LE CERCLE DE MINEUR

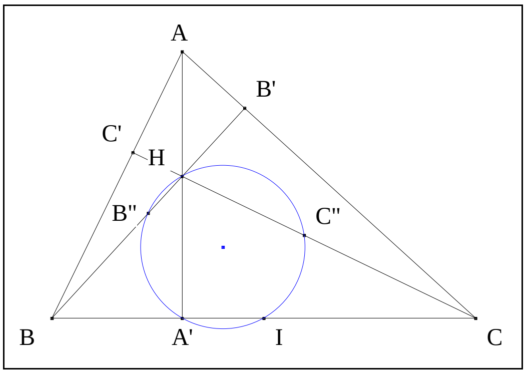
Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique du cercle d'Adolphe Mineur basée sur trois lemmes successifs et dépendants.
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

1. Cinq points cocycliques[1]

VISION

Figure :

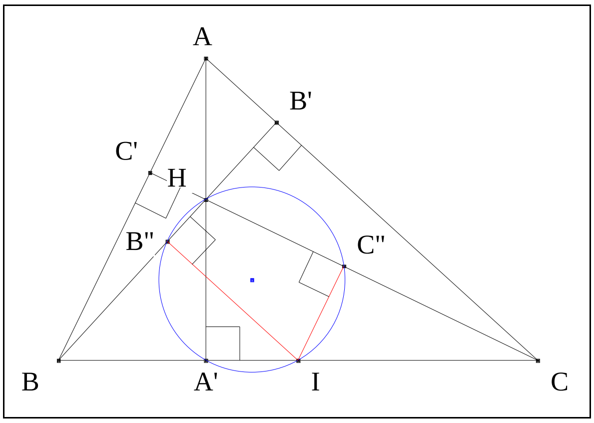


Traits : ABC un triangle,
I le milieu de [BC],
H l'orthocentre de ABC,
A', B', C' les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC
et B", C" les milieux de [BB'], [CC'].

Donné : B", C", A', H et I sont cocycliques.

VISUALISATION

[1] Honsberger R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, New Mathematical Library (1995) exercice 32 p..33.



- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle BCB', (IB") // (CB') ;
  par définition d'une hauteur, (CB') ⊥ (BB"HB') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IB") ⊥ (B"H).

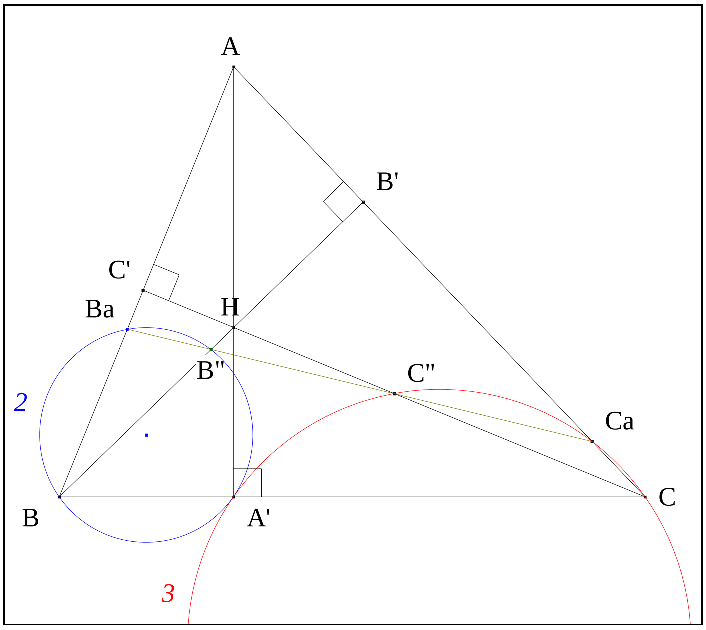
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IC") ⊥ (C"H).

- **Conclusion :** d'après Thalès "Le cercle de…", B", C", A', H et I sont sur le cercle de diamètre [IH].

2. Intersection sur un côté

VISION

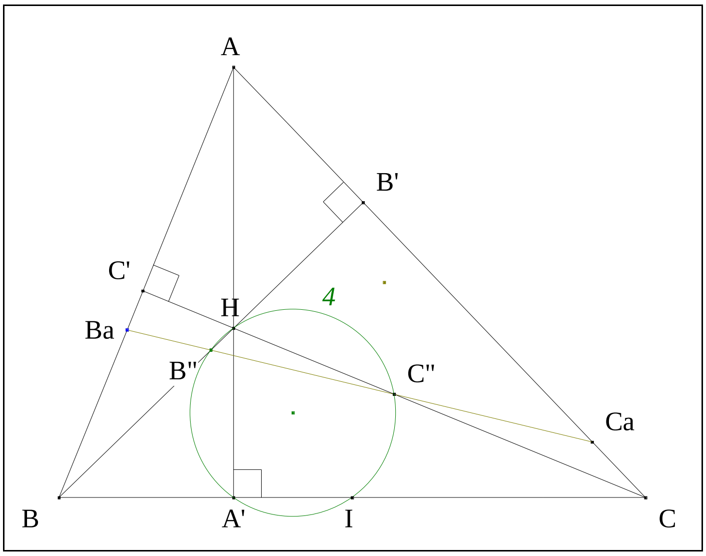
Figure :



