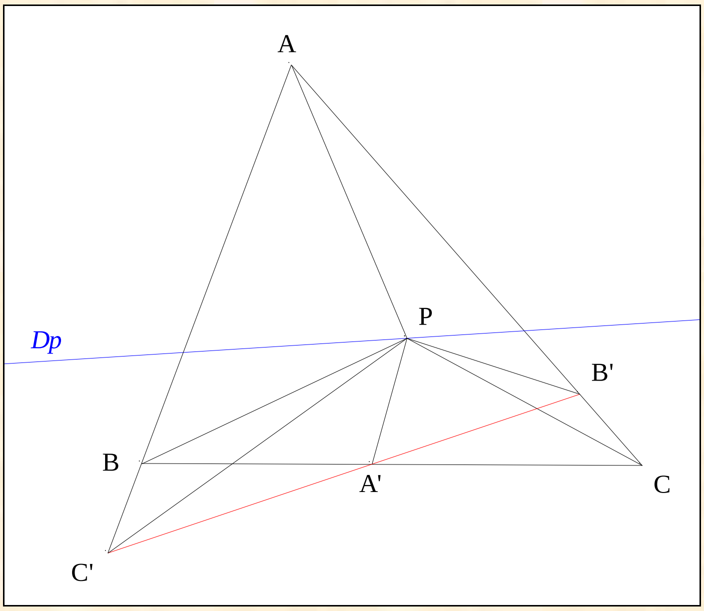
MANTEL * NOYER * DROZ – FARNY * GOORMAGHTIGH

OR

SIMSON – WALLACE GENERALIZED

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur propose de revisiter la droite de Droz-Farny non pas d'une façon directe [2] mais indirectement i.e. à partir d'une généralisation dû à René Goormaghtigh en 1930. Cette recherche a permis à l'auteur de préciser ses sources historiques et à attribuer la paternité du résultat de Droz-Farny datant de 1899, à Albert Noyer en 1893 et plus précisément à W. Mantel en 1889. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. L'auteur remercie très sincèrement les professeurs Francisco Bellot Rosado, Grégoire Nicollier, Francisco Garcia Capitan, John Sharp et Ercole Suppa pour leur contribution historique à cet article.

Abstract. The author proposes to revisit the Droz-Farny line not directly but indirectly i.e. from a generalization due to René Goormaghtigh in 1930. This research has allowed the author to specify its sources and to attribute the authorship of the result of Droz-Farny dating from 1899, Albert Noyer in 1893 and W. Mantel specifically in 1889.

---

1 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/06/2012.

2 Ayme J.-L., A synthetic proof of the Droz-Farny line theorem, *Forum Geom*. **4** (2004) 219-224 ; http://forumgeom.fau.edu/

The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Acknowledgment. The author very sincerely thank professors Francisco Bellot Rosado, Gregoire Nicollier, Francisco Garcia Capitan, John Sharp and Ercole Suppa for their historical contribution to this article.

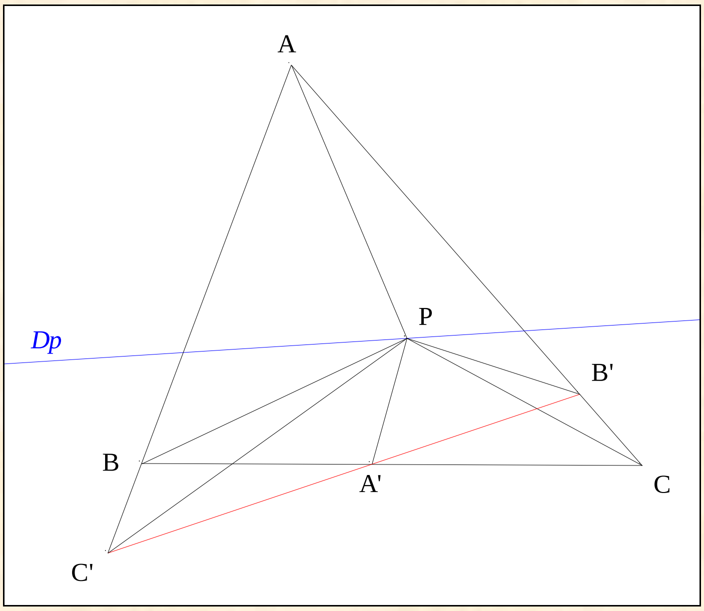
Sommaire

A. LE RÉSULTAT DE RENÉ GOORMAGHTIGH

1. Le problème

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
*D*p une droite passant par P,
A' le point d'intersection du symétrique de (AP) par rapport à *D*p avec (BC),
B' le point d'intersection du symétrique de (BP) par rapport à *D*p avec (CA)
et C' le point d'intersection du symétrique de (CP) par rapport à *D*p avec (AB).

Donné : A', B' et C' sont alignés. [3]

2. Archive

[3] Goormaghtigh R., Sur une généralisation du théorème de Noyer, Droz-Farny et Neuberg, *Mathesis* **44** (1930) 25
Prove collinearity, 2012 USAMO Day **2** #**5** and USAJMO Day **2** #**6** ; AoPS du 25/04/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2669960
Prove that I,J, K are collinear., AoPs du 22/07/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=490232

— 25 —

4. *Sur une généralisation des théorèmes de* NOYER-DROZ-FARNY *et* NEUBERG. Si par les sommets A, B, C d'un triangle, on mène des parallèles AA', BB', CC' aux côtés opposés et des parallèles AX, BY, CZ à une direction donnée, les symétriques de AA', BB', CC' respectivement par rapport à AX, BY, CZ concourent en un point du cercle ABC, car l'angle compris entre PB et PC, par exemple, est égal ou supplémentaire à l'angle de AB et AC.

Si l'on transforme la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle quelconque, on obtient, en changeant les notations, la proposition suivante :

Étant donnés un triangle ABC, *un point* M *et une droite* Δ *passant par* M, *les symétriques de* AM, BM, CM, *par rapport à* Δ, *rencontrent* BC, CA, AB *en trois points appartenant à une droite* Δ' ; *lorsque* Δ *pivote autour de* M, Δ' *enveloppe la conique inscrite à* ABC, *dont* M *est un des foyers.*

Lorsque M coïncide avec l'orthocentre H, AM est perpendiculaire à BC, et la symétrique de AM, par rapport à Δ, contient dès lors le milieu du segment que déterminent sur BC les deux droites issues de H et inclinées à 45° sur Δ. On retrouve ainsi le théorème de NOYER-DROZ-FARNY (JMS, 1893-39, ET, 1899, M, 1899-162, 1913-256, 262, 1915-20, 91, JV, 1916-1917-56, IM, 1917-19, M, 1922-52, 1925-17, 98) et aussi celui de NEUBERG (M, 1913-262), en tenant compte de la proposition obtenue ci-dessus en ce qui concerne l'enveloppe de Δ'.

(R. GOORMAGHTIGH)

[4]

3. Note historique

Nous pouvons observer dans l'archive précédente que René Goormaghtigh ouvre une nouvelle voie en ce qui concerne la droite de Droz-Farny

If M *is the orthocenter, we get the Noyer-Droz-Farny theorem.*

Le résultat de René Goormaghtigh qui date de 1930 a été présenté sur le site *Hyacinthos* [5] en 2003 par Darij Grinberg qui en a donnée une solution basée sur la loi des sinus suivie du théorème de Ménélaüs [6].
En 2007, Marcello Tarquini [7] propose une preuve synthétique basée sur une idée de Gerhard Hessenberg [8] datant de 1930

Les triangles ABC, AB'C', A'BC' *et* A'B'C *partagent le même isogonal de* P.

M. Tarquini calquant sa preuve sur celle de G. Hessenberg l'a qualifie par cette expression

Hessenberg couterpairing theorem.

---

[4] Communiqué par le professeur Francisco Bellot Rosado ;
Goormaghtigh R., Sur une généralisation du théorème de Noyer, Droz-Farny et Neuberg, *Mathesis* **44** (1930) 25

[5] Goormaghtigh in JFM, Message *Hyacinthos* # **8664** du 18/11/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[6] Goormaghtigh in JFM, Message *Hyacinthos* # **8745** du 29/11/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[7] Tarquini M., Goormaghtigh and isogonals, Message *Hyacinthos* # **14761** du 16/01/2007 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[8] Hessenberg G. (1874-1925), Grundlagen der Geometrie (1930)

Le résultat de Goormaghtigh a été à nouveau proposé en 2012 lors de USAMO et USAJMO [9].
La même année Titu Andreescu et Cosmin Pohoata [10] redécouvrent ce sujet dans la revue électronique *Mathematical Reflections* et repropose la voie ouverte par R. Goormaghtigh qui conduit à la droite de Droz-Farny.

4. Une courte biographie de René Goormaghtigh

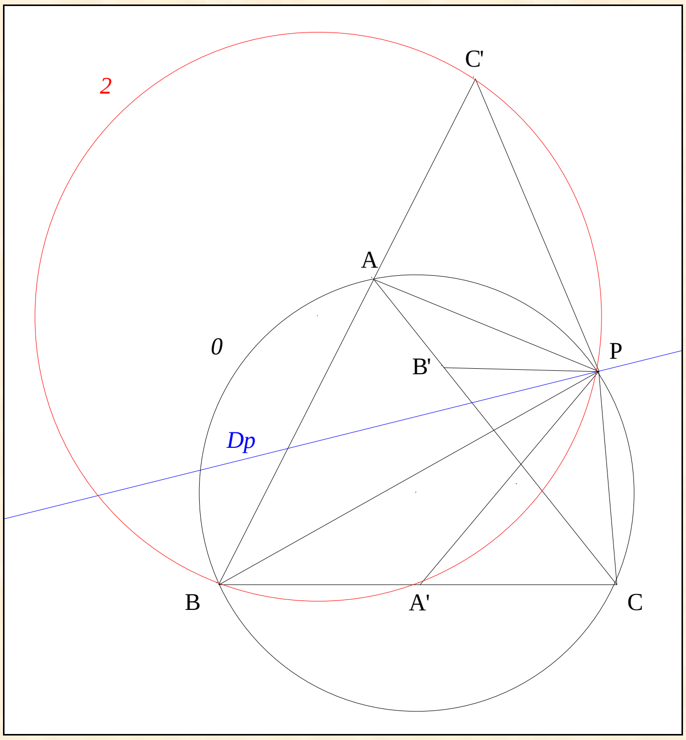
René Goormaghtigh est né à Ostende (Flandre-Occidentale, Belgique) le 13 octobre 1893.
Èlève de l'Athénée Royal d'Ostende, il obtient son diplôme de fin d'étude en juillet 1910 ainsi que le prix du Gouvernement.
Étudiant à l'université de Gand, il obtient en 1919 le diplôme d'Ingénieur des Constructions civiles qui lui permet d'être employé à l'usine *La Brugeoise*. En 1928, il réorganise les usines de Bruges et en 1943, en devient le directeur général. En 1956, il est nommé vice-président de la Société lors de la fusion de celle-ci avec les Ateliers Métallurgiques.
En 1952, il est nommé conseiller de la Société Générale de Belgique et remplit des mandats d'administrateur de plusieurs sociétés industrielles.
En 1958, une première crise cardiaque l'oblige à prendre un long repos et à cesser ses activités en 1959 suite aux recommandations de ses médecins. Il se retire à Saint-André-des-Bruges oú il joue du piano et continue ses travaux mathématiques dans le domaine de la Géométrie du Triangle qu'il avait commencé en 1910 et fait part dans les revues comme *Mathesis, American Mathematical Monthly* et *Nouvelles Annales de Mathématiques.*
Il décède d'une crise cardiaque à Ixelles le 10 février 1960.

Un article consacré à sa vie et à son œuvre a été écrit en 1961 par l'éditeur de *Mathesis*, Roland Deaux [11] et une communication vivante en a été donnée par le professeur Francisco Bellot-Rosado [12] en 2010 lors du 36-ème Congrès de la SBPMef.

[9] Prove Collinearity, 2012 USAMO Day **2** # **5** and USAJMO Day **2** # 6 ; AoPS du 25/04/2012
[10] Andreescu T. and Pohoata C., Back to Euclidean Geometry : Droz-Farny Demystified, *Mathematical Reflections* **3** (2012) 2-3 ; https://www.awesomemath.org/
[11] Deaux R., René Goormaghtigh, *Mathesis* **69** (1961) 257-273.
[12] Bellot-Rosado F., René Goormaghtigh, ingénieur et géomètre de MATHESIS, 36-ème Congrès de SBPMef, Dinant (2010)

B. LA PREUVE

Cas particulier : **P est sur le cercle circonscrit**



- Une chasse angulaire à **Π** près :

nous avons : <A'BC' = <CBA ;

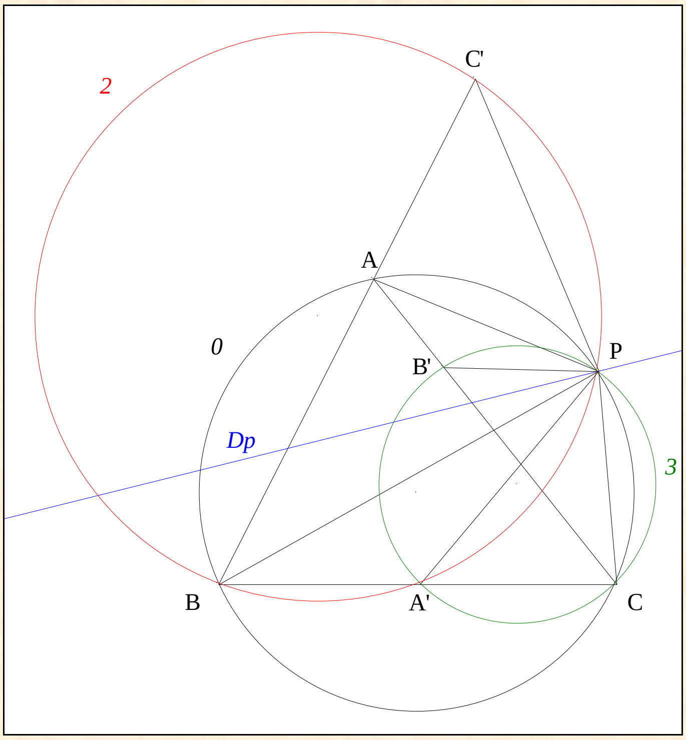
d'après "Quatre points cocycliques", <CBA = <APC ;

d'après les hypothèses de symétrie, <APC = <C'PA' ;

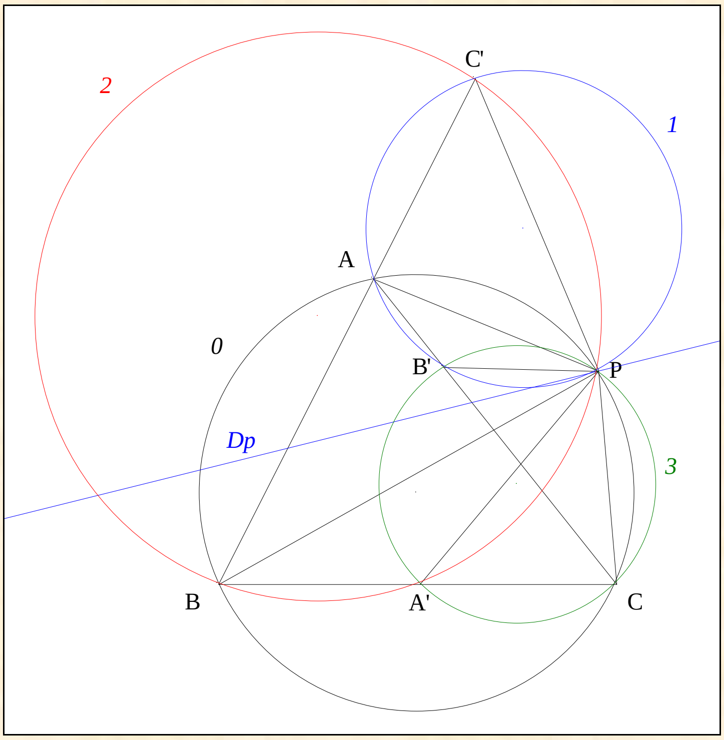
par transitivité de la relation =, <A'BC' = <C'PA'.

- **Conclusion partielle :** A', B, C' et P sont cocycliques.

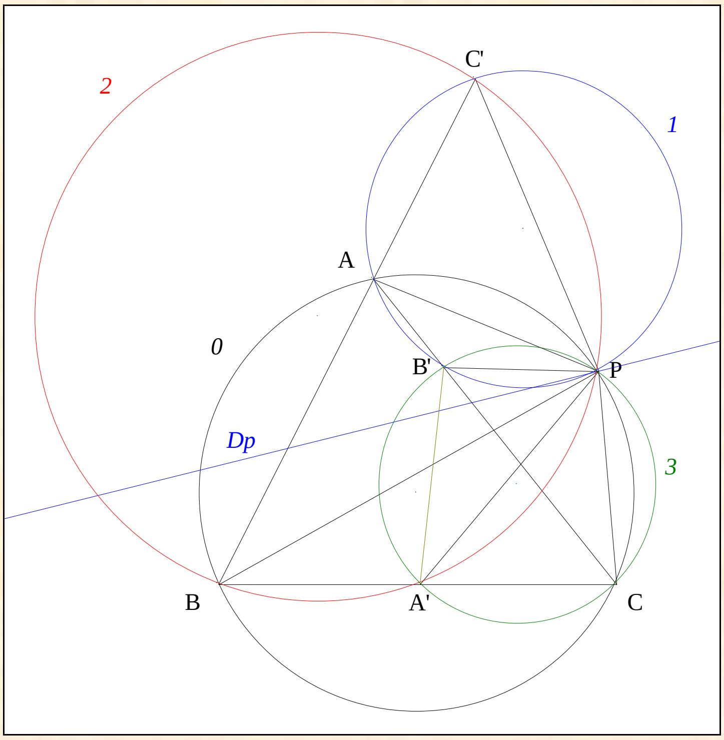
- Notons *2* ce cercle.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que B', C, A' et P sont cocycliques.
- Notons *3* ce cercle.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que C', A, B' et P sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle.



- **Conclusion :** d'après "Le théorème circulaire de Menelaüs" (Cf. **D.** Appendice **1**) appliqué à ABC avec *1*, *2* et *3* concourants en P, A', B' et C' sont alignés.

Scolies : **(1)** (PA'), (PB') et (PC') sont trois P-isoclines relativement à ABC

(2) (A'B'C') est la P-droite généralisée de Simson-Wallace relativement à ABC.

Note historique :

l'historien anglais John Sturgeon Mackay[13] précise que la première généralisation du théorème de Wallace par isoclines a été envisagée par Jean-Victor Poncelet [14]

who states that the perpendiculars on the sides of the triangle maybe replaced by obliques making, in cyclical order, equal angles withthe sides.

Il ajoute que la même généralisation a été faite par Jakob Steiner [15] et qu'elle a aussi été attribuée à Michel Chasles [16].

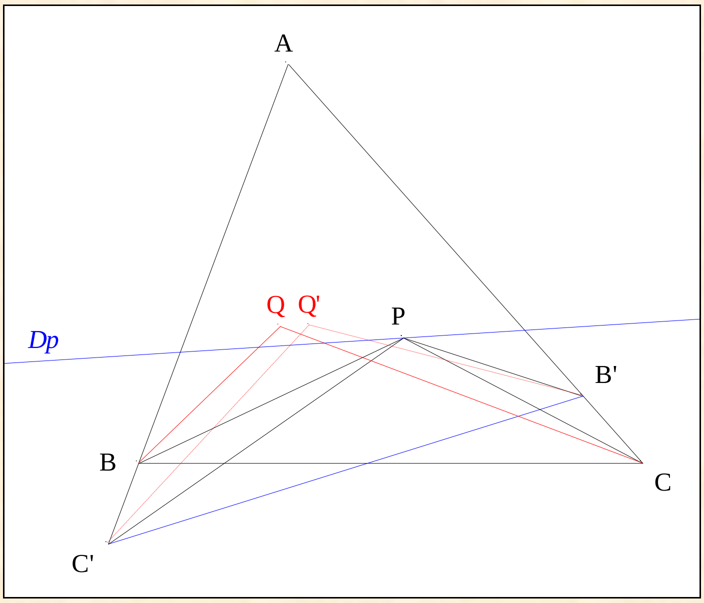
[13] Mackay J. S., The Wallace line and the Wallace point, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. **9** (February 1890) 83-91

[14] Poncelet J. V., *Propriétés Projectives*, n° **468** (1822) ou vol. **2** Seconde édition (1866) 261.

[15] Steiner J., *Annales* de Gergonne **XIX** (1828) 37-64 ; Steiner's *Getammelte Werke*, **I**. 197.

[16] Chasles M., *Géométrie Supérieure* (1852) § **395**

Cas général : P n'est pas sur le cercle circonscrit



Commentaire : nous allons suivre l'idée de Gerhard Hessenberg
à savoir que

ABC et AB'C' partagent le même isogonal de P.

- Raisonnons par l'absurde en affirmant que ABC et AB'C' ne partagent pas le même isogonal de P.

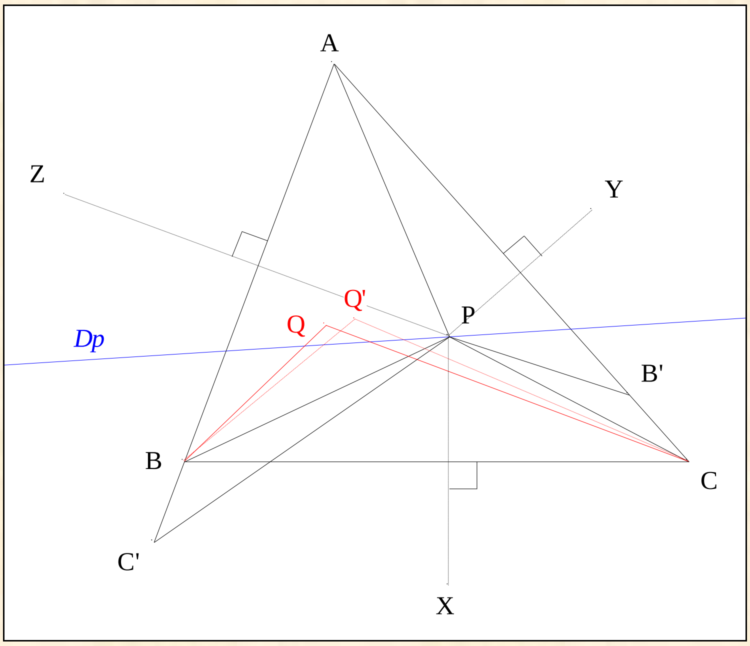
- Notons Q l'isogonal de P relativement à ABC
  et Q' l'isogonal de P relativement à AB'C' ; il s'en suit que Q et Q' sont distincts.

- Une chasse angulaire à **Π** près :

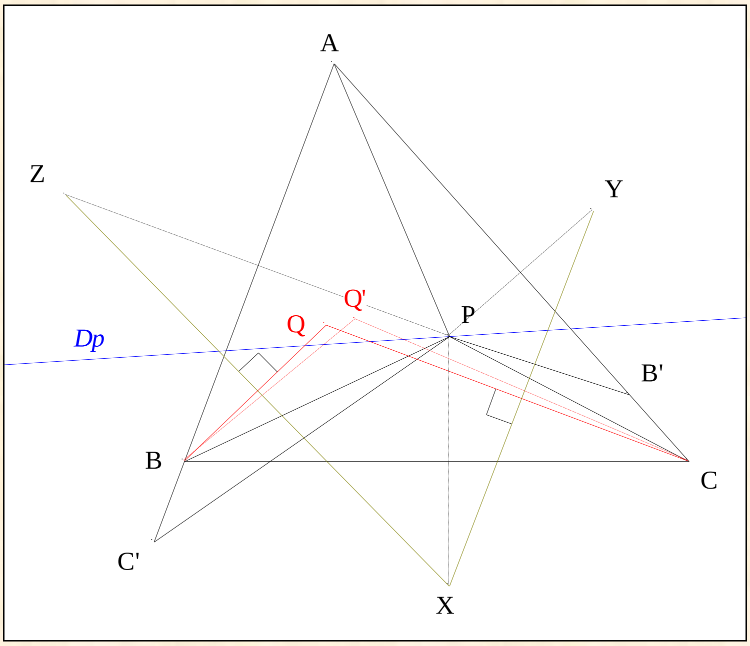
  * Q étant l'isogonal de P relativement à ABC, <BQC = <BAC + <CPB (Cf. **C. 8**)

  * par hypothèse, <BQC = <C'AB' + <B'PC'

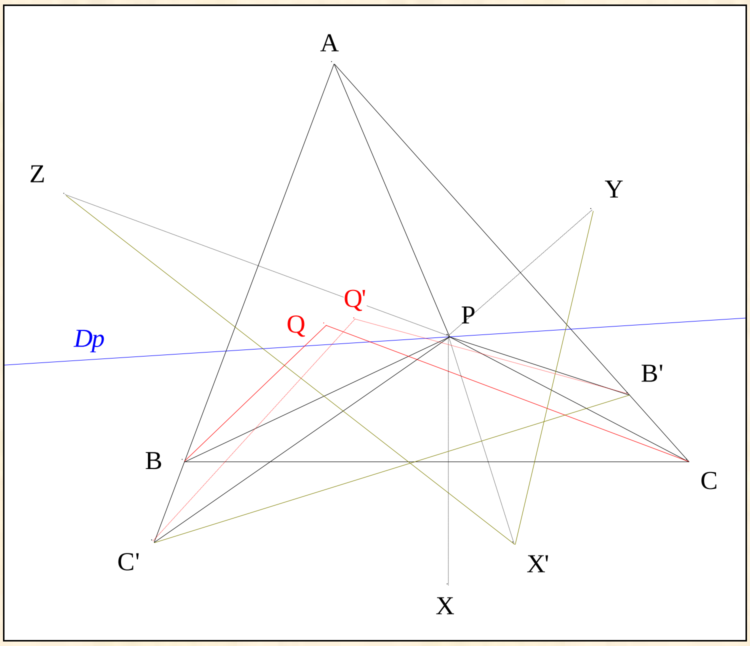
  * Q' étant l'isogonal de P relativement à AB'C', <BQC = <C'Q'B'. (Cf. **C. 8**).



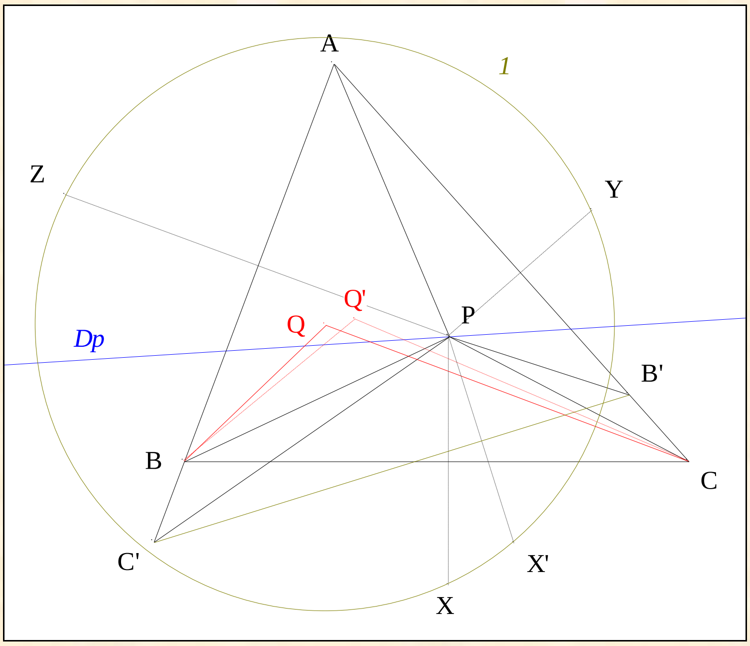
- Notons X, Y, Z les symétriques de P resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).



- D'après **D.** Appendice **4**, (BQ) ⊥ (ZX) et (CQ) ⊥ (XY).
- D'après "Angles à côtés perpendiculaires" <YXZ = <CQB.



- Notons X' le symétrique de P par rapport à (B'C').
- D'après **D.** Appendice **4**, (B'Q') ⊥ (X'Y) et (C'Q') ⊥ (X'Z).
- D'après "Angles à côtés perpendiculaires" <YX'Z = <B'Q'C'.



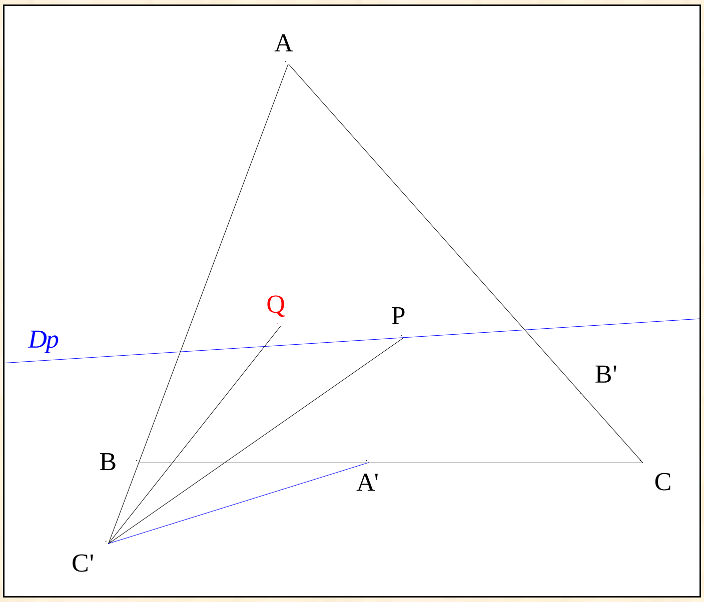
- Sachant que <BQC = <C'Q'B' (Cf. p. 9)
  nous en déduisons que <YXZ = <YX'Z.
- **Conclusion partielle :** d'après "Quatre points cocycliques", X, Y, Z et X' sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle.

- D'après **D.** Appendice **5**, Q est le centre de *1* et Q' est le centre de *1* ;
  en conséquence, Q et Q' sont confondus ce qui est contradictoire.

- **Conclusion partielle :** ABC et AB'C' partagent le même isogonal de P.

- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que ABC et A'BC' partagent le même isogonal de P
  ABC et A'B'C partagent le même isogonal de P ;

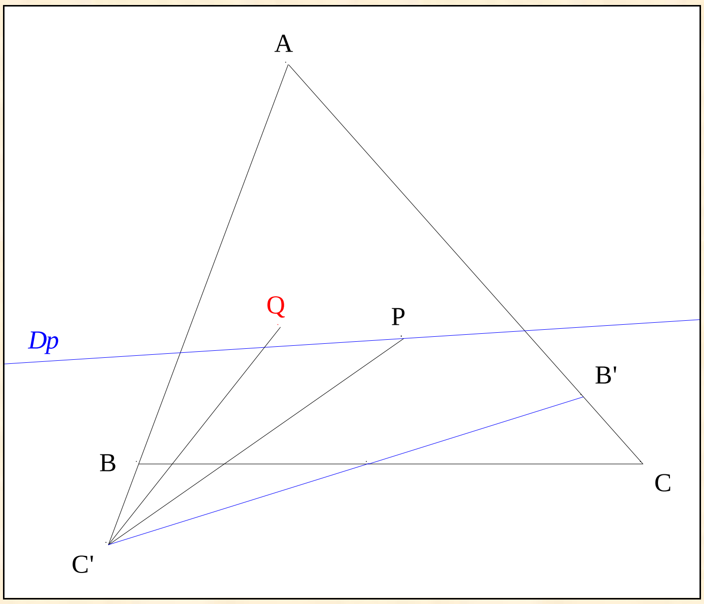
  en conséquence, ABC, AB'C', A'BC' et A'B'C partagent le même isogonal de P.



- Une chasse angulaire à **Π** près :

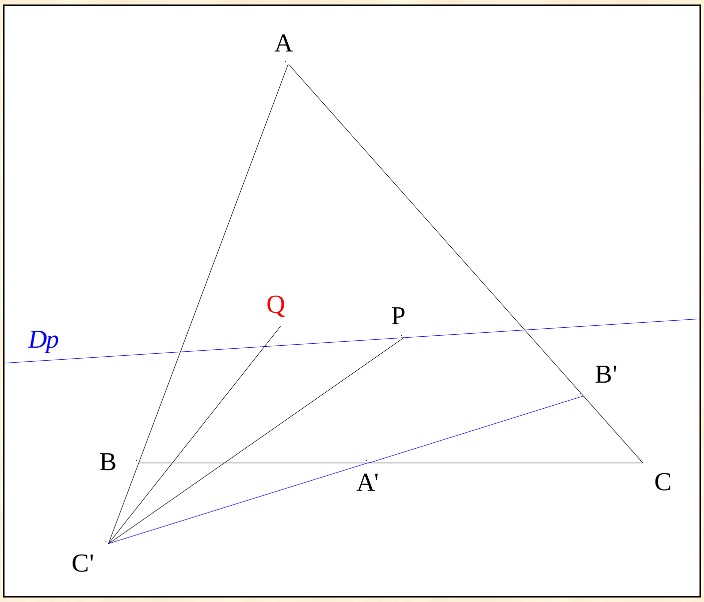
  * par notation, <BC'A' = <AC'A' ;

  * d'après Chasles angulaire **2**, <AC'A' = <AC'P + <PC'Q + QC'A' ;



* par symétrie, <AC'P + <PC'Q + QC'A' = <QC'B' + < PC'Q + <BC'P ;

* d'après Chasles angulaire **2**, <QC'B' + < PC'Q + <BC'P = <BC'B' ;



* par transitivité, <BC'A' = <BC'B'.

- **Conclusion :** A', B' et C' sont alignés.

C. MANTEL * NOYER * DROZ – FARNY

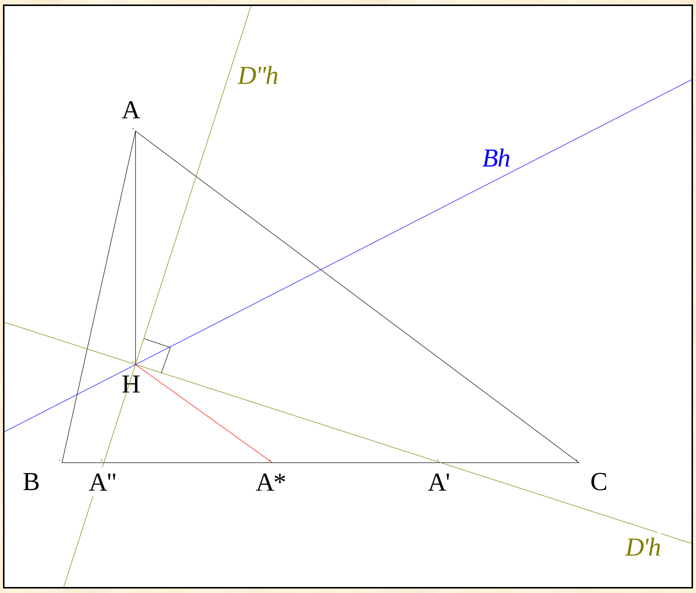
Commentaire : reprenons l'idée de René Goormaghtigh

If P *is the orthocenter, we get the Noyer-Droz-Farny theorem*

1. Un lemme

VISION

Figure :

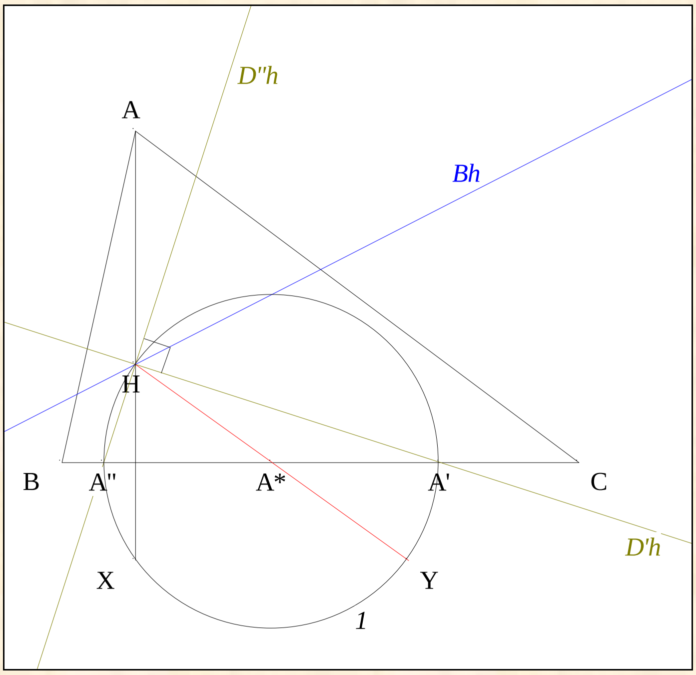


Traits :

	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	D'h, *D''h*	deux droites perpendiculaires passant resp. par H,
	A', A''	les point d'intersection de (BC) resp. avec *D'h*, *D''h*,
	Bh	l'une des deux bissectrices de l'angle déterminé par *D'h* et *D''h*,
et	A*	le point d'intersection de (BC) avec la symétrique de (AH) par rapport à *Bh*.

Donné : A* est le milieu de [A'A''].

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle de diamètre [A'A"],
  X le second point d'intersection de (AH) avec *1*
  et Y le second point d'intersection de la symétrique de (AH) par rapport à *Bh* avec *1*.

- D'après **D. 9**. Syhauteur, (HY) est la A-médiane du triangle HA'A".

- **Conclusion :** A* est le milieu de [A'A"].

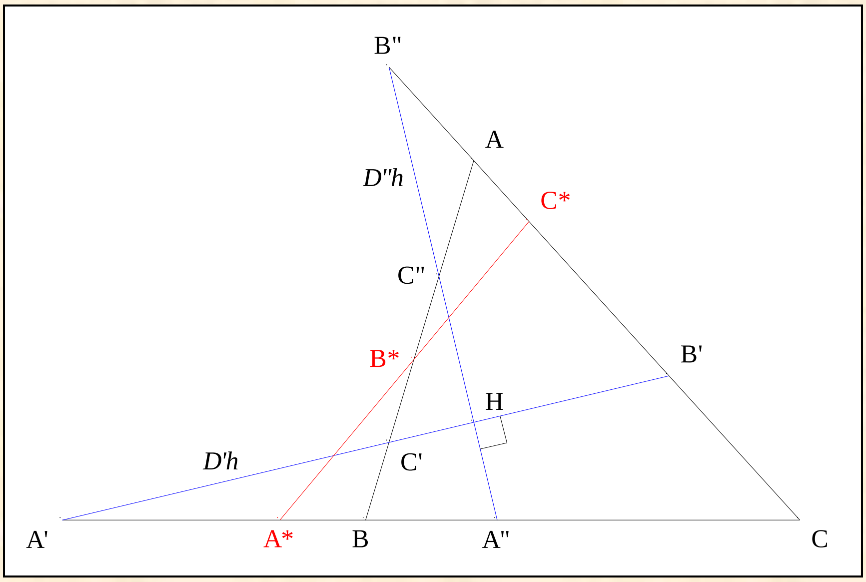
Commentaire : comme cela est souvent le cas en Géométrie du triangle,
nous allons envisager une vision triangulaire de ce résultat.

2. La droite de Droz-Farny [17]

VISION

Figure :

[17] Droz-Farny A., Question **14111**, *Educational Times* **71** (1899) 89-90.



Traits :	ABC	un triangle non rectangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	D'h	une droite passant par H,
	A', B', C'	les points d'intersection de *D'h* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	D"h	la droite perpendiculaire à *D'h* en H,
	A", B", C"	les points d'intersection de *D"h* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	A*, B*, C*	les milieux resp. de [A'A"], [B'B"], [C'C"].

Donné : A*, B* et C* sont alignés.

VISUALISATION

- D'après **C. 1.**, (HA*), (HB*), (HC*) sont resp. les symétriques de (HA), (HB), (HC) par rapport aux bissectrices de l'angle déterminé par *D'h* et *D"h*.

- **Conclusion :** d'après **B.** cas général, A*, B* et C* sont alignés.

3. Note historique

ce résultat du suisse Arnold Droz-Farny[18] connu aujourd'hui sous le nom de "la droite de Droz-Farny" [19] a été proposé en 1899 comme Question dans *The Educational Times* et dans la revue belge *Mathesis*[20].
En regardant les travaux mathématiques de Droz-Farny, nous sommes conduits à conjecturer qu'il avait une preuve de cette colinéarité.
En 1925, Adolphe Mineur [21] rappelle dans la revue belge *Mathesis* [22] que ce résultat avait été proposé en 1893 par Albert Noyer [23] dans le *Journal de Mathématiques Spéciales* en le dérivant d'une généralisation. L'année suivante, René Goormaghtigh [24] signale que ce résultat avait été trouvé en 1889 par W. Mantel [25] alors élève du collège Chaptal à Paris, et formulé d'une façon équivalente par Ernesto Cesaro [26] en 1890.

---

18 Droz-Farny A., Question **14111**, *The Educational Times* **71** (1899) 89-90
19 En anglais, Droz-Farny line theorem
20 *Mathesis* **19**, p.162.
21 Mineur A., *Mathesis* **39** (1925) 17-18
22 *Mathesis* : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publie par P. Mansion
23 Noyer A., *Journal de Mathématiques Spéciales*(1893) 39
24 Goormaghtigh R., *Mathesis* (1926) 414
25 Mantel W., Sur une projection imaginaire, *Mathesis* (1889) 217
26 Cesaro E., *Mathesis* (1890) 184

En 1986, Igor Sharygin [27] propose comme exercice non référencié, ce résultat en donnant une preuve analytique. Celui-ci est à nouveau présenté sans preuve en 1995 par Ross Honsberger [28] comme

a remarkable theorem

puis fait l'objet de nombreux messages au sein du groupe *Hyacinthos* [29]. A ce sujet, Nick Reingold [30] en donne une preuve projective, mais ne démontre pas que les cercles concourent sur le cercle circonscrit. Darij Grinberg [31] reprenant une idée de Floor van Lamoen présente la première preuve trigonométrique de ce

rather difficult theorem.

Darij Grinberg [32] dans un autre message *Hyacinthos* en donne une seconde preuve trigonométrique. En 2004, une preuve vectorielle en est donnée par Milorad Stefanovic [33]. Reprenant une idée émise dans le site *Mathlinks*, Darij Grinberg [34] propose une nouvelle preuve basée sur l'inversion, puis une autre basée sur une chasse angulaire. La même année, l'auteur [35] découvre "the first purely synthetic" proof ne dérivant pas d'une généralisation.
En réponse, Darij Grinberg dans une correspondance privée, se livre en disant

By the way, your recent note about Droz-Farny really enligtened me
I couldn't think it was so easy!
Thank you a lot for this surprise

et Floor van Lamoen [36] ajoute

The theorem is curious,
but the proof is absolutely remarkable in its simple elegance.

En 2012 dans la revue électronique *Mathematical Reflections*, Titu Andreescu et Cosmin Pohoata [37] représente "la droite de Droz-Farny" en reproduisant la voie ouverte en 1930 par René Goormaghtigh. Dans cet article, nous pouvons lire

on the Hyacinthos forum,
several proofs were given by N. Reingold [38]*, D. Grinberg.*
In 2004, J. -L. Ayme ends this sequence of proofs by presenting a beautiful synthetic approach.

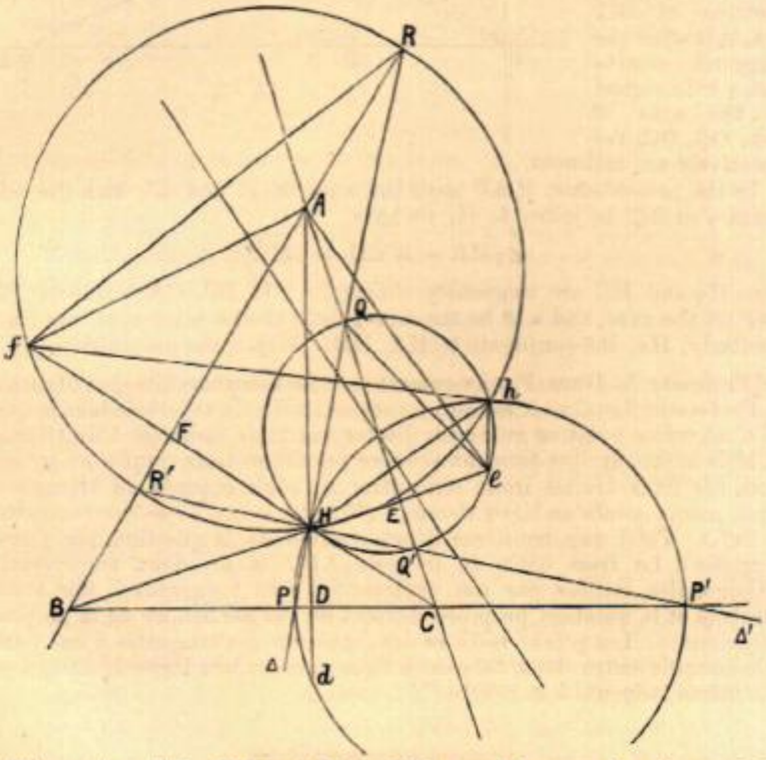
4. Archives

27 Sharygin I., problème **II 206**, Problemas de geometria, Mir Edition (1986) 111, 311-313
28 Honsberger R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century*, MAA (1995) 72
29 http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/
30 Reingold N., *Hyacinthos* message # **7383**, July 22, 2003 ;
31 Grinberg D., *Hyacinthos* messages # **6128**, **6141**, **6245** du 10-11/12/2002
Ehrmann J.-P., *Hyacinthos* messages # **6150**, **6157** du 12/12/2002
van Lamoen F., M., *Hyacinthos* messages # **6140**, **6144** du 11/12/2002 ;
32 Grinberg D., From the complete quadrilateral to the Droz-Farny theorem, avaible from http:/de.geocities.com/darij_grinberg ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/
33 Stevanovic M., *Hyacinthos* message # **9130**, January 25, 2004
34 Grinberg D., *Hyacinthos* message # **9845**, June 2, 2004
35 Ayme J.-L., A synthetic proof of the Droz-Farny line theorem, *Forum Geom*. **4** (2004) 219-224 ; http://forumgeom.fau.edu/
36 http://www.cut-the-Knot/curriculum/Geometry/DrozFarny.html
37 Titu Andreescu A., Pohoata C., Back to Euclidean : Droz-Farny Demystified, *Mathematical Reflections* **3** (2012) 1-5 ; https://www.awesomemath.org/
38 Reingold N., *Hyacinthos* message # **7383**, July 22, 2003

14111. (Professor A. Droz-Farny.)—Menons par l'orthocentre H d'un triangle ABC deux transversales Δ et Δ′ perpendiculaires l'une sur l'autre. Il s'agit de démontrer que ces perpendiculaires déterminent sur chaque côté du triangle un segment dont les points milieux α, β, γ sont en ligne droite.

Solutions (1) *by* C. E. Hillyer, M.A.; (2) *by* Professor Sanjána, M.A.

(1) Let the transversals Δ, Δ′ meet the sides in PQR, P′Q′R′ respectively. Let the circles RHR′, QHQ′ meet again in h, and let CH meet AB in F and the circle RHR′ in f, and BH meet CA in E and the circle QHQ′ in e.



Then, since $Ff = FH$ and $Ee = EH$, e and f are on the circumcircle.

Also $\angle fhH = fRH = 2FRH$ and $\angle ehH = eQH = 2EQH$;

therefore $\angle fhe = 2A$ and $\angle fAe = 2FAH + 2EAH = 2A$;

therefore $\angle fhe = fAe$; therefore h is on the circumcircle.

Similarly the circle PHP′ passes through the same point h on the circumcircle.

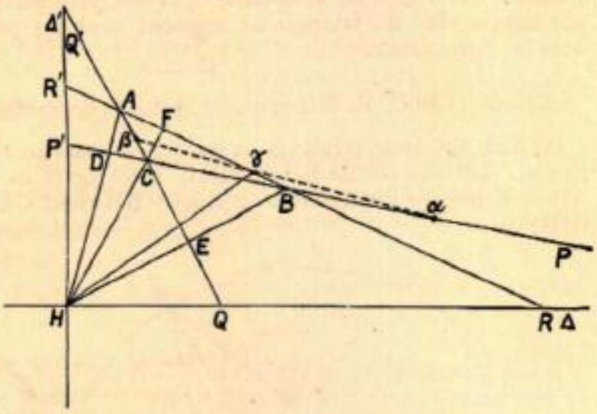
Therefore the circles are coaxal and their centres collinear.

Cor.—Since the mid-point of Hh is on the nine-points circle and the line of collinearity is the perpendicular to Hh through this point, it

39

[39] Communiqué par John Sharp au sein du groupe *Hyacinthos* ;
Droz-Farny A., Question **14111**, *The Educational Times* **71** (1899) 89-90

touches the ellipse of which H is a focus and the nine-points circle the auxiliary circle; *i.e.*, the inscribed ellipse with foci H and O.



(2) This proposition depends on the following important theorem, which I have not seen in print:—If three points A, B, C be referred to two axes meetin O, the intersections of BC, CA, AB with the isogonal conjugates with regard to the axes of OA, OB, OC, respectively are collinear.

In the present case, if AB meet the axes in R and R′, and the midpoint γ of RR′ be joined to H, we have

$$\angle \gamma HR = R'RH = CHR';$$

thus Hγ and HC are isogonally conjugate. If BC, CA intercept PP′, QQ′ on the axes, and α, β be the mid-points of the intercepts, we have, similarly, Hα, Hβ conjugate to HA, HB. Hence the proposition.

[Professor A. Droz-Farny remarks: "Le théorème cité par Monsieur le Professeur Sanjána n'est qu'un cas particulier du théorème bien connu: Si d'un même point on mène des droites aux trois sommets d'un triangle et trois autres droites formant avec ces premières trois couples en involution, ces trois droites iront rencontrer les côtés opposés du triangle en trois points situés en ligne droite. (Voir Chasles, *Geométrie Supérieure*, p. 247.) Voici une troisième démonstration de la question que j'avais proposée: Le trois côtés du triangle ABC et les deux transversales orthogonales menées par son orthocentre sont tangentes à une même parabole et la question proposée devient un cas particulier de la proposition connue: Les points milieux des segments des tangentes à une parabole compris entre deux tangentes fixes sont sur une ligne droite qui est elle même tangente à la courbe."]

— 25 —

4. *Sur une généralisation des théorèmes de* Noyer-Droz-Farny *et* Neuberg. Si par les sommets A, B, C d'un triangle, on mène des parallèles AA', BB', CC' aux côtés opposés et des parallèles AX, BY, CZ à une direction donnée, les symétriques de AA', BB', CC' respectivement par rapport à AX, BY, CZ concourent en un point du cercle ABC, car l'angle compris entre PB et PC, par exemple, est égal ou supplémentaire à l'angle de AB et AC.

Si l'on transforme la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle quelconque, on obtient, en changeant les notations, la proposition suivante :

Étant donnés un triangle ABC, *un point* M *et une droite* Δ *passant par* M, *les symétriques de* AM, BM, CM, *par rapport à* Δ, *rencontrent* BC, CA, AB *en trois points appartenant à une droite* Δ' ; *lorsque* Δ *pivote autour de* M, Δ' *enveloppe la conique inscrite à* ABC, *dont* M *est un des foyers.*

Lorsque M coïncide avec l'orthocentre H, AM est perpendiculaire à BC, et la symétrique de AM, par rapport à Δ, contient dès lors le milieu du segment que déterminent sur BC les deux droites issues de H et inclinées à 45° sur Δ. On retrouve ainsi le théorème de Noyer-Droz-Farny (JMS, 1893-39, ET, 1899, M, 1899-162, 1913-256, 262, 1915-20, 91, JV, 1916-1917-56, JM, 1917-19, M, 1922-52, 1925-17, 98) et aussi celui de Neuberg (M, 1913-262), en tenant compte de la proposition obtenue ci-dessus en ce qui concerne l'enveloppe de Δ'.

(R. Goormaghtigh)

[40]

5. Une courte biographie d'Arnold Droz-Farny [41]

Arnold Droz, fils d'Édouard et de Louise Droz, est né à La Chaux-de-Fonds (canton de Neuchätel, Suisse), le 12 février 1856.
Après des études dans le canton de Neuchâtel, il se rend à Munich où il suit les leçons d'analyse de Klein mais finalement préfère la Géométrie. A son retour, il enseigne dans un important institut de Suisse alémanique. En 1880, il est professeur de physique et de mathématiques à l'École cantonale de Porrentruy (proche de Bâle) où il enseignera jusqu'en 1908.
Il se marie le 26 avril 1854 avec Lina Farny originaire de La Chaux-de-Fonds. Désormais, il change de nom et s'appelle Droz-Farny.
Très sociable, aimant l'escalade et les courses de chevaux, il entretient une correspondance suivie avec de nombreux géomètres comme Virginio Retali en Italie, Juan Jacobo Duran Loriga en Espagne.
Entre 1897 et 1909, il écrit 4 livres dont deux sur la géométrie et publie dans *l'Intermédiaire des mathématiciens* en 1899 dans le *JME* de Longchamps en 1894.
Après une longue et pénible maladie, il décède à Porrentruy (canton du Jura, Suisse), le 14 janvier 1912. [42] [43]

---

[40] Goormaghtigh R., Sur une généralisation du théorème de Noyer, Droz-Farny et Neuberg, *Mathesis* **44** (1930) 25

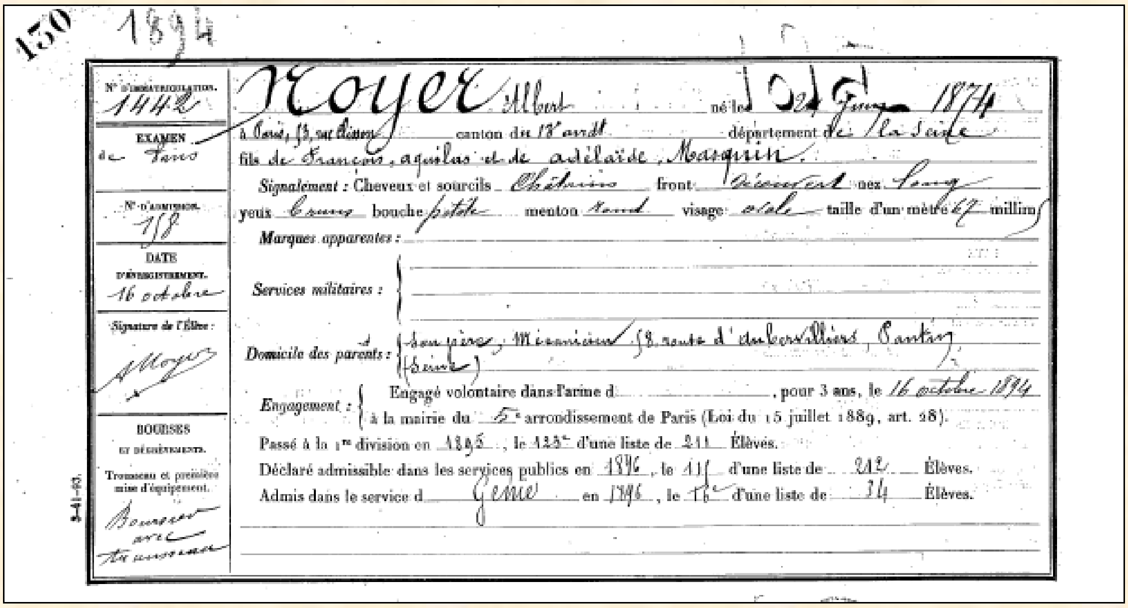
[41] The MacTutor History of Mathematics archive ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
J. Gonzalez Cabillon, message to Historia Mathematica, August 18, 2000, available at http://sunsite.utk.edu/math_archives/.http/hypermail/historia/aug00/0064.html
E. Ortiz, message to Historia Mathematica, August 21, 2000, available at http://sunsite.utk.edu/math_archives/.http/hypermail/historia/aug00/0077.html

[42] Gonzalez Cabillon J., message to Historia Mathematica, August 18, 2000, available at http://sunsite.utk.edu/math_archives/.http/hypermail/historia/aug00/0064.html

[43] Ortiz E., message to Historia Mathematica, August 21, 2000, available at http://sunsite.utk.edu/math_archives/.http/hypermail/historia/aug00/0077.html

6. Quelques photocopies concernant Albert Noyer

Nous ne savons que peu de chose sur Albert Noyer (1874-1956), élève du collège Chaptal à Paris, puis de l'École polytechnique où il entre en 1894 comme l'atteste les documents suivants.



130 1894

N° d'immatriculation. 1442

Noyer Albert né le 24 Juin 1874

à Paris, 13, rue ... canton du 12e arrdt département de la Seine

fils de François, aquilas et de adélaïde, Marquin.

Signalement : Cheveux et sourcils châtains front découvert nez long

yeux bruns bouche petite menton rond visage ovale taille d'un mètre 67 millim.

Marques apparentes :

EXAMEN de Paris

N° d'admission. 118

DATE d'enregistrement. 16 octobre

Services militaires :

Signature de l'Élève : A Noyer

Domicile des parents : son père, mécanicien, 58 route d'Aubervilliers, Pantin (Seine)

Engagement : Engagé volontaire dans l'arme d ..., pour 3 ans, le 16 octobre 1894 à la mairie du 5e arrondissement de Paris (Loi du 15 juillet 1889, art. 28).

BOURSES ET DÉGRÈVEMENTS. Trousseau et première mise d'équipement. Boursier avec trousseau

Passé à la 1re division en 1895, le 125e d'une liste de 211 Élèves.

Déclaré admissible dans les services publics en 1896, le 41e d'une liste de 212 Élèves.

Admis dans le service du Génie en 1896, le 16e d'une liste de 34 Élèves.

côtés du triangle autopolaire, par les diamètres conjugués. Ainsi :

Théorème. — *Les milieux des segments déterminés par deux diamètres conjugués d'une conique, sur les côtés d'un triangle autopolaire, relativement à cette conique, sont trois points en ligne droite.*

Cette droite enveloppe d'ailleurs une conique quand les deux diamètres conjugués varient.

Du reste, chaque côté du triangle autopolaire est la direction conjuguée du diamètre qui passe par le sommet opposé.

D'après cela, on peut donner à l'énoncé précédent une forme plus générale, en disant :

Théorème. — *Lorsqu'un triangle est, par rapport à un faisceau involutif, tel que chacun de ses côtés est parallèle au rayon conjugué du rayon qui passe par le sommet opposé, les milieux des segments déterminés par le faisceau, sur les côtés du triangle, sont en ligne droite.*

3. Cas particulier. — Si nous considérons un triangle quelconque, les théorèmes précédents, dans lesquels on substitue, aux deux diamètres conjugués, deux droites rectangulaires passant par l'orthocentre du triangle proposé, s'appliquent. Il suffit de considérer le cercle, par rapport auquel le triangle est autopolaire, comme faisant partie du système de coniques dont le produit des longueurs des axes est constant. Par exemple, on a la proposition suivante :

Théorème. — *Les côtés d'un angle droit, qui a son sommet à l'orthocentre d'un triangle, déterminent, sur les côtés de ce triangle, des segments dont les milieux sont en ligne droite.*

[44]

7. Sur W. Mantel

Nous savons seulement qu'il a été membre de la Société mathématique d'Amsterdam et qu'il a écrit un traité de trigonométrie analytique en 1877 (Arnhem).

[44] Noyer A., Sur les triangles autopolaires, *Journal de Mathématiques Spéciales* (1893) 39-44

SUR UNE PROJECTION IMAGINAIRE;

par M. W. Mantel.

1. Si, entre les coordonnées (x, y), (x', y') de deux points M, M′ rapportés aux axes rectangulaires OX, OZ, il existe la relation $y = y'$, $x = kx'$, les figures décrites par les points M, M′ jouissent des propriétés de deux figures(*) qui sont l'une la projection orthogonale de l'autre. En vertu du principe de continuité, ces propriétés peuvent également être étendues à deux figures dont les points correspondants vérifient les égalités

$$y = y', \quad x = x'\sqrt{-1}. \tag{1}$$

L'un de ces points étant réel, l'autre est imaginaire; mais nous pouvons attribuer aux figures imaginaires les propriétés des figures réelles qui sont définies analytiquement de la même manière.

2. Voici quelques remarques fondamentales sur la transformation satisfaisant aux formules (1). Pour abréger le langage, nous dirons que deux droites sont antiparallèles par rapport à une troisième, lorsqu'elles font avec celle-ci des angles égaux, mais en sens contraire. Les bissectrices des angles des axes OX, OY, seront désignées par OZ, OU.

a) *Deux droites rectangulaires se transforment en deux droites antiparallèles par rapport à* OZ. Car les coefficients angulaires des premières vérifiant la relation $mm' = -1$, ceux des secondes droites satisfont à l'égalité $(m\sqrt{-1})(m'\sqrt{-1}) = -1$, ou $mm' = 1$.

(*) On peut appeler de telles figures *orthogonalement affines;* OY est l'*axe d'affinité*, *k*, le *module d'affinité*.

[45]

---

45 Communiqué par le professeur Ercole Suppa ;
Mantel W., Sur une projection imaginaire, *Mathesis* (1889) 217-219

b) Les asymptotes d'un cercle se transforment en des droites parallèles à OZ, OU.

c) Une circonférence a pour ligne correspondante une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à OZ, OU.

d) Une hyperbole équilatère quelconque a pour transformée une conique dont les axes sont parallèles à OZ, OU.

e) Deux aires équivalentes se transforment en deux aires équivalentes.

3. Pour donner des applications de notre transformation, prenons d'abord le théorème suivant : Les bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle se coupent, trois à trois, en quatre points, centres des cercles tangents aux trois côtés. Nous en déduisons la proposition suivante :

Par chaque sommet d'un triangle ABC, *on mène deux droites antiparallèles par rapport à une droite donnée d et divisant harmoniquement l'angle correspondant du triangle; les six droites ainsi obtenues concourent, trois à trois, en quatre points* I, I_a, I_b, I_c, *centres des quatre hyperboles équilatères inscrites à* ABC *et ayant une asymptote parallèle à d* (*).

Les bissectrices des angles des côtés opposés du quadrangle complet étant parallèles ou perpendiculaires à *d*, ce quadrangle est inscriptible à un cercle, par rapport auquel le triangle ABC est autopolaire. Donc *le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle fixe* ABC *est le cercle conjugué par rapport à* ABC.

4. Transformant par notre méthode cette dernière proposition, nous aurons le théorème suivant :

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle donné ABC *et dont les axes ont des directions données d, d', est une hyperbole équilatère conjuguée par rapport à* ABC. *Le centre de cette hyperbole est sur la circonférence* ABC, *à l'intersection des trois droites menées par* A, B, C *antiparallèlement aux côtés opposés* BC, CA, AB *par rapport à d.*

Corollaire. La circonférence circonscrite à un triangle conjugué par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de cette courbe.

5. Etant donnés quatre points A, B, C, D dans un même plan, si A_1, B_1, C_1 sont les orthocentres des triangles DBC, DCA, DAB, les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont équivalents (*Mathesis*, t. II, p. 132). Notre transformation permet de déduire, de ce théorème, la proposition suivante :

(*) Comparez Cesàro, N. A. M., 1888, p. 99 et suiv.

Étant donnés, dans un même plan, les points A, B, C, D, *on mène par chaque sommet du triangle* BCD *une antiparallèle au côté opposé par rapport à une droite fixe d; ces trois droites concourent en un même point* A_1. Soient B_1, C_1, D_1 les points déterminés d'une manière analogue dans les triangles ACD, ABD, ABC. Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$, ABD et $A_1B_1D_1$,... seront équivalents.

6. On sait que le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à deux coniques homofocales est une circonférence passant par les points d'intersection de ces courbes. Ce théorème donne lieu au suivant :

Soient deux coniques inscrites à un même rectangle. Tout angle circonscrit à ces courbes, dont les bissectrices sont parallèles aux côtés du rectangle, a son sommet sur une hyperbole équilatère fixe, qui passe par les points d'intersection des courbes données et dont les asymptotes sont parallèles aux côtés du rectangle.

7. Pour terminer, transformons le théorème sur la droite de Simson : Les projections d'un point d'une circonférence sur les côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite. Nous aurons ce nouveau théorème :

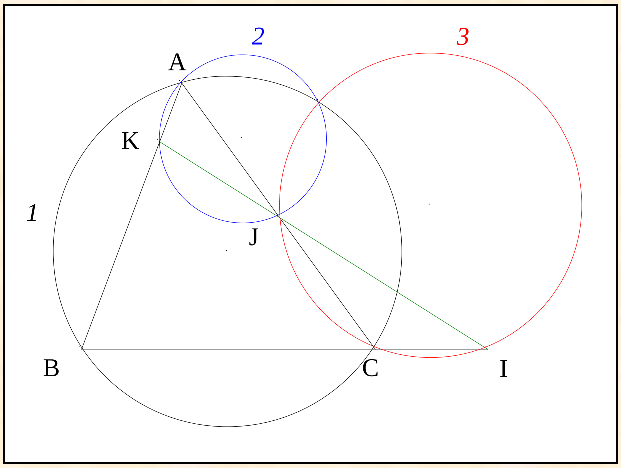
Par l'orthocentre d'un triangle ABC, *on mène les trois droites antiparallèles aux côtés par rapport à une même droite d; elles rencontrent les côtés correspondants en trois points qui sont en ligne droite.*

D. APPENDICE

1. Le théorème circulaire de Ménélaüs

VISION

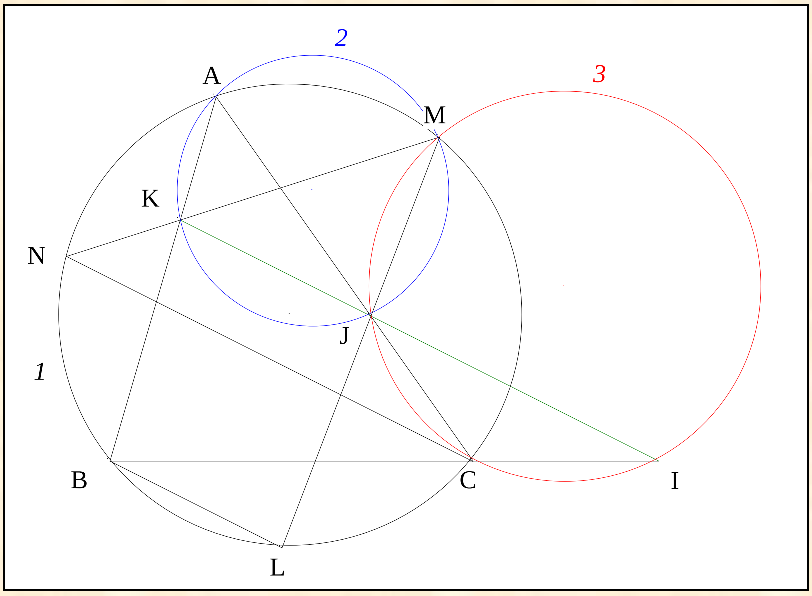
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle circonscrit à ABC
	I, J, K	trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB)
et	*2, 3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, CJI.

Donné : *si*, *1*, *2* et *3* sont concourants *alors*, (IJK) est une ménélienne de ABC.

VISUALISATION



- Notons M le point de concours de *1*, *2*, *3* et L, N les seconds points d'intersection resp. de (MJ), (MK) avec *1*.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base M et A, les moniennes (LMJ) et (BAK), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (LB) // (JK) ; par symétrie de la relation //, (JK) // (LB)

- Les cercles *2* et *1*, les points de base A et M, les moniennes (JAC) et (KMN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (JK) // (CN) ; par transitivité de la relation //, (LB) // (CN) ; par symétrie de la relation //, (CN) // (LB).

- Les cercles *1* et *3*, les points de base M et C, les moniennes (BCI) et (LMJ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BL) // (IJ) ; par transitivité de la relation //, (JK) // (IJ) ; d'après le postulat d'Euclide, (JK) = (IJ).

- **Conclusion :** (IJK) est une ménélienne de ABC.

Scolie : le cercle *1*, les points de base B et M, les moniennes naissantes (CBI) et (NMK), les parallèles (CN) et (IK), conduisent au théorème **0''** de Reim ; en conséquence, B, M, I et K sont cocycliques

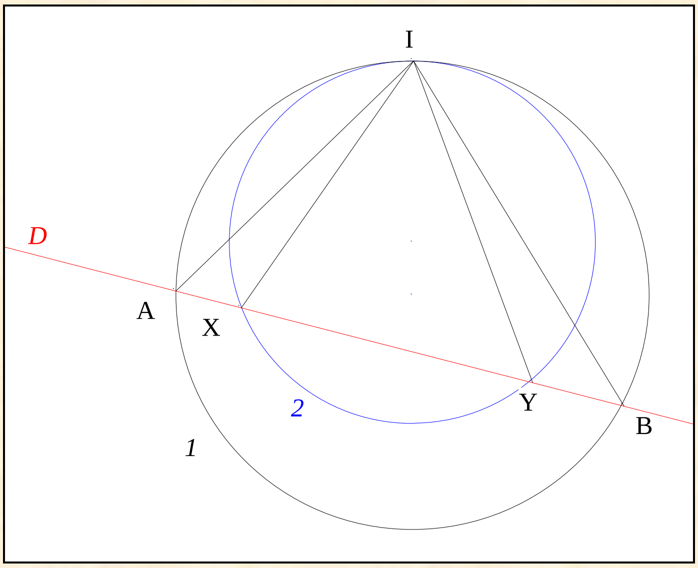
SUR

L'ISOGONALITÉ

2. Deux isogonales

VISION

Figure :

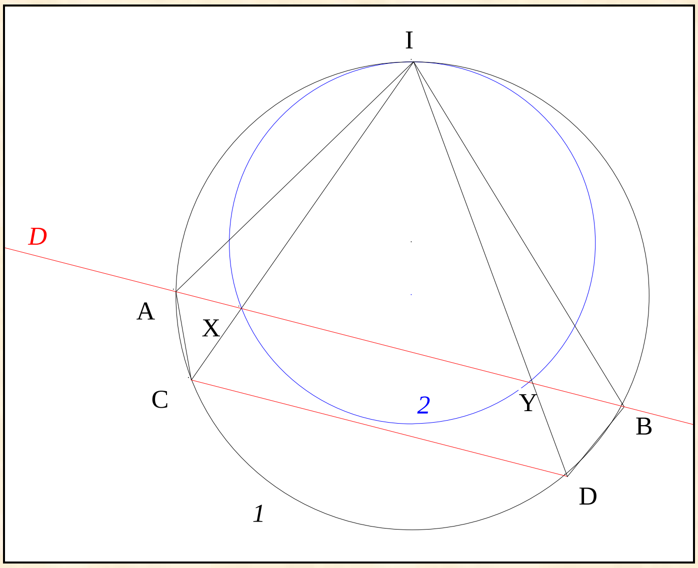


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
I l'un des deux points d'intersection de *1* et *2*,
D une transversale à *1* et *2*,

A, B les points d'intersection de *D* avec *1*
et X, Y les points d'intersection de *D* avec *2*.

Donné : *1* et *2* sont intérieurement tangents en I *si, et seulement si,* <AIX et <YIB sont égaux [46].

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons C, D les seconds points d'intersection resp. de (IX), (IY) avec *1*.

- Les cercles *1* et *2*, le point de base I, les moniennes (AIC) et (BID), conduisent au théorème 7 de Reim ; il s'en suit que (AXYB) // (CD).

- **Scolie :** le quadrilatère cyclique CDYX est un trapèze isocèle.

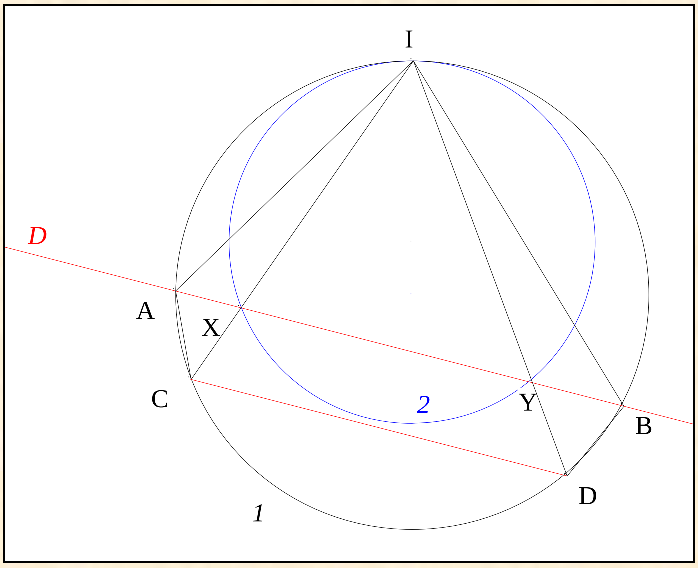
- <AIC et <BID interceptant des cordes égales, sont égaux ou supplémentaires.

- **Conclusion :** I n'étant pas à l'intérieur de la bande délimitée par les parallèles du trapèze ACDB, <AIX et <YIB sont égaux.

VISUALISATION SUFFISANTE

---

[46] Angles géométriques



- <AIC et <DIB étant deux angles égaux inscrits dans *1*, interceptent des cordes égales ;
  en conséquences, **(1)** AC = BD
  (2) le quadrilatère cyclique CDBA est un trapèze isocèle
  (3) (CD) // (XY).

- Les cercles *1* et *2*, le point de base I, les moniennes (CIX) et (DIY), les parallèles (CD) et (XY), conduisent au théorème **7"** de Reim ;
  en conséquence, le cercle passant par I, X et Y est tangent intérieurement à *1* en I ;
  ce cercle n'est d'autre que *2*.

- **Conclusion :** *1* et *2* sont tangents en I.

Scolie : par définition, (IX) et (IY) sont deux I-isogonales relativement au triangle IAB.

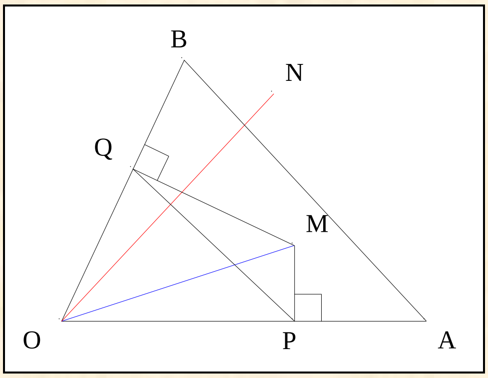
Énoncé traditionnel : *si,* les circumtraces de deux céviennes issues d'un même sommet d'un triangle déterminent une corde parallèle au côté opposé de ce sommet
alors, elles sont isogonales.

3. Isogonale et perpendiculaire [47]

VISION

Figure :

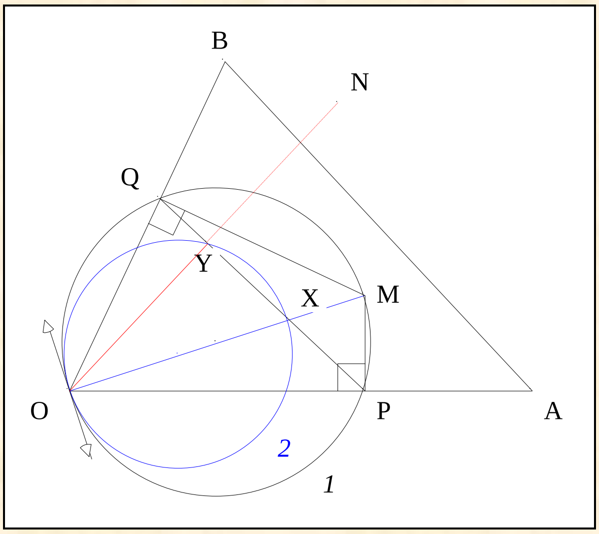
[47] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.



Traits : OAB un triangle,
M un point,
P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA), (OB)
et N un point.

Donné : (ON) est la O-isogonale de (OM) relativement à OAB
si, et seulement si,
(ON) est perpendiculaire à (PQ).

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *1* le cercle de diamètre [OM] ; il passe par P et Q ;
  X le point d'intersection de (PQ) et (OM),
  2 le cercle de diamètre [OX]
  et Y le second point d'intersection de (PQ) avec *2*.

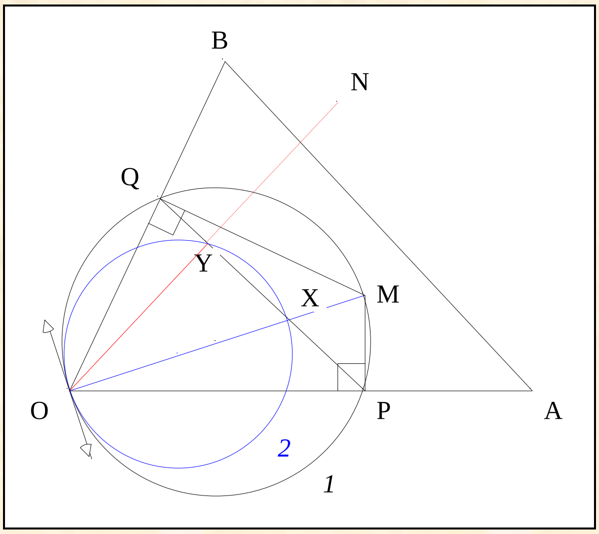
- Les centres de *1* et *2* étant alignés avec O, *1* et *2* sont tangents en O.

- D'après **D.** Appendice 2, (OY) est la O-isogonale de (OXM) relativement à OAB ;
  en conséquence, (OY) et (ON) sont confondues.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", le triangle OXY est Y-rectangle.

- **Conclusion :** (ON) est perpendiculaire à (PQ).

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons 1 le cercle de diamètre [OM] ; il passe par P et Q ;
  X le point d'intersection de (PQ) et (OM),
  2 le cercle de diamètre [OX] ; il passe par Y ;
  et Y le second point d'intersection de (PQ) et (ON).

- Les centres de *1* et *2* étant alignés avec O, *1* et *2* sont tangents en O.

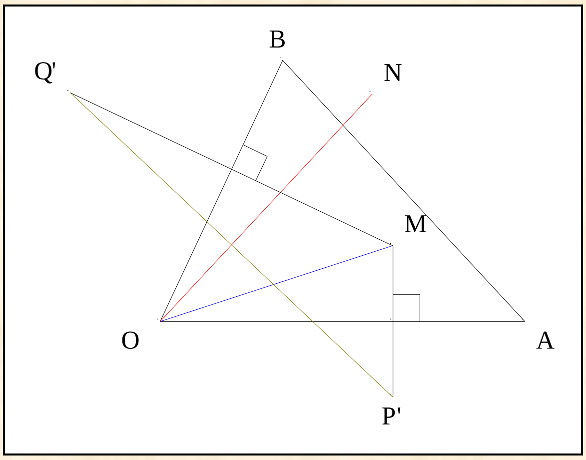
- **Conclusion :** d'après **D.** Appendice **2**, (ON) est la O-isogonale de (OM) relativement à OAB.

Note historique : ce résultat est attribué à l'historiographe Émile Vigarié par Nathan Altshiller-Court [48].

4. Isogonale et triangle

VISION

Figure :



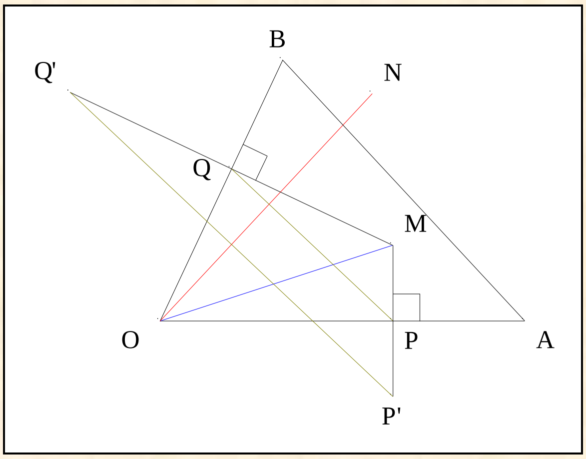
Traits : OAB un triangle,
M un point,
P', Q' les symétriques de M resp. par rapport à (OA), (OB)

[48] Altshiller-Court N., College Geometry, Barnes & Noble, Richmond (1936) n°625 p.305.

et N un point.

Donné : (ON) est la O-isogonale de (OM) relativement à OAB
si, et seulement si,
(ON) est la médiatrice de [P'Q'].

Commentaire :

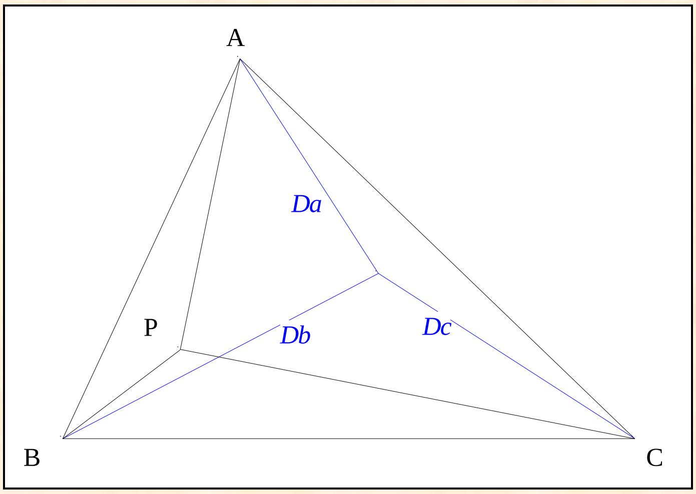


- Notons P', Q' les points d'intersection de (MP') et (OA), (MQ') et (OB).
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle MP'Q', (P'Q') // (PQ).
- Le problème se ramène à **D.** Appendice **3**.

5. Points isogonaux ou the isogonal theorem [49]

VISION

Figure :



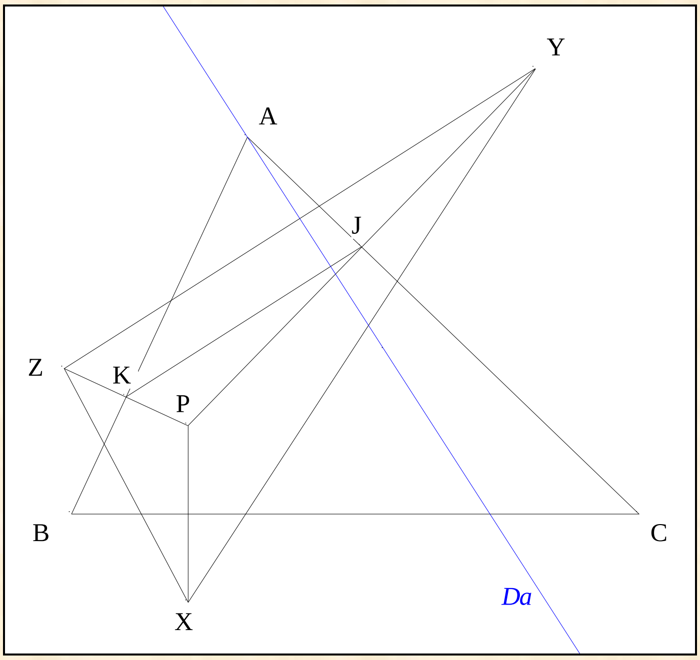
Traits : ABC un triangle,

[49] Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.

	P	un point non situé sur le cercle circonscrit à ABC
et	*Da* , *Db* , *Dc*	les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné: *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

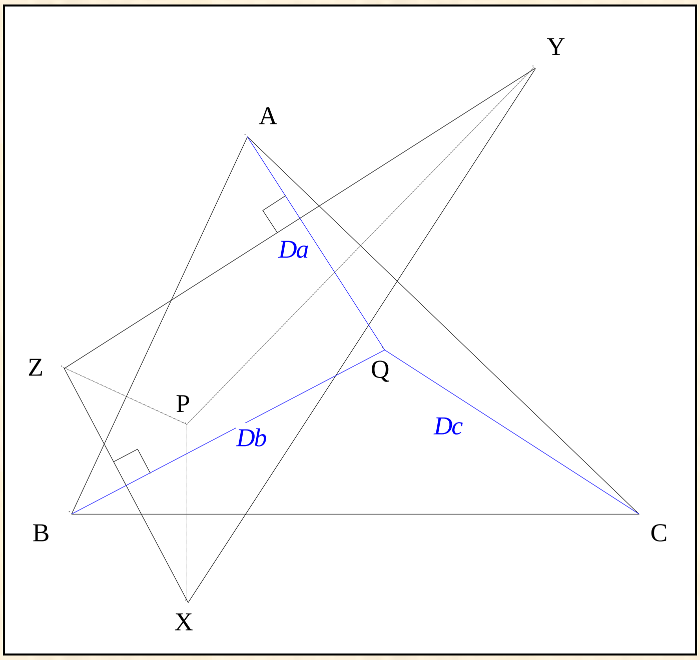
VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les symétriques de P resp. par rapport à (BC), (CA), (AB),
  et J, K les points d'intersection resp. de (PY) et (AC), (PZ) et (AB).

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle PYZ, (YZ) // (JK) ;
  d'après **C. 3**, (JK) $\perp$ *Da* ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (YZ) $\perp$ *Da* .

- **Conclusion partielle :** A étant le point d'intersection
  des médiatrices (AB) et (AC) resp. de [PZ], [PY] du triangle PYZ,
  Da est la médiatrice de [YZ].



- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** *D*b est la médiatrice de [ZX]
  (2) *D*c est la médiatrice de [XY].

- **Conclusion :** sachant que les médiatrice d'un triangle sont concourantes, *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

- Notons Q ce point de concours.

Scolies : **(1)** le théorème de Beltrami

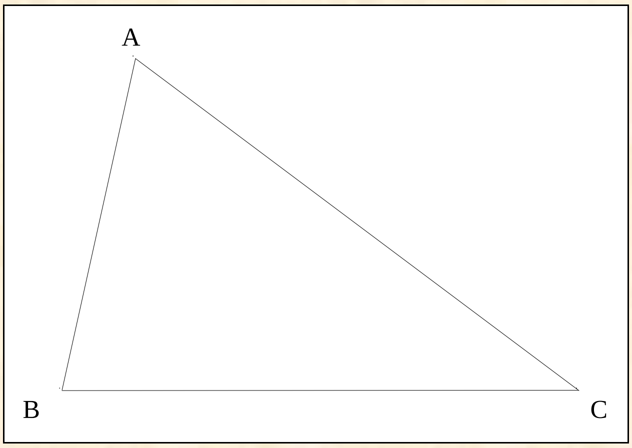
si, P est sur le cercle circonscrit à ABC et distinct de A, B et C,
alors, *Da* , *Db* , *Dc* sont parallèles.

(2) *Si,* P est confondus avec A, par exemple,
alors, *Da* est indéterminée et *Db* = *Dc* = (BC).

(3) *Si,* P n'est pas sur le cercle circonscrit
alors, *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes en Q, isogonal de P.

Énoncé traditionnel : le centre du cercle circonscrit au triangle P-symétrique, est l'isogonal de P.

6. Le théorème angulaire 180 ou Chasles angulaire 1

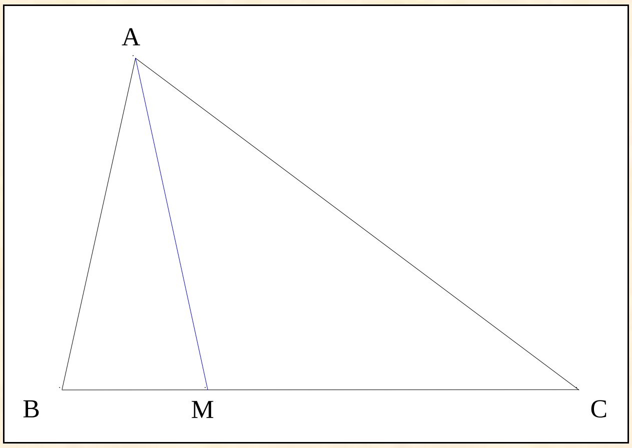


Traits : ABC un triangle.

Donné : <BAC + <ACB + <CBA = 0 ou <BAC = <BCA + <ABC [50]

Commentaire : l'angle orienté <BAC
signifie intuitivement que
la droite (AB) pivote autour de A pour venir se superposer sur la droite (AC).
Si cette rotation se fait dans le sens positif alors une mesure de l'angle orientée est positive.
Dans le cas contraire, elle est négative.
Les mesures d'un angle orienté diffèrent de $\mathbf{\Pi}$.

7. Chasles angulaire 2



Traits : ABC un triangle
et M un point de (BC).

Donné : <BAM + <MAC = <BAC. [51]

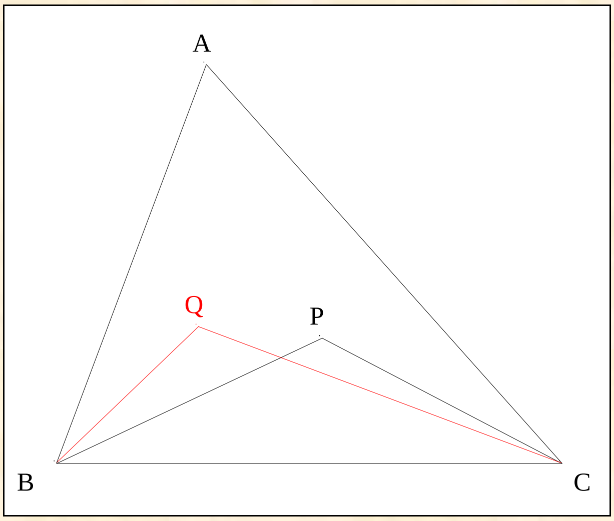
8. Une relation angulaire entre deux points isogonaux

VISION

---

[50] Angles orientés à $\mathbf{\Pi}$ près.
[51] Angles orientés à $\mathbf{\Pi}$ près.

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point
et Q l'isogonal de P relativement à ABC.

Donné : <BQC = <BAC + <CPB. [52]

VISUALISATION

- d'après **D.** Appendice **4**. Chasles angulaire **1** appliqué au triangle BQC, <BQC = <BCQ + <QBC ;

  par hypothèse, <BQC = <PCA + <ABP ;

  d'après **D.** Appendice **5**. Chasles angulaire **2,** <PCA = <PCB + <BCA
  <ABP = <ABC + <CBP ;

  d'après **D.** Appendice **4**. Chasles angulaire **1**
  appliqué au triangle ABC, <BCA + <ABC = <BAC

  d'après **D.** Appendice **4.** Chasles angulaire **1**
  appliqué au triangle PBC, <CBP + <PCB = <CPB

- **Conclusion :** par substitution, <BQC = <BAC + <CPB.

9. Syhauteur [53]

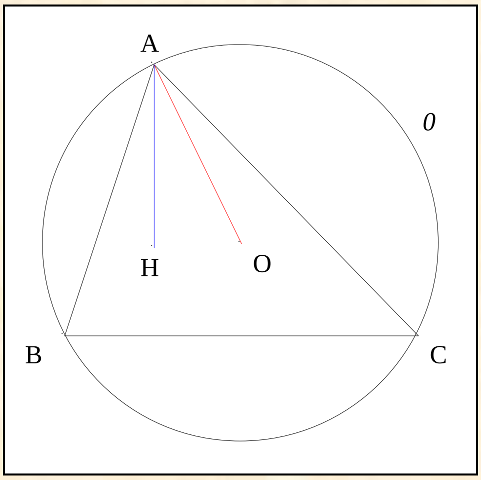
VISION

Figure :

---

[52] Angles orientés à **Π** près.

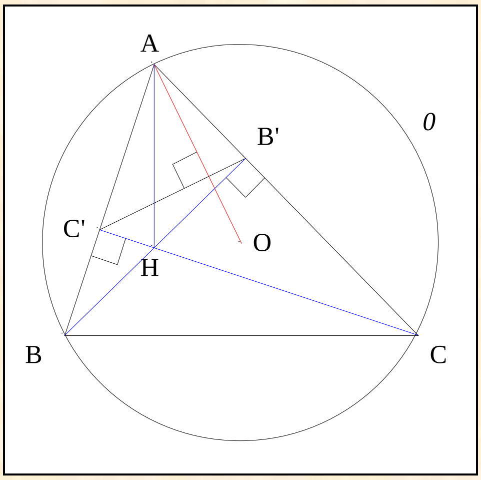
[53] Mention J., Note sur le triangle rectiligne, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1^{re} série tome **IX (1850)** 324-327 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit de ABC
et	O	le centre de *0*.

Donné : (AH) et (AO) sont deux A-isogonales.

VISUALISATION



- Notons B', C' les pieds des B, C-hauteurs de ABC.
- D'après von Nagel "Un rayon" [54], (B'C') ⊥ (AO).
- **Conclusion :** d'après **C. 3.** Isogonale et perpendiculaire, (AH) et (AO) sont deux A-isogonales.

Scolies :

(1) par analogie avec la formation du mot symédiane,
l'isogonale d'une hauteur est appelée par l'auteur "syhauteur".

(2) (AH) et (AO) sont symétriques par rapport aux bissectrices de l'angle déterminé par (AB) et (BC).

(3) Lorsque ABC est A-rectangle, (AO) est la A-médiane de ABC.

[54] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Archive :

THÉORÈME. *La bissectrice d'un angle divise en deux parties égales l'angle formé d'un rayon du cercle circonscrit et de la hauteur partant d'un même sommet.*

[55]

[55] Mention J., Note sur le triangle rectiligne, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1re série tome **IX (1850)** 326 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0