ABC, le résultat précédent se généralise par la même procédure technique en considérant les triangles P et P\*-pédaux de ABC. Cette généralisation<sup>10</sup> a été proposée en 2005.

Emelyanov L., Round 4, O.M. de Russie (2005).

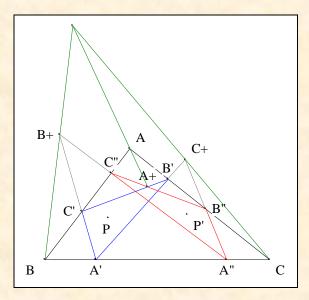
Australie M.O. Comittee (2005) IMO Training Problems.

Notons, qu'en généralisant le résultat de Schroeter au cas deux triangles P et Q-céviens de ABC, nous perdons la perpendicularité et le parallélisme. Ceux-ci sont remplacés par la "concourance". Cette généralisation qui a été proposée en quatrième position dans la liste de Darij Grinberg<sup>11</sup> de 2003, est maintenant présentée.

#### Généralisation

#### **VISION**

## Figure:



Traits: ABC un triangle,

P, P' deux points,

A'B'C' le triangle P-cévien de ABC, A"B"C" le triangle Q-cévien de ABC

et A+, B+, C+ les points d'intersection de (B'C') et (B"C"), de (C'A') et (C"A"),

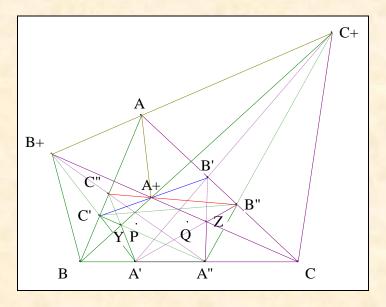
de (A'B') et (A"B").

**Donné :** (AA+), (BB+) et (CC+) sont concourantes.

#### VISUALISATION

11

Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message *Hyacinthos* # 8743 du 28/11/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

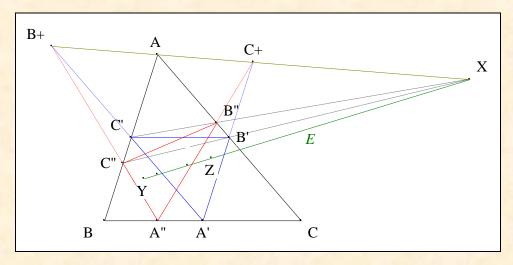


- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 3) appliqué
  - (1) au quadrilatère PC'BA', le pinceau (B; A", C", Y, B+) est harmonique
  - (2) au quadrilatère QA"CB", le pinceau (C; A', B', Z, C+) est harmonique.
- Conclusion: d'après "Un rayon en commun" (Cf. Annexe 4), (AA+), (BB+) et (CC+) sont concourantes i.e. ABC et A+B+C+ sont perspectifs.

# 3. Quatre points alignés ou le troisième résultat de Schroeter

#### **VISION**

# Figure:



Traits: ABC un triangle,

A'B'C' le triangle médian de ABC, A"B"C" le triangle orthique de ABC, E la droite d'Euler de ABC,

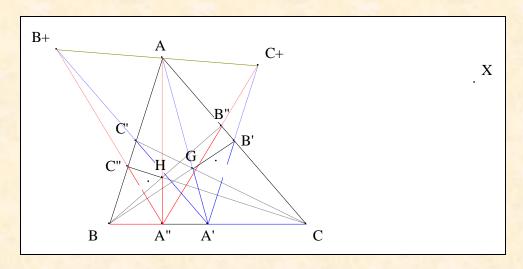
X, Y, Z les points d'intersection de (B'C") et (B"C'), de (C'A") et (C"A'),

de (A'B") et (A"B'),

et A+B+C+ le triangle de Schroeter de ABC.

**Donné :** A, B+, C+ et X sont alignés.

#### VISUALISATION



• Notons G le point médian de ABC,

et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

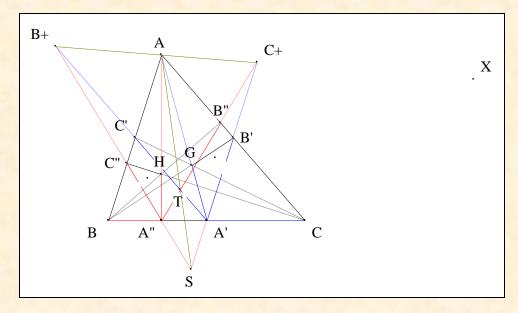
• D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 3) appliqué

(1) au quadrilatère HC"BA", le pinceau (A"; B, H, C", B") est harmonique.

