CINQ THÉORÈMES

DE

CHRISTIAN HEINRICH von NAGEL

†

Jean-Louis AYME [1]

Résumé. Nous présentons cinq théorèmes[2] de von Nagel datant de 1836 et signalés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de Gerono et Terquem de 1860. Ils sont présentés dans l'ordre de ceux indiqués par von Nagel, précédés d'une brève note biographique et d'une preuve du point de Gergonne.
Le cinquième résultat présente les premiers germes de la théorie de l'extraversion en considérant les points adjoints de Gergonne et de Nagel.
Les preuves présentées sont purement synthétiques.
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

---

1 St Denis, Île de la Réunion (France).

2 Théorèmes sur les cercles qui touchent les côtés d'un triangle, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1[ère] série **19** (1860) 354-355 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

Sommaire

I. UNE BRÈVE BIOGRAPHIE

DE

CHRISTIAN HEINRICH von NAGEL

Christian Heinrich Nagel[3] est né à Stuttgart (Allemagne), le 28 février 1803.
Fils d'un maître couturier, Christian Nagel, sous les conseils de son grand-père maternel, entre au Gymnasium où ses professeurs découvrent un élève doué. Par manque d'argent, il commence par étudier la théologie à Tübingen durant quatre années i.e. jusqu'en 1825 date à laquelle il devient prêtre. Durant cette période, il a aussi suivi les cours de mathématiques et de physique donnés par J. G. von Bohnenberger et par F. J. P. Riecke à la même université. En décembre 1826, il enseigne les mathématiques et la biologie au Gymnasium et à la Real-Schule de Tübingen tout en continuant des études de mathématiques à l'Université de cette ville. En 1830, il passe son doctorat et accepte en 1830 un poste d'enseignant au Gymnasium d'Ulm. En 1844, il devient directeur de la Real-Schule d'Ulm.
A côté de son travail, il trouve le temps de publier six articles et d'écrire en 1836, un livre intitulé *Le développement de la géométrie moderne du triangle* dans lequel il introduit la transformation désormais classique, l'homothétie de centre G et de rapport -2 qui retiendra toute l'attention de Maurice d'Ocagne et de Gaston Gohierre de Longchamps.
En 1875, il est anoblit et prend sa retraite.
Il décède le 27 octobre 1882.

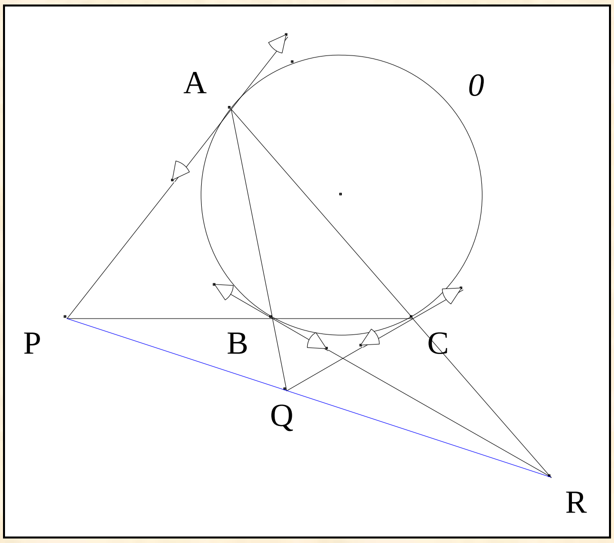
[3] Ne pas confondre ce géomètre du XIX-ème siècle avec le logicien du XX-ème siècle, Ernest Nagel.

II. LE POINT DE GERGONNE (1818)

1. Trigramma mysticum

VISION

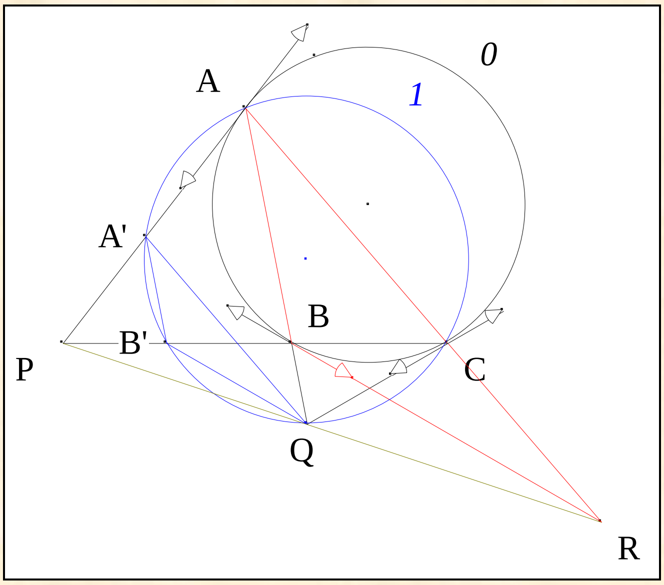
Figure :



Traits :	ABC	un triangle
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	*T*a , *T*b , *T*c	les tangentes à *1* resp. en A, B, C,
et	P, Q, R	les points d'intersection de *T*a et (BC) , *T*b et (CA) , *T*c et (AB).

Donné : P, Q et R sont alignés.

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle passant par les points A, Q, C
  et A', B' les seconds points d'intersection resp. de *T*a, (BC) avec *1*.

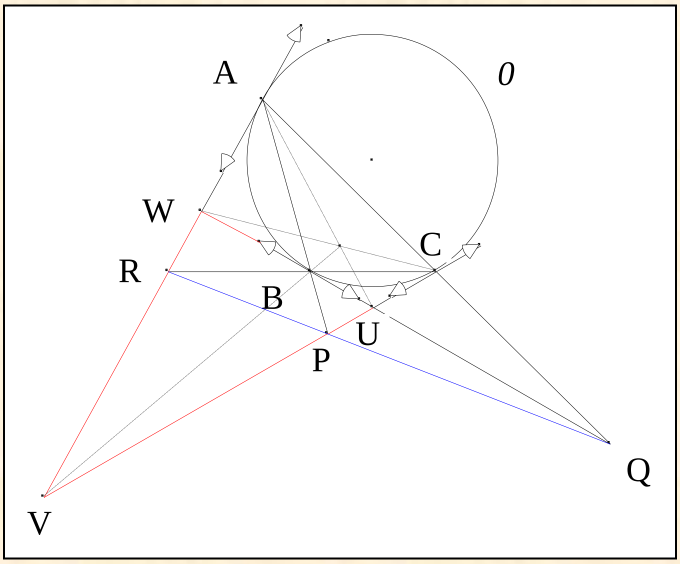
- Les cercles *0* et *1*, les points de base A et C, conduisent au théorème **3**, **1** et **4** de Reim ;
  il s'en suit que (AB) // (A'B') , *T*b // (B'Q) , (CA) // (QA') .

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 1)
  appliqué aux triangles homothétiques ABR et A'B'Q, P, Q et R sont alignés.

Énoncé traditionnel : dans tout triangle inscrit, les points de concours des côtés avec les tangentes aux sommets opposé, sont alignés.

Commentaire : cette situation est un cas particulier de "l'Hexagramma mysticum" de Blaise Pascal qu'il découvrit en 1640.

Scolie : deux triangles en perspective



- Notons UVW le triangle tangentiel de ABC.

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2),
  (PQR) est étant l'axe de ABC et UVW, ceux-ci sont en perspective.

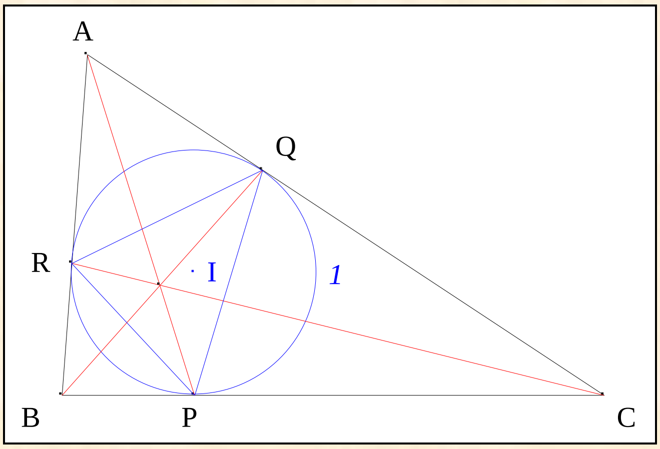
Énoncé traditionnel : un triangle et son triangle tangentiel sont en perspective
et, inversement,
un triangle et son triangle de contact sont en perspective.

2. Le point de Gergonne[4]

VISION

[4] Gergonne J., *Annales de Gergonne* IX (1818-19) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

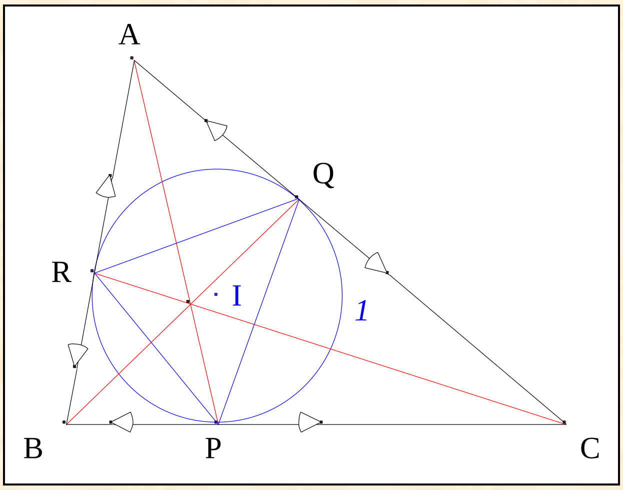
Figure :



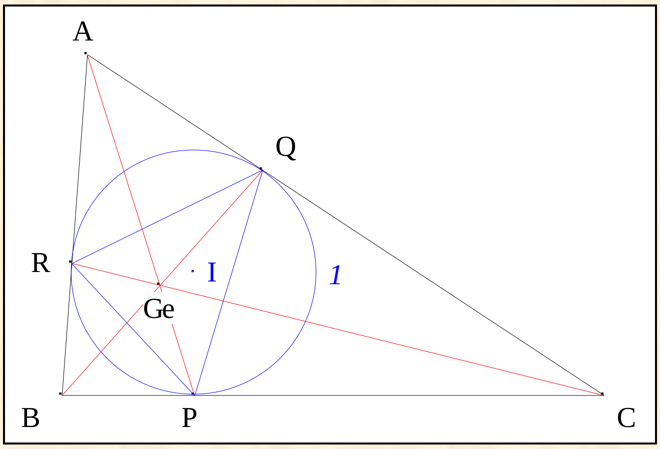
Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*
et	PQR	le triangle de contact de ABC.

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

VISUALISATION



- D'après II. 1. "Trigramma mysticum, scolie", ABC et son triangle de contact PQR sont en perspective.
- **Conclusion :** par définition, (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.



Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Ge, est "le point de Gergonne de ABC" et est répertorié sous X_7 chez ETC

(2) PQR est "le triangle de Gergonne de ABC" ;
(AP) est la A-gergonnienne de ABC.

Énoncé traditionnel : les gergonniennes d'un triangle sont concourantes.

Note historique : Joseph Diaz Gergonne[5] a publié ce résultat en 1818.
Dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* datant de 1837, Michel Chasles signale que le "point de Gergonne" avait déjà été signalé par Jean de Céva dans le tome II de *De lineis rectic se invicem secantibus, statica constructio,* écrit en 1678.
Nous trouvons aussi une preuve de l'existence de ce point dans l'un des six articles publiés par von Nagel.

Commentaire : une solution peut être rapidement obtenue en observant que ABC et PQR sont bilogiques ; en conséquence, ils sont en perspective[6].

III. LE PREMIER THÉORÈME Na-G-I

OU

LA SECONDE DROITE D'EULER (1836)

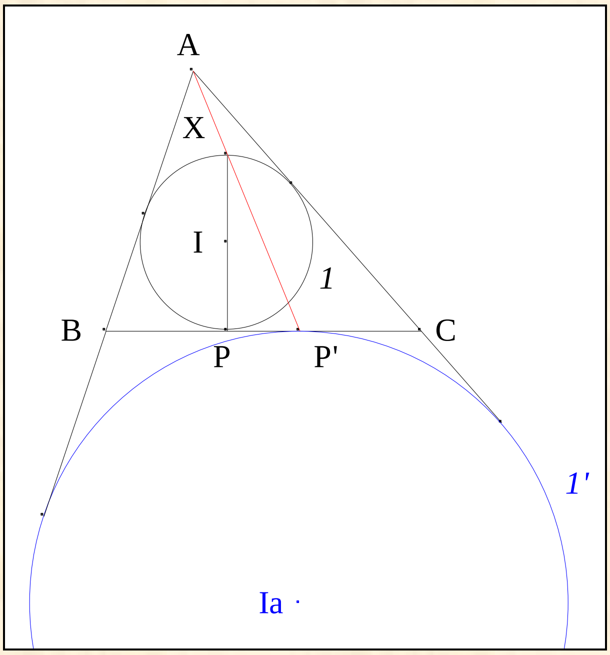
1. Une nagelienne[7]

VISION

Figure :

---

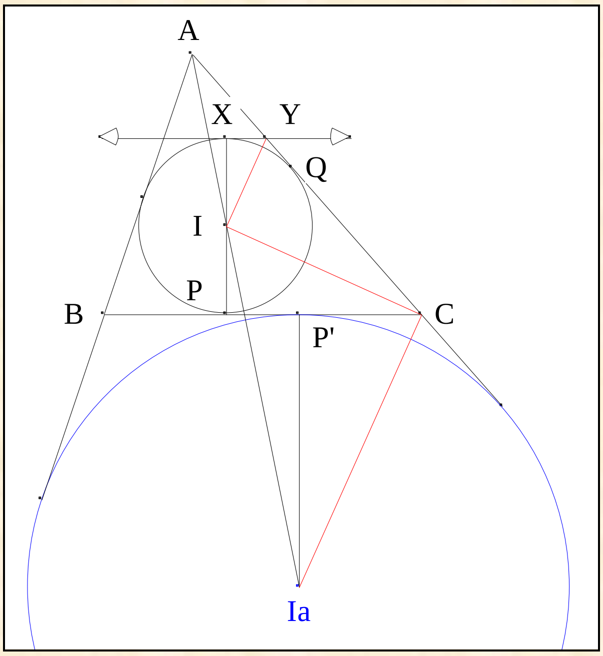
5 Gergonne J., *Annales de Gergonne* **IX** (1818-19) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.
6 Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. Vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
7 Poncelet J. V., *Annales* de Gergonne **XII** (1821-1822) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*,
	1'	le A-excercle de ABC,
	Ia	le centre de *1'*,
	P	le point de contact de *1* avec (BC),
	P'	le point de contact de *1'* avec (BC)
et	X	le point de *1*, diamétralement opposé à P.

Donné : (AP') passe par X.

VISUALISATION

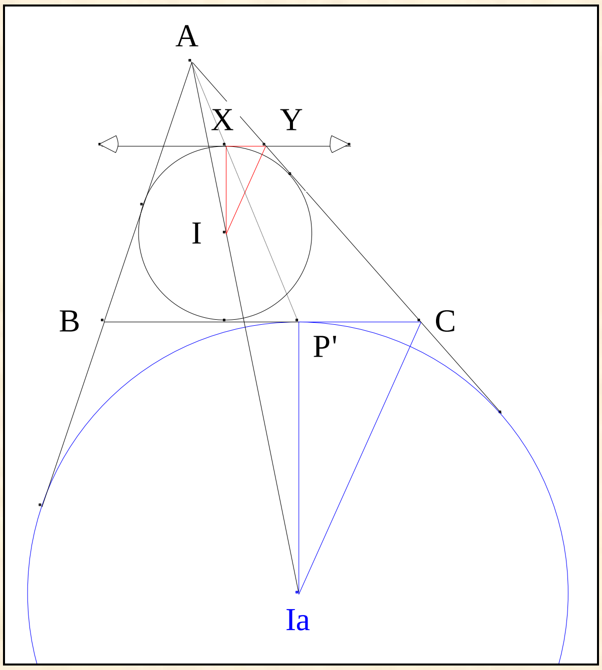


- Notons Q le point de contact de *1* avec (CA),
  Tx la tangente à *1* en X

et Y le point d'intersection de Tx avec (CA).

- Remarquons que **(1)** Tx i.e (YX) est parallèle à (CPP'B)
  (2) (IaP') est parallèle (PIX).

- D'après "L'angle droit pivotant" (Cf. Annexe 3) (IY) ⊥ (IC) ;
  les bissectrices intérieure et extérieure de ABC en C, étant perpendiculaires, (CI) ⊥ (CIa) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IY) // (IaC).



- Les triangles IYX et IaCP' ayant leurs côtés correspondants parallèles deux à deux, sont homothétiques.

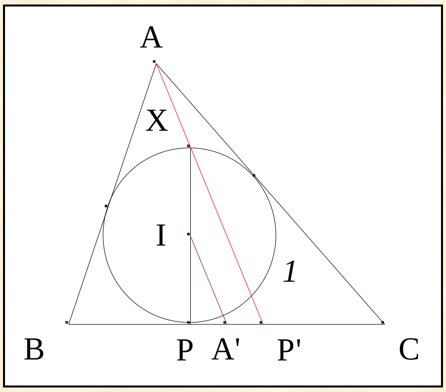
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 1)
  appliqué aux triangles homothétiques IYX et IaCP', A, X et P' sont alignés.

- **Conclusion :** (AP') passe par X.

Scolies : **(1)** (AP') est la A-nagelienne de ABC

(2) P et P' sont isotomiques relativement à [BC]

(3) une parallèle à (AP')[8]



[8] Poncelet, *Annales* de Gergonne **12** ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

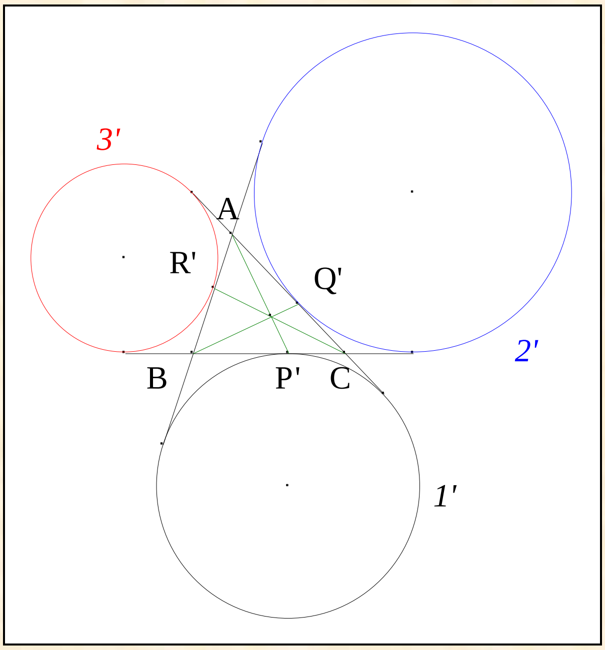
- Notons A' le milieu de [BC]

- **Conclusion :** d'après Thalès, "La droite des milieux" appliquée au triangle PP'X, (A'I) // (AXP').

2. Le point de Nagel[9]

VISION

Figure :



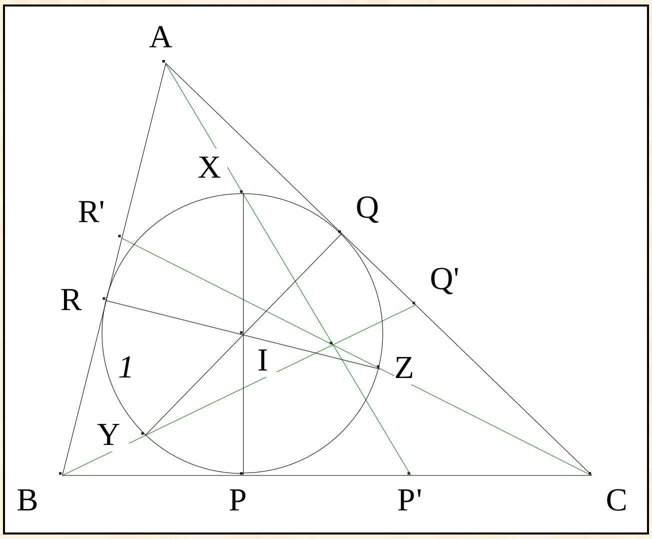
Traits : ABC un triangle,
1', 2', 3' les A, B, C-excercles de ABC
et P', Q', R' les points de contact de *1', 2', 3'* resp. avec (BC), (CA), (AB).

Donné : (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes.

VISUALISATION

---

[9] Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836) ;
Nagel (von) C. H., *Annales* de Gergonne **19** (1860) 354 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.



- Notons 1 le cercle inscrit dans ABC,
  I le centre de *1*,
  P, Q, R les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
  et X, Y, Z les points de *1*, diamétralement opposé resp. à P, Q, R.

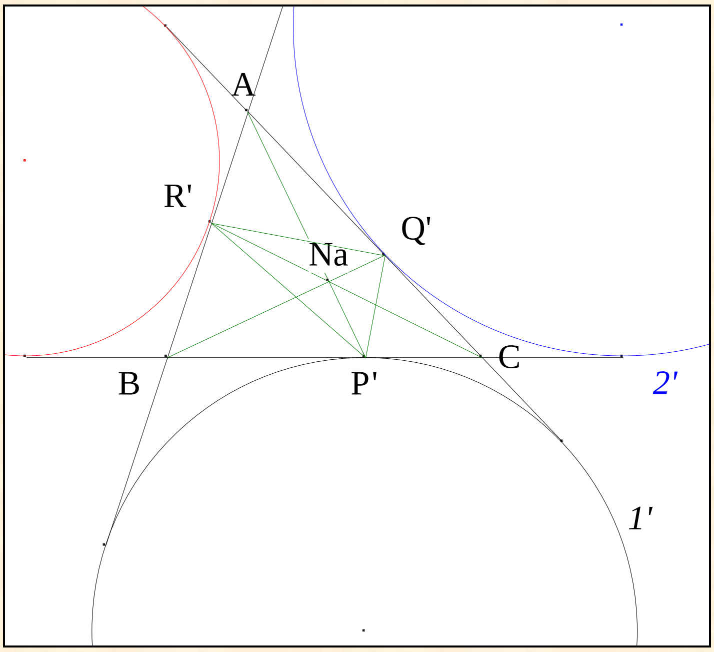
- D'après III. 1. Une nagelienne,
  (1) (AP') passe par X
  (2) (AQ') passe par Y
  (3) (AR') passe par Z.

- **Scolie :** (PX), (QY), (RZ) sont concourante en I.

- D'après "Le point de Steinbart…"[10], (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes.

- **Conclusion :** (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes.

Scolies :



[10] Ayme J.-L., Les points de Steinbart et Rabinowitz, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

(1) ce point de concours, noté Na, est "le point de Nagel de ABC"
et est répertorié sous X_8 chez ETC

(2) P'Q'R' est "le triangle de Nagel de ABC" ou encore "le extriangle de contact de ABC"

(3) ABC et P'Q'R' sont perspectifs.

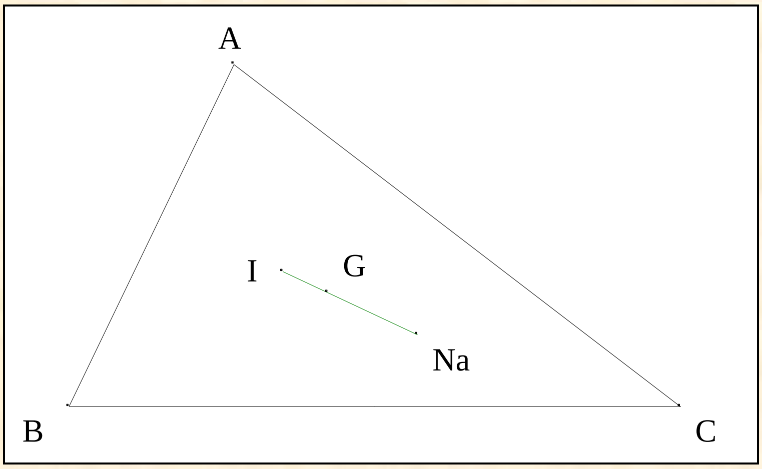
Note historique : la qualification de ce point de concours a été initié par l'historiographe Émile Vigarié. Nous trouvons une preuve métrique de l'existence de ce point dans l'un des six articles publiés par von Nagel et aussi dans les livres de Peter Baptist[11].

Énoncé traditionnel : les nageliennes d'un triangle sont concourantes.

3. La droite de Nagel[12]

VISION

Figure :



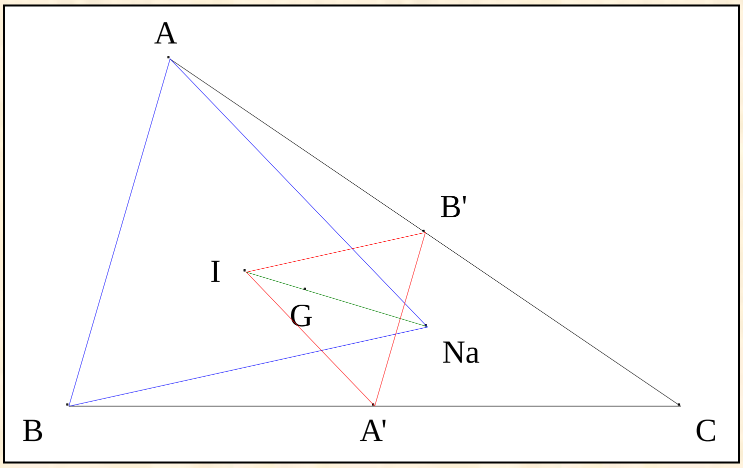
Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
G le point médian de ABC
et Na le point de Nagel de ABC.

Donné : I, G et Na sont alignés.

VISUALISATION

[11] Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992) 74-76 ;
Historische Anmerkungen zu Gergonne-und-Nagel-punkt, *Sudhoffs Archiv für Geschichte der Medezin und der Naturwissenschaften* 71, 2 (1987) 230-233.

[12] Nagel (von) C. H..

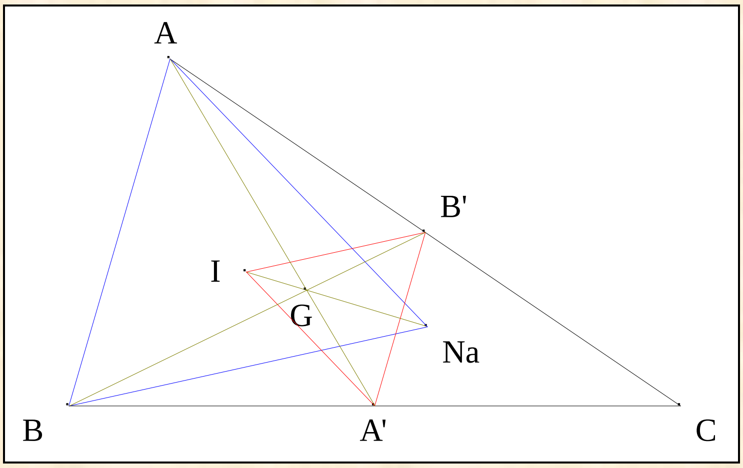


- Notons A', B' les milieux resp. de [BC], [CA].

- D'après III. 1. Une nagelienne, scolie 3 **(1)** (A'I) // (ANa)
  (2) (B'I) // (BNa).

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à ABC, (A'B') // (AB).

- Par définition, les triangles NaAB et IA'B' sont homothétiques.



- **Scolie :** par définition, G est le point d'intersection de (AA') et (BB').

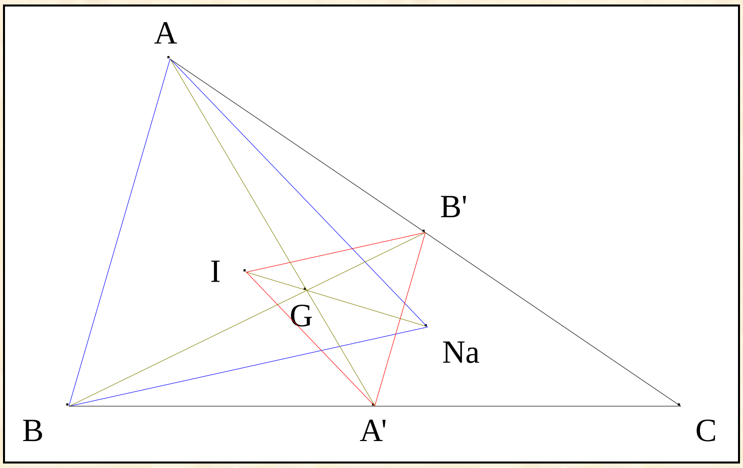
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" appliqué à IA'B' et NaAB,
  I, G et Na sont alignés.

Scolie : (IGNa) est "la droite de Nagel de ABC".

Note historique : la preuve de von Nagel est présentée dans le livre de Peter Baptist[13].

4. Une relation

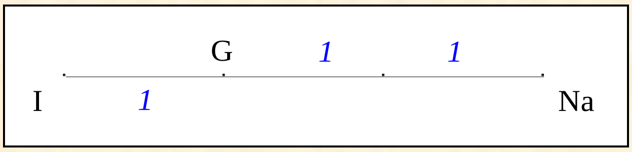
[13] Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992) 77-79.



- **Scolie :** G étant le point médian de ABC, 2.GA' = GA.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Thalès", 2.GI = GNa.

Scolie : la disposition



Énoncé traditionnel : le point médian d'un triangle partage le segment déterminé par le centre et le point de Nagel d'un triangle, dans le rapport 1: 2.

Note historique : en se basant sur le fait que

le point médian d'un triangle partage le segment déterminé par le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle, dans le rapport 1: 2 (Leonhard Euler 1765)

(IGNa) apparaît comme "la seconde droite d'Euler de ABC"[14].
Cet alignement a été redécouvert par Gaston Gohierre de Longchamps[15] en 1866.

IV. LE DEUXIÈME THÉORÈME Mt-G-Ge (1836)

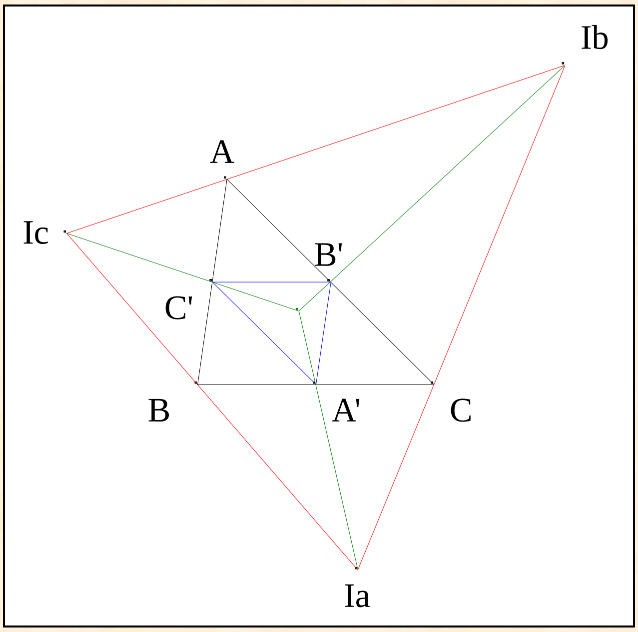
1. Le Mittenpunckt[16]

VISION

---

14 Grinberg D..
15 Longchamps (de) G. G., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1866) 124, proposition 4.
16 Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836).

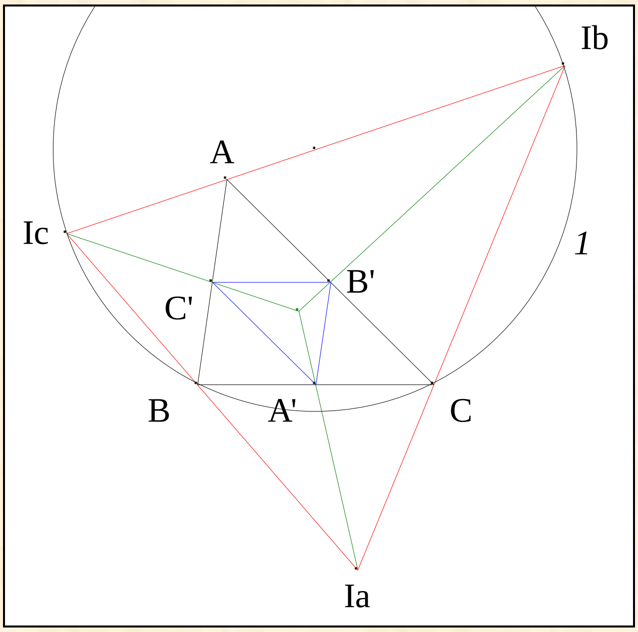
Figure :



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et IaIbIc le triangle excentral de ABC.

Donné : IaIbIc et A'B'C' sont en perspective.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (IaA') est la Ia-médiane du triangle IaCB
  (2) ABC étant le triangle orthique de IaIbIc, B, C, J et K sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle.
- D'après "D'une médiane à une symédiane" (Cf. Annexe 4), (IA') est la Ia-symédiane de IaIbIc.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IbB') est la Ib-symédiane de IaIbIc
  (IcC') est la Ic-symédiane de IaIbIc.

- D'après "Le point de Lemoine", (IaA'), (IbB') et (IcC') sont concourantes.

- **Conclusion :** par définition, IaIbIc et A'B'C' sont en perspective.

Scolies : **(1)** le centre de cette perspective, noté Mt, est appelé "le Mittenpunkt de ABC" et est répertorié sous X_9 chez ETC

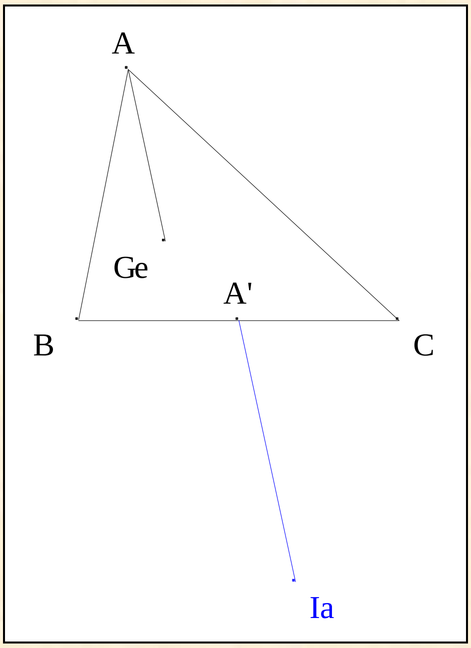
(2) (IaA'), (IbB'), (IcC') sont concourantes en Mt.

Note historique : nous trouvons une preuve de l'existence de ce point dans l'un des six articles publiés par von Nagel. Ce résultat, sera redécouvert par Karl Feuerbach et démontré synthétiquement par Joseph Neuberg[17].

2. Parallèle à une gergonnienne[18]

VISION

Figure :



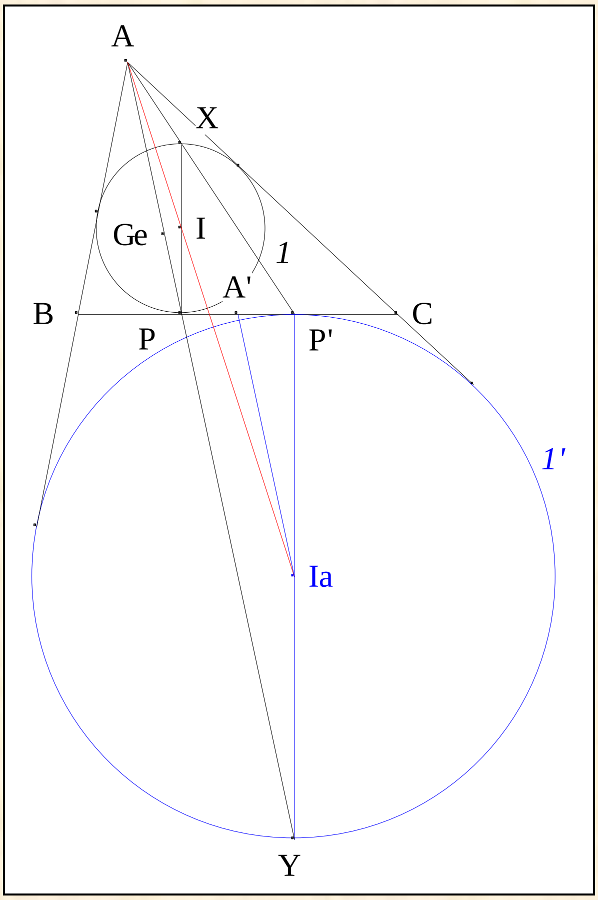
Traits : ABC un triangle,
Ia le A-excentre de ABC,
A' le milieu de [BC]
et Ge le point de Gergonne de ABC.

Donné : (AGe) est parallèle à (A'Ia).

---

[17] Neuberg J., *Nouvelle correspondance* 1 (1874).
[18] Durrande J.-B., *Annales* de Gergonne 14 (1823-24) 309, 313 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle inscrit dans ABC,
  I le centre de *1*,
  1' le A-excercle de ABC,
  P' le point de contact de *1'* avec (BC),
  P l'isotomique de P' relativement à [BC],
  X l'antipôle de P' relativement à *1*
  et Y l'antipôle de P' relativement à *1'*.

- **Scolies :** **(1)** P est le point de contact de *1* avec (BC)
  (2) (AP) passe par Ge.

- D'après III. 1. Une nagelienne, (AP') passe par X.

- **Scolie :** A, I, Ia sont alignés.

- Le quadrilatère PYP'X étant un trapèze, la droite des milieux (IIa) passant par A, A, P, Y sont alignés.

- D'après II. Le point de Gergonne, (AP) passe par Ge.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle P'PY, (APY) // (A'Ia).

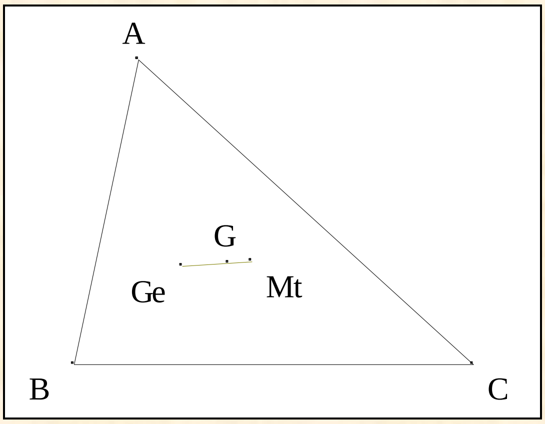
- **Conclusion :** (AGe) est parallèle à (A'Ia).

Scolie : d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle P'AY, (IaA') passe par le milieu de [AP'].

3. L'alignement Mt-G-Ge

VISION

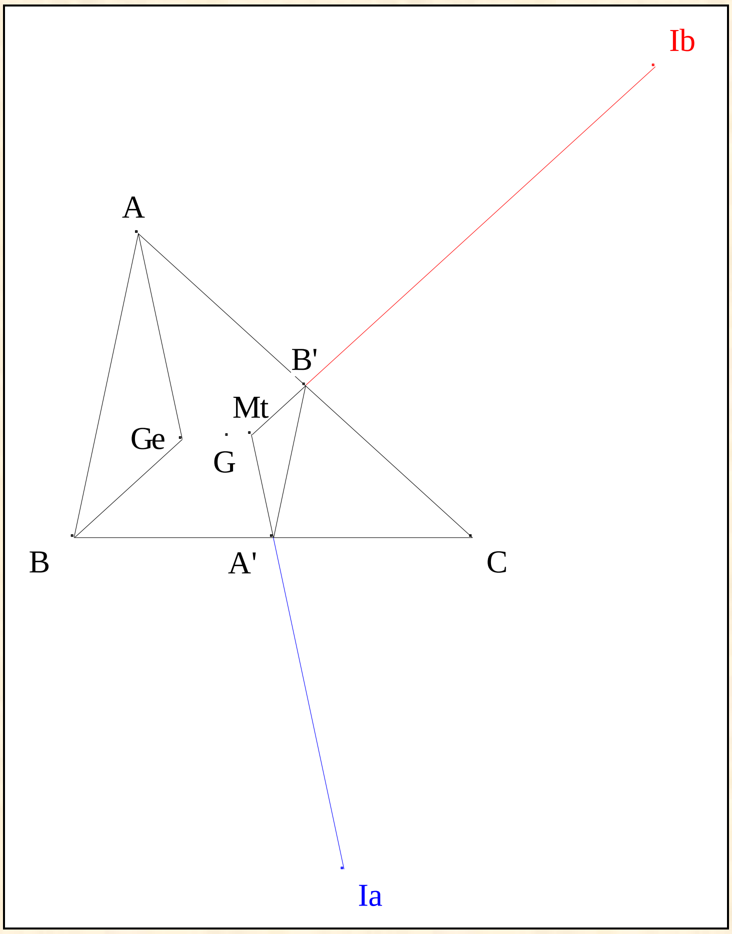
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	G	le point médian de ABC,
	Ge	le point de Gergonne de ABC
et	Mt	le Mittenpunkt de ABC.

Donné : Mt, G et Ge sont alignés.

VISUALISATION



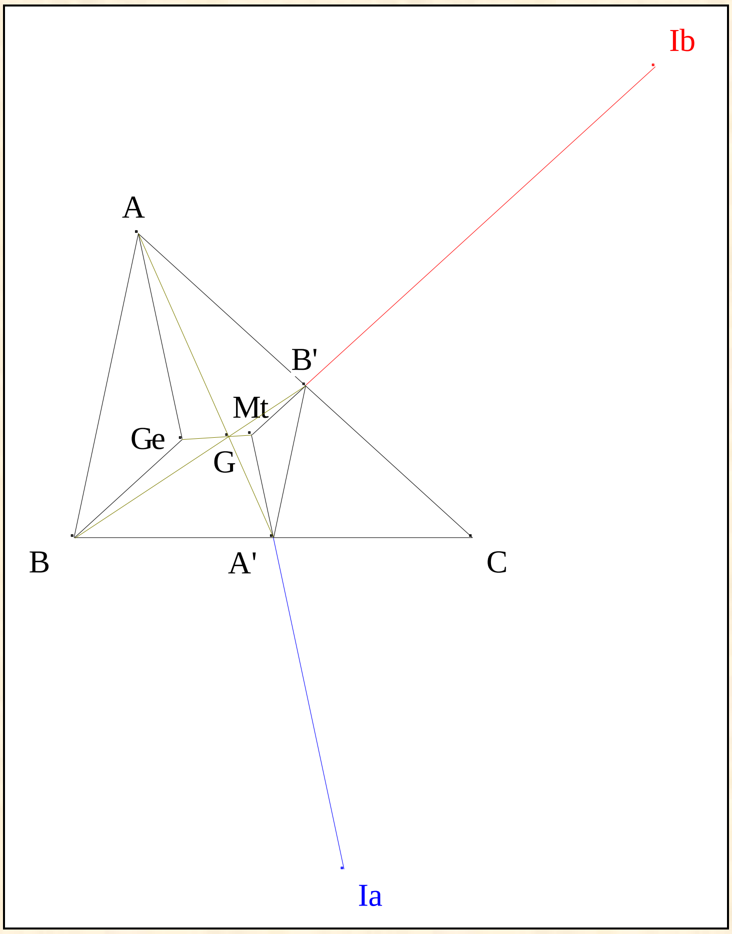
- Notons A', B' les milieux resp. de [BC], [CA]
  et Ia, Ib les A, B-excentres de ABC.

- D'après IV. 1. Le Mittenpunkt, Mt est le point d'intersection de (IaA') et (IbB').

- D'après IV. 2. Parallèle à une gergonnienne, **(1)** (AGe) // (A'Ia)
  (2) (BGe) // (B'Ib).

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à ABC, (AB) // (A'B').

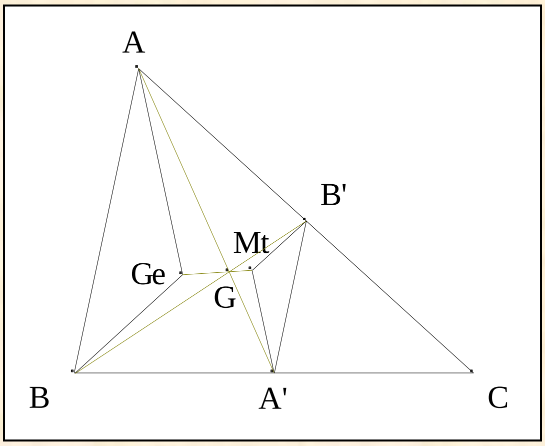
- Par définition, les triangles GeAB et MtA'B' sont homothétiques.



- **Scolie :** par définition, G est le point d'intersection de (AA') et (BB').

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" appliqué à GeAB et MtA'B',
  Mt, G et Ge sont alignés.

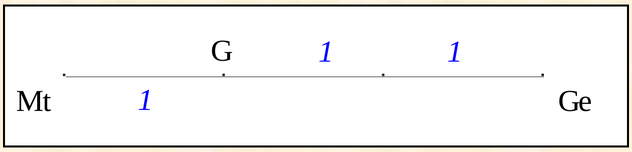
4. Une relation



- **Scolie :** G est étant le point médian de ABC, 2.GA' = GA.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Thalès", 2.GMt = GGe.

Scolie : la disposition



Énoncé traditionnel : le point médian d'un triangle partage le segment déterminé par le Mittenpunkt et le point de Gergonne d'un triangle, dans le rapport 1: 2.

V. TROISIÈME THÉORÈME I-O-Be

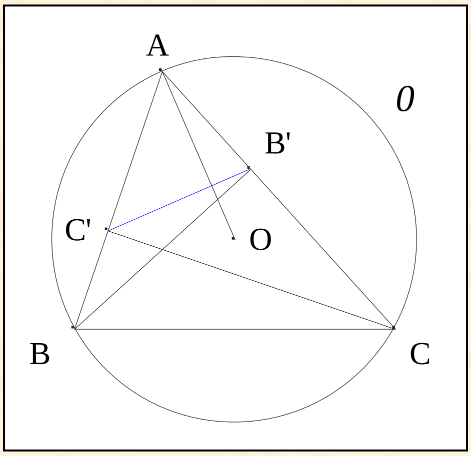
OU

LA DROITE (OI)

1. Un rayon[19]

VISION

Figure :

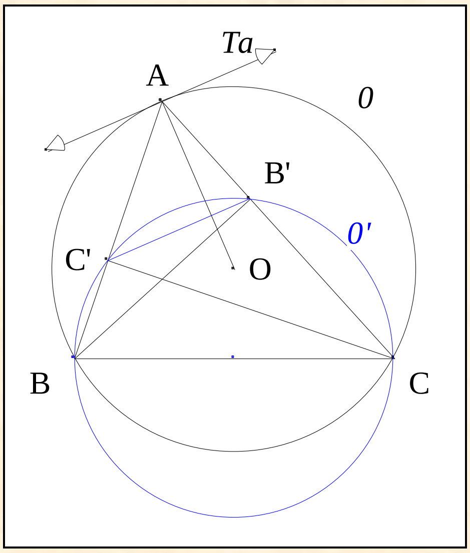


Traits : ABC un triangle non rectangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et B', C' les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC.

Donné : le rayon (AO) est perpendiculaire à (B'C').

VISUALISATION

[19] von Nagel C. H., *Nouvelles Annales* 1ère série **19** (1860) 354 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.
Ce mot apparaît pour la première fois en 1534 ; il sera largement répandu après les travaux de François Viète (1540-1603).