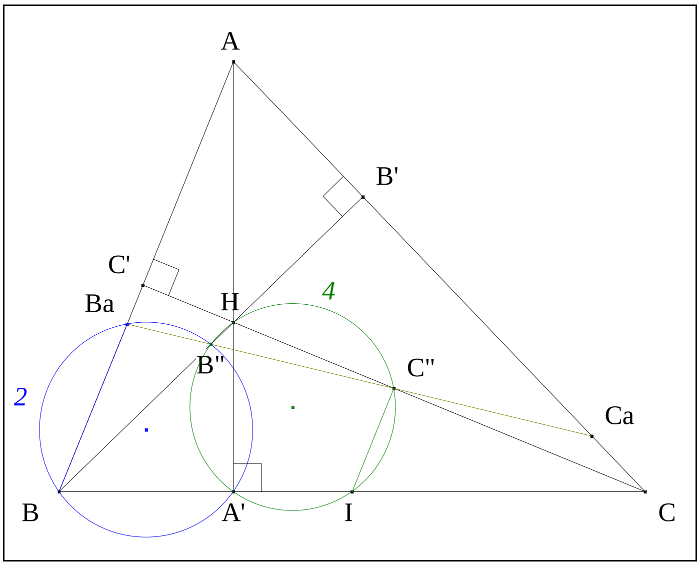
Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A', B', C'	les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC,
	B", C"	les milieux de [BB'], [CC'],
	Ba, Ca	les points d'intersection de (B"C") resp. avec (BA), (CA)
et	*2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles BB"Ba, CC"Ca.

Donné : *2* et *3* passent par A'.

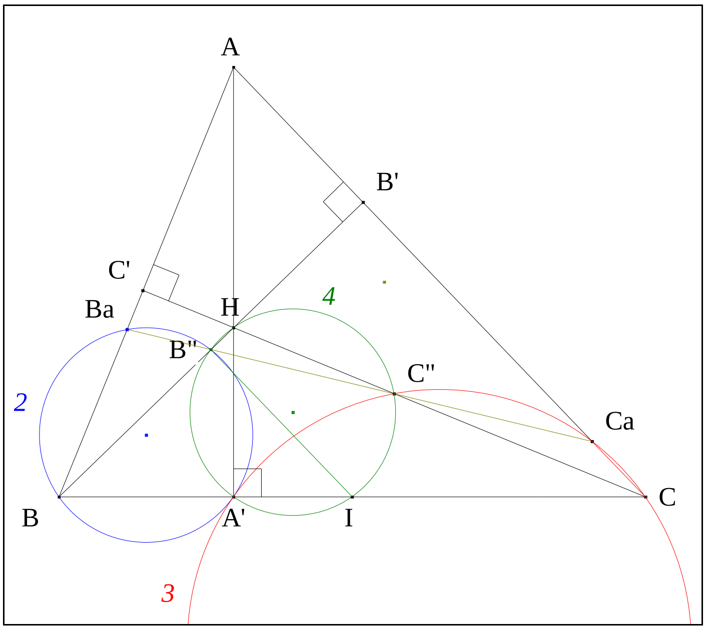
VISUALISATION



- Notons I le milieu de [BC].
- D'après 1. Cinq points cocycliques, B'', C'', A', H et I sont cocycliques.
- Notons *4* ce cercle.



- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle BCC', (IC'') // (BBa C').
- Le cercle *4*, les points de base A' et B'', les moniennes naissantes (IA'B) et (C''B''Ba), les parallèles (IC'') et (BBa), conduisent au théorème **0''** de Reim ;
  en conséquence, *2* passe par A'.



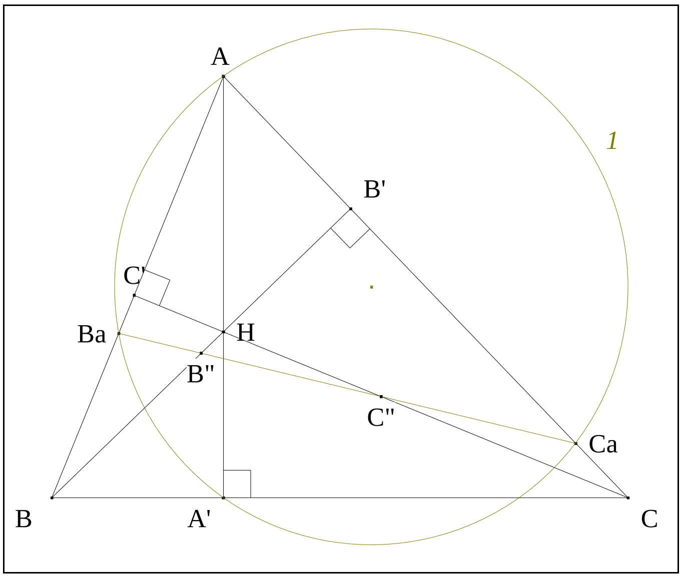
- Mutatis mutandis, nous montrerions que *3* passe par A'.

- **Conclusion :** *2* et *3* passent par A'.

3. Un cercle

VISION

Figure :

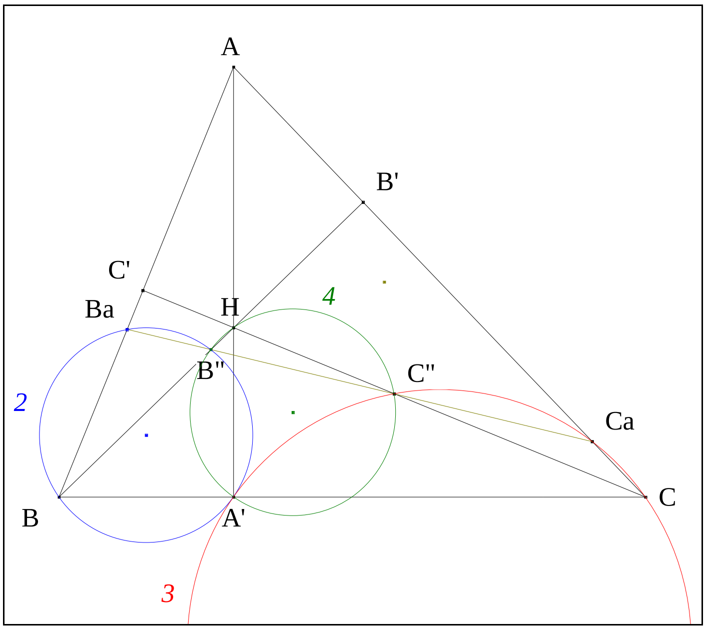


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A', B', C'	les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC,
	B", C"	les milieux de [BB'], [CC'],
	Ba, Ca	les points d'intersection de (B"C") resp. avec (BA), (CA)

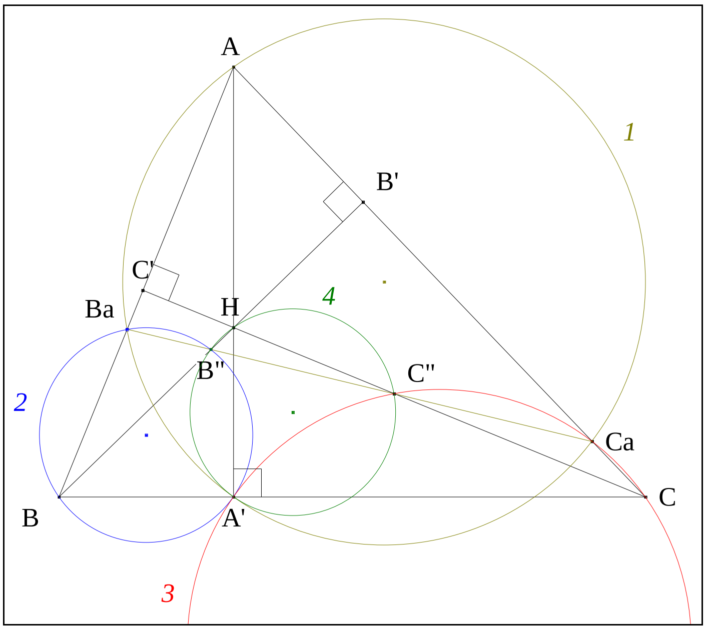
et 1 le cercle circonscrit au triangle ABaCa.

Donné : 1 passe par A'.

VISUALISATION

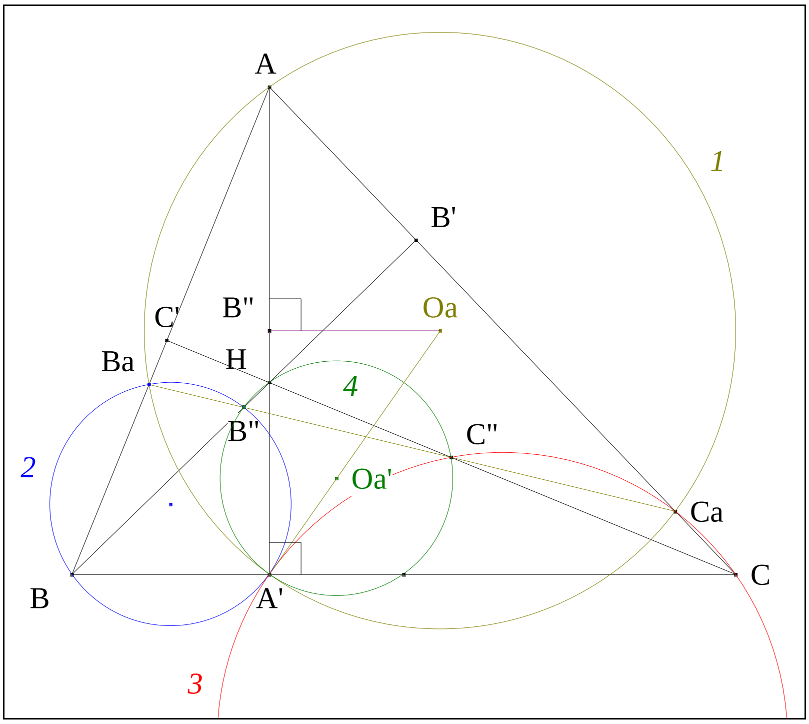


- Notons 2, 3, 4 les cercles circonscrits aux triangles BB"Ba, CC"Ca et HB"C".
- D'après 2. Intersection sur un côté, 2 et 3 passent par A'.
- D'après 1. Cinq points cocycliques, 4 passe par A'.
- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe1) appliqué au triangle BHC et aux points B" sur (BH), C" sur (HC) et A' sur (BC), 2 est tangent à 3 en A'.



- **Conclusion :** d'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1) appliqué au triangle ABC et aux points Ba sur (AB), A' sur (BC) et Ca sur (CA) , 1 passe par A'.

Scolies : **(1)** *1* et *4* sont tangents en A'



- Notons Oa, Oa' les centres resp. de *1*, *4*.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème du pivot" appliqué au triangle BAH avec Ba sur BA, A' sur (AH) et B" sur (BH), *1* et *4* sont tangents en A'.

(2) *1* et *4* étant tangents en A', A', Oa' et Oa sont alignés.

(3) Position de Oa

- Notons A" le milieu de [AA'].

