

ÉLÉGANCE 9

SERBIA NATIONAL OLYMPIAD 2013, PROBLEM 3

REVISITED

BY

THE AUTHOR

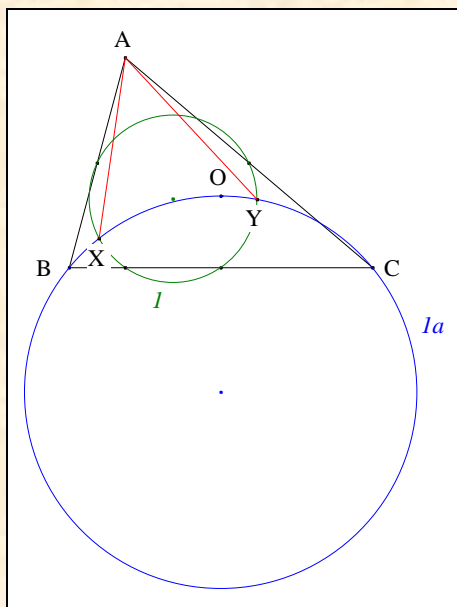


*Qu'est ce qui vous plait le plus dans une preuve synthétique ?
C'est son élégance. ¹*

*What you like most in a synthetic proof ?
Its elegance.*

*¿Qué es lo que más gusta en una prueba sintética ?
Su elegancia.*

Jean - Louis AYME ²



Résumé.

L'auteur revisite d'une façon personnelle le problème 3 des Olympiades Nationales de Mathématiques de Serbie en 2013. Des développements ainsi qu'un lexique sont présentés.

¹

²

Qualité de ce qui est exprimé avec justesse et agrément, avec une netteté sobre, sans lourdeur
St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 29/02/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author revisits in a personal way the problem **3** of the Serbia National Mathematic Olympiad in 2013. Developments as well as a glossary are presented.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

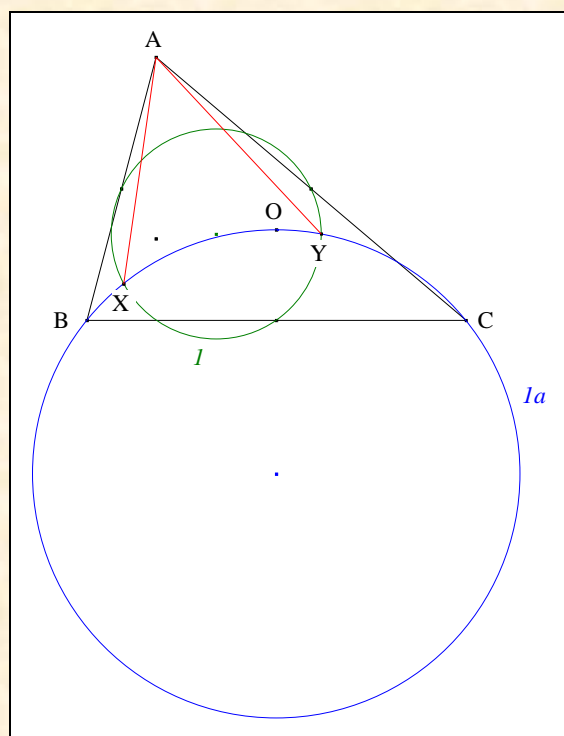
Resumen. El autor retoma de manera personal el problema **3** Olimpiadas matemáticas nacionales de Serbia en 2013. Se presenta los desarrollos, así como un glosario.
Las figuras están en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

Sommaire	
A. Le problème 3	3
B. Visualisation	6
C. Des résultats	9
1. Deux parallèles	
2. Par le point N	
3. Deux perpendiculaires	
D. Un point remarquable sur $l'a$	13
1. Un alignement	
2. Une "concourance"	
3. Un point sur (XY)	
4. Le cercle $l'a$	
E. Appendice	19
1. Un rapport	
2. Un cercle passant par le centre d'un cercle	
F. Lexique	24

A. LE PROBLÈME 3 ³

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 I le cercle d'Euler ⁴ de ABC,
 Ia la A-cercle de Kosnitza ⁵ de ABC
 et X, Y les points d'intersection de Ia et I.

Donné : $\angle BAX = \angle YAC$.

Commentaire : cette élégante figure a attiré l'attention de l'auteur.

³ Art of Problems solving ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c3638_2013_serbia_national_math_olympiad
 Sitio : Triangulos cabri du professeur Ricardo Barosso ; Problema 809 ; <http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>

⁴ Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler..., G.G.G. vol. 2, p. 4-5 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

⁵ il passe par B, O et C

Note historique :



Serbian Mathematical Olympiad 2013

for high school students

Novi Sad, April 5–6, 2013



6

SERBIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

for high school students

Novi Sad, 05.04.2013.

First Day

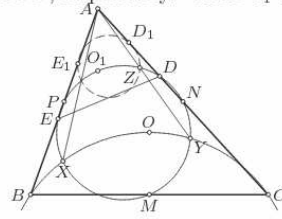
3. Let M , N and P be the midpoints of sides BC , AC and AB respectively, and O be the circumcenter of an acute-angled triangle ABC . The circumcircles of triangles BOC and MNP intersect at distinct points X and Y inside the triangle ABC . Prove that

$$\angle BAX = \angle CAY.$$

(Marko Djikić)

3. Denote by k_1 and k_2 the circles MNP and BOC , respectively. Circle k_1 is the nine-point circle of $\triangle ABC$ and passes through the feet D, E of the altitudes BD and CE and the midpoint O_1 of AH , where H is the orthocenter of $\triangle ABC$.

