

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE

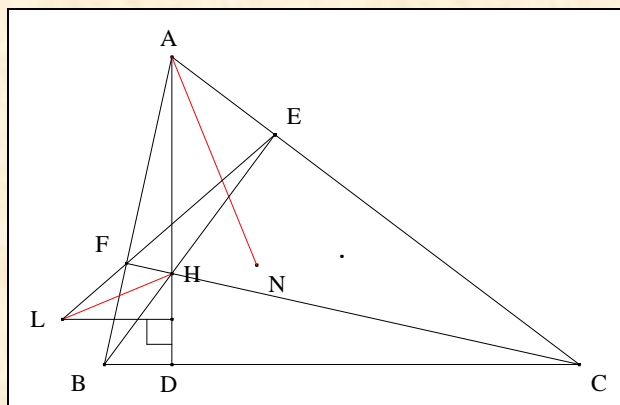
"ENFIN LIBRE"

I



*...les connaissances sont le plus souvent transmises
lors d'un apprentissage volontaire.
En se trouvant face à un maître accompli dans sa pratique,
l'apprenti peut capter dans l'enseignement reçu,
ce Vent subtil, émanant du silence...entre les paroles.
Il pourrait même avoir une "vision", sans que le maître s'en aperçoive.
Comme un vent qui souffle bruyamment contre un mur,
ce Vent là s'insinue, s'enfonce et finit par toucher
tous les centres internes de l'apprenti.*

Jean-Louis AYME ¹



Résumé.

L'auteur présente *Géométrie synthétique "enfin libre"* où chaque problème se solutionne d'une façon fulgurante et altière en partant d'une *semblance* figurée...

Abstract.

The author presents *Synthetic Geometry "finally free"* where each problem is solved in a dazzling and haughty manner from a figurative *semblance*...

Resumen.

El autor presenta *Geometría sintética "finalmente libre"* donde cada problema se soluciona de una manera deslumbrante y altiva de una *apariencia* figurativa...

¹

St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 12/03/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Zusammenfassung.

Der Autor präsentiert *synthetische Geometrie "endlich frei"* worin sich jedes Problem auf eine rasante und edle Weise löst, ausgehend von einem figurativen *Schein*...

Sommaire

1. Céviennne perpendiculaire à une droite de Steiner	3
2. Perpendiculaire à une céviennne	5
3. Cercle passant par le milieu d'un côté	7
4. Deux demi-cercles	9
5. Points alignés avec le A-excentre	11
6. Une perpendiculaire à (AN)	13
7. Deux segments égaux	15
8. Deux parallèles	17
Lexique Français-Anglais	

A. PROFESSIONNEL OU PASSIONNÉ**RÉSOLUTION OU SOLUTION**

Pour le professionnel au cœur endurci, la géométrie élémentaire du triangle se présente comme un vaste champ en friche au sein duquel sont enfouies des formes inertes. Au fil du temps, ces configurations de droites et de cercles se dégagent de leur gangue minérale apparaissant à la surface et donc à la vue perçante du chercheur. Celui-ci, fidèle à son protocole académique s'applique impérativement à les "démonter" pour résoudre les problèmes qu'elles lui posent et ce jusqu'à en venir à bout.

La résolution peut ou non s'apparenter à un "combat" loyal. Le professionnel, aux prises avec un problème et soutenu par des lemmes et des aides éparses, s'applique avec ferveur à le plier et à le vider de son contenu irrationnel.

Pour le géomètre passionné, ces formes sont vivantes. Elles se découvrent et s'in-ventent à son gré sous l'intensité et le charme de son regard. Il se doit de respecter ces Semblances ² afin de solutionner les données qu'elles lui proposent.