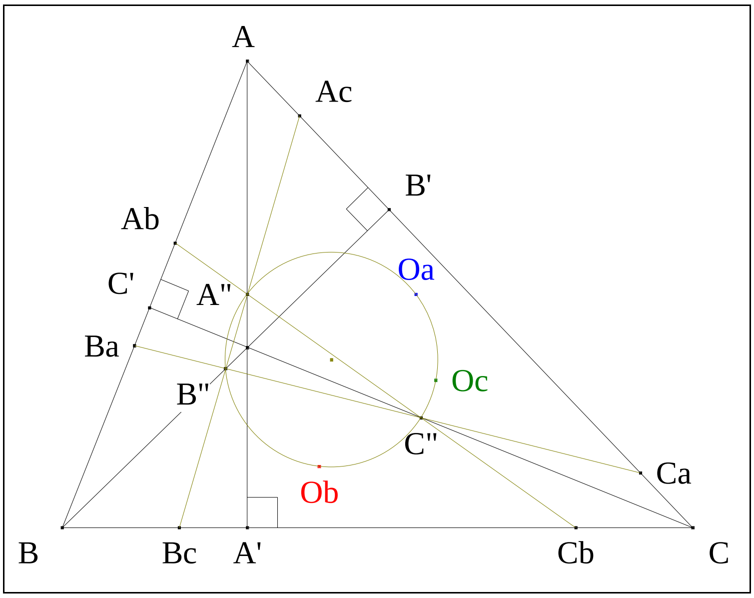
- La médiatrice de [AA'] passe par Oa ;
  par définition d'une médiatrice, (OaA") ⊥ (AA') ;
  par définition d'une hauteur, (AA') ⊥ (BC).

- **Conclusion :** d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OaA") // (BC).

4. Le cercle de Mineur

VISION

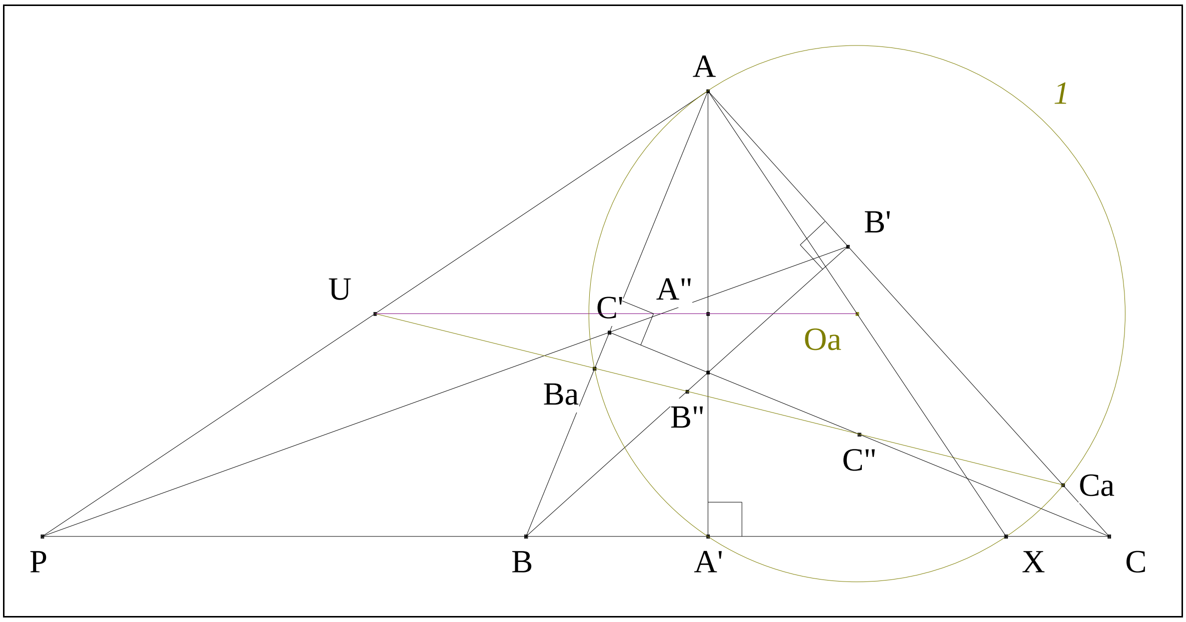
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	A', B', C'	les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC,
	A", B", C"	les milieux de [AA'], [BB'], [CC'],
	Ba, Ca	les points d'intersection de (B"C") resp. avec (BA), (CA),
	Cb, Ab	les points d'intersection de (C"A") resp. avec (CB), (AB),
	Ac, Bc	les points d'intersection de (A"B") resp. avec (AC), (BC)
et	Oa, Ob, Oc	les centres des cercles circonscrits aux triangles ABaCa, BCbAb, CAcBc.

Donné : A", B", C", Oa, Ob et Oc sont cocycliques.