We claim that the second intersection point Z of AY and k_1 lies on the nine-point circle k_3 of triangle ADE . We as-

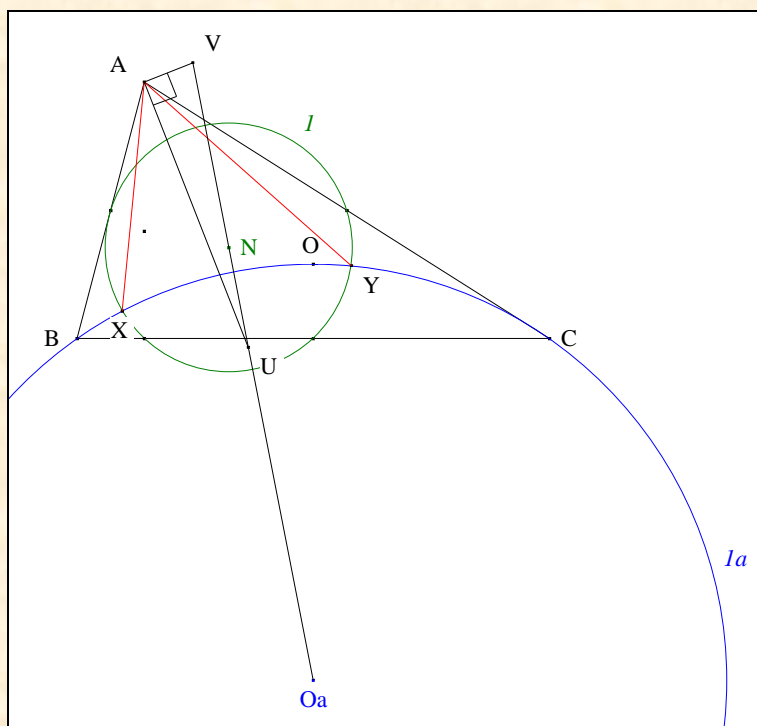


sume that Z is between A and Y ; the other case is analogous. Let D_1 and E_1 be the midpoints of AD and AE , respectively. Since $AY \cdot AZ = AD \cdot AN = AD_1 \cdot AC$, points Y, Z, C, D_1 lie on a circle, implying $\angle AZD_1 = \angle ACY$. Analogously, $\angle AZE_1 = \angle ABY$, and therefore $\angle D_1ZE_1 = \angle AZD_1 + \angle AZE_1 = \angle ACY + \angle ABY = \angle BYC - \angle BAC = \angle BAC$. Hence Z is on k_3 .

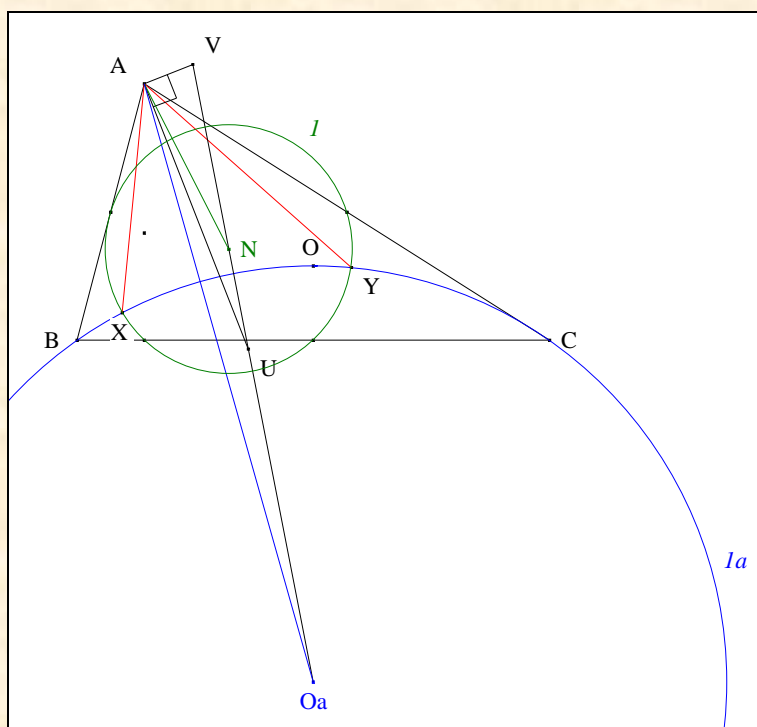
Since O_1 is the circumcenter of $\triangle ADE$, the similarity mapping $\triangle ABC$ onto $\triangle ADE$ maps k_1 to k_2 and k_2 to k_3 , so it takes point $X \in k_1 \cap k_2$ to point $Z \in k_2 \cap k_3$. Therefore $\angle BAX = \angle DAZ = \angle CAY$.

Second solution. Apply the inversion with center A and power $\frac{1}{2}AB \cdot AC$, and then reflect in the bisector of angle CAB . Points B, C and N, P go to N, P and B, C respectively. Furthermore, point O satisfies $\angle ANO = \angle APO = 90^\circ$, so its image O' satisfies $\angle AO'B = \angle AO'C = 90^\circ$, i.e. AO' is an altitude in $\triangle ABC$. It follows that circle $\omega_1(NO'P)$ maps to circle $\omega_2(BOC)$, and vice-versa. Therefore their intersection points X, Y map to each other, and consequently $\angle BAX = \angle CAY$.

B. VISUALISATION

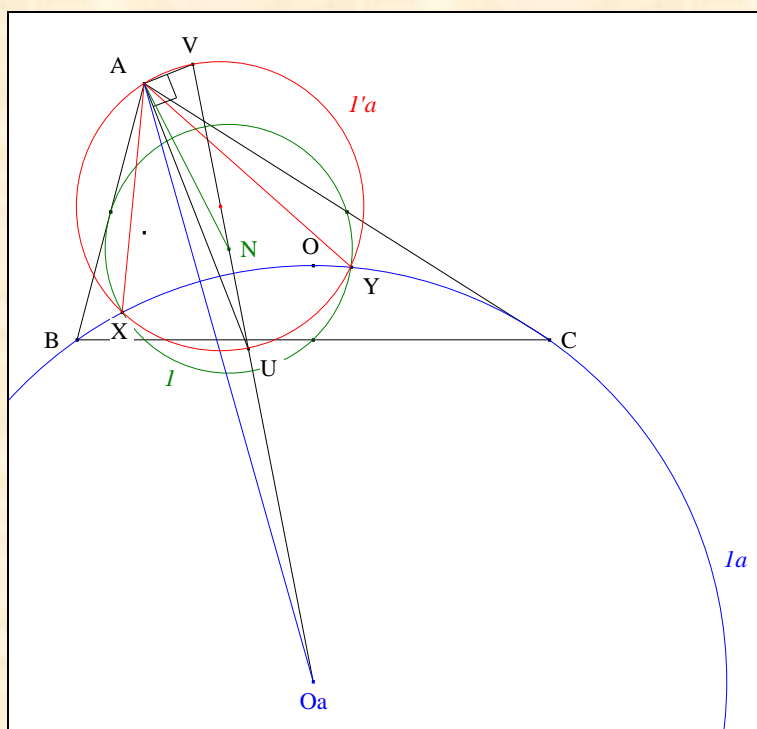


- Notons N, O_a les centres resp. de I, I_a
et U, V les pieds des A-bissectrice in, ex-térieure de ABC sur (NOa).
- Note historique :** l'idée fructueuse d'introduire les "A-bissectrices" a été proposée par Vladimir Zajic plus connu sous le pseudonyme de Yetti sur le site *Mathlinks*⁷.



⁷ Intersection of circumcircles of MNP and BOC, AoPS du 08/04/2013 ;
<https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h528741p3009467>

- D'après John Rigby "Isogonal du centre du cercle d'Euler" ⁸,
(AN) et (AOa) sont deux A-isogonales de ABC ;
en conséquence, (AU) et (AV) sont resp. les A-bissectrice in, ex-térieure du triangle ANOa.



- Notons $I'a$ le cercle circonscrit à ANOa
et r, Ra les rayons resp. de I, Ia .
- **Scolies :**
 - (1) $I'a$ est la A-cercle d'Apollonius ⁹ de ANOa
 - (2) $I'a$ est en anglais " the circle of similitude of I and Ia ". ¹⁰
- D'après **E. Appendice 1**, $AN/AOa = r/Ra$.
- **Conclusion partielle :** $I'a$ passe par X et Y. ¹¹

8 Ayme J.-L., Le point de Kosnitz, G.G.G. vol. 1, p. 14-16 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
9 il a pour diamètre [UV] et passe par A

¹⁰ Casey John, *A Sequel to the first six books of the Elements of Euclid*, Dublin (1888) 86

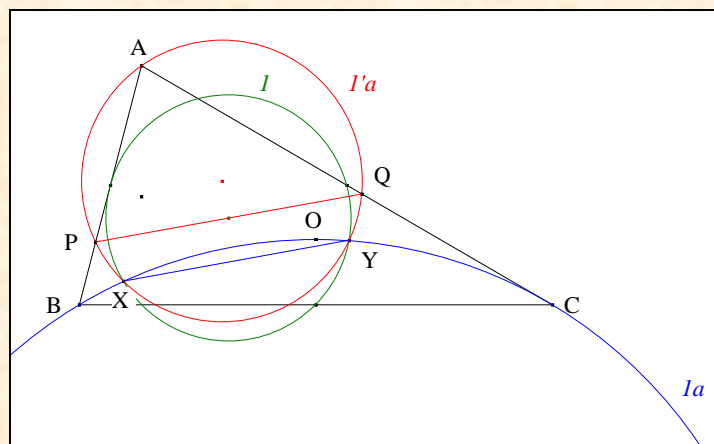
¹¹ Casey John, *A Sequel to the first six books of the Elements of Euclid*, Dublin (1888) 86

C. DES RÉSULTATS

1. Deux parallèles¹²

VISION

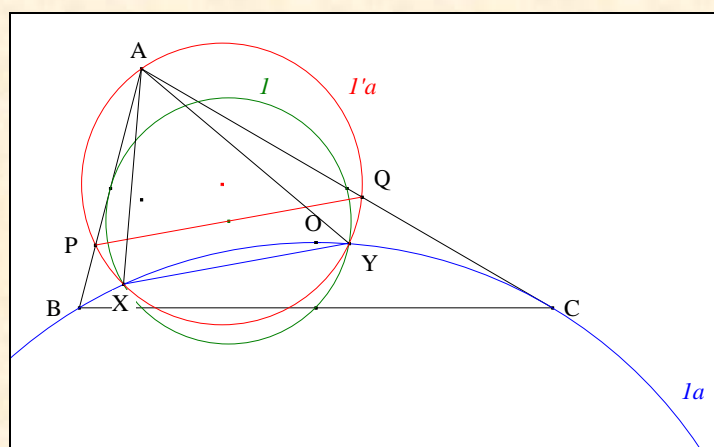
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 I le cercle d'Euler de ABC,
 Ia la A-cercle de Kosnitz de ABC,
 X, Y les points d'intersection de Ia et I ,
 $I'a$ le cercle circonscrit au triangle AXY,
 et P, Q les points d'intersection de $I'a$ resp. avec (AB), (AC).

Donné : (PQ) est parallèle à (XY).

VISUALISATION



- D'après A. Le problème 3, $\angle BAX = \angle YAC$;

¹² Ayme J.-L., Easy if..., AoPS du 11/02/2017
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1381518_easy_if

par une autre écriture,

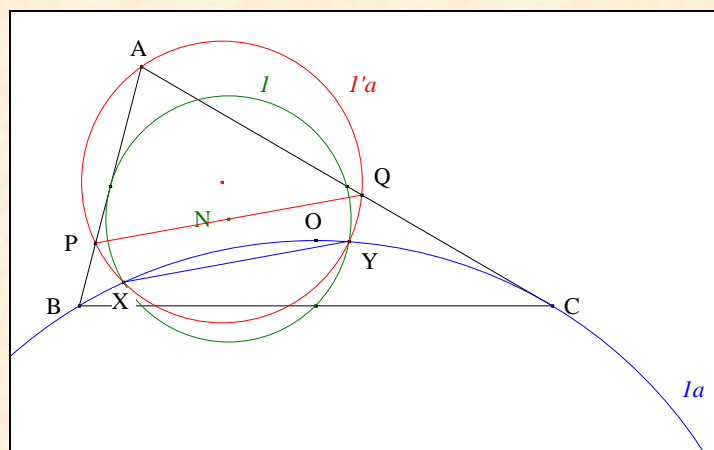
$$\angle PAX = \angle YAQ.$$

- Par construction, X et Y sont intérieurs à ABC.
- **Conclusion :** PX étant égal à QY, (PQ) est parallèle à (XY).

2. Par le point N ¹³

VISION

Figure :



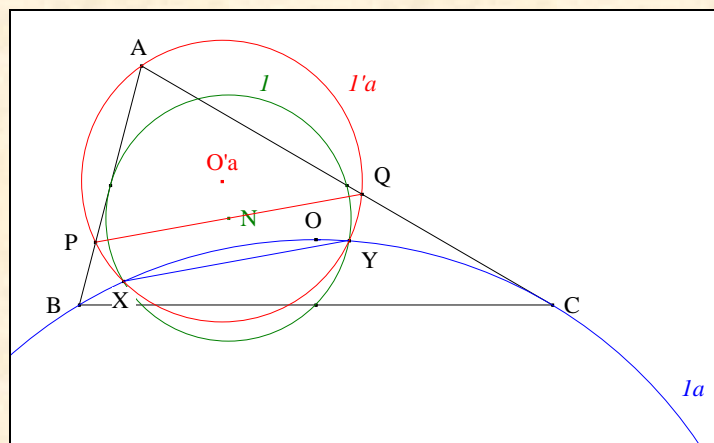
- Traits :**
- | | |
|------|---|
| ABC | un triangle, |
| O | le centre du cercle circonscrit à ABC, |
| I | le cercle d'Euler de ABC, |
| N | le centre de I, |
| Ia | la A-cercle de Kosnitz de ABC, |
| X, Y | les points d'intersection de Ia et I, |
| I'a | le cercle circonscrit au triangle AXY, |
| P, Q | les points d'intersection de I'a resp. avec (AB), (AC). |
- et

Donné : (PQ) passe par N.

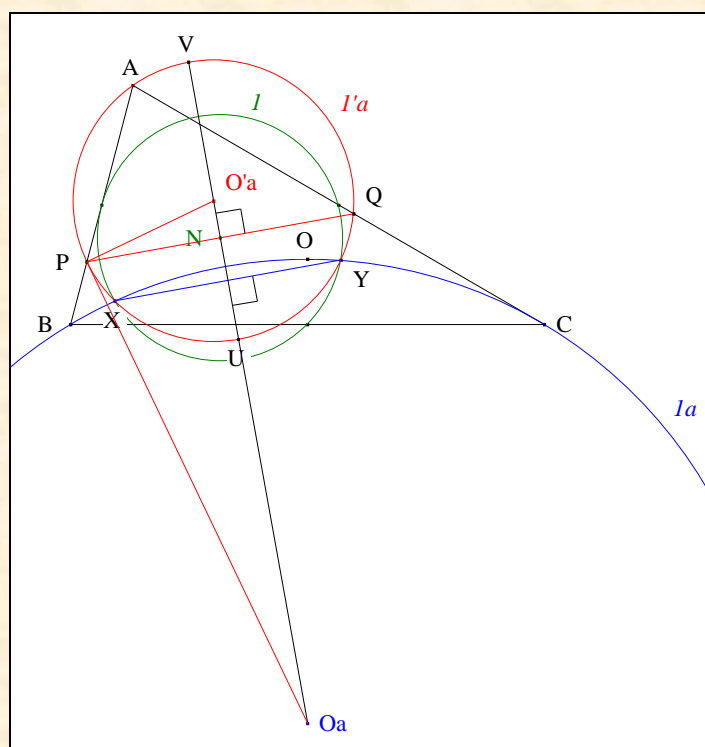
VISUALISATION

¹³

Ayme J.-L., A line through N, AoPS du 12/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1382096_a_line_hrough_n



- D'après A. Le problème 3, $\angle BAX = \angle YAC$.
- D'après D. 1. Deux parallèles, (PQ) est parallèle à (XY).



- Notons O_a, O'_a, N les centres resp. de I_a, I'_a, I
et U, V les pieds des A-bissectrice in, ex-térieure de ABC sur (NO_a).
- D'après B. Visualisation,
 - (1) U et V sont sur I'_a
 - (2) la quaterne (O_a, N, U, V) est harmonique.
- D'après Newton ¹⁴, O'_a étant le milieu de [UV],
ou encore, $O'_a U^2 = O'_a N \cdot O'_a O_a$
 $O'_a P^2 = O'_a N \cdot O'_a O_a$.
- **Conclusion partielle :** N est le pied de la P-hauteur du triangle PO_aO'_a rectangle en P.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que N est le pied de la Q-hauteur du triangle QO_aO'_a rectangle en Q.

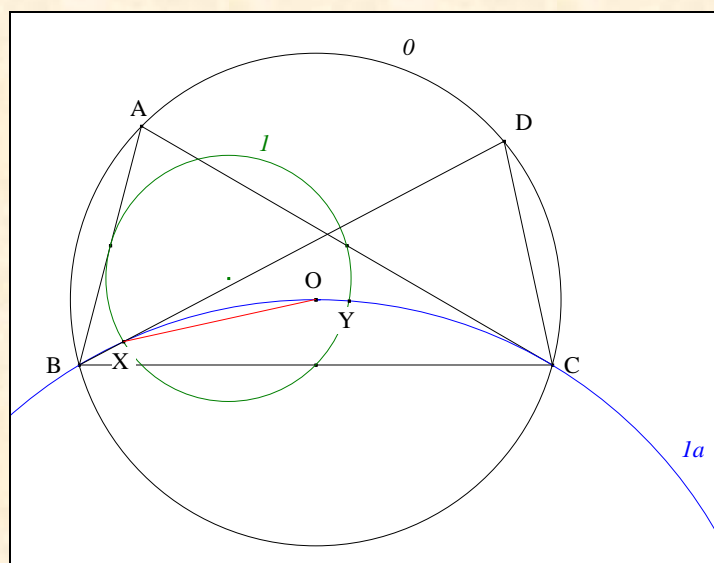
¹⁴ Lebossé C. et Hémerly C., Géométrie, Fernand Nathan (1961), réimpression Jacques Gabay (1990) p. 167

- **Conclusion** : N est le milieu de [PQ].

3. Deux perpendiculaires ¹⁵

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
θ	le cercle circonscrit à ABC,
O	le centre de θ ,
I	le cercle d'Euler de ABC,
N	le centre de I ,
Ia	la A-cercle de Kosnitsa de ABC,
X, Y	les points d'intersection de Ia et I ,
et D	le second point d'intersection de (BX) avec θ .

Donné : (OX) est perpendiculaire à (CD).

VISUALISATION

- **Conclusion** : d'après E. Appendice 2, (OX) est perpendiculaire à (CD).

¹⁵

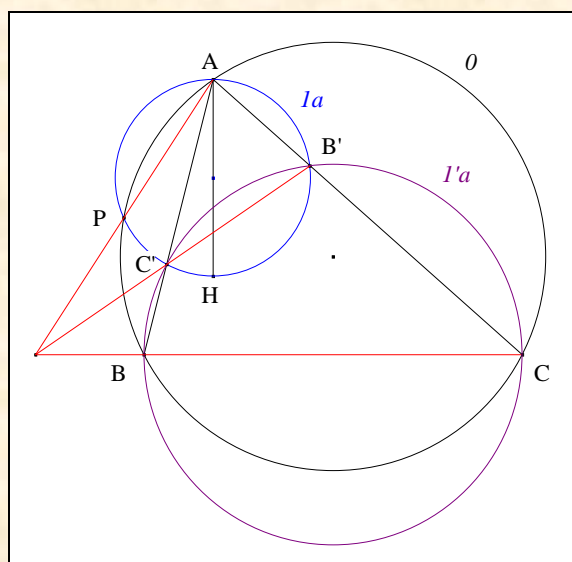
Ayme J.-L., Two perpendiculars, AoPS du 05/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c4h1378034_two_perpendiculars
 Ayme J.-L., Two parallels, AoPS du 05/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1378030_an_isocles_triangle

- Notons A'' le second point d'intersection de (AH) avec \mathcal{O}
et Th la tangente à la en H .
- O et H étant deux points isogonaux de ABC , nous savons que par transitivité de $//$,
 $(A'A'') // (BC)$;
 $(BC) // Th$;
 $(A'A'') // Th$.
- Les cercles \mathcal{O} et la , les points de base A et P , la médiatrice $(A''AH)$, les parallèles $(A'A'')$ et Th , conduisent au théorème 1 de Reim ; en conséquence, A', P et H sont alignés.
- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", A', M et H sont alignés.
- **Conclusion** : d'après l'axiome d'incidence **Ia**, P, H, M et A' sont alignés.

2. Une "concourance" ¹⁶

VISION

Figure :



- Traits :**
- | | |
|---------------|--|
| ABC | un triangle, |
| $A'B'C'$ | le triangle orthique de ABC , |
| \mathcal{O} | le cercle circonscrit à ABC , |
| H | l'orthocentre de ABC , |
| la | le cercle de diamètre $[AH]$; il passe par B' et C' ; |
| P | le second point d'intersection de la avec \mathcal{O} |
| et $l'a$ | le cercle de diamètre $[BC]$; il passe par B' et C' . |

Donné : (AP) , $(B'C')$ et (BC) sont concourantes.

VISUALISATION

- **Conclusion** : d'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes" ¹⁷

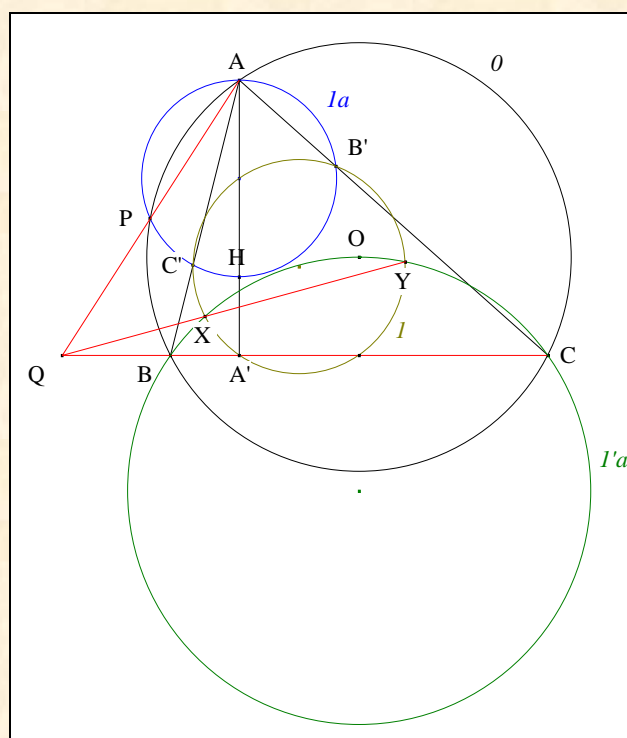
¹⁶ Geogmetry, AoPS du 09/11/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1161051_geogmetry
¹⁷ Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

appliqué aux cercles \mathcal{O} , $\mathcal{I}a$ et $\mathcal{I}'a$, (AP) , $(B'C')$ et (BC) sont concourantes.

3. Un point sur (XY)

VISION

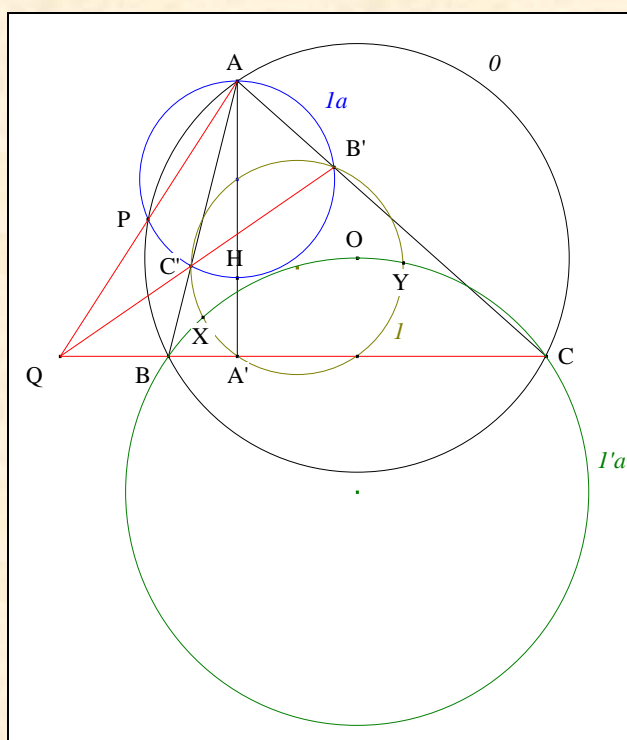
Figure :



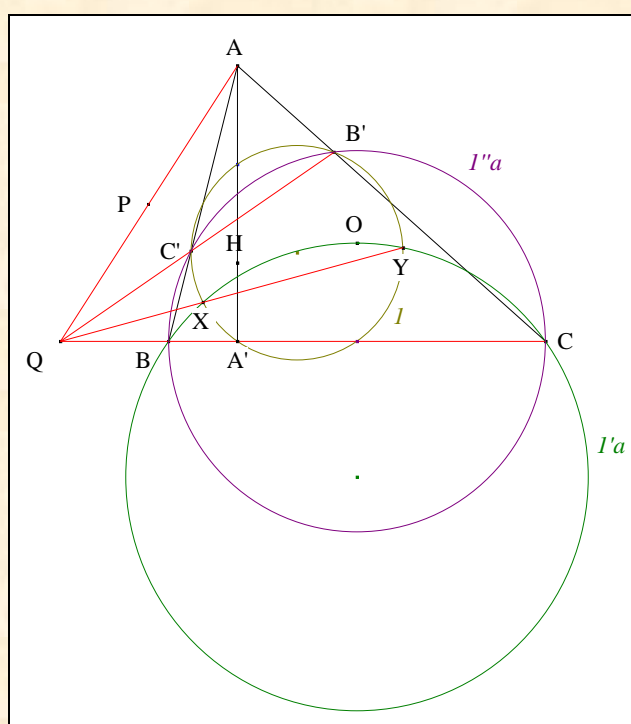
Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	\mathcal{O}	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de \mathcal{O} ,
	H	l'orthocentre de ABC,
	$\mathcal{I}a$	le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B' et C' ;
	\mathcal{I}	le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', B', C' ;
	$\mathcal{I}'a$	le cercle circonscrit au triangle BOC,
	X, Y	les points d'intersection de $\mathcal{I}'a$ avec \mathcal{I}
et	Q	le point d'intersection de (AP) et (BC)

Donné : (XY) passe par Q.

VISUALISATION



- D'après **D. 2.** Une "concourance", $(B'C')$ passe par Q.



- Notons $I''a$ le cercle de diamètre $[BC]$; il passe par B' et C' .
- D'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes"¹⁸ appliqué aux cercles I , $I''a$ et $I'a$, $(B'C')$, (BC) et (XY) sont concourantes.
- **Conclusion :** (XY) passe par Q.

