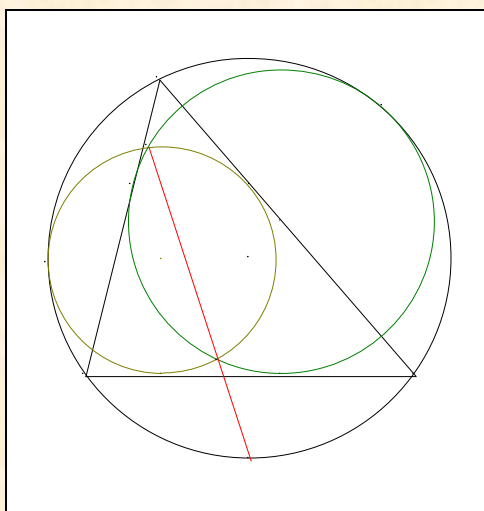


## A NEW MIXTILINEAR INCIRCLE ADVENTURE II



Jean – Louis AYME



*Deux cercles y règnent sans partage*

**Résumé :** nous présentons une "San Gaku" i.e. une énigme géométrique japonaise gravée sur une tablette votive, voire deux cercles de Longchamps accompagnés de nombreuses propriétés, de notes historiques, de commentaires et de références connues de l'auteur. Les figures sont toutes en position générale et les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

**Remerciements:** l'auteur remercie tout particulièrement le professeur Ercole Suppa pour son attentive relecture de cet article.

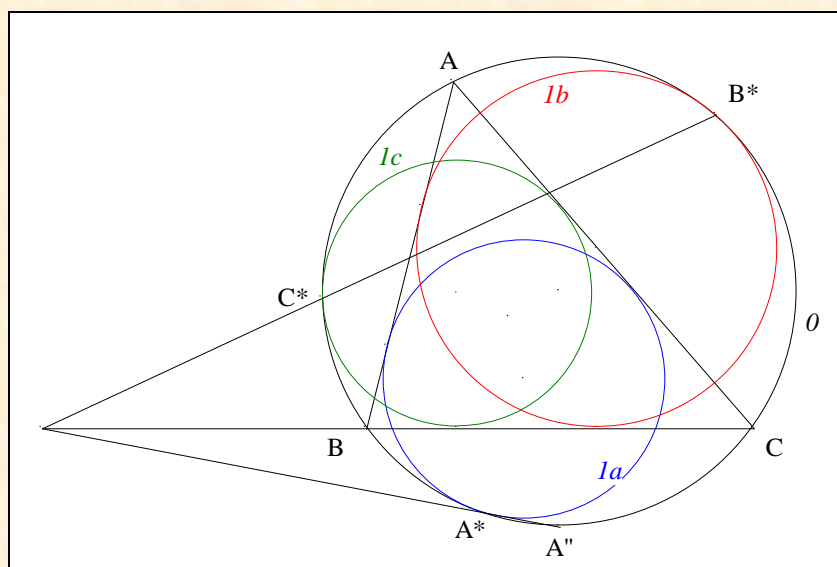
| <b>Sommaire</b>  |           |
|--|-----------|
| <b>I. Deux cercles de Longchamps</b>                           | <b>3</b>  |
| 1. Un alignement remarquable ou une "concourance" enrichie     |           |
| 2. Axe radical de deux cercles de Longchamps                   |           |
| <b>II. Avec les traces latérales des cercles de Longchamps</b> | <b>14</b> |
| 1. L'orthotransversale de I                                    |           |
| 2. Trois droites concourantes                                  |           |
| 3. "Concourance" sur une médiane                               |           |
| 4. TST Iran (2002)   |           |
| <b>III. Deux "concourances"</b>                                | <b>26</b> |
| 1. Première "concourance" de Juan Carlos Salazar               |           |
| 2. Seconde "concourance" de l'auteur                           |           |
| <b>IV. Deux faiceaux de cercles coaxiaux</b>                   | <b>32</b> |
| 1. Deux cercles orthogonaux                                    |           |
| 2. Trois cercles coaxiaux de l'auteur                          |           |
| 3. Trois cercles coaxiaux de Cosmin Pohoata                    |           |
| <b>V. Questions diverses</b>                                   | <b>43</b> |
| 1. Un cercle tourmenté de Longchamps                           |           |
| 2. "Concourance" sur la A-symédiane                            |           |
| <b>VI. Annexe</b>  | <b>49</b> |

# I. DEUX CERCLES DE LONGCHAMPS

## 1. Un alignement remarquable ou une "concourance" enrichie

### VISION

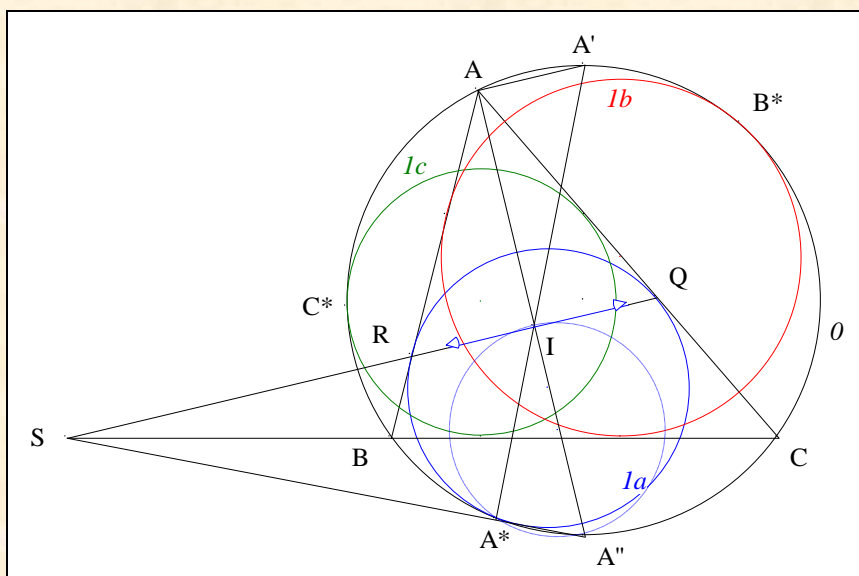
Figure :



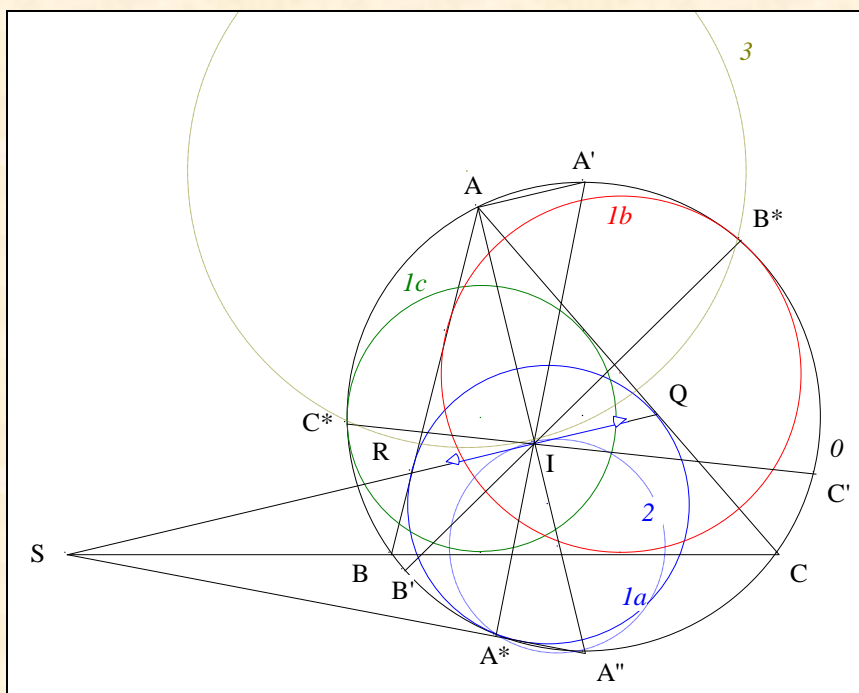
|                 |                 |   |
|-----------------|-----------------|---|
| <b>Traits :</b> | ABC             | un triangle,                            |
|                 | $O$             | le cercle circonscrit à ABC,            |
|                 | $A''$           | le second A-perpoint de ABC,            |
|                 | $la, lb, lc$    | les A, B, C-cercles de Longchamps       |
|                 | $A^*, B^*, C^*$ | les A, B, C-points de Lonchamps de ABC. |

**Donné :**  $(A^*A'')$ ,  $(BC)$  et  $(B^*C^*)$  sont concourantes.

### VISUALISATION



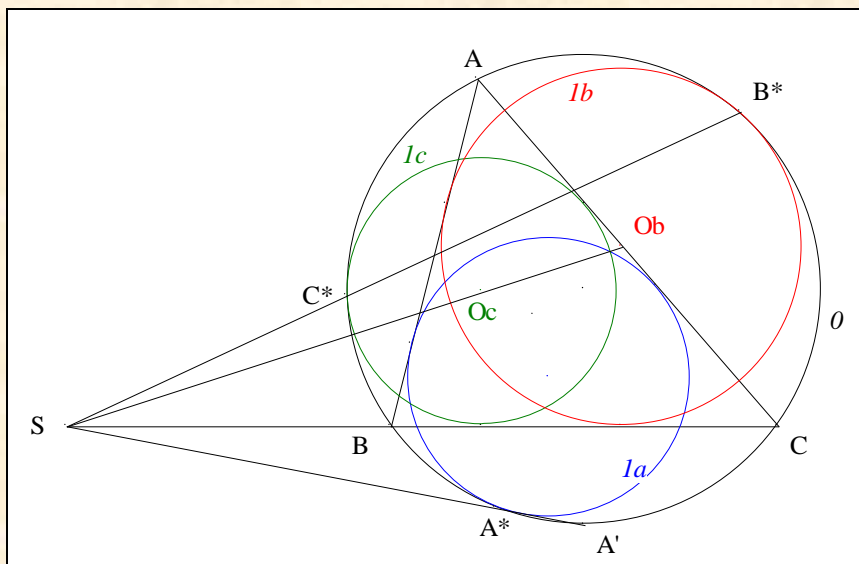
- Notons  $I$  le centre de  $I$ ,  
 $A'$  le premier A-perpoint de ABC,  
 $Q, R$  les points de contact de  $Ia$  resp. avec  $(AC)$ ,  $(AB)$   
 et  $S$  le point d'intersection de  $(PA'')$  et  $(BC)$ .
- **Scolies :** (1) d'après "Première concourance"<sup>1</sup>,  $(A''A')$ ,  $(QR)$  et  $(BC)$  sont concourantes.  
 (2)  $(AA') \parallel (QIR)$ .
- Le cercle  $O$ , les points de base  $A''$  et  $A^*$ , les moniennes naissantes  $(AA''I)$  et  $(A'A^*I)$ , les parallèles  $(AA')$  et  $(QIR)$ , conduisent au théorème 1'' de Reim ; en conséquence, le cercle passant par  $A''$ ,  $A'$ ,  $I$  est tangent à  $(QRI)$  en  $I$ .
- Notons 2 ce cercle.



- Notons  $B', C'$  les premiers B, C-perpoints de ABC.

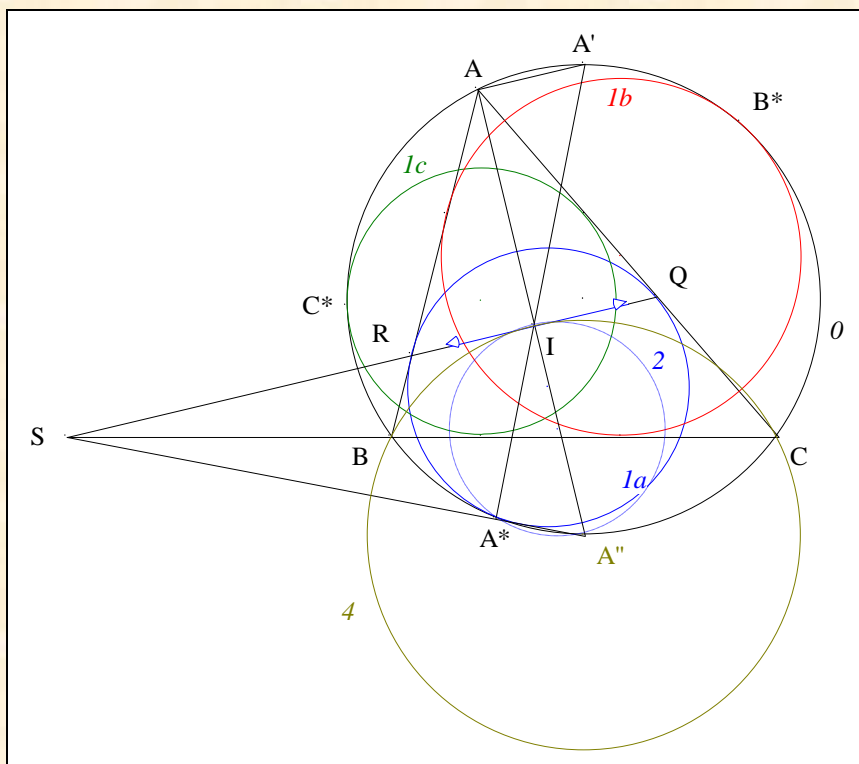
<sup>1</sup> Ayme J.-L., III. 1. Première "concourance", A new mixtilinear incircles adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 29.





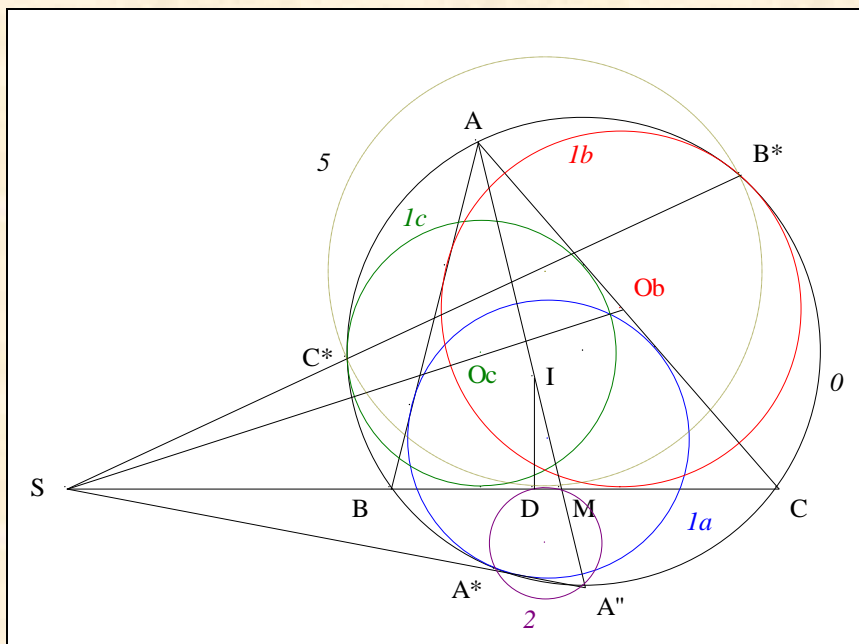
- Notons  $O_b, O_c$  les centres resp. de  $I_b, I_c$ .
- D'après "La droite de D'Alembert" (Cf. Annexe 2) appliqué à  $O, I_a, I_b$ ,  $S$  est le centre externe d'homothétie de  $I_b$  et  $I_c$ .
- **Conclusion :**  $(O_b O_c)$  passe par  $S$ .

### (3) Le A-cercle de Mention

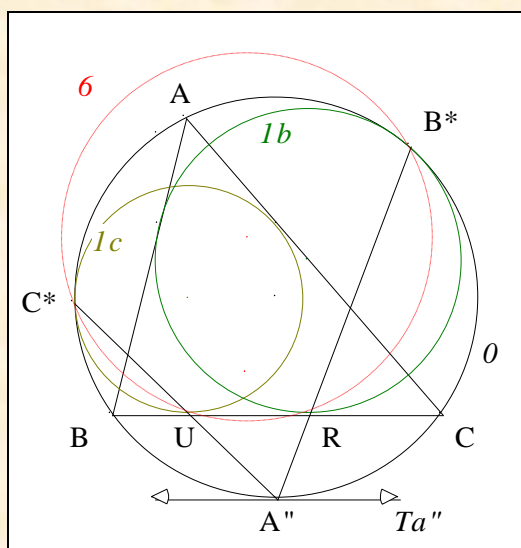


- Notons  $4$  le A-cercle de Mention de  $ABC$  ; il a pour centre  $A''$  et passe par  $B, I, C$ .
- **Conclusion :**  $4$  est tangent à  $(QIR)$  en  $I$ .

### (4) Un cercle remarquable



- Notons  $I$  le cercle inscrit de  $ABC$ ,  
 $I$  le centre de  $I$ ,  
 $D$  le point de contact de  $I$  avec  $(BC)$   
 et  $M$  le second point d'intersection de  $(AA'')$  et  $(BC)$ .
- D'après "Fin de la seconde partie de la Question 659"<sup>2</sup>,  $A^*, A'', M$  et  $D$  sont cocycliques.
- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $0, 2$  et aux cordes  $[A^*A''], [DM]$  et  $[B^*C^*]$ ,  $B^*, C^*, D$  et  $M$  sont cocycliques.
- Notons  $5$  ce cercle.
- (5) Un autre cercle remarquable

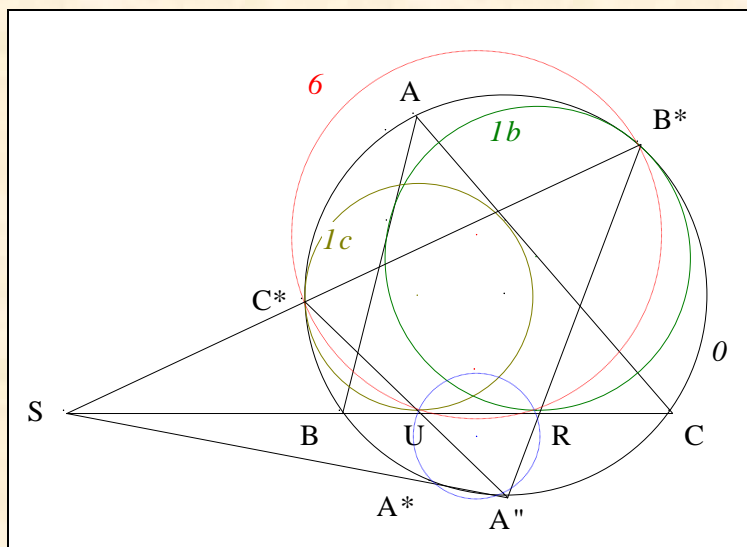


- Notons  $R, U$  les points de contact resp. de  $1b, 1c$  avec  $(BC)$   
 et  $Ta''$  la tangente à  $0$  en  $A''$ .

<sup>2</sup> Ayme J.-L., II. 7. Fin de la seconde partie de la Question 659,  
 A new mixtilinear incircles adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 21.



- **Scolies :**
  - (1)  $B^*, R$  et  $A''$  sont alignés
  - (2)  $C^*, U$  et  $A''$  sont alignés
  - (3)  $Ta'' // (BC)$ .
- **Conclusion :** le cercle  $O$ , les points de base  $B^*$  et  $C^*$ , les moniennes naissantes  $(A''B^*R)$  et  $(A''C^*U)$ , les parallèles  $Ta''$  et  $(RU)$ , conduisent au théorème **1''** de Reim ;  
en conséquence,  $B^*, C^*, U, R$  sont cocycliques.
- Notons  $\odot$  ce cercle.
- (6) Un dernier cercle remarquable



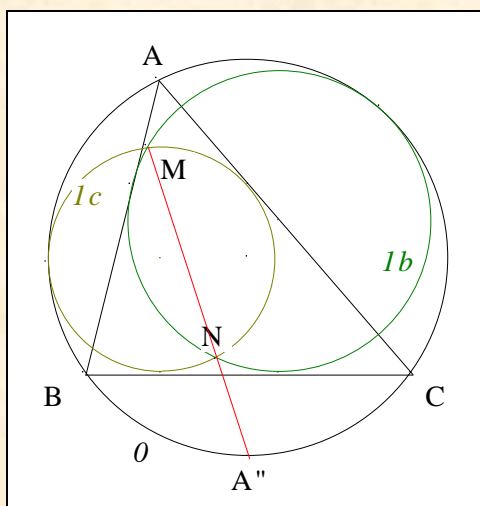
- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $0$ ,  $6$  et aux "cordes"  $[B^*C^*]$ ,  $[UR]$  et  $[A^*A]$  concourantes en  $S$ ,  $A''$ ,  $R$ ,  $U$  et  $A^*$  sont cocycliques.

## 2. Axe radical de deux cercles de Longchamps

## VISION

**Figure :**

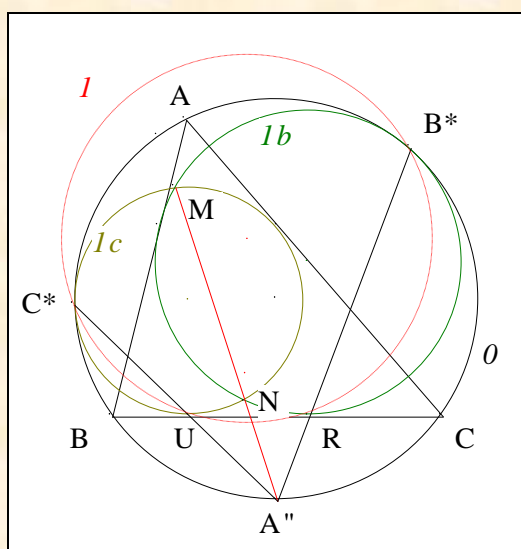




**Traits :** ABC un triangle,  
 $O$  le cercle circonscrit à ABC,  
 $Ib, Ic$  les B, C-cercles de Longchamps de ABC,  
M, N les points d'intersection de  $Ib, Ic$   
et  $A''$  le second perpoint de ABC

**Donné :** (MN) passe par  $A''$ .

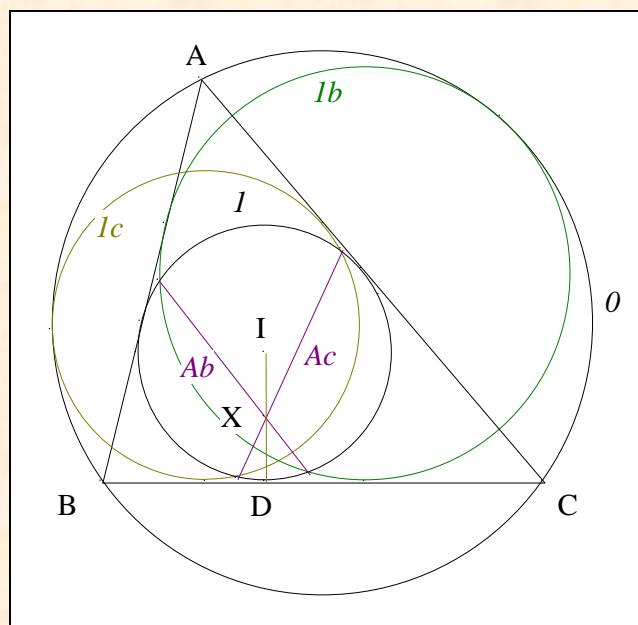
### VISUALISATION



- Notons  $B^*, C^*$  les centres resp. de  $Ib, Ic$ ,  
et  $R, U$  les points de contact resp. de  $Ib, Ic$  avec (BC)  
 $Ta''$  la tangente à  $O$  en  $A''$ .
- **Scolie :** d'après I. 1. scolie 5,  $B^*, C^*, U, R$  sont cocycliques.
- Notons  $I$  ce cercle.
- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $I, Ib, Ic$ ,  
(MN) passe par  $A''$ .

**Note historique :** ce résultat a été proposé comme proposition 7 (1) par Koha Lu Nguyen et Juan Carlos Salazar<sup>3</sup> en 2006 dans la revue électronique *Forum Geometricorum* et rappelé par l'élève Cosmin Pohoata du Tudor Vianu National College de Bucarest (Roumanie).

**Scolies :** (1) le cercle inscrit et deux cercles de Longchamps

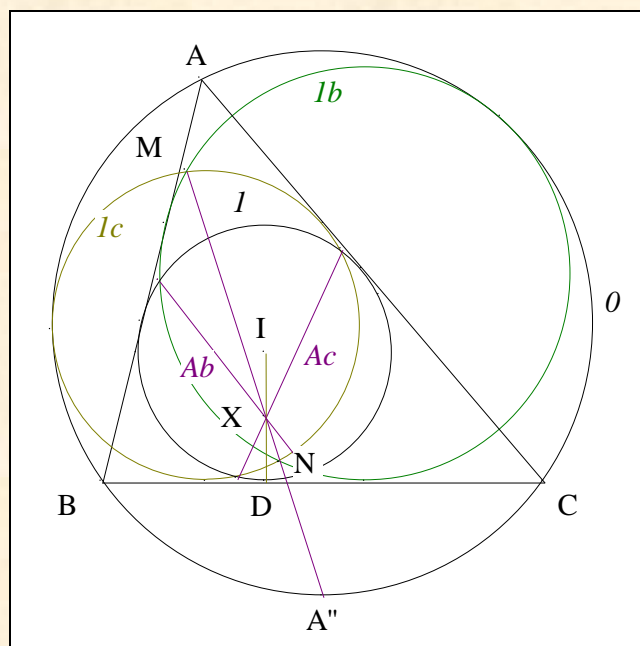


- Notons  $D$  le pied de la perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $I$ ,  
 $Ib, Ic$  les B, C-cercles de Longchamps de  $ABC$ ,  
 $Ab, Ac$  les axes radicaux resp. de  $I$  et  $Ib$ , de  $I$  et  $Ic$ ,  
 et  $X$  le point d'intersection de  $Ab$  et  $Ac$ .
- D'après Ayme "Axe radical d'un cercle de Longchamps et du cercle inscrit"<sup>4</sup>,  
 $Ab, Ac$  passe par le milieu de  $[AD]$ .
- **Conclusion :**  $X$  est le milieu de  $[ID]$ .

(2) L'axe radical de  $Ib$  et  $Ic$

<sup>3</sup> Nguyen K. L. and Salazar J. C., On mixtilinear incircles and excircles, *Forum Geometricorum* 6 (2006) 1-16 ;  
<http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200601.pdf>

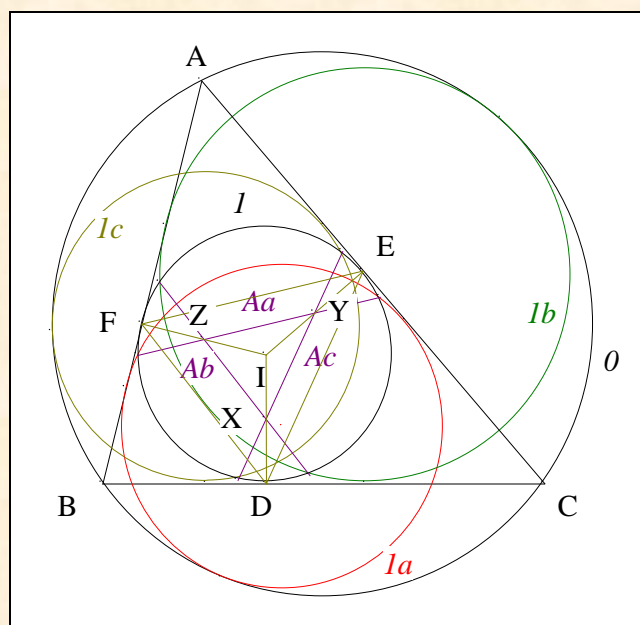
<sup>4</sup> Ayme J.-L., A new mixtilinear incircles adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 64 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>



- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorèmes des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $I$ ,  $Ib$ ,  $Ic$ , l'axe radical de  $Ib$  et  $Ic$  i.e. (MNA") passe par  $X$ .

**Note historique :** ces résultats précédents ont été proposés comme proposition 7 (2) par Koha Lu Nguyen et Juan Carlos Salazar<sup>5</sup> en 2006 dans la revue électronique *Forum Geometricorum*.

### (3) Vision triangulaire



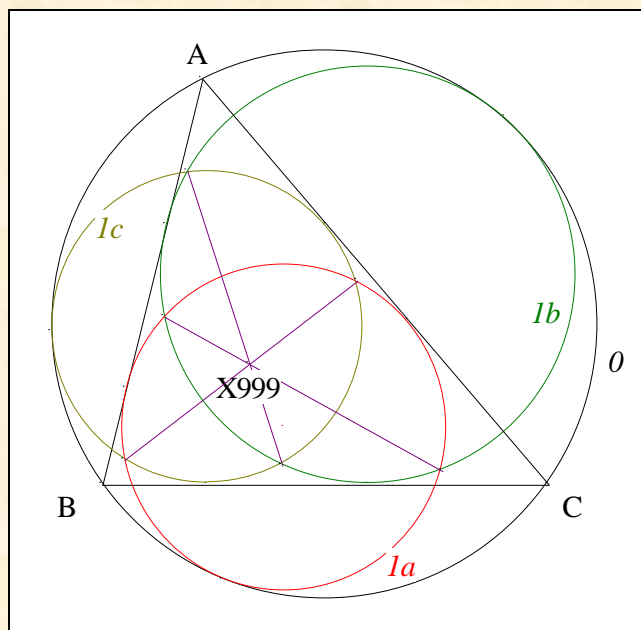
- Notons  $Ia$  le A-cercle de Longchamps de ABC,  
 $Aa$  l'axe radical de  $I$  et  $Ia$ ,

<sup>5</sup> Nguyen K. L. and Salazar J. C., On mixtilinear incircles and excircles, Forum Geometricorum 6 (2006) 1-16 ; <http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200601.pdf>.

et  $Y, Z$  les points d'intersection de  $Ac$  et  $Aa$ , de  $Aa$  et  $Ab$ .

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que  $Y$  est le milieu de  $[IE]$   
 $Z$  est le milieu de  $[IF]$ .

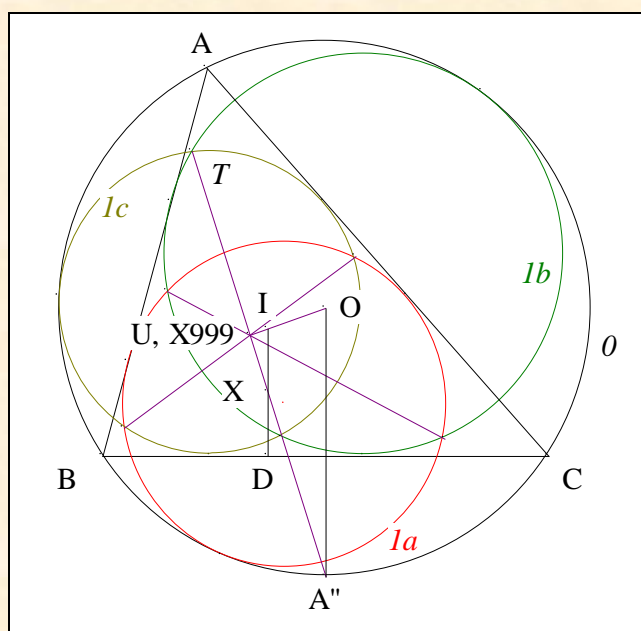
(4) Les axes radicaux de  $la, lb, lc$



- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorèmes des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $la, lb, lc$ , les axes radicaux de  $la, lb, lc$  pris deux à deux, concourent au centre radical de ces trois cercles.

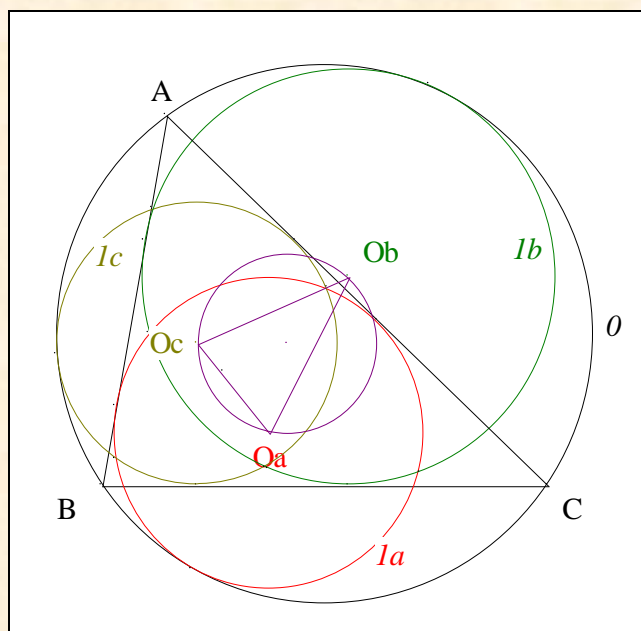
(6) Conformément à la nomenclature d'ETC, ce centre est référencé sous  $X_{999}$ .

(7) Position de  $X_{999}$



- A partir de l'axe radical de  $Ib$  et  $Ic$ .
- Notons  $U$  le point d'intersection de  $(TXA'')$  et  $(IO)$   
 $R, r$  les rayons resp. de  $O, I$ .
- Sachant que  $X$  est le milieu de  $[ID]$ , 
$$\frac{\overline{UI}}{\overline{OU}} = \frac{r}{2R}.$$
- A partir de l'axe radical de  $Ic$  et  $Ia$ .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que le point d'intersection de cet axe radical avec  $(OI)$  divise extérieurement  $[IO]$  dans le rapport  $r/2R$ .
- A partir de l'axe radical de  $Ia$  et  $Ib$ .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que le point d'intersection de cet axe radical avec  $(OI)$  divise extérieurement  $[IO]$  dans le rapport  $r/2R$ .
- **Conclusion :** le centre radical  $X_{999}$  divise extérieurement  $[IO]$  dans le rapport  $r/2R$ .<sup>6</sup>

(8) The mixtilinear triangle and circle



- Notons  $Oa, Ob, Oc$  les centres resp. de  $Ia, Ib, Ic$ .
- $OaObOc$  est le "mixtilinear triangle of ABC" et le cercle circonscrit à  $OaObOc$  est le "mixtilinear circle of ABC" conformément à la terminologie d'Éric W. Weisstein<sup>7</sup>.
- Notons que le centre de ce cercle n'est pas actuellement répertorié chez ETC<sup>8</sup> et qu'aucun centre répertorié chez ETC n'est sur ce cercle.

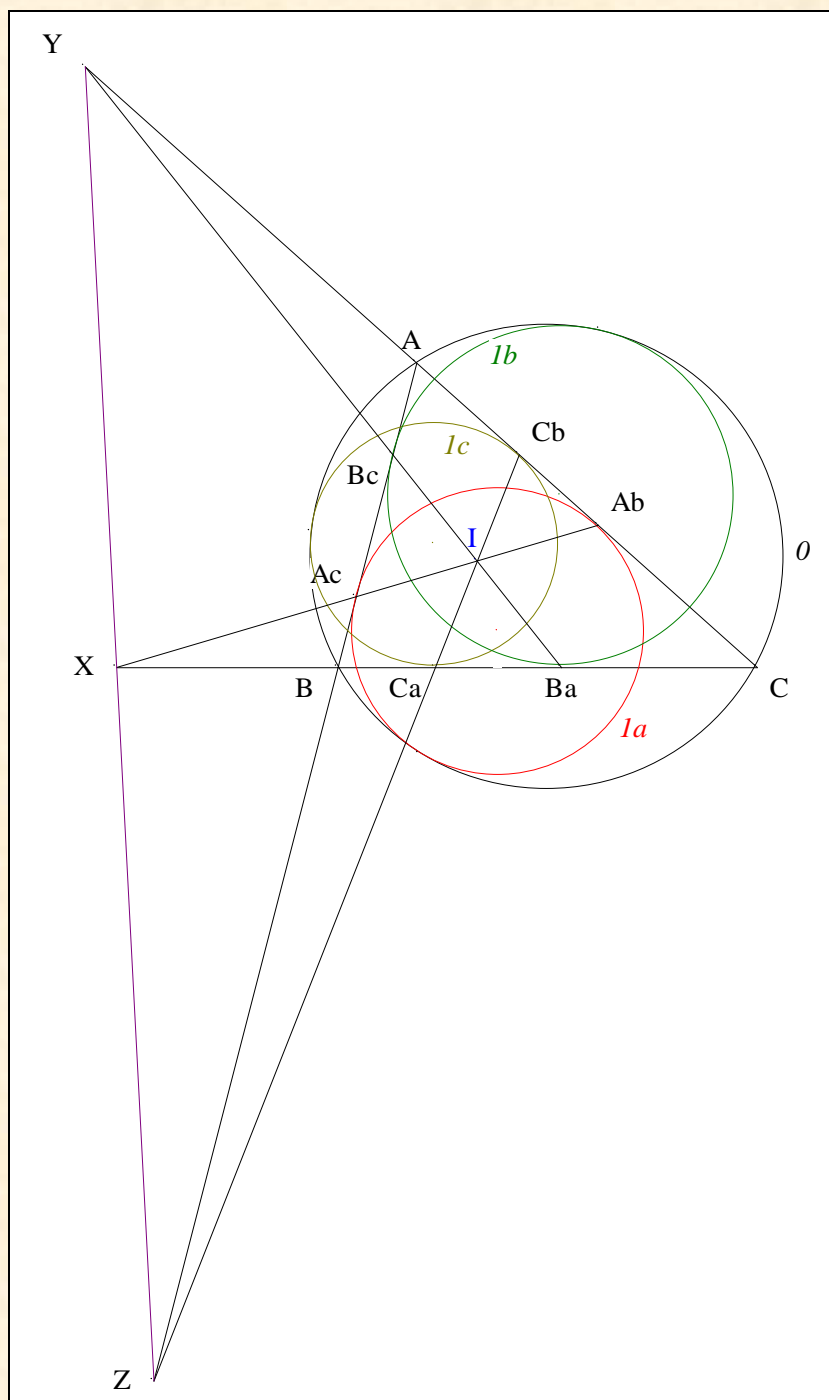
<sup>6</sup> Paul Yiu, *Mixtilinear Incircles, II*, paragraph 1, Theorem 1.  
<sup>7</sup> <http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html>.  
<sup>8</sup> <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.

## **II. AVEC LES TRACES LATÉRALES DES CERCLES DE LONGCHAMPS**

### **1. L'orthotransversale de I**

**VISION**

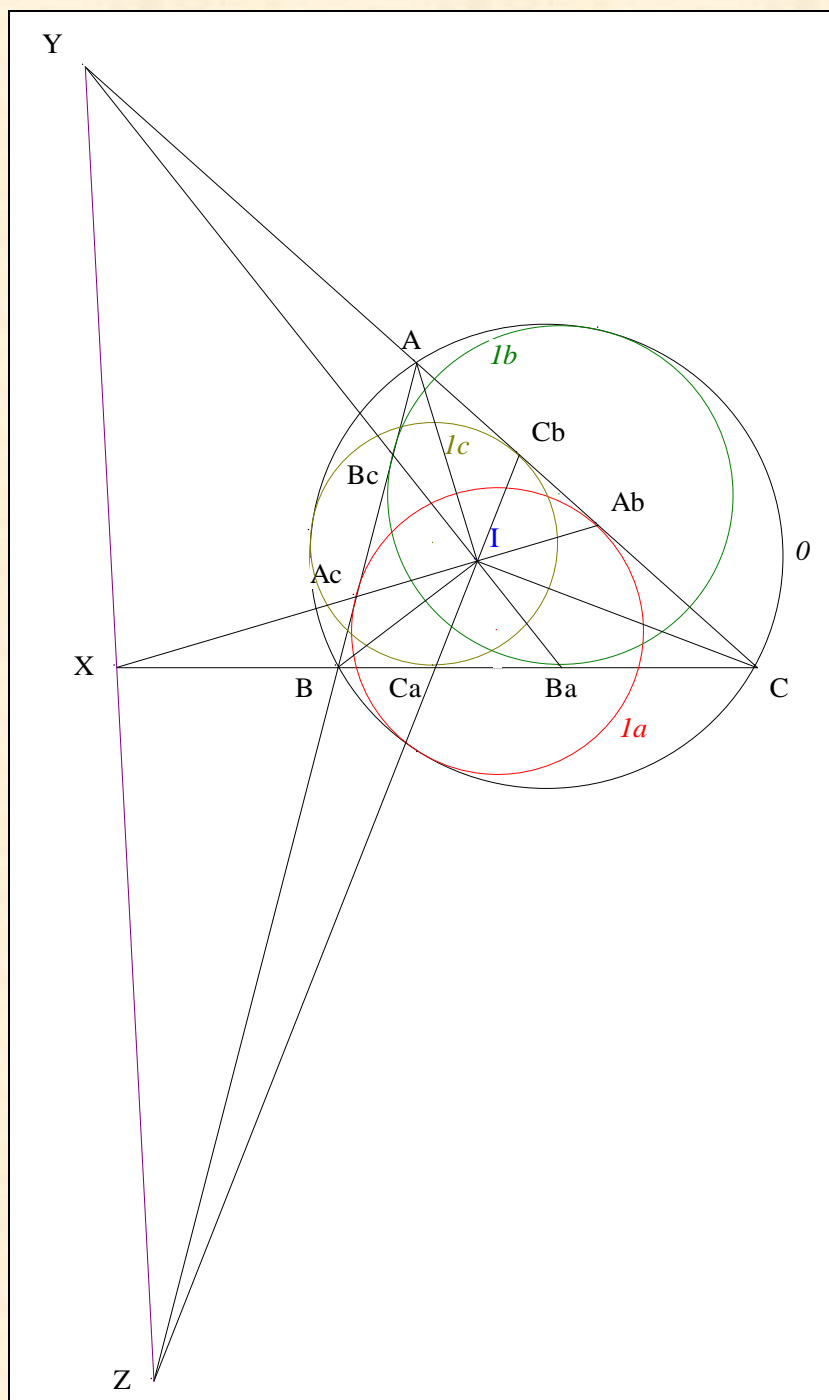
**Figure :**



|                 |                       |   |
|-----------------|-----------------------|---|
| <b>Traits :</b> | ABC                   | un triangle,  |
|                 | $O$                   | le cercle circonscrit à ABC,  |
|                 | $la, lb, lc$          | les A, B, C-cercle de Longchamps de ABC,  |
|                 | Ab, Ac                | les points de contact de $la$ resp. avec (AC), (AB)   |
|                 | Bc, Ba                | les points de contact de $lb$ resp. avec (BA), (BC)   |
|                 | Ca, Cb                | les points de contact de $lc$ resp. avec (CB), (CA)   |
|                 | X, Y, Z               | les points d'intersection resp. de (AbAc) et (BC), de (BcBa) et (CA),<br>de (CaCb) et (AB). |
| <b>Donné :</b>  | X, Y, Z sont alignés. |   |

### VISUALISATION





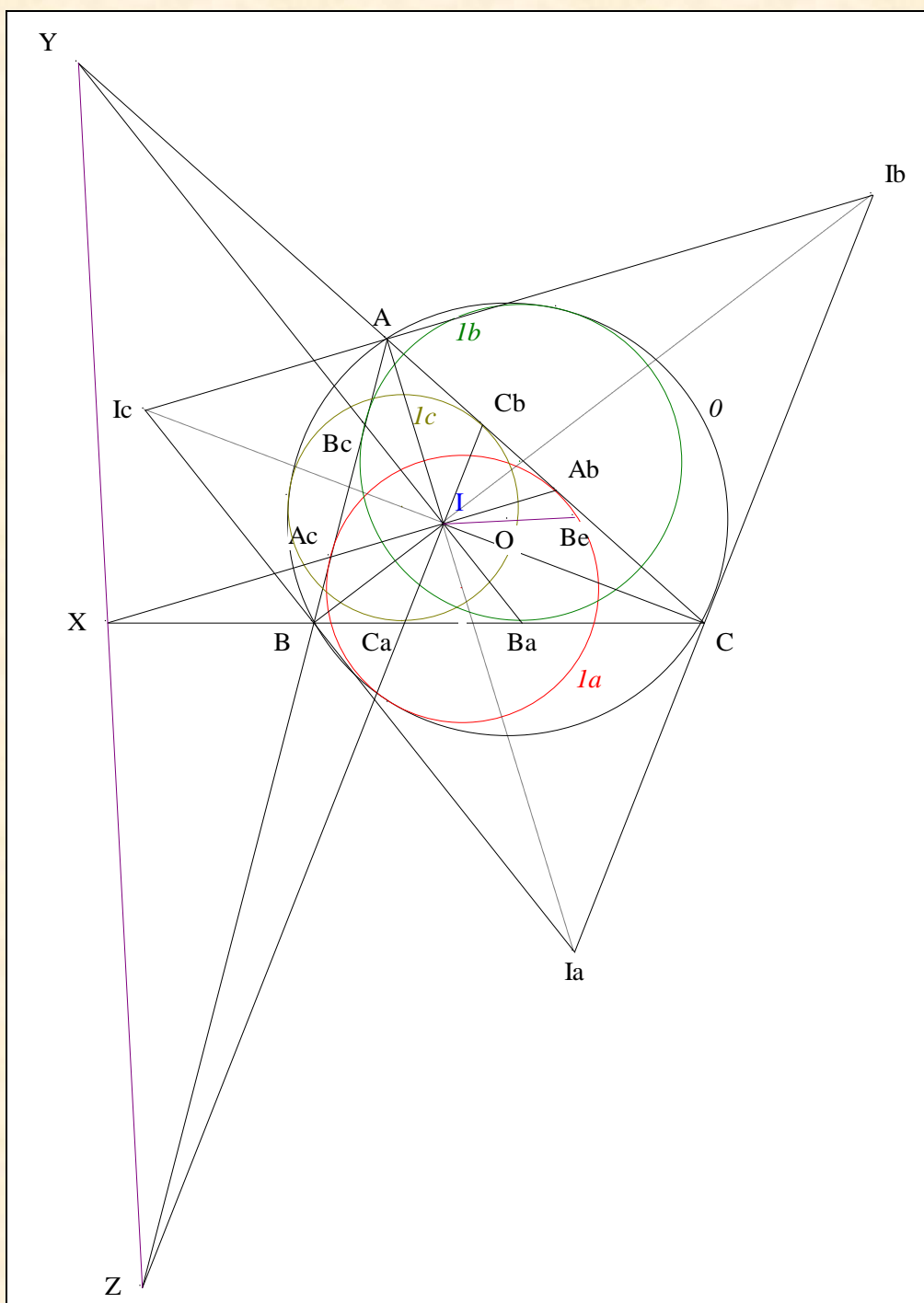
- D'après Ayme "Le résultat de Deprez"<sup>9</sup>  $(AI) \perp (AbAc)$  ,  $(BI) \perp (BcBa)$  ,  $(CI) \perp (CaCb)$ .
- D'après Brocard "Orthotransversale" (Cf. Annexe 3), X, Y, Z sont alignés.

- Scolies :**
- (1)  $(IA)$ ,  $(IB)$  et  $(IC)$  sont "les orthocéviennes de I relativement à ABC".
  - (2) X, Y et Z sont "les orthotraces de I relativement à ABC".
  - (3)  $(XYZ)$  est "l'orthotransversale de I relativement à ABC".

<sup>9</sup>

Ayme J.-L., II. 3. Le résultat de Deprez, A new mixtilinear incircles adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 14.

(4) (OI) est perpendiculaire à (XYZ)



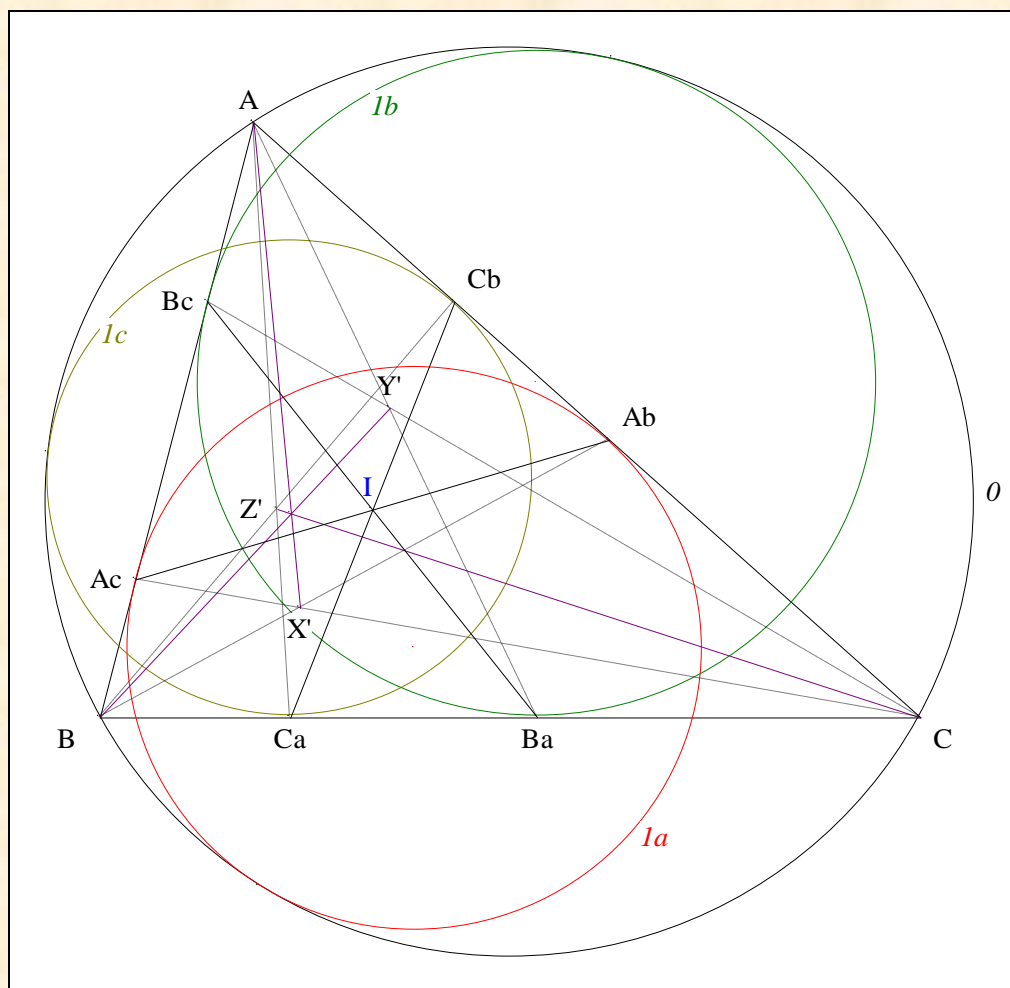
- Notons  $O$  le centre de  $\Delta$ ,  
et  $I_aI_bI_c$  le triangle excentral de ABC  
 $Be$  le point de Bevan de ABC i.e. le centre du cercle circonscrit à  $I_aI_bI_c$ .
- Nous savons que
  - (1)  $I$  est le centre de perspective de  $I_aI_bI_c$  et ABC
  - (2)  $I$  est le pôle d'orthologie de ABC relativement à  $I_aI_bI_c$
  - (3)  $Be$  est le pôle d'orthologie de  $I_aI_bI_c$  relativement à ABC
- Notons  $P$  l'axe de perspective de  $I_aI_bI_c$  et ABC.

- D'après Ayme "Le théorème de Sondat"<sup>10</sup>,  $(I\text{Be}) \perp P$ .
- D'après Ayme "Cinq théorème de Nagel"<sup>11</sup>,  $I, \text{Be}, O$  sont alignés ;  
en conséquence,  $(IO) \perp P$ .
- D'après "Parallèle à un axe de perspective" (Cf. Annexe 4),  $P \parallel (XYZ)$ .
- **Conclusion** : d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,  $(OI)$  est perpendiculaire à  $(XYZ)$ .

## 2. Trois droites concourantes

### VISION

Figure :



|                 |              |  |
|-----------------|--------------|--|
| <b>Traits :</b> | ABC          | un triangle,   |
|                 | $O$          | le cercle circonscrit à ABC,                         |
|                 | $Ia, Ib, Ic$ | les A, B, C-cercle de Longchamps de ABC,             |
|                 | Ab, Ac       | les points de contact de $Ia$ resp. avec (AC), (AB), |
|                 | Bc, Ba       | les points de contact de $Ib$ resp. avec (BA), (BC), |

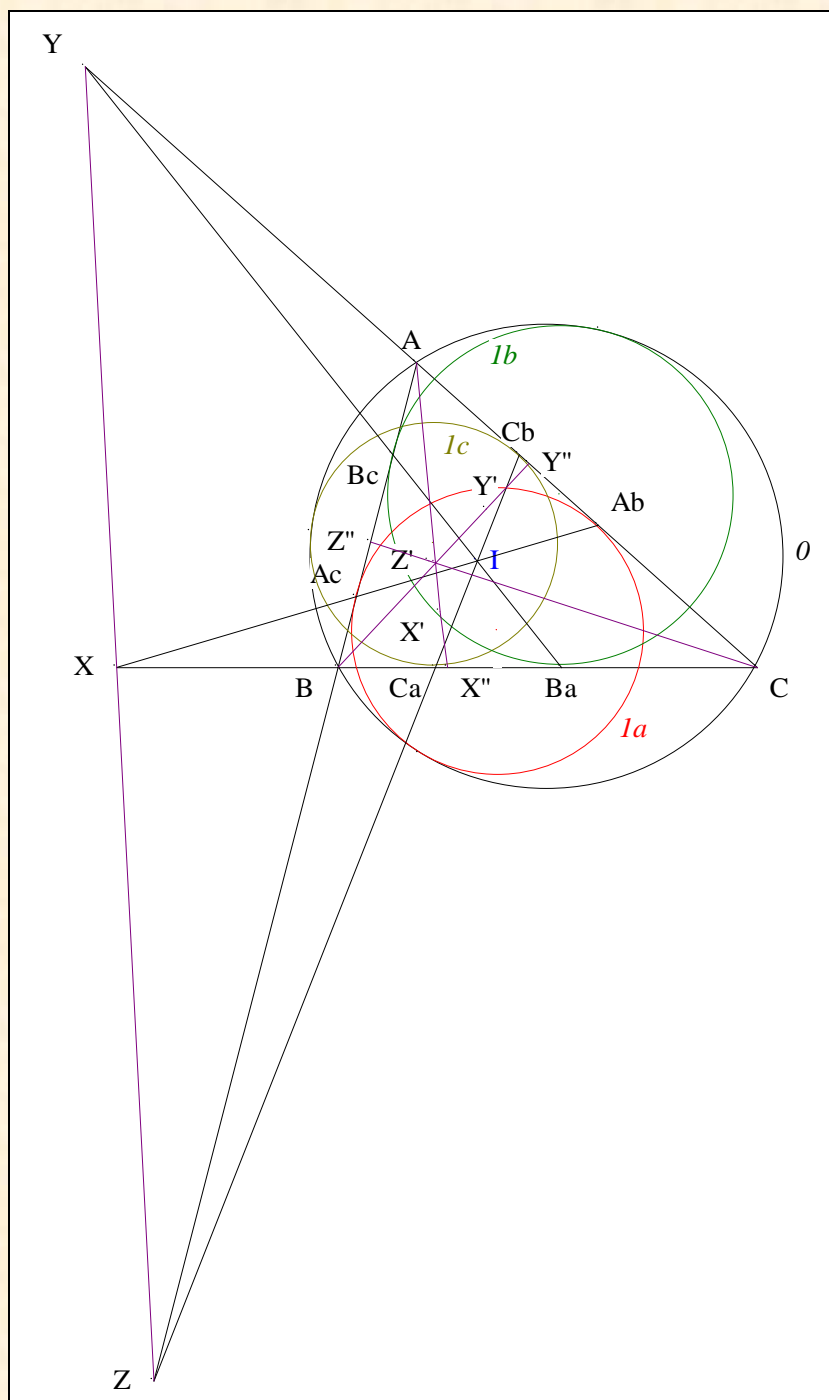
<sup>10</sup> Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.

<sup>11</sup> Ayme J.-L., Cinq théorème de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.

et  $Ca, Cb$  les points de contact de  $lc$  resp. avec  $(CB), (CA)$   
 $X', Y', Z'$  les points d'intersection resp. de  $(BAb)$  et  $(CAc)$ , de  $(ABa)$  et  $(CBc)$ ,  
de  $(BCb)$  et  $(Aca)$ .

**Donné :**  $(AX'), (BY'), (CZ')$  sont concourantes.

### VISUALISATION



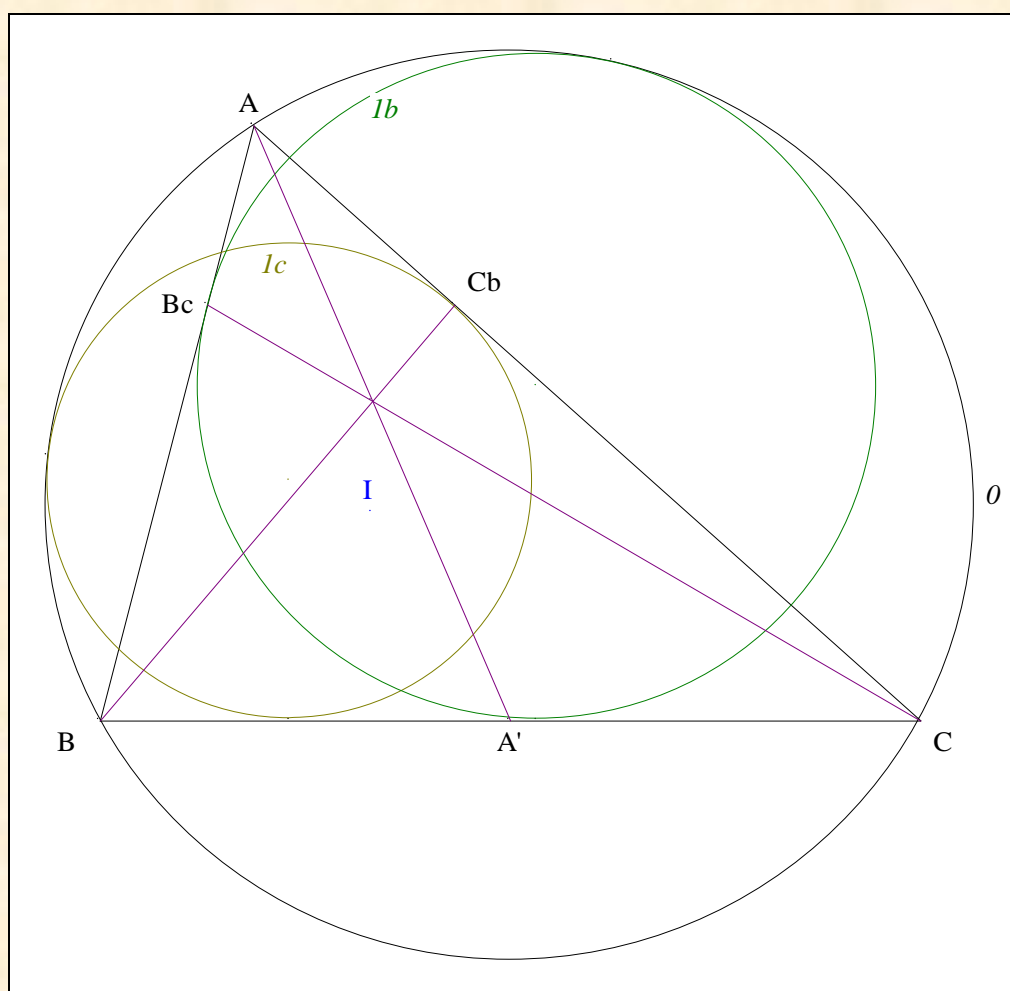
- Notons  $X, Y, Z$  les points d'intersection resp. de  $(AbAc)$  et  $(BC)$ , de  $(BcBa)$  et  $(CA)$ ,  
de  $(CaCb)$  et  $(AB)$ ,  
et  $X'', Y'', Z''$  les points d'intersection resp. de  $(AX')$  et  $(BC)$ , de  $(BY')$  et  $(CA)$ ,  
de  $(CZ')$  et  $(AB)$ .

- D'après Brocard "Orthotransversale" (Cf. Annexe 3),  $X, Y, Z$  sont alignés.
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" appliqué
  - (1) au quadrilatère complet  $BCAbAc$ , la quaterne  $(B, C, X'', X)$  est harmonique
  - (2) au quadrilatère complet  $CABcBa$ , la quaterne  $(C, A, Y'', Y)$  est harmonique
  - (3) au quadrilatère complet  $ABCaCb$ , la quaterne  $(A, B, Z'', Z)$  est harmonique.
- **Conclusion :** d'après le théorème de Céva,  $(AX'), (BY'), (CZ')$  sont concourantes.

### 3. "Concurrence" sur une médiane

#### VISION

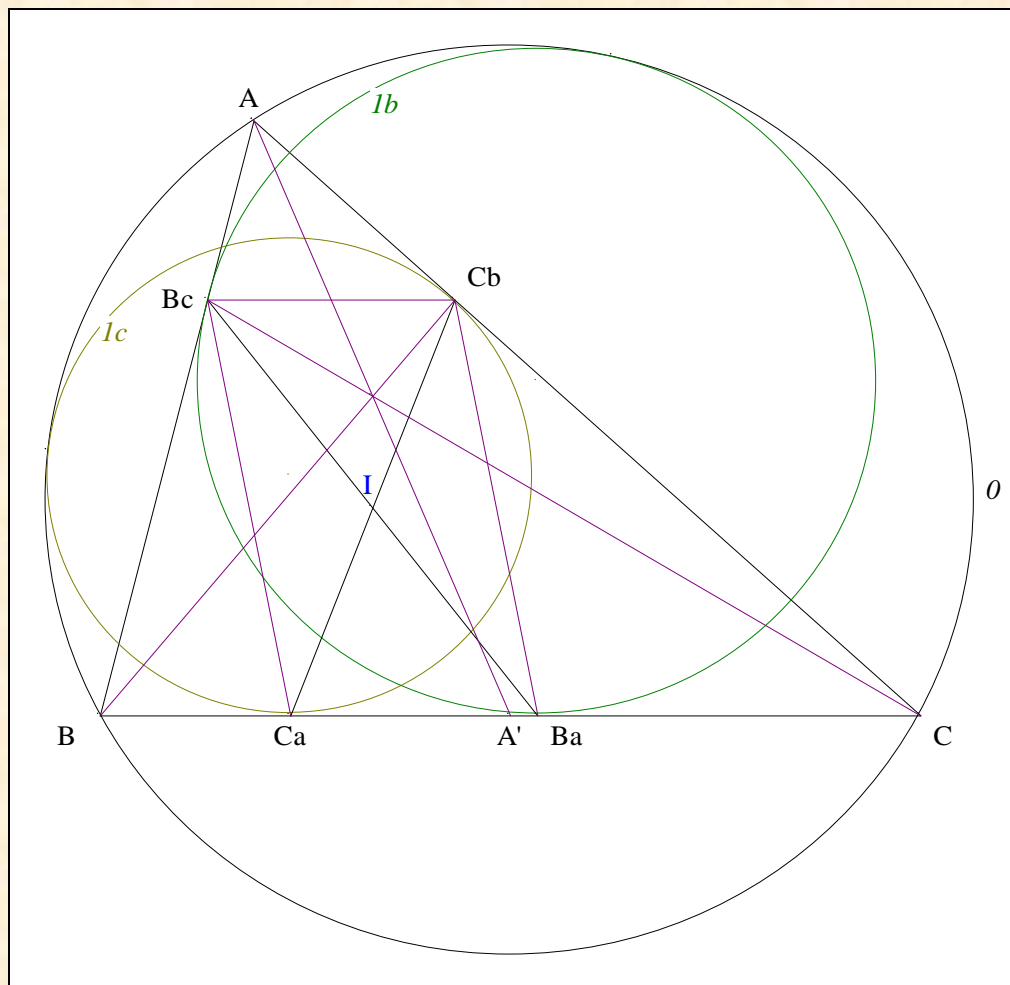
Figure :



**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $O$  le cercle circonscrit à  $ABC$ ,  
 $Ib, Ic$  les  $B, C$ -cercle de Longchamps de  $ABC$ ,  
 $Bc$  le point de contact de  $Ib$  avec  $(BA)$ ,  
 $Cb$  le point de contact de  $Ic$  avec  $(CA)$   
 et  $A'$  le milieu de  $[BC]$ .

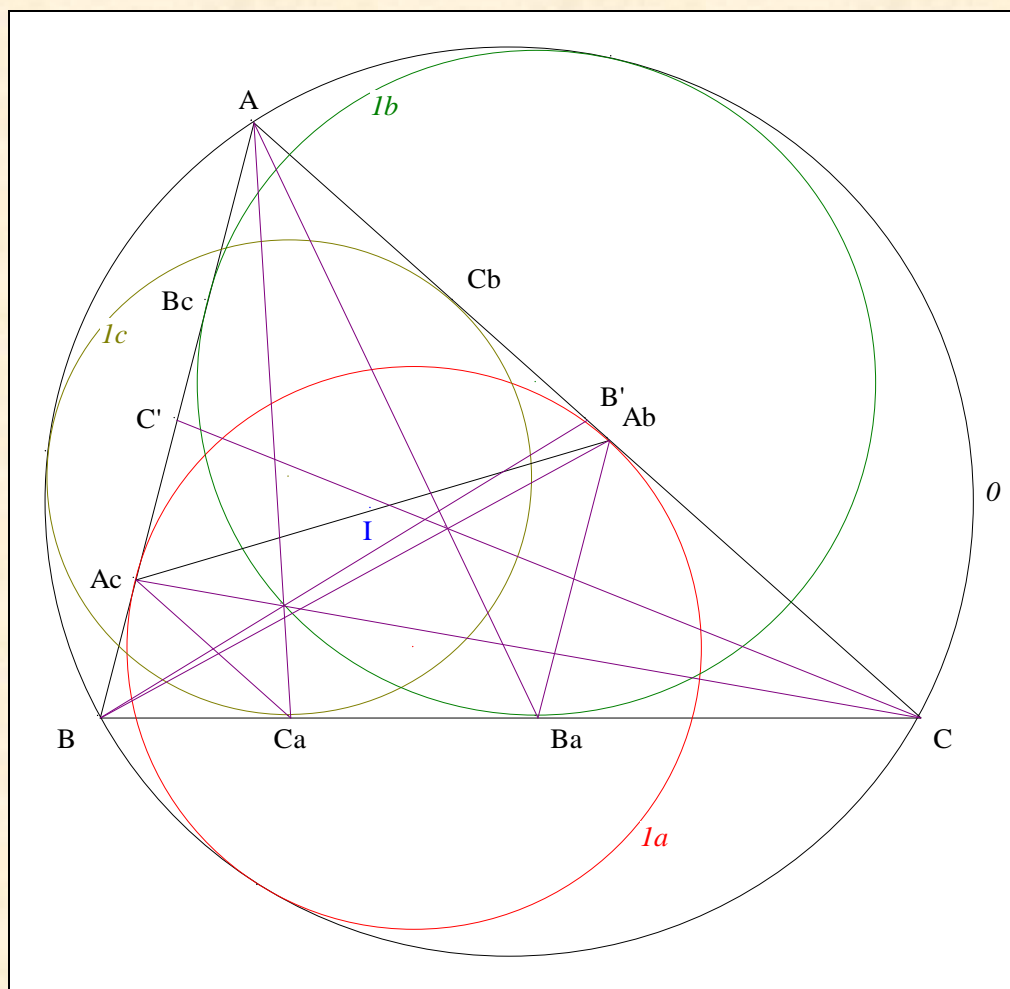
**Donné :**  $(BCb)$  et  $(CBc)$  concourent sur  $(AA')$ .

## VISUALISATION



- Notons  $B_c$  le point de contact de  $I_b$  resp. avec  $(BA)$   
 $C_b$  le point de contact de  $I_c$  resp. avec  $(CA)$ .
- D'après  $I$  est le milieu de  $[B_a B_c]$  et de  $[C_b C_a]$  ;  
 en conséquence, le quadrilatère  $B_c C_a B_a C_b$  est un parallélogramme ;  
 il s'en suit que le quadrilatère  $B C C_b B_c$  est un trapèze.
- **Conclusion :**  $(B C_b)$  et  $(C B_c)$  concourent sur  $(A A')$ .

**Scolie :** deux autres "concourances"



- Notons  $Ia$  le A-cercle de Longchamps de ABC  
et  $Ab, Ac$  les points de contact de  $Ia$  resp. avec  $(AC)$ ,  $(AB)$ .
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que  $(Cac)$  et  $(Aca)$  concourent sur  $(BB')$   
 $(Aba)$  et  $(Bab)$  concourent sur  $(CC')$ .

**Note historique :** ce résultat a été signalé par Antreas Hatzipolakis<sup>12</sup> sans référence.

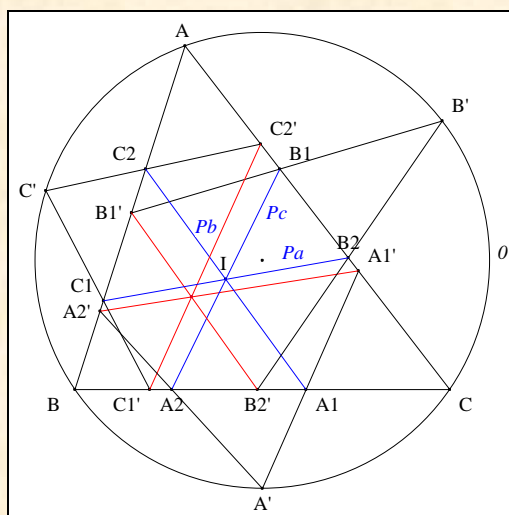
#### 4. TST Iran (2002)

#### VISION

**Figure :**

<sup>12</sup> Hatzipolakis A., Mixtilinear circumcircles, Message *Hyacinthos* # 266 du 31/01/2000 ;  
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/266>.

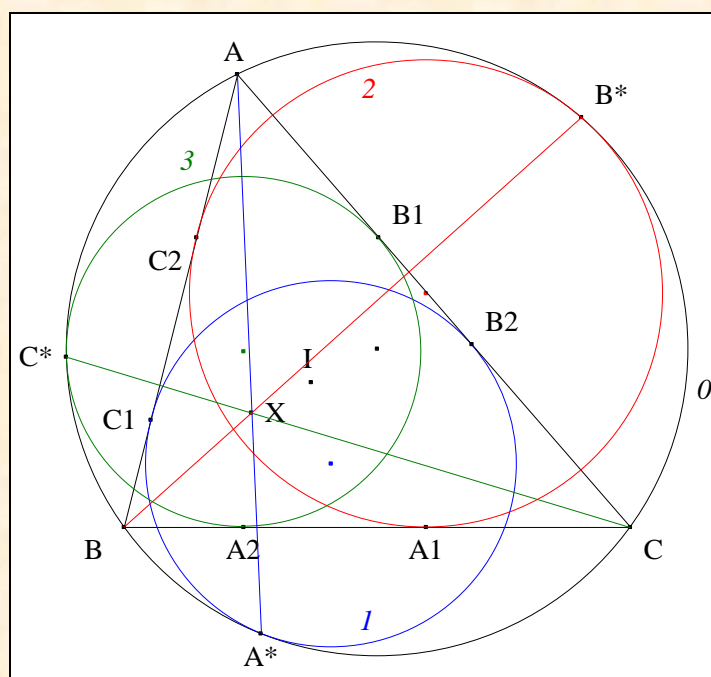




|                 |              |   |
|-----------------|--------------|---|
| <b>Traits :</b> | ABC          | un triangle,  |
|                 | $O$          | le cercle circonscrit de ABC,                                       |
|                 | I            | le centre de ABC,   |
|                 | $Pa, Pb, Pc$ | les perpendiculaires à (AI), (BI), (CI) en I,                       |
|                 | $A1, A2$     | les points d'intersection de $Pb, Pc$ avec (BC),                    |
|                 | $A'$         | le milieu de l'arc BC ne contenant pas A,                           |
|                 | $A1', A2'$   | les points d'intersection de $(A'A1)$ et (CA), de $(A'A2)$ et (AB), |
|                 | $B1, B2$     | les points d'intersection de $Pc, Pa$ avec (CA),                    |
|                 | $B'$         | le milieu de l'arc CA ne contenant pas B,                           |
|                 | $B1', B2'$   | les points d'intersection de $(B'B1)$ et (AB), de $(B'B2)$ et (BC), |
|                 | $C1, C2$     | les points d'intersection de $Pa, Pb$ avec (AB),                    |
|                 | $C'$         | le milieu de l'arc AB ne contenant pas C                            |
| et              | $C1', C2'$   | les points d'intersection de $(C'C1)$ et (BC), de $(C'C2)$ et (CA). |

**Donné :**  $(A1'A2'), (B1'B2')$  et  $(C1'C2')$  sont concourantes.

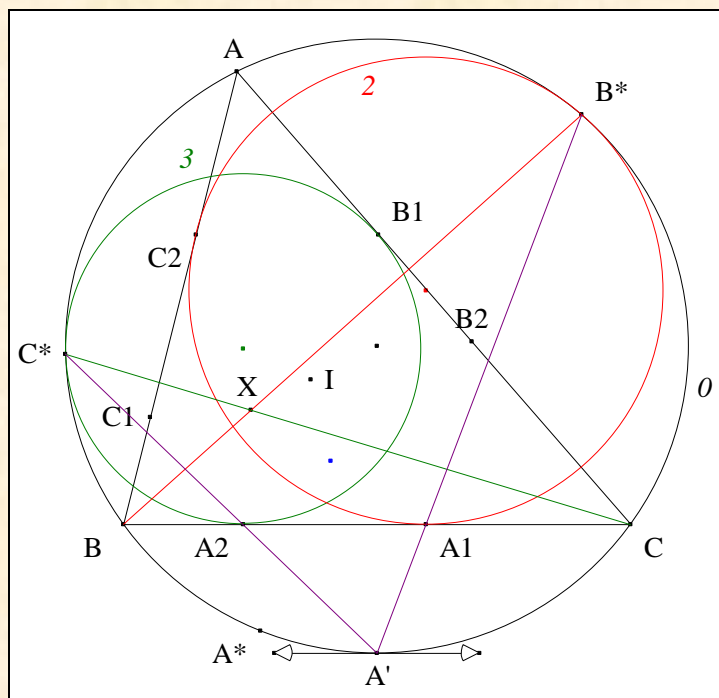
### VISUALISATION



- Notons  $1, 2, 3$  les A, B, C-cercles de Longchamps

et  $A^*, B^*, C^*$  les A, B, C-points de Longchamps de ABC.

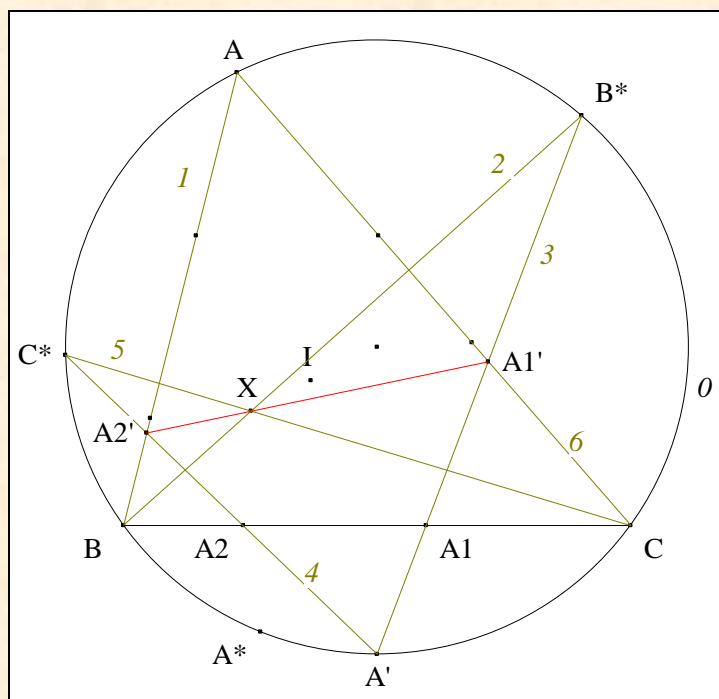
- **Scolies :**
  - (1)  $l$  est tangent à (CA) et (AB) en B2 et C1
  - (2)  $2$  est tangent à (AB) et (BC) en C2 et A1
  - (3)  $3$  est tangent à (BC) et (CA) en A2 et B1.
- D'après Ayme "Concurrence des droites de Longchamps"<sup>13</sup>,  $(AA^*), (BB^*)$  et  $(CC^*)$  sont concourantes.
- Notons  $X$  ce point de concours.



- Notons  $Ta'$  la tangente à  $0$  en  $A'$ .
- **Scolies :**
  - (1)  $(BC)$  est tangente à  $2$  en  $A1$
  - (2)  $(BC) \parallel Ta'$ .
- Les cercles tangents  $2$  et  $0$ , le point de base  $B^*$ , les tangentes  $(BC)$  et  $Ta'$ , conduisent au théorème **8'** de Reim ; en conséquence,  $A1, A'$  et  $B^*$  sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que  $A2, A'$  et  $C^*$  sont alignés

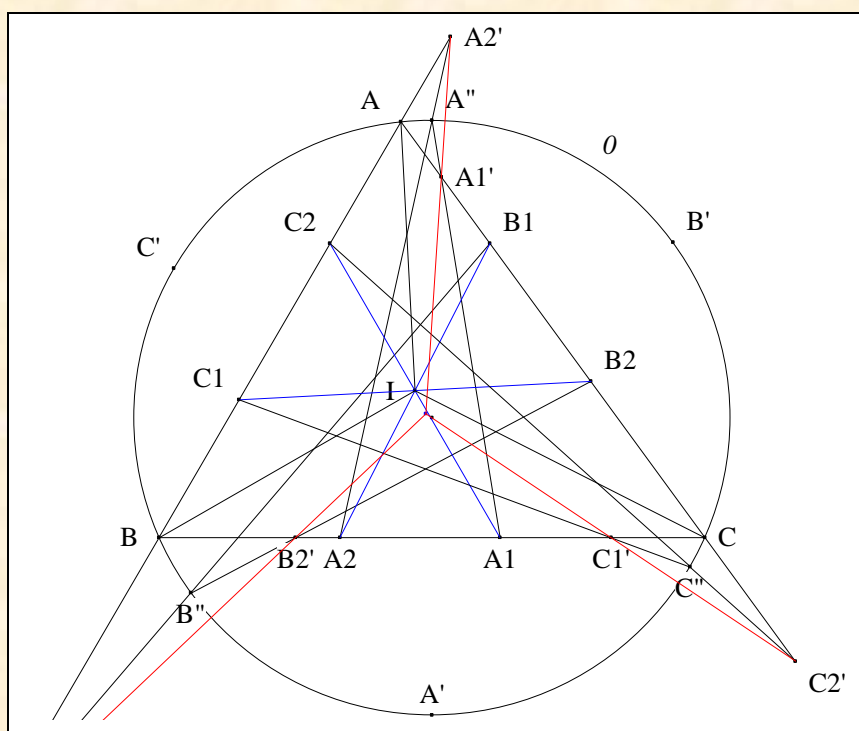
<sup>13</sup>

Ayme J.-L., II. 6. "Concurrence" des..., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 19.



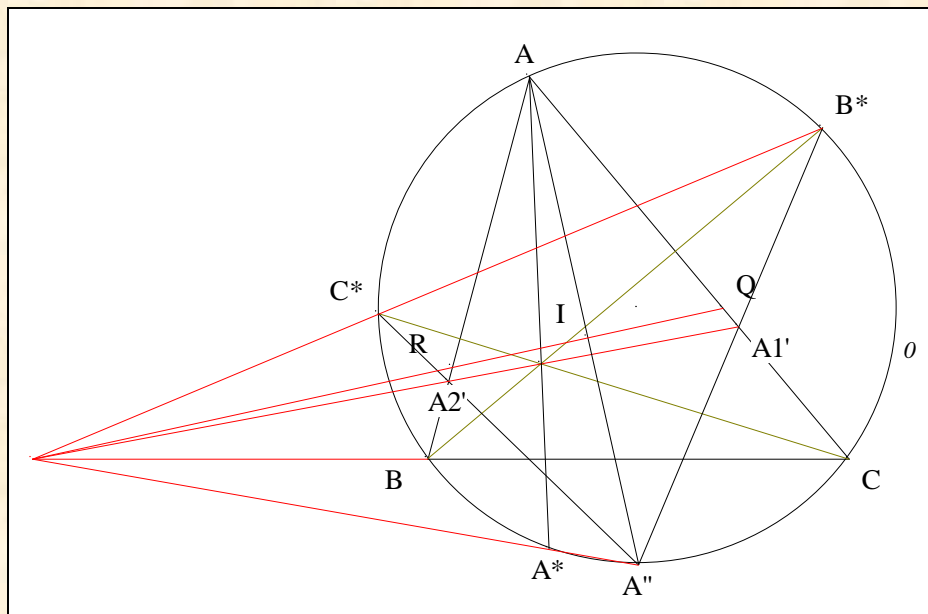
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 5),  
( $A_2'XA_1'$ ) est la pascale de l'hexagone cyclique  $ABB^*A'C^*C$ .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que  $B_2', X$  et  $B_1'$  sont alignés  
 $C_2', X$  et  $C_1'$  sont alignés.
- **Conclusion :** ( $A_1'A_2'$ ), ( $B_1'B_2'$ ) et ( $C_1'C_2'$ ) sont concourantes.

**Scolies :** (1) une autre "concourance"



- Notons  $A'', B'', C''$  les antipôles de  $A', B', C'$  relativement à  $\mathcal{O}$ .
- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que  $(A_1'A_2')$ ,  $(B_1'B_2')$  et  $(C_1'C_2')$  sont concourantes.

(2) Une récapitulation visuelle

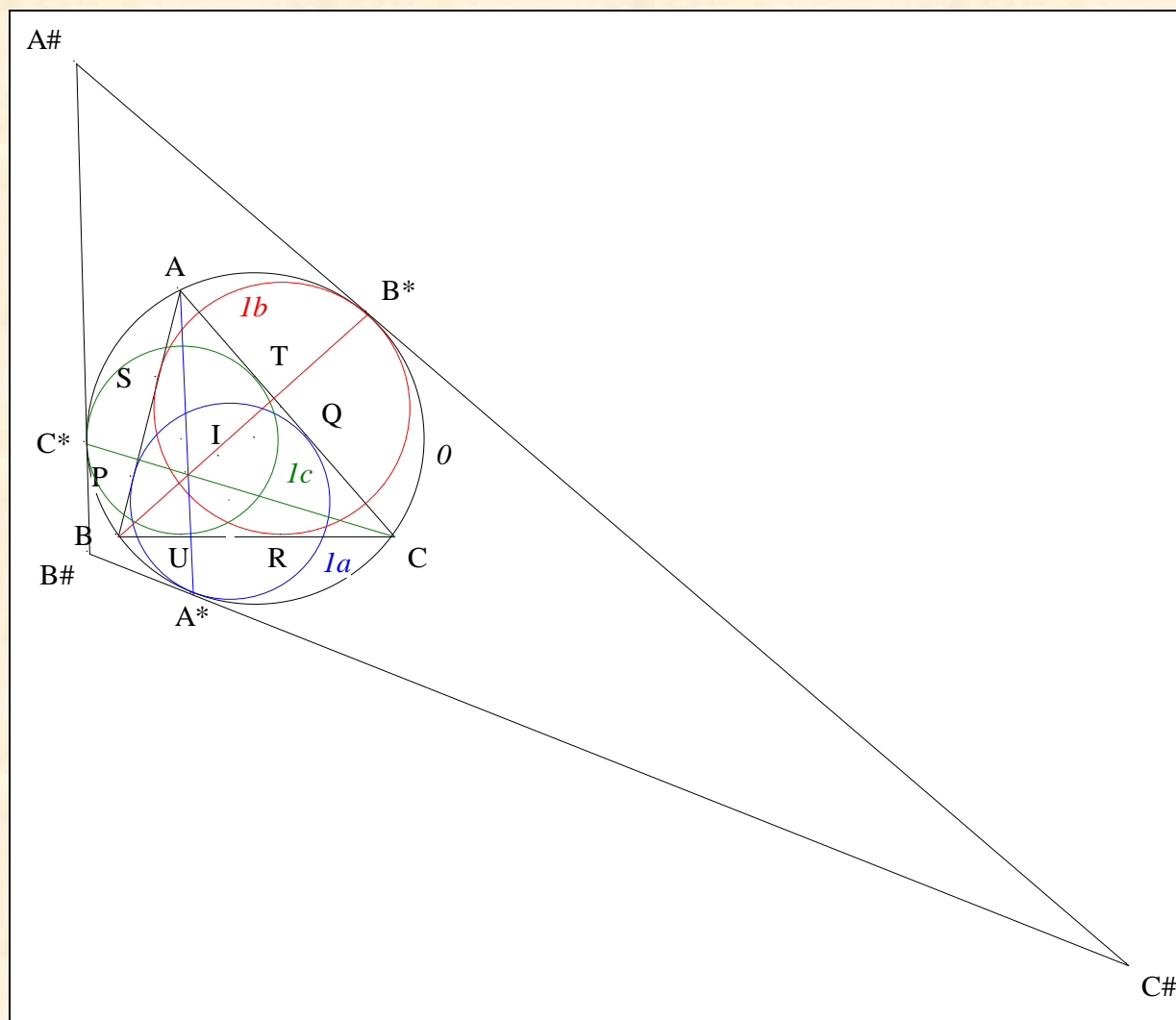


### III. DEUX "CONCOURANCES"

#### 1. Première "concourance" de Juan Carlos Salazar

#### VISION

Figure :



**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $O$  le cercle circonscrit à  $ABC$ ,  
 $la, lb, lc$  les A, B, C-cercles de Longchamps de  $ABC$ ,  
 $A^*, B^*, C^*$  les points de contact resp. de  $la, lb, lc$  avec  $O$ ,  
 $Ta^*, Tb^*, Tc^*$  les tangentes à  $O$  resp. en  $A^*, B^*, C^*$   
 et  $A\#, B\#, C\#$  les points d'intersection resp. de  $Tb^*$  et  $Tc^*$ , de  $Tc^*$  et  $Ta^*$ , de  $Ta^*$  et  $Tb^*$ .

**Donné :**  $(AA\#), (BB\#)$  et  $(BB\#)$  sont concourantes<sup>14</sup>.

### VISUALISATION

- D'après Ayme "Concurrence des droites de Longchamps"<sup>15</sup>,  $(AA^*), (BB^*)$  et  $(BB^*)$  sont concourantes.
- Notons  $M$  ce point de concours.
- **Conclusion :** d'après Rabinowitz<sup>16</sup>,  $(AA\#), (BB\#)$  et  $(BB\#)$  sont concourantes.
- Notons  $N$  ce point de concours.

<sup>14</sup> Salazar J. C., Triangle  $ABC$  inscribed in circle, Message *Hyacinthos* #10148 du 25/07/2004.

<sup>15</sup> Ayme J.-L., II. 6. "Concurrence" des..., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 19.

<sup>16</sup> Ayme J.-L., les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. 3.

**Note historique :**

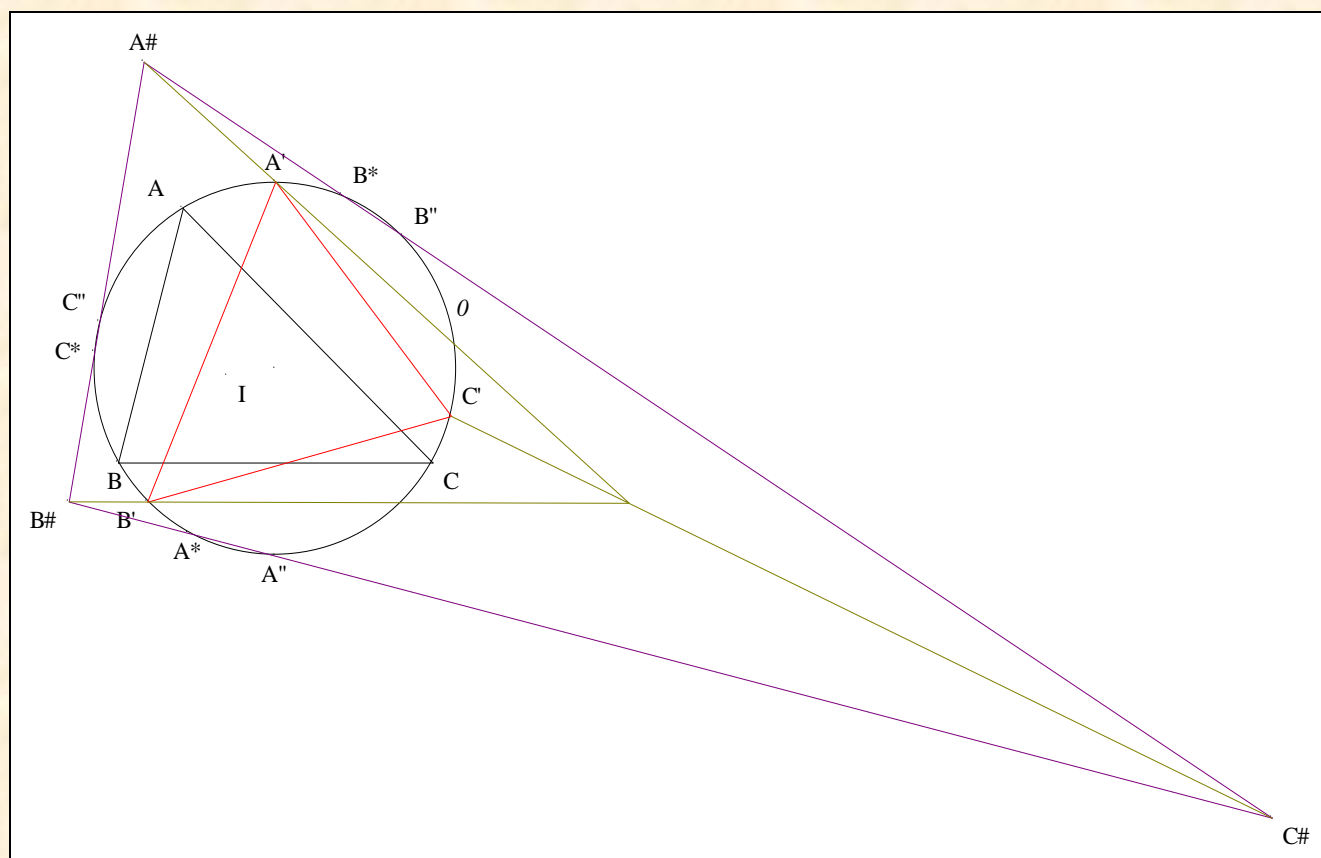
ce résultat a été prouvé par Paul Yiu<sup>17</sup> en 1998 en utilisant les coordonnées barycentriques.

Jean-Pierre Ehrmann<sup>18</sup> précise que N est "the isogonal conjugate of the anticomplement of the isogonal conjugate of M" et il ajoute :

*comme M i.e.  $X_{56}$  est l'isogonal du point de Nagel (Na), il s'en suit que N est l'isogonal de l'anticomplément de Na ou encore que N est l'isogonal du symétrique de Na par rapport à I.*<sup>19</sup>

**Commentaire :**

je n'ai pas de preuve synthétique du résultat de J.-P. Ehrmann.

**2. Seconde "concourance" de l'auteur****VISION****Figure :****Traits :**

ABC

un triangle,

O

le cercle circonscrit à ABC,

A', B', C'

les premiers A, B, C-perpoints de ABC,

<sup>17</sup> Paul Yiu, *Mixtilinear Incircles, III* ; théorème 1 p. 3.

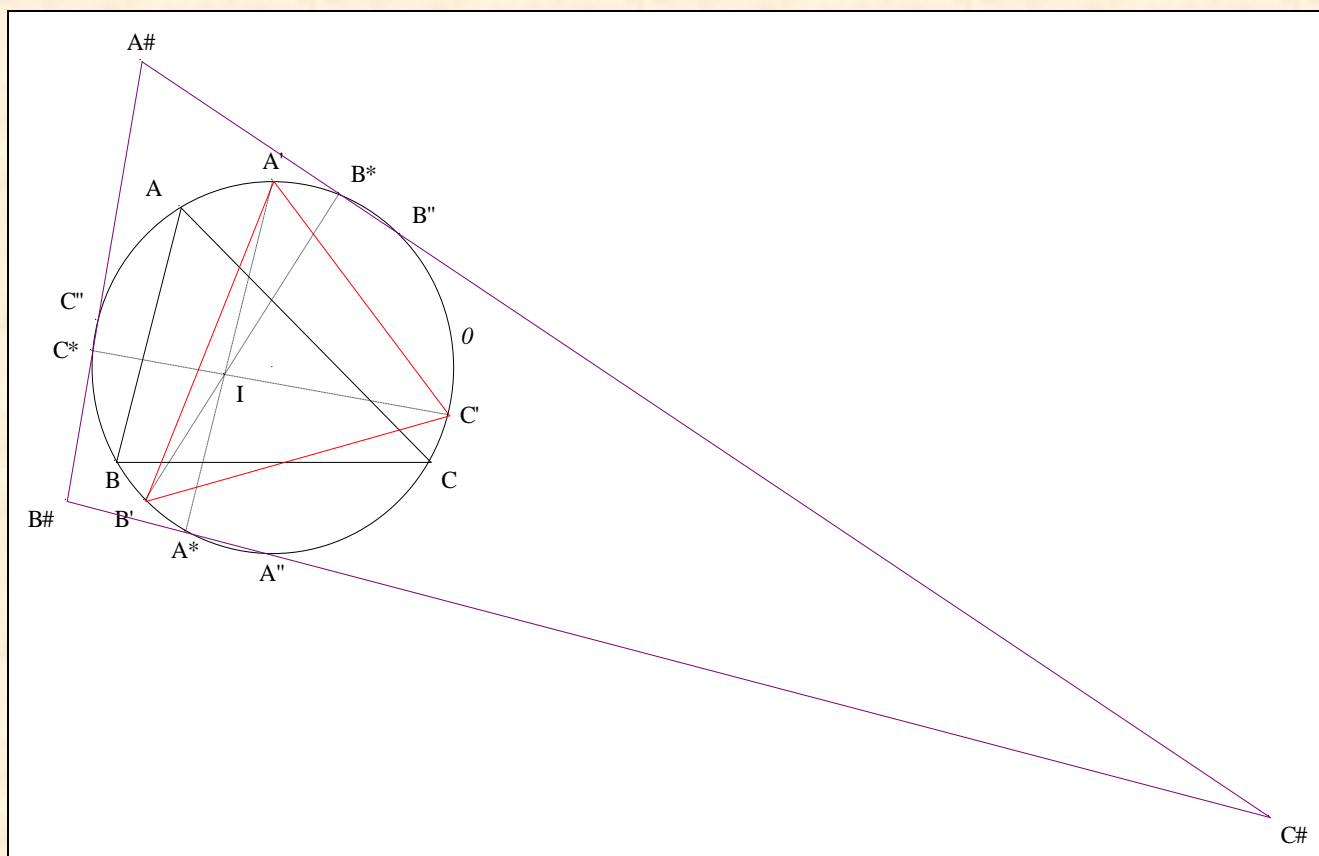
<sup>18</sup> Ehrmann J.-P., Triangle ABC inscribed in circle, Message *Hyacinthos* #10150 du 25/07/2004.

<sup>19</sup> Ayme J.-L., Cinq théorème de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 10-12 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.

|    |                 |   |
|----|-----------------|---|
|    | $A'', B'', C''$ | les seconds A, B, C-perpoints de ABC,   |
|    | $la, lb, lc$    | les A, B, C-cercles de Longchamps,  |
|    | $A^*, B^*, C^*$ | les points de contact de $la, lb, lc$ avec $\mathcal{O}$  |
| et | $A\#, B\#, C\#$ | les points d'intersection resp. de $(B^*B'')$ et $(C^*C'')$ , de $(C^*C'')$ et $(A^*A'')$ , de $(A^*A'')$ et $(B^*B'')$ . |

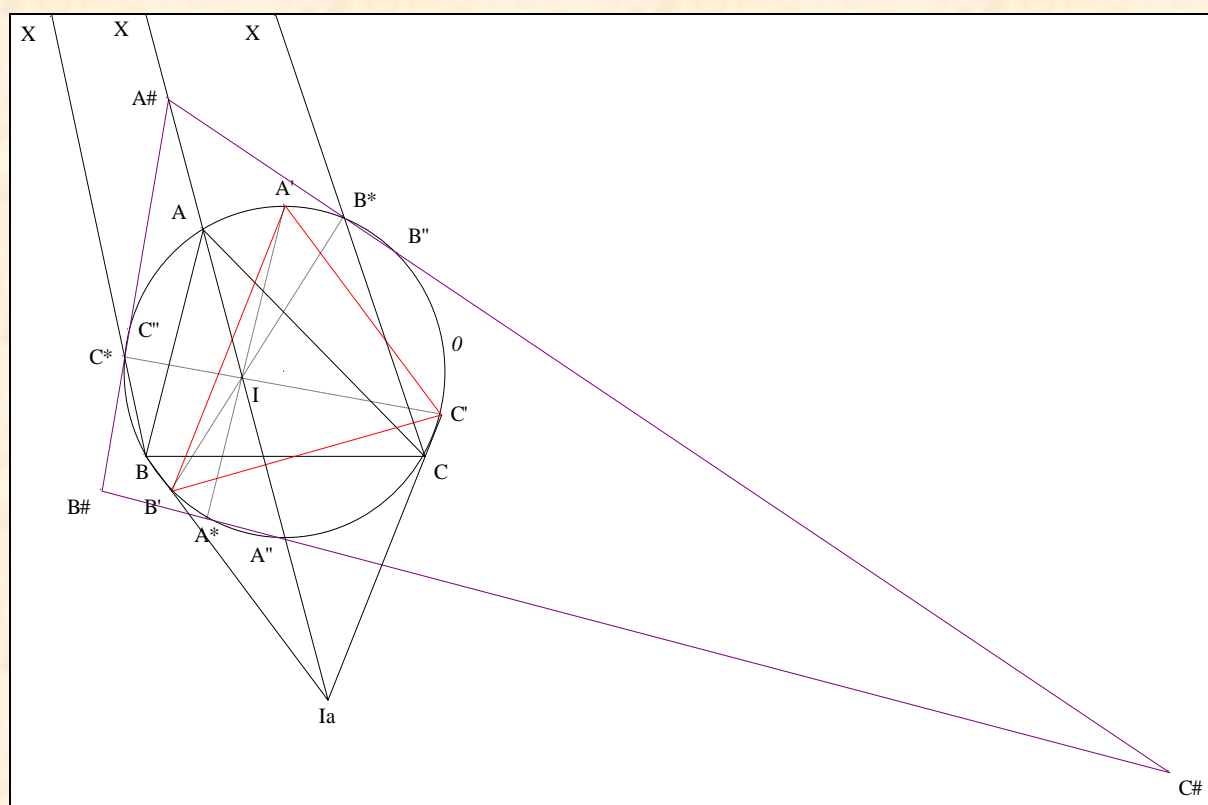
**Donné :**  $(A\#A'), (B\#B'), (C\#C')$  sont concourantes.

### VISUALISATION

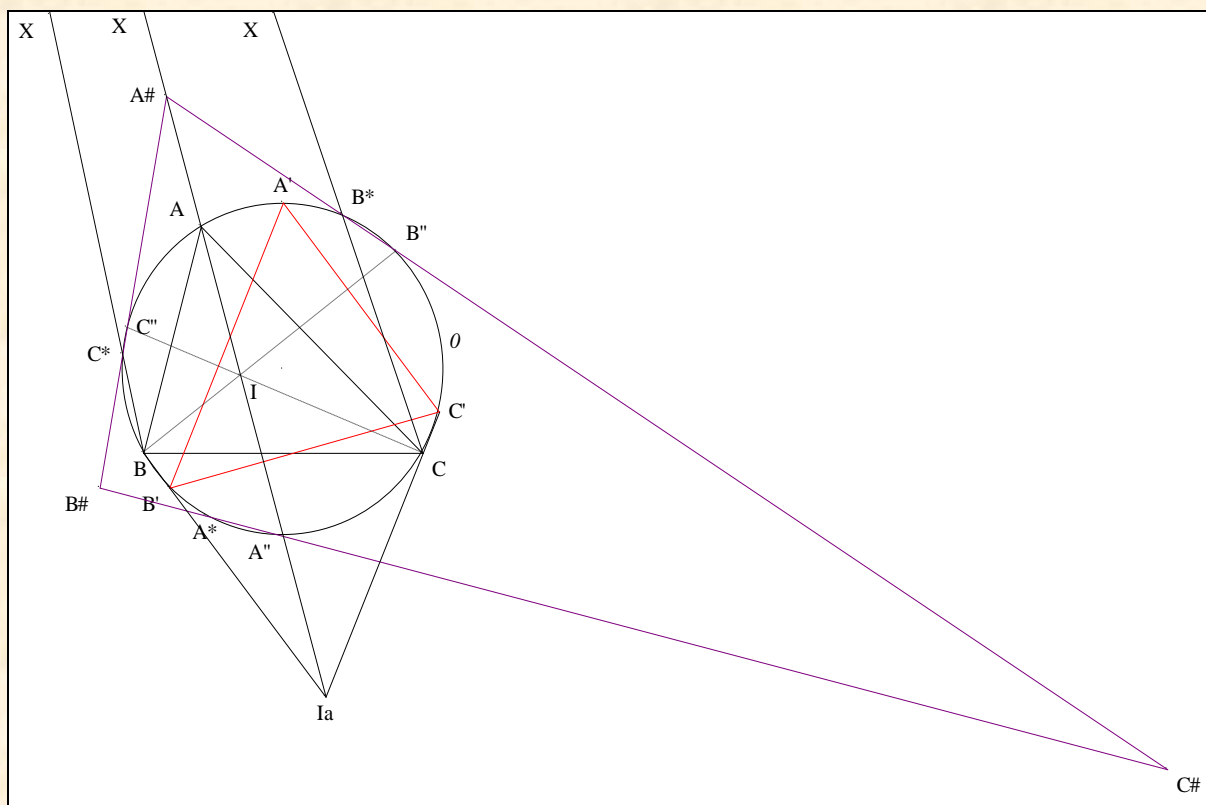


- Scolies :**
  - (1)  $(A'I A^*) \perp (B\#C\#)$
  - (2)  $(B'I B^*) \perp (C\#A\#)$
  - (3)  $(C'I C^*) \perp (A\#B\#)$ .
- Conclusion partielle :** par définition,  $I$  est le centre d'orthologie de  $A'B'C'$  relativement à  $A\#B\#C\#$ .

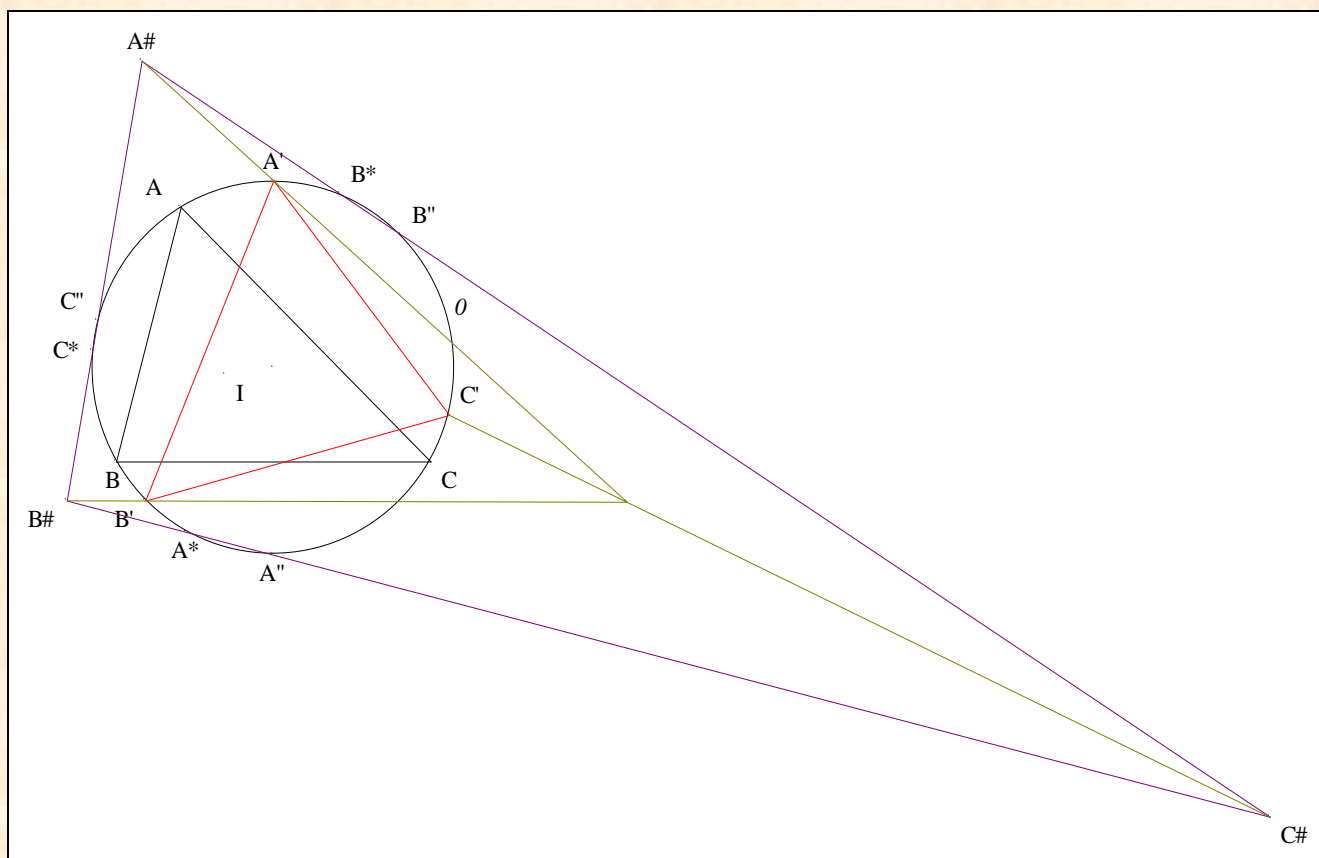




- Notons  $I_a$  le A-excentre de ABC  
et  $X$  le point d'intersection de  $(BC^*)$  et  $(CB^*)$ .
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 5),  
(X|aI) est la pascale de l'hexagone  $C^*BB'B^*CC'C^*$ .
- **Conclusion partielle :**  $X, A, I, A'', I_a$  sont alignés.



- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 5),  
(A#XI) est la pascale de l'hexagone  $C''C^*BB''B^*CC''$ .
- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia,  $X, A\#, A, I, A'', Ia$  sont alignés.
- **Scolie :**  $(A\#AI) \perp (B'C')$ .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que  $(B\#BI) \perp (C'A')$   
 $(C\#CI) \perp (A'B')$ .
- **Conclusion partielle :** par définition,  $I$  est le centre d'orthologie de  $A\#B\#C\#$  relativement à  $A'B'C'$ .
- Par définition, les triangles  $A'B'C'$  et  $A\#B\#C\#$  sont biologiques.



- D'après "Le petit théorème de Sondat"<sup>20</sup>,  $A'B'C'$  et  $A\#B\#C\#$  sont en perspective.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles",  $(A\#A')$ ,  $(B\#B')$ ,  $(C\#C')$  sont concourantes

#### IV. DEUX FAISCEAUX DE CERCLES COAXIAUX

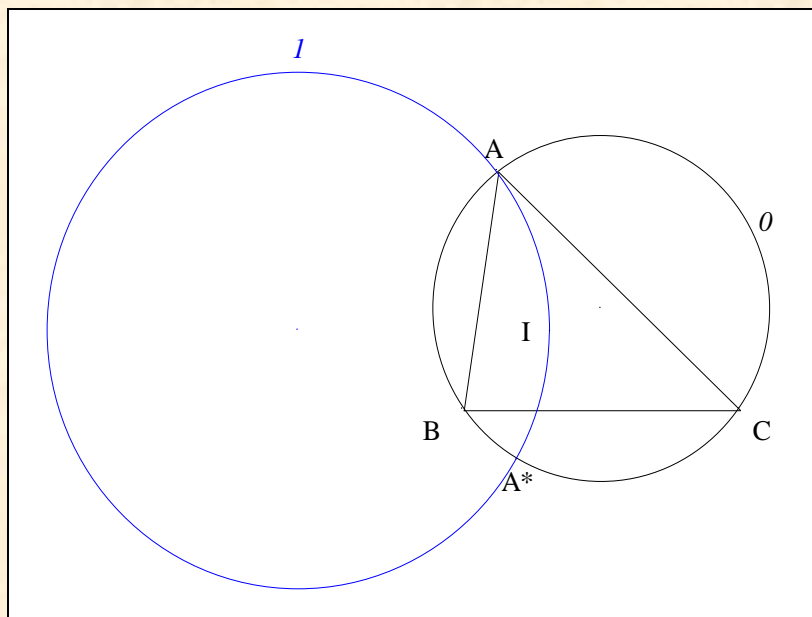
##### 1. Deux cercles orthogonaux

##### VISION

Figure :

<sup>20</sup>

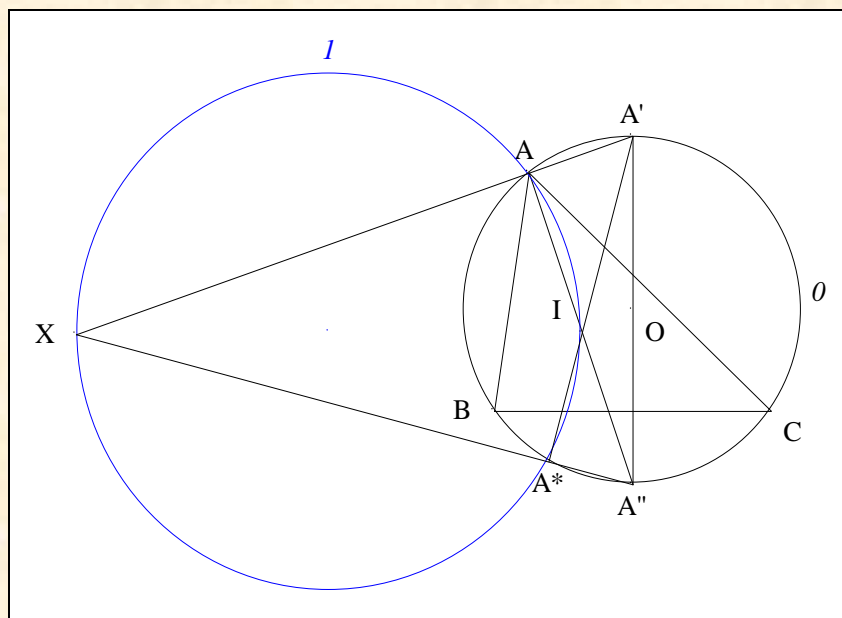
Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>



**Traits :** ABC un triangle,  
 I le centre de ABC,  
 O le cercle circonscrit à ABC,  
 A\* le A-point de Longchamps de ABC  
 et I le cercle passant par A, I, A\*.

**Donné :** I est orthogonal à O.

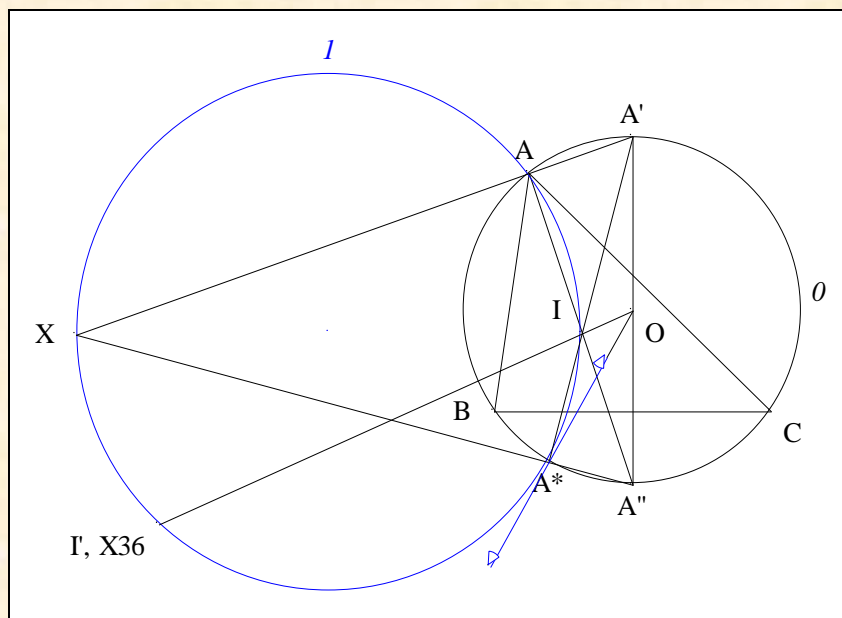
### VISUALISATION



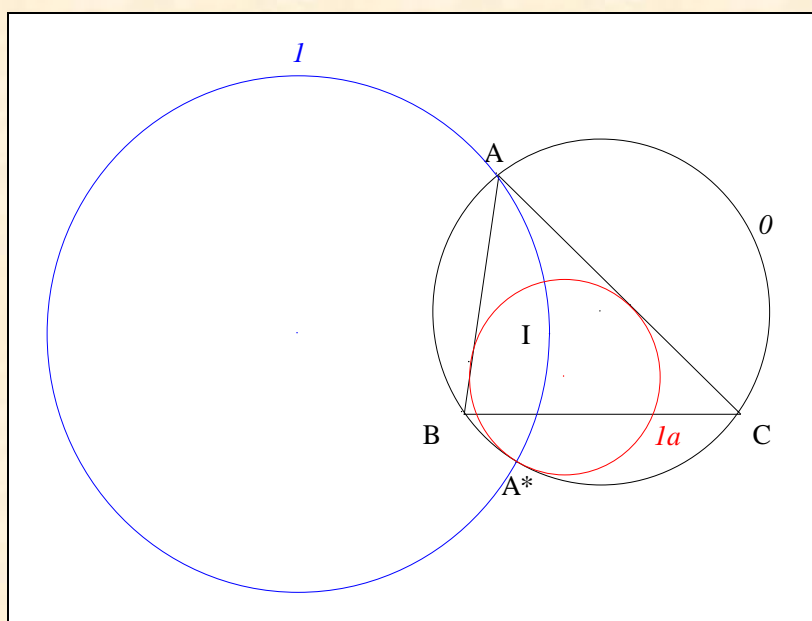
- Notons et A', A'' les premier et second perpoints de ABC  
 X le point d'intersection de (AA') et (A''A').
- Scolies :
  - (1)  $(AA') \perp (AIA'')$
  - (2)  $(A''A') \perp (A''IA')$ .
  - (3)  $[A'A'']$  est un diamètre de O.

- D'après Thalès "Triangle inscritible dans un demi cercle",  $X$  est sur  $I$ .
- **Conclusion** : d'après "Deux cercles orthogonaux" (Cf. Annexe 6),  $I$  est orthogonal à  $O$ .

- Scolies :**
- (1)  $(OA^*)$  est tangente à  $I$  en  $A^*$
  - (2) Le point inverse de  $I$



- Notons  $I'$  le second point d'intersection de  $(OI)$  avec  $I$ .
- **Conclusion** :  $I'$  est le point inverse de  $I$  relativement à  $O$ .
- (3) Conformément à la nomenclature d'ETC,  $I'$  est répertorié sous  $X_{36}$ .
- (4)  $I$  est orthogonal à  $Ia$



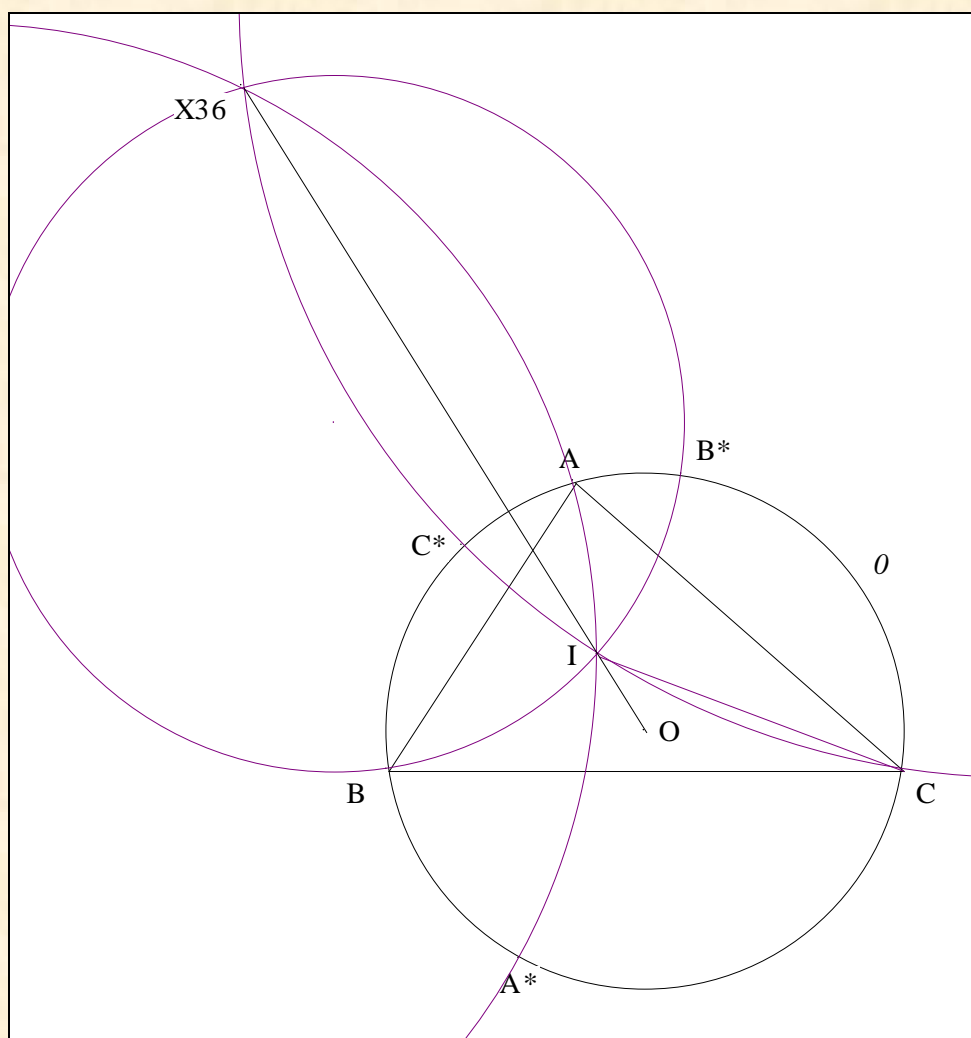
- Notons  $Ia$  le A-cercle de Longchamps de ABC.
- Par définition,  $O$  et  $Ia$  sont tangents en  $A^*$ .
- **Conclusion :** d'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 7),  
 $I$  étant orthogonal à  $O$ ,  $I$  est orthogonal à  $Ia$ .

**Note historique :** la précision  $X_{36}$  a été donné par Jan Vonk.

## 2. Trois cercles coaxiaux de l'auteur

### VISION

**Figure :**



**Traits :**

|                 |  |
|-----------------|--|
| $ABC$           | un triangle,                               |
| $I$             | le centre de $ABC$ ,                       |
| $O$             | le cercle circonscrit à $ABC$ ,            |
| $A^*, B^*, C^*$ | les A, B, C-point de Longchamps de $ABC$ , |
| $Ia$            | le cercle passant par $A, I, A^*$ ,        |

et  $\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$   $\begin{matrix} \text{le cercle passant par } B, I, B^* \\ \text{le cercle passant par } C, I, C^*. \end{matrix}$

**Donné :**  $1, 2, 3$  se recoupent en un second point<sup>21</sup>.

### VISUALISATION

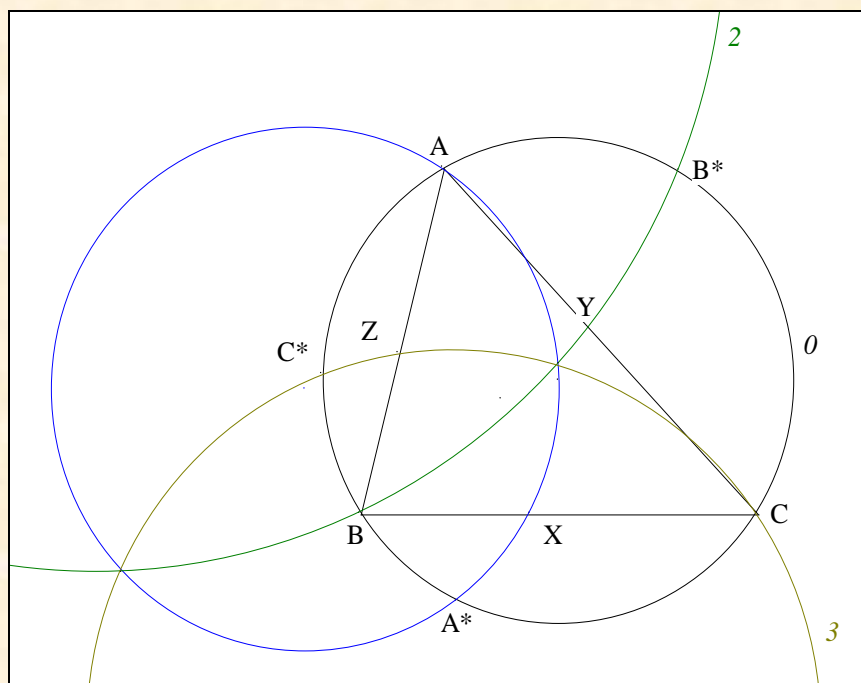
- D'après ce qui précède,  $1$  passe par  $X_{36}$ .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que  $\begin{matrix} 2 \text{ passe par } X_{36} \\ 3 \text{ passe par } X_{36}. \end{matrix}$
- **Conclusion :**  $1, 2, 3$  se recoupent en  $X_{36}$  sur (OI).

**Note historique :** Jan Vonk signale que "this is a nice property, and I don't recall seeing it before".

### 3. Trois cercles coaxiaux de Cosmin Pohoata

#### VISION

**Figure :**



**Traits :**  $\begin{matrix} ABC \\ O \end{matrix}$   $\begin{matrix} \text{un triangle scalène tel que } AB < CA < BC, \\ \text{le cercle circonscrit à } ABC, \end{matrix}$

<sup>21</sup>

Ayme J.-L., A conjecture with mixtilinear incircles, *Mathlinks* (14/11/2008) ; <http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=239593> ;  
Ayme J.-L., Message *Hyacinthos* # 16960 du 14/11/2008 ; <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/16960>.



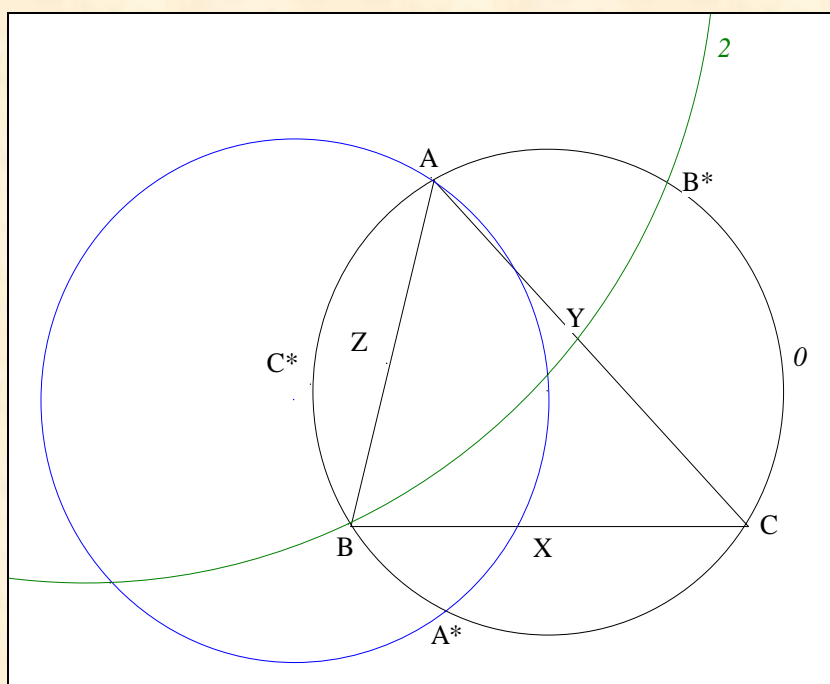
|    |                 |   |
|----|-----------------|---|
|    | $A^*, B^*, C^*$ | les A, B, C-points de Longchamps de ABC   |
|    | $X, Y, Z$       | les pieds des A, B, C-bissectrices de ABC |
|    | 1               | le cercle passant par A, X, $A^*$         |
|    | 2               | le cercle passant par B, Y, $B^*$         |
| et | 3               | le cercle passant par C, Z, $C^*$ .       |

**Donné :** 1, 2, 3 sont coaxiaux<sup>22</sup>.

## VISUALISATION

OU

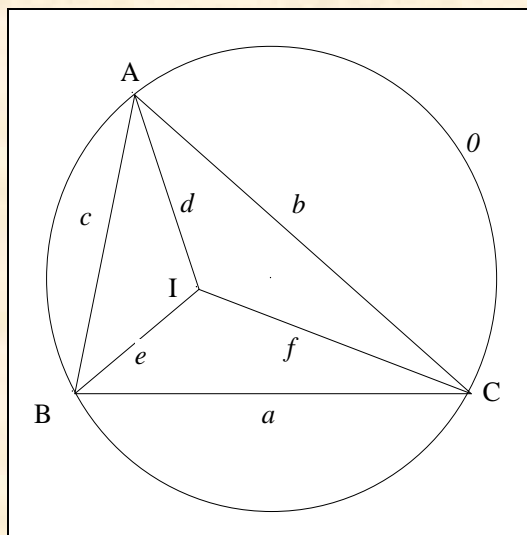
## LA PREMIÈRE PREUVE MÉTRIQUE



- **Scolie :** 1 et 2 sont deux cercles sécants.

<sup>22</sup>

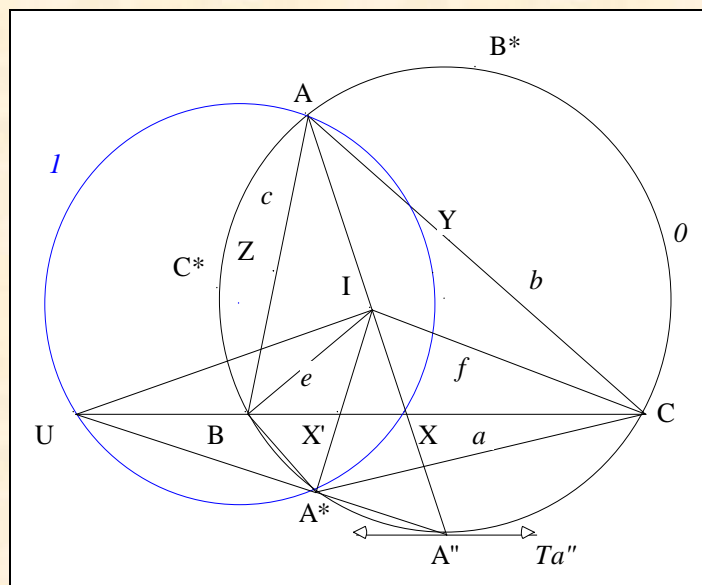
Pohoata C., mixtilinear coaxiality, Message *Hyacinthos* # 15606 du 07/10/2007 ;  
Pohoata C., Zajic V., Generalization of the Apollonius circles ; [http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0807/0807.1131v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0807/0807.1131v1.pdf).



- Notons  $a, b, c$  resp.  $BC, CA, AB$   
et  $d, e, f$  resp.  $AI, BI, CI$ .

- **Scolie :** si,  $c < b < a$  alors,  $d < e < f$ .

- **Notre objectif :** il consiste à montrer que les rapports des puissances de deux points de  $\mathcal{C}$  i.e.  $C$  et  $Z$ , resp. à  $I$  et  $2$ , sont égaux, ce qui revient à dire que  $\mathcal{C}$  passe par les points d'intersection de  $I$  et  $2$ . (Cf. Annexe)



- Notons  $A''$  le second perpoint de  $ABC$ ,  
 $X'$  le point d'intersection de  $(IA'')$  et  $(BC)$ ,  
 $U$  le second point d'intersection de  $(BC)$  avec  $I$   
et  $Ta''$  la tangente à  $O$  en  $A''$ .
- **Scolie :**  $Ta'' \parallel (BC)$ .
- Les cercles  $O$  et  $I$ , les points de base  $A$  et  $A''$ , la moniennes  $(A''AX)$ , les parallèles  $Ta''$  et  $(BC)$ , conduisent au théorème 1' de Reim ; en conséquence,  $A'', A', U$  sont alignés.
- **Scolies :** (1)  $(A'X'I)$  est la  $A'$ -bissectrice du triangle  $A'CB$   
(2)  $(A'I) \perp (A''A'U)$

(3) (IX'A\*) est la I-symédiane du triangle IBC <sup>23</sup>.

• **Conclusion partielle** : la quaterne (B, C, X', U) est harmonique.

• Une chasse "proportionnelle" :

\* la quaterne (B, C, X', U) étant harmonique, 
$$\frac{UB}{UC} = \frac{X'B}{X'C} \quad (1)$$

\* (IX'A\*) étant la I-symédiane de IBC <sup>24</sup>, 
$$\frac{X'B}{X'C} = \frac{e^2}{f^2}$$

par transitivité de la relation =, 
$$\frac{UB}{UC} = \frac{e^2}{f^2} \quad (2)$$

\* à partir de (2), nous avons : 
$$\frac{UB}{e^2} = \frac{UC}{f^2} = \frac{UC - UB}{f^2 - e^2} = \frac{a}{2a(b - c)} \quad (3)$$

\* d'après le théorème de la bissectrice appliqué à ABC <sup>26</sup>, 
$$\frac{XB}{XC} = \frac{c}{b} \quad (4)$$

\* à partir de (4), nous avons : 
$$\frac{XB}{c} = \frac{XC}{b} = \frac{XB + XC}{b + c} = \frac{a}{b + c} \quad (5)$$

\* par "multiplication" de (3) et (5), 
$$\frac{UB.XB}{UC.XC} = \frac{ce^2}{bf^2}$$

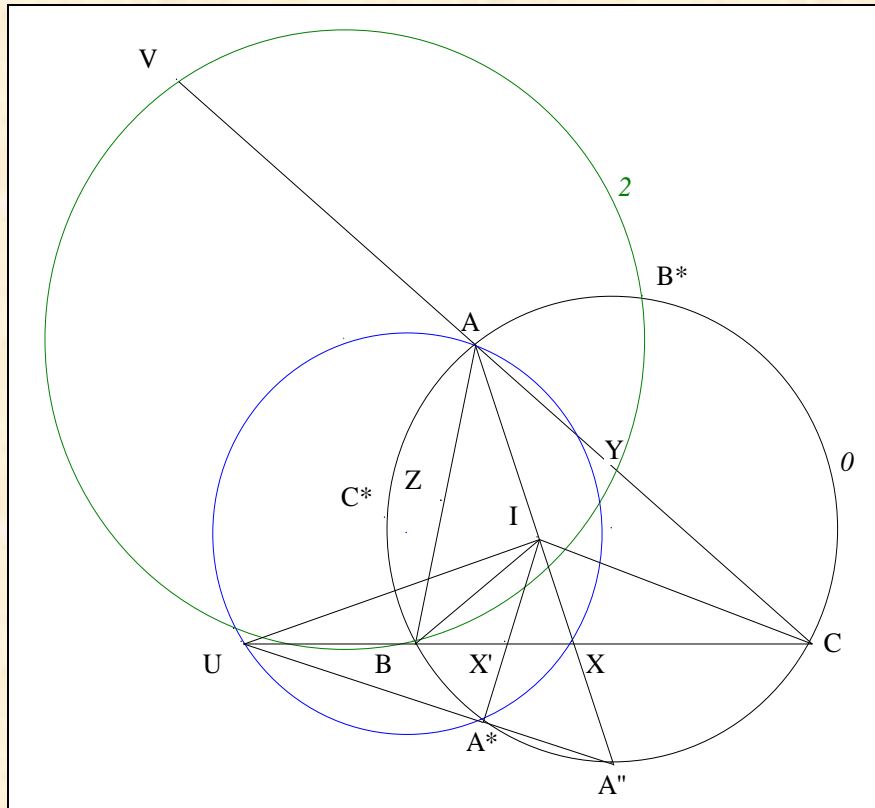
• **Conclusion partielle** : avec (3), (5) 
$$CU.CX = \frac{abf^2}{2(b - c).(b + c)} = \frac{abf^2}{2(b^2 - c^2)} \quad (6)$$

<sup>23</sup> Ayme J.-L., II. 4. Scolie 4 "Une symédiane", A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 18.

<sup>24</sup> Cf. Annexe 9.

<sup>25</sup> Cf. Annexe 11.

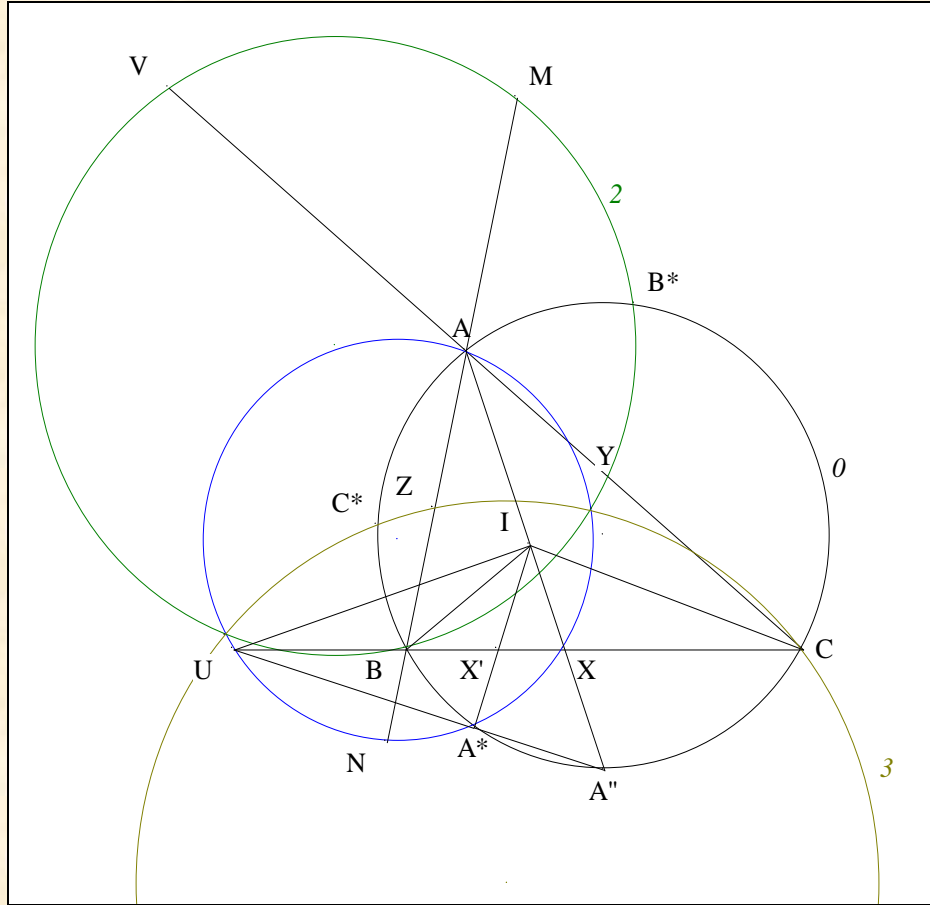
<sup>26</sup> Cf. Annexe 12.



- Notons  $V$  le second point d'intersection de  $(CA)$  avec  $2$ .

- Mutatis mutandis, nous montrerions que 
$$CV.CY = \frac{abf^2}{2.(a^2 - c^2)} \quad (7)$$

- **Conclusion partielle** : à partir de (6) et (7), 
$$\frac{CU.CX}{CV.CY} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} \quad (8)$$



- Notons  $M, N$  les seconds points d'intersection de  $(AB)$  resp. avec  $l, 2$ .
- Une chasse "proportionnelle" :

\* d'après le théorème de la bissectrice appliqué à  $ABC$  <sup>27</sup>, 
$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{b}{a} \quad (9)$$

\* à partir de (9), nous avons : 
$$\frac{ZA}{b} = \frac{ZB}{a} = \frac{ZA + ZB}{b + a} = \frac{c}{a + b} \quad (10)$$

\* puissance de  $B$  par rapport à  $l$ , 
$$BN \cdot BA = BU \cdot BX$$
  
d'où : 
$$BN = \frac{ae^2}{2 \cdot (b - c) \cdot (b + c)} = \frac{ae^2}{2 \cdot (b^2 - c^2)} \quad (11)$$

• Nous avons : 
$$ZN = ZB + BN$$
  
• **Conclusion partielle :** avec (10) et (11), 
$$ZN = \frac{ac}{a + b} + \frac{ae^2}{2 \cdot (b^2 - c^2)} \quad (12)$$

• Mutatis mutandis, nous montrerions que 
$$ZM = \frac{bc}{a + b} + \frac{bd^2}{2 \cdot (a^2 - c^2)} \quad (13)$$

- **Conclusion partielle :**

$$\frac{ZA \cdot ZN}{ZB \cdot ZM} = \frac{2c(b^2 - c^2) + e^2(a + b)}{2c(a^2 - c^2) + d^2(a + b)} \cdot \frac{2(a + b) \cdot (a^2 - c^2)}{2(a + b) \cdot (b^2 - c^2)} = \frac{2c(b^2 - c^2) + e^2(a + b)}{2c(a^2 - c^2) + d^2(a + b)} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} \quad (14)$$

<sup>27</sup>

Cf. Annexe 12.

- Montrons que

$$\frac{CU.CX}{CV.CY} = \frac{ZA.ZN}{ZB.ZM}$$

ceci revient à montrer que 
$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} = \frac{2c(b^2 - c^2) + e^2(a + b)}{2c(a^2 - c^2) + d^2(a + b)} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}$$

i.e. 
$$\frac{2c(b^2 - c^2) + e^2(a + b)}{2c(a^2 - c^2) + d^2(a + b)} = 1$$

i.e. 
$$2c(b^2 - c^2) - 2c(a^2 - c^2) + (a + b)(e^2 - d^2) = 0$$

i.e. 
$$2c(b^2 - c^2) - 2c(a^2 - c^2) + (a + b)2c(a - b) = 0$$

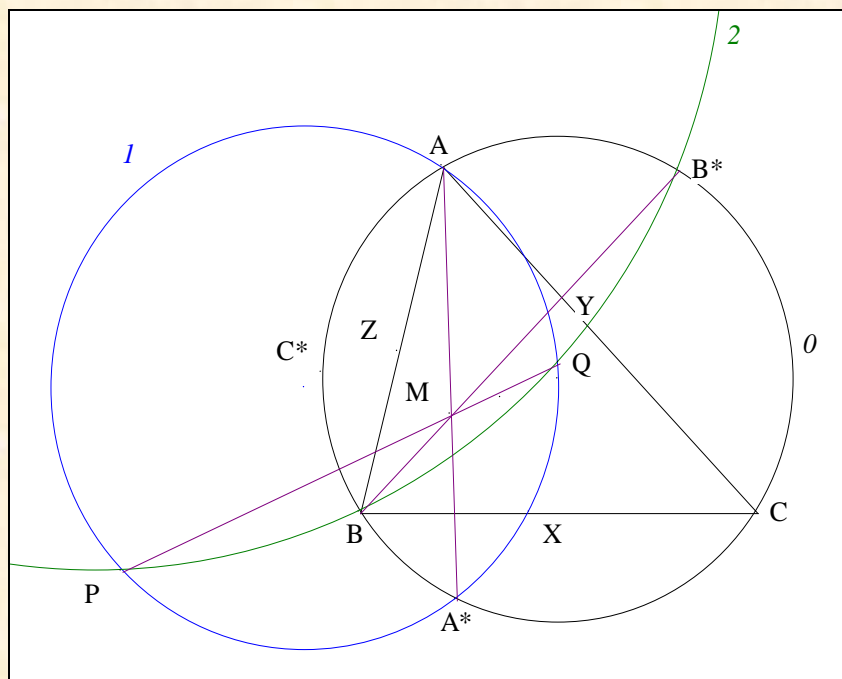
i.e. 
$$2c[b^2 - c^2 - (a^2 - c^2) + (a^2 - b^2)] = 0.$$

- **Conclusion :** d'après Annexe 13,  $I, 2, 3$  sont coaxiaux.

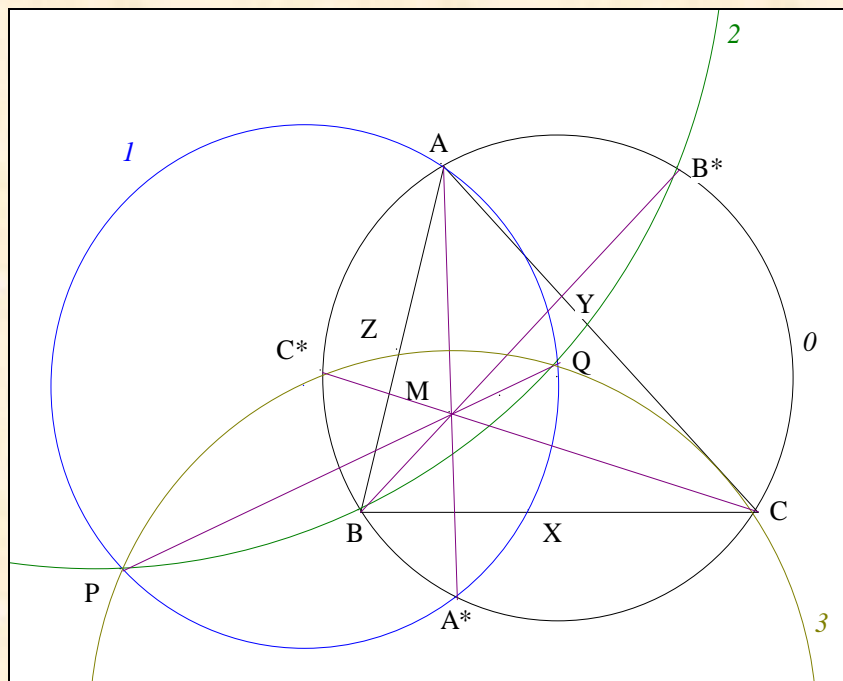
**Note historique :** Cosmin Pohoata a communiqué ce résultat en octobre 2007. Un article signé avec Vladimir Zajic concernant une généralisation du résultat a été publié en Juillet 2008. La preuve proposée utilise l'inversion. Rappelons que Pohoata propose d'intéressants articles de Géométrie sur son site web<sup>28</sup>.

**Commentaire :** l'auteur n'a pas de preuve synthétique à présenter.

**Scolies :** (1) un point remarquable sur l'axe de  $I, 2, 3$



- Notons  $P, Q$  les points d'intersection de  $I$  et  $2$ .
- Nous savons que  $(AA^*), (BB^*), (CC^*)$  sont concourantes en  $M$  i.e.  $X_{56}$ , centre d'homothétie externe des cercles inscrit et circonscrit de  $ABC$ .
- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $0, I, 2$ ,  $(AA^*), (XY)$  et  $(BB^*)$  concourent en  $M$ .



- D'après "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $0, 2, 3$ ,  $(BB^*), (PQ)$  et  $(CC^*)$  concourent en  $M$ .
- **Conclusion :**  $M$  est sur l'axe de  $I, 2, 3$ .

(2) L'isogonal  $X_{58}$  du point de Spieker  $X_{10}$  de  $ABC$  est sur l'axe commun de  $I, 2, 3$ .<sup>29</sup>

## V. QUESTIONS DIVERSES

### 1. Un cercle tourmenté de Longchamps

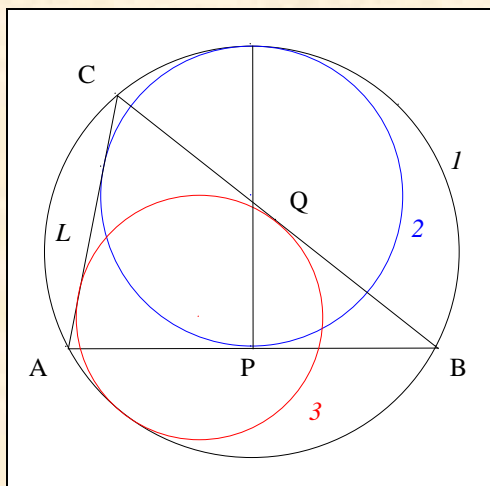
#### VISION

Figure :

<sup>29</sup>

Yiu P., mixtilinear coaxiality, Message *Hyacinthos* # 15607 du 07/10/2007 ;  
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/15607>



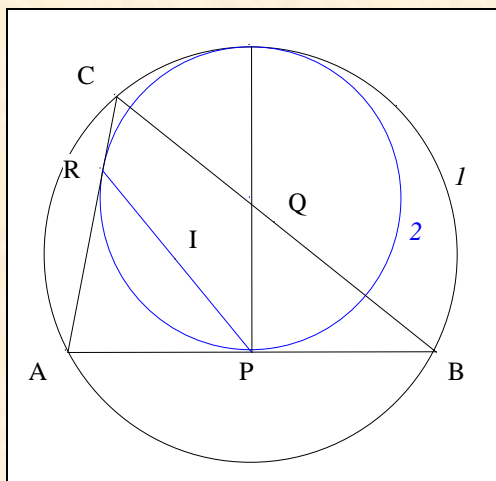


**Traits :**

- $I$  un cercle,
- $A, B$  deux points de  $I$ ,
- $P$  le milieu de  $[AB]$ ,
- $2$  le cercle tangent à  $(AB)$  en  $P$  et à  $I$ ,
- $L$  la seconde tangente à  $2$  issue de  $A$ ,
- $C$  le second point d'intersection de  $L$  avec  $I$ ,
- $Q$  le milieu de  $[BC]$
- et  $3$  le cercle tangent à  $(CB)$  en  $Q$  et à  $(CA)$ .

**Donné :**  $I$  et  $3$  sont tangents<sup>30</sup>.

### VISUALISATION



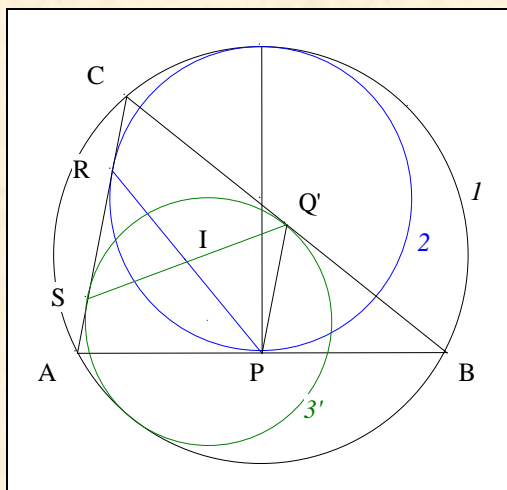
- Notons  $R$  le point de contact de  $2$  avec  $(AC)$
- et  $I$  le centre du triangle  $ABC$ .

- **Scolie :**  $2$  est le A-cercle de Longchamps de  $ABC$ .

- D'après "II. 3. Le résultat de Deprez, scolie 1" <sup>31</sup>,  $I$  est le milieu de  $[PR]$ .

<sup>30</sup> APMO (2006) problème 4.

<sup>31</sup> Ayme J.-L., II. 3. Le résultat de Deprez, A new mixtilinear incircles adventure I, G.G.G. vol. 4, p.14.



- Notons  $3'$  le C-cercle de Longchamps de ABC,  
 $S$  le point de contact de  $3'$  avec (AC)  
 et  $Q'$  le point de contact de  $3'$  avec (BC).
- D'après "II. 3. Le résultat de Deprez, scolie 1" <sup>32</sup>,  $I$  est le milieu de  $[SQ']$ .
- Le quadrilatère  $PQ'RS$  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;  
 en conséquence,  $(PQ') \parallel (RS)$  ou encore  $(PQ') \parallel (AC)$ .
- D'après Thalès "Le théorème de la droite des milieux",  $Q'$  est le milieu de  $[BC]$  ;  
 en conséquence,  $Q'$  est confondu avec  $Q$  ;  
 il s'ensuit que  $3'$  est confondu avec  $3$ .
- **Conclusion :**  $1$  et  $3$  sont tangents.

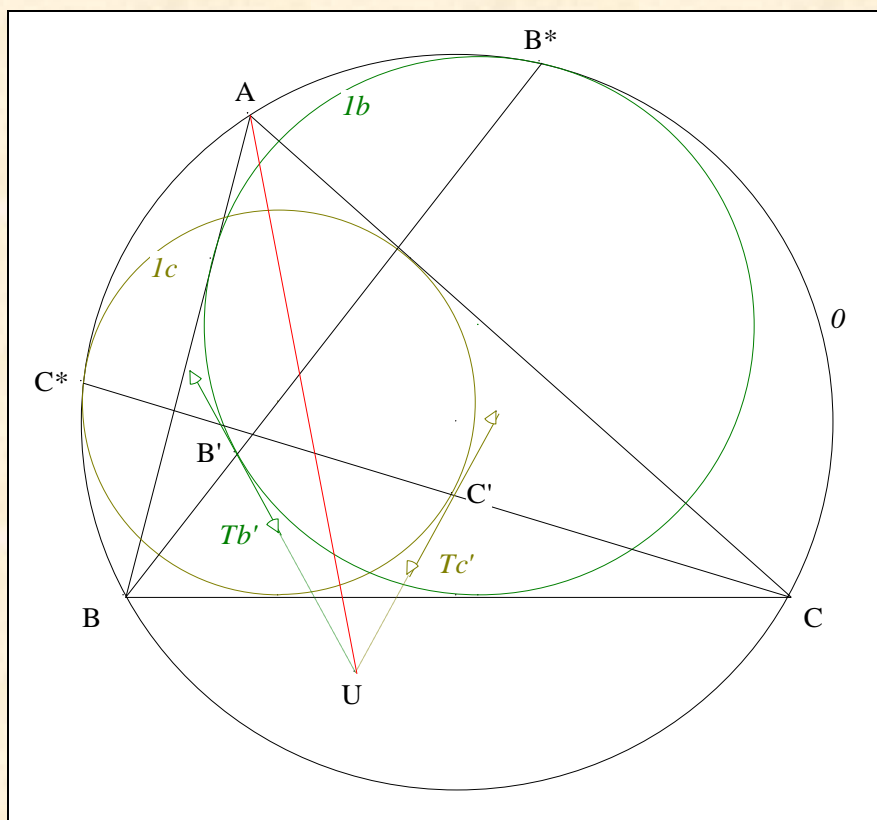
## 2. "Concurrence" sur la A-symédiane

### VISION

Figure :

<sup>32</sup>

Ayme J.-L., II. 3. Le résultat de Deprez, A new mixtilinear incircles adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 14.