(2) au quadrilatère GA'CB', le pinceau (A'; C, G, B', C') est harmonique; par permutation de B' et C', le pinceau (A'; C, G, C', B') est harmonique.

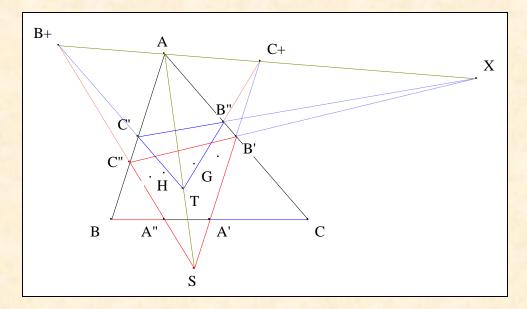
• Conclusion partielle : d'après "Un rayon en commun" (Cf. Annexe 4) appliqué au premier et dernier pinceaux,

A, B+ et C+ sont alignés.



- Notons S, T les points d'intersection de (A"C") et (A'B'), de (A"B") et (A'C').
- Les deux pinceaux harmoniques (A"; B, H, C", B") et (A'; C, G, B', C') ont le rayon (BC) en commun.

- Conclusion partielle : d'après "Un rayon en commun" (Cf. Annexe 4), A, S et T sont alignés.
- Scolie: (AST) est la A-symédiane<sup>12</sup> de ABC.



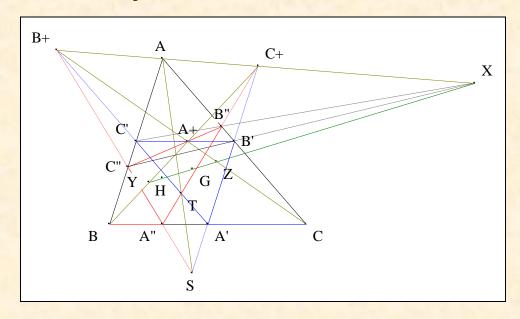
• D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 5) appliqué aux triangles SB'C" et TB"C' perspectifs de centre A,

C+, X et B+ sont alignés.

• Conclusion: d'après l'axiome d'incidence Ia,

A, B+, C+ et X sont alignés.

Scolie: deux autres alignements



• Conclusion: mutatis mutandis, nous montrerions que

B, Y, C+ et A+ sont alignés C, Z, A+ et B+ sont alignés.

Commentaire : A'B'C' est le triangle G-cévien de ABC et A"B"C", le triangle H-cévien de ABC. Ce résultat se généralise au cas deux triangles P et Q-céviens de ABC par la même

Ayme J.-L., An Another Unlikely Concurrence, G.G.G. volume (2007), pour une autre preuve.

procédure technique.

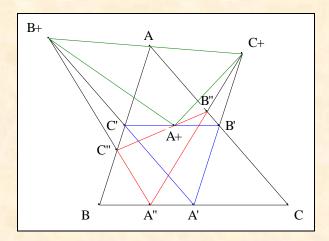
Note historique : cette généralisation a été proposé en cinquième position dans la liste de Darij

Grinberg<sup>13</sup> de 2003.

# 4. Les deux points de Schroeter<sup>14</sup> ou le cinquième résultat de Schroeter

## **VISION**

# Figure:



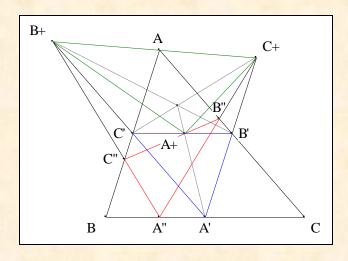
Traits: ABC un triangle,

et

A'B'C' le triangle médian de ABC, A"B"C" le triangle orthique de ABC A+B+C+ le triangle de Schroeter de ABC.

**Donné:** (A'A+), (B'B+) et (C'C+) sont concourantes.

#### **VISUALISATION**



Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message *Hyacinthos* # 8743 du 28/11/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

.

Schroeter (1865).

• D'après 2. Trois parallèles perpendiculaires à *E*, scolie 2, A+B+C+ est en perspective avec ABC.

• Nous avons : A+B+C+ est inscrit dans A'B'C', A'B'C' est inscrit dans ABC; A+B+C+ est en perspective avec ABC, A'B'C' est en perspective avec ABC.

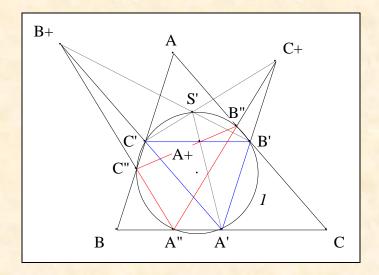
• D'après Döttl "The cevian nests theorem" <sup>15</sup>, A+B+C+ est en perspective avec A'B'C'.

• Conclusion: d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 5) appliqué à A+B+C+ et A'B'C', (A'A+), (B'B+) et (C'C+) sont concourantes.

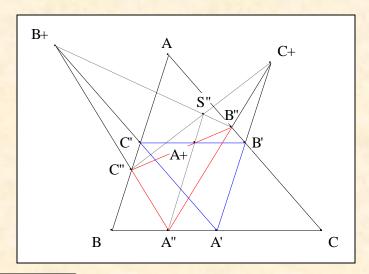
• Notons S' ce point de concours.

Scolies: (1) S'est "le premier point de Schroeter de ABC".

(2) Position de S' ou le sixième résultat de Schroeter

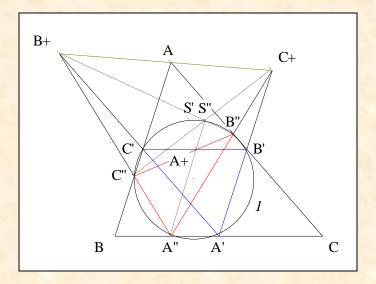


- Notons 1 le cercle d'Euler de ABC; il passe par A', B', C', A", B" et C".
- Conclusion: d'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 6), (B+AC+) étant la pascale de l'hexagone A"C"C'S'B'B"A", S' est sur 1.
  - (3) Le second point de Schroeter



Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. volume 2 (2008); http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

- Conclusion: mutatis mutandis, nous montrerions que (A"A+), (B"B+) et (C"C+) sont concourantes.
- Notons S" ce point de concours.
  - (4) S" est "le second point de Schroeter de ABC".
  - (5) Position de S" ou le sixième résultat de Schroeter



• Conclusion: mutatis mutandis, nous montrerions que

S" est sur 1.

**Commentaire :** A'B'C' est le triangle G-cévien de ABC et A"B"C", le triangle H-cévien de ABC.

Ces résultats concernant les points de Schroeter se généralisent au cas deux triangles P

et Q-céviens de ABC par la même procédure technique.

Note historique : cette généralisation a été proposé en première et deuxième position dans la liste de

Darij Grinberg<sup>16</sup> de 2003.

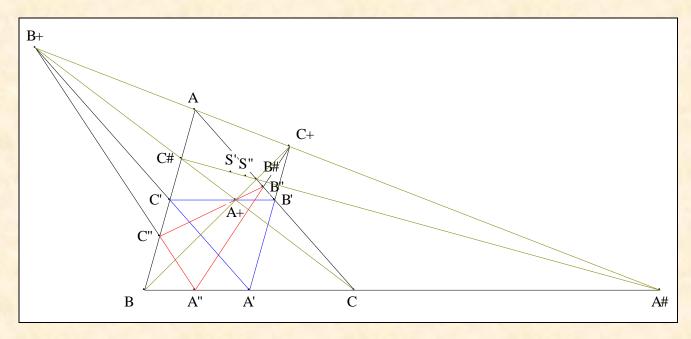
5. Trois points sur (S'S") ou le septième résultat de Schroeter

**VISION** 

**Figure** 

.

Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message *Hyacinthos* # 8743 du 28/11/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



A'B'C' le triangle médian de ABC, A"B"C" le triangle orthique de ABC, A+B+C+ le triangle de Schroeter de ABC,

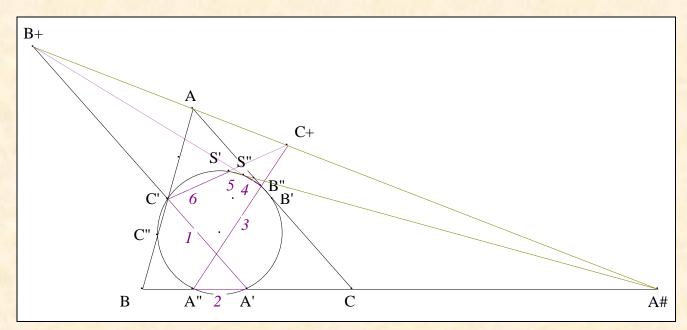
S', S" les premier et second point de Schroeter de ABC

et A#, B#, C# les points d'intersection de (BC) et (B+C+), de (CA) et (C+A+),

de (AB) et (A+B+)

**Donné :** A#, B#, C# sont sur (S'S").

#### **VISUALISATION**



- Notons 1 le cercle d'Euler de ABC; il passe par A', B', C', A", B", C", S' et S".
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 6), (B+C+) est la pascale de l'hexagone C'A'A"B"S"S'C'.

• Conclusion partielle : en conséquence,

A# est sur (S'S").

Mutatis mutandis, nous montrerions que
 B# est sur (S'S")
 C# est sur (S'S").

• Conclusion: A#, B#, C# sont sur (S'S").

**Commentaire :** A'B'C' est le triangle G-cévien de ABC et A"B"C", le triangle H-cévien de ABC.

Ce résultat se généralise au cas deux triangles P et Q-céviens de ABC par la même

procédure technique.

**Note historique :** cette généralisation a été proposé en sixième position dans la liste de Darij Grinberg<sup>17</sup>

de 2003.

# III. TROIS RÉSULTATS DE L'AUTEUR

# 1. Le triangle tangentiel du triangle médian

#### **VISION**

#### Figure:

B+ A A\* C+ C+ B' B' B' C C

Traits: ABC un triangle,

A'B'C' le triangle médian de ABC,

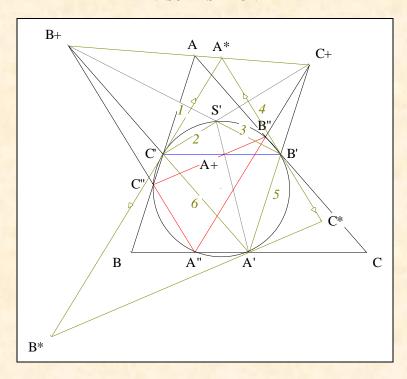
Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message *Hyacinthos* # 8743 du 28/11/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

A"B"C" le triangle orthique de ABC,
A+B+C+ le triangle de Schroeter de ABC,
S' le premier point de Schroeter de ABC,
le cercle d'Euler de ABC

et A\*B\*C\* le triangle tangentiel de A'B'C'.

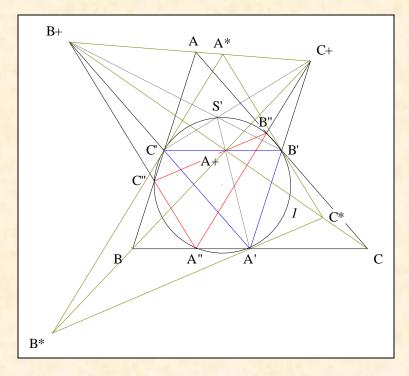
**Donné :** A\* est sur (B+AC+).

#### VISUALISATION



- Notons Tb', Tc' les tangentes à 1 resp. en B', C'.
- Scolies: (1) B+, A et C+ sont alignés
  - (2) Tb' = (C\*A\*)
  - (3) Tc' = (A\*B\*).
- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe 7), (A\*C+B+) est la pascale de l'hexagone dégénéré *Tc'* S'B' *Tb'* A'C'.
- Conclusion : A\* est sur (B+C+).

Scolie: deux autres alignements



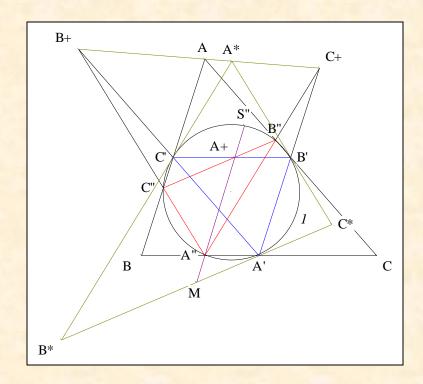
• Conclusion: mutatis mutandis, nous montrerions que

B\* est sur (C+BA+) C\* est sur (A+CB+).