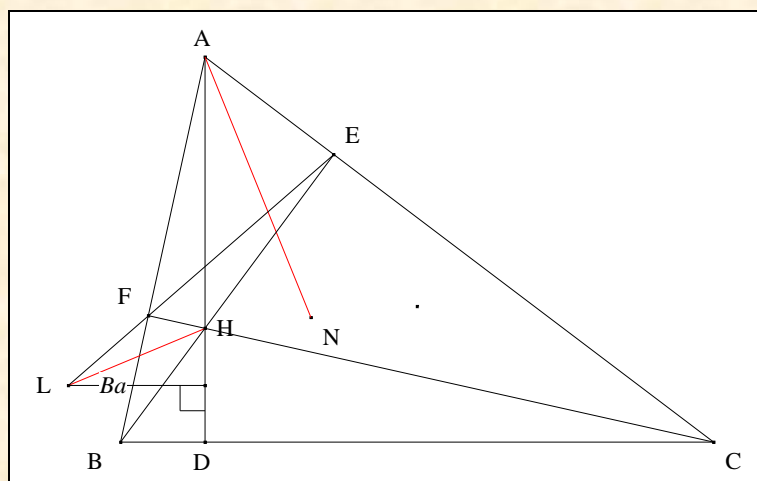
Pour le passionné, la solution d'un problème est l'art d'un dialogue loyal et amical entre lui même et son Sujet. La condition sine qua none pour trouver cette solution, c'est la fluidité de son regard qui doit être capable d'aller jusqu'à s'anéantir pour se mettre à l'écoute de cette lumineuse Semblance afin de capter ce qu'elle veut bien lui révéler.

²

C'est à la fois une apparence et une apparition où le contenu dépasse le contenant en révélant l'essentiel

SEMBLANCE 1³

Céviennne perpendiculaire à une droite de Steiner

VISION**Figure :**

Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
DEF le triangle orthique de ABC,
Ba la médiatrice de [DH],
L le point d'intersection de Ba et (EF),
et N le centre du cercle d'Euler de ABC.

Donné : (AN) est perpendiculaire à (LH).

³

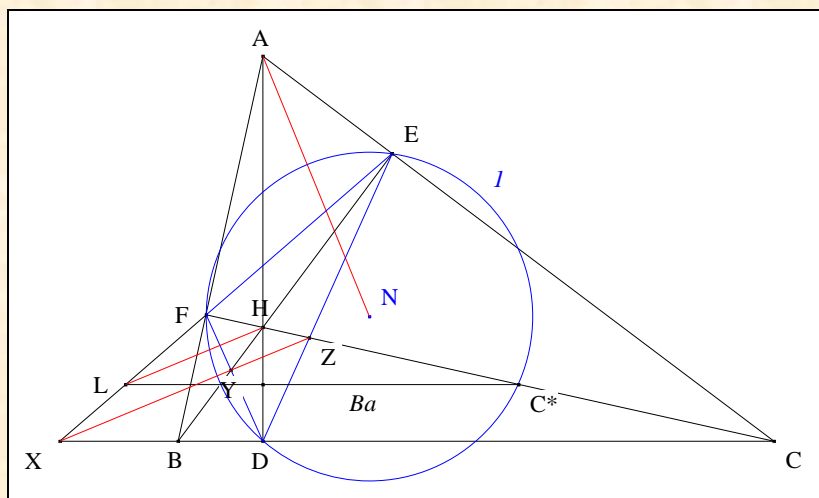
2017 Olympic Revenge, Problem 2

Equal length, AoPS du 20/02/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1386490_equal_length

A lemma from Luis Gonzales, AoPS du 11/03/2017 ;

https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1399346_a_lemma_of_luis_gonzalesAyme J.-L., *Simplicity* 2, G.G.G. vol. 36, p. 3-5 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

VISUALISATION



*

La droite d'Euler (AN) du triangle HBC est perpendiculaire à son axe orthique (XYZ).

* *

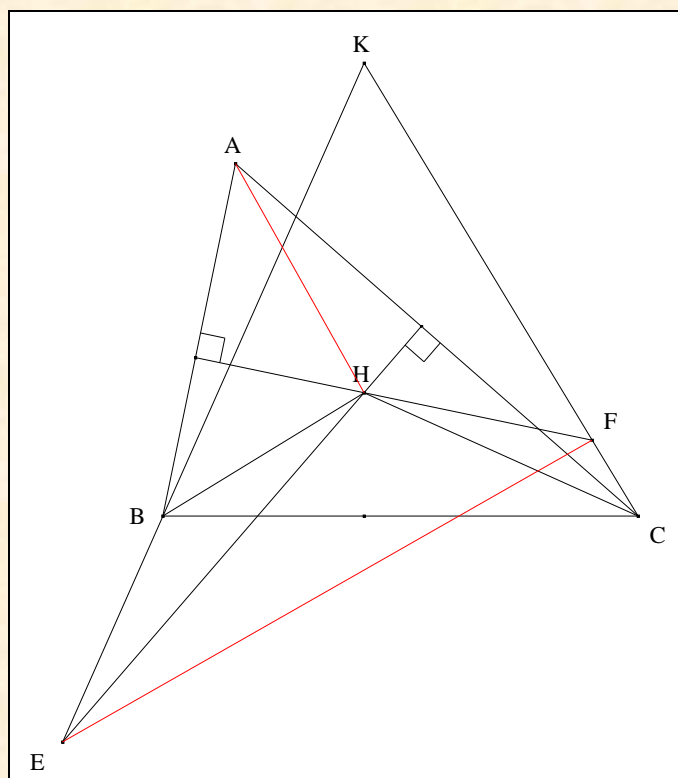
(XYZ) est parallèle à (LH),
fruit du théorème de Thalès relayant la relation de MacLaurin du quaterne harmonique (F, Z, H, C).

* * *

La droite d'Euler du triangle HBC est perpendiculaire à (LH).

SEMBLANCE 2⁴

Perpendiculaire à une céviene

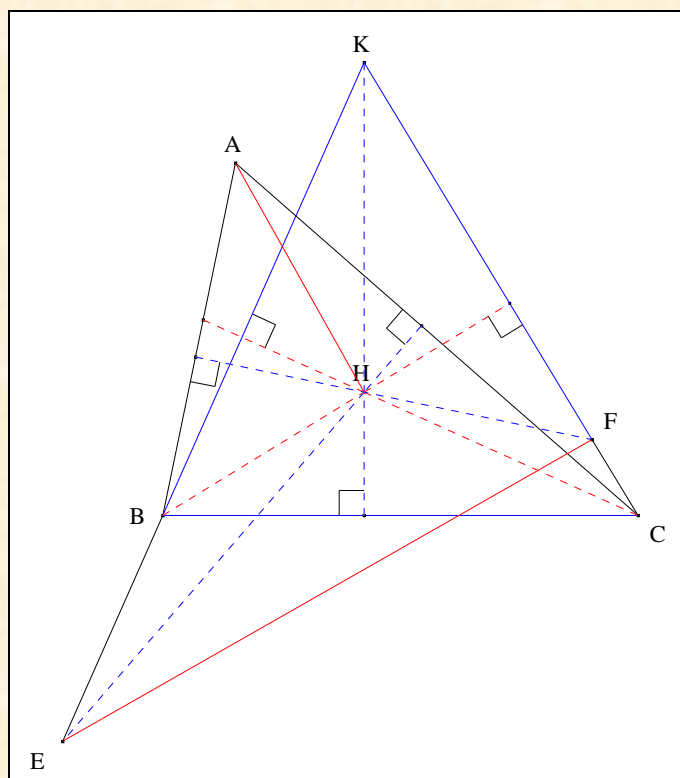
VISION**Figure :**

- Traits :** ABC un triangle,
H un point intérieur à ABC,
K l'orthocentre du triangle HBC,
E le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) issue de H avec (KB)
et F le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) issue de H avec (KC).
- Donné :** (EF) est perpendiculaire à (AH).

4

Prove that CH is perpendicular to E, AoPS du 13/03/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1402160_prove_that_ch_is_perpendicular_to_ef
Ayme J.-L., A propos de deux triangles orthologiques, G.G.G. vol. 6, p. 2-5 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

VISUALISATION



*

Le triangle KEF est H-orthologique ⁵ au triangle ABC.

* *

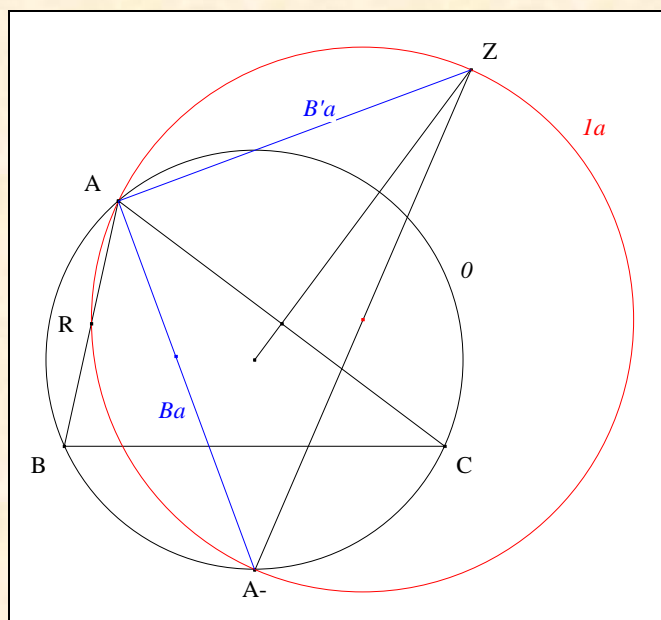
Le triangle ABC est H-orthologique au triangle KEF.

* * *

(EF) est perpendiculaire à (AH).

SEMBLANCE 3⁶

Cercle passant par le milieu d'un côté

VISION**Figure :**

Traits :	ABC	un triangle tel que $AB < AC$,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	$Ba, B'a$	les A-bissectrices in, ex-térieures de ABC,
	A-	la circumtrace de Ba ,
	D	le point d'intersection de $B'a$ et de la médiatrice de [AC],
	R	le milieu de [AB]
et	Ia	le cercle de diamètre [DA-].

Donné : Ia passe par R.⁶

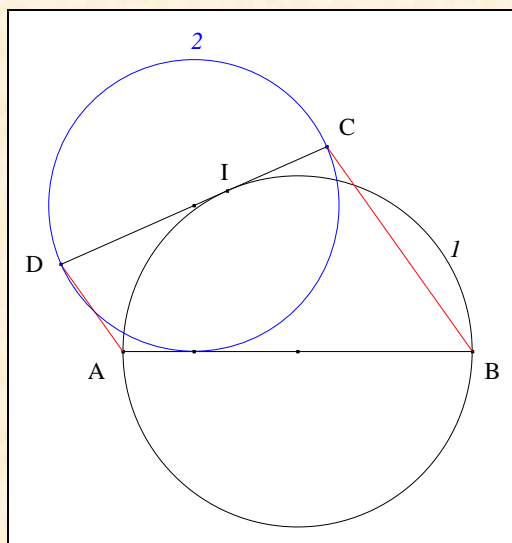
Problem 8, AoPS du 14/03/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1403023_problem_8
 APMO 2017: (ADZ) passes through M, AoPS du 14/05/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1446906_apmo_2017_adz_passes_through_m

SEMBLANCE 4⁷

23e O.I.M. Day 2 problem 2

Tchécoslovaquie Prague 1984

Deux demi-cercles

VISION**Figure :**

Traits : I un cercle,
 A, B deux points diamétraux de I ,
 I un point de I ,
 T_i la tangente à I en I ,
 C, D deux points de T_i tel que le quadrilatère $ABCD$ soit convexe
 et 2 le cercle de diamètre $[CD]$.

Donné : si, (AB) est tangente à 2 alors, (AD) est parallèle à (BC) .

⁷

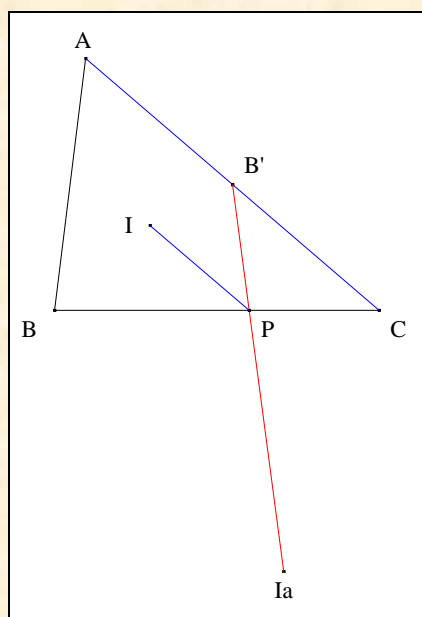
Prove that the line AB is tangent to the circle, AoPS du 12/11/2005 ;

<https://artofproblemsolving.com/community/c6h60795p366610>Parallel lines, AoPS du 14/03/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c4t48f4h1403027_parallel_lines

SEMBLANCE 5

O.M. Taiwan (2001) problème 1

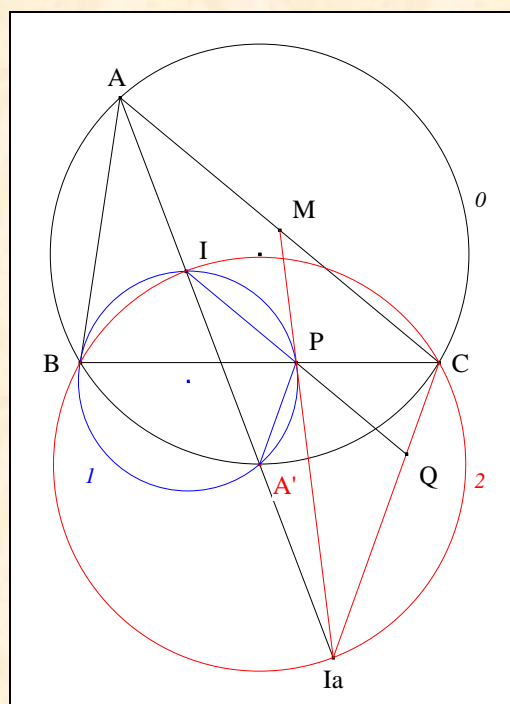
Points alignés avec le A-excentre

VISION**Figure :**

Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC ,
 P le point d'intersection de la parallèle à (CA) issue de I avec (BC) ,
 I_a le A-excentre de ABC
 et B' le milieu de $[CA]$.

Donné : B' , I_a et P sont alignés.

VISUALISATION



*

A, I et Ia étant alignés,
par le théorème de Reim, B, A', P et I sont cocycliques.

* *

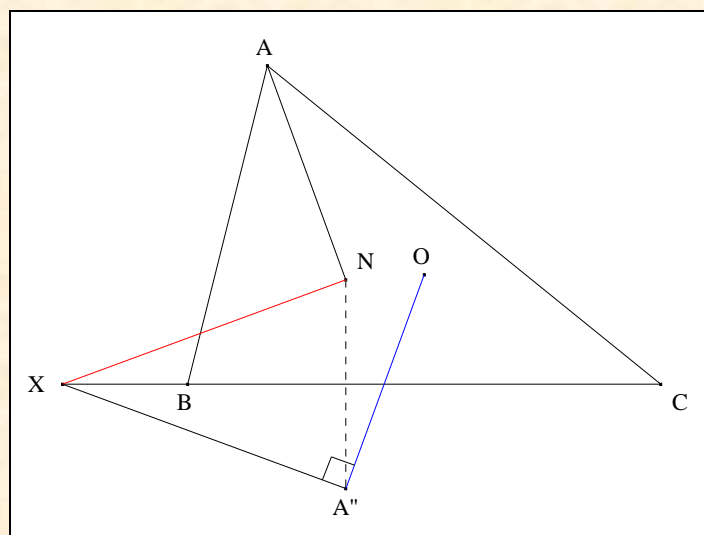
I, B, Ia et C étant sur le A-cercle de Mention de ABC,
par le théorème de Reim, (CIa) est parallèle à (PA'),
et par Thalès, P est le milieu de [IQ].

* * *

Le trapèze complet AIQC conduit à l'alignement de M, Ia et P.

SEMBLANCE 6⁸

Une perpendiculaire à (AN)

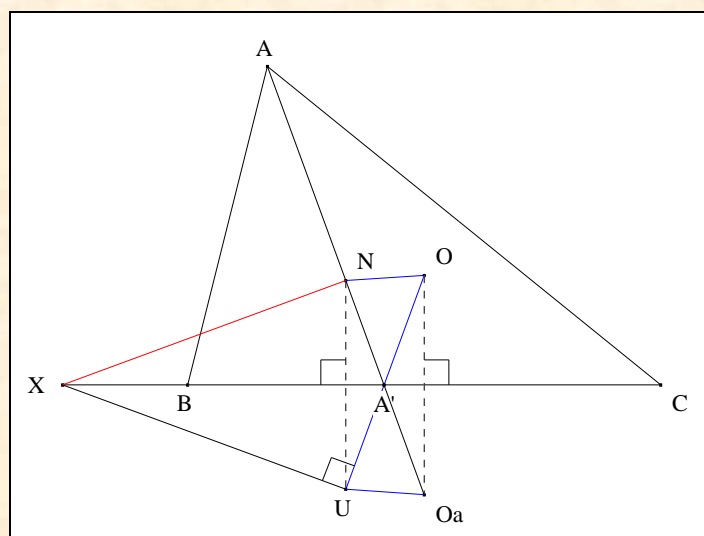
VISION**Figure :**

Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC,
 U le symétrique de N par rapport à (BC)
 et X le point d'intersection de la perpendiculaire à (OU) en U avec (BC).

Donné : (XN) est perpendiculaire à (NA).

⁸Ayme J.-L., Simplicity 2, G.G.G., vol. 36, p. 6-7 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

VISUALISATION 9



✻

Le quadrilatère ONUOa est un trapèze isocèle d'axe (BC).

* *

A' est le pied de (AN) .

* * *

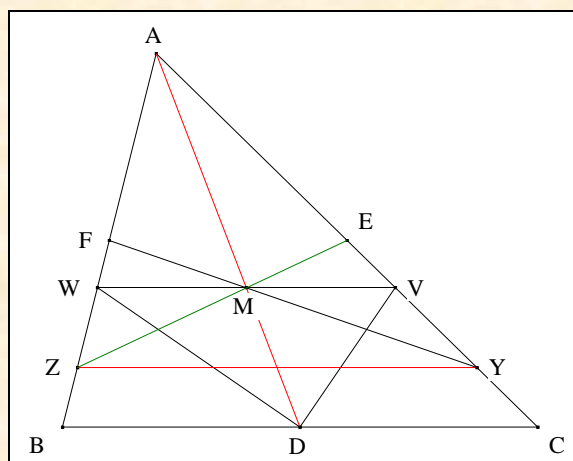
par symétrie d'axe (BC), (XN) est perpendiculaire à (NA).

9

A partir d'une idée de Telv Cohl

SEMBLANCE 7 ¹⁰

Deux segments égaux

VISION**Figure :**

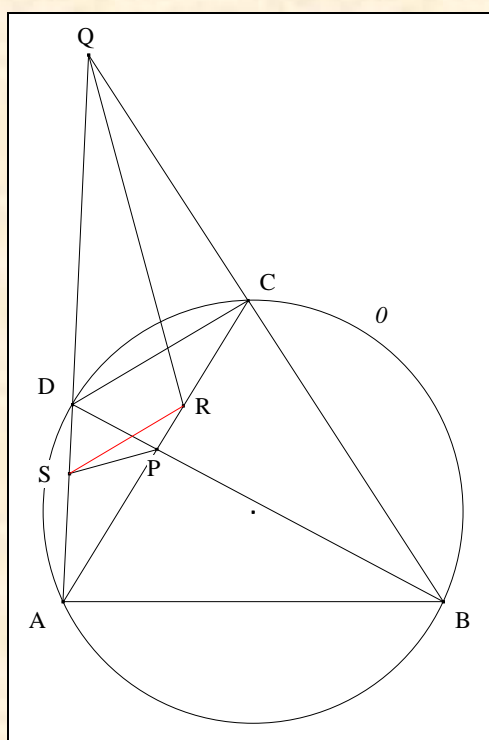
Traits : ABC un triangle,
D le milieu de [BC],
V, W les pieds des D-bissectrices intérieures resp. aux triangles DAC, DAB,
M le point d'intersection de (VW) et (AD),
E, F les milieux resp. de [AC], [AB]
et Y, Z les points d'intersection de (FM) et (AC), (EM) et (AB).

Donné : $YZ = AD$. ¹¹

¹⁰ Ayme J.-L., *Simplicity* 2, G.G.G., vol. 36, p. 8-9; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
¹¹ Barroso R., *Trianguloscabri*, **LIII** OME Problema 6 ; <http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>
Two equal segments, AoPS du 05/04/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1422991_two_equal_segments

SEMBLANCE 8¹³

Deux parallèles

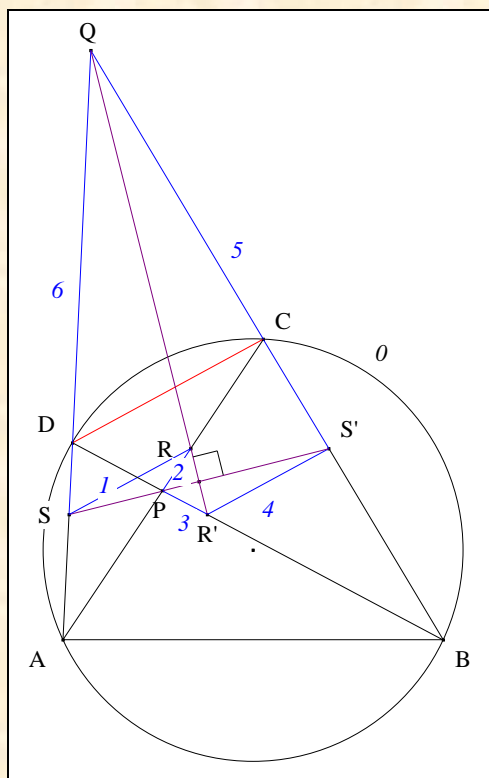
VISION**Figure :**

- Traits :** ABCD un quadrilatère convexe circonscriptible,
 O le cercle circonscrit à ABCD,
 P, Q les points d'intersection resp. de (AC) et (BD), (AD) et (BC),
 et R, S les pieds des bissectrices intérieures resp. des triangles QAC, PAD.
- Donné :** (CD) est parallèle à (RS).

¹³

BMO 2017 ; <https://bmos.ukmt.org.uk/home/bmo2-2017.pdf>
 Bmo round 2, AoPS du 24/02/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1389082_bmo_round_2
 Ayme J.-L., British Mathematical Olympiad 2017 Problem 3, G.G.G., vol. 33 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

VISUALISATION



*

Le quadrilatère ABCD étant cyclique,
les R, S-bissectrices intérieures resp. des triangles QAC, PAD sont perpendiculaires. ¹⁴

* *

Les triangle QSS' et PRR' étant resp. Q, R-isocèles,
(RS) est parallèle à (R'S').

* * *

D'après "La proposition **139**" de Pappus d'Alexandrie ¹⁵
la pappusienne (CD)
de l'hexagone sectoriel SRPR'S'QS de frontières (SS') et (RR'),
est parallèle à (RS).

¹⁴ F.G.M., Exercices de Géométrie, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) 252 théorème **69**
Cyclic quadrilateral ; https://artofproblemsolving.com/community/c4t48f4_geometry

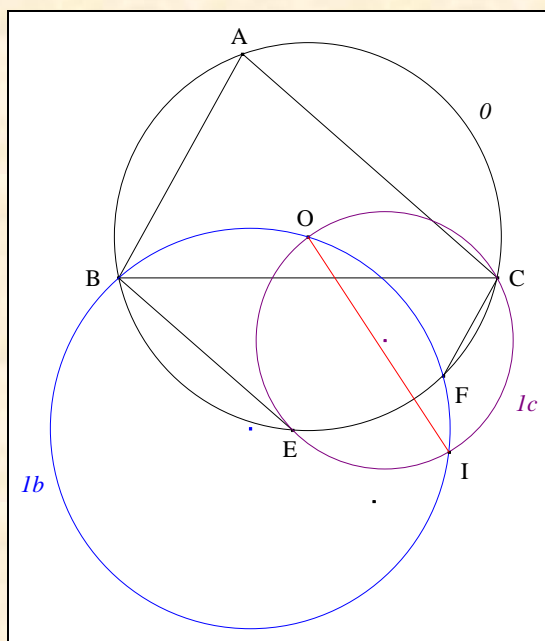
¹⁵ Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 19 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

SEMLANCE 9¹⁶

L'axe radical de deux cercles sécants comme droite d'Euler

VISION

Figure :



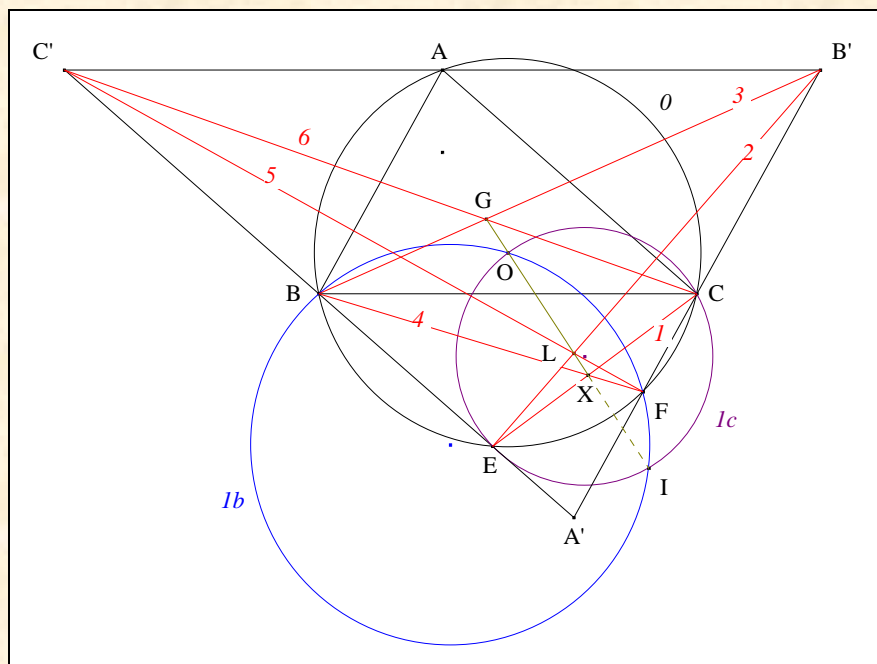
Traits :

ABC	un triangle,
θ	le cercle circonscrit à ABC,
O	le centre de θ ,
E, F	les seconds points d'intersection de θ avec les parallèles à (AC), (AB) issues resp. de B, C,
Ib	le cercle passant par O, B, F,
Ic	le cercle passant par O, C, E
et I	le second point d'intersection de Ib et Ic .

Donné : l'axe radical (IO) de Ib et Ic est la droite d'Euler de ABC.

VISUALISATION

¹⁶ Euler line of ΔABC is the radical axis, AoPS du 26/10/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1535060_eu



*

D'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes" ¹⁷,
O, X et I sont alignés.

* *

G, L étant resp. le point médian, de De Longchamps de ABC
ou encore

G, L étant le point médian, l'orthocentre du triangle A'B'C' antimédian de ABC,

(XLG) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel CEB'BFC'C de frontières (A'B) et (A'C)
d'après "La proposition **139**" ¹⁸ de Pappus d'Alexandrie.

* * *

L étant sur la droite d'Euler (OG),
l'axe radical (IO) de lb et lc est la droite d'Euler de ABC.

¹⁷

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ;

<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

¹⁸

Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 6, p. 10-17 ;

<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

LEXIQUE **FRANÇAIS - ANGLAIS**

A		N		
aligné	collinear	Notons	name	
annexe	annex	nécessaire	necessary	
axiome	axiom	note historique	historic note	
appendice	appendix	O		
adjoint	associate	orthocentre	orthocenter	
a propos	by the way btw	ou encore	otherwise	
acutangle	acute angle	P		
axiome	axiom	parallèle	parallel	
B		parallèles entre elles	parallel to each other	
bissectrice	bisector	parallélogramme	parallelogram	
bande	strip	pédal	pedal	
C		perpendiculaire	perpendicular	
centre	incenter	pied	foot	
centre du cercle circonscrit	circumcenter	point de vue	point of view	
cercle circonscrit	circumcircle	postulat	postulate	
céviennne	cevian	point	point	
colinéaire	collinear	pour tout	for any	
concourance	concurrence	Q		
coincide	coincide	quadrilatère	quadrilateral	
confondu	coincident	R		
côté	side	remerciements	thanks	
par conséquence	consequently	reconnaissance	acknowledgement	
commentaire	comment	respectivement	respectively	
D		rapport	ratio	
d'après	according to	répertorier	to index	
donc	therefore	S		
droite	line	semblable	similar	
d'où	hence	sens	clockwise in this	
distinct de	different from	order	T	
E		segment	segment	
extérieur	external	Sommaire	summary	
F		symédiane	symmedian	
figure	figure	suffisante	sufficient	
H		sommet (s)	vertex (vertice)	
hauteur	altitude	T		
hypothèse	hypothesis	trapèze	trapezium	
I		tel que	such as	
intérieur	internal	théorème	theorem	
identique	identical	triangle	triangle	
i.e.	namely	triangle de contact	contact triangle	
incidence	incidence	triangle rectangle	right-angle triangle	
L		M		
lemme	lemma	median	median	
lisibilité	legibility	médiatrice	perpendicular bisector	
M		milieu	midpoint	