VISUALISATION

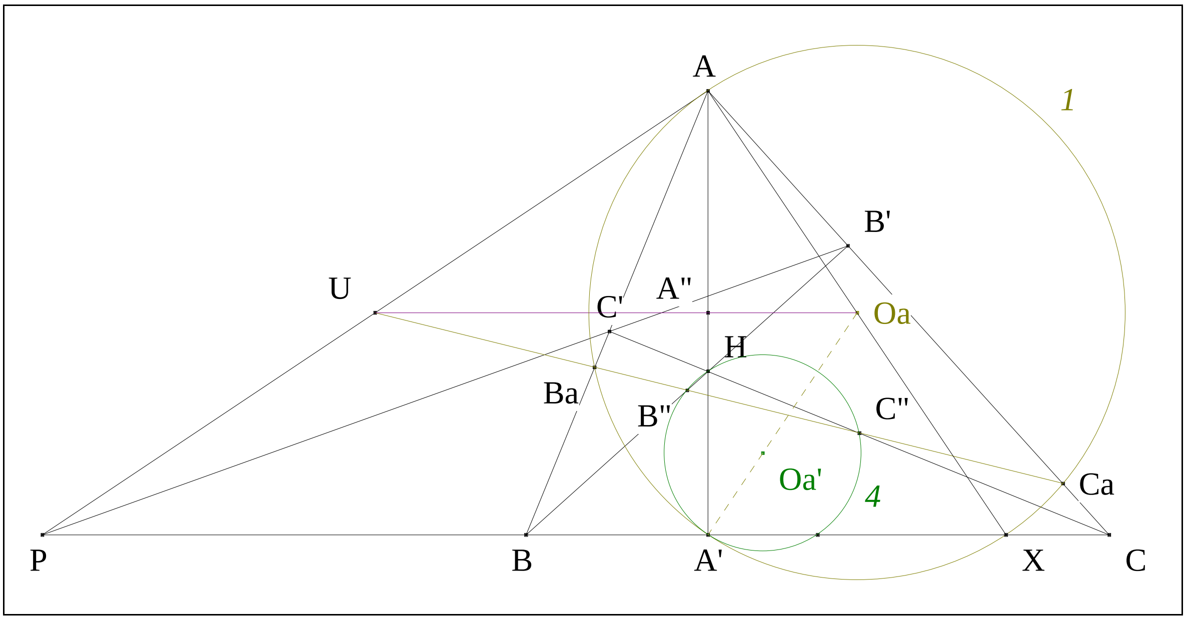


- Notons *1* le cercle circonscrit au triangle ABaCa,
  X le second point d'intersection de (BC) avec *1*,
  P le point d'intersection de (B'C') et (BC),
  et U le milieu de [AP].

- **Scolie :** U, A" et Oa sont alignés.

- D'après "La ponctuelle de Gauss" (Cf. Annexe 2), U, Ba, B", C" et Ca sont alignés.

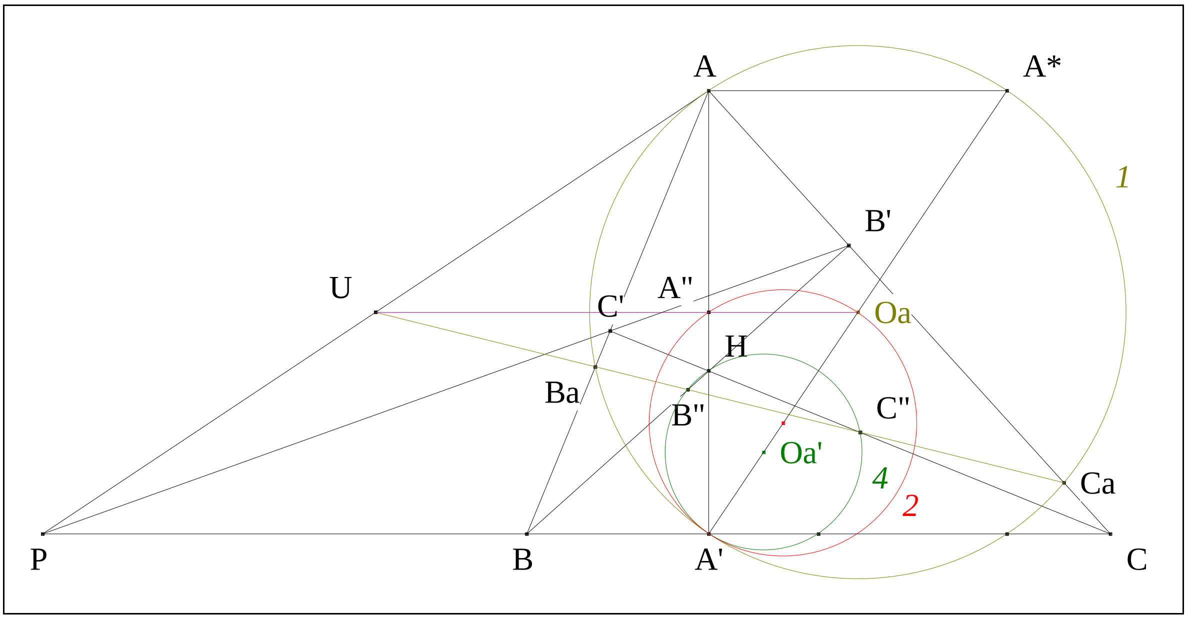
- D'après le triangle AA'X, rectangle en A', étant inscriptible dans un demi cercle",
  X est le point diamétralement opposé à A.



- D'après 1. Cinq points cocycliques, B", C", A', H sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle
  et Oa' son centre.

- D'après "Un cercle, scolie 1", *1* et *4* sont tangents en A'.



- Notons A* le point diamétralement opposé à A' sur *1*.

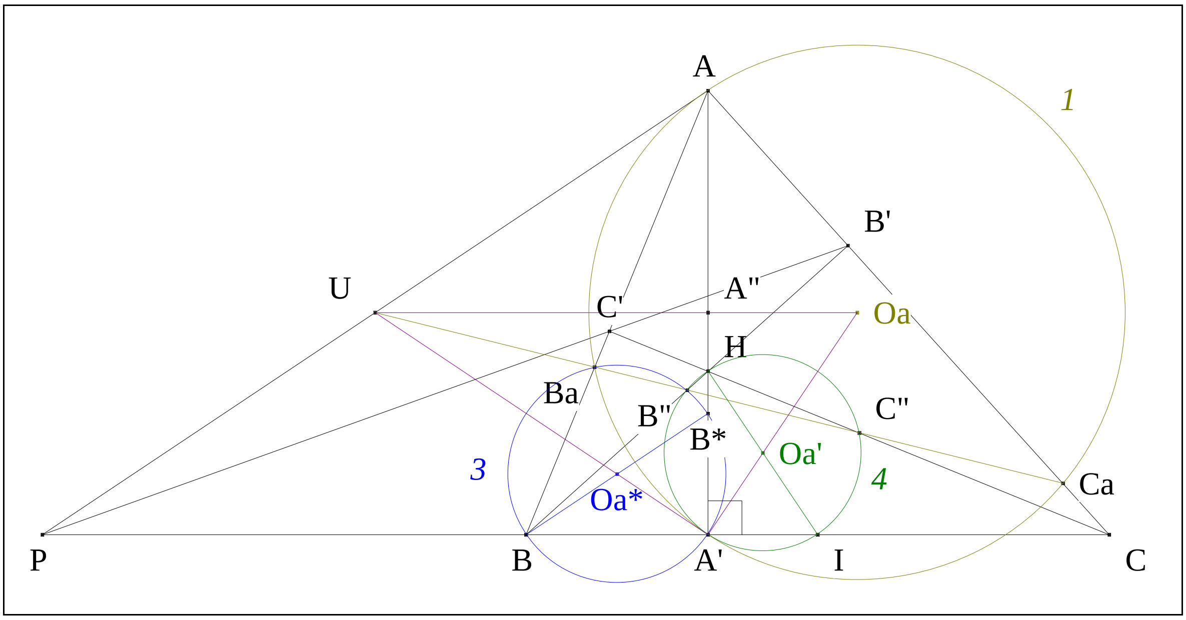
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A*A) ⊥ (AA') ;
  d'après "Un cercle, scolie 3", (AA') ⊥ (OaA") ;

d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A*A) // (OaA") .

- Le cercle *1*, le point de base A', les moniennes naissantes (A*A'Oa) et (AA'A"), les parallèles (A*A) et (OaA"), conduisent au théorème **7"** de Reim ; en conséquence, le cercle passant par A', Oa et A" est tangent à *1* en A'.

- Notons *2* ce cercle.

- **Scolie :** les cercles *1*, *2* et *4* sont tangents en A'.



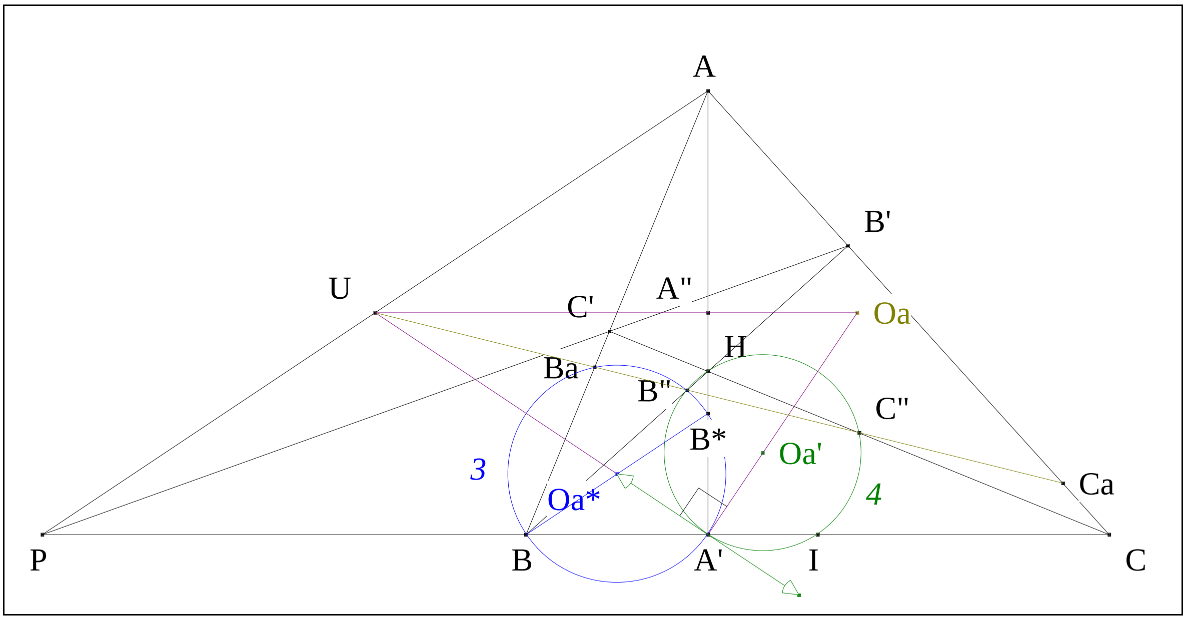
- Notons *3* le cercle circonscrit au triangle BB"Ba
  et Oa* le centre de *3*.

- D'après 2. Intersection sur un côté, *3* passent par A'.

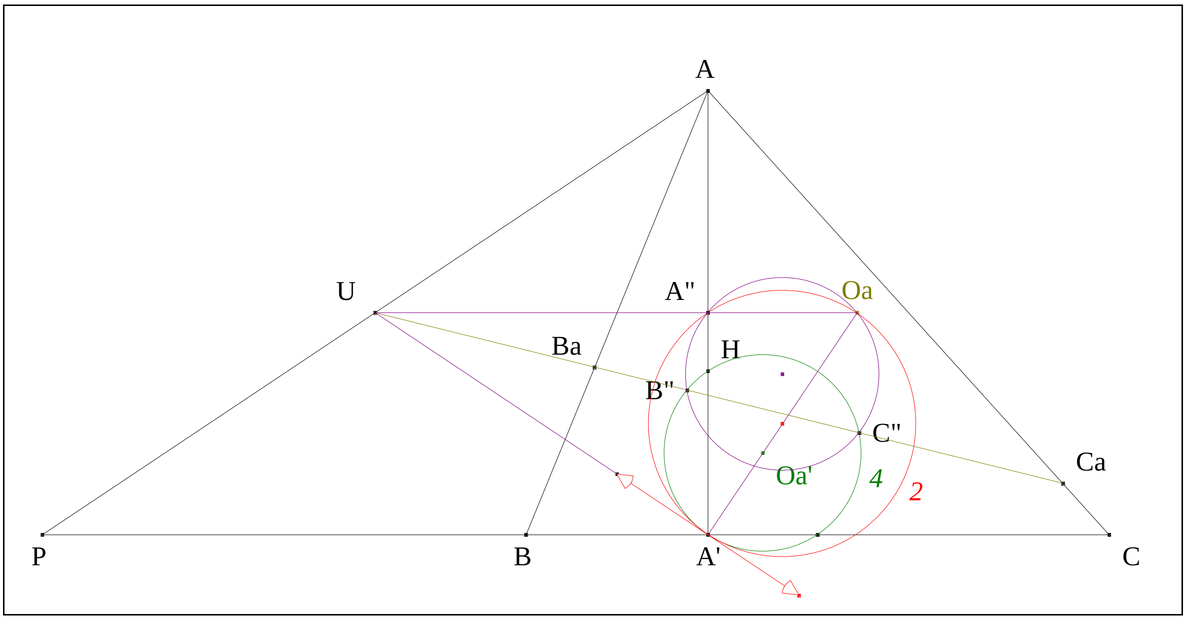
- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe 3) appliqué
  (1) au triangle A'HB, *3* est orthogonal à *4*
  (2) au triangle ABA', *3* est orthogonal à *1*.

- Notons B* le point diamétralement opposé à B sur *3*
  et I le milieu de [BC].

- D'après "Deux diamètres perpendiculaires" (Cf. Annexe 4), (BB*) ⊥ (IH) ;
  d'après "Orthocentre et médiane" (Cf. Annexe 5), (IH) ⊥ (AP) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BB*) // (AP).



- D'après "Le trapèze complet" (Cf. Annexe 6) appliqué au trapèze BB*AP, A', O'a et U sont alignés
  3 et *4* étant orthogonaux, (A'U) est tangente à *4* en A'.



- **Scolie :** *2* et *4* étant tangents en A', (A'U) est tangente à *2* en A'.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 7), A", B", C" et Oa sont cocycliques.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que A", B", C" et Ob sont cocycliques
  A", B", C" et Oc sont cocycliques.

- **Conclusion :** sachant que par trois points distincts passe un et un seul cercle,
  A", B", C", Oa, Ob et Oc sont cocycliques.

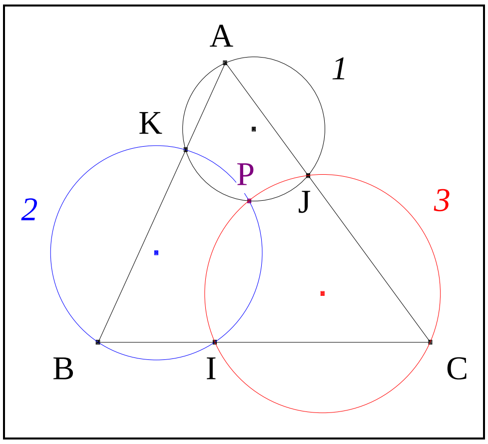
Scolie : ce cercle est "le cercle de Mineur de ABC".

Note historique : en réponse à une question de A. Angelescu dans *Gazeta Matematica* 35, Adolphe Mineur a découvert le résultat précédent qui sera évoqué dans un article de Victor Thébault[2].
Ce résultat a été rappelé en 2003 par Darij Grinberg[3] au sein du groupe *Hyacinthos*. Dans son Message, Grinberg ajoute quelques remarques.
En 2005, il propose cette question dans le site *Mathlinks*[4]. Le physicien Vladimir Zajic du Brookhaven National Laboratory (États-unis), plus connu sous le pseudonyme "Yetti"[5] propose une très longue solution trigonométrique dont les calculs sont menés à l'aide du logiciel Sketchpad. Khoa Lu Nguyen, connu sous le pseudonyme "Treegoner", propose une solution angulaire recourant au théorème de Ménélaüs et aux puissances.

Commentaire : il ne faut pas confondre ce cercle avec celui de Neuberg-Mineur[6] qui s'adresse à un quadrilatère.

ANNEXE

1. Le théorème du pivot[7]



Traits :

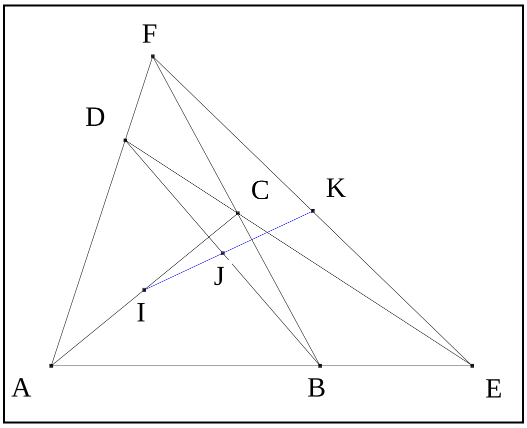
	1, 2, 3	trois cercles sécants deux à deux,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

2. La ponctuelle de Gauss[8]

---

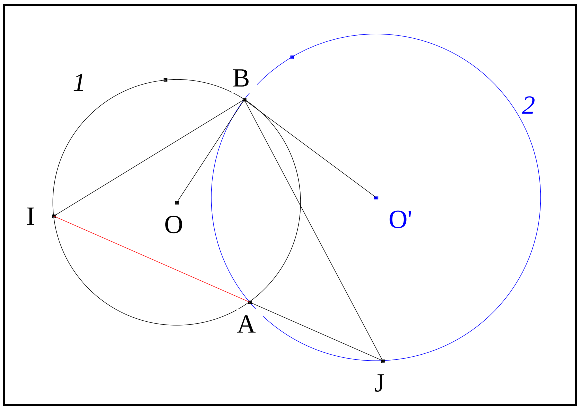
2 Thébault V., Sur un cercle associé au triangle, Gazeta mat. 36 (1930) 17-20.
3 Grinberg D., More Thebault reviews from JFM, Message *Hyacinthos* # 8510 du 01/11/2003.
4 Grinberg D., Midpoints of altitudes – a GM problem of Angelescu and More, *Mathlinks* (19/06/2005).
5 Yetti, Midpoints of altitudes – a GM problem of Angelescu and More, *Mathlinks* (28/06/2006).
6 Grinberg D., The Neuberg-Mineur circle, Message *Hyacinthos* # 8510 du 01/11/2003.
7 Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.
8 Gauss K. F., *Monatscorrespond.* 22 (1810) 115.



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	E	un point de (AB),
	F	le point d'intersection de (AD) et (BC)
et	I, J, K	les milieux de [AC], [BD], [EF].

Donné : les points C, D et E sont alignés *si, et seulement si,* les points I, J et K sont alignés.

3. Un triangle de Möbius[9]



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
et	(IBJ)	une monienne brisée.

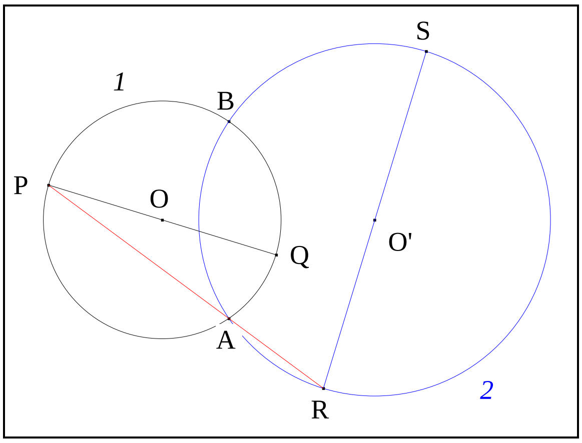
Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

4. Deux diamètres perpendiculaires[10]

---

9 Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.

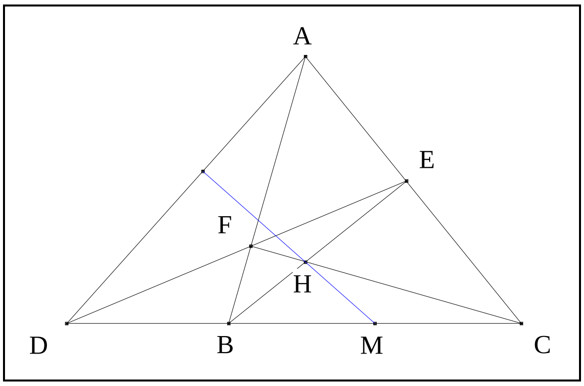
10 Altshiller-Court N. A., Notes on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* vol. 41, 8 (1834) 500.



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres de *1*, de *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
[PQ] un diamètre de *1*
et [RS] un diamètre de *2*, perpendiculaire à [PQ].

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux *si, et seulement si*, (PAR) est une monienne.

5. Orthocentre et médiane[11]

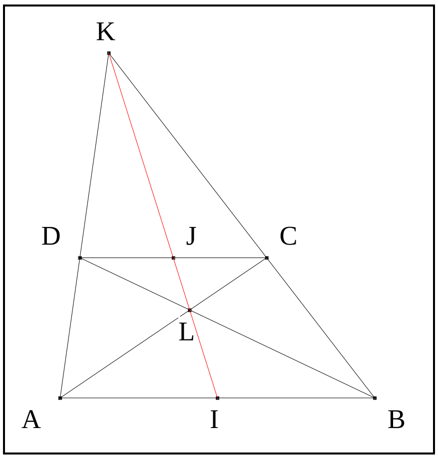


Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
E, F les pieds des B, C-hauteurs de ABC,
D le point d'intersection de (EF) et (BC)
et M le milieu de [BC].

Donné : (MH) est perpendiculaire à (AD).

6. Le trapèze complet

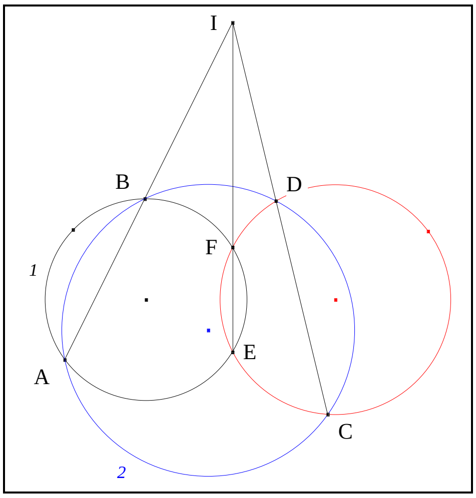
11 Papelier G., *Exercices de Géométrie Moderne*, Pôles et polaires (1927) n° 34, p 24, Eds J. Gabay (1996).



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	I	le milieu de [AB],
	J	le milieu de [CD],
	K	le point d'intersection des droites latérales (AD) et (BC)
et	L	le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

Donné : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD)
si, et seulement si,
les points I, J, K et L sont alignés.

7. Le théorème des trois cordes[12]



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	C, D	deux points de *2*,
	E, F	deux points de *1*
et	I	le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

---

[12] Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I (1822) 40.