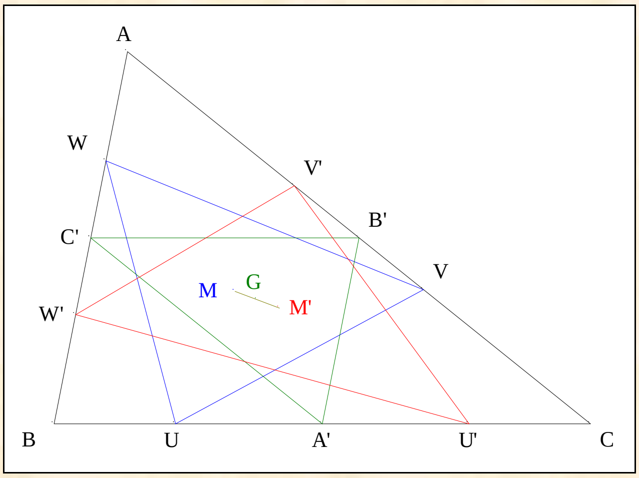
DU THÉORÈME D'ERNESTO CESÀRO

À

UNE DROITE PARALLÈLE À L'AXE DE BROCARD

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente une preuve synthétique du théorème d'Ernesto Cesàro ainsi qu'un beau résultat de Luis Gonzalez concernant une droite parallèle à l'axe de Brocard. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

---

[1] St.-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 16/10/2010

A. DE THALES DE MILET

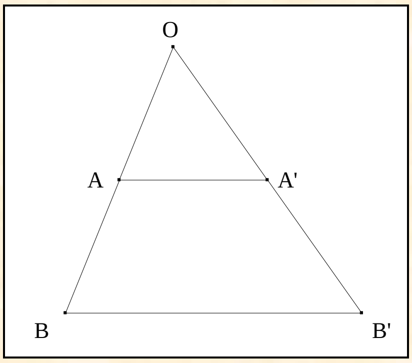
AU

JÉSUITE PIERRE VARIGNON

1. La droite des milieux d'un triangle ou le petit théorème de Thalès

VISION

Figure :



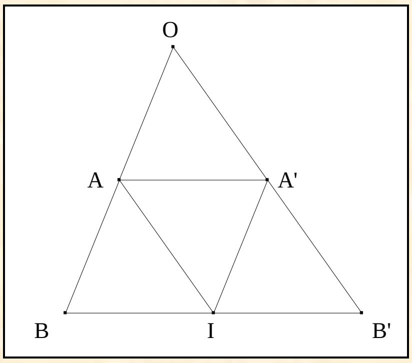
Traits : OBB' un triangle,
A le milieu du côté [OB],
Da une droite passant par A
et A' le point d'intersection de *Da* avec [OB'].

Donné : A' est le milieu de [OB'] *si, et seulement si,* (AA') est parallèle à (BB').

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- Raisonnons par l'absurde en affirmant que *Da* = (AA') n'est pas parallèle à (BB').
- Notons *D'a* la droite passant par A et parallèle à (BB').
- D'après l'axiome de passage IIIb, *D'a* passe par le milieu A' de [OB'].
- D'après l'axiome d'incidence Ia, *D'a* est confondue avec (AA') ;
  en conséquence, *Da* est parallèle à (BB'), ce qui contredit notre affirmation.
- **Conclusion :** (AA') est parallèle à (BB').

Scolie :



- Notons I le milieu de [BB'].

- Les quadrilatères BIA'A et A'AIB' sont des parallélogrammes ;
  en conséquences, **(1)** AA' = BI et AA' = IB.
  (2) 2.AA' = BB'.

Énoncé traditionnel : la droite qui joint les milieux de deux d'un triangle,
est parallèle au troisième côté et "égale à sa moitié".

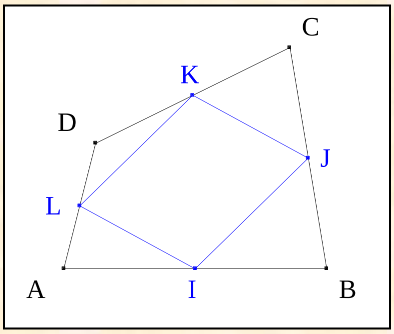
VISUALISATION SUFFISANTE

- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIb, *Da* passe par le milieu A' de [OB'].

2. Le parallélogramme de Varignon

VISION

Figure :

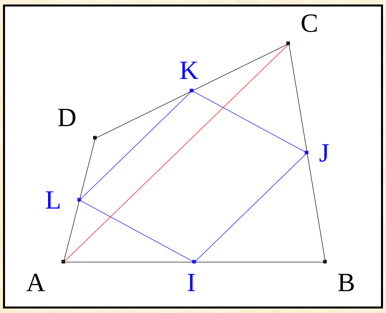


Traits : ABCD un quadrilatère,
et I, J, K, L les milieux resp. des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

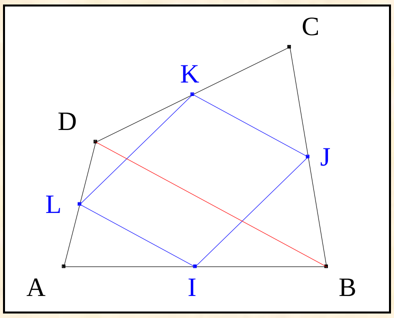
Donné : le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.[2]

VISUALISATION

[2] Varignon P., Théorème 29, Corollaire 4, *Éléments de Mathématiques*, Paris, Brunet (1731) 62 ; http://books.google.fr/.



- D'après **A. 1.** La droite des milieux, (KL) // (AC) et (AC) // (IJ) ;
  par transitivité de la relation //, (KL) // (IJ).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (JK) // (IL).

- **Conclusion :** le quadrilatère IJKL ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux,
  est un parallélogramme.

Scolies : **(1)** le résultat reste inchangé que le quadrilatère ABCD soit convexe, rentrant ou croisé.

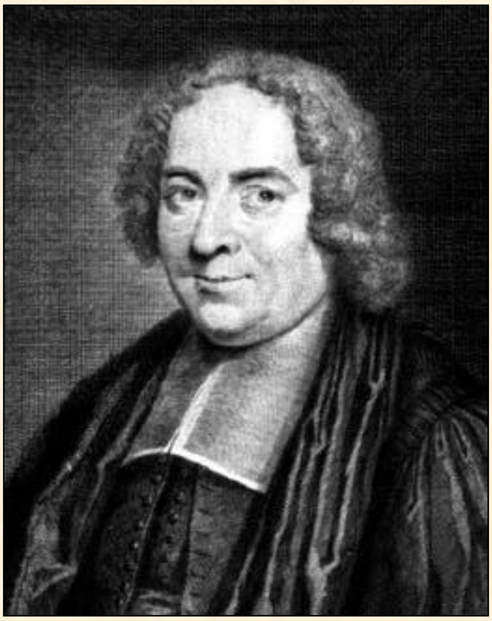
(2) IJKL est "le parallélogramme de Varignon de ABCD".

Note historique : ce résultat est apparu en 1731 dans une publication posthume intitulée *Éléments de mathématiques*.
M. Blanchard[3] a écrit en 1990 un article à ce sujet dans la revue belge *Mathématiques et Pédagogie*.

Énoncé traditionnel : le quadrilatère obtenu en joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme.

3. Une courte biographie de Varignon [4]

[3] Blanchard M., Varignon aurait 336 ans, *Mathématiques et Pédagogie* 78 (1990) 39-48.
[4] The MacTutor history of Mathematics archive ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html.

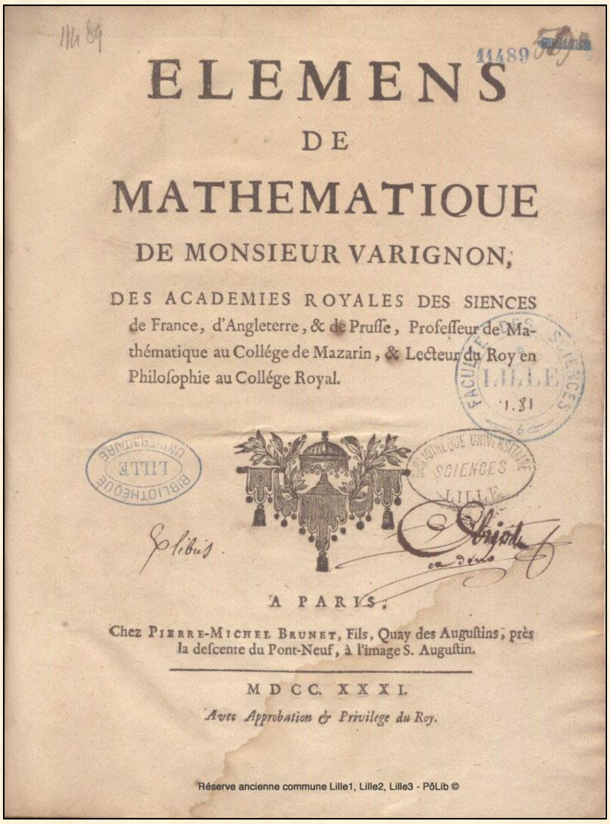


Pierre (de?) Varignon est né dans une famille catholique de Caen (France) en 1654.
Élève du Collège des Jésuites de Caen, puis étudiant à l'Université de cette même ville en 1682, Varignon se destine à la prêtrise. Il change brusquement d'orientation lorsqu'il croise sur son chemin, les *Éléments* d'Euclide et la *Géométrie* de Descartes. Ordonné prêtre en mars 1683, il arrive à Paris en 1686 en compagnie de Charles Castel i.e. l'abbé de Saint-Pierre qui lui attribue une pension.
Passionné de physique, il écrit en 1687, *Projet d'une nouvelle mécanique*, puis la *Nouvelle mécanique ou statique* dans lesquels se trouve le célèbre théorème des moments.
En 1688, il entre à l'Académie royale des Sciences et devient le premier professeur de mathématiques du collège Mazarin i.e. des Quatre-Nations, à Paris et, en 1704, enseigne parallèlement au Collège Royal.
Il a fallu attendre 1731 pour que, de façon posthume, soit publié ses *Éléments de mathématiques* dans lesquels est exposé ce parallélogramme qui aujourd'hui porte son nom.
Ami de Jean Bernoulli, il est aussi connu pour avoir repris et popularisé les idées de Gottfried Wilhelm Leibniz sur l'analyse. Ces mêmes idées seront reprises par le marquis de L'Hospital[5] dans son *Analyse des infiniment petits*, face à la farouche opposition de Michel Rolle[6] et au belliqueux Isaac Newton.
Il décède à Paris, le 23 décembre 1722.

4. Archive

[5] Guillaume de L'Hospital, marquis de Saint-Mesme et comte d'Autremont (1661-1704). Il a été l'élève de Johann Bernoulli et est connu pour s'être attribué un cours de son maître.

[6] Mathématicien français, né à Ambert en 1652, mort à Paris en 1719.



ELEMENS
DE
MATHEMATIQUE
DE MONSIEUR VARIGNON,
DES ACADEMIES ROYALES DES SIENCES de France, d'Angleterre, & de Pruſſe, Profeſſeur de Mathématique au Collége de Mazarin, & Lecteur du Roy en Philoſophie au Collége Royal.

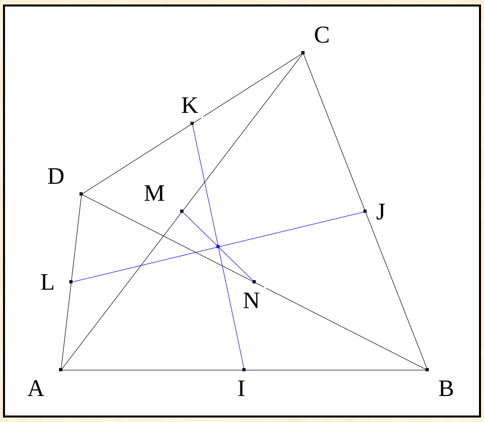
A PARIS,
Chez Pierre-Michel Brunet, Fils, Quay des Auguſtins, près la deſcente du Pont-Neuf, à l'image S. Auguſtin.

MDCC. XXXI.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

B. PAR UN ABONNÉ, JOSEPH DIAZ GERGONNE

VISION

Figure :

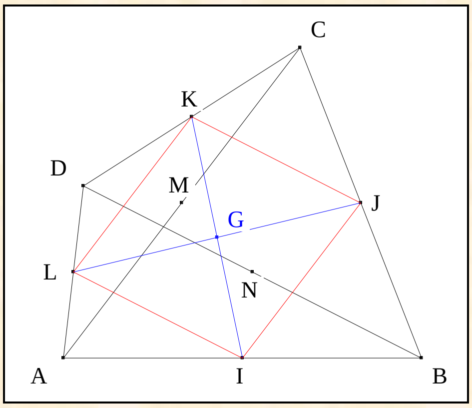


Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
et I, J, K, L, M, N les milieux des côtés [AB],[BC],[CD],[DA],[AC], [BD].

Donné : les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes. [7]

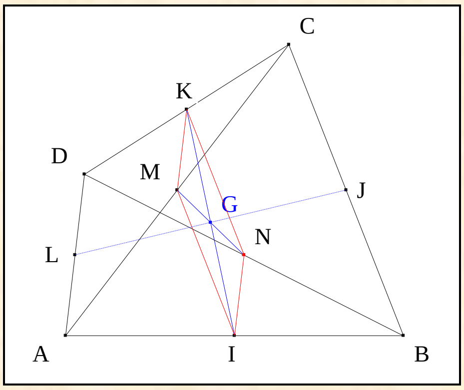
[7] Gergonne J., Questions proposées, Théorème de Géométrie, *Annales de Gergonne* 1 (1810-1811) 232 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA.

VISUALISATION



- D'après **A. 2.** Le parallélogramme de Varignon, le quadrilatère IJKL est un parallélogramme; en conséquence, ses diagonales [IK] et [JL] se coupent en leur milieu.

- Notons G ce point milieu.



- D'après **A. 2.** Le parallélogramme de Varignon, le quadrilatère INKM est un parallélogramme ; en conséquence, ses diagonales [IK] et [MN] se coupent en leur milieu G.

- **Conclusion :** les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G.

Énoncé traditionnel : dans un quadrilatère quelconque, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se rencontrent au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

Scolies : **(1)** en géométrie, G est le point médian de ABCD ;
en physique, G est le centre de gravité de la surface ABCD.

(2) D'après "La droite de Gauss-Newton"[8], G est sur la gaussienne (MN) de ABCD.

Note historique : ce théorème proposé par Joseph Diaz Gergonne sous le couvert d'un abonné, a été résolu[9] dans la même *Annales* par Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St Brieuc, Simon L'huilier, professeur à Genève, Vecten, professeur de mathématiques spéciales à Nîmes, Pierre Tédenat, recteur de l'Académie de Nîmes,

---

8 Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

9 *Annales de Gergonne* 1 (1810-1811) 310-317 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

Janot de Stainville, auteur d'un *Recueil de Problèmes*, par Legrand, professeur de mathématiques à St Brieux, Fauquier, élève du lycée de Nîmes etc.. etc… comme cela est mentionné.

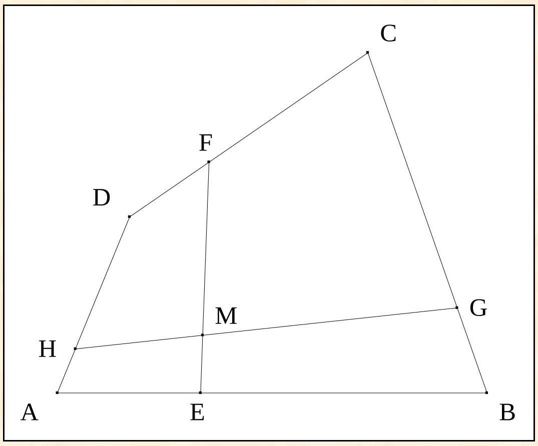
C. EUGÈNE CATALAN

OU

DES RAPPORTS DANS UN QUADRILATÈRE

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère,

E, F deux points des côtés [AB], [CD] tels que $\frac{EA}{EB} = \frac{FD}{FC}$,

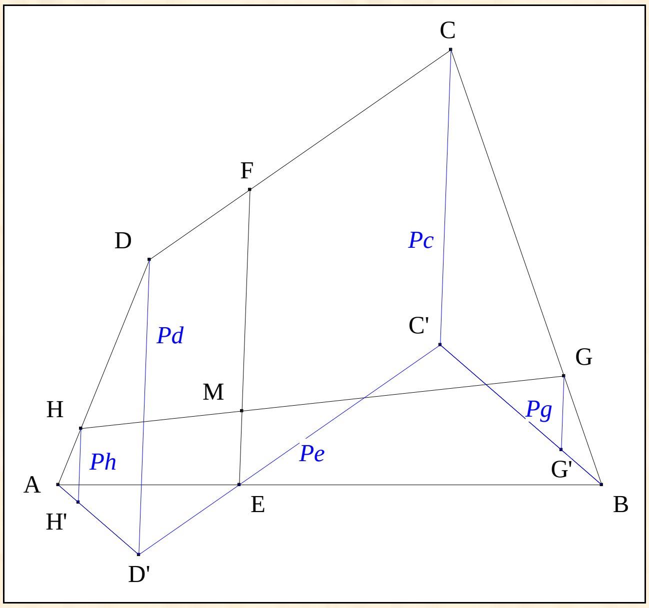
G, H deux points des côtés [BC], [DA] tels que $\frac{GB}{GC} = \frac{HA}{HD}$

et M le points d'intersection de [EF] et [GH].

Donné : $\frac{MH}{MG} = \frac{EA}{EB}$.[10]

VISUALISATION

[10] Catalan E., Théorème LVI, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris, (6e édition 1879) 124-125.



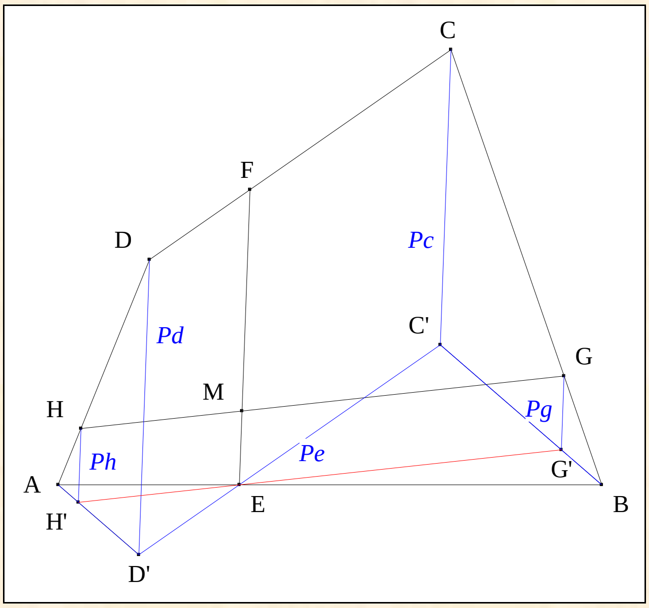
- Notons *Pe* la parallèle à la droite (CD) passant par E,
  Pd, *Ph*, *Pc*, *Pg* les parallèles à la droite (EF) passant resp. par D, H, C, G,
  D', C' les points d'intersection resp. de *Pd*, *Pc* avec *Pe*
  et H', G' les points d'intersection resp. de (AD') et *Ph*, de (BC') et *Pg*.

- Par hypothèse, $\frac{EA}{EB} = \frac{FD}{FC}$;

  d'après "Le théorème de Thalès", $\frac{FD}{FC} = \frac{ED'}{EC'}$;

  par transitivité de la relation =, $\frac{EA}{EB} = \frac{ED'}{EC'}$;

  d'après "Le théorème de Thalès", (AD') // (BC').



- Par hypothèse, $\frac{GB}{GC} = \frac{HA}{HD}$;

  d'après "Le théorème de Thalès", $\frac{GB}{GC} = \frac{G'B}{G'C}$ et $\frac{HA}{HD} = \frac{H'A}{H'D}$;

par substitution, $\frac{G'B}{G'C} = \frac{H'A}{H'D}$;

en conséquence, les points G', E et H' sont alignés.

- D'après "Le théorème de Thalès", $\frac{MH}{MG} = \frac{EH'}{EG'}$ et $\frac{EH'}{EG'} = \frac{EA}{EB}$.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, $\frac{MH}{MG} = \frac{EA}{EB}$.

Scolie : mutatis mutandis, nous montrerions que $\frac{ME}{MF} = \frac{GB}{GC}$.

Énoncé traditionnel : *si*, une première droite (EF) partage proportionnellement deux côtés opposés (AB) et (CD) d'un quadrilatère,
et qu'une seconde droite (GH) partage proportionnellement les deux autres côtés opposés,
alors, chacune de ses droites est divisée, par l'autre, dans le même rapport que les côtés qui déterminent celles-ci.

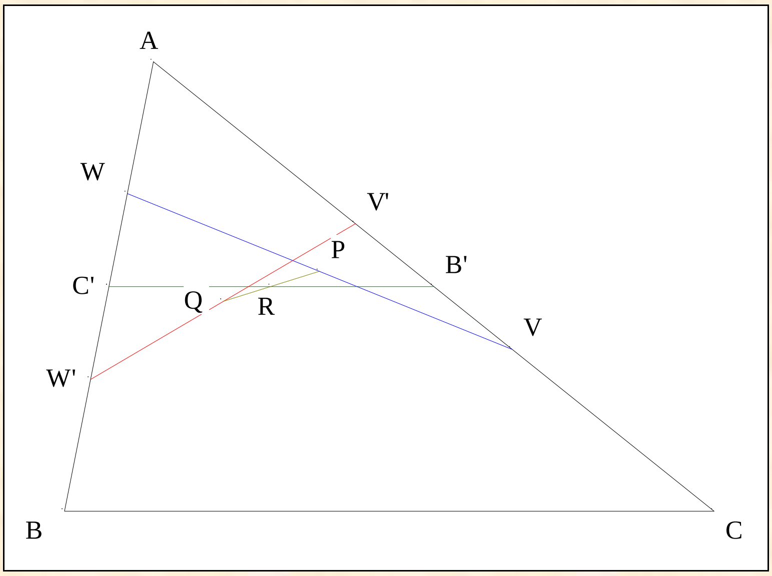
Commentaire : une généralisation recourrant aux mesures algébriques peut être envisagée.

D. ERNESTO CESÀRO

1. Un lemme

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
V, V' deux points isotomiques de (CA),
B' le milieu de [VV'],
W, W' deux points isotomiques de (AB),
C' le milieu de [VV'],
et P, Q, R les milieux resp. de [VW], [V'W'], [B'C']

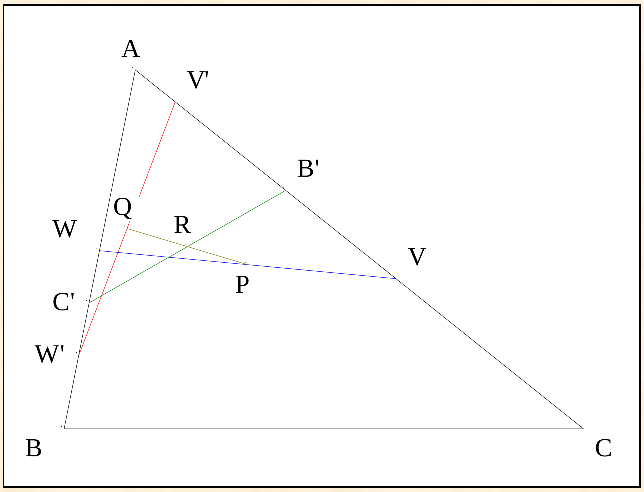
Donné : P, Q et R sont alignés.

VISUALISATION

- Considérons le quadrilatère VV'WW'.
- **Conclusion :** d'après **C.** Eugène Catalan, **(1)** P, Q et R sont alignés
(2) R est le milieu de [PQ].

Scolie : une généralisation

Figure :



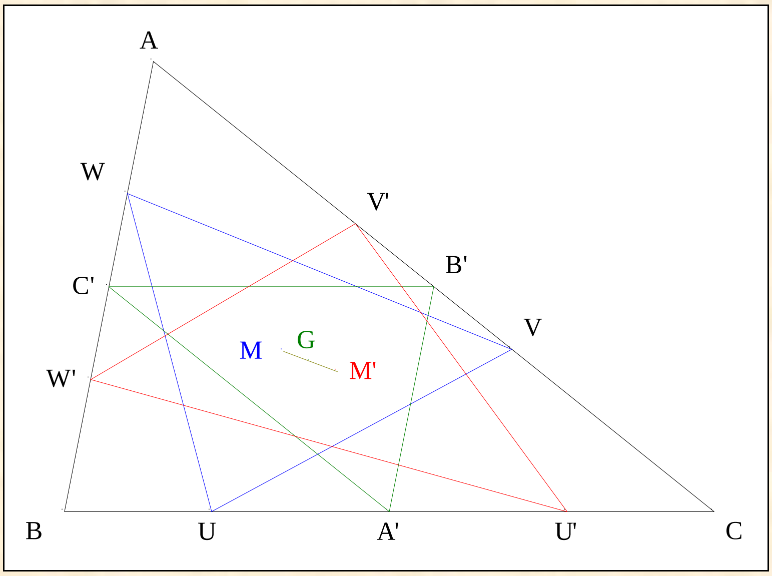
Traits : ABC un triangle,
V, V' deux point de (CA),
B' le milieu de [VV'],
W, W' deux point de (AB),
C' le milieu de [VV'],
et P, Q, R les milieux resp. de [VW], [V'W'], [B'C']

Commentaire : mutatis mutandis, nous montrerions que P, Q et R sont alignés
et que R est le milieu de [PQ].

2. Le théorème de Cesàro.

VISION

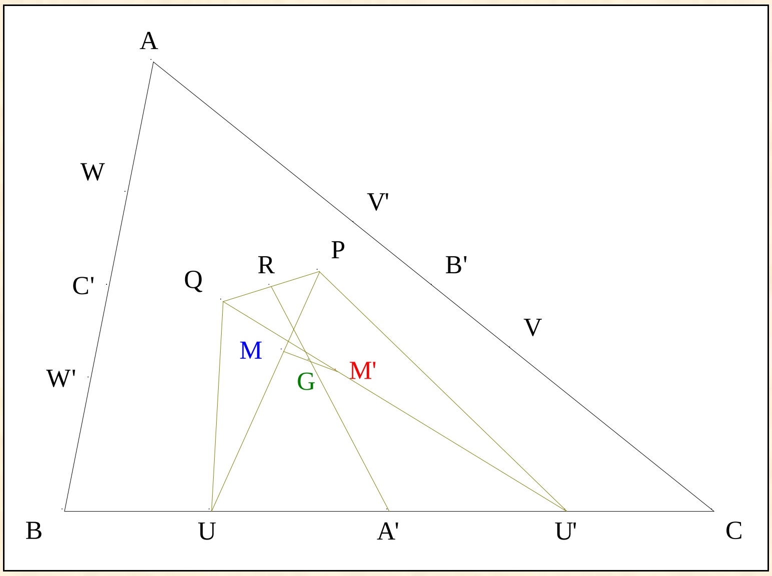
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	U, U'	deux point de (BC),
	A'	le milieu de [UU'],
	V, V'	deux point de (CA),
	B'	le milieu de [VV'],
	W, W'	deux point de (AB),
	C'	le milieu de [VV'],
et	M, M', G	les points médians des triangles resp. UVW, U'V'W', A'B'C'.

Donné : M, M et G sont alignés.[11]

VISUALISATION



- Notons P, Q, R les milieux resp. de [VW], [V'W'], [B'C'].
- D'après **D. 1.** Un lemme, P, Q et R sont alignés.
- **Scolies :** **(1)** M est le premier tiers-point de [UP] à partir de P

---

[11] Cesàro E.. L'auteur a égaré la référence.

(2) M' est le premier tiers-point de [U'Q] à partir de Q
(3) G est le premier tiers-point de [A'R] à partir de R
(4) A' et R' sont les milieux resp. de [UU'], [PQ].

- Notons G' le point d'intersection de (MM') et (A'R).

- D'après **C.** Eugène Catalan ou rapports dans un quadrilatère
  appliqué au quadrilatère UU'PQ

(1) G' est le milieu de [MM']

(2) G est le premier tiers-point de [A'R] à partir de R ;

en conséquence, G' et G sont confondus.

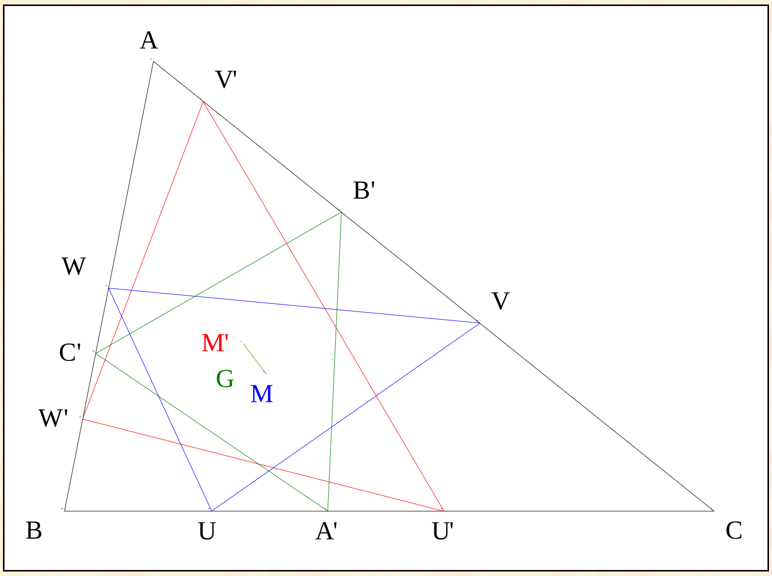
- **Conclusion :** M, M et G sont alignés.

Énoncé traditionnel : les points médians des triangles isotomiques inscrits dans un triangle sont symétriques par rapport au point médian de ce triangle.

Note historique : ce résultat a été présenté sans référence par Mario Dalcin[12] dans la revue électronique *Forum Geometricorum*. La preuve est de nature barycentrique.

Scolie : une généralisation signalée par Luis Gonzalez [13]

Figure :



Traits :

ABC un triangle,
U, U' deux point de (BC),
A' le milieu de [UU'],
V, V' deux point de (CA),
B' le milieu de [VV'],

[12] Dalcin M., Isotomic Inscribed Triangles and Their Residuals, *Forum Geometricorum*, vol. 3 (2003) Proposition 2 p. 126 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200314.pdf.

[13] Gonzalez L., 4 centroids on a parallel line to the Brocard axis, # 10 Lemma 2, *Art of Problem Solving* du 06/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=316488.

	W, W'	deux point de (AB),
	C'	le milieu de [VV'],
et	M, M', G	les points médians des triangles UVW, U'V'W', A'B'C'.

Commentaire : mutatis mutandis, nous montrerions que M, M' et G sont alignés
et que G est le milieu de [MM'].

3. Une courte biographie d'Ernesto Cesàro

Ernesto Césaro est né à Naples (Italie) le 12 mars 1859.
Élève du lycée de Naples en 1872 où il ne restera qu'une année, puis au séminaire de Nola en 1873 où il ne restera que deux années avant de retourner au lycée de Naples, il rejoint à l'âge quatorze ans, l'École des Mines de Liège où son frère Guiseppe est lecteur depuis 1867. Après ses études, il retourne en Italie où il enseigne à l'université de Naples, puis à celle de Palerme jusqu'en 1891 avant de s'installer à Rome. Entre temps, il retournera à l'École des Mines de Liège en 1882 où il étudiera la mathématique sous la direction d'Eugène Catalan.
Il décède à Torre Annunziata le 12 septembre 1906 en tentant de sauver de la noyade son jeune fils Manlio âgé de 17 ans.[14]

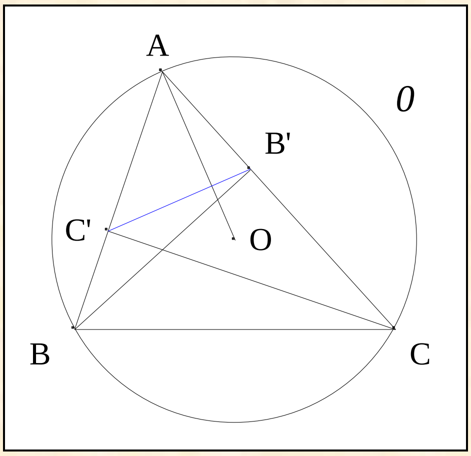
D. LA RÉCOLTE

1. Un rayon ou le théorème III de von Nagel

VISION

Figure :

[14] The MacTutor history of Mathematics archive ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html.



Traits : ABC un triangle non rectangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et B', C' les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC.

Donné : le rayon (AO) est perpendiculaire à (B'C').[15]

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur ce site dans un article de l'auteur.[16]

Note historique : la première preuve de nature angulaire a été donnée par le professeur Charles Pierre Housel[17].
Le mot "rayon" apparaît pour la première fois en 1534 ;
il sera largement répandu après les travaux de François Viète (1540-1603).

2. Une parallèle à (AO)

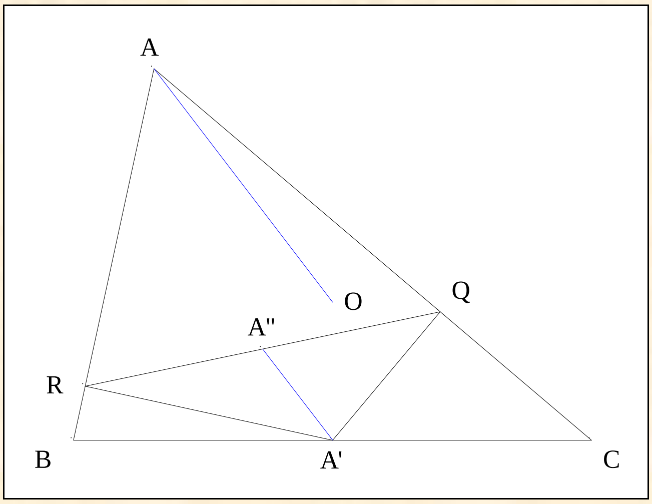
VISION

Figure :

[15] Nagel (von) C., Théorèmes sur les cercles qui touchent les côtés d'un triangle, *Nouvelles Annales* **19** (1860) 354 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

[16] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 19 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

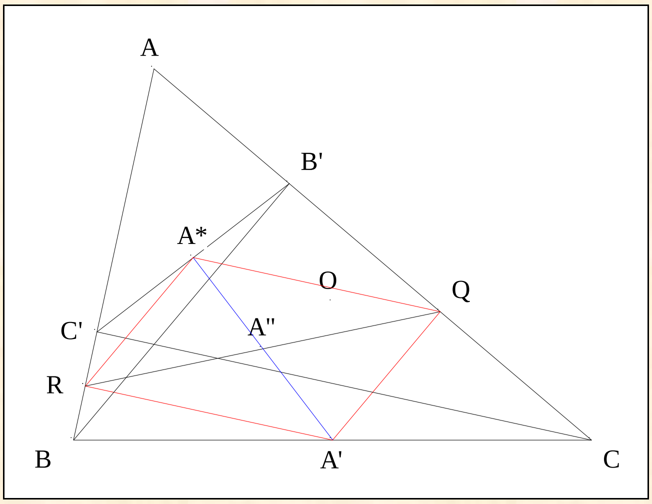
[17] Housel C. P., *Nouvelles Annales* **19** (1860) 440 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A' le milieu de [BC],
Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées de A' resp. sur (CA), (AB)
et A" le milieu de [QR].

Donné : (A'A") est parallèle à (AO).

VISUALISATION



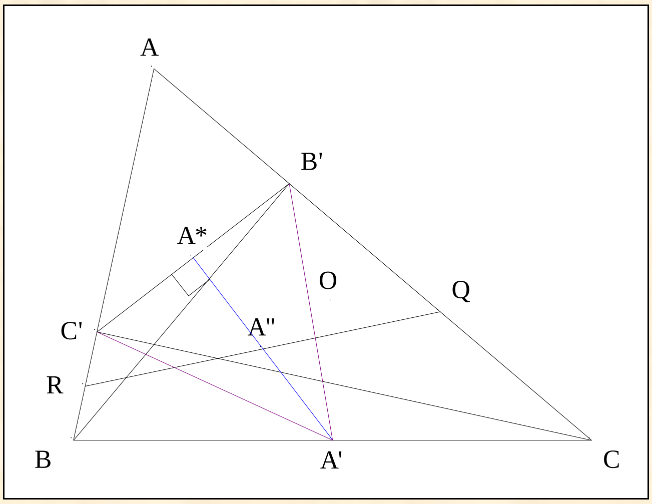
- Notons B', C' les pieds des B, C-hauteurs de ABC
  et A* le milieu de [B'C'].

- **Scolies :** (A'Q) // (BB') et (A'R) // (CC').

- D'après **A. 1.** Le théorème de la droite des milieux appliqué
  (1) au triangle CBB', Q est le milieu de [CB']
  (2) au triangle BCC', R est le milieu de [BC'].

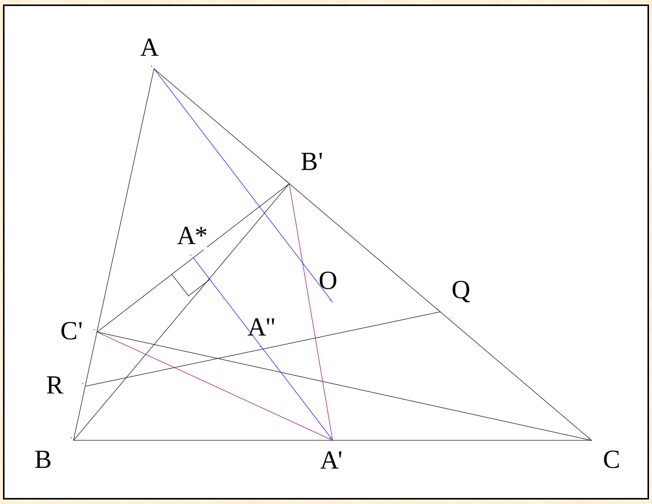
- D'après **A. 2.** Le théorème de Varignon appliqué au quadrilatère BCB'C', A*RA'Q est un parallélogramme.

- **Conclusion partielle :** A', A" et A* sont alignés.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle"
  appliqué aux triangles B'BC et C'BC, A'B' = A'C' ;
  en conséquence, la médiane (A'A*) du triangle A'-isocèle A'B'C' est aussi la A'-hauteur.

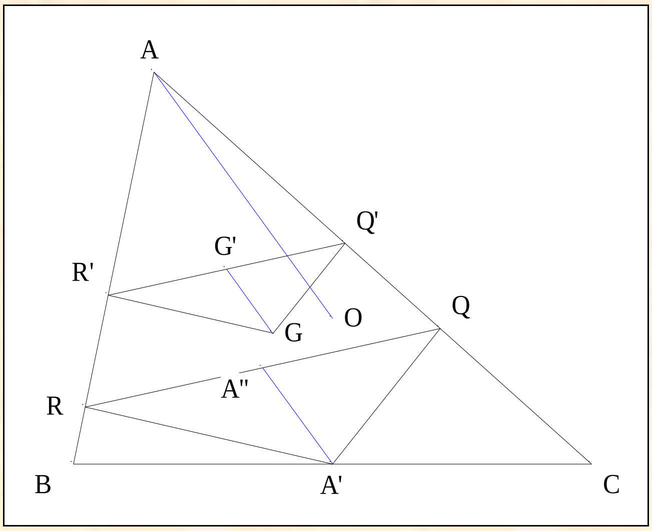
- **Conclusion partielle :** (A'A") ⊥ (B'C').



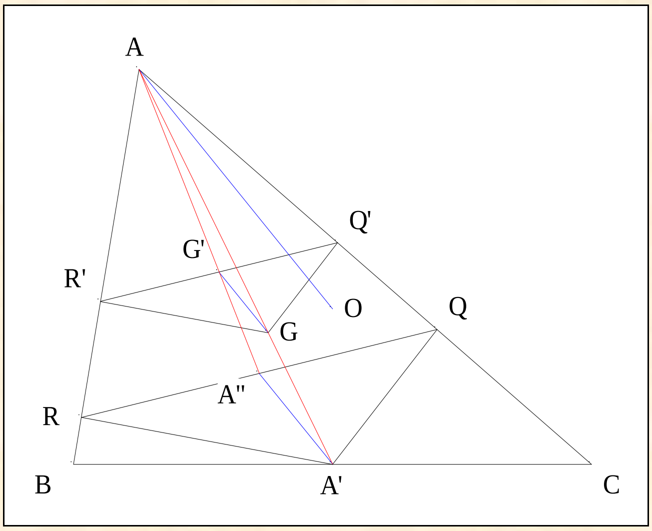
- D'après **D. 1.** Un rayon, (B'C') ⊥ (AO) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A'A") // (AO).

- **Conclusion :** (A'A") est parallèle à (AO).

Scolies : **(1)** une autre parallèle à (AO)



- Notons G le point médian de ABC
  Q', R' les pieds des perpendiculaires abaissées de G resp. sur (CA), (AB)
  et G' le milieu de [Q'R'].



- Nous avons : * A, G et A' sont alignés
  * (A'Q) // (GQ') et (A'R) // (GR').

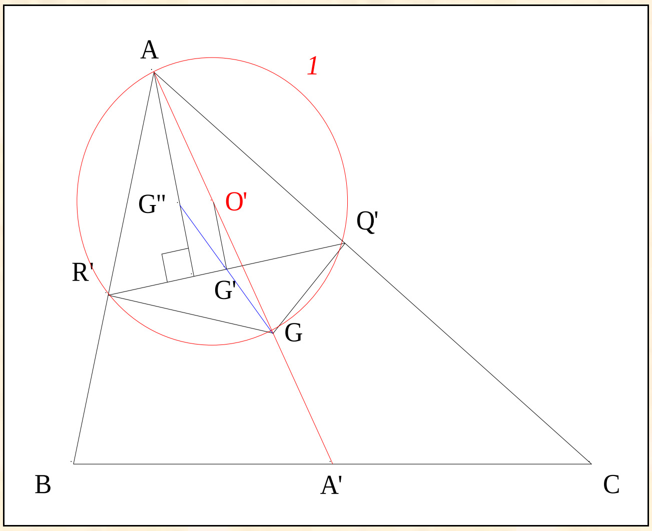
- D'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué aux triangles GQ'R' et A'QR en perspective de centre A, (Q'R') // (QR).

- D'après "Le trapèze complet" appliqué au trapèze QRR'Q', A, G' et A" sont alignés.

- D'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué aux triangles GQ'G' et A'QA" en perspective de centre A, (GG') // (A'A") ;
  nous savons que (A'A") // (AO).

- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, (GG') // (AO).

(2) Le symétrique de G par rapport à G'



- Notons G" le symétrique de G par rapport à G'
  1 le cercle de diamètre [AG] ; il passe par Q' et R' ;
  et O' le centre de *1*.

- Nous savons que (Q'R') ⊥ (O'G').

- D'après **A. 1.** La droite des milieux, appliqué au triangle GAG", (O'G') // (AG") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (Q'R') ⊥ (AG").

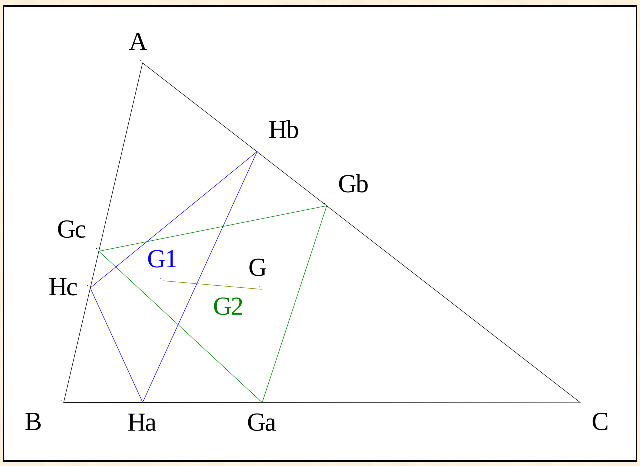
- **Conclusion :** G" est sur la perpendiculaire à (Q'R') passant par A i.e. sur la A-symédiane de (AGA').[18]

  (3) (AG") passe par le point symédian (de Lemoine K) de ABC.

3. Le premier résultat de Luis Gonzalez

VISION

Figure :



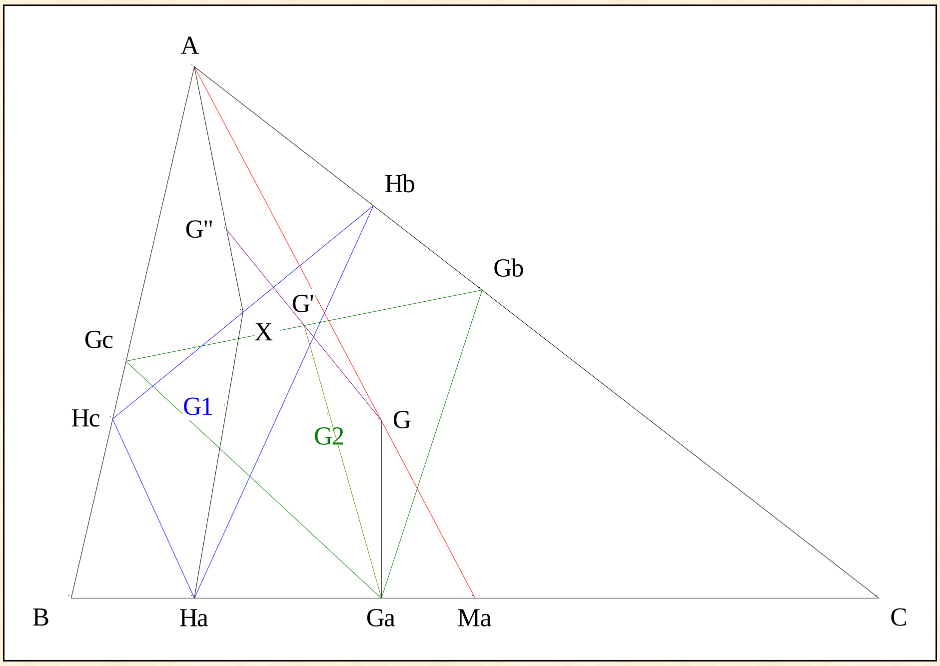
Traits : ABC un triangle,

[18] Ayme J.-L., A very little problem, *Art of Problem Solving* du (14/10/2010) ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=371734.

	HaHbHc	le triangle orthique de ABC,
	G1	le point médian de HaHbHc,
	G	le point médian de ABC,
	GaGbGc	le triangle G-pédal de ABC
et	G2	le point médian de GaGbGc.

Donné : G1, G2 et G sont alignés.[19]

VISUALISATION



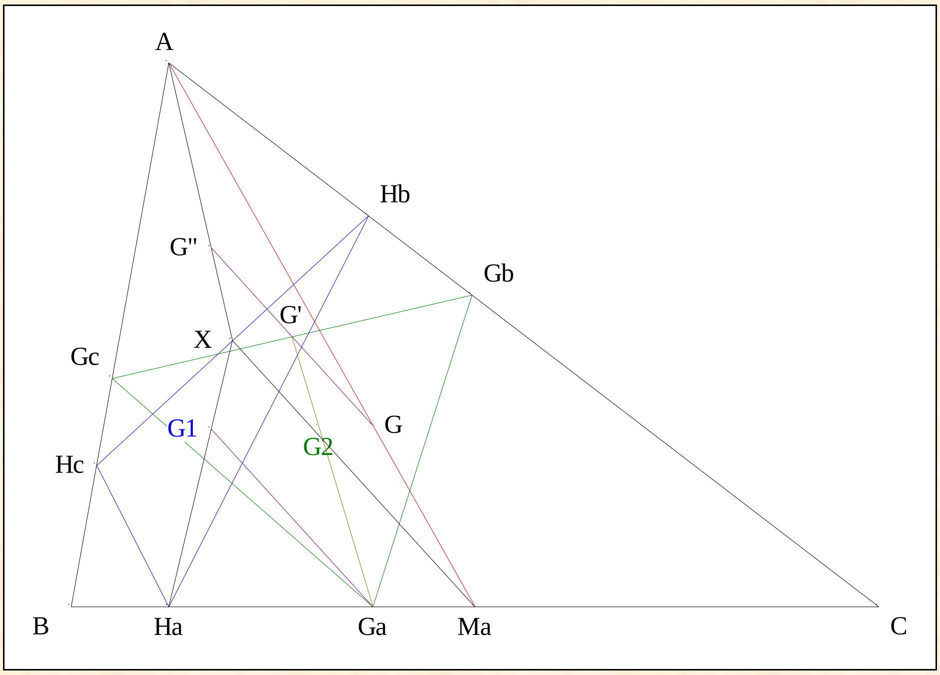
- Notons Ma, G', X les milieux resp. de [BC], [GbGc], [HbHc],
  et G" le symétrique de G par rapport à G'.

- D'après **D. 2.** Une parallèle à (AO), scolies 2 et 3, (AG") est la A-symédiane de ABC.

- (HbHc) étant antiparallèle à (BC) relativement à (AB) et (AC), (AG") passe par X.

---

[19] Gonzalez L., 4 centroids on a parallel line to the Brocard axis, # 10 Lemma 2, *Art of Problem Solving* du 06/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=316488.
Centroids on a parallel to the Brocard axis, Message *Hyacinthos* # 19342 du 13/10/2010 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



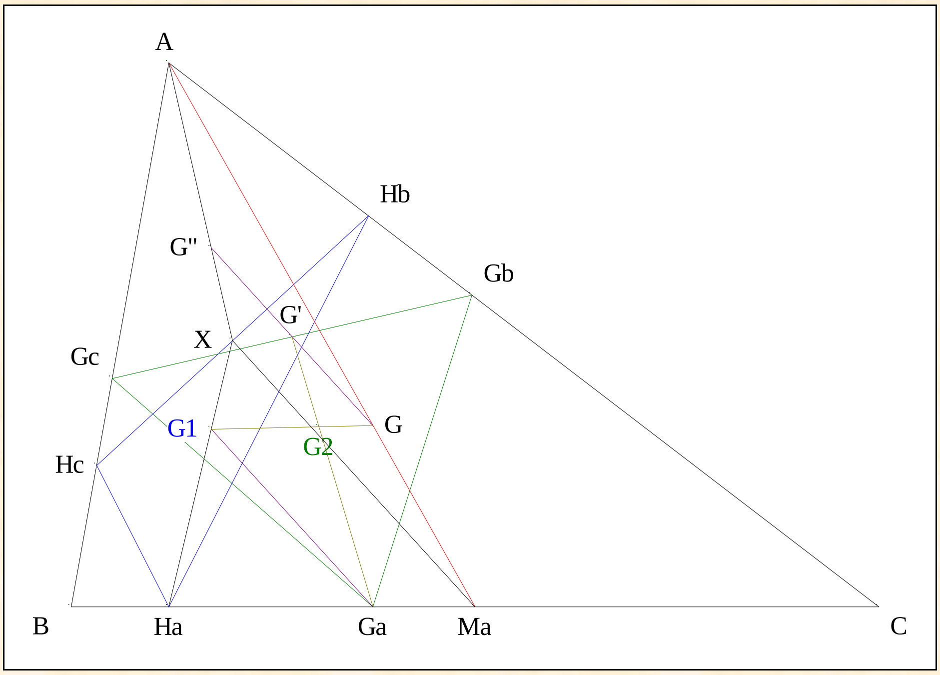
- D'après "Le théorème de Thalès",
  appliqué au triangle HaMaX, **(1)** Ga est le premier tiers-point de [MaHa] à partir de Ma
  (2) 3.GaG1 = 2.MaX.

- **Scolie :** G1 est le premier tiers-point de [XHa] à partir de X.

- D'après "Le théorème de Thalès",
  appliqué au triangle AMaX, **(1)** (GG") // (MaX)
  (2) 2.MaX = 3.GG" ;

  par transitivité de la relation = et simplification, GaG1 = GG" ;
  en conséquence, GaG1 = 2.GG'.

- **Scolie :** G2Ga = 2.G2G'.

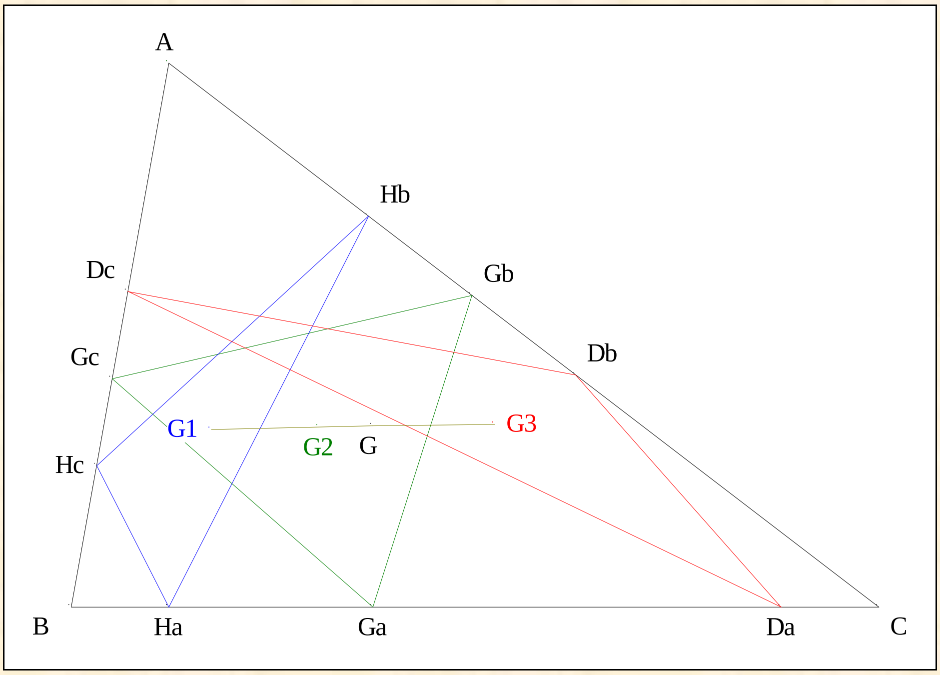


- **Conclusion :** G1, G2 et G sont alignés.

Commentaire : l'idée et la preuve de Luis Gonzalez ont été revisitées par l'auteur.

Scolies : **(1)** G2 est le premier tiers-point de [GG1] à partir de G.

(2) Un autre point médian sur (G1G2G)



- Notons DaDbDc le triangle isotomique de HaHbHc relativement à ABC
  et G3 le point médian de DaDbDc.

- D'après **C. 2.** Le théorème de Cesàro, G3 est le symétrique de G1 par rapport à G.

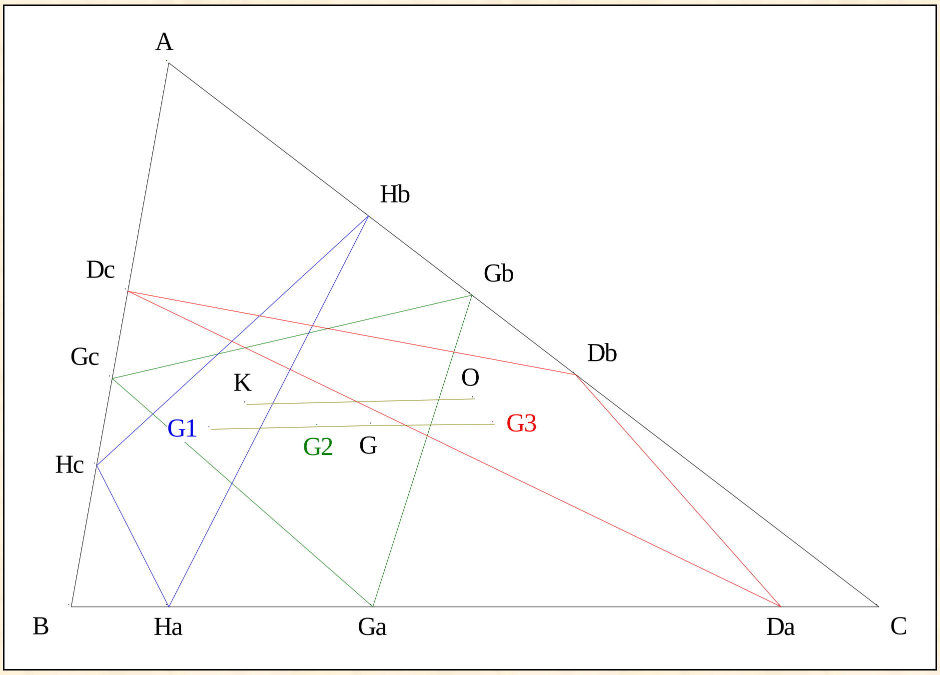
- **Conclusion :** G1, G2, G3 et G sont alignés. [20]

4. Le second résultat de Luis Gonzalez

VISION

Figure :

[20] Gonzalez L., 4 centroids on a parallel line to the Brocard axis, # 10 Lemma 2, *Art of Problem Solving* du 06/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=316488.

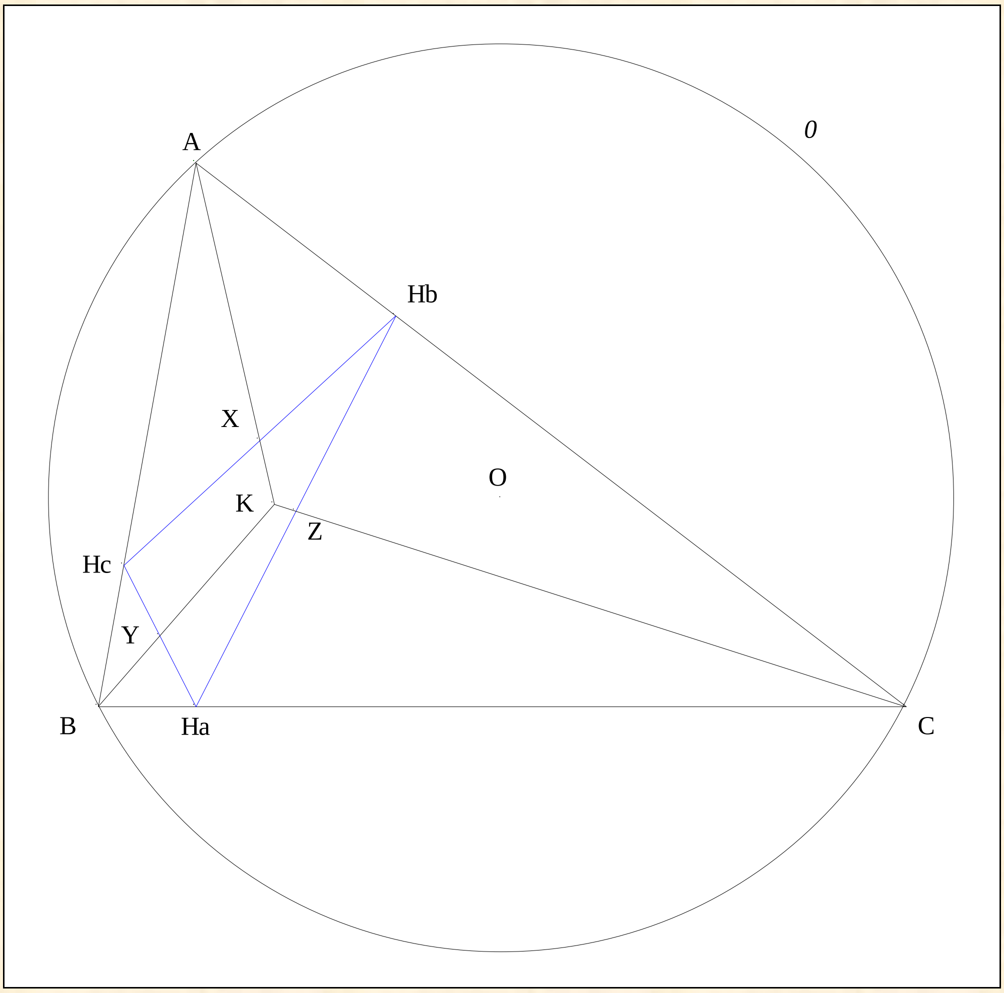


Traits :	ABC	un triangle **acutangle**,
	G	le point médian de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	K	le point de Lemoine de ABC,
	HaHbHc	le triangle orthique de ABC,
	G1	le point médian de HaHbHc,
	GaGbGc	le triangle G-pédal de ABC,
	G2	le point médian de GaGbGc,
	DaDbDc	le triangle isotomique de HaHbHc relativement à ABC
et	G3	le point médian de DaDbDc.

Donné : (G1G2G3G) est parallèle à (OK).[21]

VISUALISATION

[21] Gonzalez L., 4 centroids on a parallel line to the Brocard axis, # 10 Lemma 2, *Art of Problem Solving* du 06/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=316488 ;
Centroids on a parallel to the Brocard axis, Message *Hyacinthos* # 19342 du 13/10/2010 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



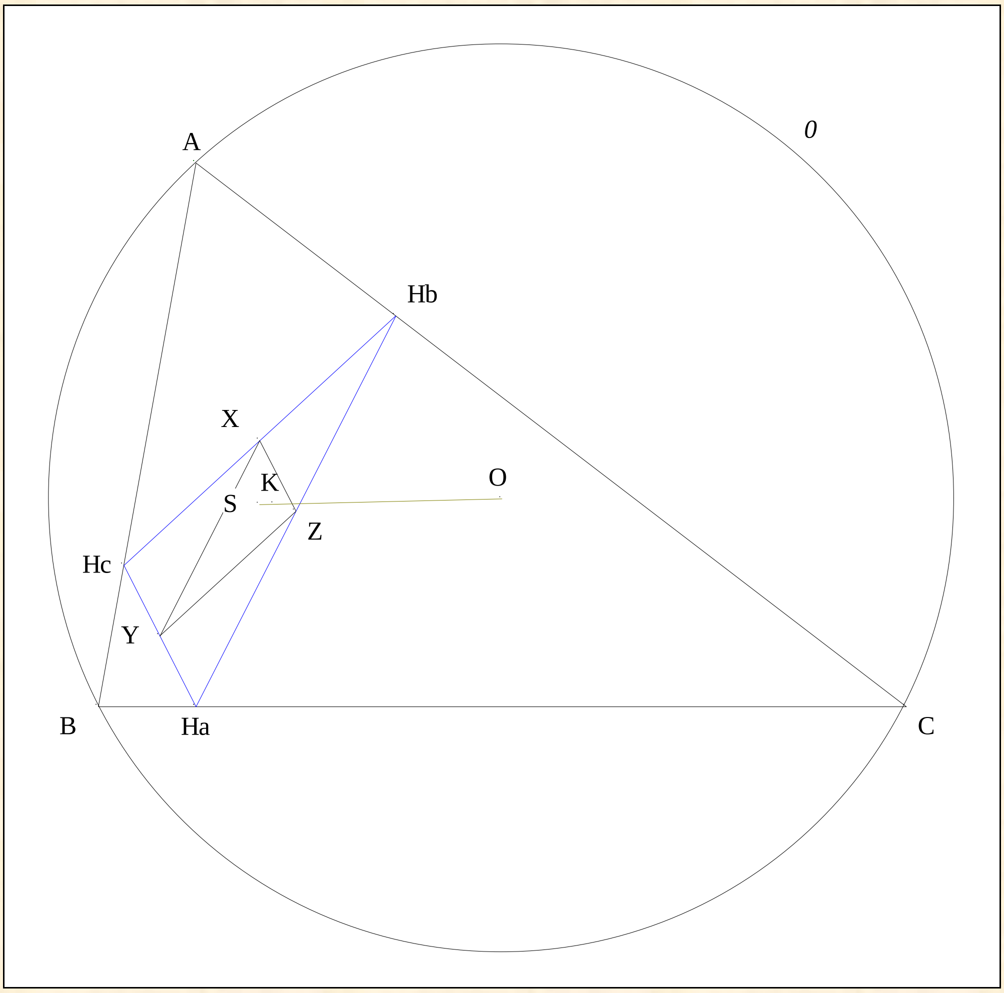
- Considérons HaHbHc comme le triangle de base de la figure ;
  en conséquence, ABC est le triangle excentral de HaHbHc.

- Notons X, Y, Z les milieux resp. de [HbHc], [HcHa], [HaHb].

- D'après **D. 3.** Le premier résultat de Luis Gonzalez, (AX), (BY), (CZ) concourent en K.

- **Conclusion partielle :** K est le Mittenpunkt et O est le point de Bevan de HaHbHc.[22]

[22] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 12-14, 20-22 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

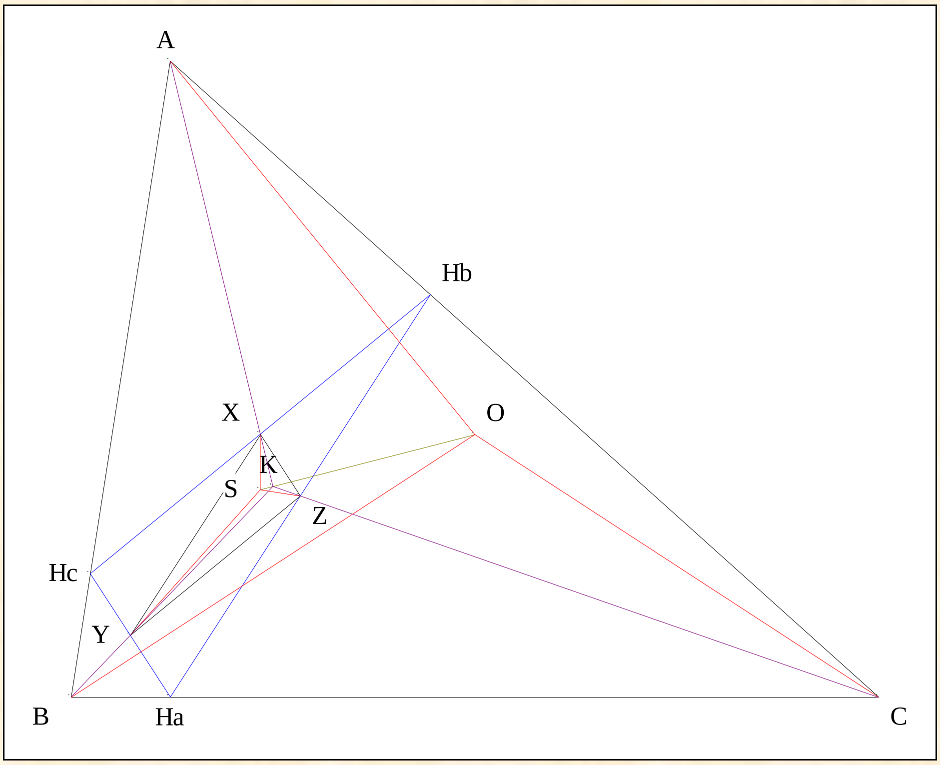


- Notons H le centre de HaHbHc
  et S le point de Spieker de HaHbHc.

- **Scolies :** **(1)** H est l'orthocentre de ABC
  (2) S est le centre du cercle inscrit du triangle médian XYZ de HaHbHc.

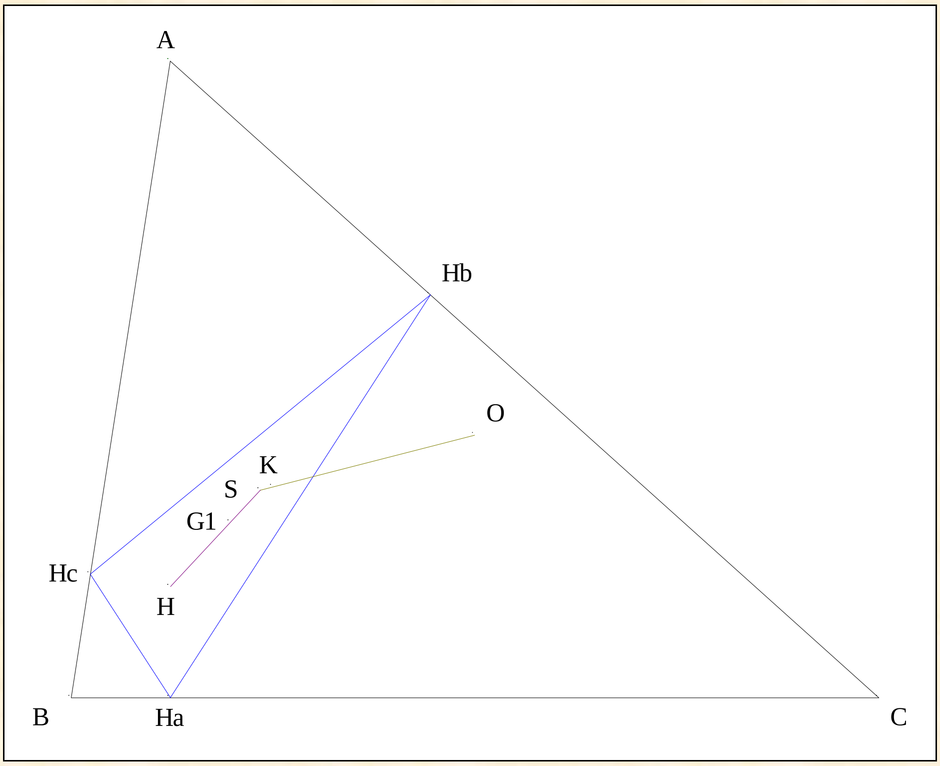
- D'après Naudé "D'une hauteur à une bissectrice" (Cf. Annexe 1),
  les A, B, C-hauteurs de ABC sont les Ha, Hb, Hc-bissectrices intérieures de HaHbHc ;

- **Conclusion partielle :** les X, Y, Z-bissectrices intérieures de XYZ
  sont resp. parallèles aux A, B, C-hauteurs de ABC.



- **Scolies :** **(1)** S est le centre d'orthologie de XYZ relativement à ABC
  (2) O est le centre d'orthologie de ABC relativement à XYZ
  (3) K est le centre de perspective de ABC et XYZ.

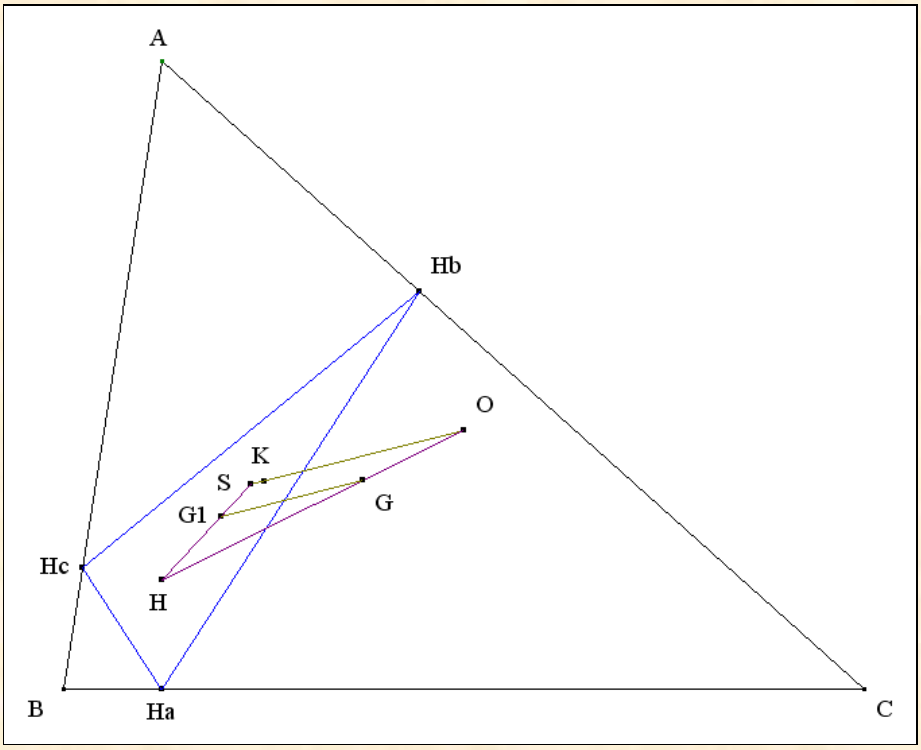
- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de Sondat"[23] appliqué à ABC et XYZ, S, O et K sont alignés.



[23] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

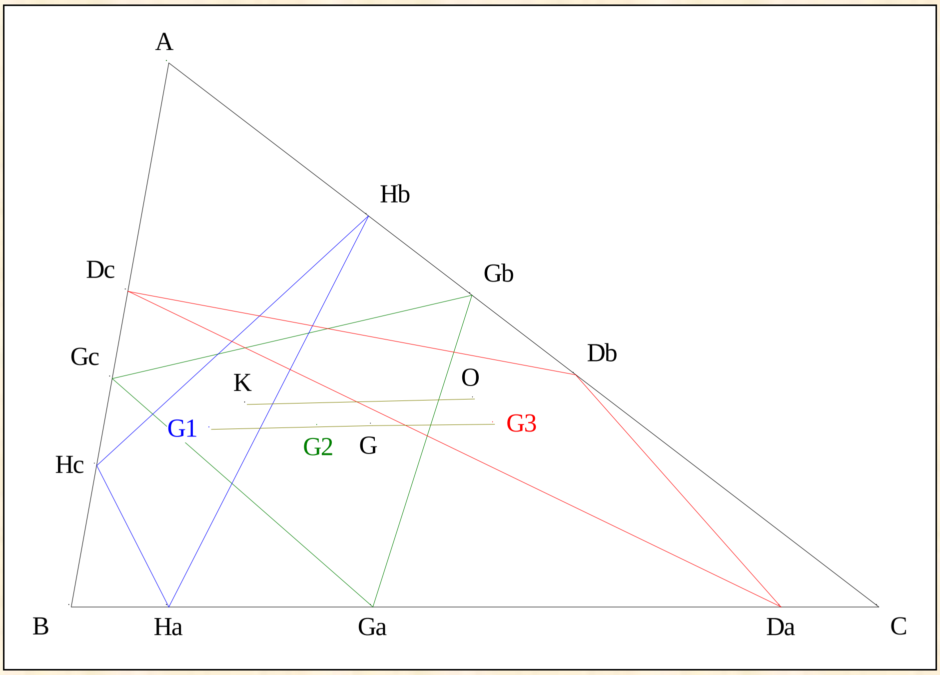
- D'après Naudé "D'une hauteur à une bissectrice" (Cf. Annexe 1), H est le centre de ABC.

- D'après "Le cercle de Spieker" (Cf. Annexe 2) **(1)** H, G1 et S sont alignés
  (2) G1 est le premier tiers-point de [SH] à partir de S.



- D'après "La droite d'Euler"[24] **(1)** H, G et O sont alignés
  (2) G est le premier tiers-point de [OH] à partir de O.

- D'après "Le théorème de Thalès", (G1G) est parallèle à (OKS).



24 Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

- D'après **C. 2.** Le théorème de Cesàro appliqué
  aux triangles isotomiques HaHbHc et DaDbDc, G est le milieu de [G1G3].

- **Conclusion :** (G1G2G3G) est parallèle à (OK).

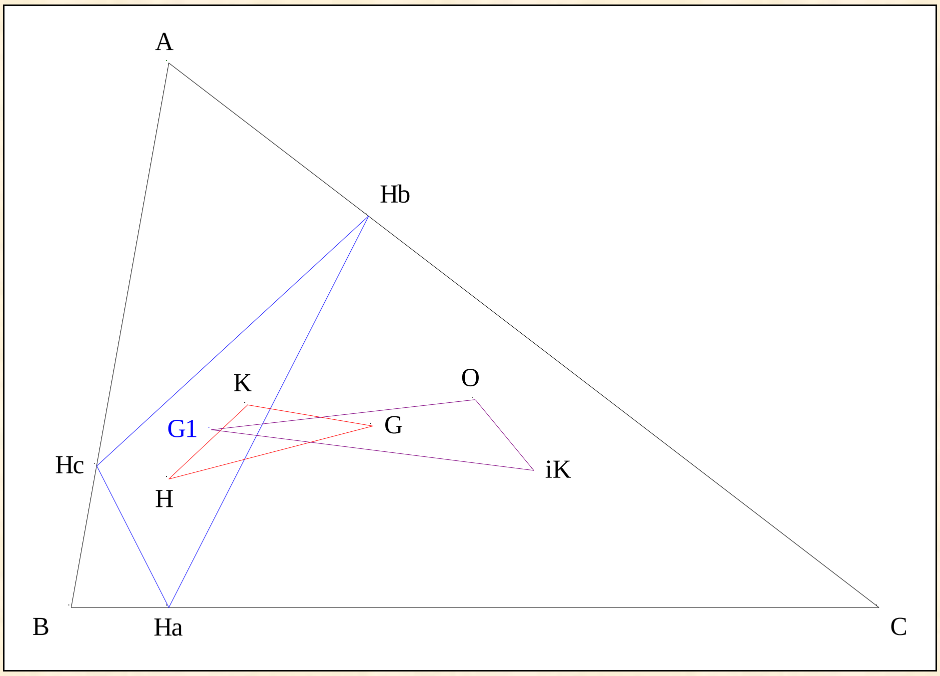
Scolie : DaDbDc est le triangle pédal du point de de Longchamps de ABC.

Commentaire : l'idée et la preuve de Luis Gonzalez ont été revisitées par l'auteur.

5. Un problème de l'auteur

VISION

Figure :



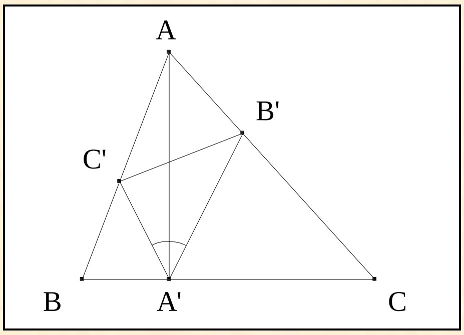
Traits :	ABC	un triangle,
	G	le point médian de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	K	le point de Lemoine de ABC,
	iK	l'isotomique de K relativement à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	HaHbHc	le triangle orthique de ABC
et	G1	le point médian de HaHbHc,

Donné : les triangles GHK et G1iKO sont perspectifs.[25]

[25] Ayme J.-L., Two perspective triangles, *Art of Problem Solving* du 15/10/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=372210.

E. ANNEXE

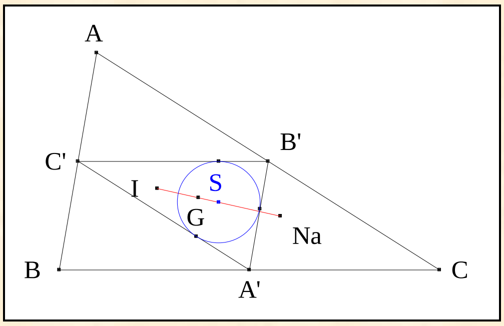
1. D'une hauteur à une bissectrice [26]



Traits : ABC un triangle acutangle,
et A'B'C' le triangle orthique de ABC.

Donné : la A-hauteur de ABC est la A'-bissectrice intérieure de A'B'C'.

2. Le cercle de Spieker [27]



Traits :	ABC	un triangle,
	G	le point médian de ABC,
	I	le centre de ABC,
	Na	le point de Nagel de ABC,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC
et	S	le centre du cercle inscrit dans A'B'C'

Donnés : Na, S, G, et I sont alignés et GI = 2.GS.

[26] Naudé P., *Miscellanae Berolinensia* 5 (1737) 17.
[27] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1909).