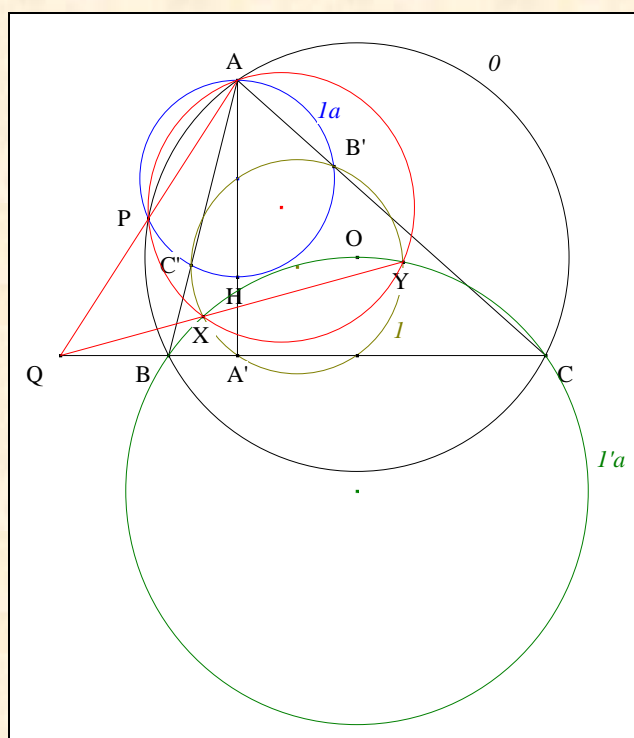
¹⁸

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

4. Le cercle $l'a$

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de O ,
	H	l'orthocentre de ABC,
	l_a	le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B' et C' ;
	l	le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', H, C' et M ;
	$l'a$	le cercle circonscrit au triangle BOC,
	X, Y	les points d'intersection de $l'a$ avec l
et	Q	le point d'intersection de (AP) et (BC)

Donné : A, P, X et Y sont cocycliques.

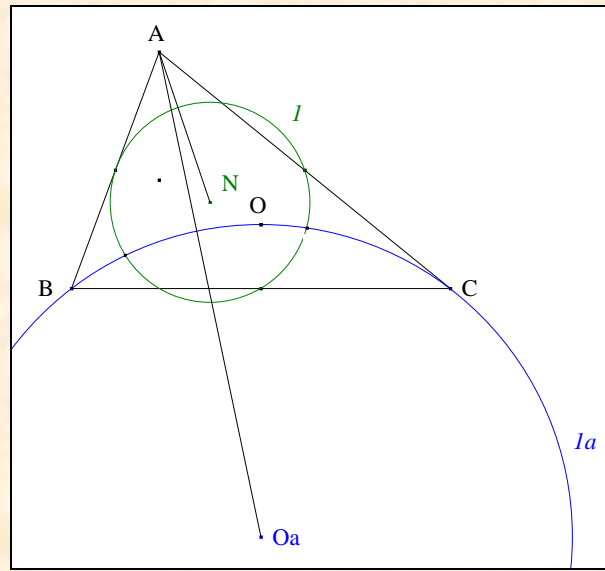
VISUALISATION

E. APPENDICE

1. Un rapport ²⁰

VISION

Figure :



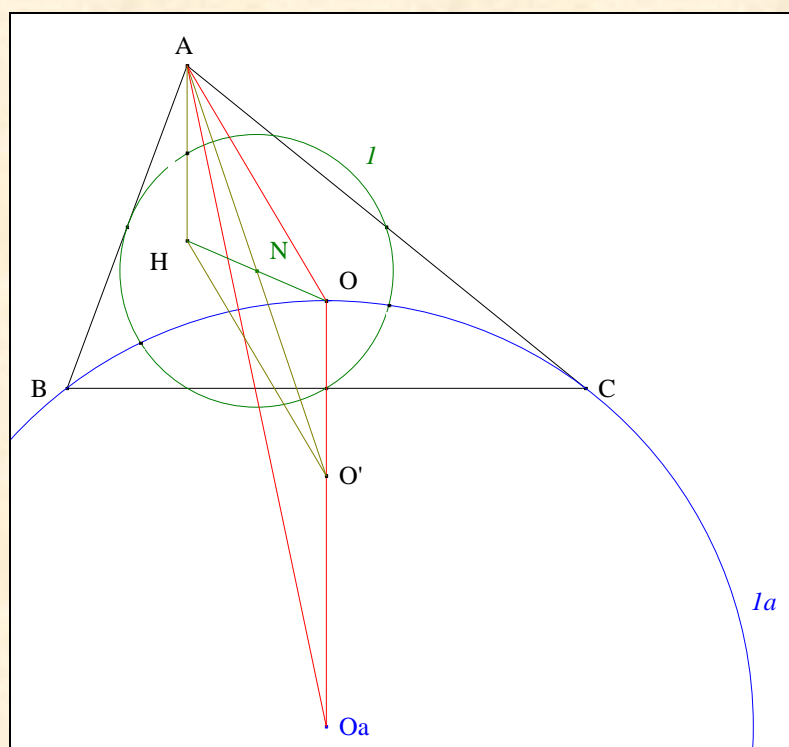
Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 I le cercle d'Euler de ABC,
 N le centre de I,
 Ia la A-cercle de Kosnitzer de ABC,
 Oa le centre de Ia
 et r, Ra les rayons resp. de I, Ia.

Donné : $AN/AOa = r/Ra$.

VISUALISATION

²⁰

Ayme J.-L., A result, AoPS du 12/02/2017 ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1382125_a_result



- Notons H l'orthocentre de ABC
et O' le symétrique de O par rapport à (BC) .
- **Scolies :**
 - (1) le quadrilatère $AHO'O$ est un parallélogramme
 - (2) $\angle O'HA = \angle AOOa$.
- D'après Christian von Nagel ²¹,
(AH) étant (AO) sont deux A -isogonales de ABC , $\angle HAO' = \angle OaAO$.
- **Conclusion partielle :** les triangles AHO' et $AOOa$ sont semblables.

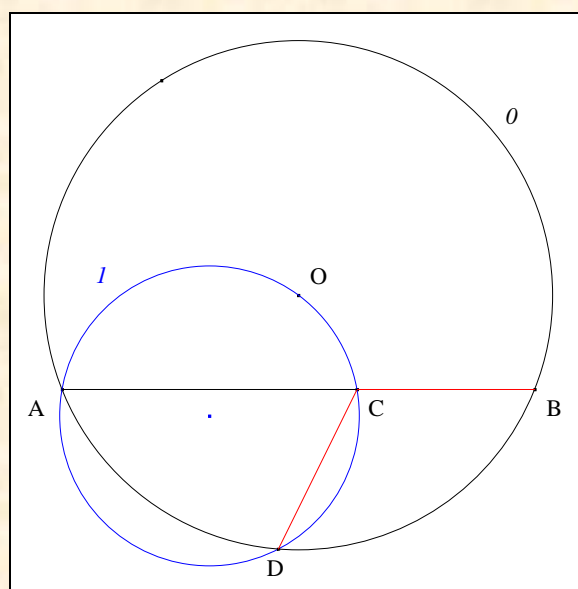
²¹

Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 21-22 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

2. Un cercle passant par le centre d'un cercle ²³

VISION

Figure :



Traits :

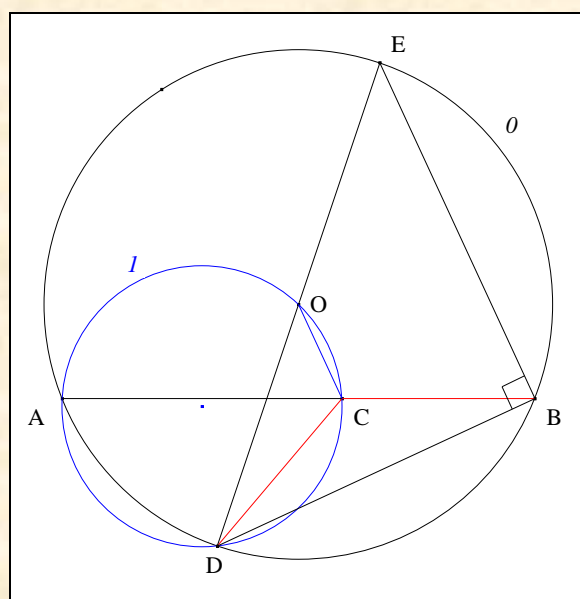
O	un cercle,
O	le centre de O ,
$[AB]$	une corde de O ,
C	un point de $[AB]$
I	le cercle passant par A, O, C
et	D
	le second point d'intersection de I et O .

Donné : $CB = CD$.

VISUALISATION

²³

Easy Geometry, AoPS du 22/04/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1080717_easy_geometry
Un charmant exercice, *Les-Mathematiques.net* ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8>



- Notons E le second point d'intersection de (DO) avec θ .
- Les cercles I et θ , les points de base D et A , les médiennes (ODE) et (CAB) , conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que $(OC) \parallel (EB)$.
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi-cercle", $(EB) \perp (BD)$; en conséquence, $(OC) \perp (BD)$.
- **Conclusion :** (OC) étant la médiatrice de $[BD]$, d'après "Le théorème de la médiatrice", $CB = CD$.

F. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A		N	
aligné	collinear	Notons	name
annexe	annex	nécessaire	necessary
axiome	axiom	note historique	historic note
appendice	appendix		
adjoind	associate	O	
a propos	by the way btw	orthocentre	orthocenter
acutangle	acute angle	ou encore	otherwise
axiome	axiom		
B		P	
bissectrice	bisector	parallèle	parallel
bande	strip	parallèles entre elles	parallel to each other
		parallélogramme	parallelogram
		pédal	pedal
		perpendiculaire	perpendicular
		pied	foot
		point de vue	point of view
		postulat	postulate
		point	point
		pour tout	for any
		Q	
		quadrilatère	quadrilateral
		R	
		remerciements	thanks
		reconnaissance	acknowledgement
		respectivement	respectively
		rapport	ratio
		répertorier	to index
		S	
		semblable	similar
		sens	clockwise in this
		order	
		segment	segment
		Sommaire	summary
		symédiane	symmedian
		suffisante	sufficient
		sommet (s)	vertex (vertice)
		T	
		trapèze	trapezium
		tel que	such as
		théorème	theorem
		triangle	triangle
		triangle de contact	contact triangle
		triangle rectangle	right-angle triangle
C			
centre	incenter		
centre du cercle circonscrit	circumcenter		
cercle circonscrit	circumcircle		
cévienne	cevian		
colinéaire	collinear		
concourance	concurrence		
coincide	coincide		
confondu	coincident		
côté	side		
par conséquence	consequently		
commentaire	comment		
D			
d'après	according to		
donc	therefore		
droite	line		
d'où	hence		
distinct de	different from		
E			
extérieur	external		
F			
figure	figure		
H			
hauteur	altitude		
hypothèse	hypothesis		
I			
intérieur	internal		
identique	identical		
i.e.	namely		
incidence	incidence		
L			
lemme	lemma		
lisibilité	legibility		
M			
mediane	median		
médiatrice	perpendicular bisector		
milieu	midpoint		