- Notons Ta la tangente à *0* en A
  et *0'* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C'.

- Les cercles *0'* et *0*, les points de base C et B, les moniennes (B'CA) et (C'BA), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (B'C') // Ta ;

- Par définition d'une tangente, Ta ⊥ (OA) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (B'C') ⊥ (OA).

- **Conclusion :** le rayon (AO) est perpendiculaire à (B'C').

Énoncé traditionnel : les rayons qui joignent les sommets d'un triangle non rectangle au centre du cercle circonscrit sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent deux à deux les pieds des hauteurs du triangle.

Note historique : une preuve en a été donnée en 1860 par Charles Pierre Housel. [20]

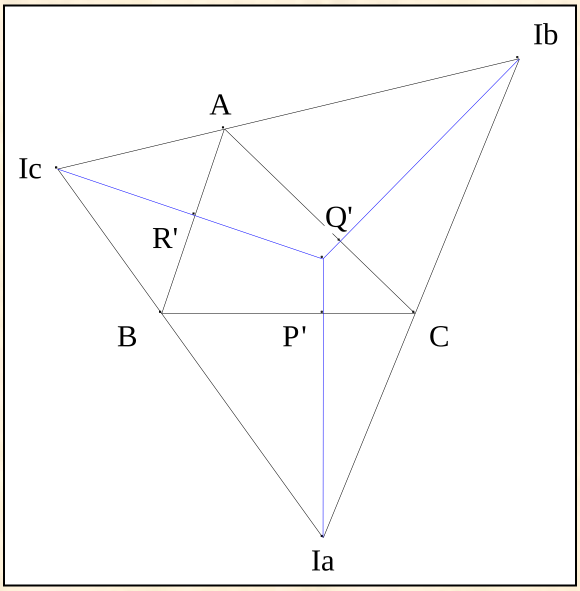
2. Le point de Bevan[21]

VISION

Figure :

[20] von Nagel C. H., *Nouvelles Annales* 1ère série **19** (1860) 440 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.
Ce mot apparaît pour la première fois en 1534 ; il sera largement répandu après les travaux de François Viète (1540-1603).

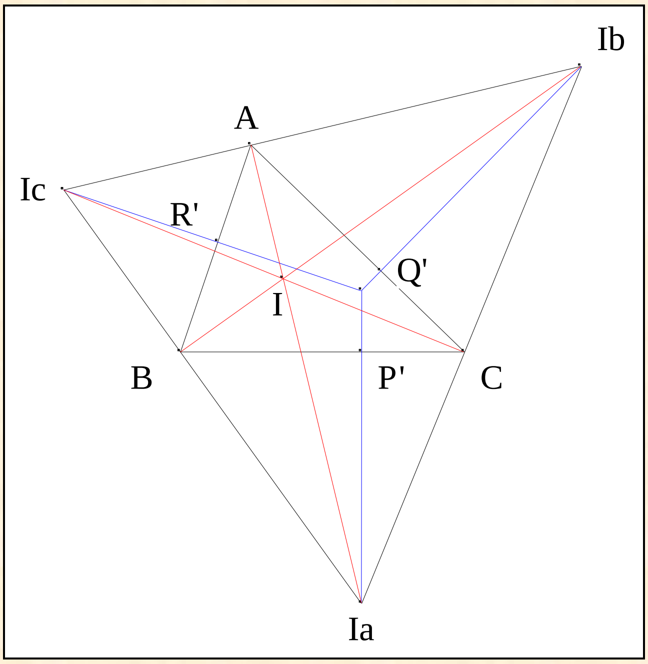
[21] Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn *I* (1804) 18.



Traits : ABC un triangle,
IaIbIc le triangle excentral de ABC,
et P', Q', R' les pieds des perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur (BC), (CA), (AB).

Donné : (IaP'), (IbQ') et (IcR') sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons I le centre de ABC.

- **Scolies :** **(1)** I est l'orthocentre de IaIbIc
  (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc.

- D'après V. 1. Un rayon, appliqué à IaIbIc,
  (IaP'), (IbQ') et (IcR') passent par le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.

- **Conclusion :** (IaP'), (IbQ') et (IcR') sont concourantes.

Scolie : ce point de concours, noté Be, est "le point de Bevan de ABC"
et est répertorié sous X_{40} chez ETC

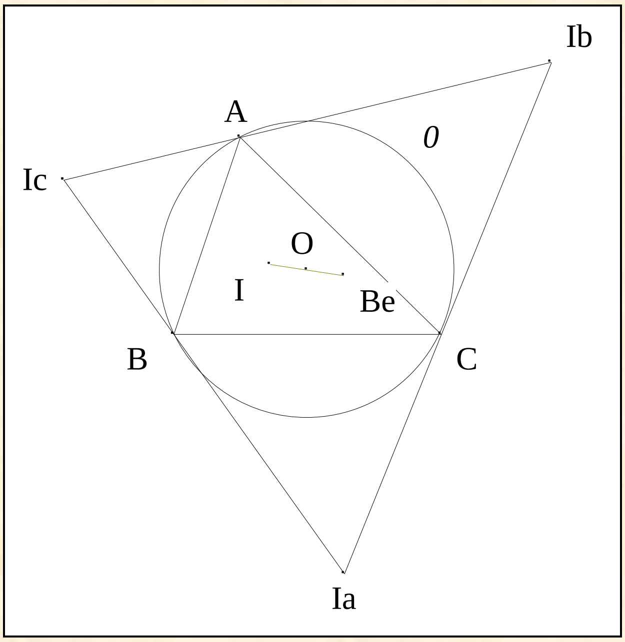
Énoncé traditionnel : le point de Bevan d'un triangle est le centre du cercle circonscrit du triangle excentral.

Note historique : ce résultat a été aussi démontré par Charles Pierre Housel[22].

3. Trois points alignés et une relation

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et Be le point de Bevan de ABC.

Donné : O est le milieu de [IBe].

VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** I est l'orthocentre de IaIbIc
  (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc

[22] Housel C. P., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1860) 438-439 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

(3) Be est le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.

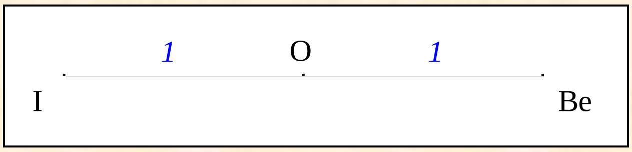
- D'après "Le cercle d'Euler-Bevan", *0* est le cercle d'Euler-Bevan de IaIbIc.
- D'après "La droite d'Euler", (IBe) est la droite d'Euler de IaIbIc.
- **Conclusion :** d'après Feuerbach "Le point N", O est le milieu de [IBe].

Note historique : l'ingénieur civil Benjamin Bevan[23] avait posé la question suivante :

"Montrer que le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC est le milieu du segment joignant le centre I du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit du triangle excentral et que le rayon de ce cercle est le double de celui circonscrivant ABC".

Une solution en a été donnée par John Butterworth[24].
Hamilton souligne que Mention avait lui aussi trouvé quelques dizaines d'années plus tard, le point de Bevan.

Scolie : la disposition



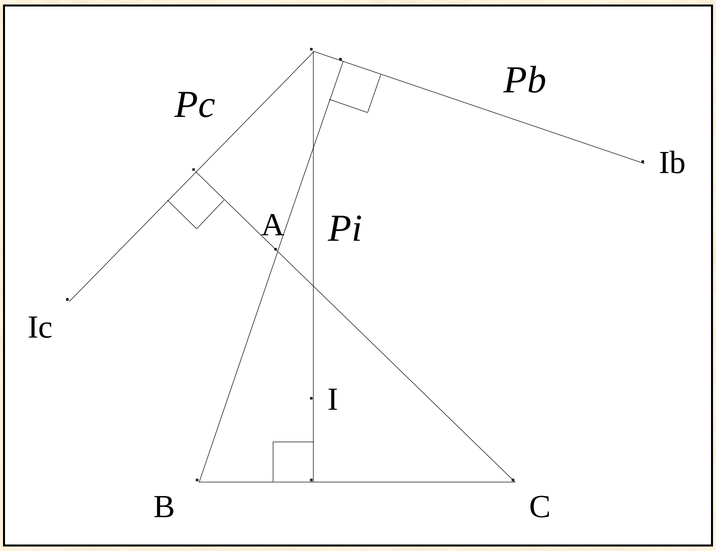
Énoncé traditionnel : les perpendiculaires abaissées des centres des excercles sur les côtés d'un triangle, se coupent en un même point également éloignés de ces trois excentres ; ce point, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit sont alignés et ce dernier point est au milieu des deux autres.

VI. QUATRIÈME THÉORÈME
OU
LA DROITE (OIa)

VISION

Figure :

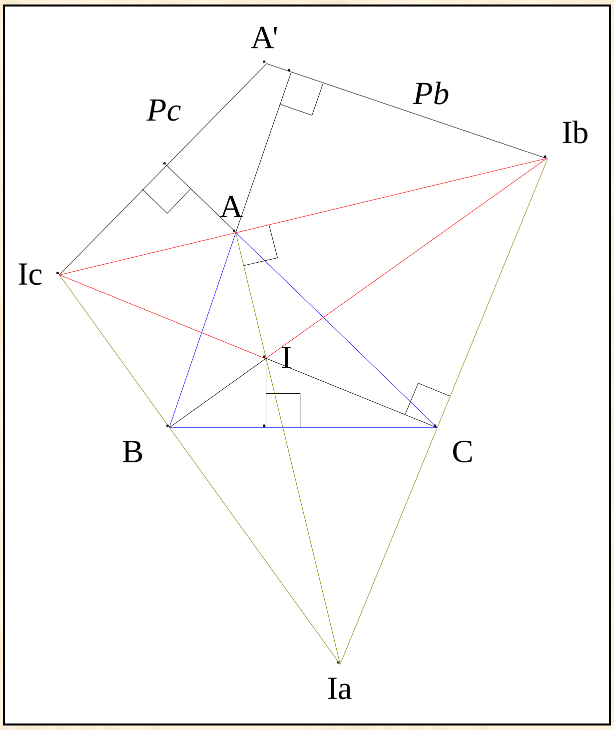
[23] Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 18.
[24] Butterworth J., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 143.



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	Ib, Ic	les B, C-excentres de ABC,
	*P*b, *P*c	les perpendiculaires abaissaissées de Ib, Ic resp. sur (AB), (AC)
et	*P*i	la perpendiculaire à (BC) passant par I.

Donné : *P*i, *P*b et *P*c sont concourantes.

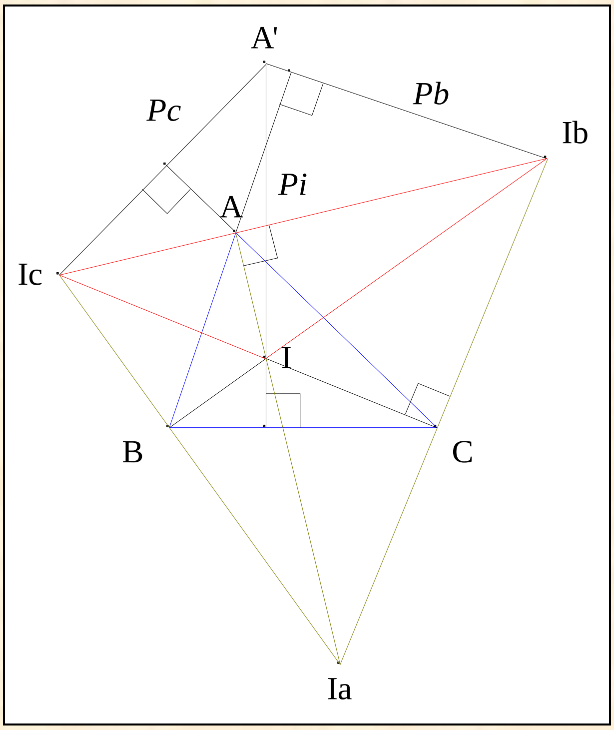
VISUALISATION



- Notons Ia le A-excentre de ABC
  et A' le point d'intersection de *P*b et *P*c.

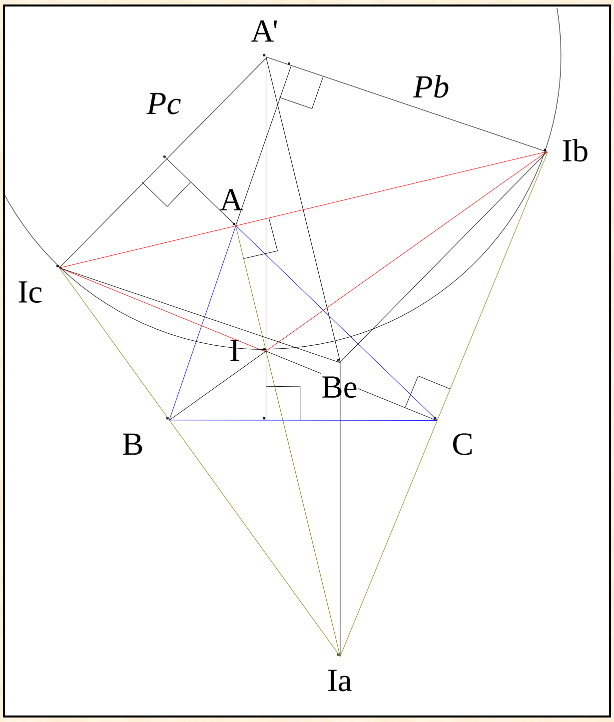
- **Scolies :** **(1)** I est l'orthocentre de A'B'C'
  (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc.

- Par définition, Ia est le pôle d'orthologie de ABC relativement à IIcIb ;
  en conséquence, ABC et IIcIb sont orthologiques[25].



- **Conclusion :** d'après Steiner "Deux triangles orthologiques" (Cf. Annexe 5),
  *P*i, *P*b et *P*c sont concourantes.

Scolies : **(1)** le cercle de centre A' passant par Ib



[25] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

- Notons Be le point de Bevan de ABC ; Be est le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.

- D'après V. 2. Le point de Bevan, le quadrilatère BeIbA'Ic est un parallélogramme.

- BeIbA'Ic ayant deux côtés consécutifs [BeIb] et [BeIc], égaux, est un losange.

- En conséquences, **(a)** A'Ib = A'Ic = BeIb = BeIa
  (b) le cercle de centre A' passant par Ib passe par Ic
  (c) (BeA') ⊥ (IbIc).

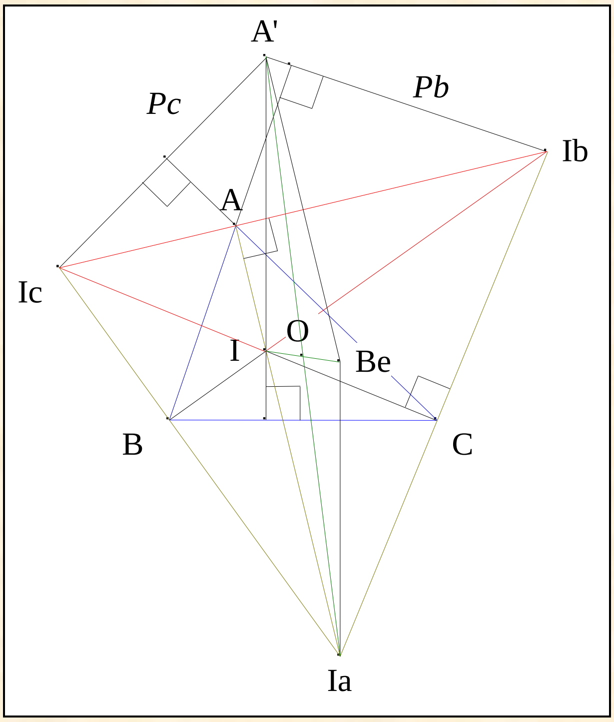
- Nous savons que I est l'orthocentre de IaIbIc.

- D'après Carnot "Une relation" (Cf. Annexe 6), IaI = BeA'.

- Le quadrilatère A'IIaBe ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, BeIa = A'I ;
  par transitivité de la relation =, A'Ib = A'I.

- **Conclusion :** le cercle de centre A' passant par Ib passe par Ic et I.

(2) L'alignement A'-O-Ia



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC.

- Nous savons que **(a)** O est le milieu de [IBe]
  (b) A'IIaBe est un parallélogramme.

- **Conclusion :** A', O et Ia sont alignés et O est le milieu de [A'Ia].

VII. CINQUIÈME THÉORÈME Naa-G-Ia

OU

UNE A-EXTRAVERSION

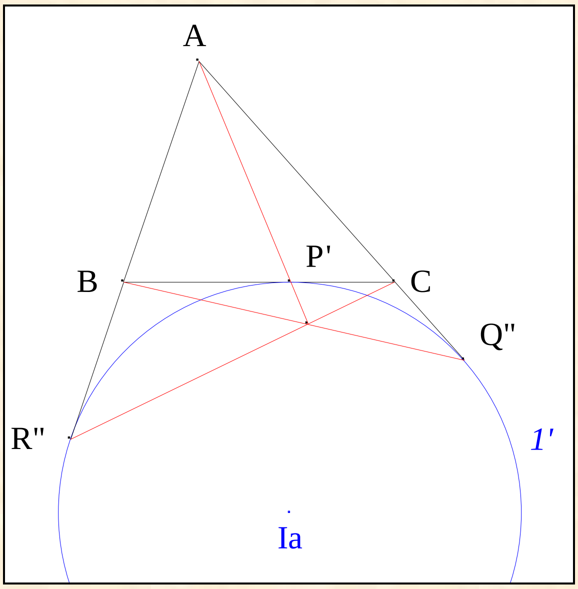
DE

LA SECONDE DROITE D'EULER

1. Points adjoints de Gergonne[26]

VISION

Figure :

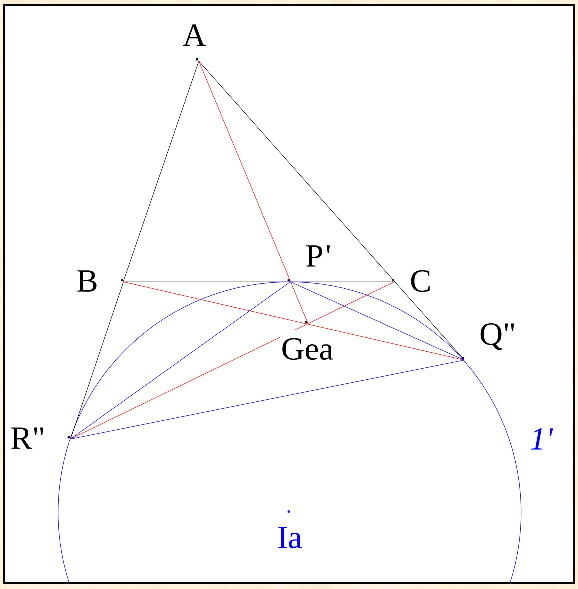


Traits : ABC un triangle,
1' le A-excercle de ABC,
Ia le centre de *1'*
et P', Q", R" les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB).

Donné : (AP'), (BQ") et (CR") sont concourantes.

VISUALISATION

[26] Adams C., *Die Lehre von den Transversalen* (1843) 31f.



- D'après II. 1. Trigramma mysticum, scolie, ABC et P'Q"R" sont perspectifs.

- **Conclusion :** par définition, (AP'), (BQ") et (CR") sont concourantes.

- Notons Gea ce point de concours
  et Ge le point de Gergonne de ABC.

Scolies : **(1)** ce point de concours Gea est "le A-point adjoint à Ge de ABC"

(2) Ge a trois points adjoints

(3) P'Q"R" est "le A-extriangle de Gergonne de ABC" ;
(BQ") et (CR") sont deux "A-exgergonniennes de ABC".

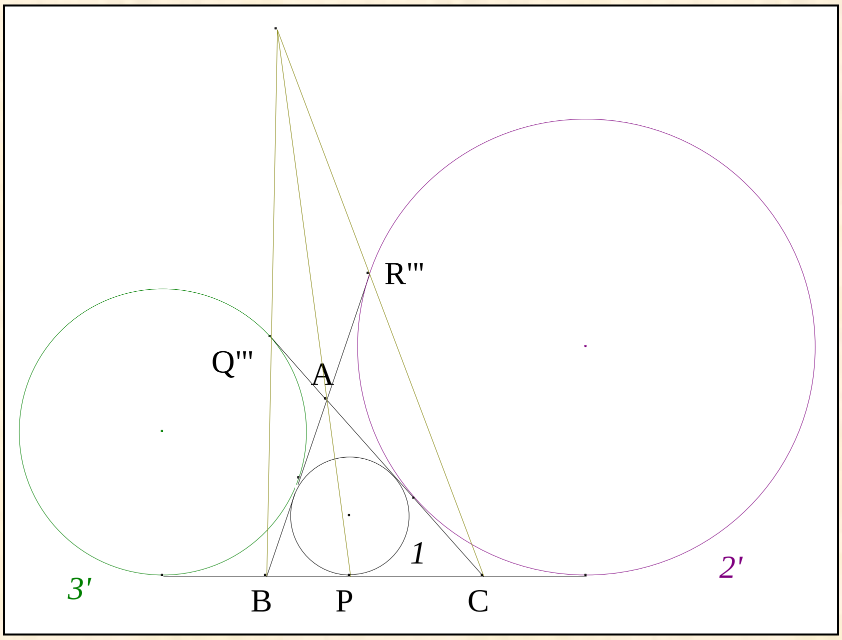
Note historique : ce résultat de Carl Adams a été publié dans la revue belge *Mathesis*[27].

2. Points adjoints de Nagel

VISION

Figure :

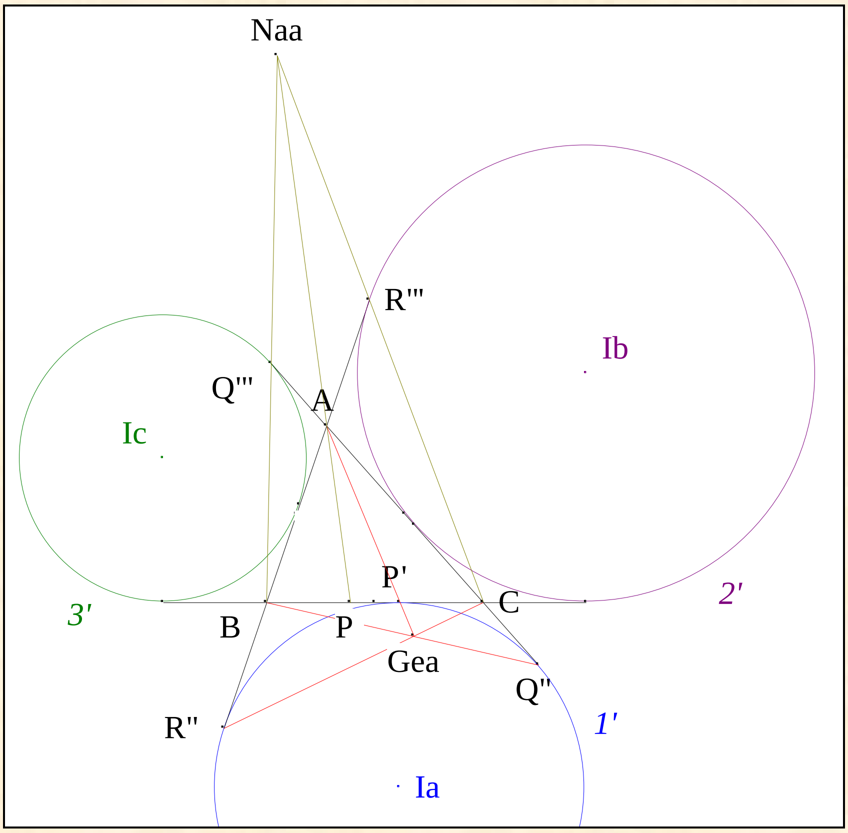
[27] *Mathesis* (1887) 59.



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
P le point de contact de *1* avec (BC),
2', *3'* les B, C-excercle de ABC,
Q''' le point de contact de *3'* avec (CA)
et R''' le point de contact de *2'* avec (AB).

Donné : (AP), (BQ''') et (CR''') sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons *1'* le A-excercle de ABC,
  P', Q", R" les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
  Ge le point de Gergonne de ABC
  et Gea, le A-point adjoint à Ge de ABC.

- **Scolies :**
  (1) P et P' sont isotomiques relativement à [BC]
  (2) R" et R"' sont isotomiques relativement à [AB]
  (3) Q"' et Q"' sont isotomiques relativement à [CA].

- D'après VII. 1. Points adjoints de Gergonne, (AP'), (BQ") et (CR") sont concourantes en Gea

- **Conclusion :** d'après de Longchamps "Points isotomiques relativement à un triangle" (Cf. Annexe 7) appliqué à ABC,
  (AP), (BQ"') et (CR"') sont concourantes.

- Notons Naa ce point de concours
  et Na le point de Nagel de ABC.

Scolies :

(1) ce point de concours est "le A-point adjoint à Na de ABC"

(2) Na a trois points adjoints

(3) (NaaAP) passe par Ge

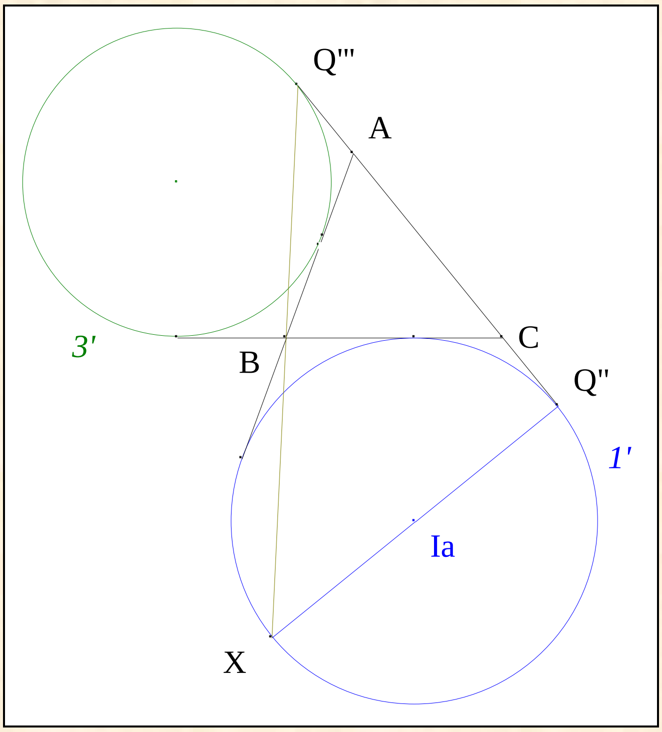
(4) (BQ"') et (CR"') sont deux "A-exnageliennes de ABC".

Commentaire : une preuve du résultat de Longchamps peut se baser sur celui de Steinbart et d'autres…

3. La A-exnagelienne (BQ"')

VISION

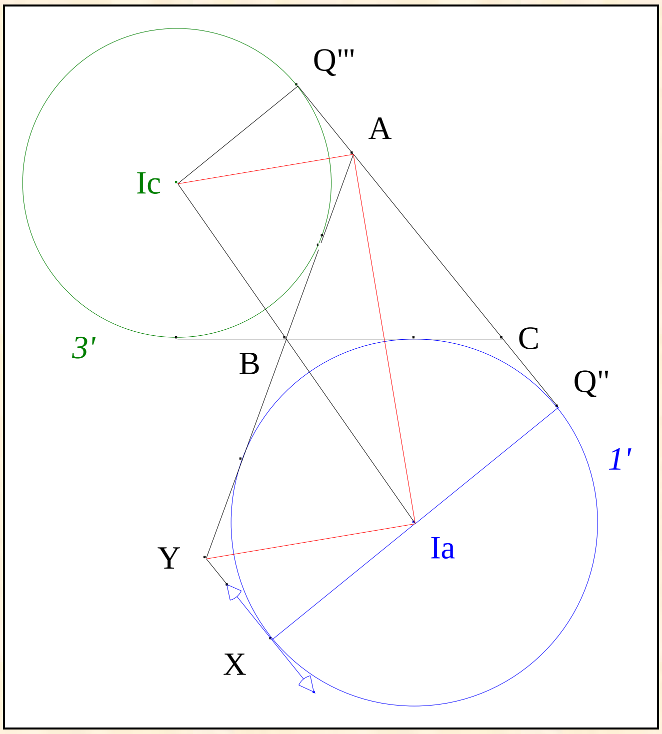
Figure :



Traits : ABC un triangle,
1', *3'* le A, C-excercles de ABC,
Ia le centre de *1'*,
Q" le point de contact de *1'* avec (CA),
Q''' le point de contact de *3'* avec (CA)
et X le point de *1'*, diamétralement opposé à Q".

Donné : (BQ''') passe par X.

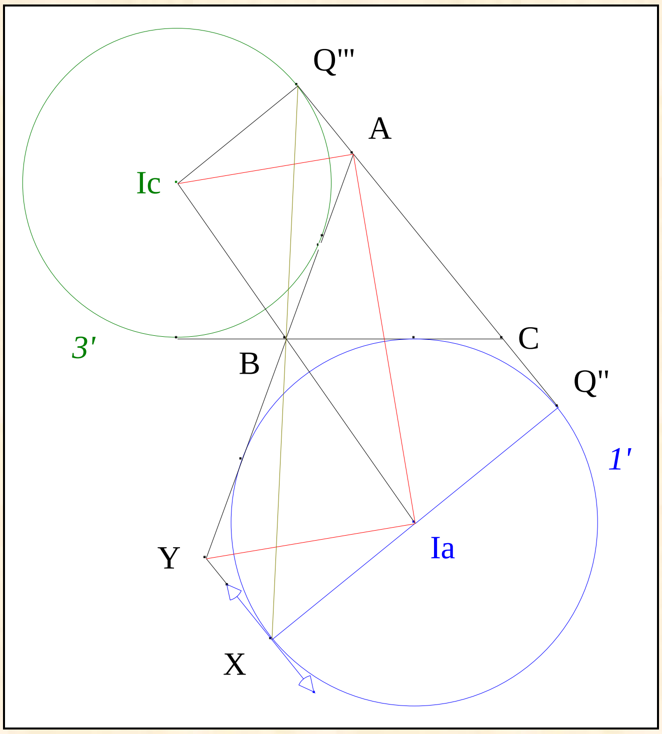
VISUALISATION



- Notons Ic le centre de *3'*,
  Tx la tangente à *1'* en X
  et Y le point d'intersection de Tx avec (AB).

- **Scolies :** **(1)** Tx i.e (YX) est parallèle à (Q"CAQ"')
  (2) (IaX) est parallèle (IcQ"')

- D'après Euclide "L'angle droit pivotant" (Cf. Annexe 3) (IaY) ⊥ (IaA) ;
  les bissectrices intérieure et extérieure de ABC en C, étant perpendiculaires, (AIa) ⊥ (AIc) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IaY) // (AIc).



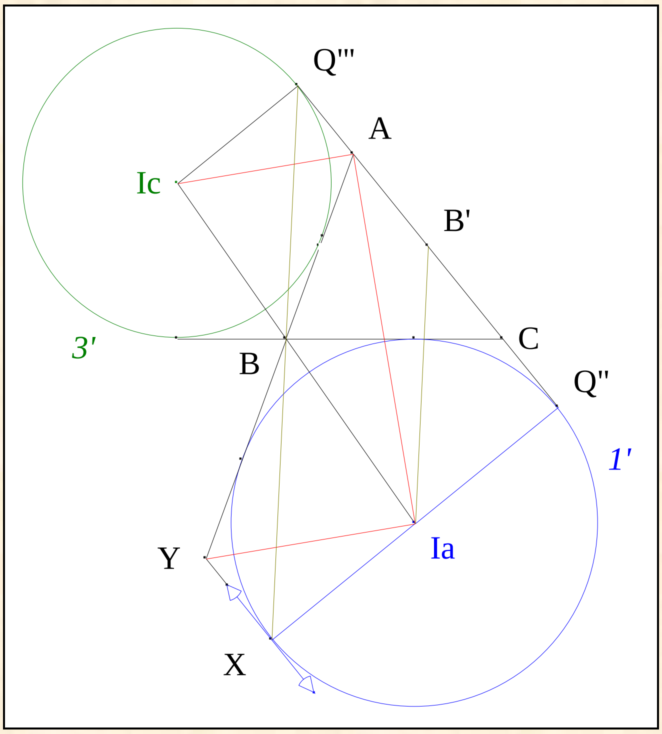
- **Scolie :** Ia, B et Ic sont alignés.

- Les triangles IaYX et IcAQ"' ayant leurs côtés correspondants parallèles deux à deux, sont homothétiques.

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 1)
  appliqué aux triangles homothétiques IaYX et IcAQ"', B, X et Q"' sont alignés.

- **Conclusion :** (BQ"') passe par X.

Scolies : **(1)** une parallèle à (BQ"')



- Notons B' le milieu de [CA]

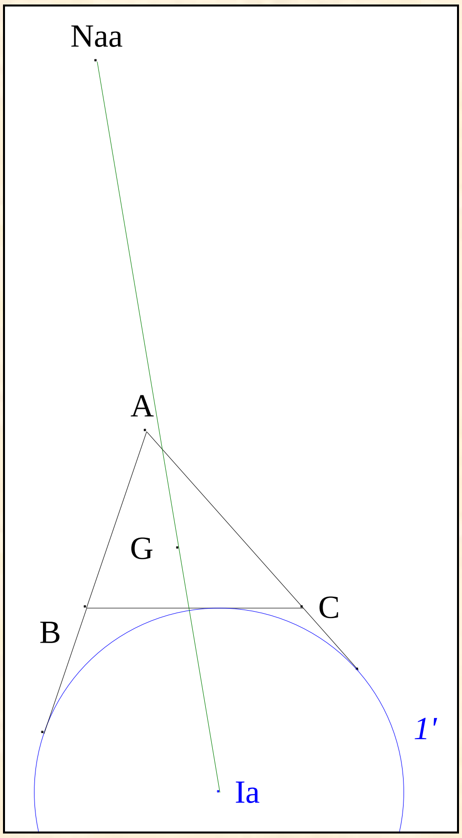
- **Conclusion :** d'après Thalès, "La droite des milieux" appliquée au triangle Q"Q"'X, (IaB') // (BXQ"').

(2) D'après VII. 2. Points adjoints de Nagel, (BXQ"') passe par Naa.

4. L'alignement Naa-G-Ia

VISION

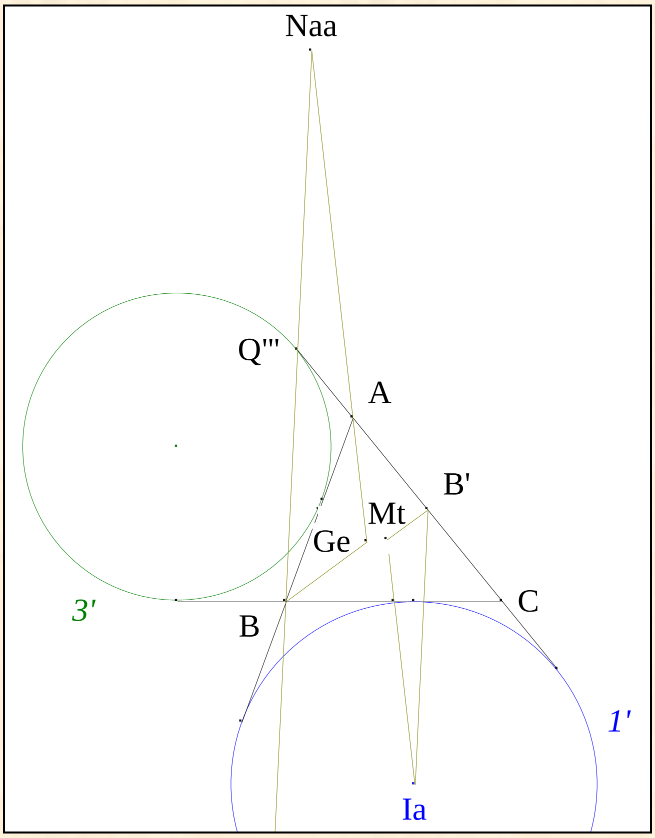
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1'	le A-excercle de ABC,
	Ia	le centre de *1'*,
	G	le point médian de ABC
et	Naa	le A-point adjoint de Nagel de ABC.

Donné : Naa, G et Ia sont alignés.

VISUALISATION



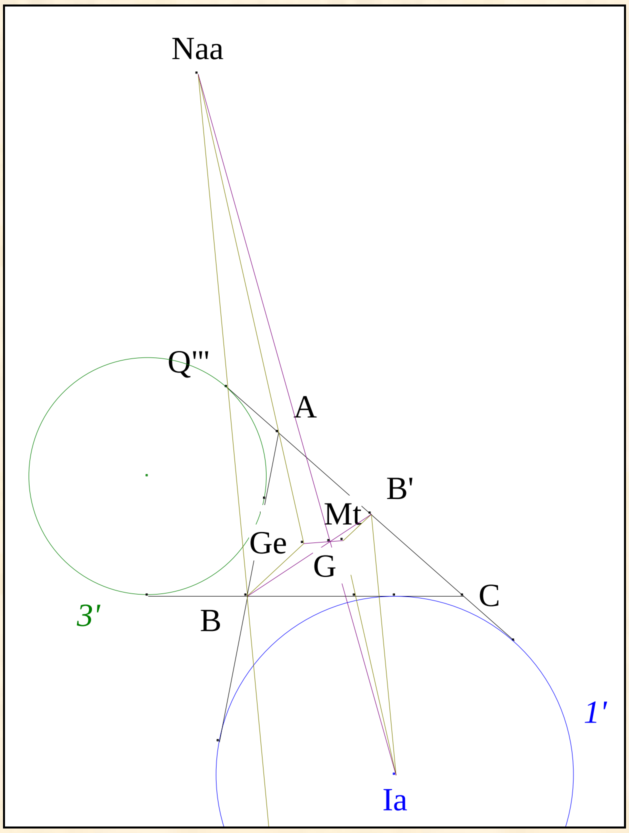
- Notons 3' le C-excercles de ABC,
  Q''' le point de contact de 3' avec (CA)
  B' le milieu de [CA],
  Ge le point de Gergonne de ABC
  et Mt le Mittenpunkt de ABC.

- D'après VII. 3. Une exnagelienne, scolie 1; (IaB') // (BXQ''').

- D'après IV. 2. Parallèle à une gergonnienene, (B'Mt) // (BGe).

- D'après IV. 2. Parallèle à une gergonnienne
  et VII. 2. Points adjoints de Nagel, (IaMt) // (NaaGe).

- Par définition, les triangles MtIaB' et GeNaaB sont homothétiques.



- **Scolies :** **(1)** d'après IV. 2. Mt, G et Ge sont alignés
  (2) par définition, B', G et B sont alignés.

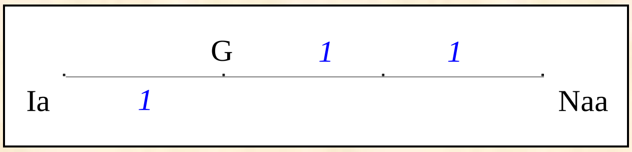
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annxe 1) appliqué à MtIaB' et GeNaaB, Ia, G et Naa sont alignés.

5. Une relation

- G est étant le point médian de ABC ; en conséquence, 2.GB' = GB.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Thalès", 2.GIa = GNaa.

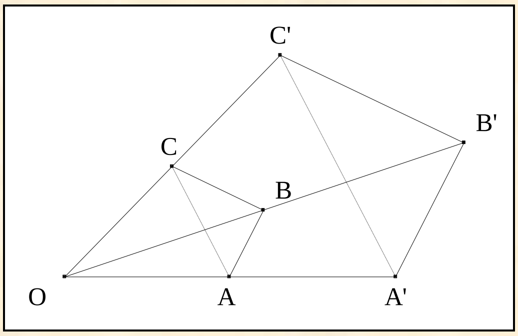
Scolie : la disposition



Énoncé traditionnel : le point médian d'un triangle partage le segment déterminé par Ia et Naa, dans le rapport 1: 2.

VIII. ANNEXE

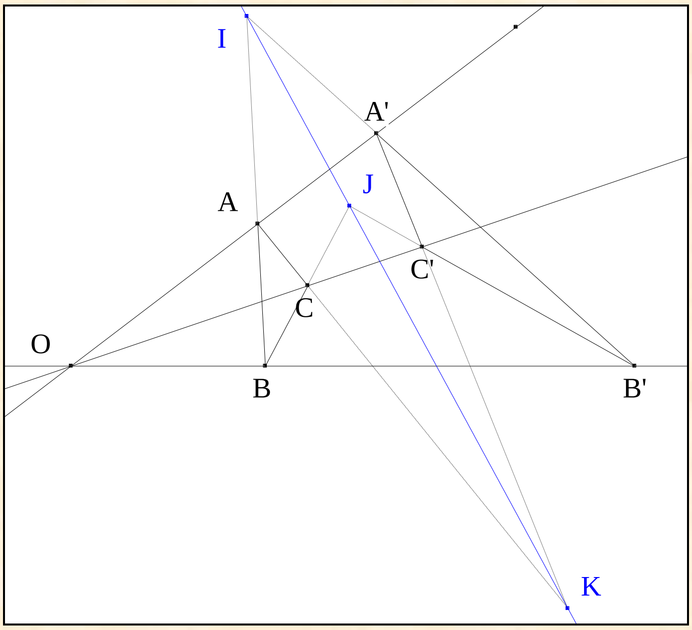
1. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que **(1)** (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C').

Donné : (AC) est parallèle à (A'C').

2. Le théorème des deux triangles de Desargues[28]

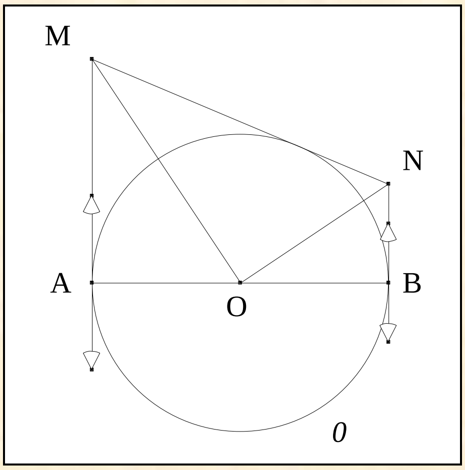


Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
O le point de concours de (AA') et (BB'),
I le point d'intersection de (AB) et (A'B'),
J le point d'intersection de (BC) et (B'C')
et K le point d'intersection de (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.

[28] Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.

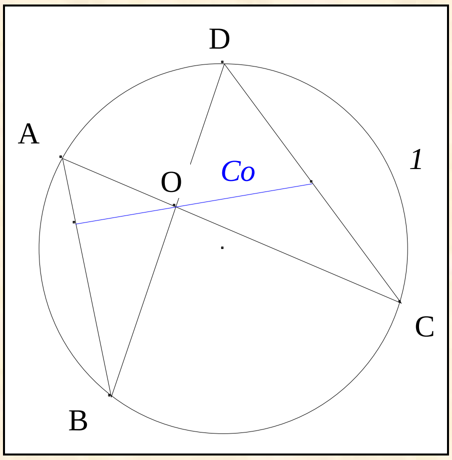
3. L'angle droit pivotant



Traits :	*0*	un cercle,
	O	le centre de *0*,
	A, B	deux points de *0* diamétraux opposés,
	Ta, Tb	les tangentes à *0* resp. en A, B,
et	M, N	deux points du même demi-plan de frontière (AB), situés resp. sur Ta et Tb.

Donné : le triangle ONM est O-rectangle *si, et seulement si,* (MN) est tangente à *0*.

4. D'une médiane à une symédiane

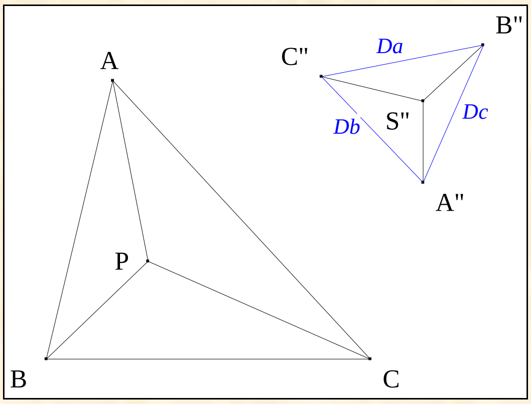


Traits :	*1*	un cercle,
	ABDC	un quadrilatère croisé, inscrit dans *1*,
	O	le point d'intersection des côtés [AC] et [BD],
et	*C*o	une O-cévienne du triangle OAB.

Donné : *C*o est la O-médiane du triangle OCD
si, et seulement si,
*C*o est la O-symédiane de OAB.

5. Deux triangles orthologiques[29]

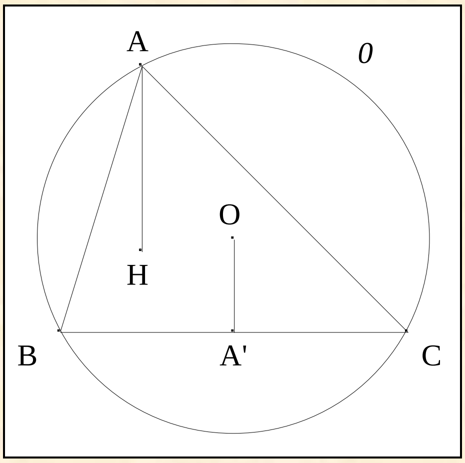
[29] Steiner J., Problème 54, *Journal* de Crelle vol. 2, 3.



Hypothèses :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	*D*a	une perpendiculaire à (PA),
	*D*b	une perpendiculaire à (PB),
	*D*c	une perpendiculaire à (PC),
	A", B", C"	les points d'intersection resp. de *D*b et *D*c, de *D*c et *D*a, de *D*a et *D*b,
	*D*a"	la perpendiculaire à (BC) passant par A",
	*D*b"	la perpendiculaire à (CA) passant par B"
et	S"	le point d'intersection de *D*a" et *D*b".

Conclusion : (C"S") et (AB) sont perpendiculaires.

6. Une relation[30]

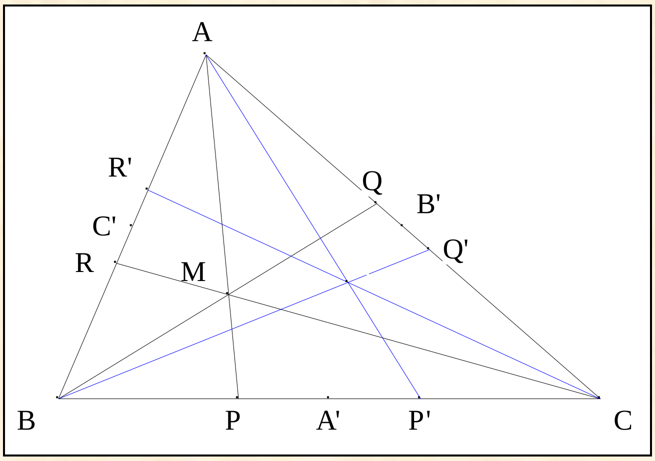


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*
et	A'	le milieu de [BC],

Donné : AH = 2.OA'.

7. Points isotomiques relativement à un triangle[31]

[30] Carnot L., *Géométrie de position* (1803).
[31] de Longchamps, *Nouvelles Annales* (1866).



Traits :	ABC	un triangle,
	M	un point,
	PQR	le triangle M-cévien de ABC,
	A', B', C'	les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]
et	P', Q', R'	les symétriques de P, Q, R resp. par rapport à A', B', C'.

Donné : (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes.