AYME's PERSPECTOR

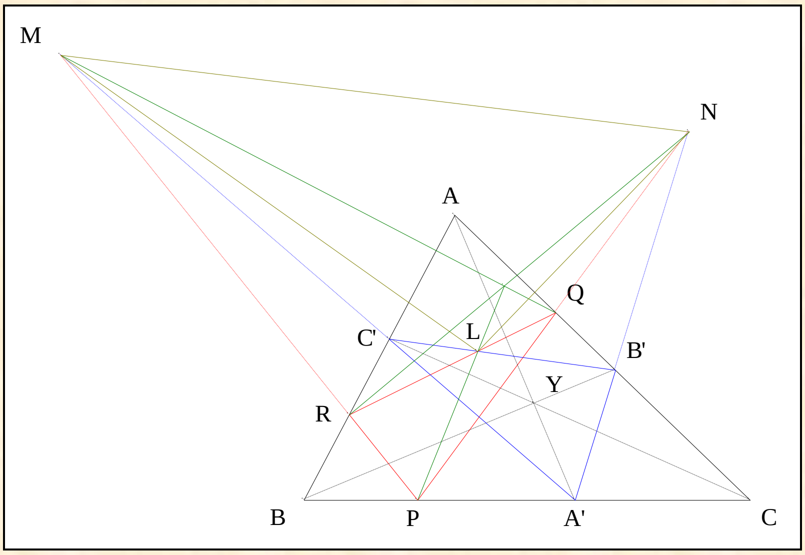
APPLICATIONS

TO

THE GRINBERG, GIBERT, FONTENÉ, SCHROETER's PERSPECTORS

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente un résultat surprenant. Il est difficile de penser que les géomètres des siècles précédents soient passés à côté d'une telle situation.
Toutes les figures sont en positions générales et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a surprising result. It is difficult to think that the Geometers of the previous centuries are passed by such a situation.
All figures are in general positions and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

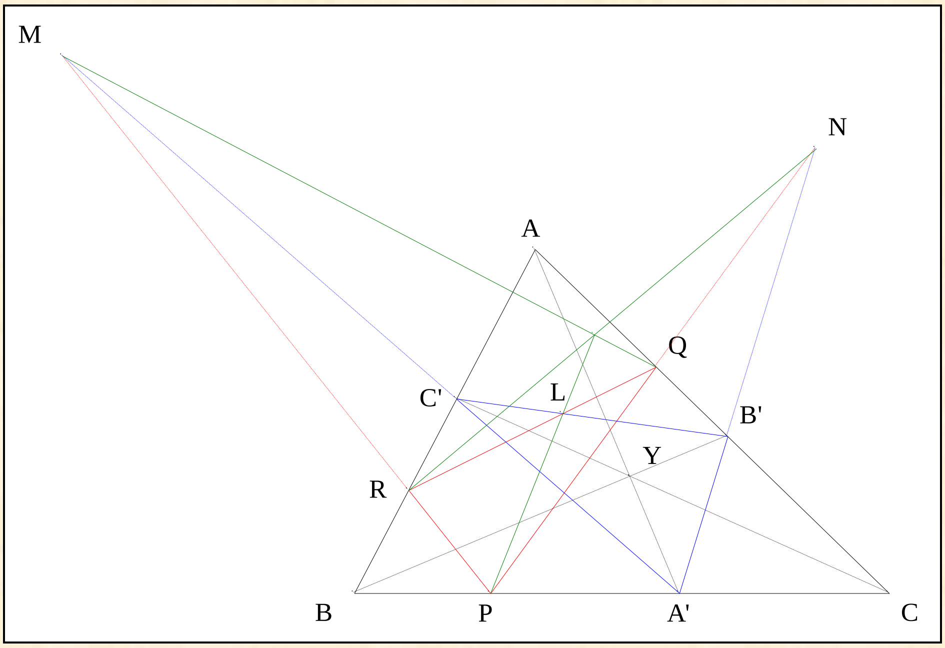
[1] St-Denis, Île de la Réunion (France), le 29/08/2011.

Sommaire

A. AYME's PERSPECTOR

VISION

Figure :

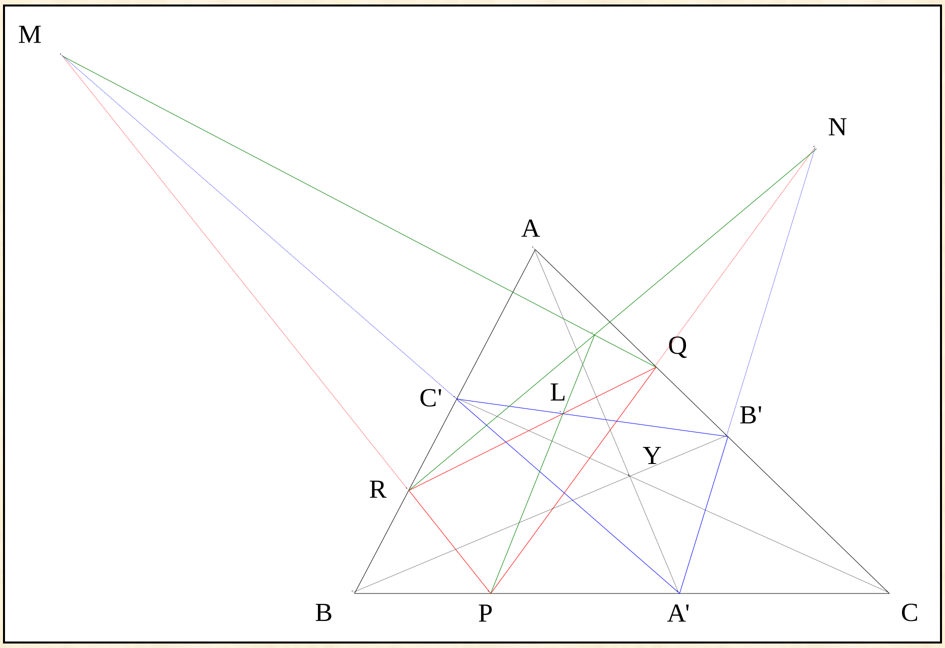


Traits :	ABC	un triangle,
	Y	un point,
	A'B'C'	le triangle Y-cévien de ABC,
	PQR	un triangle inscrit de ABC
et	L, M, N	les points d'intersection resp. de (QR) et (B'C'), (RP) et (C'A'), (PQ) et (A'B').

Donné : (PL), (QM) et (RN) sont concourantes ou parallèles. [2]

VISUALISATION

[2] Ayme J.-L., résultat personnel du 21/03/2004.
Ayme J.-L., Three concurrent lines, *Mathlinks* du 26/07/2009 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=1574902#1574902 ;
A new result ?, Message *Hyacinthos* # **18056** du 27/07/2009 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- D'après "Le théorème de Céva"

  appliqué au triangle Y-cévien A'B'C' de ABC, nous avons : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

- D'après "Le théorème de Ménélaüs"

  appliqué au triangle ARQ et à la ménélienne (B'C'L), nous avons : $\frac{\overline{B'Q}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'R}} \cdot \frac{\overline{LR}}{\overline{LQ}} = -1$.

- D'après "Le théorème de Ménélaüs"

  appliqué au triangle BRP et la ménélienne (C'A'M), nous avons : $\frac{\overline{C'R}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'P}} \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{MR}} = -1$.

- D'après "Le théorème de Ménélaüs"

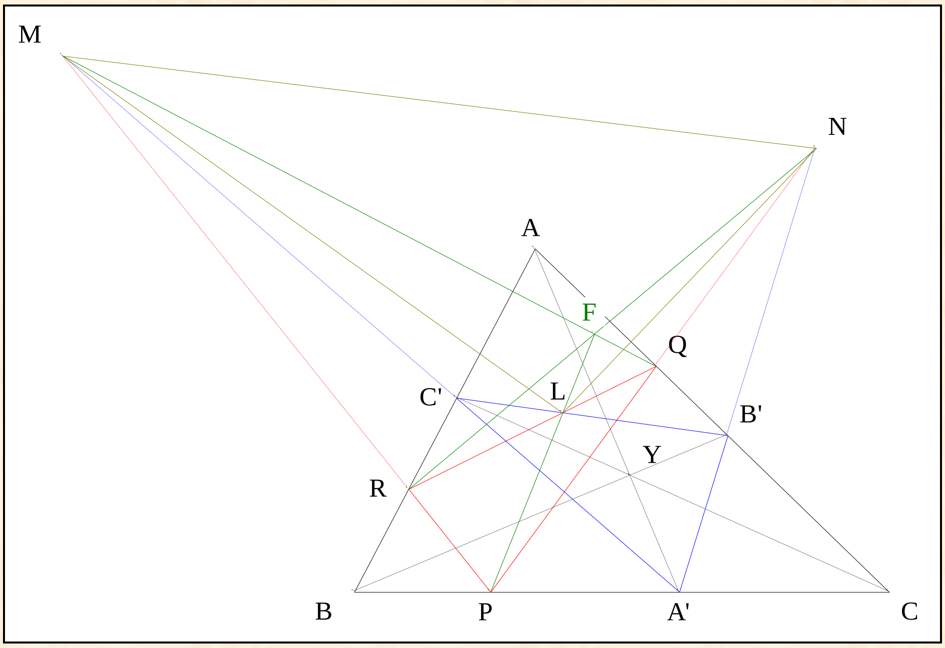
  appliqué au triangle CPQ et la ménélienne (A'B'N), nous avons : $\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'Q}} \cdot \frac{\overline{NQ}}{\overline{NP}} = -1$.

- Par multiplication membre à membre de ces trois dernières égalités et par substitution de la première dans le résultat obtenu,

  nous avons : $\frac{\overline{LR}}{\overline{LQ}} \cdot \frac{\overline{NQ}}{\overline{NP}} \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{MR}} = -1$.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Ceva", (PL), (QM) et (RN) sont concourantes ou parallèles.

Scolies : **(1)** deux triangles en perspective



- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [3],
  le triangle LMN est en perspective avec le triangle PQR.

(2) LMN est le triangle latéral des triangles A'B'C' et PQR.

(3) (PL), (QM) et (RN) sont concourantes

- Notons F ce point de concours.

- Nous dirons que "F est le point d'Ayme de PQR relativement à c-Y". (c pour cévien)

(4) Ce résultat n'est pas symétrique.

Énoncé traditionnel :

dans un triangle,
le triangle latéral d'un triangle cévien et d'un triangle incrit
est en perspective avec ce dernier.

Commentaire : rappelons une réflexion d'Antreas Hatzipolakis[4] concernant ce résultat sur le site *Hyacinthos*

What I think is, it is very nice if true!
I must say, the theorem with both inscribed triangles be cevian triangles,
is an old theorem,
and I am wondering why old geometers did not try it for one cevian
and one not-necessarily- cevian triangles.

Note historique : la preuve de l'auteur a été publiée sur le site *Hyacinthos*[5].
La preuve du grec Kostas Vittas[6] basée sur les quaternes harmoniques est présentée dans l'article "Les trois théorèmes de Georges Fontené"[7].

---

[3] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[4] Hatzipolakis, A new result?, Message *Hyacinthos* # **18056** du 28/07/2009 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[5] Hatzipolakis, A new result?, Message *Hyacinthos* # **18069** ; http://groups.com/group/Hyacinthos/files/

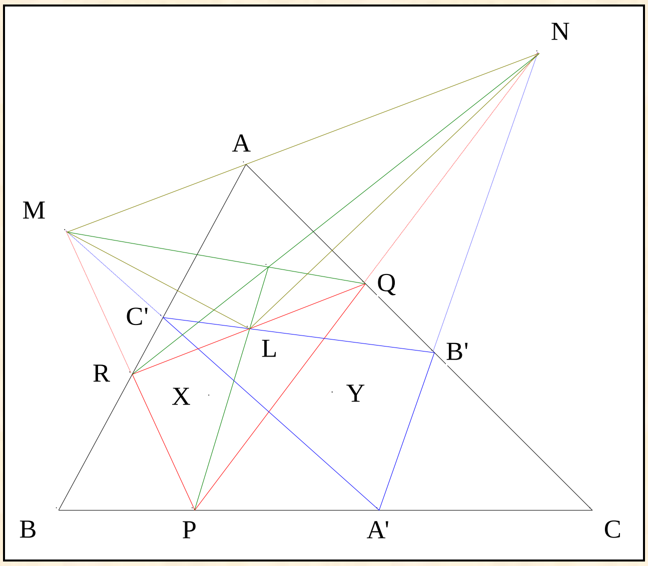
[6] Vittas K., Three concurrent lines # **3**, *Mathlinks* du 31/07/2009 ;

B. APPLICATIONS

1. Le triangle inscrit PQR est cévien ou ''the Grinberg's perspector''

VISION

Figure :



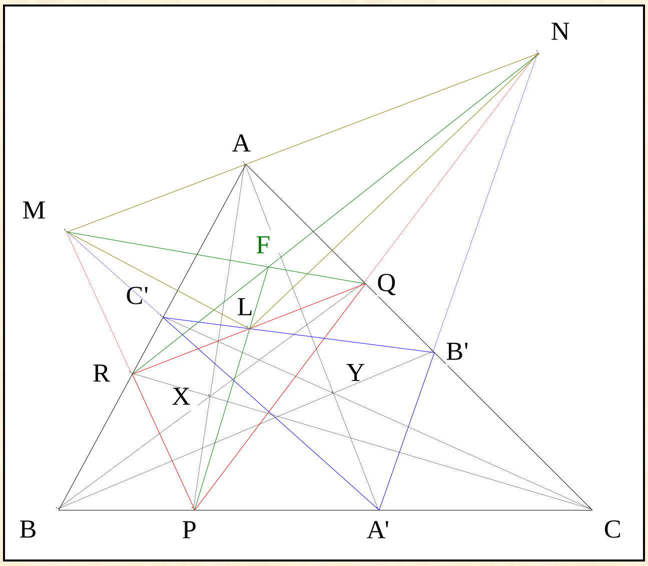
Traits :	ABC	un triangle,
	Y	un point,
	A'B'C'	le triangle Y-cévien de ABC,
	X	un point,
	PQR	le X- triangle cévien de ABC
et	L, M, N	les points d'intersection resp. de (QR) et (B'C'), (RP) et (C'A'), (PQ) et (A'B').

Donné : LMN est en perspective avec le triangle PQR.

Scolies : **(1)** (PL), (QM) et (RN) sont concourantes

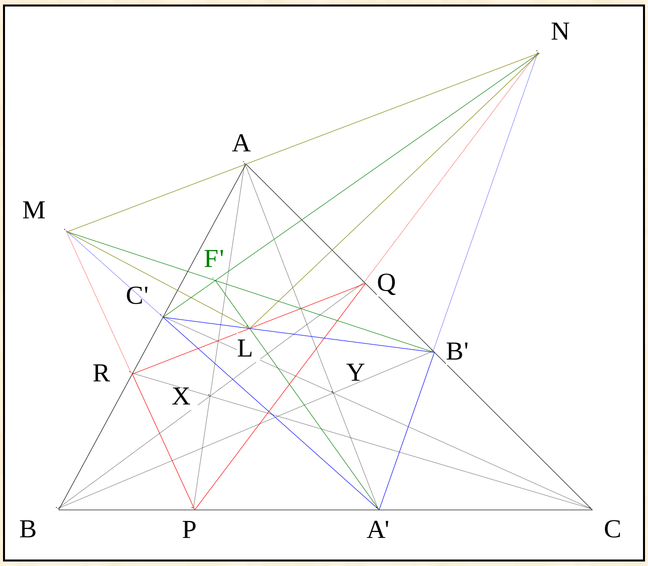
---

7 http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=1574902#1574902.
Ayme J.-L., Les trois théorèmes de Georges Fontené, Généralisations et Questions, G.G.G. vol. **8** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons F ce point de concours.
- Nous dirons que "F est le point de Grinberg de c-X relativement à c-Y". (c pour cévien)

(2) Symétrie du résultat



- A'B'C' est en perspective avec le triangle LMN
- Notons F' ce point de concours.
- Nous dirons que "F' est le point de Grinberg de c-Y relativement à c-X". (c pour cévien)

Énoncé traditionnel :

dans un triangle,
le triangle latéral de deux triangles cévien
est en perspective avec ces deux derniers.

Note historique : cette généralisation a été proposée en 2003 par le germano-russe Darij Grinberg au sein du groupe *Hyacinthos*.

Some projective properties of cevian triangles

If P and P' are two points in the plane of a triangle ABC, and A'B'C' and A"B"C" are the cevian triangles of P and P', respectively, then let's denote

X = B'C' /\ B"C"; Y = C'A' /\ C"A"; Z = A'B' /\ A"B";
X' = B'C" /\ B"C'; Y' = C'A" /\ C"A'; Z' = A'B" /\ A"B'.

Then,

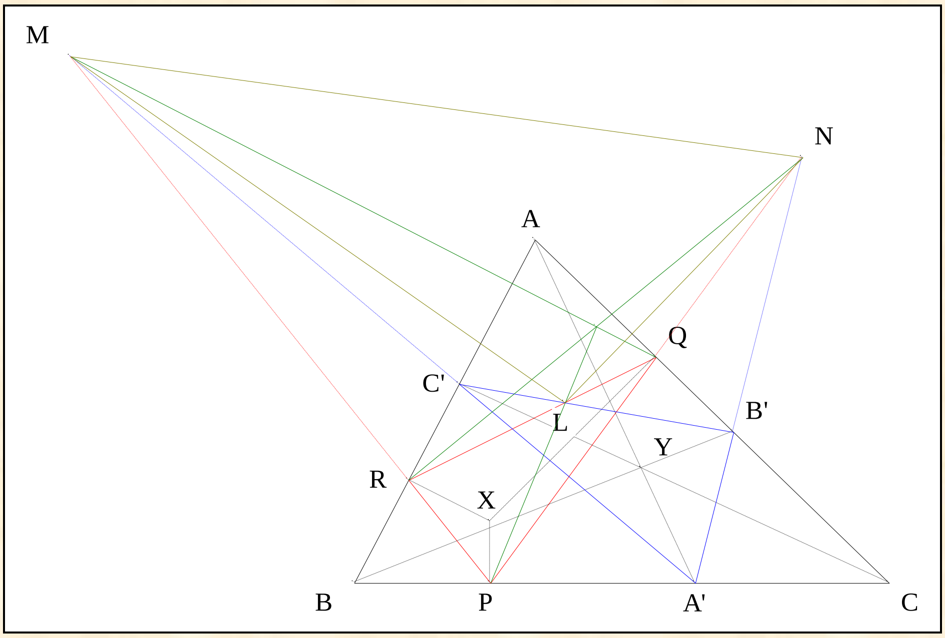
(1) The lines A'X, B'Y, C'Z meet at a point Q;
(2) The lines A"X, B"Y, C"Z meet at a point Q';

[8]

2. Le triangle inscrit PQR est pédal ou "the Gibert's perspector"

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
Y un point,
A'B'C' le triangle Y-cévien de ABC,
X un point,
PQR le triangle X-pédal de ABC
et L, M, N les points d'intersection de(QR) et (B'C'), de (RP) et (C'A'), de (PQ) et (A'B').

Donné : LMN est en perspective avec le triangle PQR.

---

[8] Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message *Hyacinthos* # **8743** du 28/11/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Archive :

Fontené point

Let P and M be two points.
PaPbPc is the pedal triangle of P and MaMbMc the cevian triangle of M.

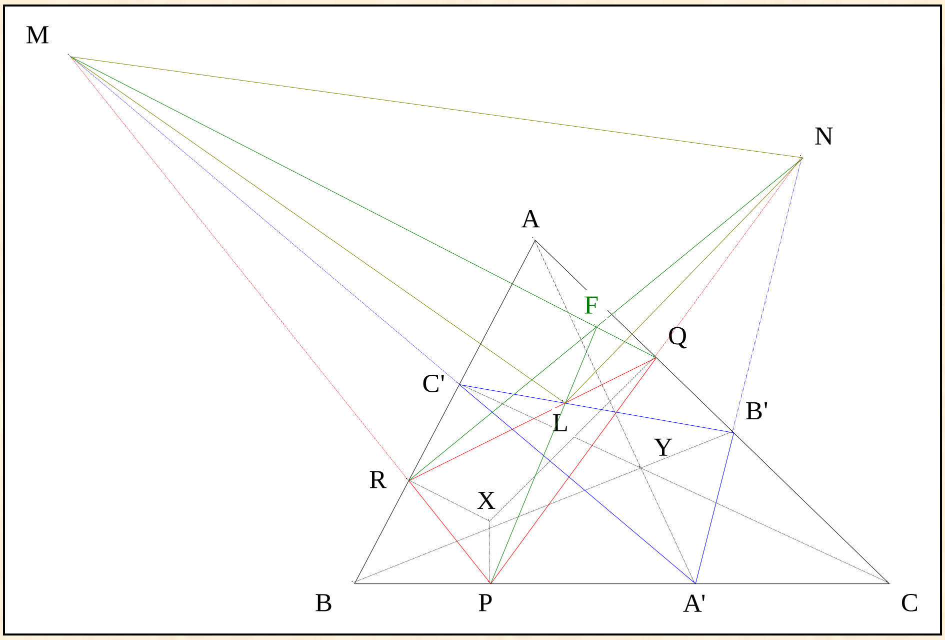
A' = PbPc /\ MbMc, B', C' similarly.

The triangles A'B'C' and PaPbPc are always perspective at a point F(P,M) I call Fontené point of P and M.

F(P,G) (G = centroid) lies on the nine-point circle : this is the first Fontené theorem.

[9]

Scolie : **(1)** (PL), (QM) et (RN) sont concourantes



- Notons F ce point de concours.
- Nous dirons que F est "le point de Gibert de p-X relativement à c-Y". (p pour pédal et c pour cévien)

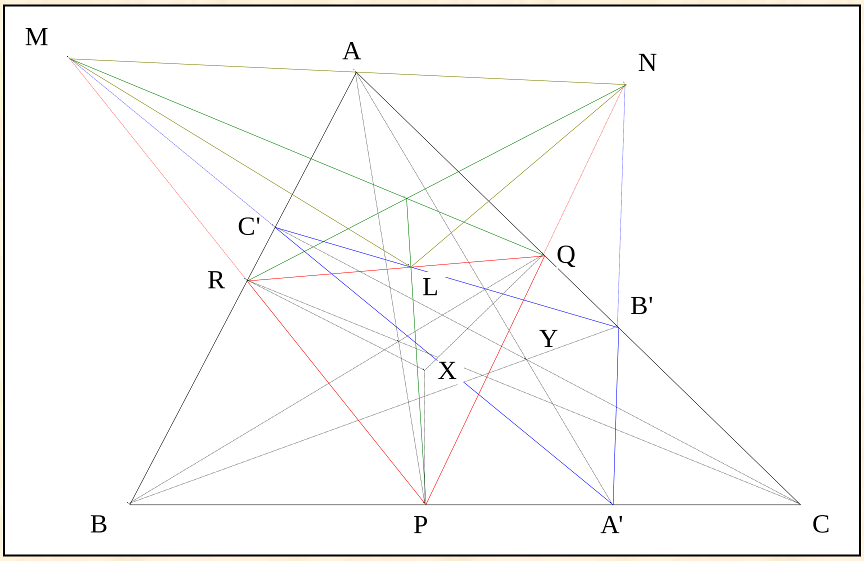
(2) Ce résultat n'est pas symétrique.

3. Le triangle inscrit PQR est cévien et pédal

VISION

Figure :

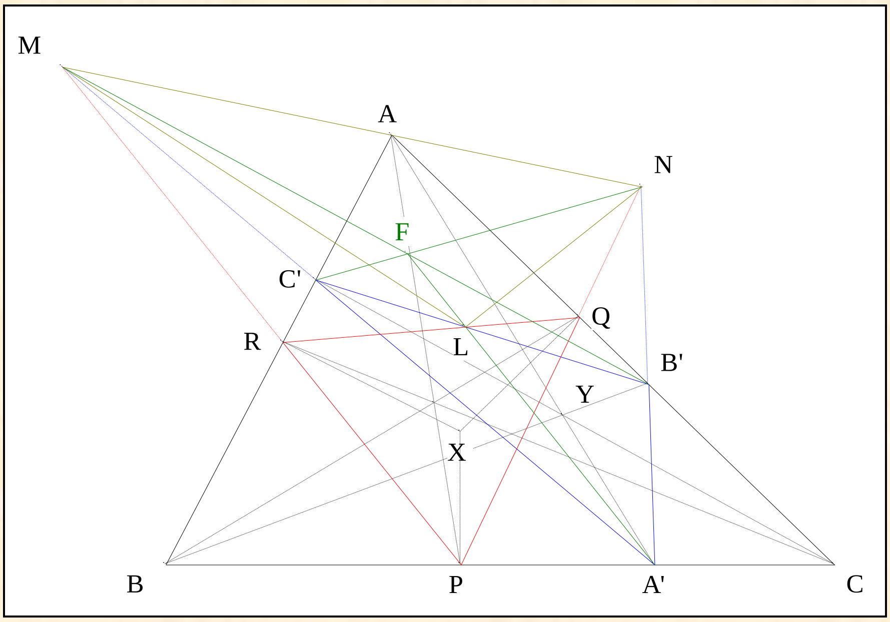
[9] Gibert B., Fontené point, Message *Hyacinthos* # **8701** du 24/11/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



Traits : ABC un triangle,
Y un point,
A'B'C' le triangle Y-cévien de ABC,
X un point,
PQR le triangle X-PC de ABC
et L, M, N les points d'intersection de (QR) et (B'C'), de (RP) et (C'A'), de (PQ) et (A'B')

Donné : LMN est en perspective avec le triangle PQR.

Scolies : **(1)** (PL), (QM) et (RN) sont concourantes



- Notons F ce point de concours.
- Nous dirons que F est "le centre de perspective de pc-X relativement à c-Y". (pc pour pédal-cévien)

(2) Symétrique du résultat

- LMN est en perspective avec le triangle A'B'C'
- Notons F' ce point de concours.
- Nous dirons que F' est "le centre de perspective de c-Y relativement à pc-X".

(3) Cas particulier

Proposition 12. *Let DEF be the intouch triangle of triangle ABC,* i.e., *the cevian triangle of the Gergonne point. Given a point $T = (u : v : w)$ with cevian triangle XYZ, let*

$$X' = YZ \cap EF, \qquad Y' = ZX \cap FD, \qquad Z' \doteq XY \cap DE.$$

The triangles $X'Y'Z'$ and DEF are perspective at F_T with coordinates given in (6). See Figure 4.

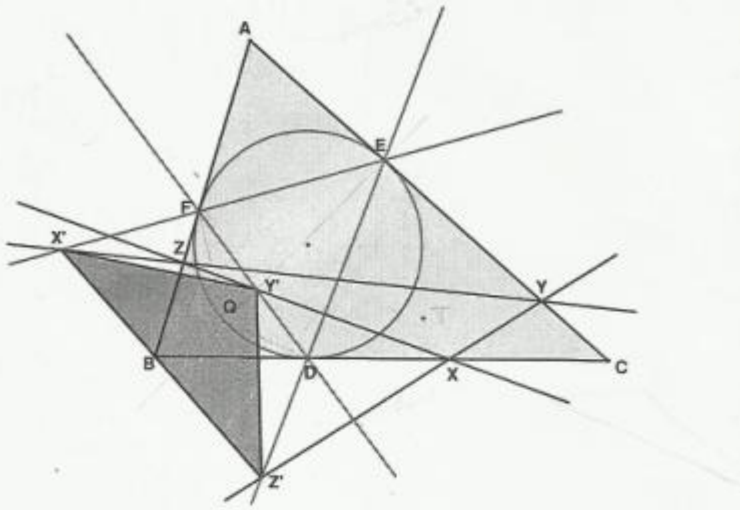


Figure 4. [10]

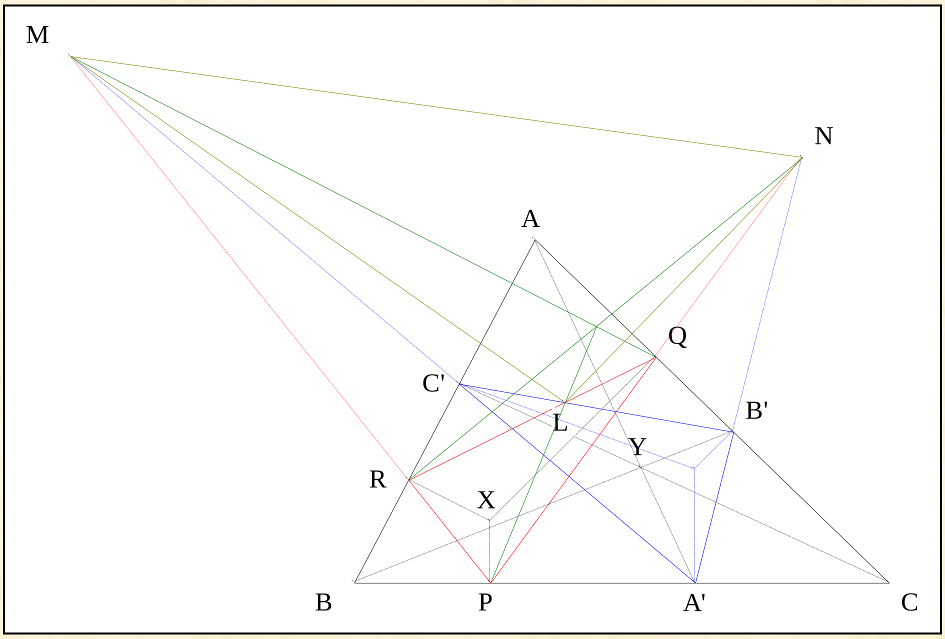
- Notons I le centre de ABC.
- DEF est le triangle I-pc de ABC i.e. le triangle inscrit de ABC.

4. Le triangle inscrit PQR est pédal et le triangle cévien est de plus pédal ou "the generalized Fontené's perspector"

VISION

Figure :

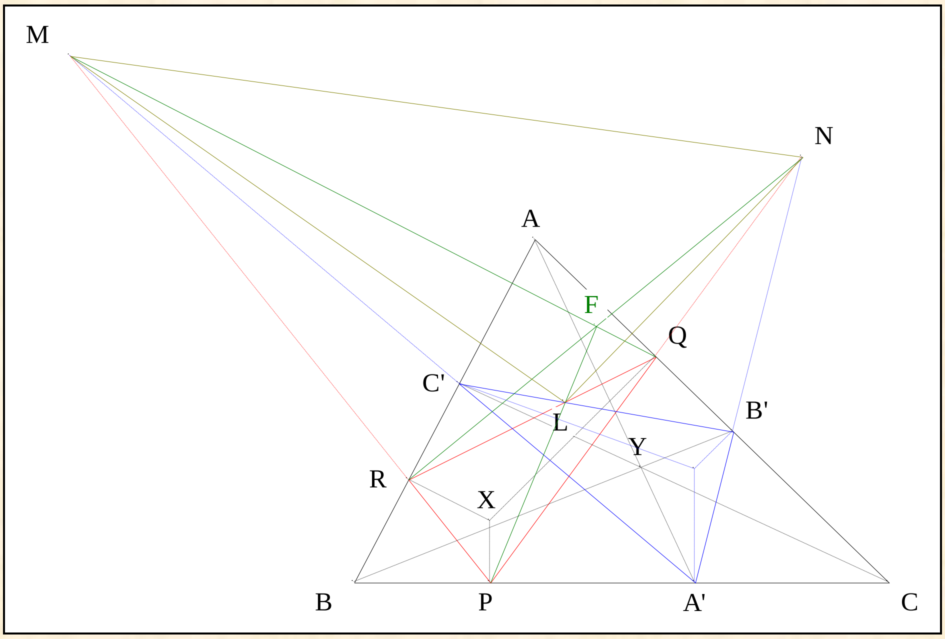
[10] Yiu P., On Emelyanov's circle theorem.



Traits :	ABC	un triangle,
	Y	un CP-point,
	A'B'C'	le triangle Y-PC de ABC,
	X	un point,
	PQR	le triangle X-pédal de ABC
et	L, M, N	les points d'intersection de (QR) et (B'C'), de (RP) et (C'A'), de (PQ) et (A'B')

Donné : LMN est en perspective avec le triangle PQR.

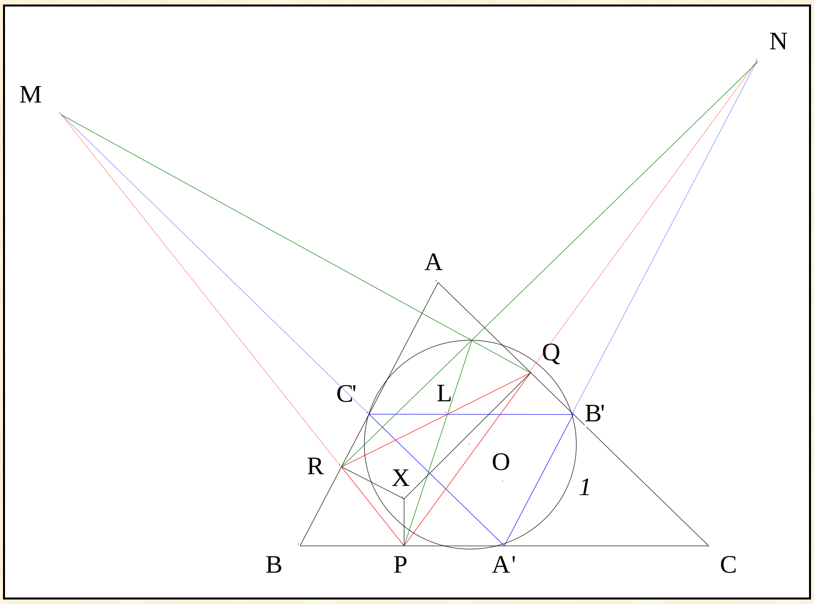
Scolies : **(1)** (PL), (QM) et (RN) sont concourantes



- Notons F ce point de concours.

- Nous dirons que F est "le point généralisé de Fontené de p-X relativement à cp-Y".
(cp pour cévien-pédal)

(2) Cas particulier [11]



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC,
  G le point médian de ABC
  et *1* le cercle d'Euler de ABC.

- Y est le point G.

- A'B'C 'est le triangle O-PC de ABC i.e. le triangle médian de ABC.

- Nous retrouvons "le premier théorème de Fontené".[12]

Note historique : remarquant que le triangle orthique pouvait être considéré un triangle pédal, l'inspecteur Georges Fontené considérait en 1905, le triangle latéral des triangles médian et d'un triangle pédal d'un triangle, situation que John Griffiths avait défrichée vers 1857.

5. Les deux triangles sont pédaux-céviens ou "the generalized Schroeter's perspector"

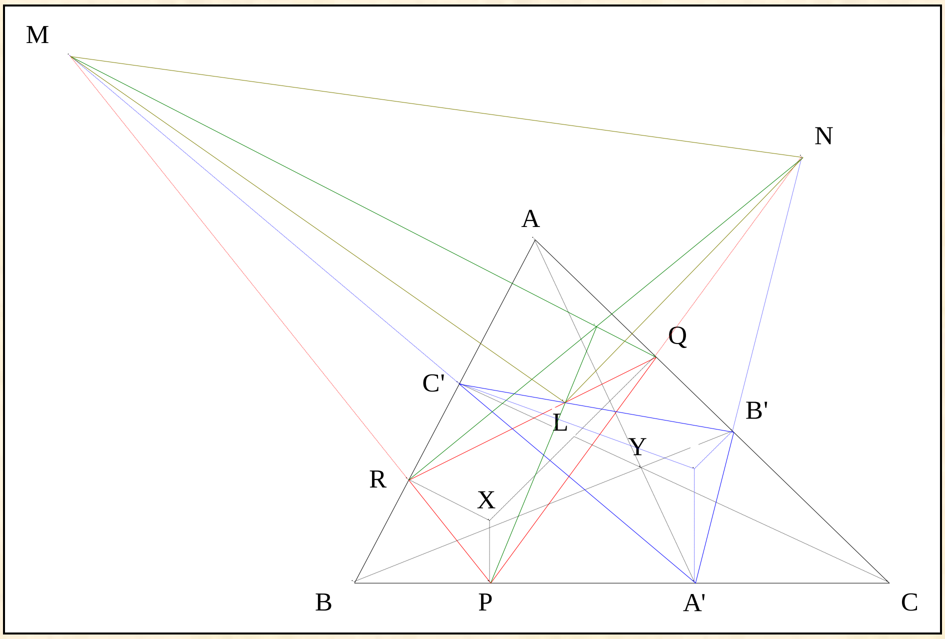
VISION

Figure :

---

[11] Fontené G., Extension du théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales* **5** (1905) 504-506;
Fontené G., Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés, *Nouvelles Annales* **5** (1905) 529-538;
Fontené G., Sur le cercle pédal, *Nouvelles Annales* **65** (1906) 55-58.

[12] Ayme J.-L., Les trois théorèmes de Georges Fontené, G.G.G. vol. **8**, p. 2 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABC un triangle,
Y un CP-point,
A'B'C' le triangle Y-cévien de ABC,
X un PC-point,
PQR le triangle X-pédal de ABC,
et L, M, N les points d'intersection resp. de (QR) et (B'C'), (RP) et (C'A'), (PQ) et (A'B').

Donné : LMN est en perspective avec le triangle PQR.

Scolies : **(1)** (PL), (QM) et (RN) sont concourantes

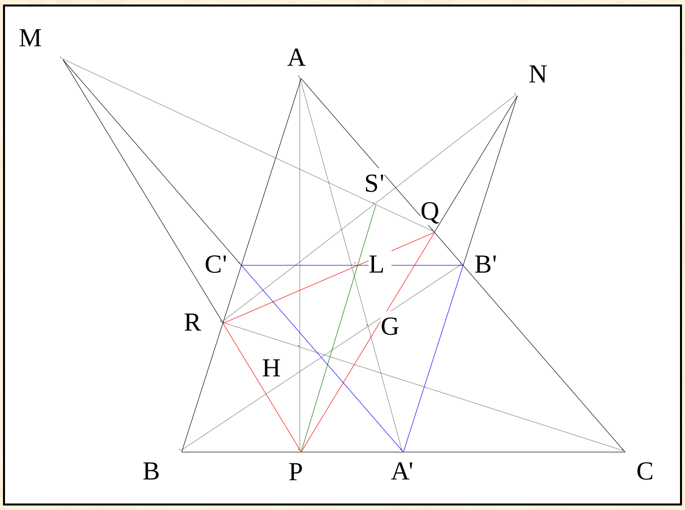
- Notons F ce point de concours.
- Nous dirons que F est "le point généralisé de Schroeter de pc-X relativement à cp-Y".

(2) Symétrie du résultat

- LMN est en perspective avec le triangle A'B'C'
- Notons F' ce point de concours.
- Nous dirons que F' est "le point généralisé de Schroeter de cp-Y relativement à pc-X".

(3) Cas particulier ou le second point de Schroeter [13]

[13] Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

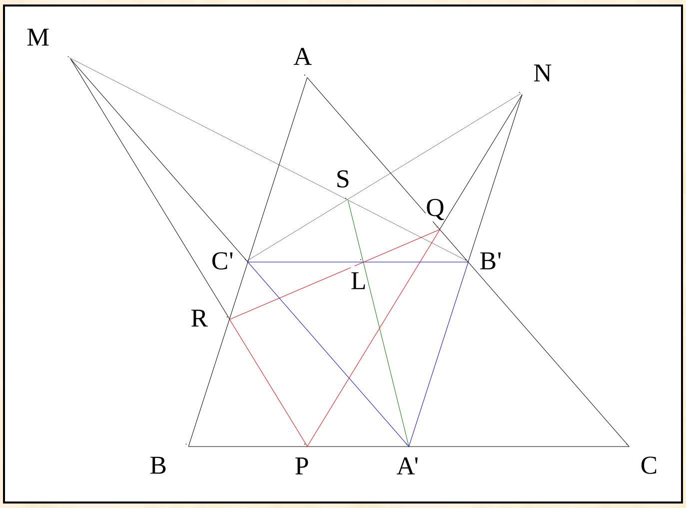


Traits : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle médian de ABC,
G le point médian de ABC,
PQR le triangle orthique de ABC,
H l'orthocentre de ABC
et L, M, N les points d'intersection resp. de (QR) et (B'C'), (RP) et (C'A'), (PQ) et (A'B').

Donné : LMN est en perspective avec le triangle PQR.

- Notons S' le point de concours de (PL), (QM) et (RN).
- Nous dirons que S' est "le second point de Schroeter de pc-H relativement à cp-G".

(4) Cas particulier ou le premier point de Schroeter



Note historique : les scolies **(3)** et **(4)** constituent le cinquième théorème de Schroeter.
Heinrich Edouard Schroeter (1829-1892) a été l'un des premiers géomètres à avoir considéré en 1865, l'intersection des triangles médian IJK et orthique PQR d'un triangle i.e. le triangle latéral de IJK et PQR.