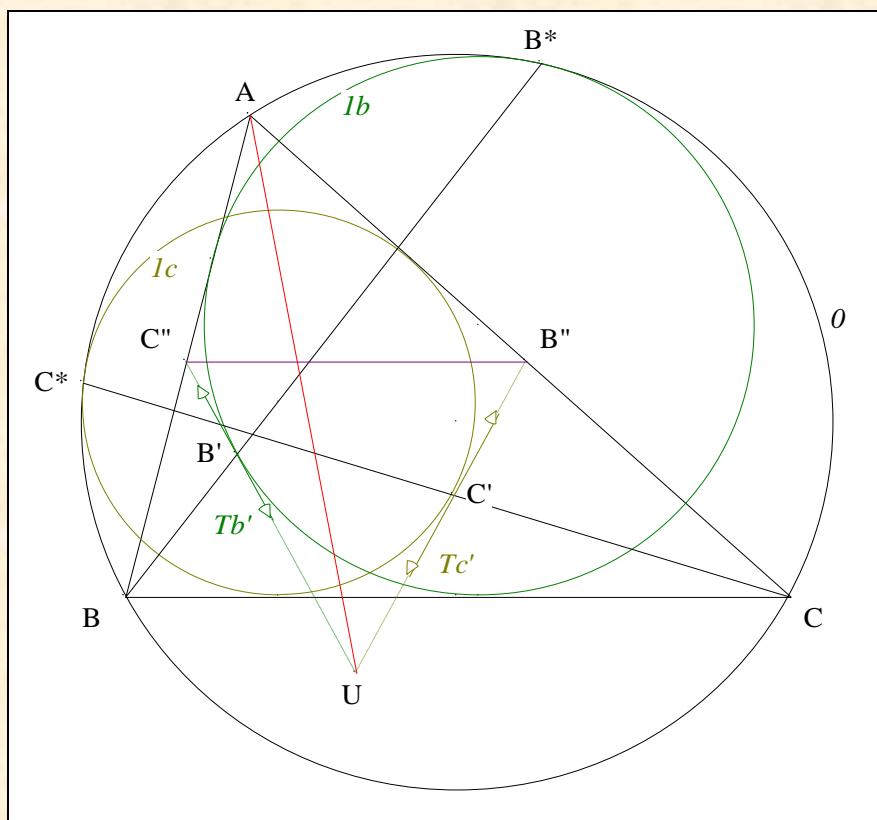


|                 |  |   |
|-----------------|--|---|
| <b>Traits :</b> | ABC  | un triangle,  |
|                 | $O$  | le cercle circonscrit à ABC,  |
|                 | $Ib, Ic$                                   | les B, C-cercle de Longchamps de ABC,   |
|                 | $B^*, C^*$                                 | les B, C-points de Longchamps de ABC,   |
|                 | $B', C'$                                   | les seconds points d'intersection de $(BB^*)$ avec $Ib$ , de $(CC^*)$ avec $Ic$ , |
|                 | $Tb', Tc'$                                 | les tangentes resp. à $Ib$ en $B'$ , à $Ic$ en $C'$ ,                             |
| et              | $U$  | le point d'intersection de $Tb'$ et $Tc'$ .                                       |
| <b>Donné :</b>  | $U$ est sur la A-symédiane de $ABC^{33}$ . |   |

### VISUALISATION

<sup>33</sup>

Ayme J.-L., With mixtilinear incircle, perhaps a new center?, Message *Hyacinthos* #16965 du 15/11/2008.



- Notons  $B'', C''$  les points d'intersection resp. de  $Tc'$  et  $(AC)$ , de  $Tb'$  et  $(AB)$ .
- D'après Ayme "La tangente de Bankoff, scolie 3"<sup>34</sup>,
 

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| (1) | $BC'' = 4r^2/c\sin^2 \beta$  |
| (2) | $CB'' = 4r^2/b\sin^2 \gamma$ |
- D'après la loi des sinus appliqué à  $ABC$ ,
 

|  |
|--|
| $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} ;$ |
|--|

en conséquence,

$$\frac{BC''}{BA} = \frac{CB''}{CA} .$$
- **Conclusion partielle :** d'après Thalès,  $(B''C'') \parallel (BC)$ .

<sup>34</sup>

Ayme J.-L., V. 3. La tangente de Bankoff, A new mixtilinear incircles adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 49.



Francisco Javier Garcia Capitan, dans sa réponse, a confirmé ce résultat en donnant la nature du centre de perspective i.e. le point symédian de ABC.

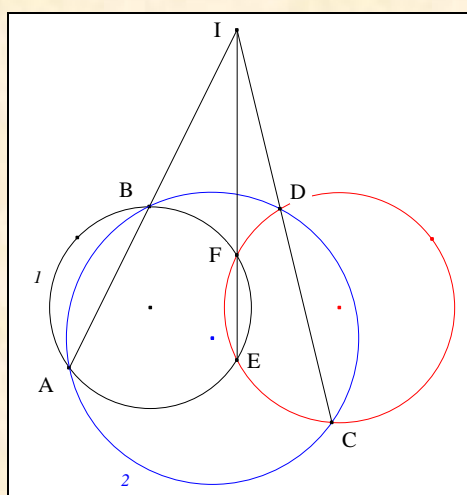
Vladimir Zajic<sup>35</sup> a donné par la suite proposé une approche similaire concernant la position de U.

Rappelons que Garcia Capitan propose un intéressant site de Géométrie<sup>36</sup>.

- Scolies :**
- (1) le triangle déterminé par les A, B, C-tangentes de Bankoff de ABC est orthologique à ABC.
  - (2) le centre O de  $\theta$  est l'un de deux pôles d'orthologie.

## VI. ANNEXE

### 1. Le théorème des trois cordes



- Traits :**
- $I, 2$  deux cercles sécants,
  - A, B les points d'intersection de  $I$  et  $2$ ,
  - C, D deux points de  $2$ ,
  - E, F deux points de  $I$
- et I le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

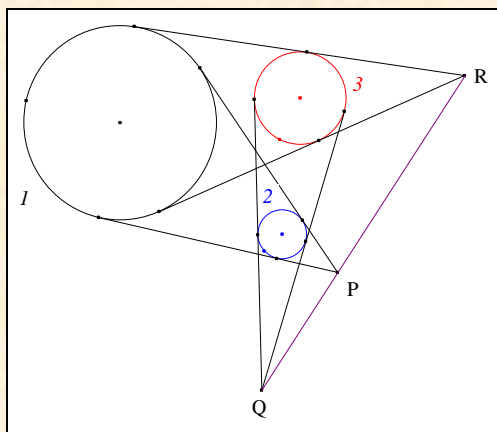
- Donné :** les points C, D, E et F sont cocycliques  
*si, et seulement si,*  
 les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

### 2. La droite de D'Alembert<sup>37</sup>

<sup>35</sup> Ayme J.-L., Mixtilinear incircles and symmedian, *Mathlinks* (30/11/2008) ;  
<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=242605>.

<sup>36</sup> <http://garcicapitan.auna.com/>

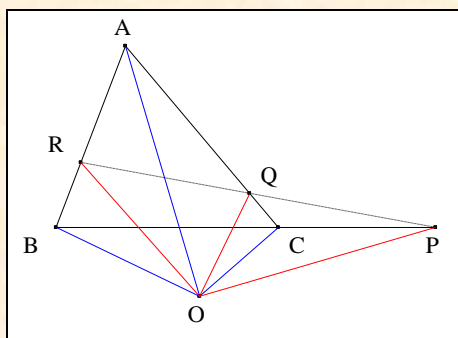
<sup>37</sup> Chasles M., Note VI, *Aperçu historique* (1837) 293.



**Traits :** 1, 2, 3 trois cercles deux à deux extérieurs  
 et P, Q, R les points d'intersections des tangentes communes extérieures de 1 et 2, de 2 et 3, de 3 et 1.

**Donné :** P, Q et R sont alignés.

### 3. Orthotransversale<sup>38</sup>

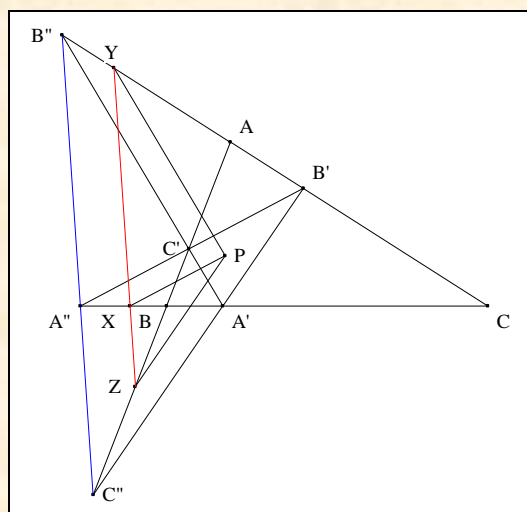


**Traits :** ABC un triangle,  
 O un point,  
 P le point d'intersection de la perpendiculaire à (OA) en O, avec (BC),  
 Q le point d'intersection de la perpendiculaire à (OB) en O, avec (CA)  
 et R le point d'intersection de la perpendiculaire à (OC) en O, avec (AB).

**Donné :** P, Q et R sont alignés.

### 4. Parallèle à un axe de perspective

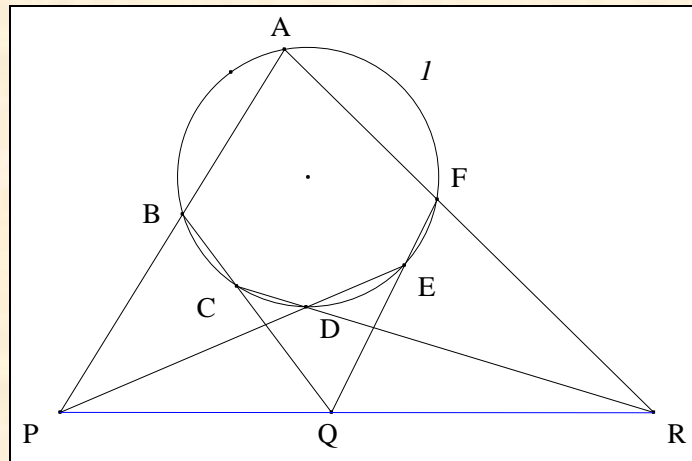




**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $P$  un point,  
 $A'B'C'$  le triangle P-cévien de  $ABC$ ,  
 $(A''B''C'')$  la polaire trilinéaire de  $P$   
 $X$  le point d'intersection de la parallèle à  $(B'C')$  passant par  $P$  avec  $(BC)$ ,  
 $Y$  le point d'intersection de la parallèle à  $(C'A')$  passant par  $P$  avec  $(CA)$   
 et  $Z$  le point d'intersection de la parallèle à  $(A'B')$  passant par  $P$  avec  $(AB)$ .

**Donné :**  $X, Y$  et  $Z$  sont alignés et  $(XYZ) \parallel (A''B''C'')$ .

### 5. Hexagramma mysticum<sup>39</sup>



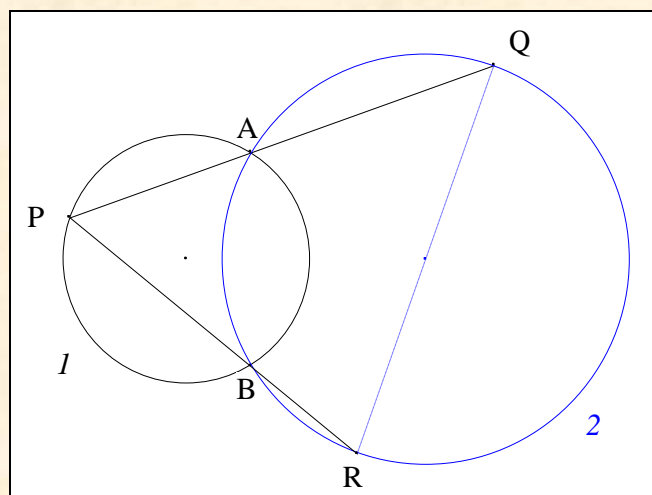
**Traits :**  $I$  un cercle,  
 $ABCDEF$  un hexagone tels que les sommets  $A, B, C, D, E$  soient sur  $I$ ,  
 et  $P, Q, R$  les points d'intersection resp. de  $(AB)$  et  $(DE)$ ,  $(BC)$  et  $(EF)$ ,  $(CD)$  et  $(FA)$ .

**Donné :**  $F$  est sur  $I$  si, et seulement si,  $P, Q$  et  $R$  sont alignés.

### 6. Deux cercles orthogonaux<sup>40</sup>

<sup>39</sup> Pascal B. (1640)

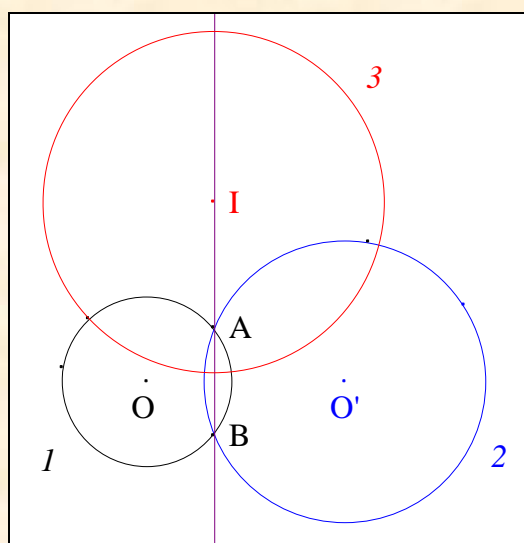
<sup>40</sup> Altshiller-Curt N., Note on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* (34) 500-501.



**Traits :**  $I, 2$  deux cercles sécants,  
 $A, B$  les deux points d'intersection de  $I$  et  $2$ ,  
 $P$  un point de  $I$   
 et  $Q, R$  les seconds points d'intersection resp. de  $(PA)$ ,  $(PB)$  avec  $2$ .

**Donné :**  $I$  et  $2$  sont orthogonaux si, et seulement si,  $(QR)$  est une droite diamétrale de  $2$ .

### 7. Axe radical de deux cercles sécants<sup>41</sup>

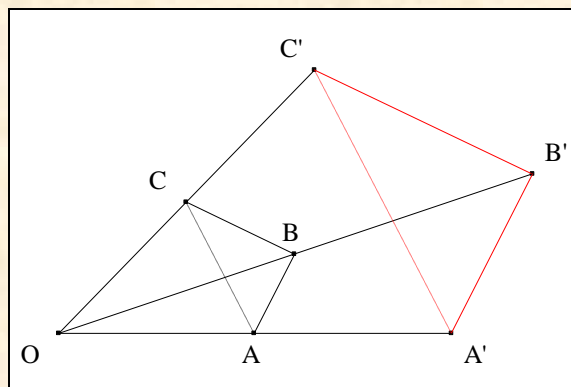


**Traits :**  $I, 2$  deux cercles sécants,  
 $O, O'$  les centres de  $I, 2$ ,  
 $A, B$  les points d'intersection de  $I$  et  $2$ ,  
 $3$  un cercle orthogonal à  $2$   
 et  $I$  le centre de  $3$ .

**Donné :**  $I$  est sur la droite  $(AB)$  si, et seulement si,  $3$  est orthogonal à  $2$ .

### 8. Le théorème faible de Desargues

<sup>41</sup> Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier **16** (1813) 124-214.

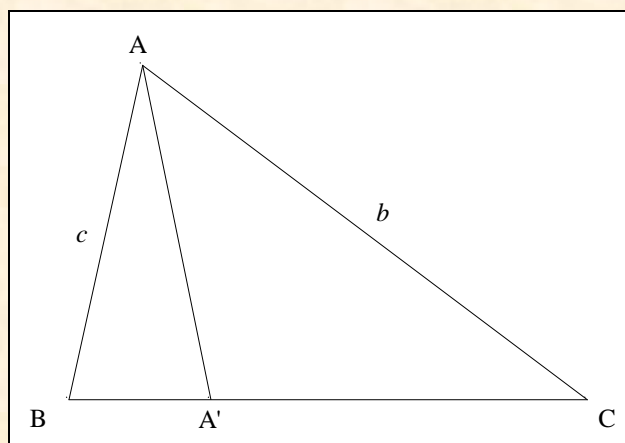


**Hypothèses :**  $ABC$  un triangle,  
 et  $A'B'C'$  un triangle tel que

- (1)  $(AA')$  et  $(BB')$  soient concourantes en  $O$
- (2)  $(AB)$  soit parallèle à  $(A'B')$
- (3)  $(BC)$  soit parallèle à  $(B'C')$

**Conclusion :**  $(CC')$  passe par  $O$  si, et seulement si,  $(AC)$  est parallèle à  $(A'C')$ .

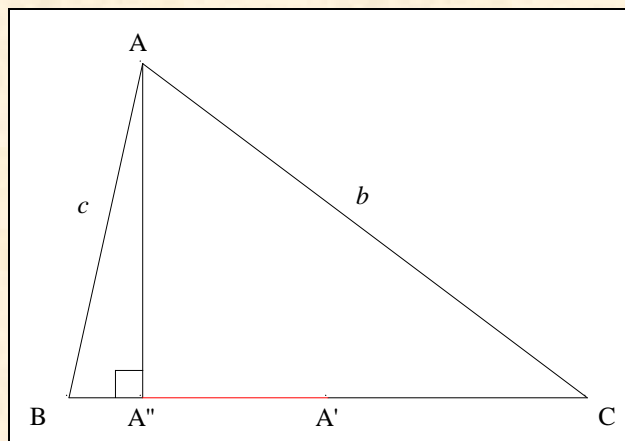
### 9. Une formule de Newton



**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $a, b, c$  trois réels tels que  $BC = a, AC = b, AB = c$   
 et  $A'$  le pied de la  $A$ -symédiane de  $ABC$ .

**Donné :**  $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c^2}{b^2}$ .

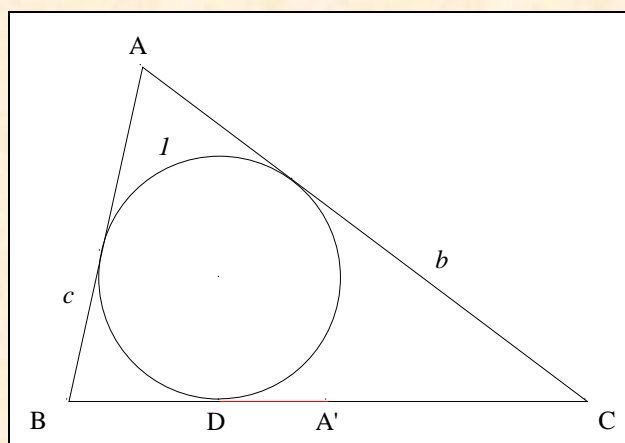
### 10. Une formule



**Traits :**  $ABC$  un triangle tel que  $AB < AC$ ,  
 $a, b, c$  trois réels tels que  $BC = a, AC = b, AB = c$ ,  
 $A'$  le milieu de  $[BC]$   
 et  $A''$  le pied de la  $A$ -hauteur de  $ABC$

**Donné :**  $b^2 - c^2 = 2.a. A''A'$

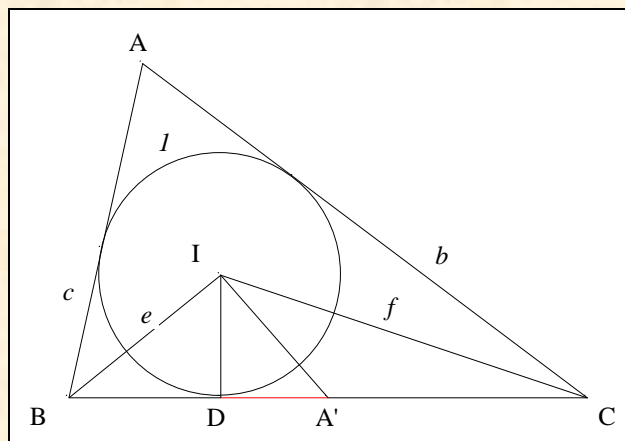
### 11. Une formule



**Traits :**  $ABC$  un triangle tel que  $AB < AC$ ,  
 $b, c$  deux réels tels que  $AC = b, AB = c$ ,  
 $I$  le cercle inscrit à  $ABC$ ,  
 $D$  le point de contact de  $I$  avec  $(BC)$   
 et  $A'$  le milieu de  $[BC]$ .

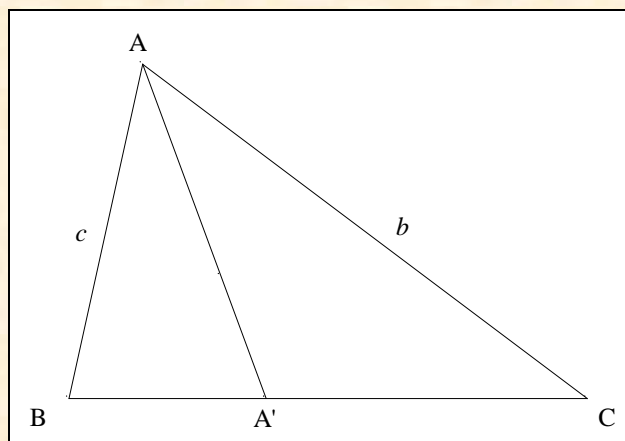
**Donné :**  $2.DA' = b - c$ .

**Application au triangle BIC**



- Notons  $I$  le centre de  $I$   
et  $e, f$  resp.  $IB, IC$ .
- D'après Annexe 10.,  $f^2 - e^2 = 2.a.DA'$ .
- Conclusion : d'après Annexe 12.,  $f^2 - e^2 = 2.a.(b - c)$ .

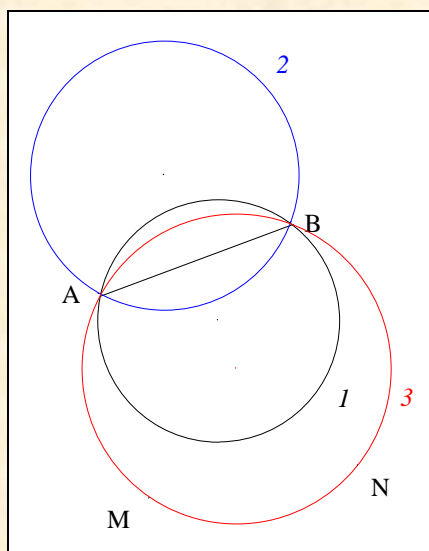
## 12. Le théorème de la bissectrice



**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $A'$  le pied de la A-bissectrice de  $ABC$   
et  $a, b$  les mesures resp. de  $[AC], [AB]$ .

**Donné :**  $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ .

## 13. Trois cercles à points de base



**Traits :**  $1, 2$  deux cercles sécants,  
 $A, B$  les points d'intersection de  $1$  et  $2$ ,  
 $M, N$  deux points,  
 $P_1(M), P_2(M)$  les puissances de  $M$  resp. à  $1, 2$   
 et  $P_1(N), P_2(N)$  les puissances de  $N$  resp. à  $1, 2$ .

**Donné :**  $M, N, A, B$  sont cocycliques *si, et seulement si,*

$$\frac{P_1(M)}{P_2(M)} = \frac{P_1(N)}{P_2(N)} .$$