# 2. Milieu d'un côté de A\*B\*C\*

# VISION

# Figure:



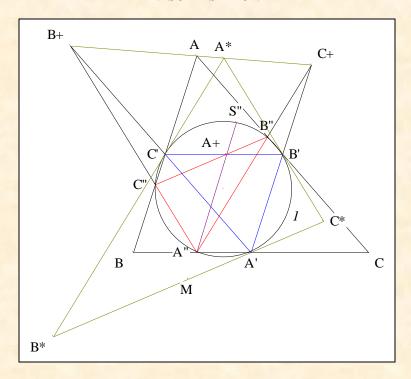
A'B'C' le triangle médian de ABC, A"B"C" le triangle orthique de ABC, A+B+C+ le triangle de Schroeter de ABC, S" le second point de Schroeter de ABC,

1 le cercle d'Euler de ABC, A\*B\*C\* le triangle tangentiel de A'B'C'

et M le milieu de [B\*C\*].

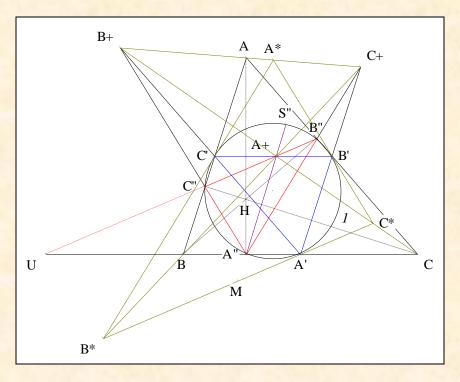
**Donné :** M est sur (S"A+A").

# VISUALISATION

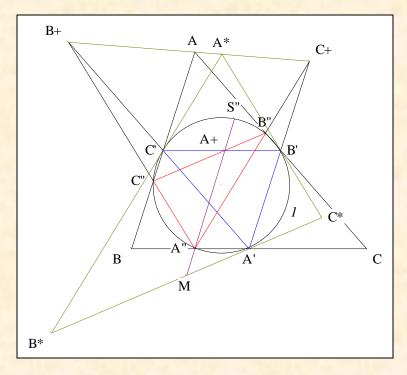


• D'après II. 4. Les deux points de Schroeter, scolies 3-4-5,

S", A+ et A" sont alignés.

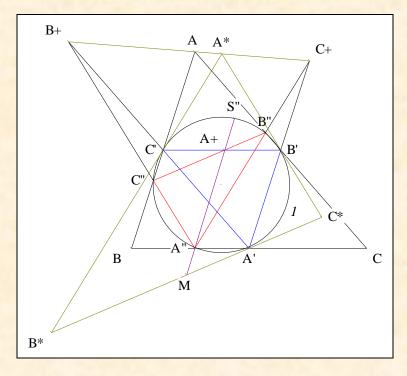


- Notons H l'orthocentre de ABC
   et U le point d'intersection de (B"C") et (BC).
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 3) la quaterne (B, C, A", U) est harmonique.
- Scolies: (1) B\* est sur (C+BA+)
   (2) C\* est sur (A+CB+).
- Par définition, le faisceau (A+; B, C, A", U) i.e. (A+; B\*, C\*, A", U) est harmonique.
- Notons  $F_{a+}$  ce faisceau.
- D'après "Des tangents parallèles entre elles" (Cf. Annexe 8), (B\*C\*) // (B"A+C"U).



- D'après Pappus "Parallèle à un rayon d'un faisceau harmonique" appliqué à  $F_{a+}$ , le rayon (A+A") coupe [B\*C\*] en son milieu.
- Conclusion: M est sur (S"A+A").

# Scolies: (1) nature de S" relativement à A\*B\*C\*



• Conclusion : d'après "Un alignement avec le point de Feuerbach" (Cf. Annexe 9), S" est le point de Feuerbach de A\*B\*C\*.

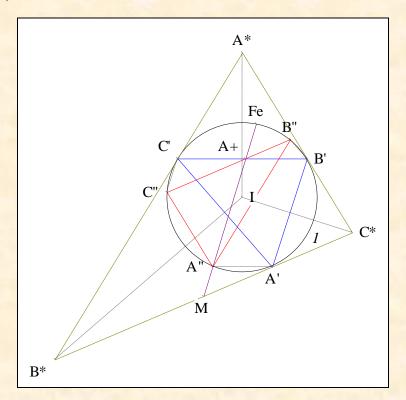
Énoncé traditionnel: le second point de Schroeter d'un triangle

est

le point de Feuerbach du triangle tangentiel du triangle médian de ce triangle.

- (2) Nature de A+ relativement à A\*B\*C\*
- I est le centre du cercle inscrit (1) dans A\*B\*C\*.
- A'B'C' est le triangle de contact de A\*B\*C\*.
- A", B", C" étant resp. les symétriques de A', B', C' resp. à (A\*I), (B\*I), C\*I), A"B"C" est le triangle réfléchi de A'B'C' relativement à A\*B\*C\*.
- Conclusion : par définition, A+ est le A-point de Pelletier relativement à A\*B\*C\*.

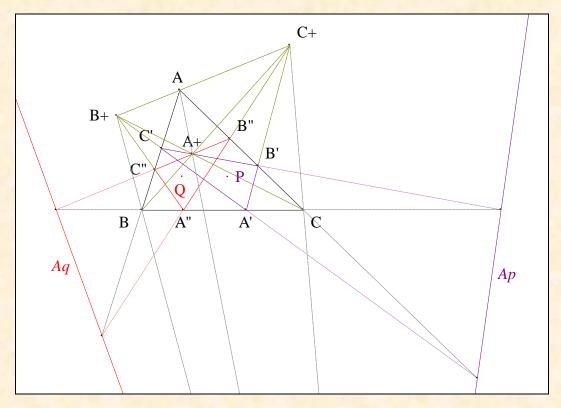
#### (3) Le résultat à retenir



## 3. Deux arguésiennes

**VISION** 

Figure:



P, Q deux points,

A'B'C', A"B"C" les triangles resp. P, Q-céviens de ABC, A+B+C+ le triangle latéral de A'B'C' et A"B"C",

et Ap, Aq les arguésiennes resp. de A'B'C' et ABC, de A''B''C'' et ABC,

**Donné:** (AA+), (BB+), (CC+), Ap et Aq sont concourantes<sup>18</sup>.

#### **VISUALISATION**

• D'après "Les résultats 2 et 3 de Schroeter", (1) A, B+, C+ sont alignés

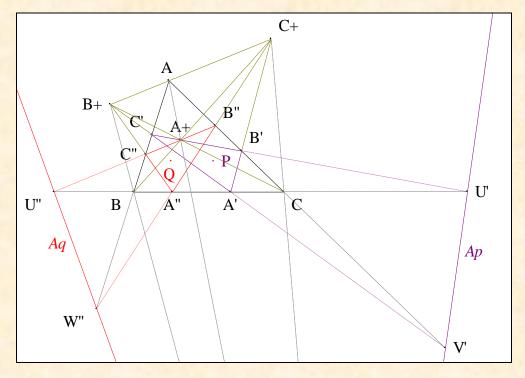
(2) B, C+, A+ sont alignés

(3) C, A+, B+ sont alignés

(4) (AA+), (BB+) et (CC+) sont concourantes.

• Notons S ce point de concours

1.0



- Notons U', V', W' les points d'intersection resp. de (B'C') et (BC), de (C'A') et (CA), de (A'B') et (AB),
   et U", V", W" les points d'intersection resp. de (B"C") et (BC), de (C"A") et (CA), de (A"B") et (AB).
- D'après Pappus" la proposition 139", (1) (SV'W') est la pappusienne de l'hexagone BB+A'C+CAB
  - (2) (SV"W") est la pappusienne de l'hexagone BB+A"C+CAB.
- Conclusion: (AA+), (BB+), (CC+), Ap et Aq sont concourantes en S.

Scolie : A+B+C+ est le triangle S-anticévien de ABC.

**Énoncé traditionnel :** le point d'intersection <sup>19</sup> des axes de perspective de deux triangles céviens d'un triangle, est le centre de perspective de ce triangle et du triangle letéral déterminé par ces deux

est le centre de perspective de ce triangle et du triangle latéral déterminé par ces deux

triangles céviens.

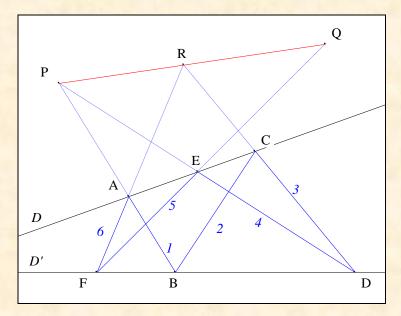
#### IV. ANNEXE

## 1. "La proposition 139" de Pappus<sup>20</sup>

19

Nous sommes en position générale.

Pappus, Collections, Livre VII.



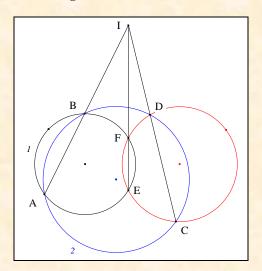
deux droites, Traits: D, D'

ABCDEFA un hexagone de Pappus

et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné: E est sur la droite (AC) si, et seulement si, les points P, Q et R sont alignés.

# 2. "Le théorème des trois cordes" de Monge<sup>21</sup>



Traits: 1, 2 deux cercles sécants,

A, B les points d'intersection de 1 et 2,

C, D deux points de 2, E, F deux points de 1

et le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné: les points C, D, E et F sont cocycliques

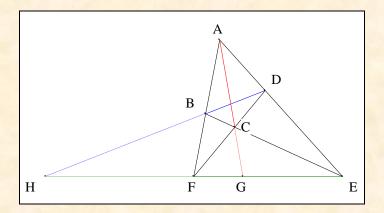
si, et seulement si,

les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

# 3. Diagonales d'un quadrilatère<sup>22</sup>

21 Monge, d'après Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, I (1822) 40.

22 Pappus, Collections, Livre 7, proposition 131.

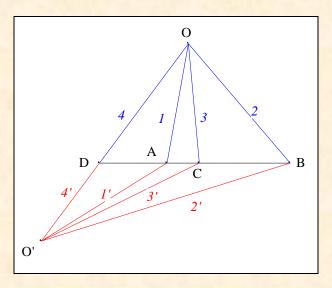


ABCD un quadrilatère, Traits:

les points d'intersection de (AD) et (BC), de (AB) et (CD), E, F G, H le point d'intersection de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné: la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

## 4. Un rayon en commun<sup>23</sup>



Traits: O, O' deux points,

> 1, 2, 3, 4 quatre droites passant par O telles que (O; 1, 2, 3, 4) soit harmonique, 1', 2', 3', 4' quatre droites passant par O telles que (O; 1', 2', 3', 4') soit harmonique,

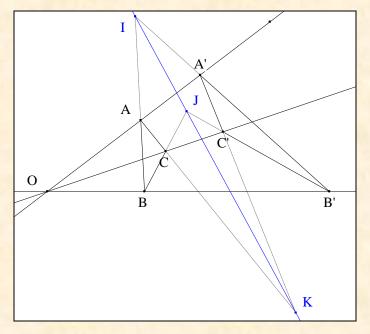
les points d'intersection de 1 et 1', de 2 et 2', de 3 et 3', de 4 et 4'. A, B, C, D et

A, B, C et D sont alignés. Donné: si, 4 = 4'alors,

## 5. "Le théorème des deux triangles" de Desargues<sup>24</sup>

23 Chasles M., Géométrie supérieure (1852). 24

Bosse A. (1602-1676), Perspective et de la Coupe des pierres.



A'B'C' un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,

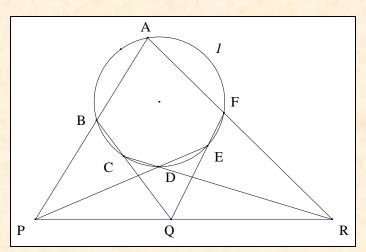
O le point de concours de (AA') et (BB'),

I le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'), J le point d'intersection des droites (BC) et (B'C')

et K le point d'intersection des droites (CA) et (C'A').

**Donné:** (CC') passe par O si, et seulement si, les points I, J et K sont alignés.

# 6. Hexagramma mysticum<sup>25</sup>



Traits: 1 un cercle,

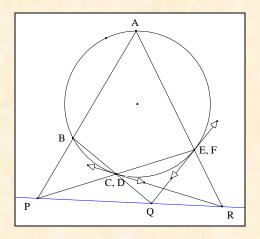
ABCDEF un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur 1,

et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

**Donné :** F est sur 1 si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.

## 7. Tetragramma mysticum

25



Traits: 0 un cercle,

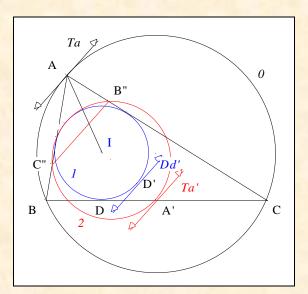
**ABCEA** un quadrilatère tels que les points A, C, E soient sur 0,

Tc, Te les tangentes à 0 resp. en C, E

les points d'intersection resp. de (AB) et (CE), (BC) et Te, Tc et (EA). P, Q, R et

Donné: P, Q et R sont alignés. B est sur 0 si, et seulement si,

## 8. Des tangentes parallèles entre elles



Traits: ABC un triangle,

le cercle circonscrit à ABC, 0

la tangente à 0 en A, Ta

1 le cercle inscrit de ABC,

le centre de 1,

D le point de contact de 1 avec (BC),

D' le symétrique de D par rapport à (AI),

Td'la tangente à 1 en D',

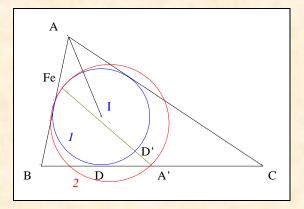
le cercle d'Euler de ABC, 2 A' le milieu de [BC],

la tangente à 1 en A' Ta'

B", C" les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC.

Ta', (B"C"), Td' et Ta sont parallèles. Donné:

## 9. Un alignement avec le point de Feuerbach



Traits: ABC un triangle,

A' le milieu de [BC],

1 le cercle inscrit de ABC,

I le centre de 1,

D le point de contact de 1 avec (BC),

D' le symétrique de D par rapport à (AI),

2 le cercle d'Euler de ABC

et Fe le point de Feuerbach de ABC.

**Donné :** Fe, D' et A' sont alignés.

## V. ARCHIVE

 Soient a, b, c les milieux des côtés d'un triangle ABC;

 $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  les pieds des hauteurs;

 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  les points d'intersection  $(bc_1, cb_1)$ ,  $(ca_1, ac_1)$ ,  $(ab_1, ba_1)$ ,  $(bc, b_1c_1)$ ,  $(ca, c_1a_1)$ ,  $(ab, a_1b_1)$ ;

M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC;

H le point d'intersection des hauteurs;

O le centre du cercle des neuf points.

#### (443)

Cette notation admise, on aura les propriétés suivantes:

- 1º Les points α, 6, γ sont sur la droite HM.
- 2° Les droites  $A\alpha_i$ ,  $B\delta_i$ ,  $C\gamma_i$  sont parallèles entre elles, et perpendiculaires à la droite HM.
- 3° Les quatre points  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , A sont en ligne droite. Il en est de même des quatre points  $\beta$ ,  $\gamma_1$ ,  $\alpha_1$ , B, et des quatre points  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , C.
- 4° α<sub>1</sub>, β<sub>1</sub>, γ<sub>1</sub> sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle des neuf points (O).
- 5° Les droites αα<sub>1</sub>, bβ<sub>1</sub>, cγ<sub>1</sub> passent par un même point P, et pareillement les droites α<sub>1</sub>α<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>β<sub>1</sub>, c<sub>1</sub>γ<sub>1</sub> passent par un même point P<sub>1</sub>.
- 6º Les deux points P, P, appartiennent à la circonférence des neuf points (O).
- 7° Les points d'intersection (AB, α<sub>1</sub>6<sub>1</sub>), (BC, 6<sub>1</sub>γ<sub>1</sub>), (CA, γ, α<sub>1</sub>) sont sur une même droite qui passe par P, P<sub>1</sub>.

La démonstration de ces différentes propriétés est proposée par M. Schrœter, professeur à l'Université de Breslau.

2