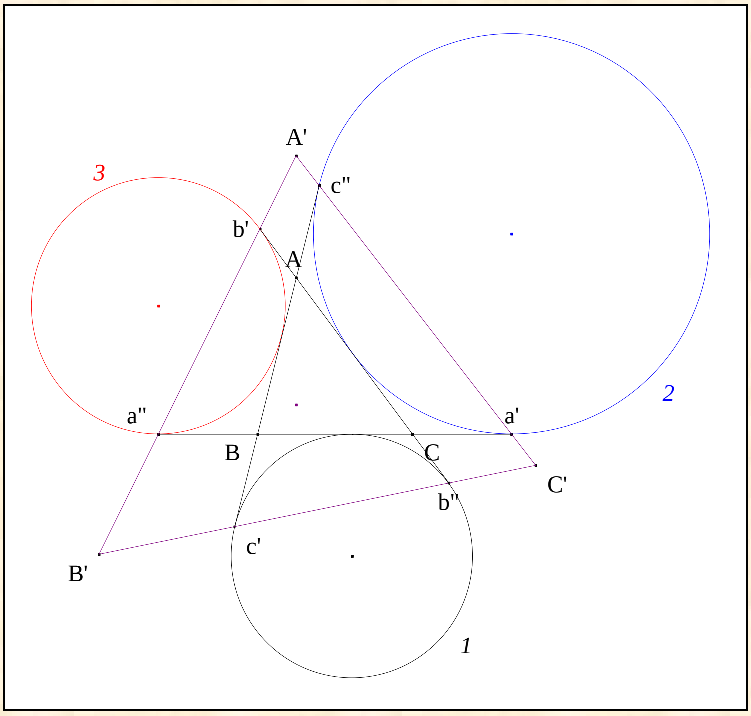
NOTE

LE TRIANGLE D'HADAMARD

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article s'appuyant sur un résultat de Jacques Salomon Hadamard donné en exercice, montre que l'orthocentre d'un triangle est aussi le centre du cercle circonscrit du triangle d'Hadamard qui lui est associé. Ce résultat permet à l'auteur de présenter une preuve entièrement synthétique d'un cercle de Khoa Lu Nguyen.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. Article based on a given exercise of Jacques Salomon Hadamard, shows that the orthocenter of a triangle is also the centre of the circumcircle of the Hadamard's triangle associated with it. This result allows to the author to present afully synthetic proof of a Khoa Lu Nguyen' circle.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 25/02/2015 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

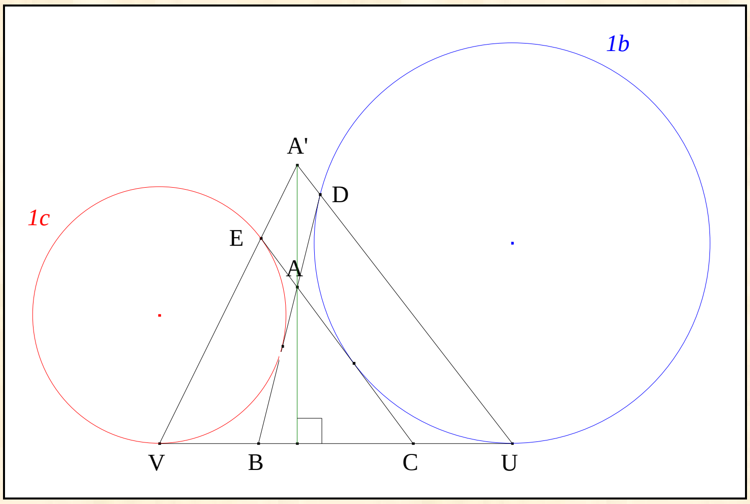
Sommaire

A. WITH TWO EXCERCLES

1. Jacques S. Hadamard's exercise 379

VISION

Figure :



Features : ABC a triangle,
1b, *1c* the B, C-excircles of ABC,
D, U the points of contact *1b* with AB, BC,
E, V the points of contact *1c* with AC, BC,
and A' the point of intersection of DU and EV.

Given : AA' is the A-altitude of ABC.[2]

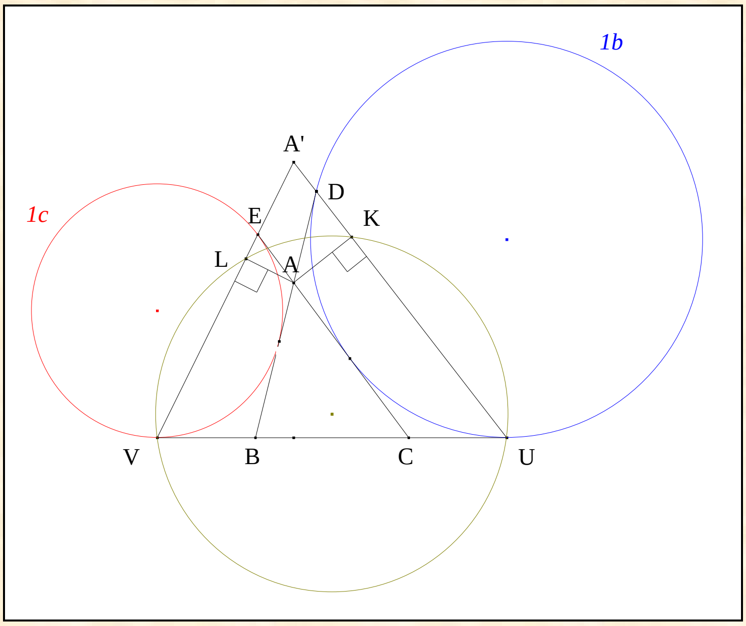
Commentar : the synthetic proof can be seen on the author's site. [3]

[2] Hadamard J., *Leçons de Géométrie Élémentaire* **1** (1898) exercice **379**
[3] Ayme J.-L., From Igor Federovitch Sharygin to Jacques Salomon Hadamard, G.G.G. vol. **11** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

2. Une application : Balkan MO 2013, Problem 1

VISION

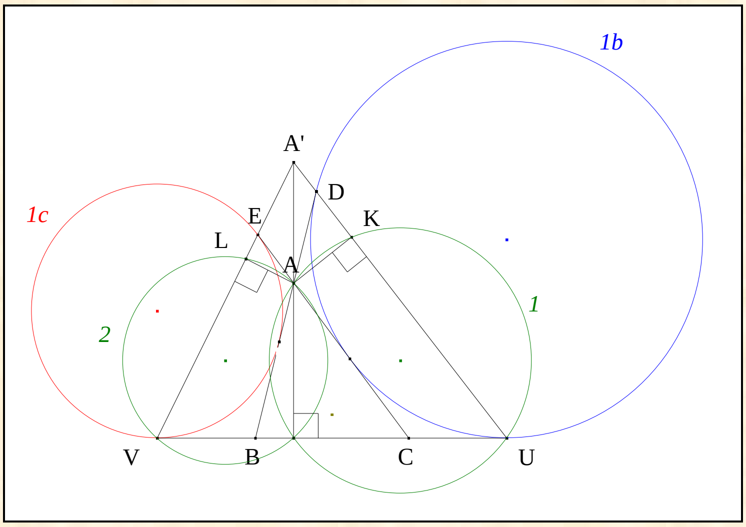
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
K, L les pieds des perpendiculaires resp. à (DU), (DV) issues de A.

Définition : le quadrilatère KUVL est cyclique. [4]

VISUALISATION



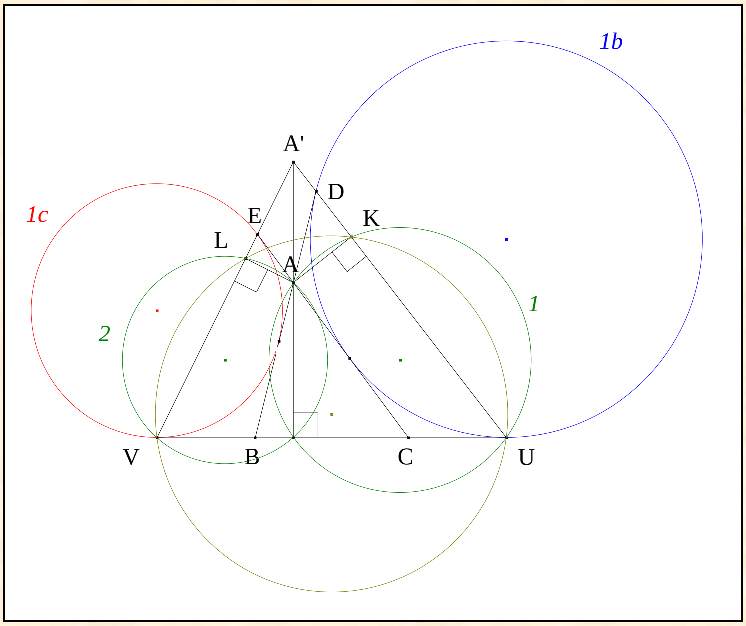
- D'après **A. 1.**, AA' est la A-hauteur de ABC.
- Notons A" le pied de la A-hauteur de ABC.

[4] Excircles, AoPS du 30/06/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=541449

- **Scolies :** **(1)** le quadrilatère AA"UK est cyclique

  (2) le quadrilatère AA"VL est cyclique.

- Notons *1, 2* resp. ces deux cercles.



- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [5], le quadrilatère KUVL est cyclique.

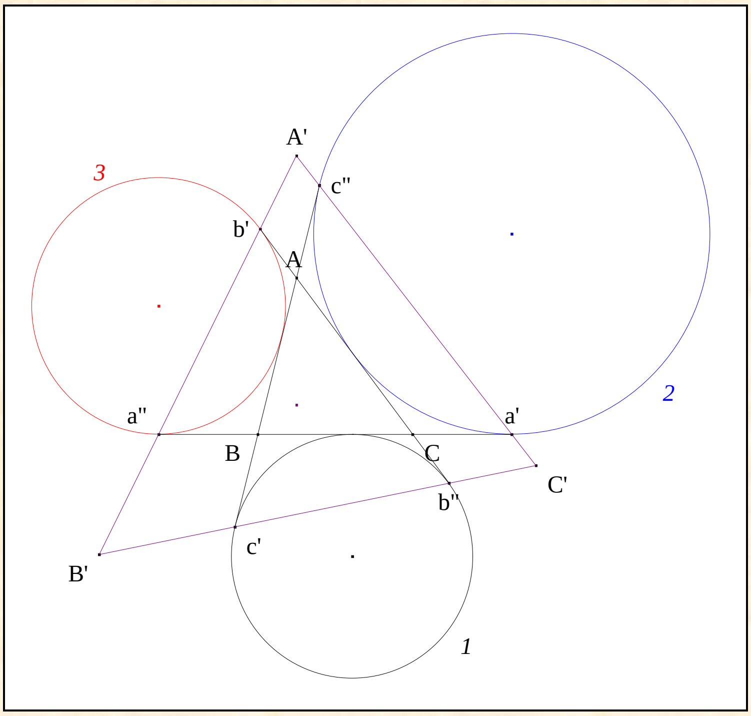
[5] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange

B. LE TRIANGLE D'HADAMARD

1. Le triangle d'Hadamard

VISION

Figure :



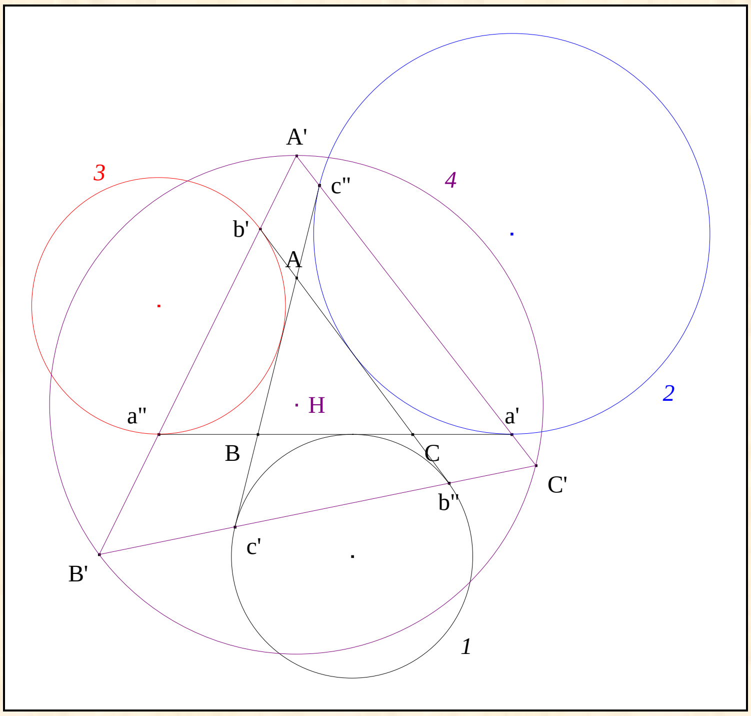
Finition : ABC un triangle,
1, *2*, *3* les A, B, C-excercles de ABC,
a', b', c', a", b", c" les points de contact de *1*, *2*, *3* avec les côtés de ABC comme indiqué sur la figure
et A', B', C' les points d'intersection de (a'c") et (a"b'), (b'a") et (b"c'), (c'b") et (c"a').

Définition : A'B'C' est le triangle d'Hadamard de ABC.

2. Le centre du cercle circonscrit

VISION

Figure :

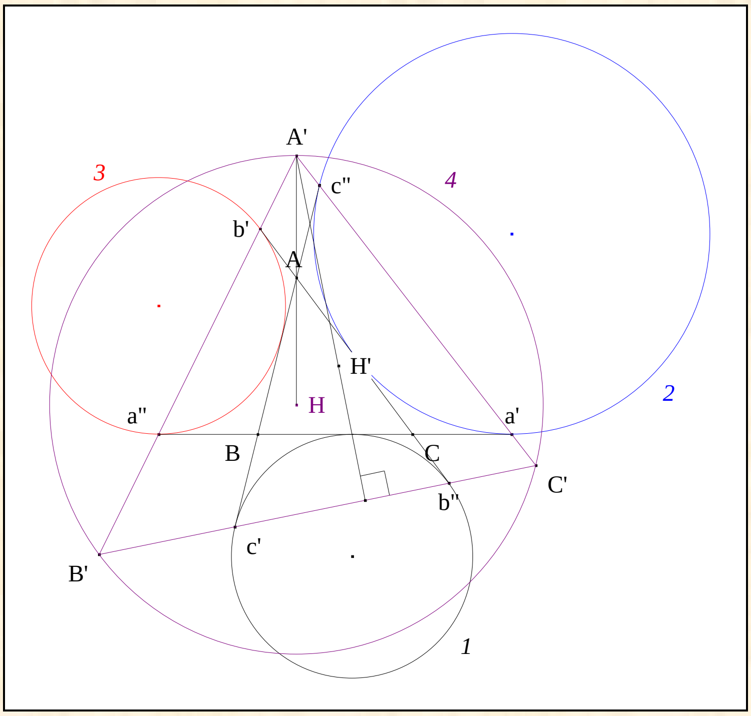


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
H l'orthocentre de ABC
et *4* le cercle circonscrit à A'B'C'.

Donné : H est le centre de *4*. [6]

VISUALISATION

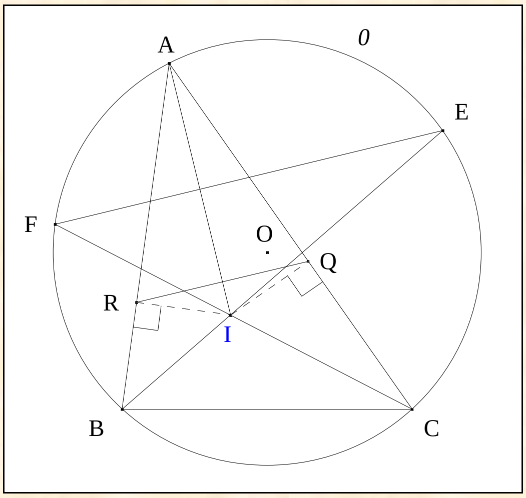
[6] Hadamard J. S., Leçons de géométrie élémentaire **1** (1898) exercice **379** ;
http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;cc=umhistmath;view=toc;idno=ACV7504.0002.001
Ayme J.-L., From I.F. Sharygin to J.S. Hadamard, G.G.G. vol. **11** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Orthocenter is also a center, AoPS of 17/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1291319_orthocenter_is_also_a_center
Boutte G., *Sur quelques propriétés des triangles podaires des centres des cercles exinscrits*, p. 6-7 ;
http://g.boutte.free.fr/articles/020316.pdf
Nguyen K. L., Message *Hyacinthos* # **10384** (2004)



- D'après **A. 1.**, (AA'), (BB') et (CC') concourent en H.

- Notons H' l'orthocentre de A'B'C'.

- **Commentaire :** pour éviter de surcharger la figure, considérons la figure d'appoint suivante.



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC
  O le centre de *0*,
  I le centre de ABC,
  E, F les seconds points d'intersection resp. de (BI), (CI) avec *0*
  et Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées de I resp. sur (AC), (AB).

- **Scolies :** **(1)** (B'C'), (QR) et (EF) sont parallèles

  (2) (AI) est une perpendiculaire commune à ces trois droites.

- **Commentaire :** reconsidérons la figure de base.

- D'après "Le théorème des angles à côtés perpendiculaires", <B'A'A = <FCB et <H'A'C' = <FEB ;

d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <B'A'A = <H'A'C'.

- **Conclusion partielle :** d'après Nagel "Une tangente et un rayon" [7], (A'A) passe par le centre de *4*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'A) passe par le centre de *4*
  (C'A) passe par le centre de *4*.

- **Conclusion :** H est le centre de *4*.

Commentaire : ce résultat a été démontré métriquement par Khao Lu Nguyen [8].

Historic note : this Hadamard's result certainly known before him was rediscovered in 2000 by Paul Yiu [9] (Florid Atlantic University) and proposed as a problem in the *Crux Mathematicorum* journal.
The metric solution published by the Danish Niels Bejlegaard [10] (Copenhagen) in the same magazine differs from the one of P. Yiu [11] which is analytical.
It should be noted that this situation had been reported in 1999 by the late Steve Sigur [12]. The russo-german Darij Grinberg has studied this problem and has solved it metrically using the Carnot's theorem.

Archive :

PROBLÈMES DIVERS

ET PROBLÈMES PROPOSÉS DANS DIFFÉRENTS CONCOURS (1)

379. On joint entre eux les points de contact de chacun des cercles ex-inscrits au triangle ABC avec les côtés de l'angle dans lequel ce cercle est ex-inscrit. Montrer que les trois cordes de jonction forment un triangle dont les sommets sont respectivement sur les hauteurs du premier, et dont le cercle circonscrit a pour centre le point de concours de ces hauteurs.

[13]

7 Ayme J.-L., Cinq théorème de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 21-22 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

8 Nguyen K. L., On the Complement of the Schiffler point, *Forum Geometricorum* vol. **5** (2005) 154, 149-164 ; http://forumgeom.fau.edu/

9 Yiu P., problème **2579**, *Crux mathematicorum* vol. **26**, **7** (2000) 430

10 Bejlegaard N., Solution du problème **2579**, *Crux mathematicorum* vol. **27**, **8** (2001) 539-540

11 Yiu P., *The Clawson Point and Excircles*

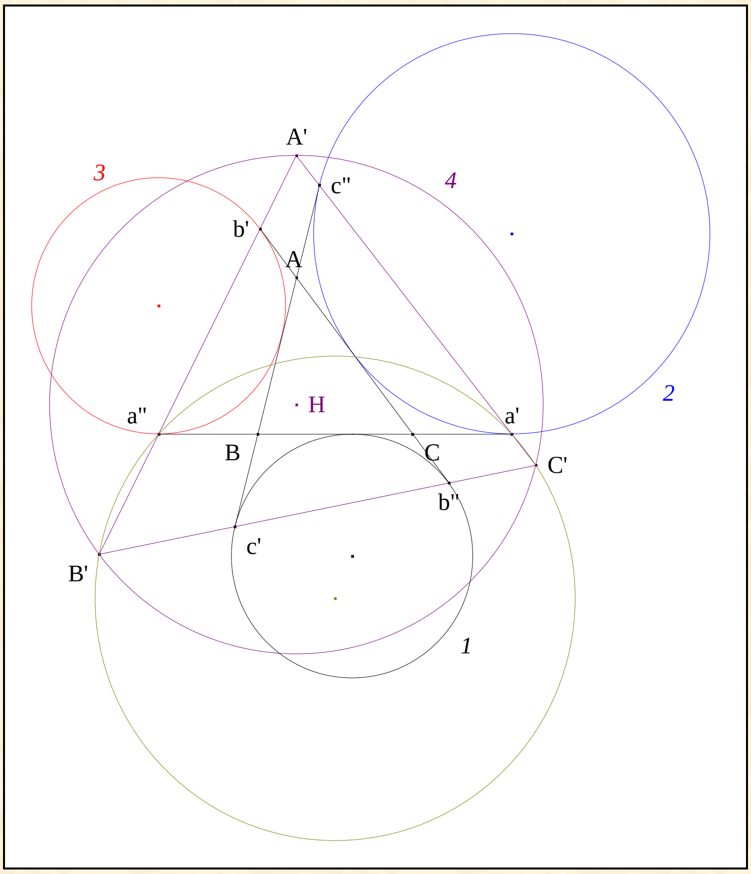
12 Sigur S., H in the Gergonne-Nagel system, *Geometry-college Mathematical group* (23-08-1999)

13 Hadamard J.S., Leçons de géométrie élémentaire **1** (1898) exercice **379** ; http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;cc=umhistmath;view=toc;idno=ACV7504.0002.001

3. Le A-cercle de Khoa Lu Nguyen

VISION

Figure :

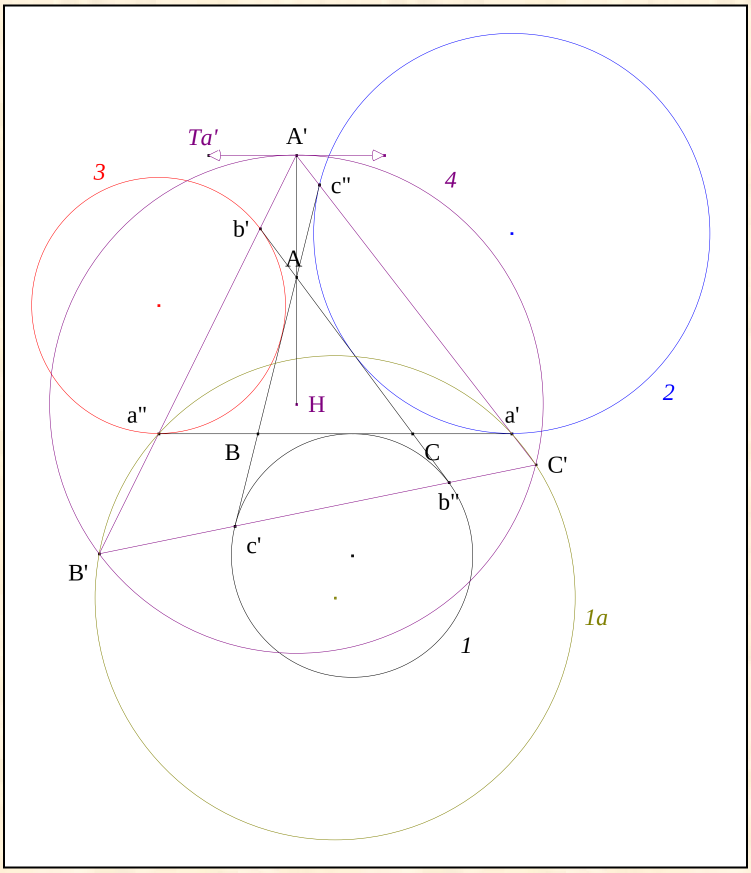


Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : B', a", a' et C' sont cocycliques. [14]

VISUALISATION

[14] Nguyen K. L., On the Complement of the Schiffler point, *Forum Geometricorum* vol. **5** (2005) 161-162 ; http://forumgeom.fau.edu/



- Notons *Ta'* la tangente à *4* en A'.

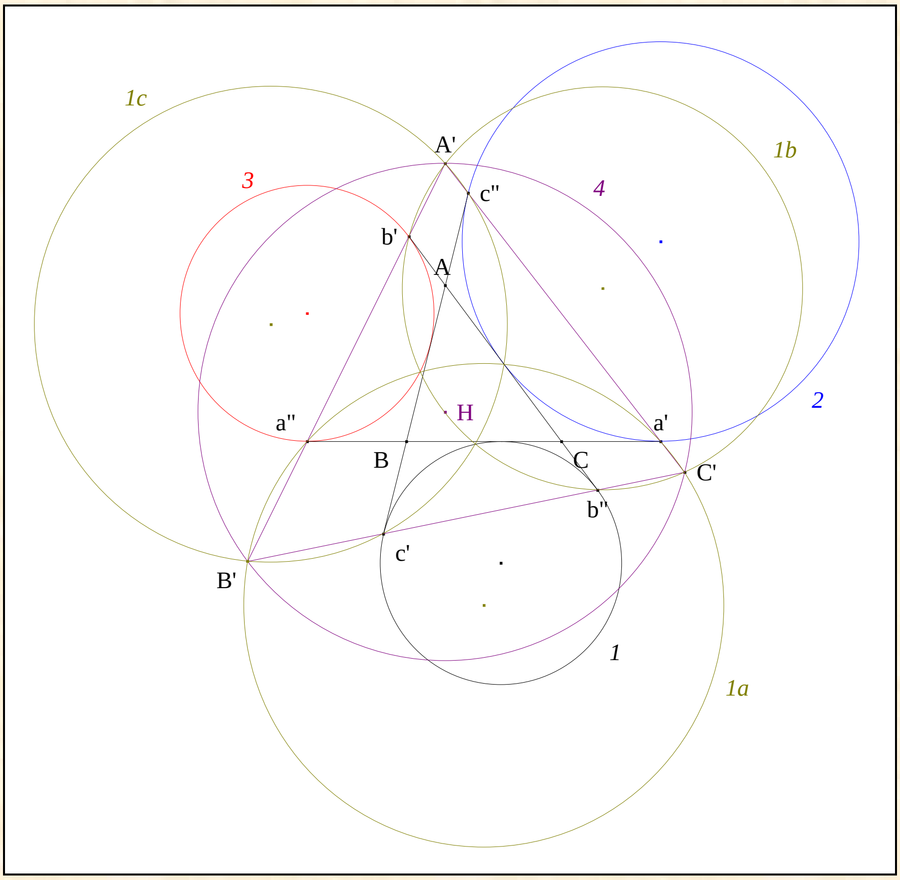
- Par définition d'une tangente, *Ta'* ⊥ (A'H) ;
  par définition d'une hauteur, (A'H) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, *Ta'* // (BC) i.e. *Ta'* // (a'a").

- **Conclusion :** le cercle *4*, les points de base B' et C', les moniennes naissantes (A'B'a") et (A'C'a'), les parallèles Ta' et (a"a'), conduisent au théorème **1"** de Reim ;
  en conséquence, B', a", a' et C' sont cocycliques.

- Notons *1a* ce cercle

Terminologie : *1a* est "le A-cercle de K. L. Nguyen de ABC".

Scolie : deux autres cercles remarquables



- Mutatis mutandis, nous montrerions que C', b'', b' et A' sont cocycliques
  A', c'', c' et B' sont cocycliques.

- Notons *1b*, *1c* resp. ces deux cercles.

Commentaire : ce résultat a été démontré métriquement par Khao Lu Nguyen [15].

Une courte note biographique :

Khoa Lu Nguyen connu sous le pseudonyme de *Treegoner* sur le site *Art of Problem Solving* a été étudiant au Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, Massachusetts, États-Unis).
Il enseigne actuellement les mathématiques au Sam Houston High School à Houston (Texas, Etats-Unis).

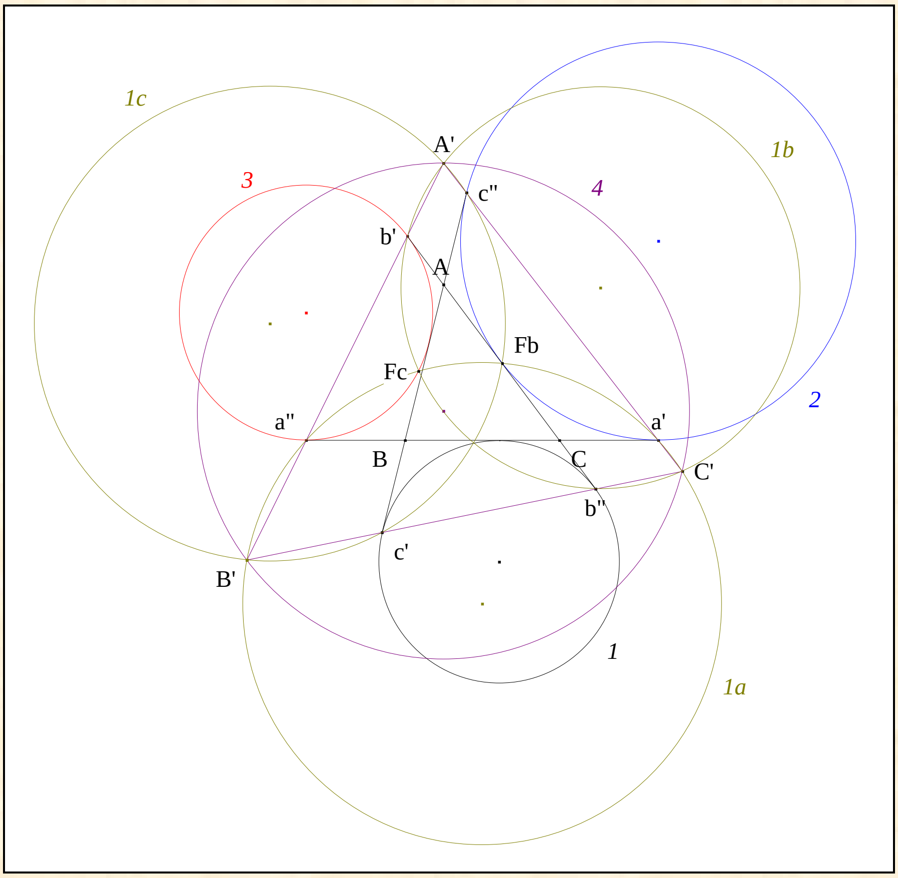
---

15 Nguyen K. L., On the Complement of the Schiffler point, *Forum Geometricorum* vol. **5** (2005) 161-162 ; http://forumgeom.fau.edu/

C. UNE NOUVELLE PREUVE

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

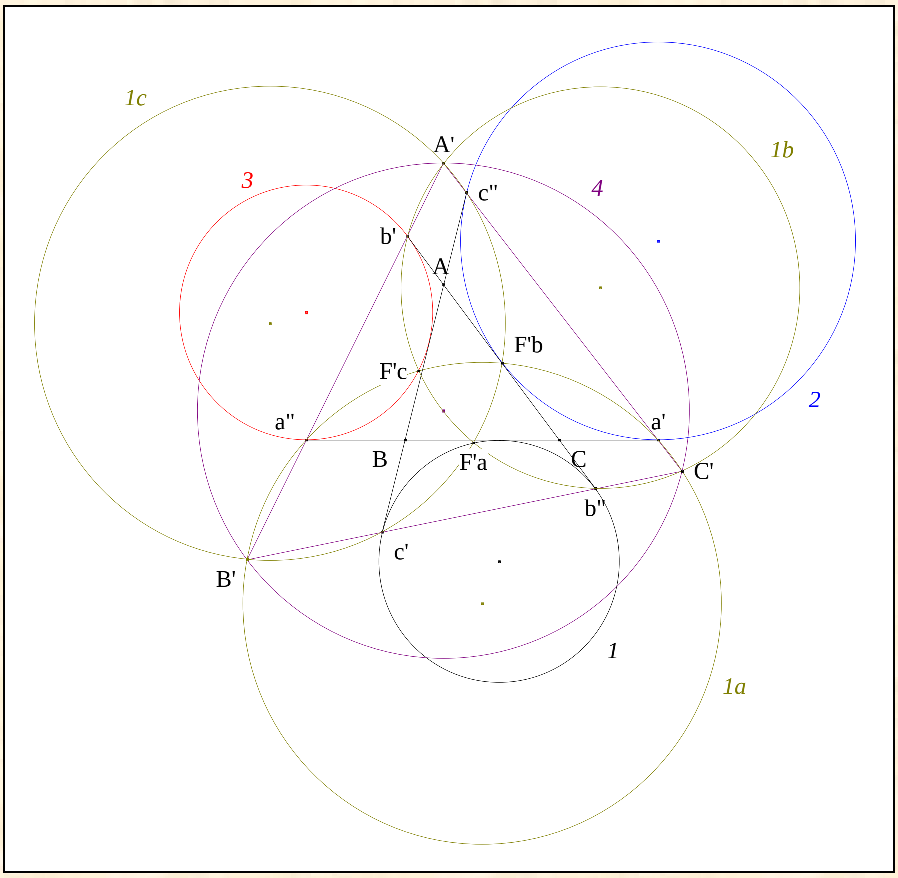
1a, 1b, 1c les A, B, C-cercles de K. L. Nguyen de ABC

et Fb, Fc les B, C-points externes de Feuerbach de ABC.

Donné : *1a* passe par Fb et Fc. [16]

VISUALISATION

[16] Nguyen K. L., On the Complement of the Schiffler point, *Forum Geometricorum* vol. **5** (2005) 161-162 ; http://forumgeom.fau.edu/



- D'après Miquel "Le théorème du pivot" [17]
  appliqué au triangle cc'C" avec c' sur (cc'), b" sur (c'C') et A'sur (C'c"), *1c*, *1* et *1b* sont concourants.

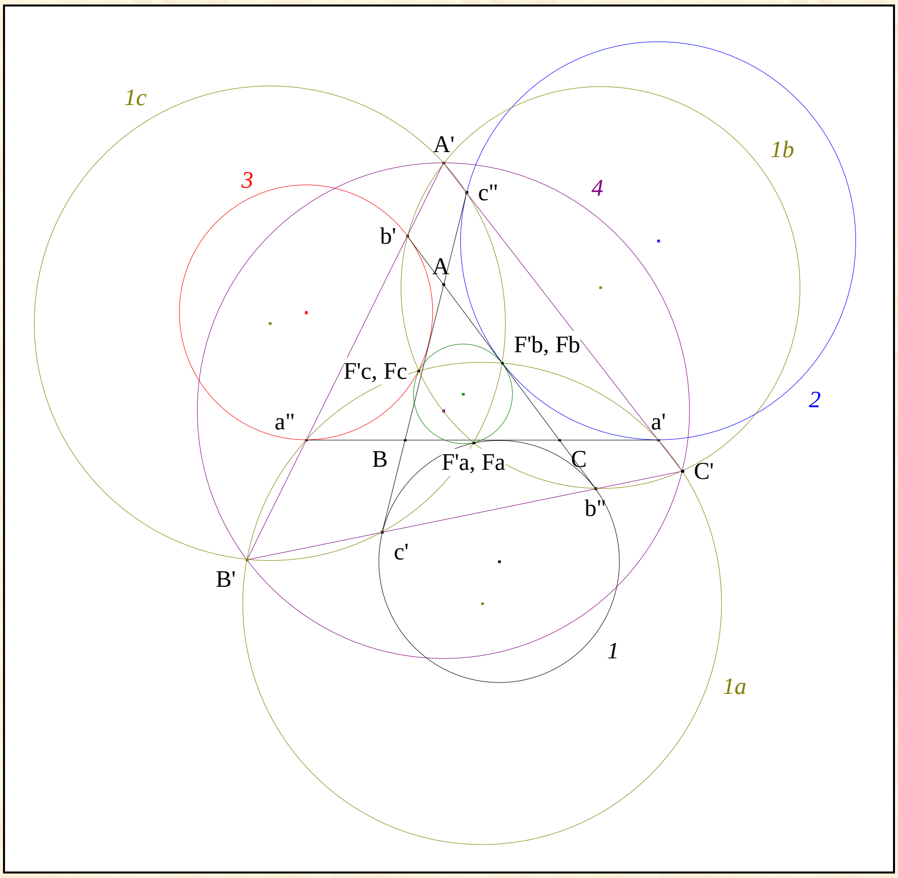
- Notons F'a ce point de concours.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** *1a*, *2* et *1c* sont concourants

  (2) *1b*, *3* et *1a* sont concourants.

- Notons F'b, F'c resp. ces deux points de concours.

[17] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- D'après Lebesgues "Le théorème des cinq cercles" [18]
  appliqué à *1c*, *1*, *1b* et *4*, F'b, F'c et F'a sont sur le cercle tangent extérieurement à *1* en F'a.

- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que F'c, F'a et F'b sont sur le cercle tangent extérieurement à *2* en F'b
  F'a, F'b et F'c sont sur le cercle tangent extérieurement à *3* en F'c.

- **Scolie :** ces trois cercles ayant trois points en commun sont identiques.

- Notons 5 ce cercle.

- **Scolies :** **(1)** *5* étant tangent extérieurement resp. à *1*, *2* et *3*, est le cercle d'Euler [19] de ABC

  (2) F'a, F'b, F'c sont resp. les A, B, C-points externes de Feuerbach de ABC.

- **Conclusion :** *1a* passe par Fb et Fc.

Commentaire : ce résultat a été démontré métriquement par Khao Lu Nguyen [20].

---

18 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**, p. 6-8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

19 Dr. Hart H. the *Quaterly Journal* (1861) 245 ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hart.html

20 Nguyen K. L., On the Complement of the Schiffler point, *Forum Geometricorum* vol. **5** (2005) 161-162 ; http://forumgeom.fau.edu/

Note : dans un échange de courriel, le regretté Juan Carlos Salazar (?-30/03/2008) m'a confirmé qu'il ne connaissait pas de solution synthétique de son résultat ; il m'a communiqué la solution trigonométrique de Nikolaos Dergiades et en réponse à la visualisation que je lui ai envoyé, a déclaré :

Your proof is very nice

et aussi

I thing that you found the new proof of Feuerbach's theorem :
the circle of Euler of a triangle is tangent to the excircles of the triangle.