LA DROITE

DE

SEIMIYA - AYME - TURNER

PREMIÈRES PREUVES SYNTHÉTIQUES

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous proposons une preuve originale et purement synthétique d'un résultat du professeur John S. Turner datant de 1924

Let ABC be a triangle inscribed in a circle, and let P, Q be two inverse points with respect to the circle. Take L, M, N, the images (symmetric points) of P in BC, CA, AB, and join QL, QM, QN cutting BC, CA, AB in X, Y, Z respectively. Then the points X, Y, Z are collinear[1].

L'originalité de la preuve présentée réside dans le fait qu'elle s'appuie sur la droite de Seimyia et d'un résultat trouvé par l'auteur[2] pour démontrer "la droite de Turner".

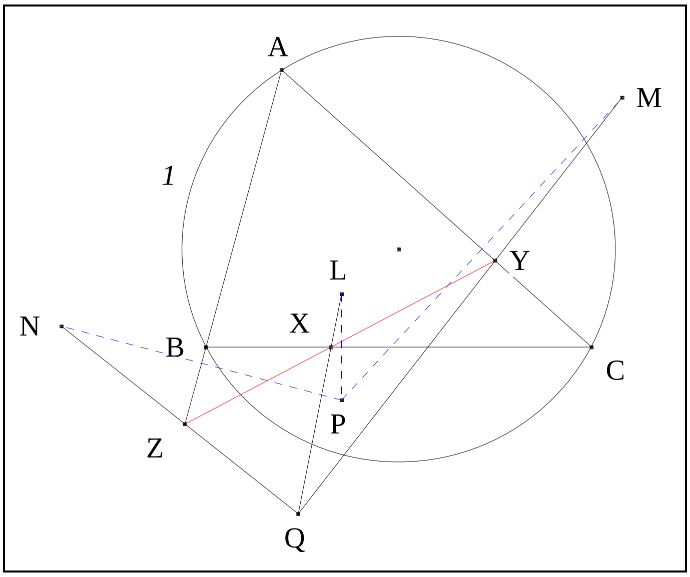
Sommaire

I. LE RÉSULTAT DE J. S. TURNER

VISION

Figure :

1 Turner J. S. (29/11/1924).
2 Ayme J.-L., La droite de Seimiya, G.G.G. vol. 3, p. 8.



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point,
	L, M, N	les symétriques de P resp. par rapport à (BC), (CA), (AB),
	Q	l'inverse de P par rapport à *1*
et	X, Y, Z	les points d'intersection de (QL) et (BC), (QM) et (CA), (QN) et (AB).

Donné : X, Y et Z sont alignés[3].

Scolies : **(1)** X, Y, Y sont resp. les A, B, C-points de Turner de ABC relativement à P et Q

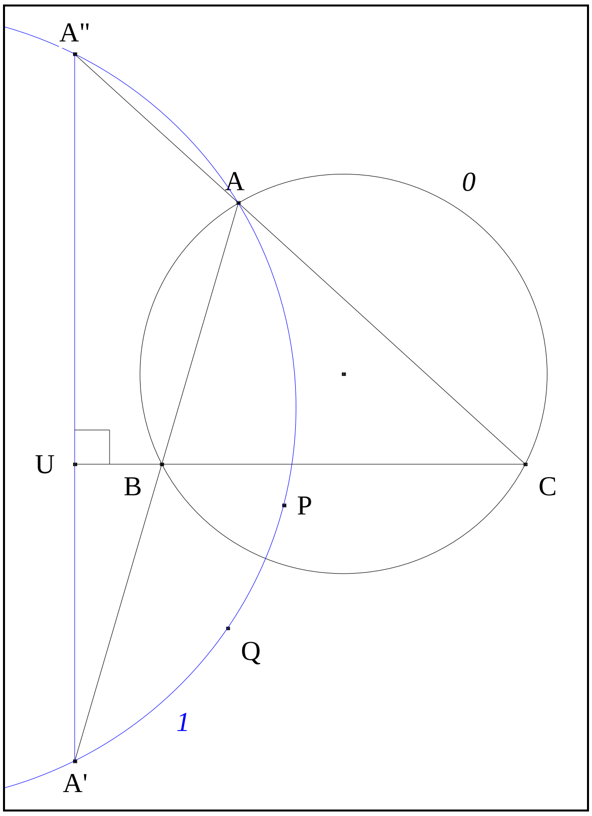
(2) (XYZ) est "la droite de Turner de P et Q relativement à ABC".

II. UN LEMME

VISION

Figure :

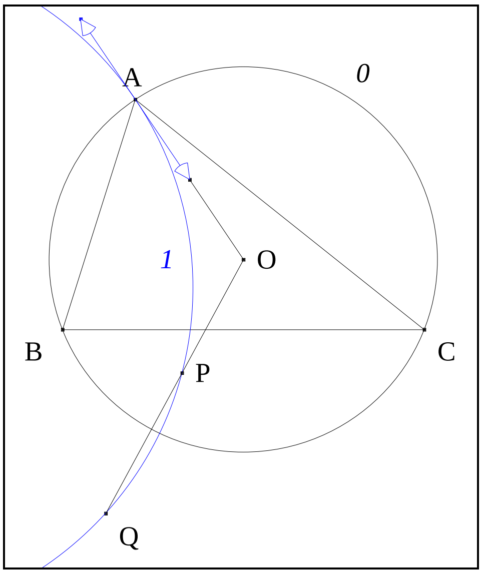
[3] Turner J. S., An extension of the property of the circle known as "Simson's line", *Southwestern Section* (March-April 1924) 118.



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point,
	Q	l'inverse de P par rapport à *1*,
	2	le cercle passant par A, P, Q
et	A', A"	les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (AB), (AC).

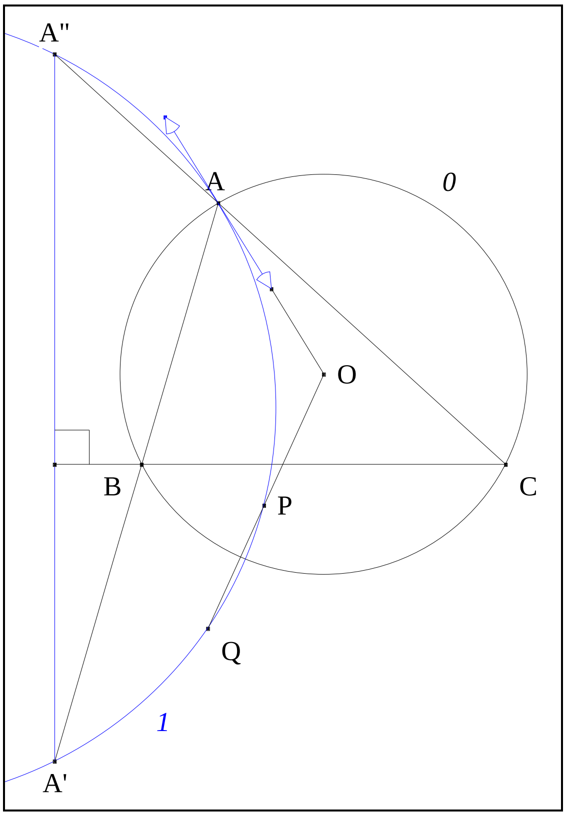
Donné : (A'A") est perpendiculaire à (BC).

VISUALISATION



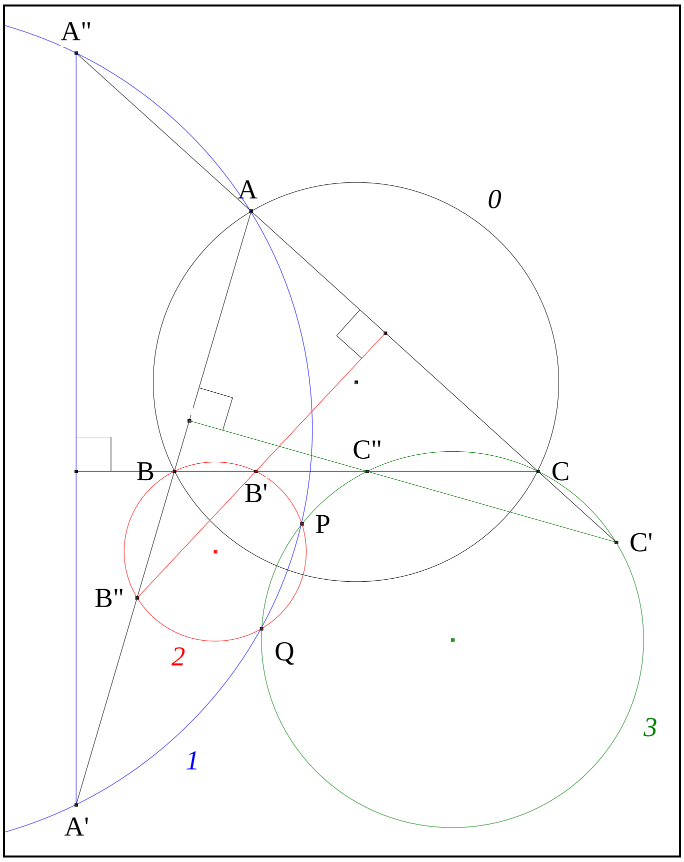
- Notons O le centre de *0*

- P étant l'inverse de Q relativement à *1*, OP.OQ = OA².
- **Conclusion partielle :** *1* est orthogonal à *0*.
- **Scolie :** par définition, *1* est tangent à (OA) en A.



- **Conclusion :** d'après "Deux cordes perpendiculaires" (Cf. Annexe 1), (A'A") est perpendiculaire à (BC).

Scolie : deux autres perpendicularités



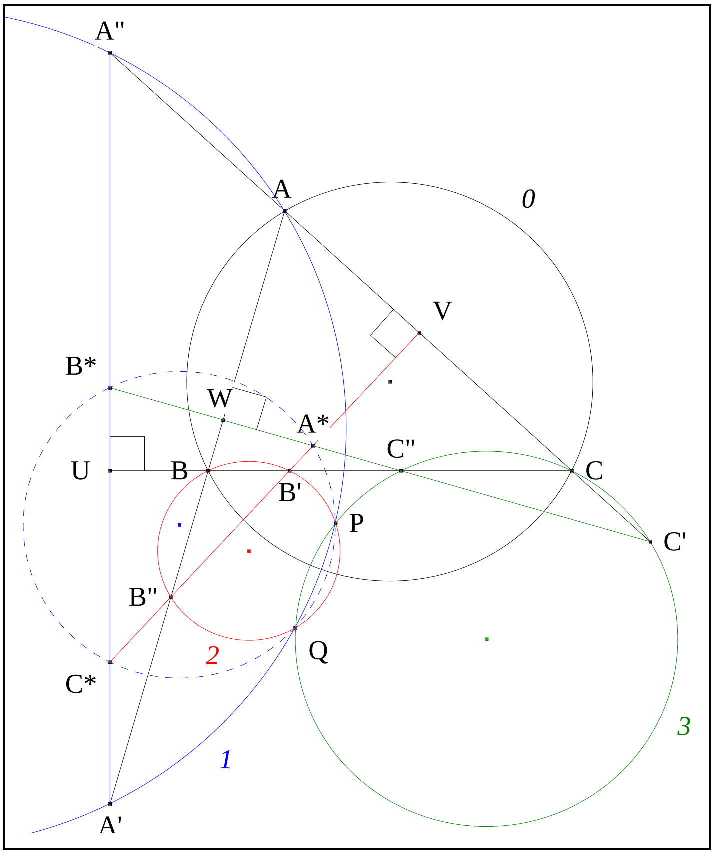
- Notons $\quad$ *2* $\quad$ le cercle passant par B, P, Q,
  B', B" $\quad$ les seconds points d'intersection de *2* resp. avec (BC), (BA),
  3 $\quad$ le cercle passant par C, P, Q
  et $\quad$ C', C" $\quad$ les seconds points d'intersection de *3* resp. avec (CA), (CB).

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  (1) $\quad$ *2* est orthogonal à *0* $\quad$ et $\quad$ (B'B") est perpendiculaire à (CA)
  (2) $\quad$ *3* est orthogonal à *0* $\quad$ et $\quad$ (C'C") est perpendiculaire à (AB).

III. LE TRIANGLE DE TURNER

VISION

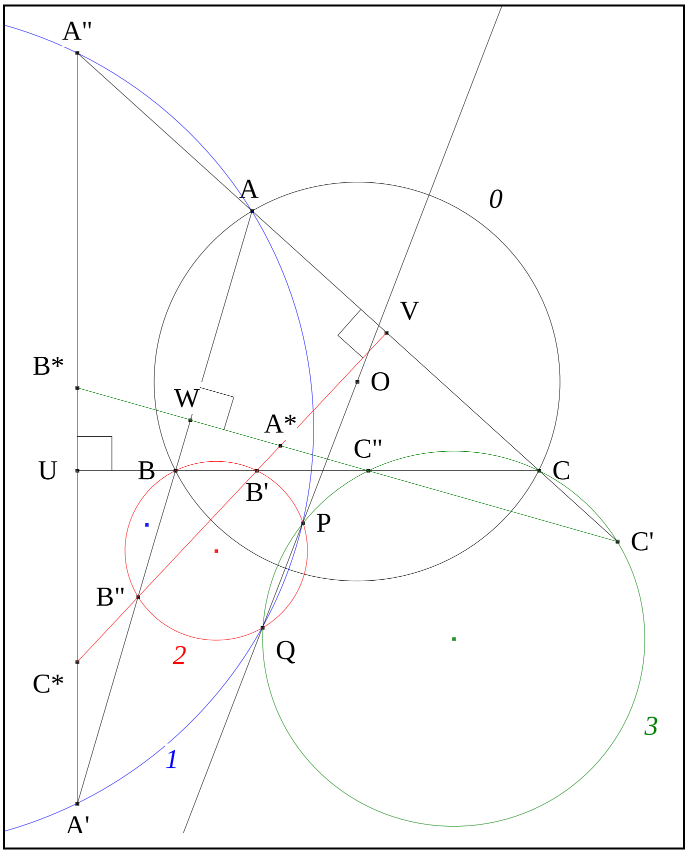
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
U, V, W les points d'intersection resp. de (A'A") et (BC), de (B'B") et (CA), de (C'C") et (AB),
et A*, B*, C* les points d'intersection resp. de (B'B") et (C'C"), de (C'C") et (A'A"), de (A'A") et (B'B").

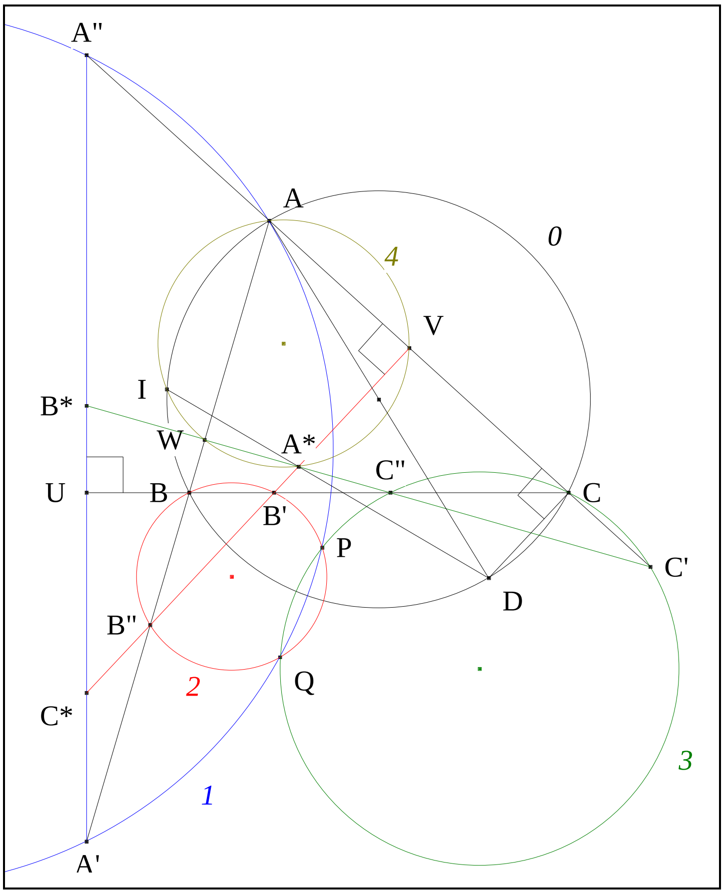
Donné : A*, B*, C*, P et Q sont cocycliques.

VISUALISATION



- **Scolie :** par définition des points inverses, (PQ) passe par O.

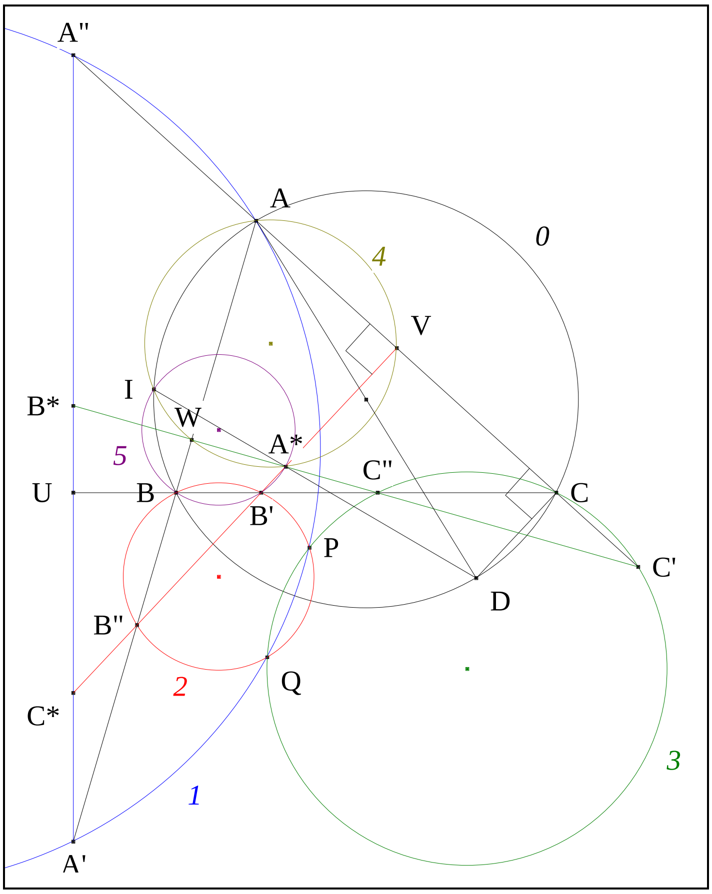
RAYONNONS À PARTIR DE A



- Notons *4* le cercle de diamètre [AA*] ; il passe par V et W ;
  I le second point d'intersection de *4* avec *0*,
  et D l'antipôle de A relativement à *0*.

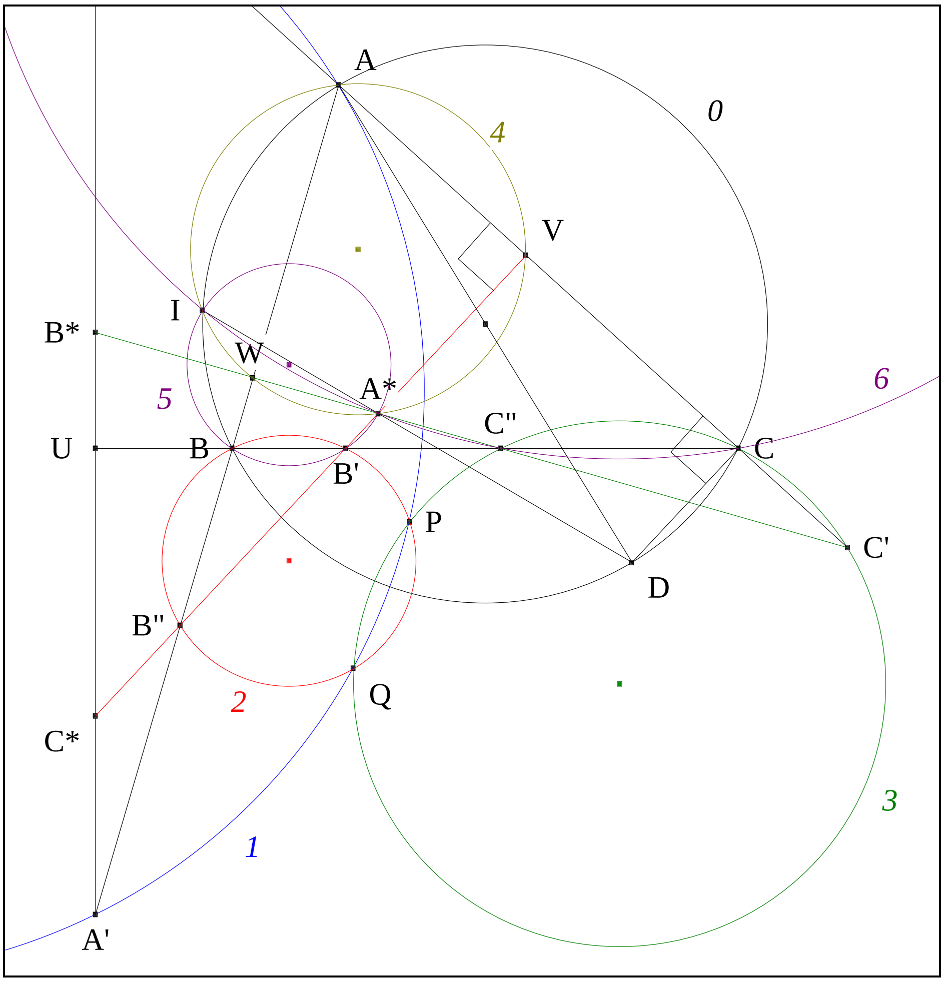
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (CD) ⊥ (CA) ;
  nous savons que (CAV) ⊥ (VA*B') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (CD) // (VA*B').

- Les cercles *0* et *4*, les points de base A et I, la monienne (CAV), les parallèles (CD) et (VA*),
  conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, D, I et A* sont alignés.

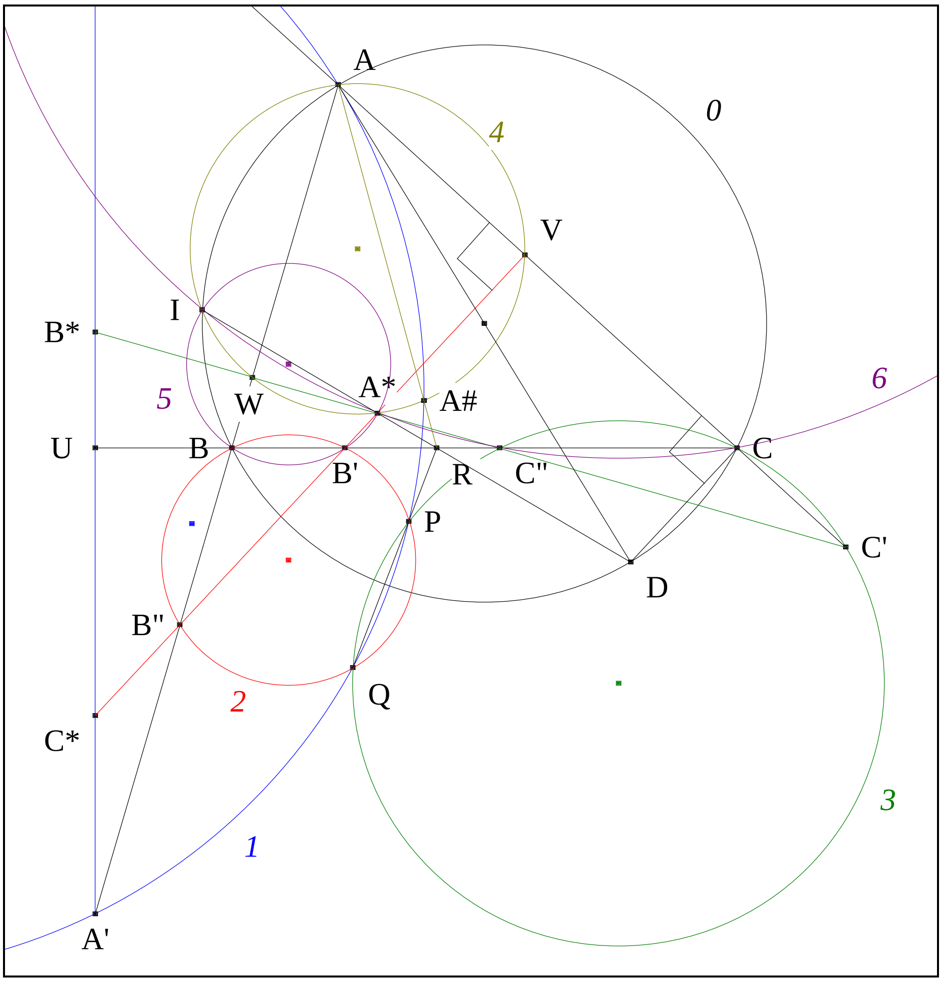


- Le cercle *0*, les points de base B et I, les moniennes naissantes (CBB') et (DIA*), les parallèles (CD) et (B'A*), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, B, I, A* et B' sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que C, I, A* et C" sont cocycliques.
- Notons *6* ce cercle.



- Notons R le point d'intersection de (PQ) et (BC)
  et A# le second point d'intersection de *1* et *4*.

- Considérons les cercles

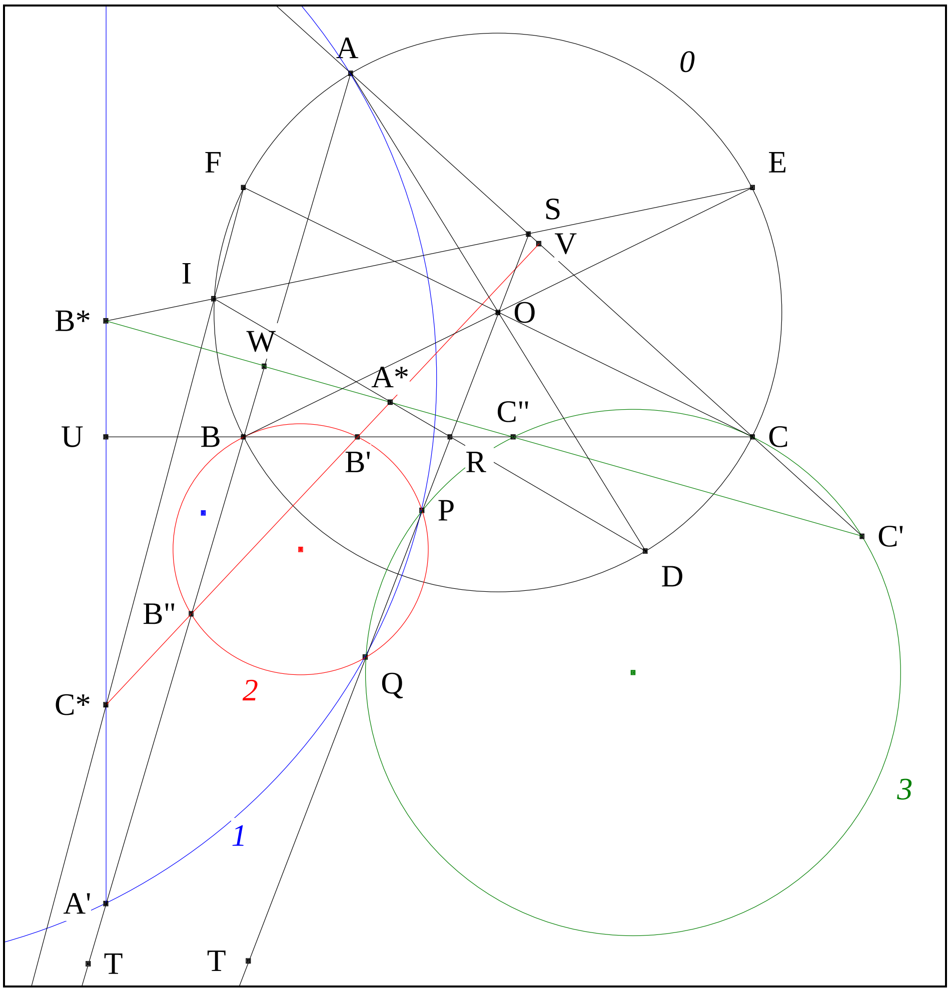
(1)	*2*, *3* et *5* ;	l'axe radical de *3* et *5* passe par R
(2)	*3*, *5* et *6* ;	l'axe radical de *5* et *6* i.e. (IA*) passe par R
(3)	*1*, *2* et *5* ;	l'axe radical de *1* et *5* passe par R
(4)	*1*, *4* et *5* ;	l'axe radical de *1* et *4* i.e. (AA#) passe par R.

- **Scolies :** **(1)** I, A*, R et D sont alignés
  (2) A, A# et R sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 2),
  I, A*, P et Q sont cocycliques.

RAYONNONS

À PARTIR DE B, PUIS DE C



- Notons S le point d'intersection de (PQ) et (CA),
  E l'antipôle de B relativement à *0*,
  T le point d'intersection de (PQ) et (AB),
  et F l'antipôle de C relativement à *0*.

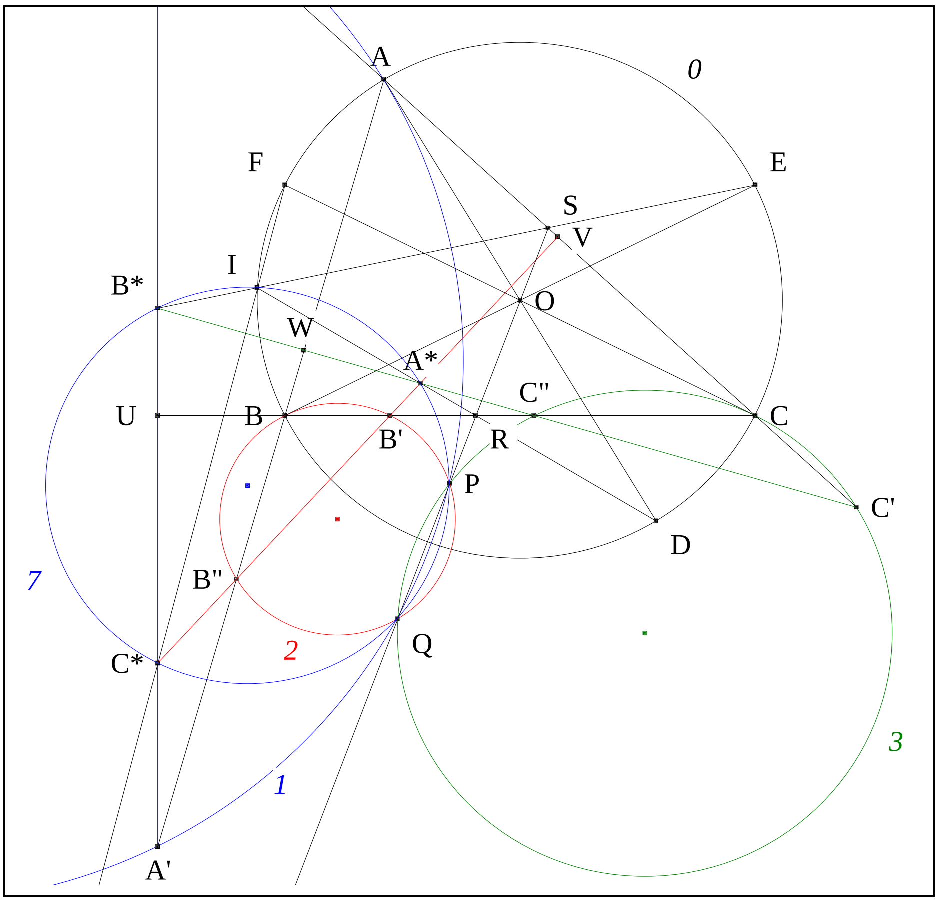
- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** B*, S et E sont alignés
  (2) C*, T et F sont alignés.

- D'après "La P-transversale de Q"[4] appliqué à (PQ) et à O (Cf. Annexe 3),
  (A*RD), (B*SE) et (C*TF) sont concourantes en I.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** I, B*, P et Q sont cocycliques
  (2) I, C*, P et Q sont cocycliques.

---

[4] Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. 3.



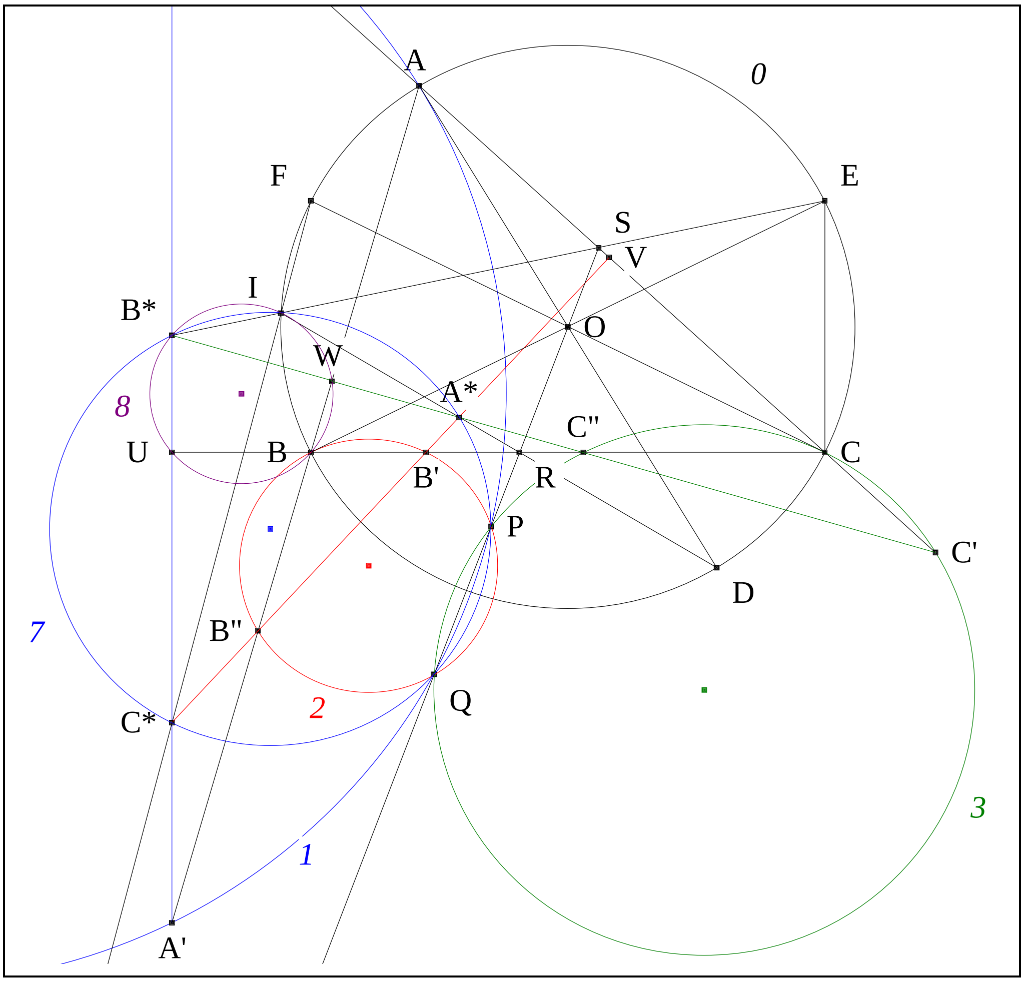
- **Conclusion :** I, A*, B*, C*, P et Q sont cocycliques.
- Notons *7* ce cercle.

Scolies :

(1) A*B*C* est "le triangle de Turner de P et Q relativement à ABC"

(2) *7* est orthogonal à *0* (Cf. Annexe 4)

(3) le cercle de diamètre [BB*]



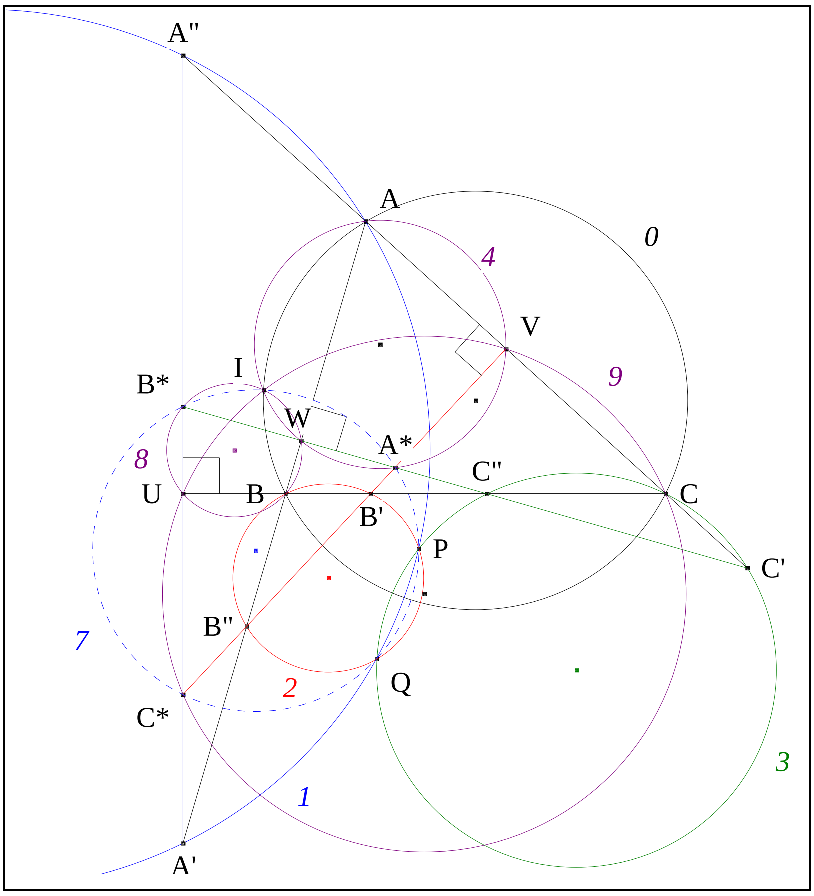
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (CE) ⊥ (CBU) ;
  d'après II. Un lemme, (CBU) ⊥ (UB*) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (CE) // (UB*).

- Le cercle *0*, les points de base B et I, les moniennes naissantes (CBU) et (EIB*),
  les parallèles (CE) et (UB*), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, B, I, U et B* sont cocycliques.

- **Conclusion :** le cercle de diamètre [BB*] passe par I.

- Notons *8* ce cercle.

(4) Le cercle de diamètre [CC*]

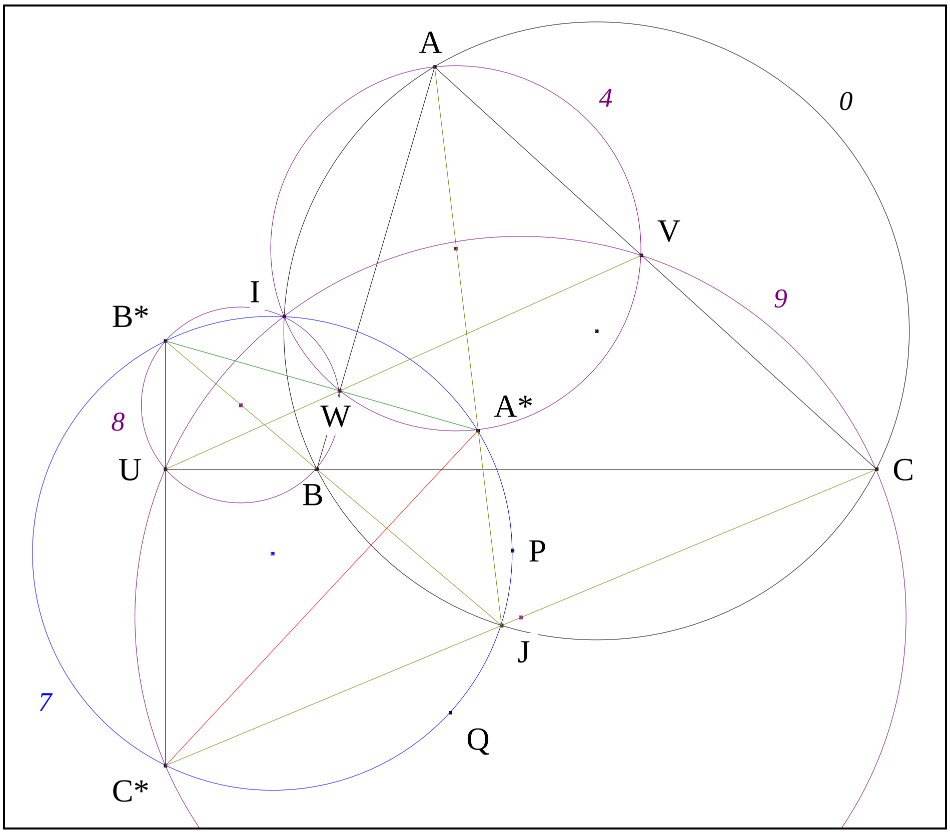


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que le cercle de diamètre [BB*] passe par I.
- Notons *9* ce cercle.

IV. LE POINT J

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et aux notations précédentes, nous ajoutons
J le second point d'intersection de *0* et *7*.

Donnés : (AA*), (BB*) et (CC*) sont concourantes en J.

VISUALISATION

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 5), I est le pivot de ABC relativement à *4*, *8*, *9*.
- D'après "Le point de Miquel-Wallace" (Cf. Annexe 6), I étant sur *0*, U, V et W sont alignés.
- D'après "Le M-cercle de Mannheim" (Cf. Annexe 7), (AA*), (BB*) et (CC*) concourent sur *7*.
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 5), I est le pivot de A*B*C* relativement à *4*, *8*, *9*.
- D'après "Le M-cercle de Mannheim" (Cf. Annexe 7), (A*A), (B*B) et (C*C) concourent sur *0*.
- **Conclusion :** (AA*), (BB*) et (CC*) sont concourantes en J.

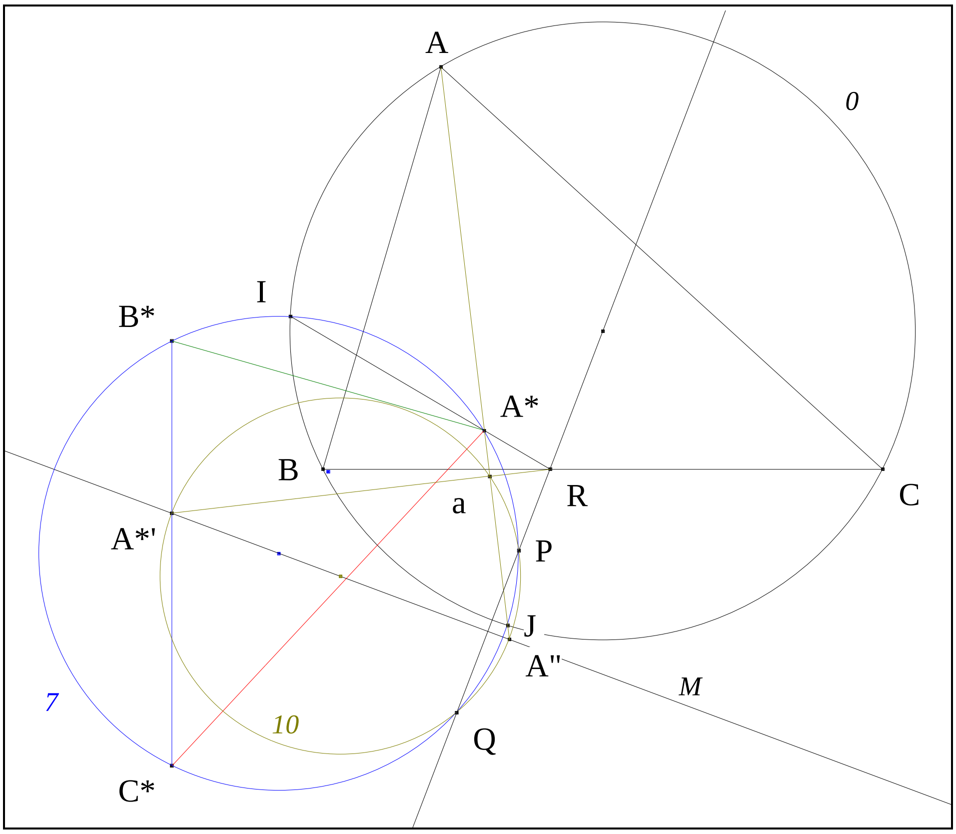
- **Scolies :** **(1)** J est le centre de perspective de ABC et A*B*C*

  (2) A*B*C* est le triangle paralogique de ABC relativement à (UVW).

V. CINQ POINTS ALIGNÉS

VISION

Figure :

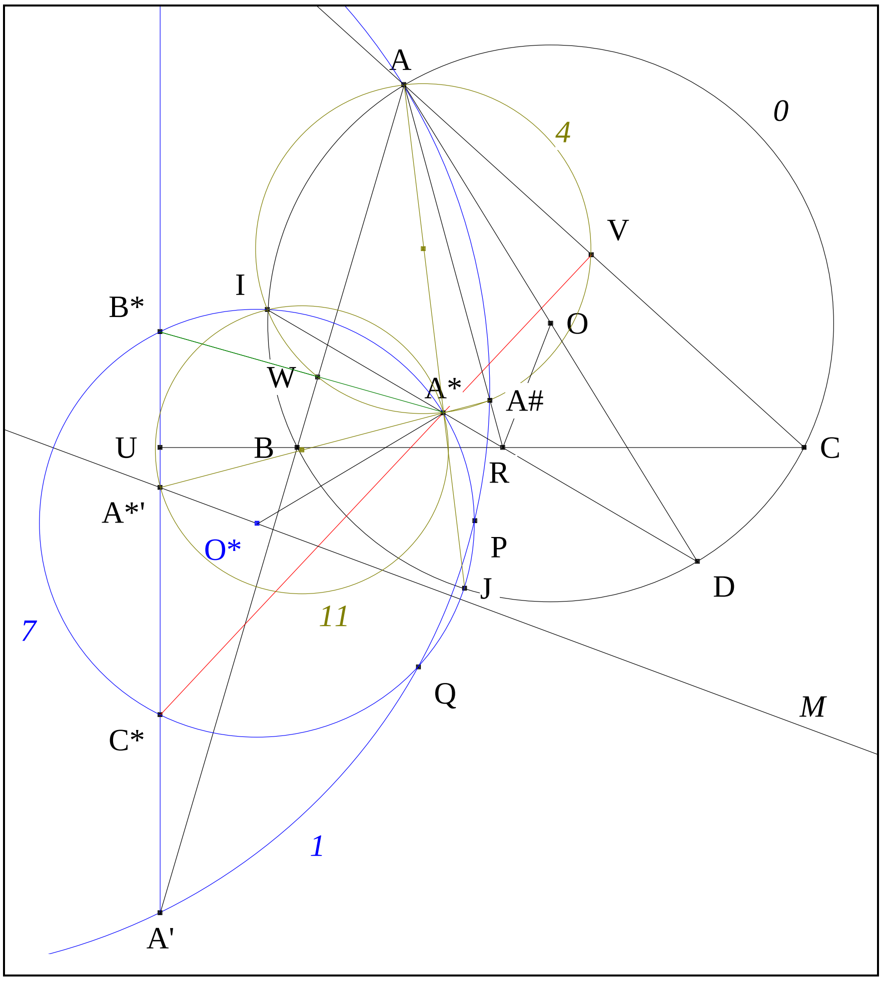


Traits : aux hypothèses et aux notations précédentes, nous ajoutons

M la médiatrice de [PQ],
A*' le point d'intersection de *M* et (B*C*),
a le point d'intersection de (AA*J) et (A*'R).
10 le cercle passant par A*', P, Q,
et A" le second point d'intersection de *11* avec *M* .

Donnés : A, A*, a, J et A" sont alignés.

VISUALISATION



- Considérons le quadrilatère ABRO.

- Notons O* le centre de *7*
  et *11* le cercle de diamètre [A*A*'].

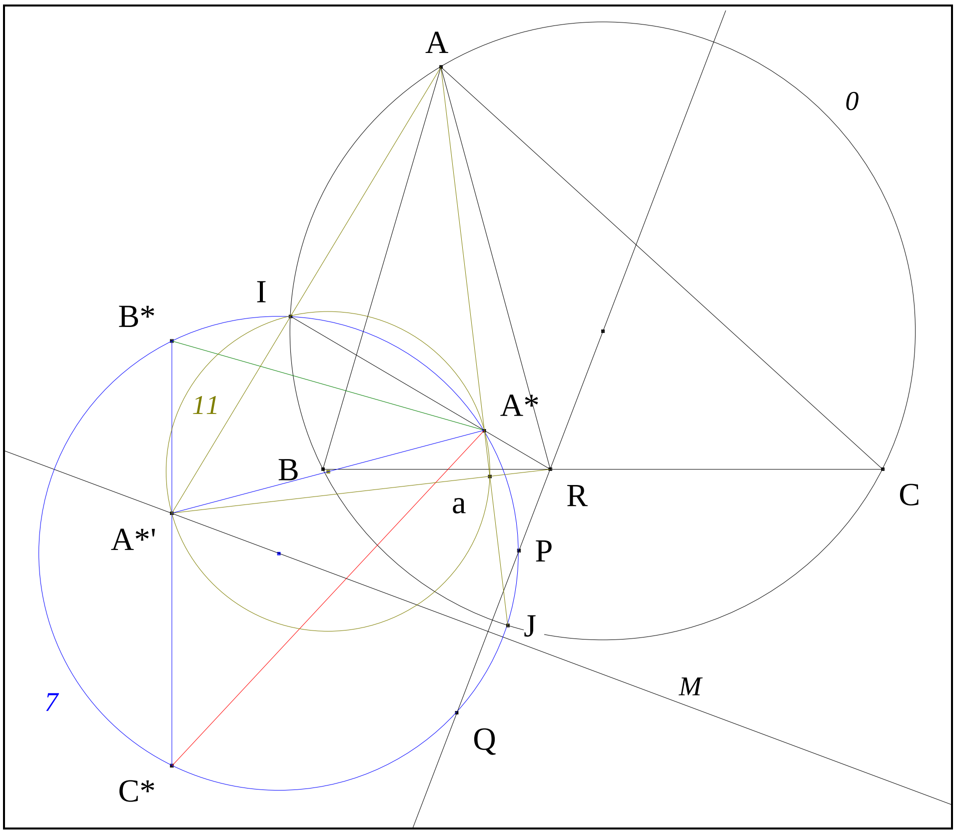
- D'après Altshiller-Court "Deux diamètres perpendiculaires" (Cf. Annexe 8),
  appliqué aux cercles orthogonaux *7* et *0* et à la monienne (AA*J), (O*A*) ⊥ (AO).

- Les quadrilatères ABRO et A*B*A*'O* ayant leurs côtés homologues perpendiculaires, sont semblables ;
  en conséquence, (A*A*') ⊥ (AR).

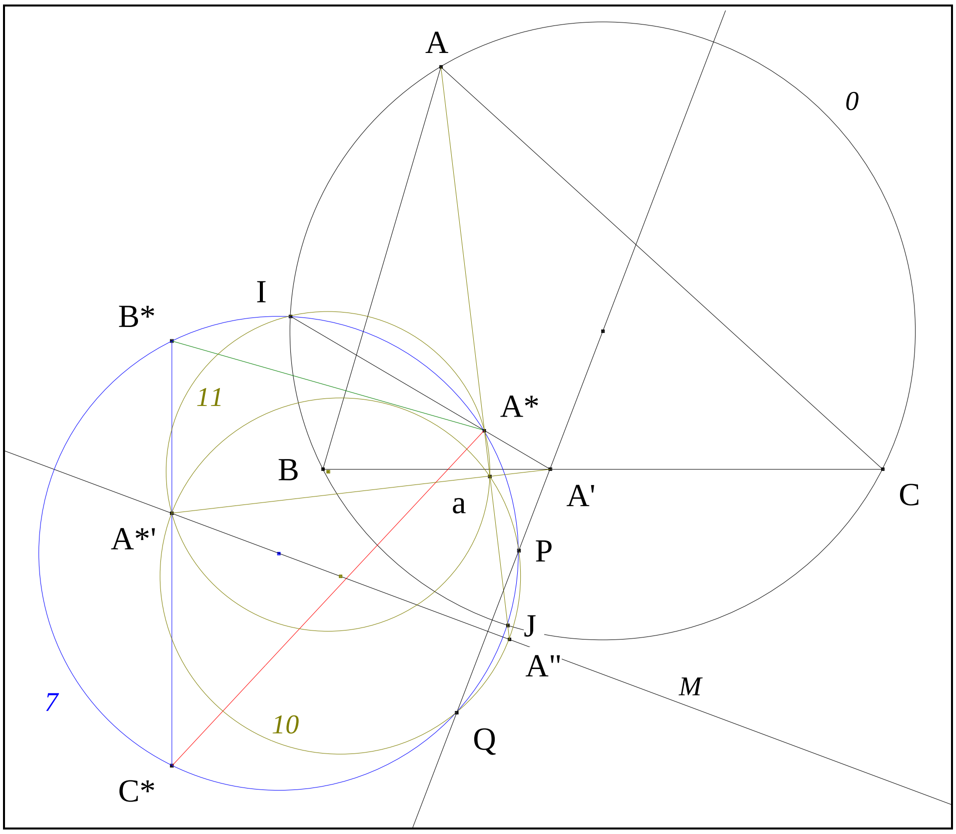
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AR) ⊥ (A*A#) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A*A*') // (A*A#) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (A*A*') = (A*A#) ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, A*', A* et A# sont alignés.

- Les quadrilatères IBRA et IB*A*'A* ayant leurs côtés homologues perpendiculaires, sont semblables ;
  en conséquence les diagonales homologues sont perpendiculaires i.e. (IA*') ⊥ (IA*R).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *11* passe par I.



- D'après "Une monienne diamétralement brisée" (Cf. Annexe 9), A, I et A*' sont alignés.
- A* étant l'orthocentre du triangle AA*'R, a est le pied de la A-hauteur de AA*'R.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *11* passe par a.



- Nous savons que (IA*), (A*'a) et (PQ) sont concourantes en R.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 2) appliqué à *7*, *10* et *11*, *10* passe par a.
- D'après "La droite de Seimiya"[5] appliqué à A*B*C* relativement à P et Q, A*, a et A" sont alignés.
- D'après IV. Le point J, et par définition de a, A, A*, a et J sont alignés.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, A, A*, a, J et A" sont alignés.

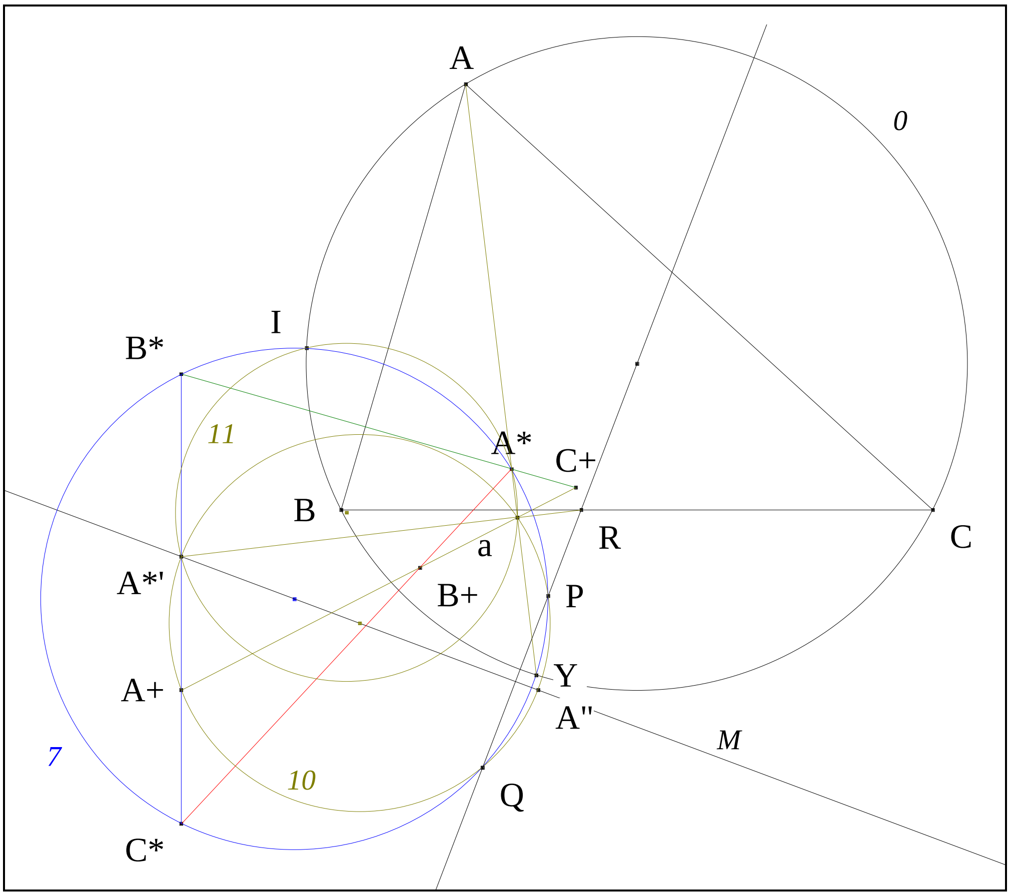
Scolie : *10* est le cercle de diamètre [A*'A"].

VI. LA DROITE DE SEIMIYA DE A*B*C*

VISION

Figure :

[5] Ayme J.-L., La droite de Seimiya, G.G.G. vol. 3, p. 8.



Traits : aux hypothèses et aux notations précédentes, nous ajoutons
(A+B+C+) la droite de Seimiya[6] de P et Q relativement à A*B*C*.

Donnés : *10* passe par A+ et (A+B+C+) passe par a.

VISUALISATION

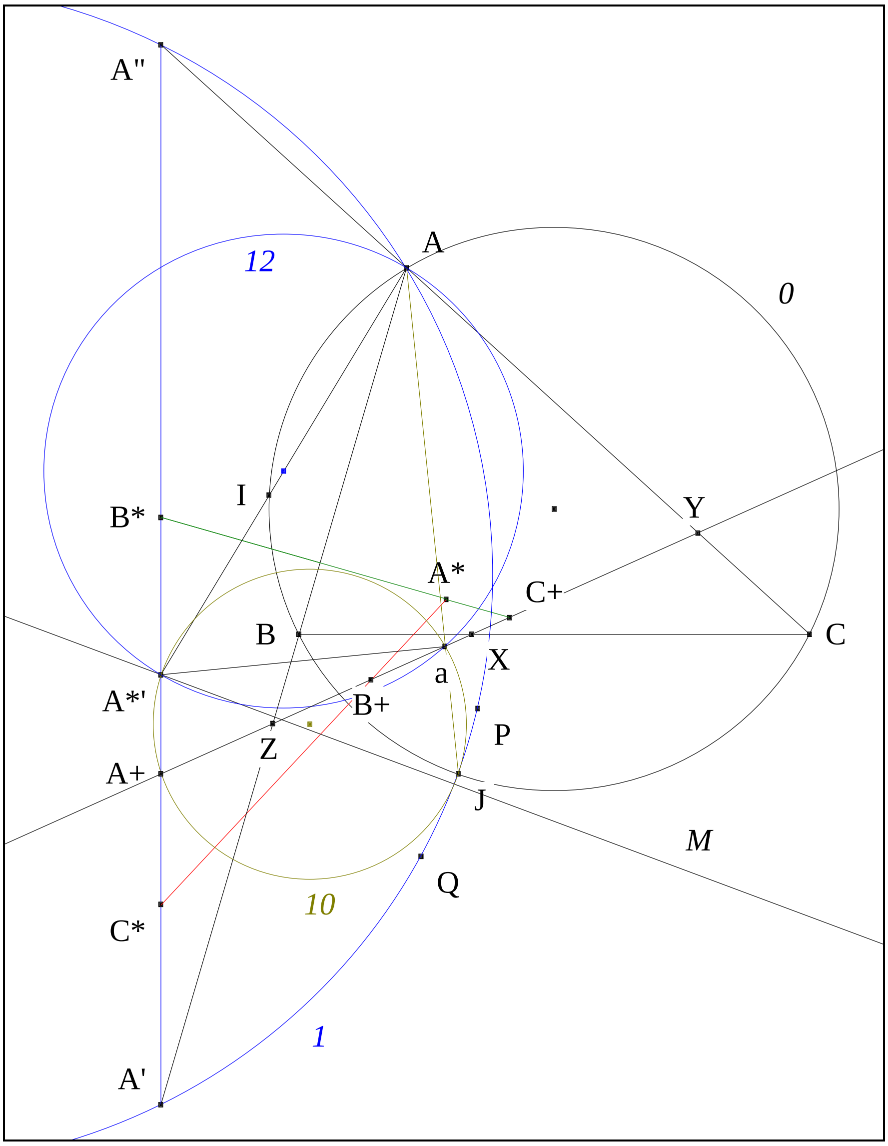
- **Conclusion :** d'après "La droite de Seimiya"[7] appliqué à A*B*C* relativement à P et Q,
  10 passe par A+ et (A+B+C+) passe par a.

VII. LA DROITE DE TURNER DE ABC

VISION

Figure :

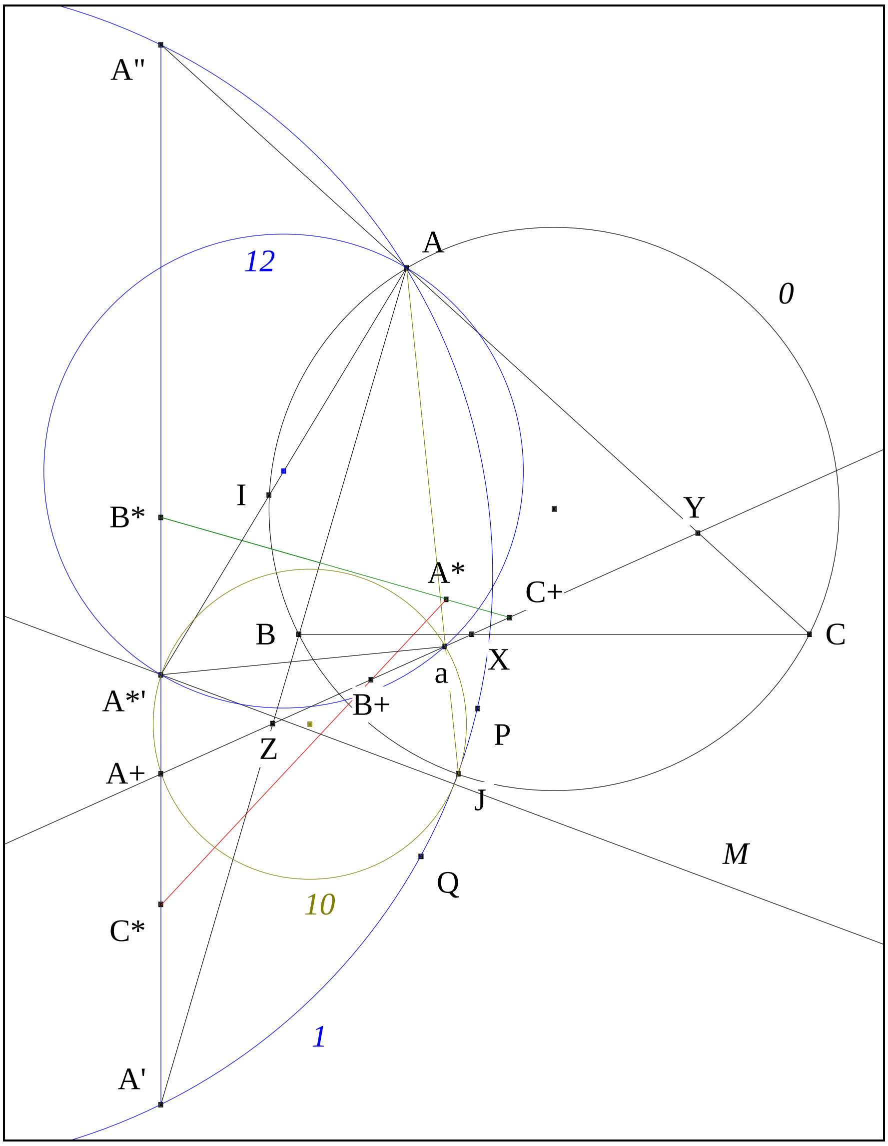
6 Ayme J.-L., La droite de Seimiya, G.G.G. vol. 3.
7 Ayme J.-L., La droite de Seimiya, G.G.G. vol. 3, p. 8.



Traits :		aux hypothèses et aux notations précédentes, nous ajoutons
	X, Y, Z	les A, B, C-points de Turner de P et Q relativement à ABC.

Donné : X, Y et Z sont alignés.

VISUALISATION



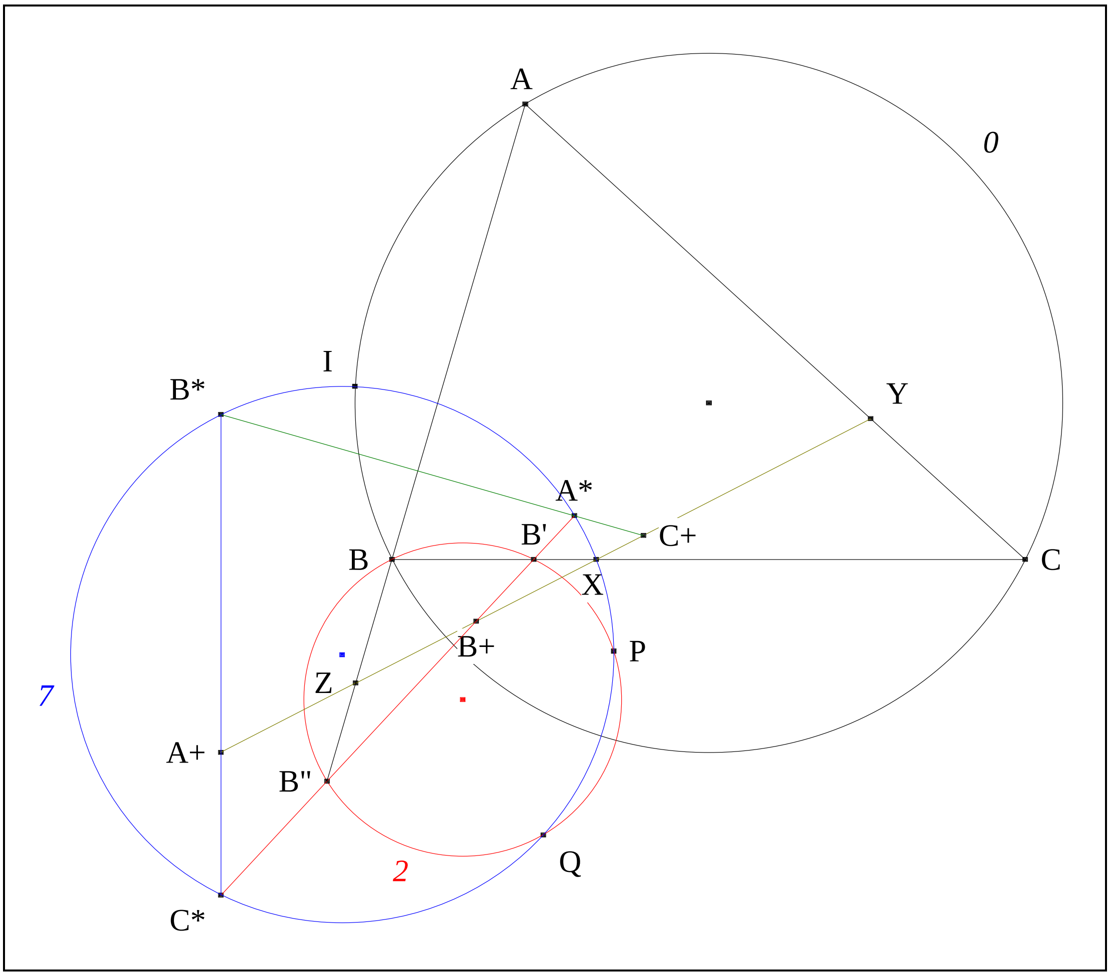
- Notons 12 le cercle de diamètre [AA*'] ; il passe par a.

- D'après "La droite de Seimiya"[8] appliqué à AA'A" relativement à P et Q, A+, Z, Y et a sont alignés.

- D'après VI. la droite de Seimiya de A*B*C*, A+, B+, C+ et a sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia, B+, Y et Z sont alignés.

[8] Ayme J.-L., La droite de Seimiya, G.G.G. vol. 3, p. 8.



- D'après "La droite de Seimiya"[9] appliqué à BB'B" relativement à P et Q, B+, X et Z sont alignés.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, X, Y et Z sont alignés.

Énoncé traditionnel : la droite de Seimiya du triangle de Turner d'un triangle est la droite de Turner de ce triangle.

Commentaire : la droite de Turner a été proposé en 1924 et celle de Seimiya en 1926.
La question suivante peut être posée :
Toshio Seimiya a-t-il connu le résultat de John Turner ?

VIII. NOTE HISTORIQUE

Rappelons que John Turner a présenté son résultat lors de la 17-ième rencontre de la Southwestern Section of the American Mathematical Society qui s'est tenue le samedi 29 novembre 1924 dans les locaux de l'Iowa State College.
Pour ma part tout commence en 2002 sur le site *Hyacinthos* lorsque Antreas Hatzipolakis[10] propose "une

---

9 Ayme J.-L., La droite de Seimiya, G.G.G. vol. 3.
10 Hatzipolakis A., Simson Line (generalization), Message *Hyacinthos* # 4703 du 27/01/2002.

généralisation de la droite de Simson" i.e. "la droite de Turner de P et Q relativement à ABC".
Jean-Pierre Ehrmann[11] en donne une première propriété à savoir qu'elle est la médiatrice du segment ayant pour extrémités, les isogonaux de P et Q relativement au triangle ABC.
Quelques mois plus tard, Kotera Hiroschi[12] précise la définition des droites de Seimiya et de Turner et fait référence aux articles de Kinoshita Toshiyuki [13] publié en 2000.
L'année suivante, Darij Grinberg[14] conjecture à son tour une autre propriété de cette droite à savoir qu'elle passe par l'orthopôle de (PQ) relativement à ABC.
Quelques jours après, Alexey Zaslavsky[15] propose l'esquisse d'une preuve non concluante de nature algébrique, de même que Bernard Gibert[16] en en cherchant une de nature projective et Nicholaos Dergiades[17] en recourant aux coordonnées barycentriques. Dans son message, Dergiades affirme

This problem is very special, difficult and very poor.

Comme par réaction, Zaslavsky[18], Eric Danneels[19] et Milorad Stevanovic[20] proposent des idées de preuves algébriques.
Une précision est donnée par Barry Wolk[21] :

"l'orthopôle de (PQ) est le milieu du segment ayant pour extrémités, les isogonaux de P et Q".

C'est en 2004 que Marcello Tarquini[22] présente la première preuve achevée de la droite de Turner en recourant à l'inversion dans un lemme préliminaire, puis à des rapports, à l'isogonalité, à la formule de Steiner déjà présente chez Pappus[23] et, enfin, au théorème de Ménélaüs. Dans son message, Tarquini apporte le point de vue suivant :

"Turner line is nothing more than a (very) particular case of more general theorem ;
I know this theorem under the name of "Hessenberg counterpairing theorem".

Rappelons que ce dernier résultat dont l'auteur est René Goormaghtigh, a été démontré synthétiquement par Darij Grinberg[24] en 2003 et projectivement par Gibert[25].
Grinberg[26] commente la preuve de Tarquini et signale le résultat suivant :

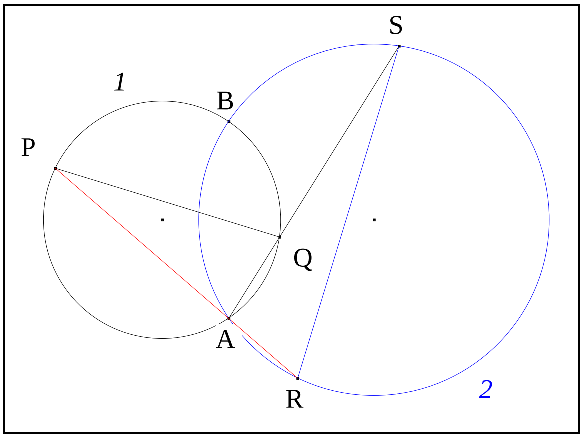
"la droite de Turner est la médiatrice du segment
ayant pour extrémités P et son isogonal P* relativement à ABC".

Depuis 2004, plus rien n'a été proposé.

IX. ANNEXE

1. Deux cordes perpendiculaires

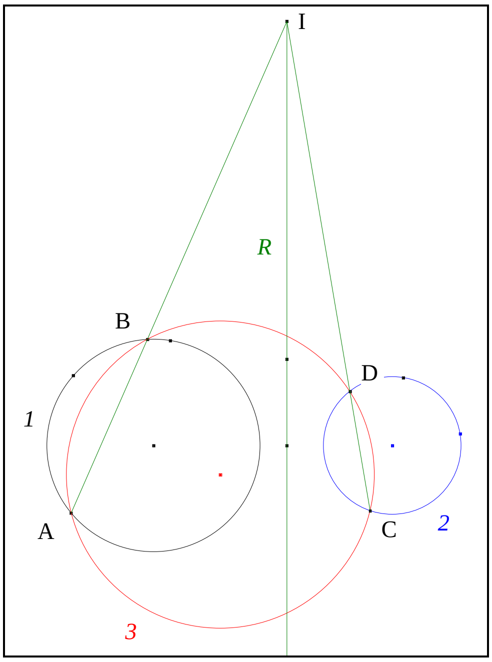
11 Ehrmann J.-P., Simson Line (generalization), Message *Hyacinthos* # 4704 du 28/01/2002.
12 Kotera Hiroshi, Turner and Seimiya Line, Message *Hyacinthos* # 5774 du 07/07/2002.
13 Kinoshita T., On the Tarner lines and Seimiya lines, *Journal* Shoto Sugaku vol. 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45 (1999-2002).
14 Grinberg D., On the Turner lines and Seimiya lines, Message *Hyacinthos* # 7106 du 11/04/2003.
15 Zaslavsky A. A., On the Turner lines and Seimiya lines, Message *Hyacinthos* # 7135, 7136 du 14/04/2003.
16 Gibert B., On the Turner lines and Seimiya lines, Message *Hyacinthos* # 7137 du 15/04/2003.
17 Dergiades N., On the Turner lines and Seimiya lines, Message *Hyacinthos* # 7139 du 15/04/2003.
18 Zaslavsky A., The proof of Turner's theorem, Message *Hyacinthos* # 7140 du 16/04/2003.
19 Danneels E., Turner Line : on analytical proof, Message *Hyacinthos* # 7145 du 16/04/2003.
20 Stevanovic M., Turner Lines, Message *Hyacinthos* # 7147 du 17/04/2003.
21 Wolk B., Turner Lines, Message *Hyacinthos* # 7156 du 17/04/2003.
22 Tarquini M., Turner line and a theorem by G. Hessenberg, Message Hyacinthos # 9301 du 14/02/2004.
23 Pappus, *Collections* Livre VI, proposition 12.
24 Grinberg D., Goormaghtigh in JFM, Message *Hyacinthos* # 8745 du 29/11/2003.
25 Gibert B., Turner line and a theorem by G. Hessenberg, Message *Hyacinthos* # 9302 du 14/02/2004.
26 Grinberg D., Turner line and a theorem by G. Hessenberg, Message *Hyacinthos* # 9352 du 20/02/2004.



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
[PQ] une corde de *1*,
R le second point d'intersection de (AP) avec *2*
et S le second point d'intersection de (AQ) avec *2*.

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux *si, et seulement si*, (RS) est perpendiculaire à (PQ).

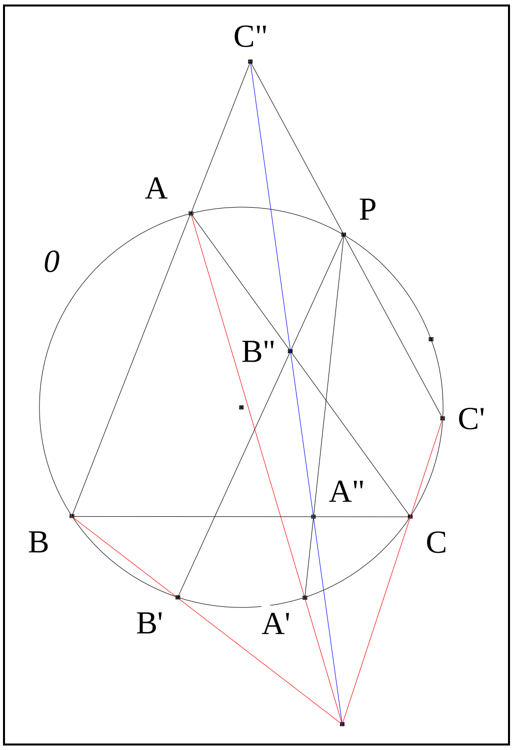
2. Le théorème des trois cordes de Monge



Traits : *1*, *2* deux cercles non sécants,
R l'axe radical de *1*, *2*,
3 un cercle sécant à *1* et *2*,
A, B les points d'intersection de *3* et *1*,
C, D deux points de *2*
et I le point d'intersection de (AB) et (CD).

Donné : A, B, C, D sont cocycliques
si, et seulement si,
(AB), (CD) et *R* sont concourantes en I.

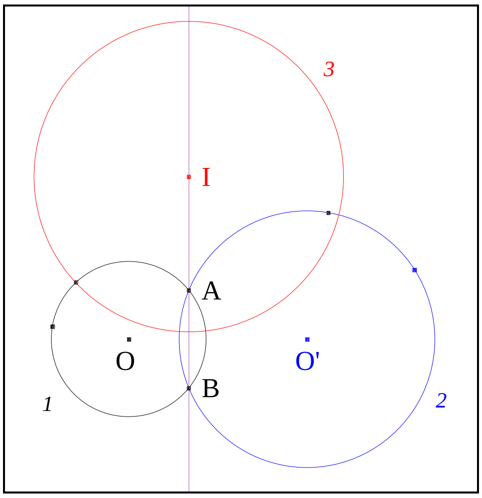
3. La P-transversale de Q[27]



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	A', B', C'	trois points de *0*,
	P	un point de *0*
et	A", B", C"	les points d'intersection de (PA') et (BC), de (PB') et (CA), de (PC') et (AB).

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes
si, et seulement si,
(A"B"C") est une ménélienne.

4. Deux cercles orthogonaux[28]



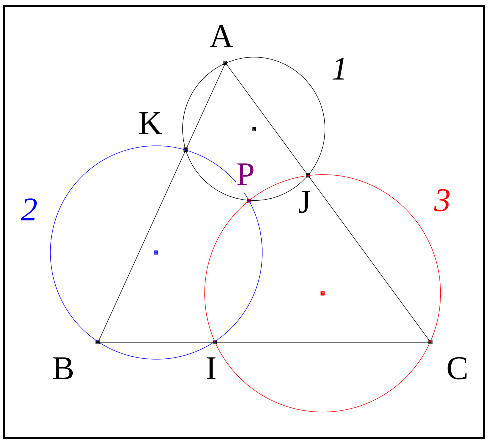
Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,

[27] Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. 3.
[28] Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique, Cahier* **16** (1813) 124-214.

	O, O'	les centres de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	3	un cercle orthogonal à *2*
et	I	le centre de *3*.

Donné : I est sur (AB) *si, et seulement si,* *3* est orthogonal à *2*.

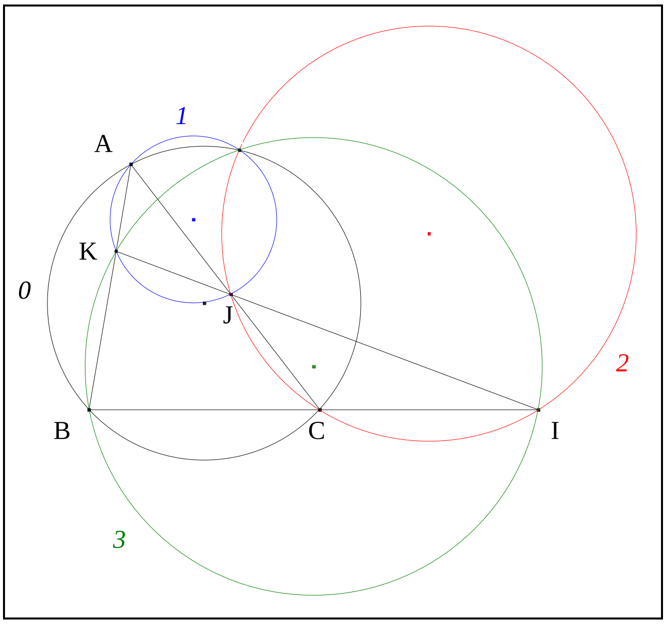
5. Le théorème du pivot[29]



Traits :	*1*, *2*, *3*	trois cercles sécants deux à deux,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

6. Le point de Miquel-Wallace[30]



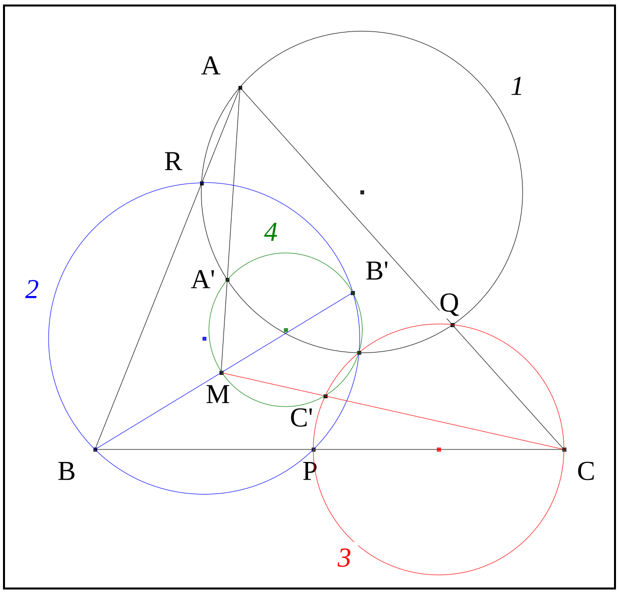
[29] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.

[30] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.

Traits :	ABC	un triangle,
	I, J, K	trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC,
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

Donné : I, J et K sont alignés *si, et seulement si,* *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

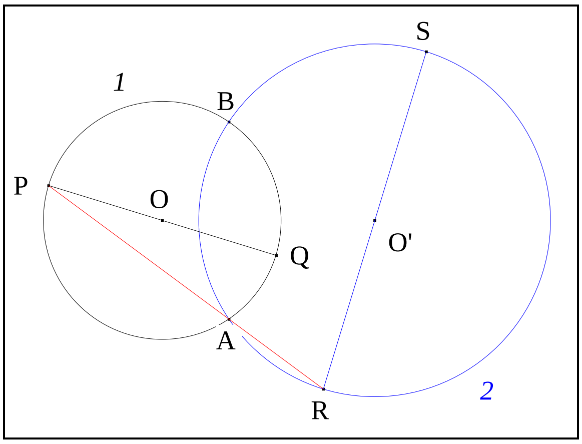
7. Le M-cercle de Mannheim[31]



Traits :	ABC	un triangle,
	P, Q, R	trois points de [BC], [CA], [AB],
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQP,
	A', B', C'	trois points resp. de *1*, *2*, *3*,
	4	le cercle passant par A', B', C'
et	M	le point d'intersection de (AA') et (BB')

Donné : (CC') passe par M *si, et seulement si,* *4* passe par M.

8. Deux diamètres perpendiculaires[32]



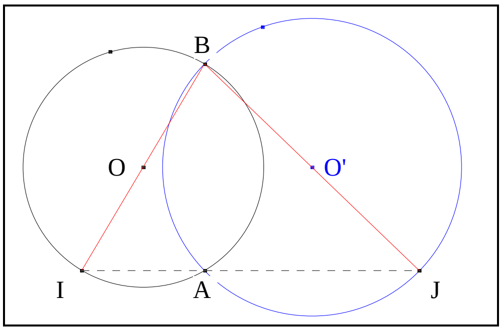
[31] Mannheim A., Problem 10145, *Educational Time* **52** (1890)
et Question 1594, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1890) 239.

[32] Altshiller-Court N. A., Notes on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* vol. 41, 8 (1834) 500.

Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres de *1*, de *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
[PQ] un diamètre de *1*
et [RS] un diamètre de *2*, perpendiculaire à [PQ].

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux *si, et seulement si*, (PAR) est une monienne.

9. Une monienne diamétralement brisée



Traits : *1* , *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
I le second point d'intersection de (BO) avec *1*
et J le second point d'intersection de (BO') avec *2*.

Donné : I, A et J sont alignés.