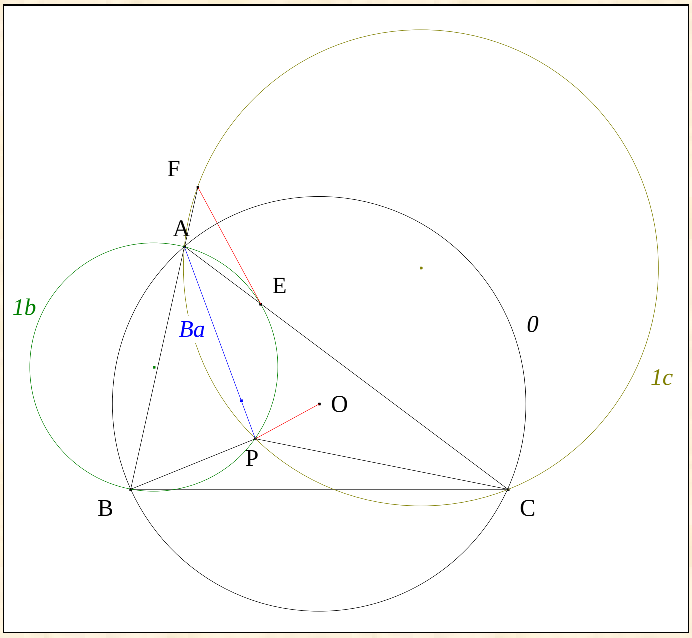
BREAKING DOWN OF A PROBLEM

SEQUENCE 1

*…académiquement, il se sent prêt à se lancer froidement dans une aventure qui l'amènera à circonscrire son Sujet, à le pulvériser selon n'importe quelle loi en un nombre fini d'objets insécables, vidés de toute essence, et à recomposer les morceaux inertes suivant n'importe quel système de telle façon que toute modification ne consistera plus qu'en divisions et combinaisons***.**

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente *Breaking down of a problem* où chaque problème se résout par décomposition en un nombre fini d'étapes et par la suite à les recomposer...

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 12/04/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract. The author presents *Breaking down of a problem* where each problem is resolved by decomposition in a finite number of steps and subsequently to recompose them...

Resumen. El autor presenta *Breaking down of a problem* donde cada problema se resuelve por la descomposición de un número finito de pasos y posteriormente recomponerlos...

Zusammenfassung. Der Autor präsentiert *Breaking down of a problem* wo durch Zersetzung in einer endlichen Anzahl von Schritten und anschließend zu schwenken sie jedes Problem behoben ist...

Sommaire

Sequence **1** : un point sur une bissectrice 3
Sequence **2** : 2007 Flanders Math Olympiad, Problem **3** 12
Sequence **3** : Une égalité angulaire 21
Sequence **4** : Deux triangles homothétiques 28
Sequence **5** : Sharygin Finals 2017, Problem **8.8** de Tran Quang Hung 41
Lexique Français-Anglais

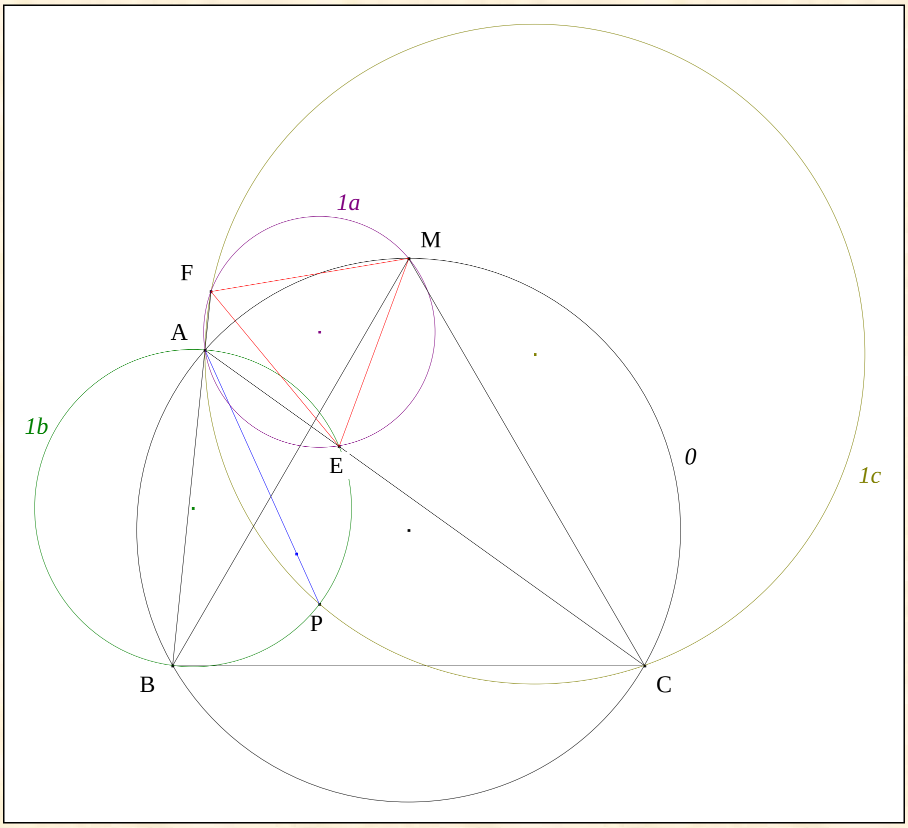
***SEQUENCE* 1**[2]

Un point variable sur une bissectrice

ÉTAPE 1

VISION

Figure :

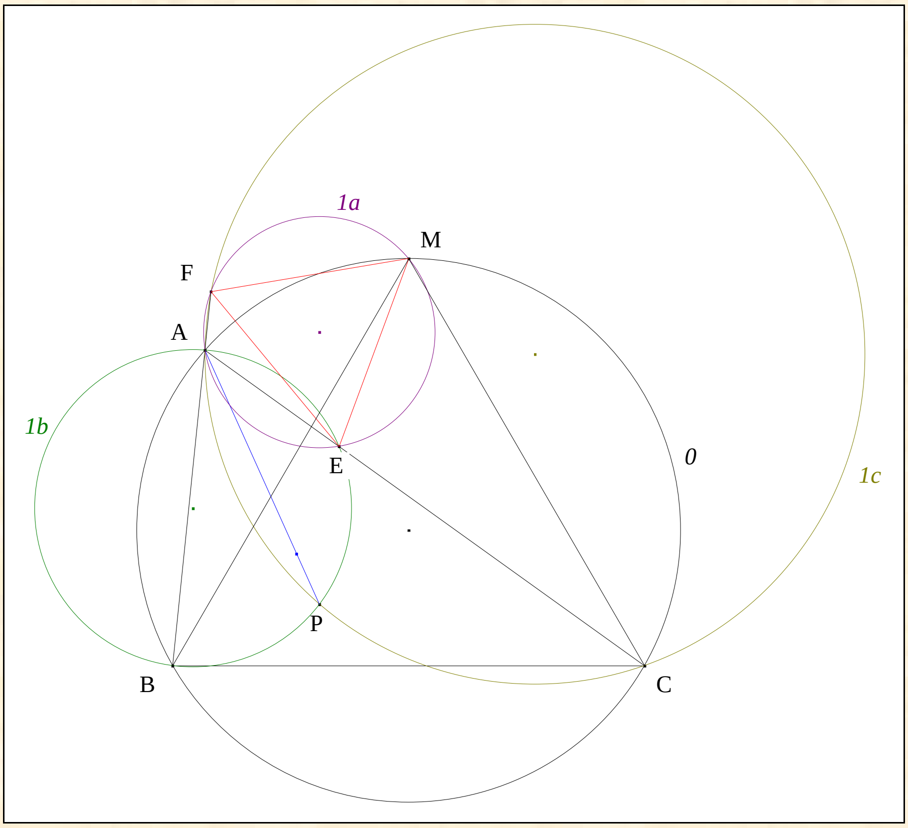


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,
P un point de *Ba*,
1b, *1c* les cercles circonscrits resp. aux triangles PAB, PAC,
E, F les seconds points d'intersection de *1b*, *1c* resp. avec (AC), (AB),
1a le cercle circonscrit au triangle AEF
et M le second point d'intersection de *1a* et 0.

Donné : les triangles MEF et MBC sont semblables.

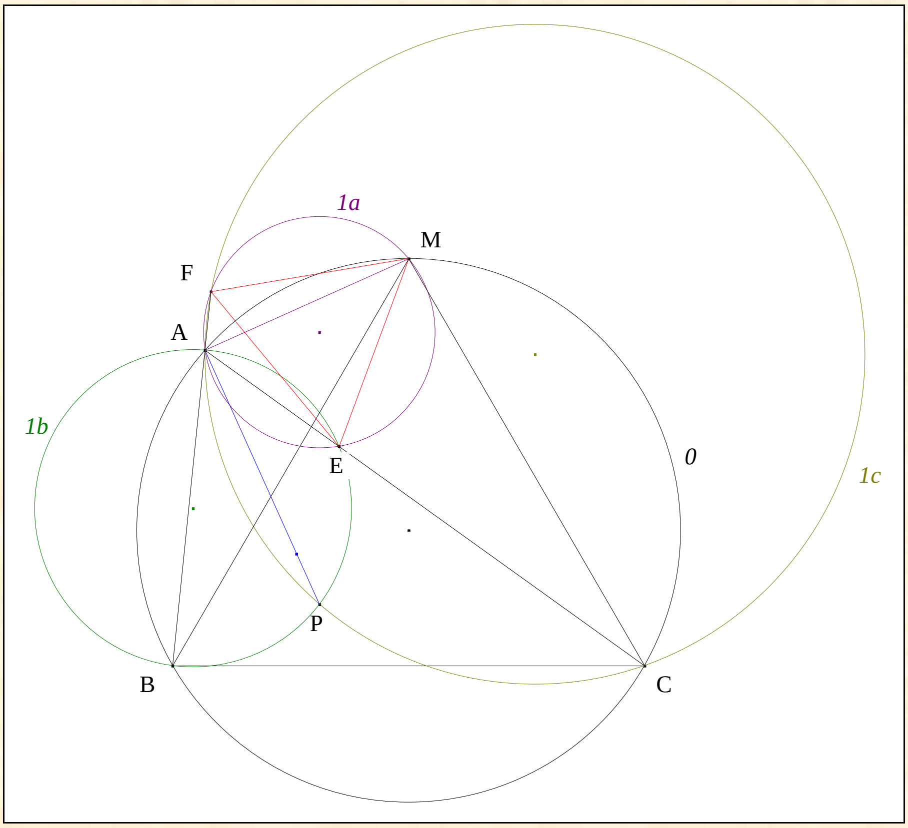
VISUALISATION

[2] Geometry, AoPS du 06/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1423629_geometry



- Une première chasse angulaire :

*	par "Angles inscrits",	<MBC = <BAC
*	le quadrilatère AEMF étant cyclique,	<BAC = <FME
*	par transitivité de =,	<MBC = <FME.



- Une seconde chasse angulaire :

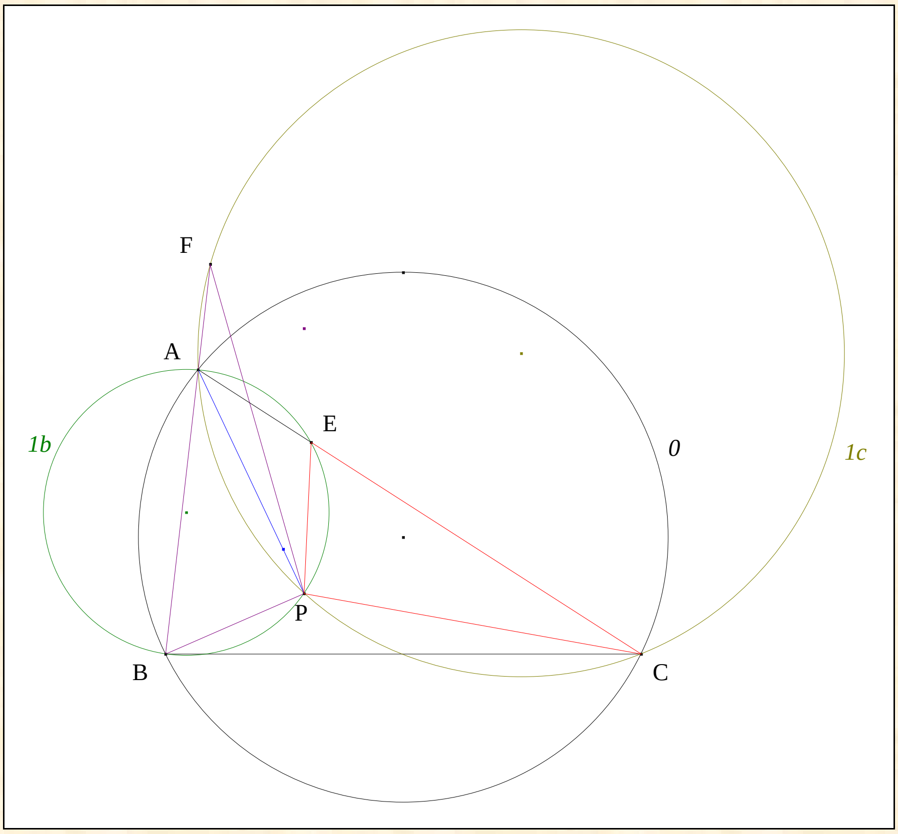
*	par "Angles inscrits",	<EFM = <EAM
*	par une autre écriture,	<EAM = <CAM
*	par "Angles inscrits",	<CAM = <CBM
*	par transitivité de =,	<EFM = <CBM.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <MEF = <MCB.
- **Conclusion :** les triangles MEF et MBC sont semblables.

ÉTAPE 2

VISION

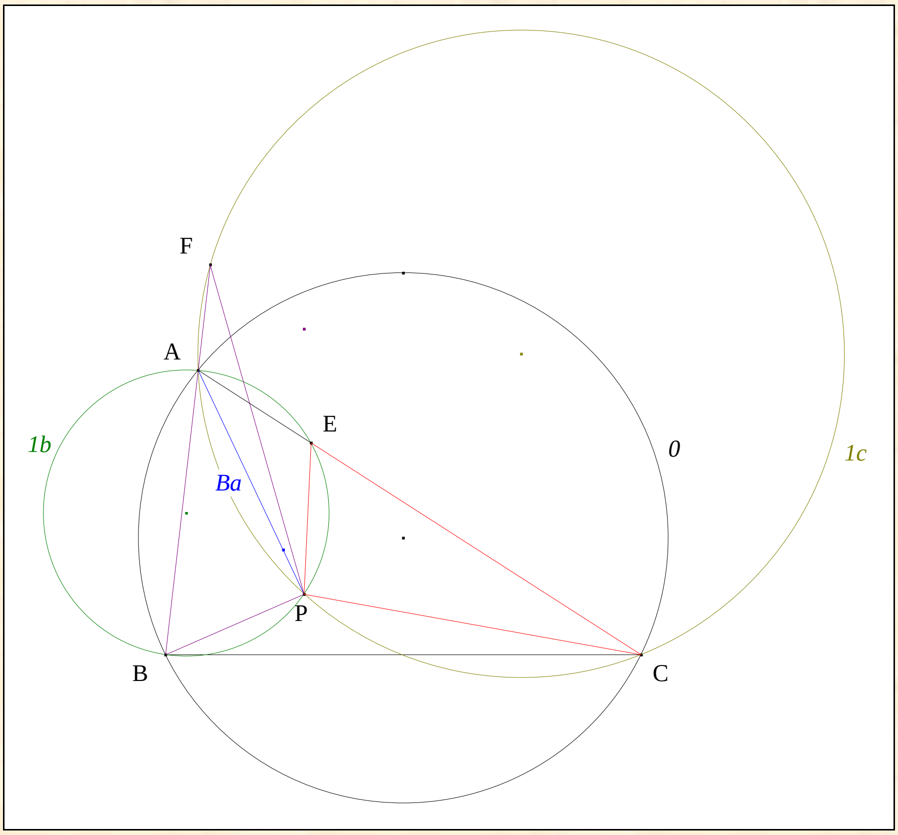
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,
P un point de *Ba*,
1b, *1c* les cercles circonscrits resp. aux triangles PAB, PAC
et E, F les seconds points d'intersection de *1b*, *1c* resp. avec (AC), (AB).

Donné : les triangles PEC et PBF sont égaux.

VISUALISATION



- D'après Ferdinand Möbius "Angle de deux cercles"
  appliqué à *1b* et *1c*, <CPE = <FPB.

- Une seconde chasse angulaire :

  * par une autre écriture, <ECP = <ACP

  * par "Angles inscrits", <ACP = <AFP

  * par une autre écriture, <AFP = <BFP

  * par transitivité de =, <ECP = <BFP.

- D'après "Le théorème 180°", <PEC = <PBF.

- **Conclusion partielle :** les triangles PEC et PBF sont semblables.

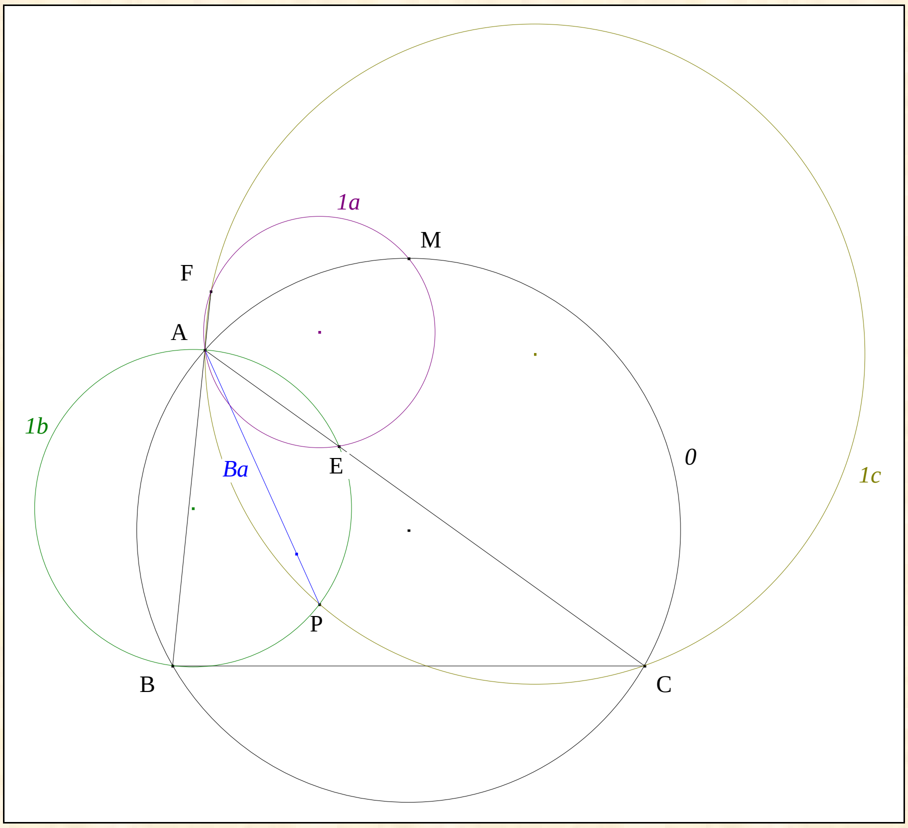
- *Ba* étant la A-bissectrice intérieure de ABC, PE = PB.

- **Conclusion :** les triangles PEC et PBF sont égaux.

ÉTAPE 3 [3]

VISION

Figure :

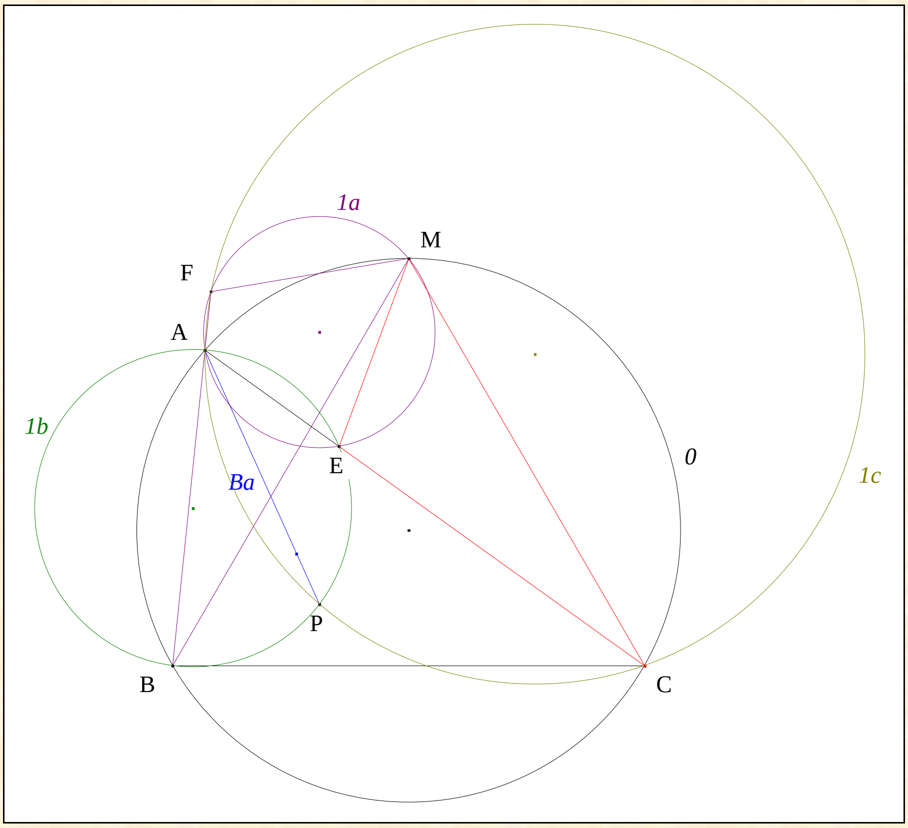


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,
P un point de *Ba*,
1b, *1c* les cercles circonscrits resp. aux triangles PAB, PAC,
E, F les seconds points d'intersection de *1b*, *1c* resp. avec (AC), (AB),
1a le cercle circonscrit au triangle AEF
et M le second point d'intersection de *1a* et 0.

Donné : M est le premier A-perpoint de ABC.

[3] through the midpoint of the arc BAC, AoPS du 07/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1424276_through_the_midpoint_of_the_arc_bac

VISUALISATION



- D'après Ferdinand Möbius "Angle de deux cercles" appliqué à *1a* et *0*, <EMC = <FMB.
- Le quadrilatère AEMF étant cyclique, <CEM = <BFM.
- D'après "Le théorème 180°", <MCE = <MBF.
- **Conclusion partielle :** les triangles CEM et BFM sont semblables.
- D'après Etape **2**, CE = BF.
- **Scolies :** **(1)** les triangles CEM et BFM sont égaux

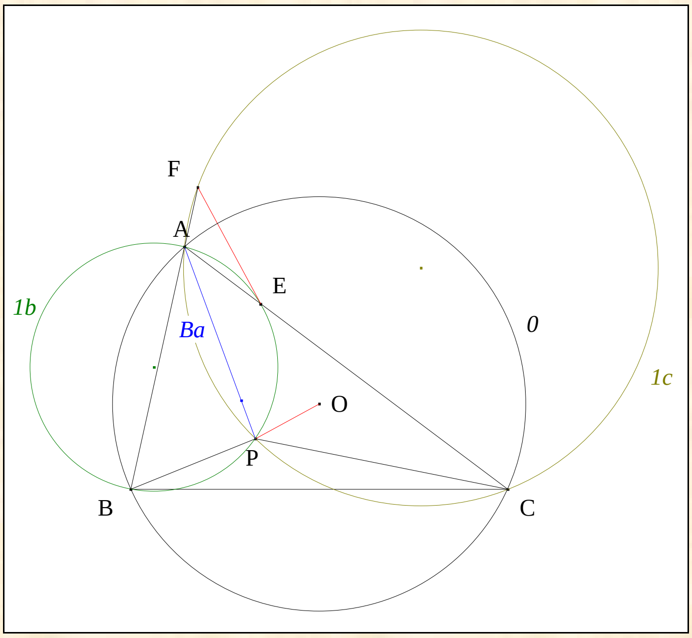
  (2) ME = MF i.e. le triangle MEF est M-isocèle

  (3) d'après Problème **1**, le triangle MBC est M-isocèle.
- **Conclusion :** M est le premier A-perpoint de ABC.

ETAPE 4 [4]

VISION

Figure :

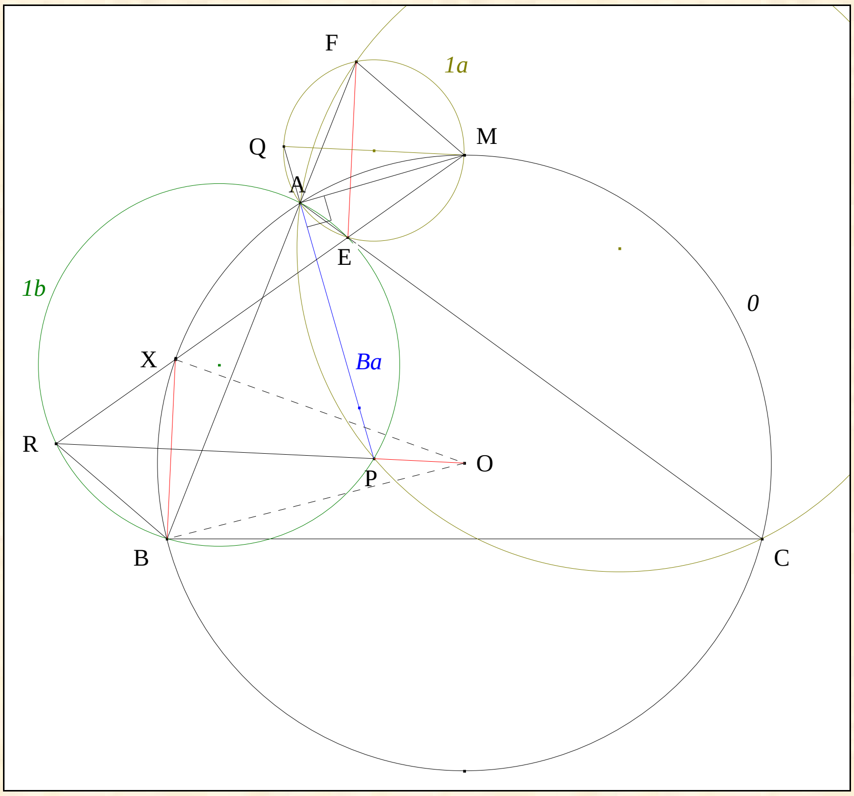


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	Ba	la A-bissectrice intérieure de ABC,
	P	un point de *Ba*,
	1b, *1c*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PAB, PAC
et	E, F	les seconds points d'intersection de *1b, 1c* resp ; avec (AC), (AB).

Donné : (EF) est perpendiculaire à (OP).

VISUALISATION

4 Geometry, AoPS du 06/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1423629_geometry



- Notons *1a* le cercle circonscrit au triangle AEF,
  M le second point d'intersection de *1a* et *0*,
  X, R les seconds points d'intersection de (ME) resp. avec *0*, *1a*
  et Q le second point d'intersection de (AP) avec *1a*.

- D'après Etape **3**, M étant le premier A-perpoint de ABC, (AM) ⊥ (AP) ;
  en conséquence, (MQ) est un diamètre de *1a*.

- D'après Etape **3**, (MQ) ⊥ (EF).

- Les cercles *1a* et *1b*, les point de base E et A, les moniennes (MER) et (QAP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (MQ) // (RP).

- Les cercles *1a* et *0*, les point de base M et A, les moniennes (EMX) et (FAB), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (EF) // (XB).

- **Conclusion partielle :** la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (RP) ⊥ (XB).

- Les cercles *1a* et *1b*, les point de base E et A, les moniennes (MER) et (FAB), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (MF) // (RB).

- **Conclusion partielle :** le triangle RBX est R-isocèle,
  d'après "Le théorème de la médiatrice", (XB) ⊥ (OR).

- D'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (RP) // (OR) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (RP) = (OR) ;
  en conséquence, (XB) ⊥ (OP).

- **Conclusion :** (EF) est perpendiculaire à (OP).

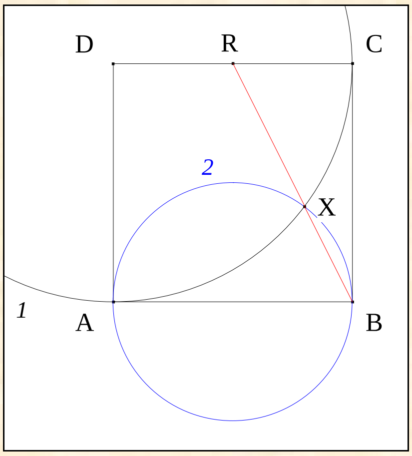
SEQUENCE 2 [5]

2007 Flanders Math Olympiad, Problem **3**

ÉTAPE 1

VISION

Figure :

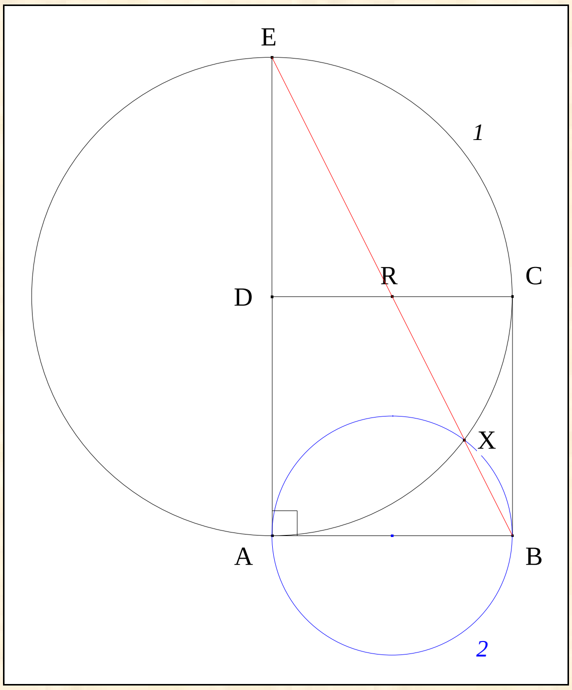


Traits :	ABCD	un carré,
	1	le cercle de centre D passant par A,
	2	le cercle de diamètre [AB],
	X	le second point d'intersection de *1* et *2*,
et	R	le point d'intersection de (BX) et (CD).

Donné : R est le milieu de [CD].

VISUALISATION

[5] flemish areas, AoPS du 26/04/2015 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1082268_flemish_areas



- Notons E l'antipôle de A relativement à *1*.

- *2* étant orthogonal à *1*, (BX) passe par E.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, B, X, R et E sont alignés.

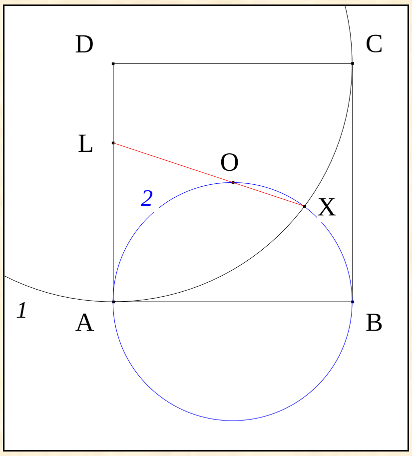
• D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle EAB,	**(1)**	R est le milieu de [BE]
	(2)	2.DR = AB.

- **Conclusion :** R est le milieu de [CD].

ÉTAPE 2

VISION

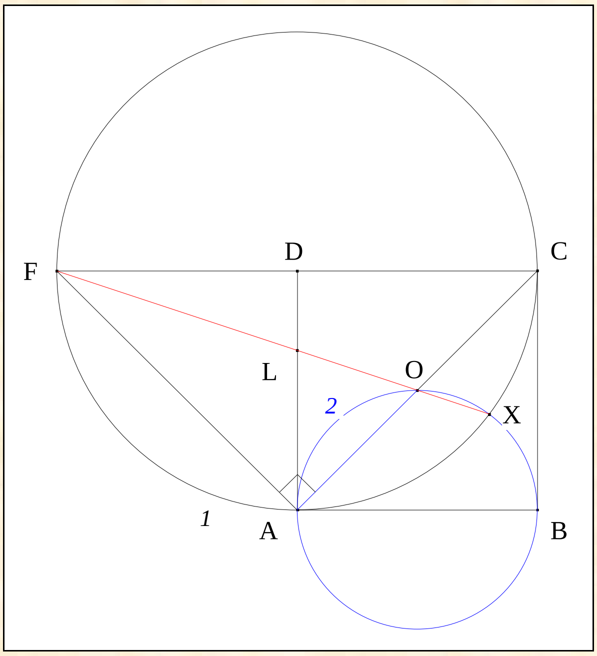
Figure :



Traits :	ABCD	un carré tel que AB = 1,
	O	le centre de ABCD,
	1	le cercle de centre D passant par A,
	2	le cercle de diamètre [AB],
	X	le second point d'intersection de *1* et *2*,
et	L	le point d'intersection de (OX) et (AD).

Donné : L est le premier tiers-point de [DA] à partir de D. [6]

VISUALISATION



[6] Ayme J.-L., A square **2**, AoPS du 29/03/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1413271_a_square_2

- Notons F l'antipôle de C relativement à *1*.
- **Scolies :** **(1)** O est le milieu de [AC]

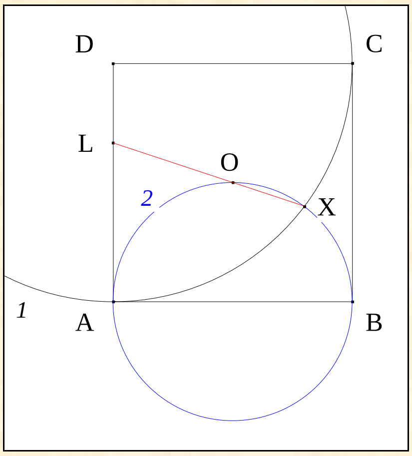
  (2) <OAF = 1d
- *2* étant orthogonal à *1*, O, X et F sont alignés.
- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, X, O, L et F sont alignés.
- D'après Archimède "Le point médian" [7], L point médian du triangle ACF ;
- **Conclusion :** L est le premier tiers-point de [DA] à partir de D.

[7] Archimède, proposition **13**, Sobre el equilibrio de los platos, Livre **I** (vers 225 a. J.-C.)

ÉTAPE 3

VISION

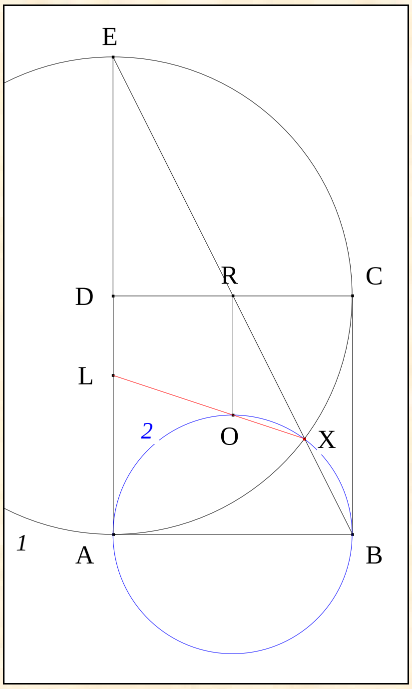
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	O	le centre de ABCD,
	1	le cercle de centre D passant par A,
	2	le cercle de diamètre [AB],
	X	le second point d'intersection de *1* et *2*,
et	L	le point d'intersection de (OX) et (AD).

Donné : évaluer OX/OL. [8]

VISUALISATION



[8] Ayme J.-L., An evaluation, AoPs du 30/03/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1413817_an_evaluation

- Considérons ABCD comme ayant pour côté 1.

- Notons E l'antipôle de A relativement à *1*
  et R le point d'intersection de (BX) et (CD).

- D'après
  * Etape **1**, R est le milieu de [CD]
  * Etape **2**, L est le premier tiers-point de [DA] à partir de D.

- Les triangles XLE et XOR étant semblables, XL/XO = LE/OR (= 8/3).

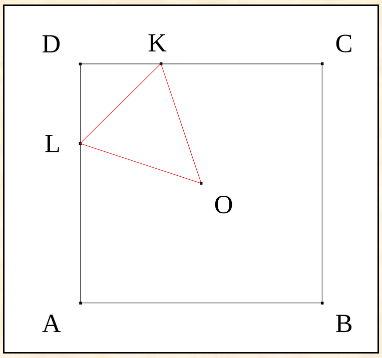
- Une chasse de rapports :
  * nous avons, 8/3 = XL/XO
  * par une autre écriture, XL/XO = (XO + OL)/XO
  * par décomposition, (XO + OL)/XO = 1 + OL/OX
  * par transitivité de =, 8/3 = 1 + OL/OX
  * par transposition, OL/OX = 5/3.

- **Conclusion :** OX/OL = 3/5.

ÉTAPE 4

VISION

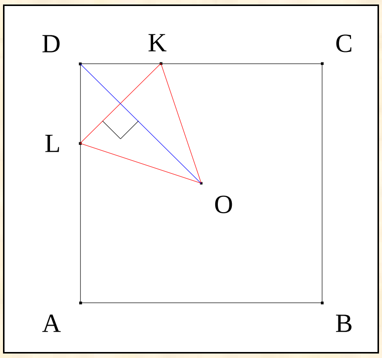
Figure :



Traits : ABCD un carré tel que AB = 1,
O le centre de ABCD,
et K, L les premiers tiers-points de [DC], [DA] à partir de D.

Donné : évaluer [OLK]. [9]

VISUALISATION



- Le quadrilatère OKDL étant un cerf-volant, [OKDL] = ½ .OD.KL .
- D'après "Le théorème de Pythagore"

  appliqué * au triangle O-rectangle OCD, OD² = 1/2

  * au triangle D-rectangle DKL, KL² = 2/9.
- **Conclusion partielle :** par substitution, [OKDL] = 1/6.
- Par la formule égyptienne, [DKL] = 1/18 ;

  en conséquence, [OLK] = [OKDL] – [DKL]
- **Conclusion :** [OLK] = 1/9.

---

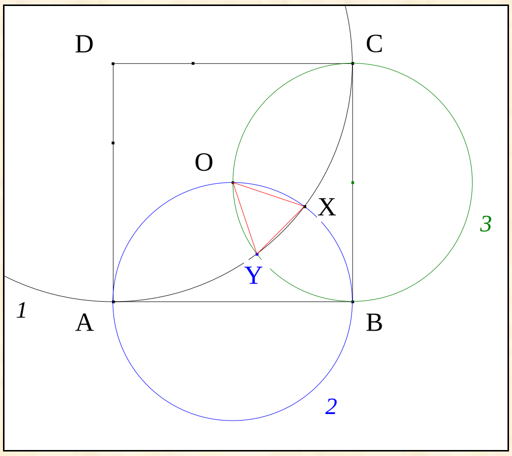
[9] Area of a quadrilateral, AoPS du 30/03/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c4h1413824_area_of_a_quadrilateral

ÉTAPE 5

2007 Flanders Math Olympiad, Problem **3**

VISION

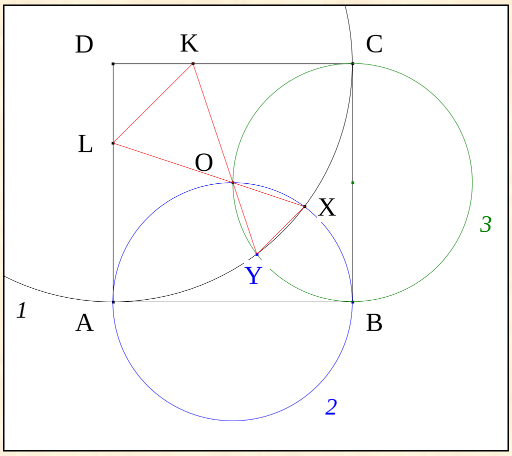
Figure :



Traits :	ABCD	un carré tel que AB = 1,
	O	le centre de ABCD,
	1	le cercle de centre D passant par A,
	2, *3*	les cercles de diamètre resp. [AB], [BC]
et	X, Y	les seconds points d'intersection de *1* resp. de *2*, *3*

Donné : évaluer [OXY]. [10]

VISUALISATION



- Notons L, K les points d'intersection resp. de (OX) et (AD), (OY) et (CD).
- D'après Etape **3**, OX/OL = 3/5.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que OY/OK = 3/5.

[10] flemish areas, AoPS du 26/04/2015 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1082268_flemish_areas

- Les triangles OXY et OLK étant homothétiques, [OXY] / [OLK] = $(OX/OL)^2$

  en conséquence, [OXY] = [OLK].$(OX/OL)^2$

- D'après Etape **4**, [OLK] = 1/9.

- **Conclusion :** par substitution, [OXY] = 1/25.

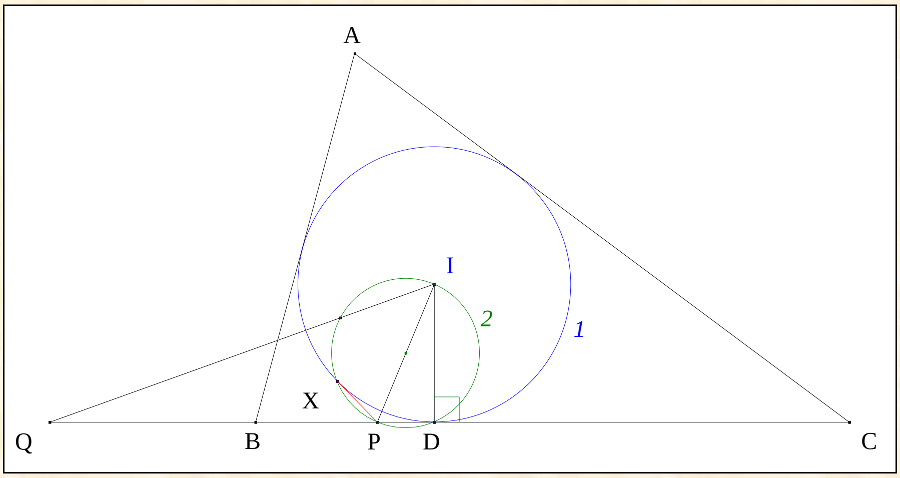
SEQUENCE 3 [11]

Une égalité angulaire

ÉTAPE 1

VISION

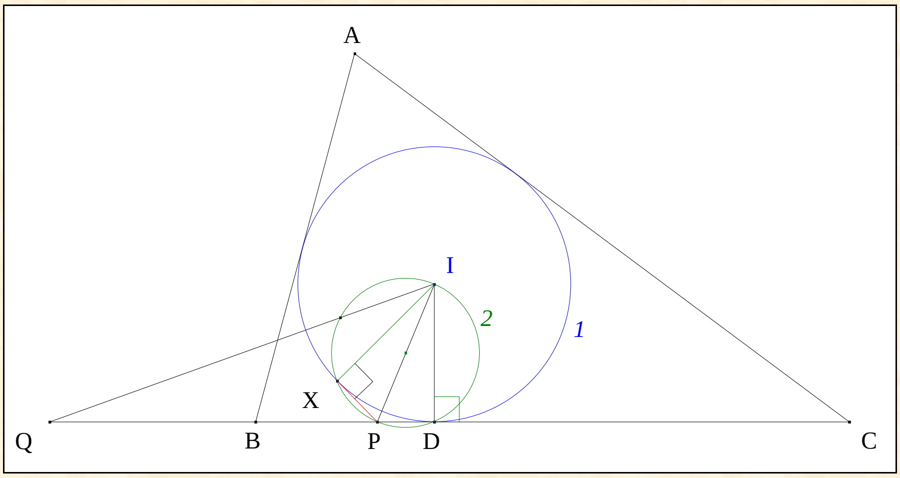
Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
P, Q deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique,
D le point de contact de *1* avec (BC),
2 le cercle de diamètre [IP] ; il passe par D ;
et X le second point d'intersection de *2* et *1*.

Donné : (XP) est tangente à *1* en X.

VISUALISATION

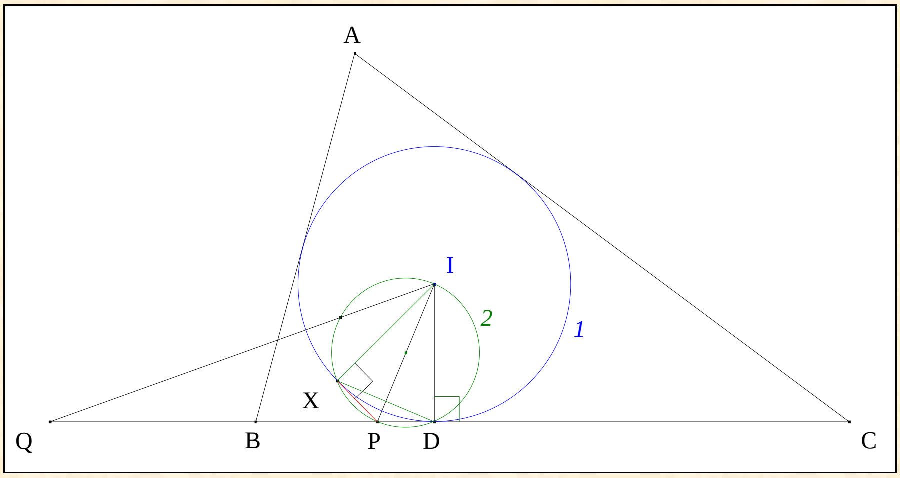


[11] Equal angle, AoPS du 15/12/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1354216_equal_angle

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", le triangle XPI est X-rectangle.

- **Conclusion :** par définition d'une tangente appliquée à *1*, (XP) est la tangente à *1* en X.

Scolie :

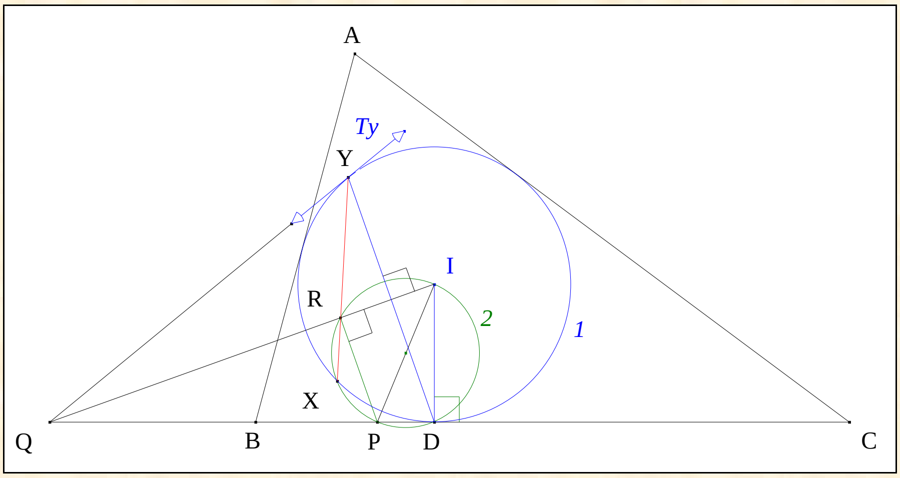


- **Conclusion :** (PI) est la P-bissectrice intérieure du triangle PDX.

ÉTAPE 2 [12]

VISION

Figure :



Traits :

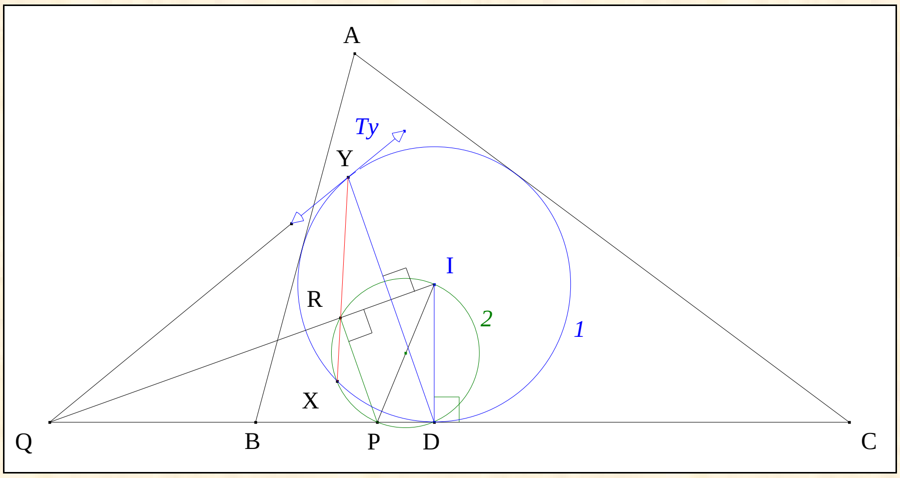
ABC	un triangle,
1	le cercle inscrit à ABC,
I	le centre de *1*,
P, Q	deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique,
D, R	les pieds des perpendiculaires à (BC), (QI) issues resp. de I, P,
2	le cercle de diamètre [IP] ; il passe par D et E ;

[12] Ayme J.-L., Collinear, AoPS du 09/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1425396_collinear

	X	le second point d'intersection de *2* et *1*,
	Y	le symétrique de D par rapport à (QI) ; Y est sur *1* ;
et	*Ty*	la tangente à *1* en Y.

Donné : R, X et Y sont alignés.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** par symétrie d'axe (QI), *Ty* passe par Q

  (2) (QI) est la médiatrice de [DY]

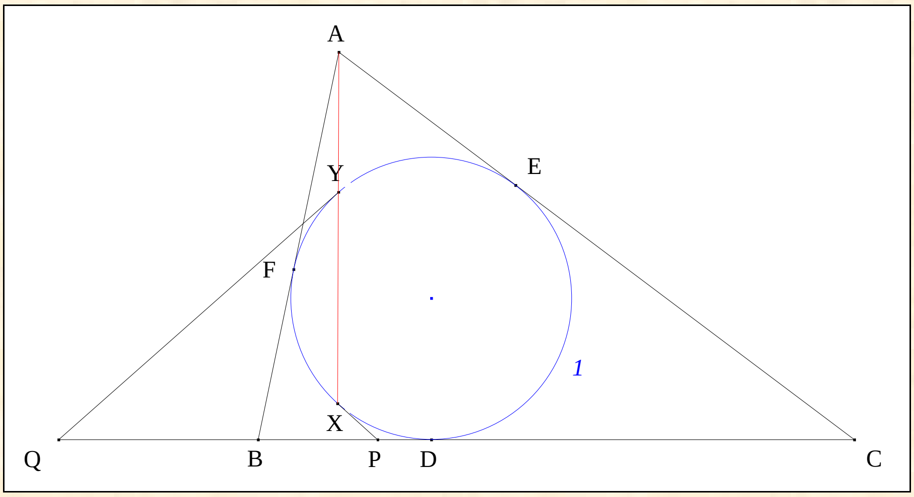
  (3) (PR) // (DY).

- **Conclusion :** les cercles *2* et *1*, les points de base D et X, la monienne (PDD), les parallèles (PR) et (DY), conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, R, X et Y sont alignés.

ÉTAPE 3

VISION

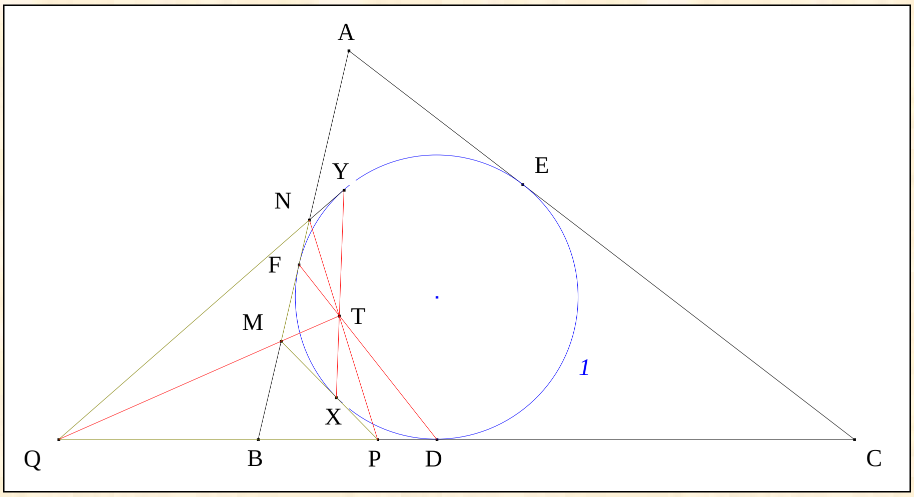
Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
P, Q deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique
et Y, Z les seconds points de contact des tangentes à *1* issues resp. de P, Q.

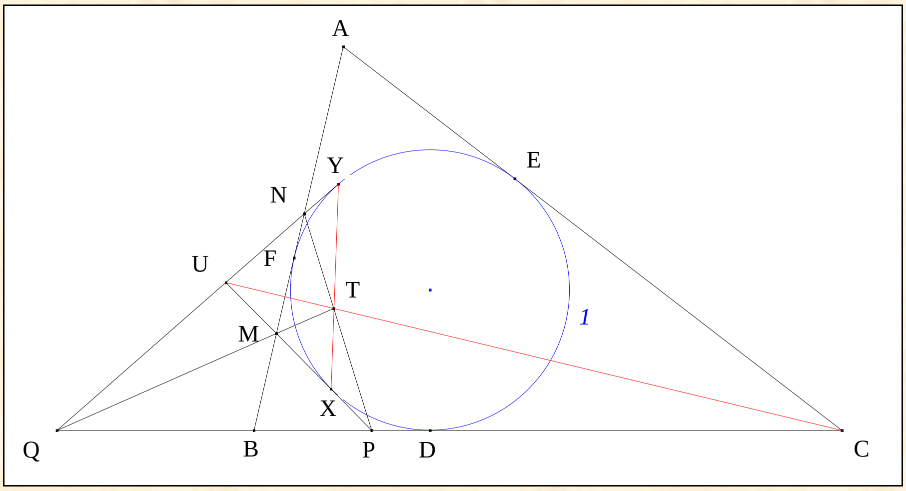
Donné : A, X et Y sont alignés.

VISUALISATION



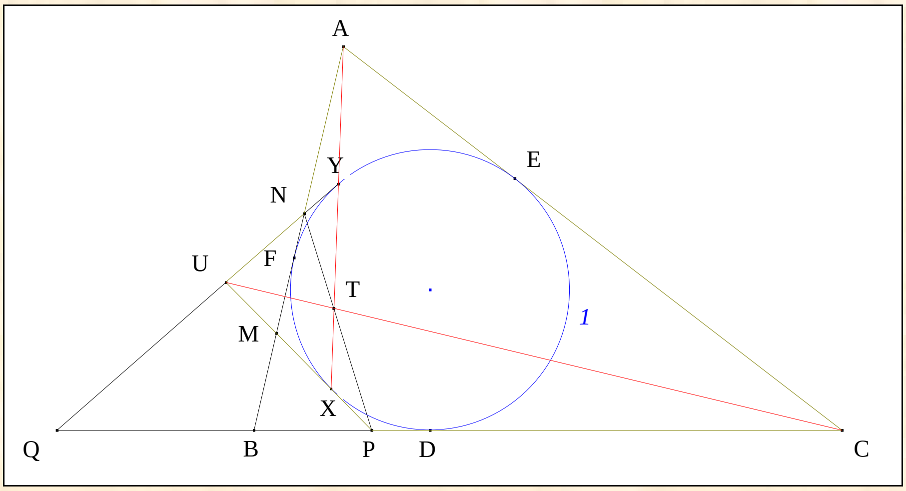
- Notons M, N les points d'intersection de (AB) resp. avec (PX), (QY).
- D'après "Le théorème de Newton" [13]
  appliqué au quadrilatère circonscriptible PQNM, (XY), (DF), (QM) et (PN) sont concourantes.
- Notons T ce point de concours.

[13] Ayme J.-L., La ponctuelle de Newton, G.G.G. vol. **8**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons U le point d'intersection de (PM) et (NQ).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" [14]
  appliqué au triangle NPQ et à la transversale (UT), (UT) passe par C.



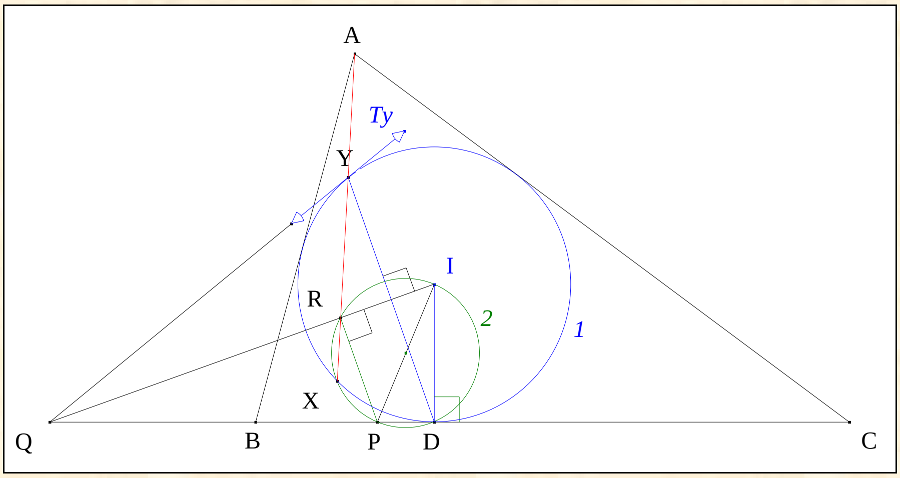
- D'après Carnot "Pentagone tangentiel" [15]
  appliqué à UPCANU, (XA), (UC) et (PN) sont concourantes en T
  ou encore, X, T et A sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, A, X et Y sont alignés.

Scolies : **(1)** un merveilleux alignement

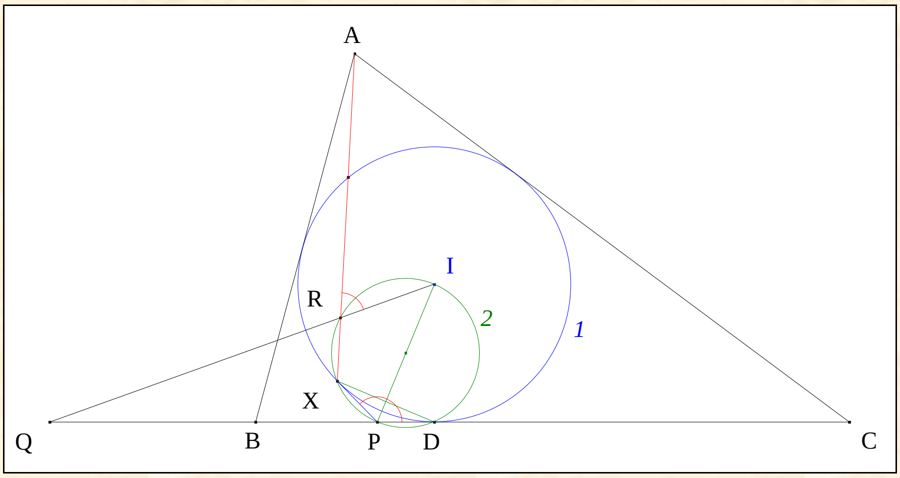
[14] Pappus d'Alexandrie, Collections, Livre **VII**, proposition **131**

[15] Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456



- **Conclusion :** d'après Étape **2**, A, X, Y et R sont alignés.

(2) Une égalité angulaire inattendue [16]



- Une chasse angulaire :

  * le quadrilatère IRXP étant cyclique, <IRA = <IPX
  * d'après Étape **1** scolie, <IPX = <DPI
  * par une autre écriture, <DPI = <CPI.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <IRA = <CPI.

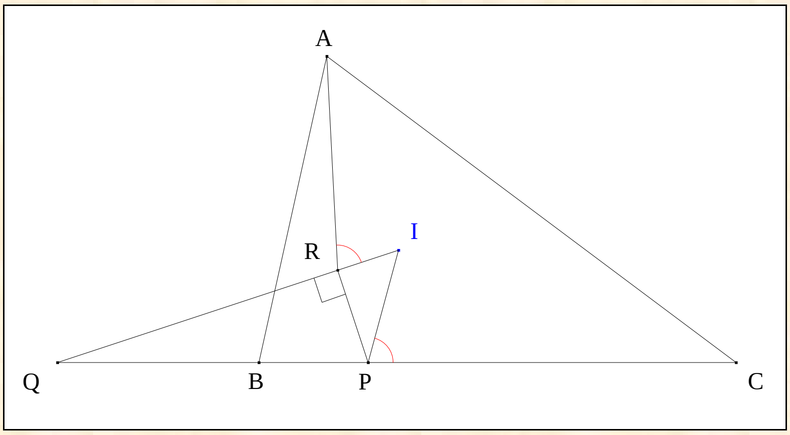
[16] Equal angle, AoPS du 15/12/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1354216_equal_angle

ÉTAPE 4 [17]

Restitution du problème

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
P, Q deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique
et R le pied de la perpendiculaire à (QI) issue de P.

Donné : <IRA= <CPI.

[17] Equal angle, AoPS du 15/12/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1354216_equal_angle

SEQUENCE 4 [18]

dedicated

to

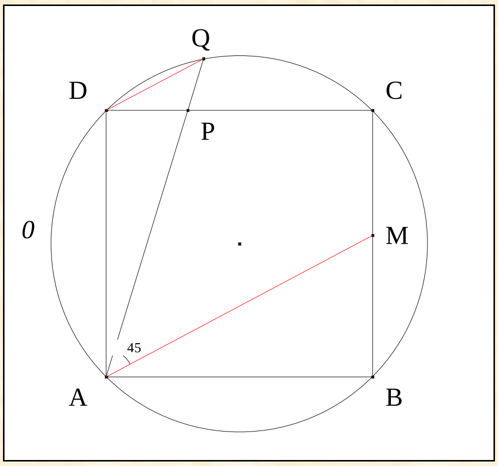
Stan Fulger

Deux triangles homothétiques

ÉTAPE 1

VISION

Figure :



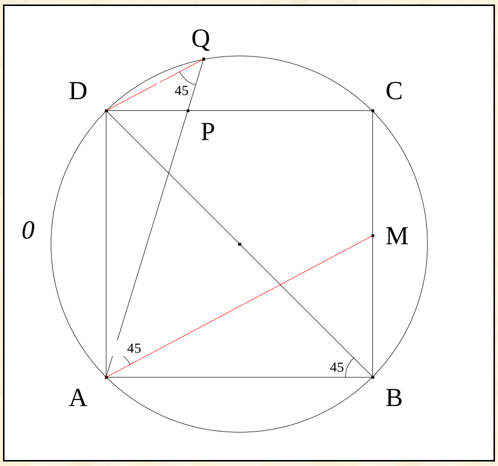
Traits : ABCD un carré,
M, P deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
0 le cercle circonscrit à ABCD
et Q le second point d'intersection de (AP) avec *0*.

Donné : (AM) est parallèle à (DQ). [19]

VISUALISATION

[18] Fulger S., Square and circumcircle, AoPS du 21/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1481472_square_and_circumcircle

[19] Ayme J.-L., Square and circumcircle **I**, Inspired by sunken rock, AoPS du 27/07/2017
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1484974_square_and_circumcircle_i

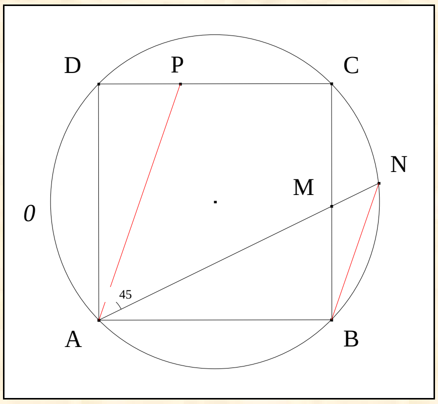


- Une chasse angulaire :

*	par "Angles inscrits",	<DQA = 45°
*	par hypothèse,	45° = <MAQ
*	par transitivité de =,	<DQA = <MAQ
*	par "Angles alterne-interne",	(AM) // (DQ).

- **Conclusion :** (AM) est parallèle à (DQ).

Scolie :



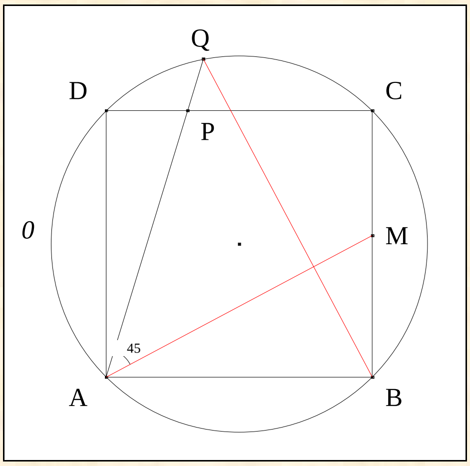
- Notons N le second point d'intersection de (AM) avec *0*.

- **Conclusion :** mutatis mutandis,
  nous montrerions que (AP) est parallèle à (BN).

ÉTAPE 2

VISION

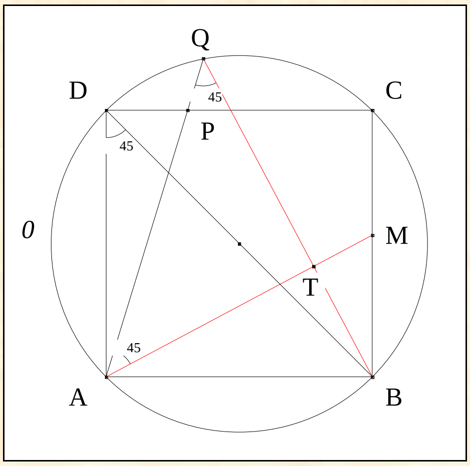
Figure :



Traits : ABCD un carré,
M, P deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
0 le cercle circonscrit à ABCD
et Q le second point d'intersection de (AP) avec *0*.

Donné : (AM) est perpendiculaire à (BQ). [20]

VISUALISATION



- Notons T le point d'intersection de (AM) et (BQ).

- Une chasse angulaire :

  * par "Angles inscrits", <AQB = 45°

  * par hypothèse, 45° = <MAQ

[20] Ayme J.-L., Square and circumcircle **II**, Inspired by sunken rock, AoPS du 27/07/2017
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1484983_square_and_circumcircle_ii

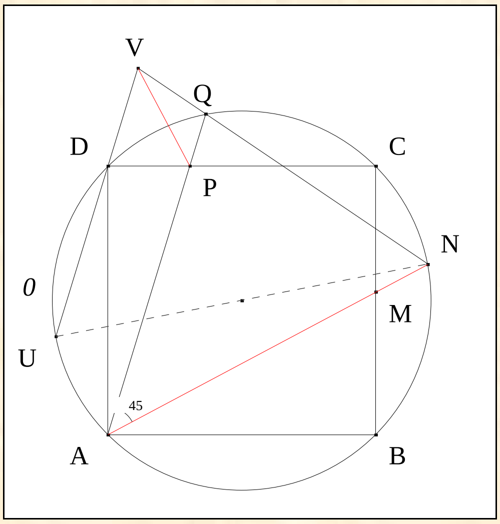
*	par transitivité de =,	<AQB = <MAQ ou encore <AQT = <TAQ
*	en conséquence,	le triangle TAQ est isocèle
*	par "Le théorème 180",	TAQest T-rectangle.

- **Conclusion :** (AM) est perpendiculaire à (BQ).

ÉTAPE 3

VISION

Figure :



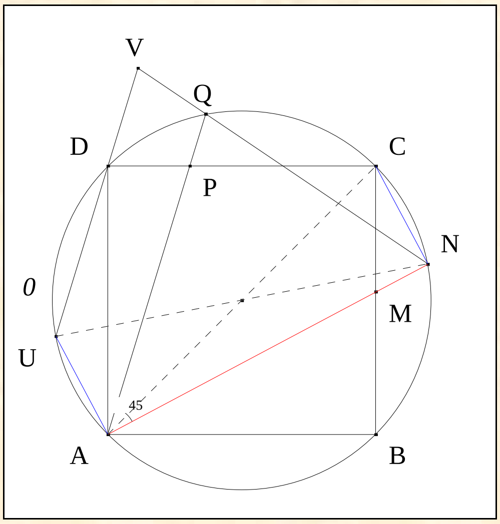
Traits :

	ABCD	un carré,
	M, P	deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	N, Q	les seconds points d'intersection de (AM), (AP) avec *0*,
	U	l'antipôle de N relativement à *0*
et	V	le point d'intersection de (UD) et (NQ).

Donné : (VP) est perpendiculaire à (AN). [21]

VISUALISATION

[21] Ayme J.-L., Square and circumcircle **III**, Inspired by sunken rock, AoPS du 27/07/2017
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1484985_square_and_circumcircle_iii

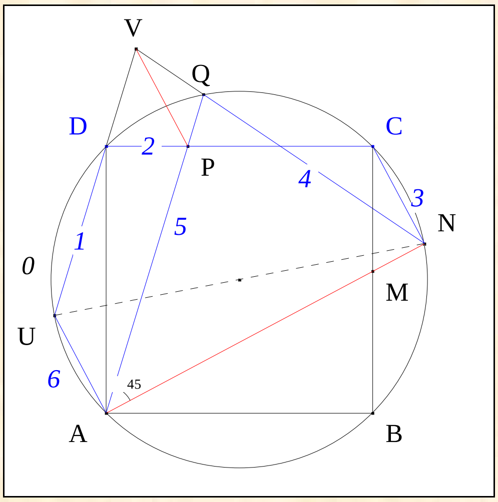


- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle" appliqué

  * au triangle ACN, (NC) ⊥ (AN)

  * au triangle NUA, (AN) ⊥ (AU)

  * d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (NC) // (AU).



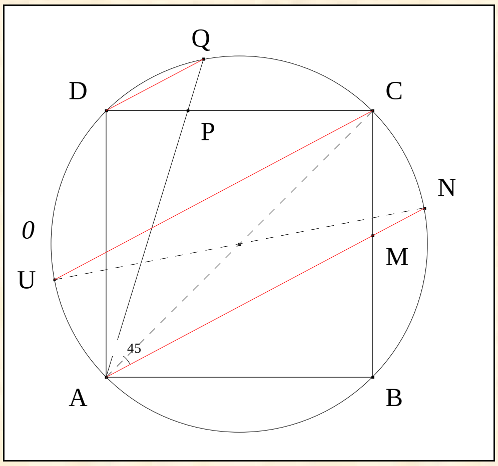
- D'après Aubert-Pascal "Hexagramma mysticum" [22]
  appliqué à l'hexagone cyclique UDCNQAU, **(1)** (VP) en est la pascale

  (2) (VP) // (NC).

- **Conclusion :** (VP) est perpendiculaire à (AN).

Scolie : des parallèles

[22] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12**, p. 14-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

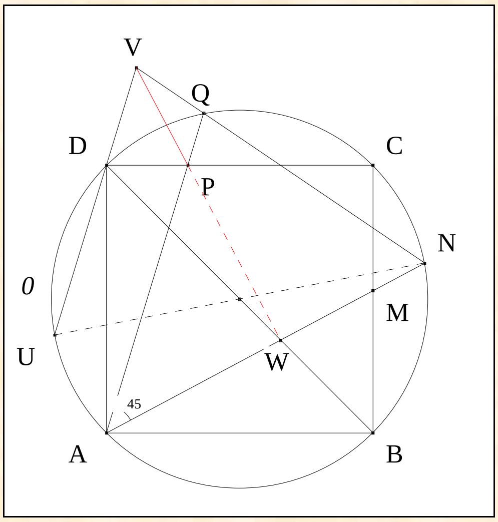


- **Conclusion :** (AN), (CU) et (DQ) sont parallèles entres elles.

ÉTAPE 4

VISION

Figure :

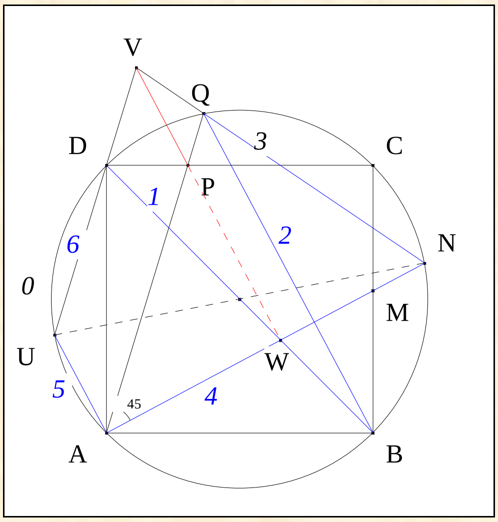


Traits :		ABCD	un carré,
		M, P	deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
		0	le cercle circonscrit à ABCD,
		N, Q	les seconds points d'intersection de (AM), (AP) avec *0*,
		U	l'antipôle de N relativement à *0*
	et	V, W	les points d'intersection de (UD) et (NQ), (AN) et (BD).

Donné : W est sur (VP). [23]

[23] Ayme J.-L., Square and circumcircle **IV**, Inspired by sunken rock, AoPS du 27/07/2017
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1485555_square_and_circumcircle_iv

VISUALISATION



- **Scolie :** (AU) // (BQ)

- D'après Aubert-Pascal "Hexagramma mysticum" [24] appliqué à l'hexagone cyclique DBQNAUQ, **(1)** (WV) en est la pascale

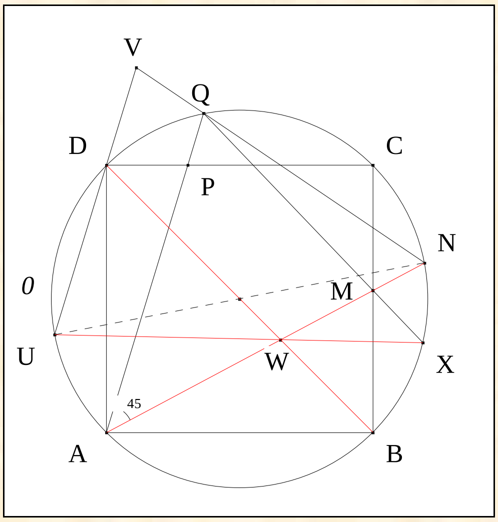
  (2) (WV) // (VP).

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, W est sur (VP).

ÉTAPE 5

VISION

Figure :

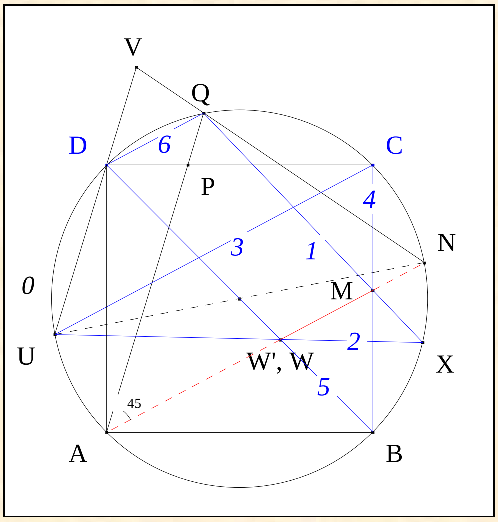


[24] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12**, p. 14-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Traits : ABCD un carré,
M, P deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
N, Q les seconds points d'intersection de (AM), (AP) avec *0*,
X le second point d'intersection de (QM) avec *0*
et U l'antipôle de N relativement à *0*.

Donné : (UX), (AN) et (BD) sont concourantes. [25]

VISUALISATION



- D'après Étape **3**, scolie (AMN), (CU) et (DQ) sont parallèles entre elles.
- Notons W, W' les points d'intersection de (AN) et (BD), (XU) et (BD).
- D'après Aubert-Pascal "Hexagramma mysticum" [26]
  appliqué à l'hexagone cyclique QXUCBDQ, **(1)** (MW') en est la pascale

  (2) (MW') // (AMN).
- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, W' étant sur (AMN), W' et W sont confondus.
- **Conclusion :** (UX), (AN) et (BD) sont concourantes.

---

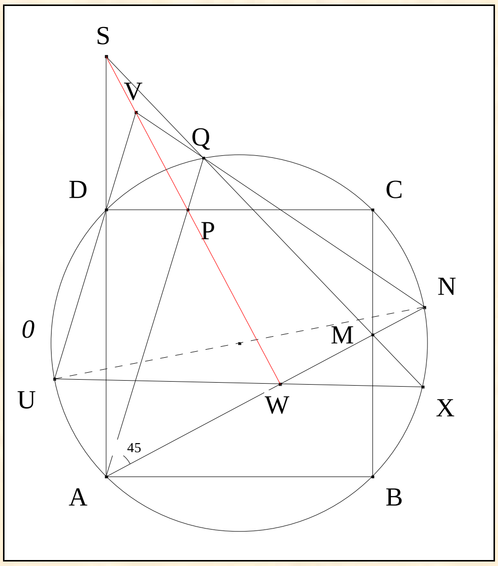
[25] Ayme J.-L., Square and circumcircle **V**, Inspired by sunken rock, AoPS du 27/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1485570_square_and_circumcircle_v

[26] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12**, p. 14-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ÉTAPE 6

VISION

Figure :

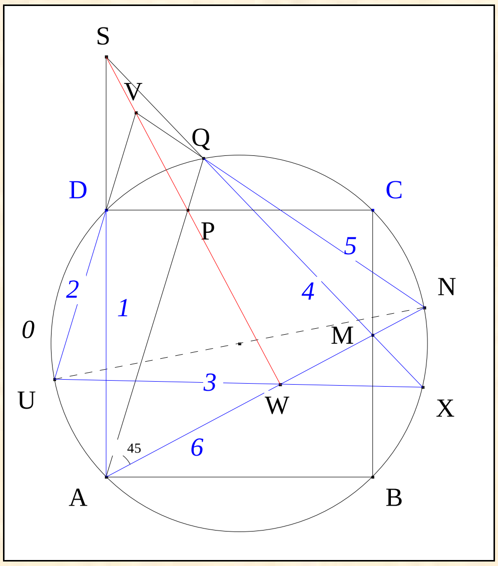


Traits :	ABCD	un carré,
	M, P	deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	N, Q	les seconds points d'intersection de (AM), (AP) avec *0*,
	X	le second point d'intersection de (QM) avec *0*,
	U	l'antipôle de N relativement à *0*
et	S, V, W	les points d'intersection de (AD) et (XQ), (UD) et (NQ), (AN) et (XU).

Donné : S est sur (VW). [27]

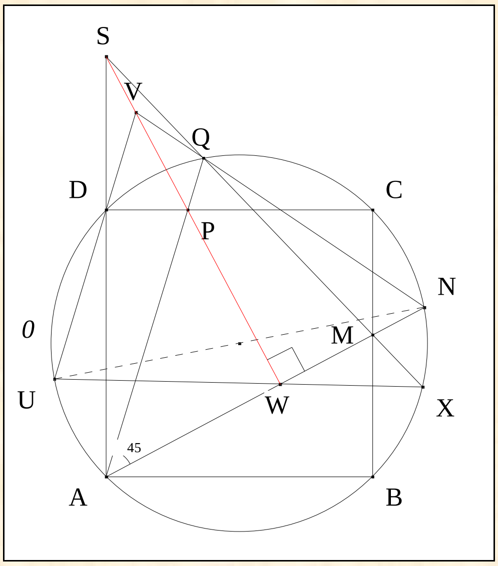
VISUALISATION

[27] Ayme J.-L., Square and circumcircle **VII**, Inspired by sunken rock, AoPS du 27/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1485580_square_and_circumcircle_vii



- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" [28], (SVW) est la pascale de l'hexagone cyclique ADUXQNA
- **Conclusion :** S est sur (VW).

Scolies : **(1)** quatre points alignés



- D'après * Étape **4**, P, V, W sont alignés
  * Étape **6**, S, V, W sont alignés
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, P, S, V et W sont alignés.

(2) Une perpendiculaire

- **Conclusion :** d'après Étape **3**, (PS) ⊥ (AN)

(3) Deux parallèles

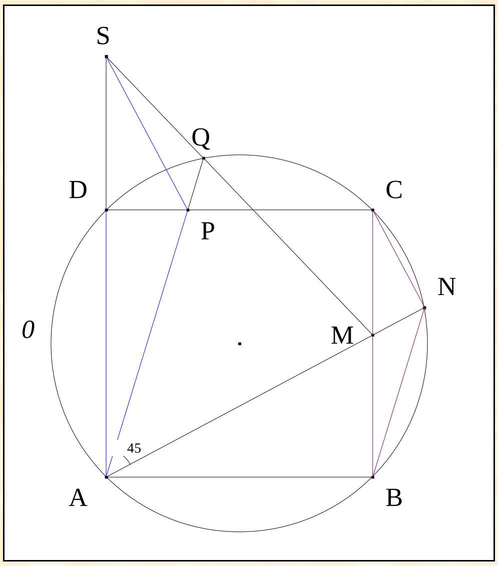
[28] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12**, p. 14-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- Nous avons : (PS) ⊥ (AN).
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (AN) ⊥ (NC).
- **Conclusion :** d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (PS) // (NC).

ÉTAPE 7

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
M, P deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
N, Q les seconds points d'intersection de (AM), (AP) avec *0*
et S le point d'intersection de (AD) et (MQ).

Donné : le triangle APS est homothétique au triangle BNC. [29]

VISUALISATION

- Par hypothèse, (AS) //(BC).
- D'après Étape **1**, (AP) // (BN).
- D'après Étape **6**, scolie **3**, (PS) // (NC).
- **Conclusion :** le triangle APS est homothétique au triangle BNC.

[29] Ayme J.-L., Square and circumcircle **VIII**, Inspired by sunken rock, AoPS du 27/07/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1485583_square_and_circumcircle_viii

ÉTAPE 8

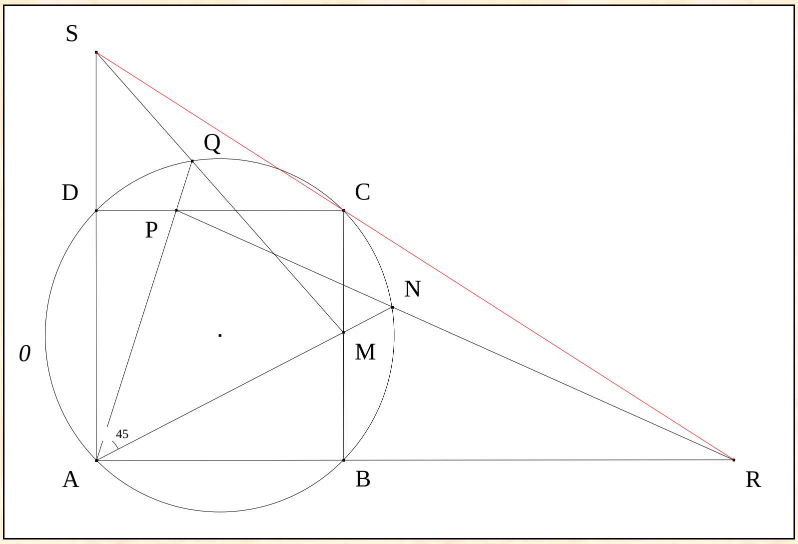
Restitution du problème

de

Stan Fulger (Roumanie) [30]

VISION

Figure :

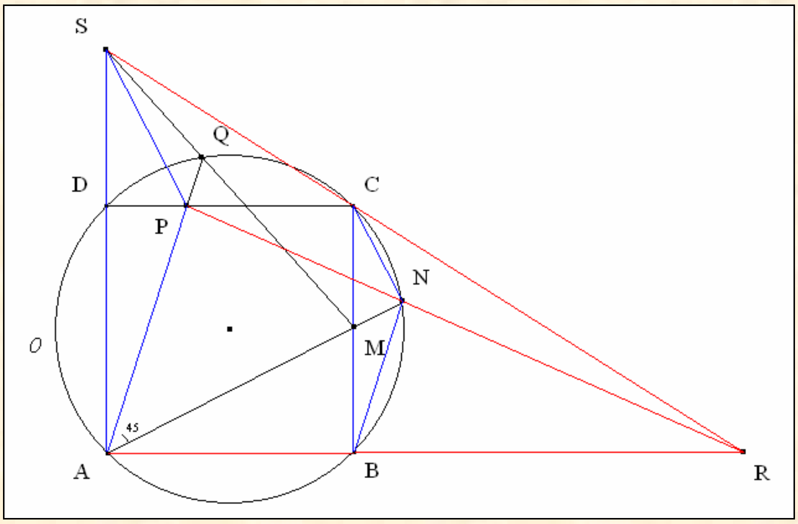


Traits :	ABCD	un carré,
	M, P	deux points resp. de [BC], [CD] tels que <MAP = 45°,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	N, Q	les seconds points d'intersection de (AM), (AP) avec *0*
et	R, S	les points d'intersection de (AB) et (PN), (AD) et (MQ).

Donné : S, C et R sont alignés.

VISUALISATION

[30] Fulger S., Square and circumcircle, AoPS du 21/07/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1481472_square_and_circumcircle



- D'après Étape **7**, le triangle APS est homothétique au triangle BNC.
- BNC étant "plus petit" que APS, (AB), (PN) et (SC) concourent en R.
- **Conclusion :** S, C et R sont alignés.

***SEQUENCE* 5** [31]

Sharygin Finals 2017, Problem **8.8**

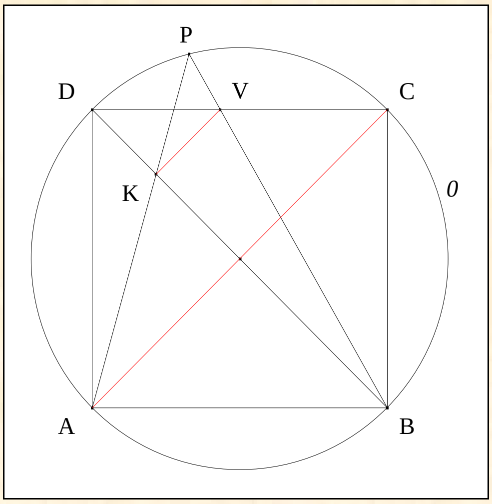
de

Tran Quang Hung

ÉTAPE 1

VISION

Figure :



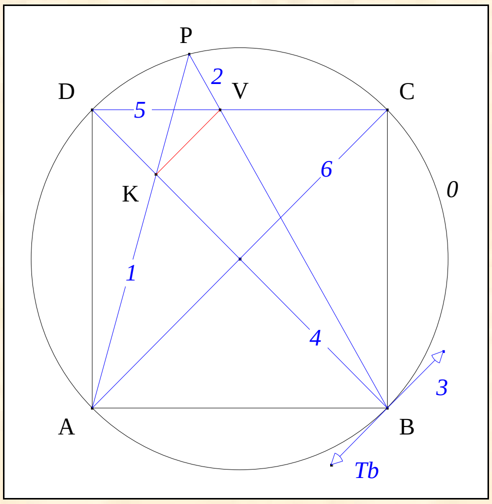
Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A
et K, V les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (CD).

Donné : (VK) est parallèle à (AC). [32]

VISUALISATION

[31] Fulger S., Square and circumcircle, AoPS du 21/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1481472_square_and_circumcircle

[32] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 05/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490497_two_parallels_in_a_square



- Notons *Tb* la tangente à *0* en B.

- **Scolie :** Tb // (AC).

- D'après Carnot-Pascal "Pentagramma mysticum" [33] appliqué à l'hexagone dégénéré cyclique APB *Tb* DCA **(1)** (VK) en est la pascale

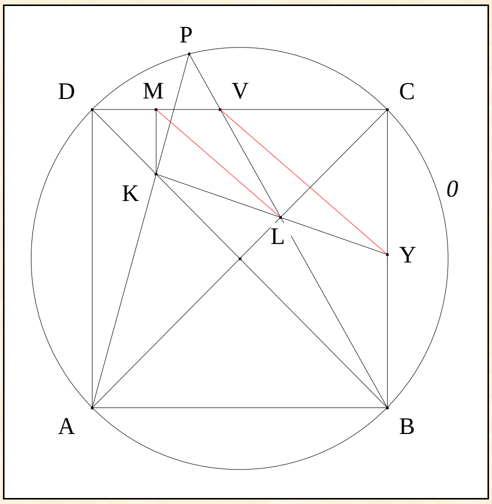
  (2) (VK) // (AC).

- **Conclusion :** (VK) est parallèle à (AC).

ÉTAPE 2

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,

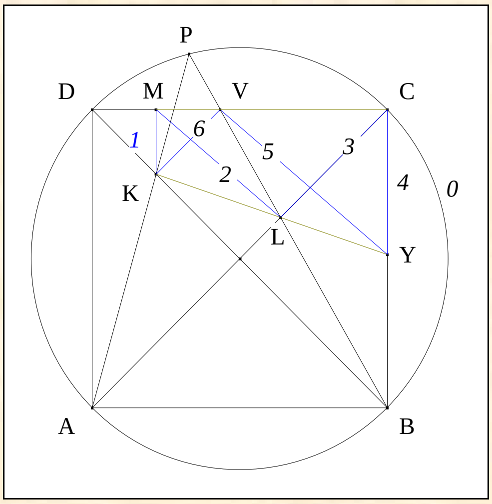
---

[33] Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456
Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L, V	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC), (PB) et (CD),
	Y	le point d'intersection de (KL) et (BC),
et	M	le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K.

Donné : (VY) est parallèle à (ML). [34]

VISUALISATION



- **Scolie :** (KM) // (CY).
- D'après Problème **9**, (VK) // (AC).
- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [35]
  appliqué au quadrilatère sectoriel KMLCYVK de frontières (KY) et (MC), (VY) // (ML).
- **Conclusion :** (VY) est parallèle à (ML).

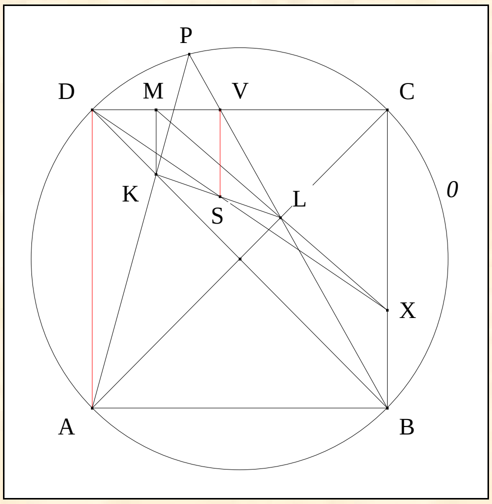
ÉTAPE 3

VISION

Figure :

[34] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490844_two_parallels

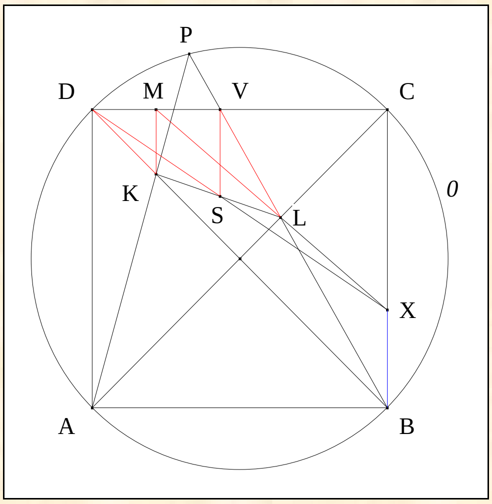
[35] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A,
K, L, V les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC), (PB) et (CD),
M le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K,
X le point d'intersection de (ML) et (BC),
et S le point d'intersection de (DX) et (KL).

Donné : (SV) est parallèle à (AD). [36]

VISUALISATION



- **Scolie :** (KM) // (BX).

- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [37]
  (BX) étant la pascale du quadrilatère sectoriel KMLVSDK de frontières (KL) et (CD), (SV) // (KM).

- **Conclusion :** (SV) est parallèle à (AD).

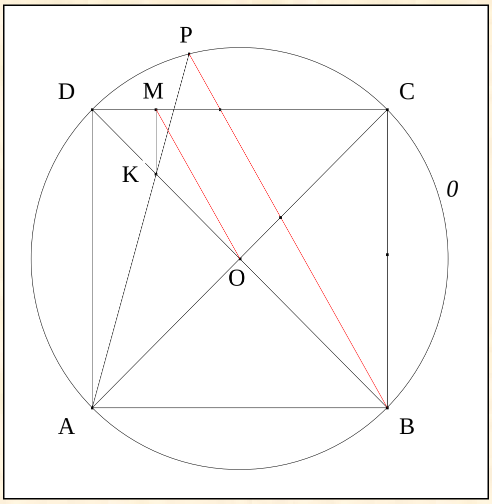
[36] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490869_two_parallels

[37] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ÉTAPE 4

VISION

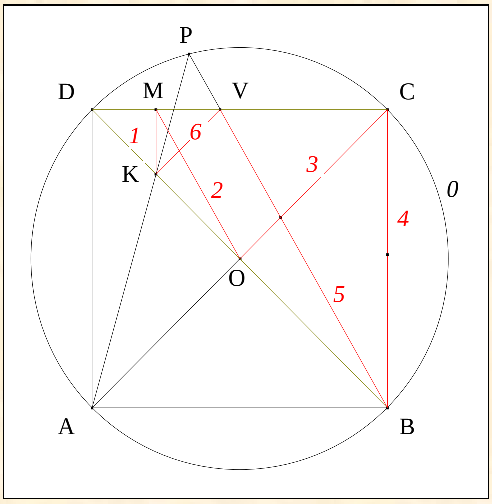
Figure :



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A
et M le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K.

Donné : (OM) est parallèle à (PB). [38]

VISUALISATION



- Notons V le point d'intersection de (PB) et (CD).
- **Scolie :** (KM) // (BC).
- D'après Problème **9**, (KV) // (AC).

[38] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490884_two_parallels

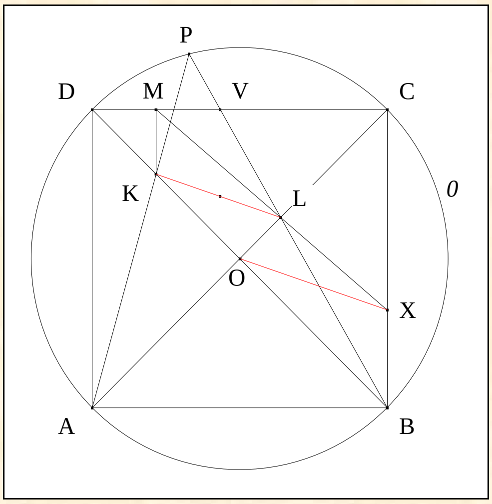
- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [39]
  appliqué au quadrilatère sectoriel KMOCBVK de frontières (DC) et (DB), (OM) // (BV).

- **Conclusion :** (OM) est parallèle à (PB).

ÉTAPE 5

VISION

Figure :



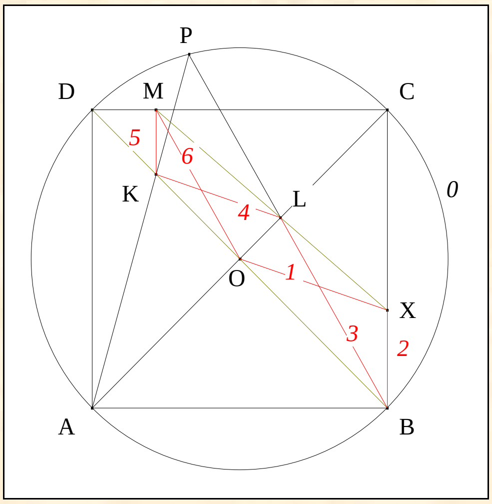
Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	O	le centre de *0*,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
	M	le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de K
et	X	le point d'intersection de (ML) et (BC).

Donné : (OX) est parallèle à (KL). [40]

VISUALISATION

[39] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[40] Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490887_two_parallels_a_better_formulation



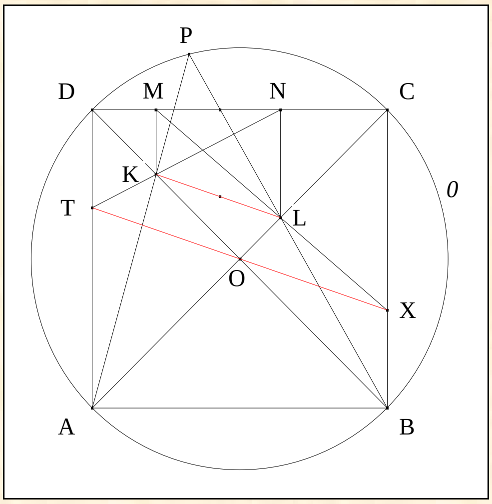
- **Scolie :** (KM) // (BX).

- D'après Problème **12**, (OM) // (BL).

- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [41]
  appliqué au quadrilatère sectoriel OXBLKMO de frontières (BD) et (MX), (OX) // (KL).

- **Conclusion :** (OX) est parallèle à (KL).

Scolie : une jolie parallèle à (KL)



- Notons N le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de L
  et T le point d'intersection de (NK) et (AD).

- Mutatis mutandis nous montrerions que (KL) // (OT) ;
  par transitivité de //, (OX) // (OT) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (OX) = (OT) ;
  en conséquence, X, O et T sont alignés.

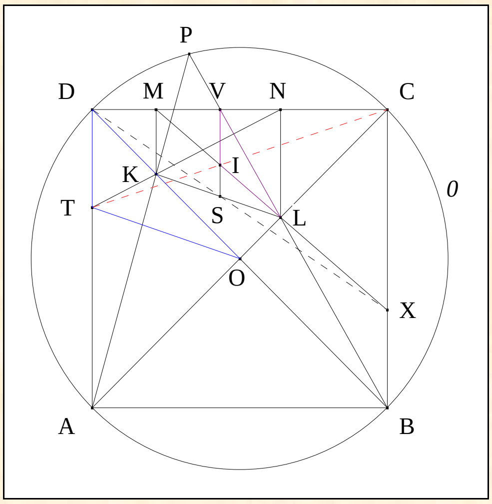
- **Conclusion :** (XOT) est parallèle à (KL).

[41] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ÉTAPE 6

VISION

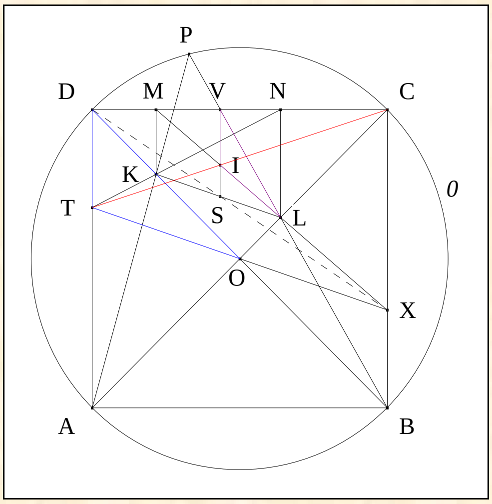
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	O	le centre de *0*,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
	M, N	les pieds des perpendiculaires à (CD) issues resp. de K, L,
	X, T	les points d'intersection resp. de (ML) et (BC), (NK) et (AD),
	V	le point d'intersection de (PB) et (CD),
	S	le point d'intersection de (DX) et (KL),
et	I	le point d'intersection de (SV) et (ML).

Donné : C, I et T sont alignés. [42]

VISUALISATION



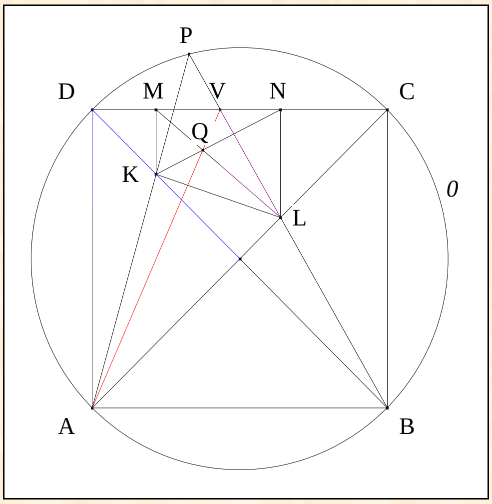
[42] Ayme J.-L., Three collinear points, AoPS du 06/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1490911_three_collinear_points

- D'après Problème **11**, (TD) // (IV).
- D'après Problème **13**, scolie, T, O et X sont alignés.
- **Scolie :** (TD), (IV) et (BX) sont parallèles entre elles.
- **Conclusion :** d'après Girard Desargues "Le théorème des deux triangles" [43]
  (BX) étant l'arguésienne des triangles TDO et IVL, C, I et T sont alignés.

ÉTAPE 7

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
P un point de l'arc CD ne contenant pas A,
K, L les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
M, N les pieds des perpendiculaires à (CD) issues resp. de K, L
et V, Q les points d'intersection de (PB) et (CD), (ML) et (MK).

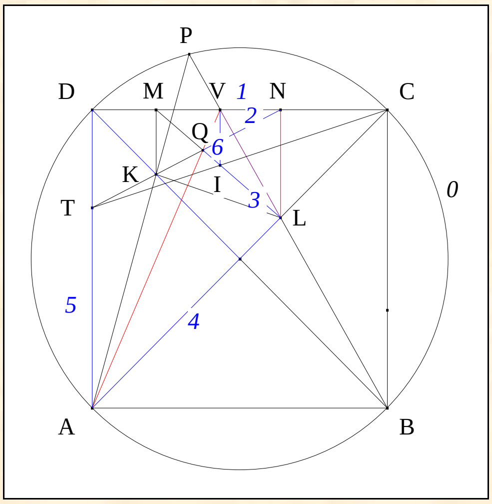
Donné : V, Q et A sont alignés. [44]

VISUALISATION

---

[43] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 42 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

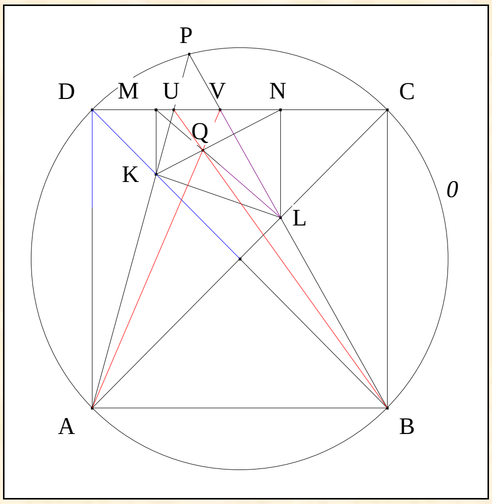
[44] Sunken rock, Square, circumcircle and concurrency, AoPS du 06/08/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1490873_square_circumcircle_and_concurrency



- Notons X, T les points d'intersection resp. de (ML) et (BC), (NK) et (AD),
  S le point d'intersection de (DX) et (KL),
  et I le point d'intersection de (SV) et (ML).

- **Conclusion :** d'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [45]
  (CTI) étant la pappusienne du quadrilatère sectoriel *123456* dont une frontière (NL),
  V, Q et A sont alignés.

Scolie : un second alignement



- Notons U le point d'intersection de (PA) et (CD).

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que U, Q et B sont alignés.

[45] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 18 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ÉTAPE 8

Sharygin Finals 2017, Problem **8.8**

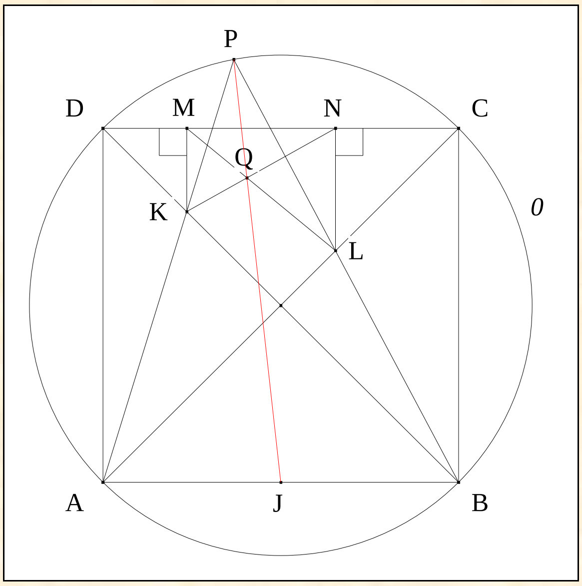
Restitution du problème

de

Tran Quang Hung (Vietnam) [46]

VISION

Figure :

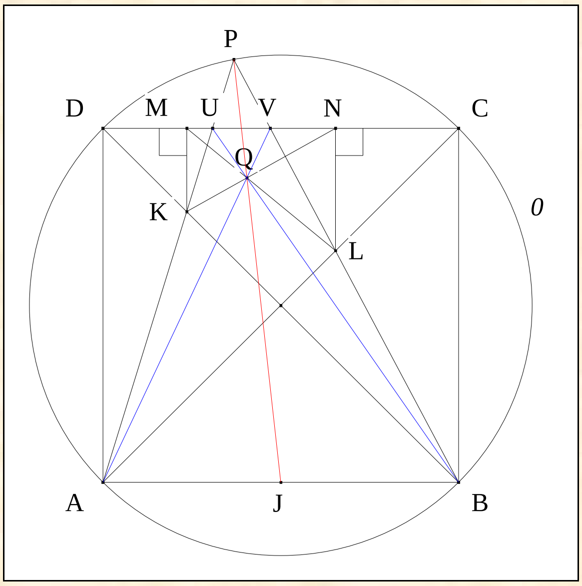


Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	O	le centre de *0*,
	P	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, L	les points d'intersection resp. de (PA) et (BD), (PB) et (AC),
	M, N	les pieds des perpendiculaires à (CD) issues resp. de K, L
et	J	le milieu de [AB].

Donné : (PQ) passe par J.

VISUALISATION

[46] Median through point on circumcircle of square, AoPS du 04/08/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1490023_median_through_point_on_circumcircle_of_square
Official solution ; http://geometry.ru/olimp/2017/final_sol_en.pdf



- Notons U, V les points d'intersection de (CD) resp. avec (PA), (PB).
- D'après Problème **15**, **(1)** V, Q et A sont alignés

  (2) U, Q et B sont alignés.
- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" appliqué au trapèze ABVU, (PQ) passe par J.

Archive

XIII Geometrical Olympiad in honour of I.F.Sharygin
Solutions. Final round. Second day. 8 grade

8. (Tran Quang Hung, Vietnam) Let $ABCD$ be a square, and let P be a point on the minor arc CD of its circumcircle. The lines PA, PB meet the diagonals BD, AC at points K, L respectively. The points M, N are the projections of K, L respectively to CD, and Q is the common point of lines KN and ML. Prove that PQ bisects the segment AB.

Solution. Firstly prove the following assertion.

Lemma. Let $AP = AC$ and $BQ = BC$ be the perpendiculars to the hypothenuse AB of a right-angled triangle ABC lying on the outside of the triangle. The lines AQ and BP meet at point R, and the lines CP and CQ meet AB at points M and N respectively. Then CR bisects the segment MN.

Proof. Since $\angle CAP = 90° + \angle CAB = 180° - \angle CBA$, we have $\angle ACP = \frac{\angle B}{2}$. Hence $BM = BC = BQ$ and similarly $AN = AC = AP$. Let the line passing through R and parallel to AB meet CP, CQ at points X, Y respectively, and let Z be the projection of R to AB (fig.8.8). Then $RX : BM = PR : PB = AR : AQ = RZ : QB$, Therefore $RX = RZ$. Similarly $RY = RZ$ (fig.8.8.1). Thus CR bisects XY, and hence it bisects MN.

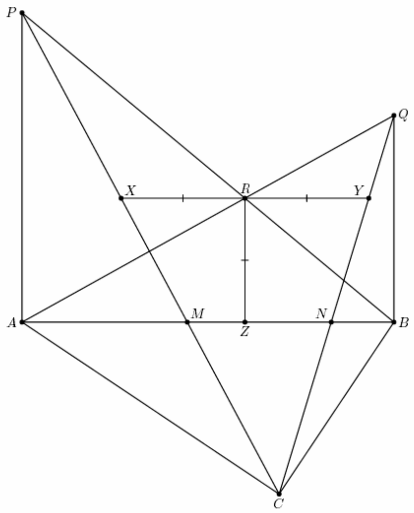


Fig. 8.8.1

Note. It it easy to see that CZ is the bisectrix of ABC and CR passes through the touching point of its incircle with the hypothenuse.

Return to the problem. Since KMD is an isosceles right-angled triangle, and $\angle KPD = 45°$, we obtain that M is the circumcenter of triangle KPD. Similarly N is the circumcenter of PCL. Furthermore $\angle MPN = 45° + (90° - \frac{\angle BDP}{2}) + (90° - \frac{\angle ACP}{2}) = 90°$. Applying the lemma to the points P, M, N, K, L we obtain the required assertion (fig.8.8.2).

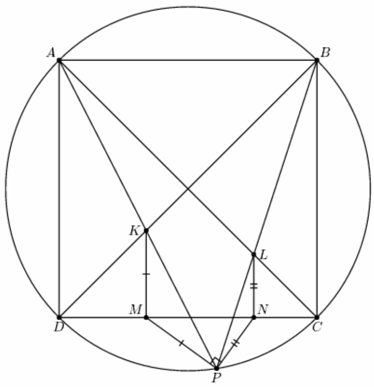


Fig. 8.8.2

LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle