THE PARACEVIAN PERSPECTOR

UNE PREUVE SIMPLE ET PUREMENT SYNTHÉTIQUE

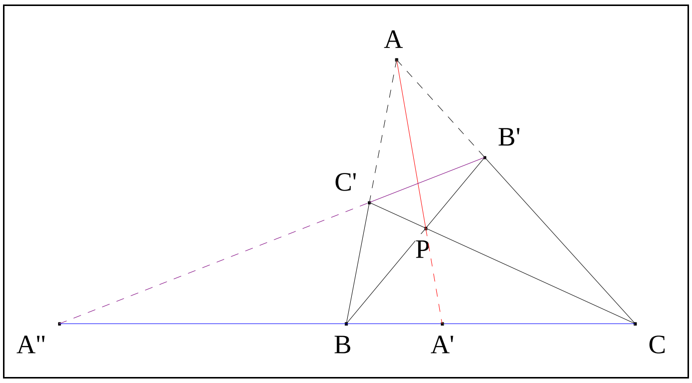
Jean - Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve entièrement synthétique d'un résultat d'Éric Danneels intitulé "The paracevian perspector" et proposé en 2004 au sein du groupe *Hyacinthos*. Le schéma de démonstration proposé s'appuie sur des résultats de Pappus et d'Émile Lemoine. L'article se poursuit par un historique de la situation et se termine par un théorème de perspective trouvé par l'auteur.
Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

1. DIAGONALES D'UN QUADRILATÈRE [1]

VISION

Figure :



Traits : BB'CC' un quadrilatère,
A, P les points d'intersection de (BC') et (CB'), de (BB') et (CC'),
et A', A" les points d'intersection de (BC) resp. avec (AP), (B'C').

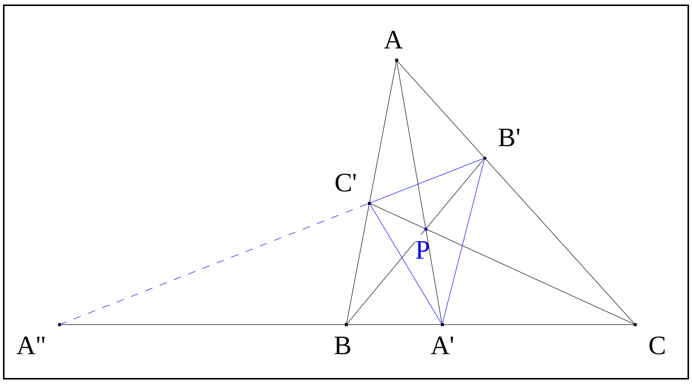
Donné : la quaterne (B, C, A', A") est harmonique.

Énoncé traditionnel : dans un quadrilatère, une diagonale est coupée de manière harmonique par l'autre diagonale et la droite joignant les points d'intersection des paires de côtés opposés.

[1] Pappus, *Collections*, Livre 7, proposition 131.

2. VISION TRIANGULAIRE

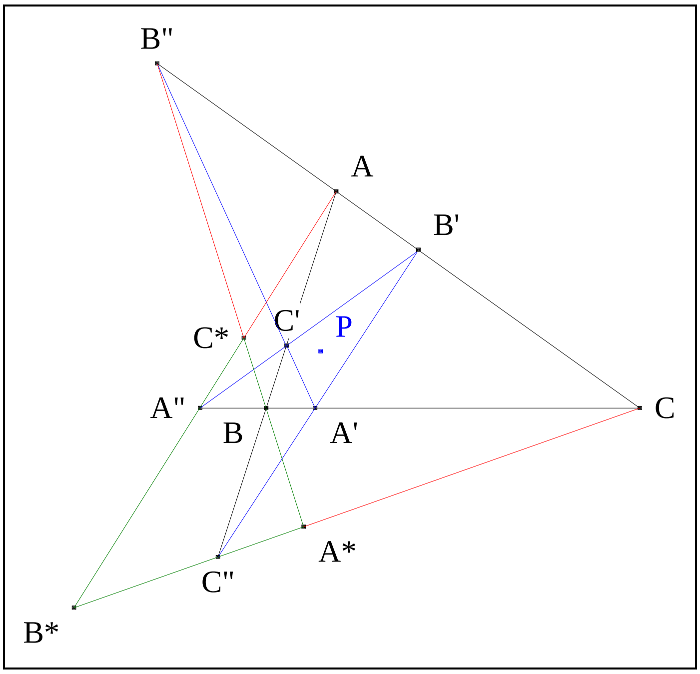
(1) Définition d'un triangle cévien



Finition : ABC un triangle,
P un point
et A', B', C' les pieds des céviennes (AP), (BP), (CP).

Définitions : A'B'C' est "le triangle P-cévien de ABC" ;
(AA') est "la A-cévienne de ABC passant par P".

(2) Définition d'un triangle anticévien



Finition : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
A", B", C" les pieds des A, B, C-anticéviennes de ABC
et A*, B*, C* les points d'intersection de (B"B) et (C"C), de (C"C) et (A"A), de (A"A) et (B"B).

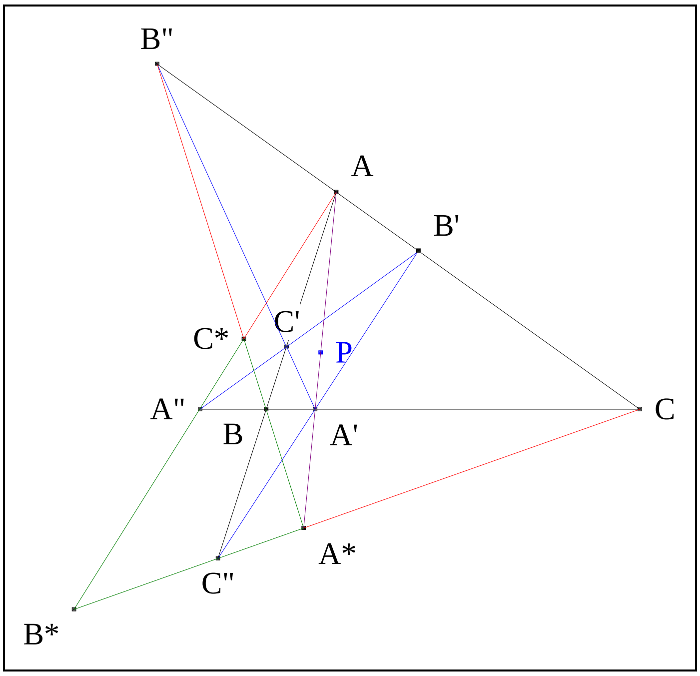
Définitions : A*B*C* est appelé "triangle P-anticévien de ABC".

(AA") est la "A-anticévienne de P relativement à ABC".

3. TRIANGLES P-CÉVIEN ET P-ANTICÉVIEN [2]

VISION

Figure :

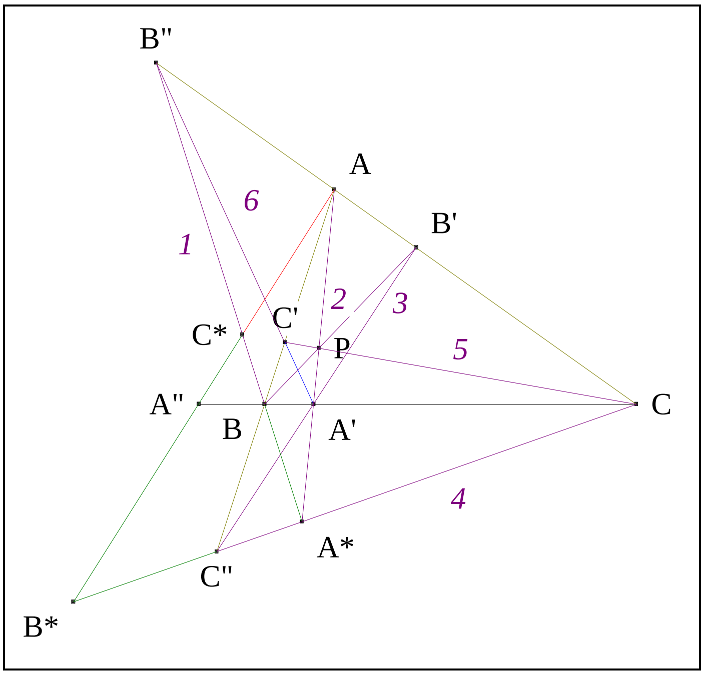


Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
A", B", C" les pieds des A, B, C-anticéviennes de P relativement à ABC
et A*B*C* le triangle P-anticévien de ABC.

Donné : A, P, A' et A* sont alignés.

VISUALISATION

[2] Lemoine E., *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Blois (1884).



- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 1),
  (A*PA') est la pappusienne de l'hexagone B"BB'C"CC'B" i.e. A*, P et A' sont alignés ;
  par hypothèse, A, P et A' sont alignés.

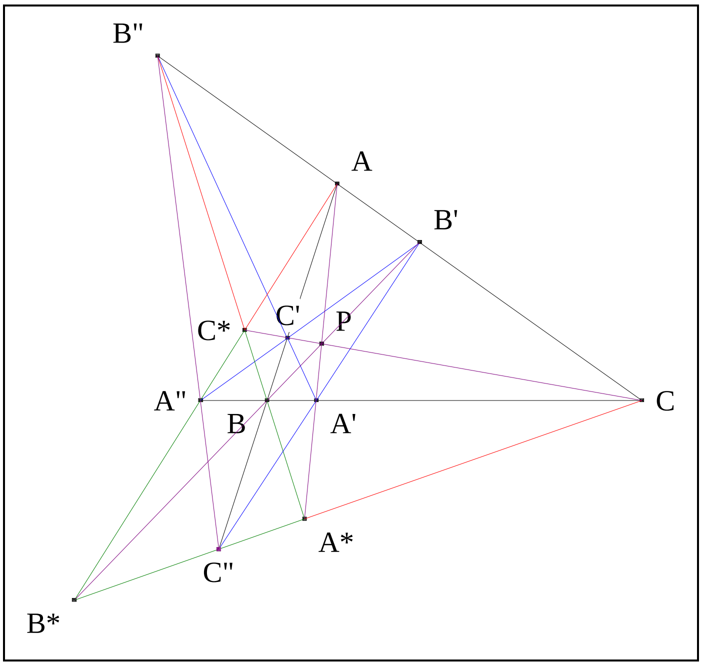
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, A, P, A' et A* sont alignés.

Note historique : ce résultat a été approché sous le point de vue des quaternes harmoniques par J. J. A. Mathieu[3] en 1865.

Scolies : **(1)** d'après 1. Diagonales d'un quadrilatère, la quaterne (A, A', P, A*) est harmonique.

(2) Deux autres alignements

[3] Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 399.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que B, P, B' et B* sont alignés
  C, P, C' et C* sont alignés.

(3) Un quatrième alignement

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2) appliqué aux triangles perspectifs ABC et A'B'C', A", B" et C" sont alignés.

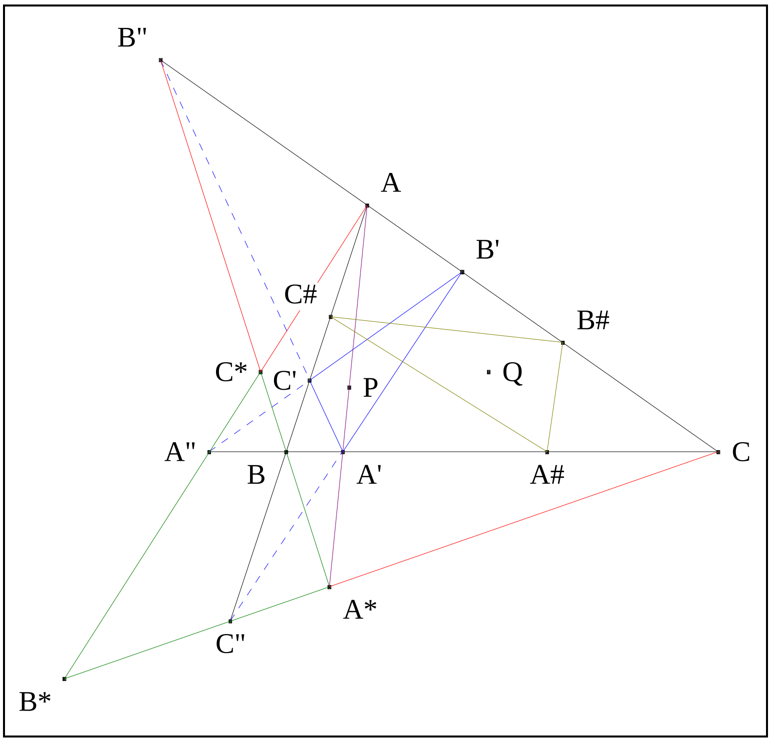
(4) Trois triangles en perspective

- les triangles P-cévien et P-anticévien d'un triangle sont en perspective avec celui-ci partageant le même centre et le même axe.

4. TRIANGLES P-ANTICÉVIEN ET Q-CÉVIEN

VISION

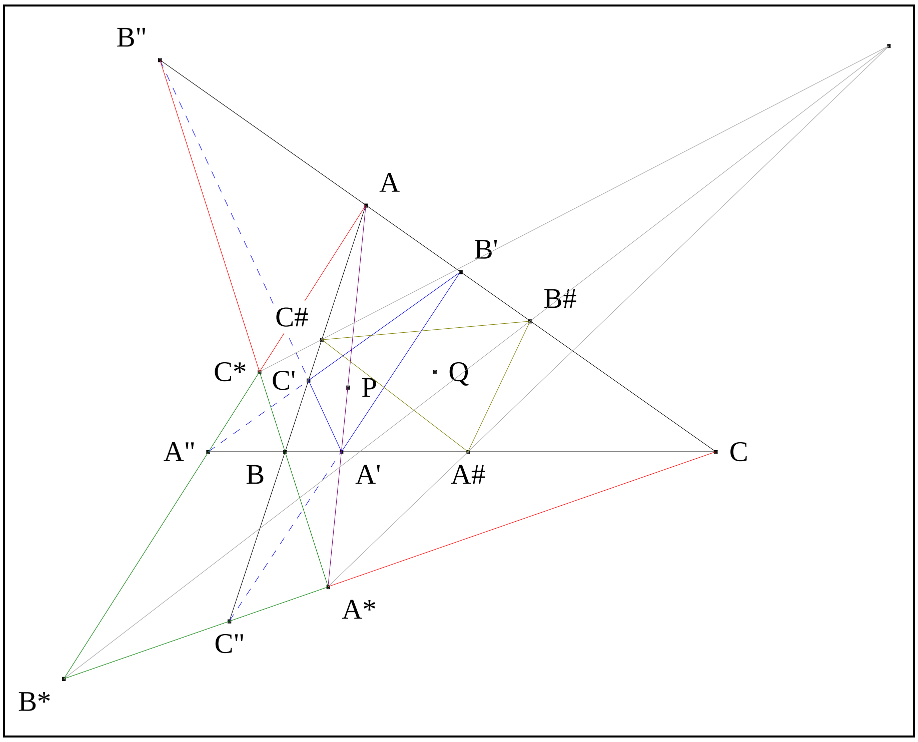
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A*B*C*	le triangle P-anticévien de ABC,
	Q	un point
et	A#B#C#	le triangle Q-cévien de ABC.

Donné : A#B#C# est en perspective avec A*B*C*.

VISUALISATION



- D'après "3. Triangles P-cévien et P-anticévien, scolie 4", ABC est en perspective avec A*B*C*.

- Nous avons : A#B#C# est inscrit dans ABC, ABC est inscrit dans A*B*C* ;
  A#B#C# est en perspective avec ABC, ABC est en perspective avec A*B*C*.

- **Conclusion :** d'après Döttl "The cevian nests theorem"[4], A#B#C# est en perspective avec A*B*C*.

Énoncé traditionnel : le triangle P-anticévien d'un triangle est en perspective avec tout triangle Q-cévien de celui-ci.

Scolie : trois droites concourantes ou parallèles

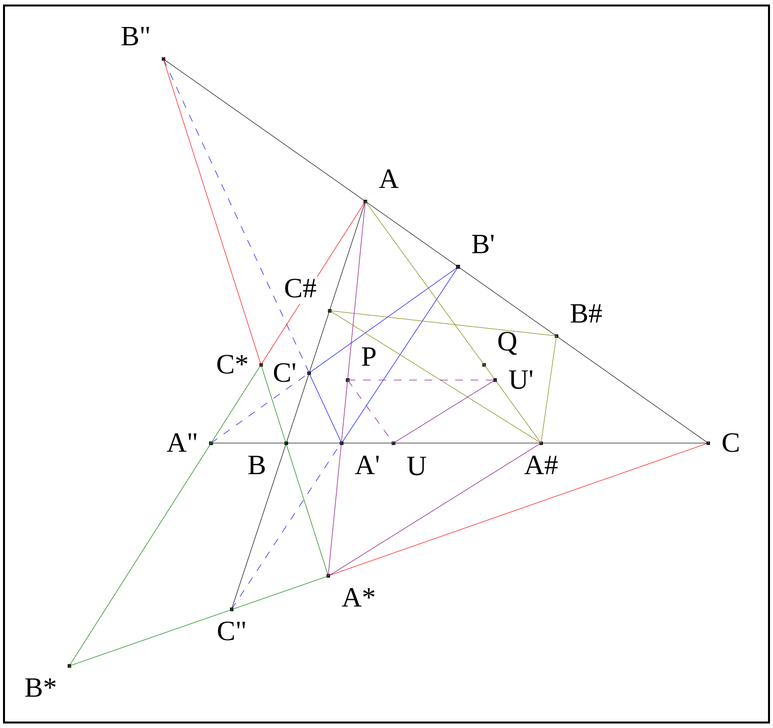
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2)
  appliqué aux triangles perspectifs A#B#C# et A*B*C*,
  (A*A#), (B*B#) et (C*C#) sont concourantes ou parallèles.

5. DEUX PARALLÈLES

VISION

Figure :

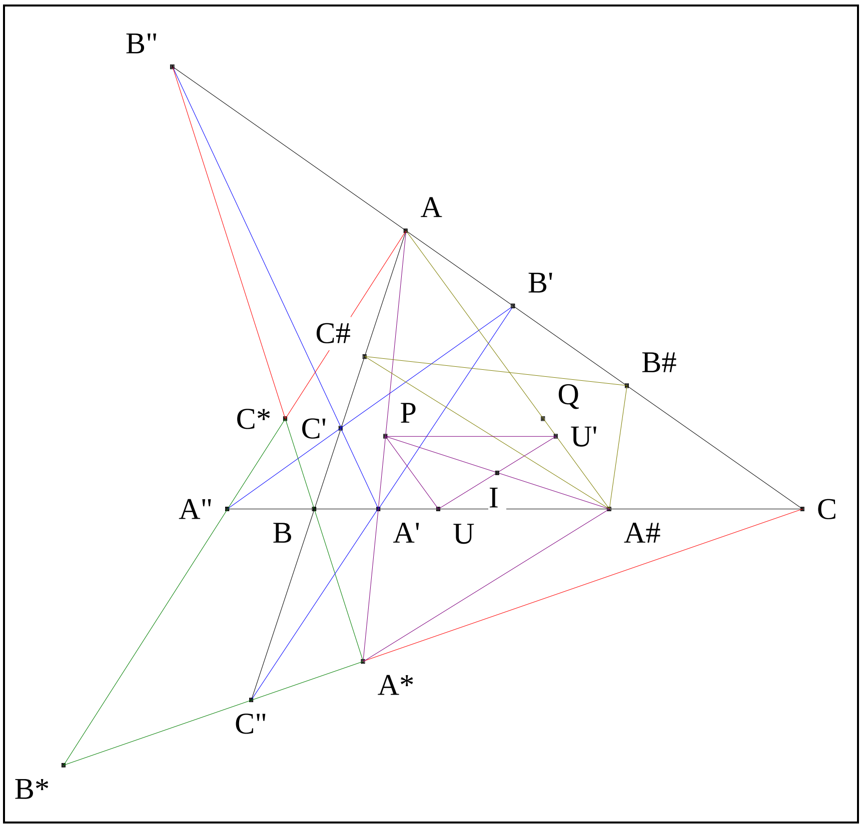
[4] Voir article, G.G.G. volume (2008).



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	A", B", C"	les pieds des A, B, C-anticéviennes de P relativement à ABC,
	A*B*C*	le triangle P-anticévien de ABC,
	Q	un point,
	A#B#C#	le triangle Q-cévien de ABC,
	U	le point d'intersection de la parallèle à (AQ) passant par P avec (BC)
et	U'	le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par P avec (AQ).

Donné : (UU') et (A*A#) sont parallèles.

VISUALISATION



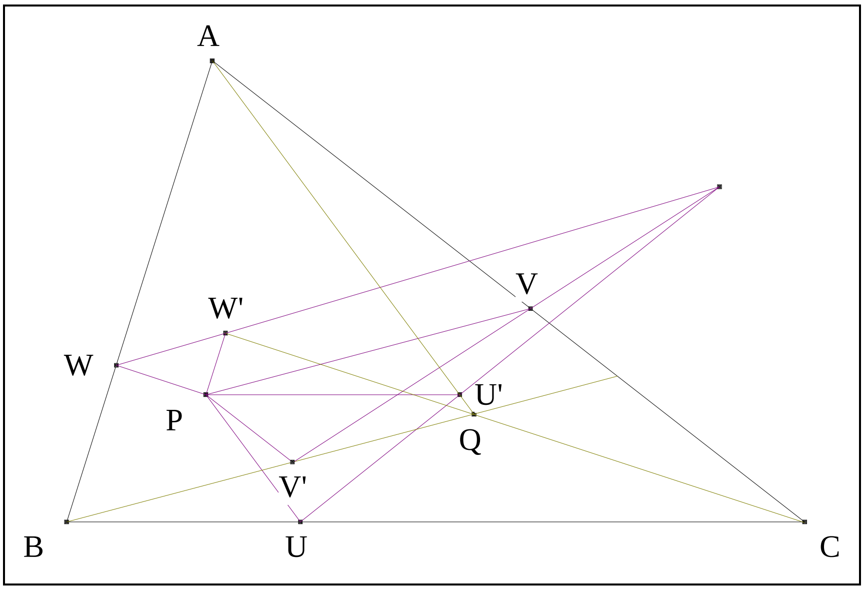
- D'après 3. Triangles P-cévien et P-anticévien, scolie 1, la quaterne (A, A', P, A*) est harmonique.
- Par définition, le pinceau (A# ; A, A', P, A*) est harmonique.
- Notons I le milieu de [PA#].
- La quadrilatère PUA#U' étant un parallélogramme, I est le milieu de [A#P].
- **Conclusion :** d'après Pappus "La proposition 137" (Cf. Annexe 3), (UU') et (A#A*) sont parallèles.

6. THE PARACEVIAN PERSPECTOR [5]

VISION

Figure :

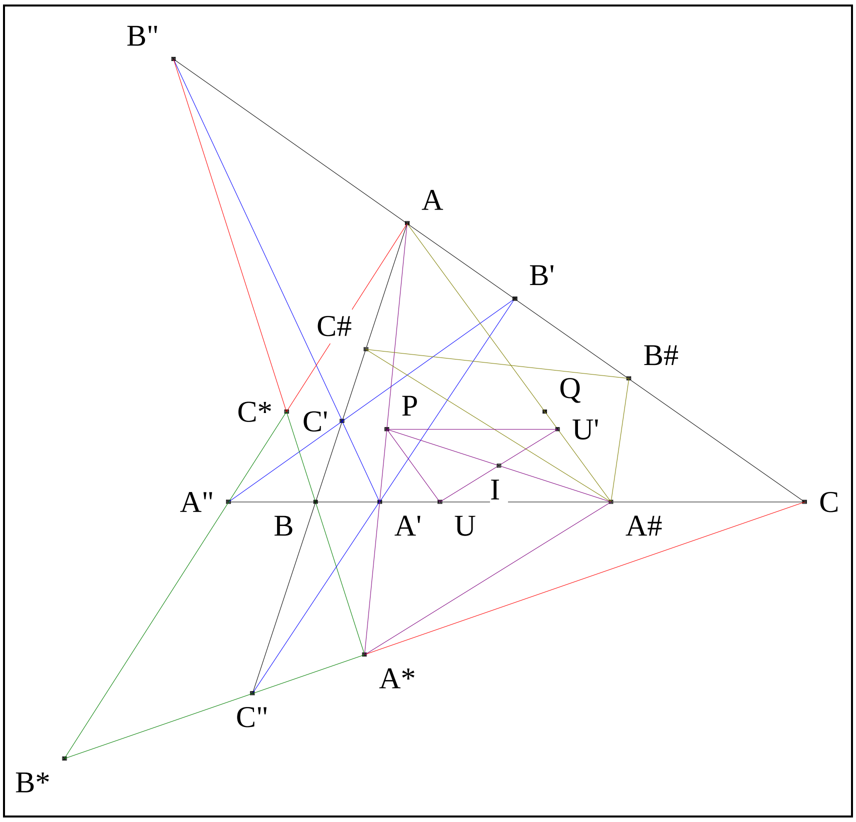
[5] Danneels E., Paracevian perspector ?, Message *Hyacinthos* # 10135 du 23/07/2004.



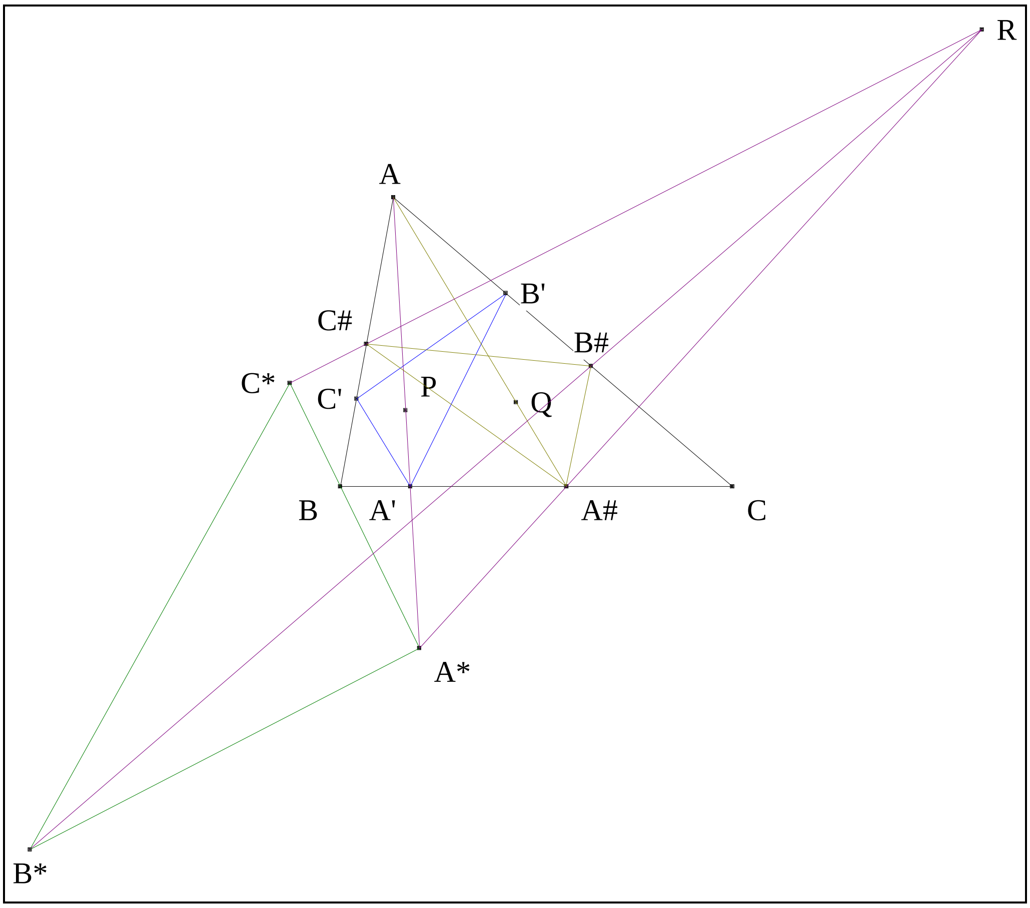
Traits :	ABC	un triangle,
	P, Q	deux points,
	U	le point d'intersection de la parallèle à (AQ) passant par P avec (BC),
	U'	le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par P avec (AQ),
	V	le point d'intersection de la parallèle à (BQ) passant par P avec (CA),
	V'	le point d'intersection de la parallèle à (CA) passant par P avec (BQ),
	W	le point d'intersection de la parallèle à (CQ) passant par P avec (AB)
et	W'	le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par P avec (CQ).

Donné : (UU'), (VV') et (WW') sont concourantes ou parallèles.

VISUALISATION

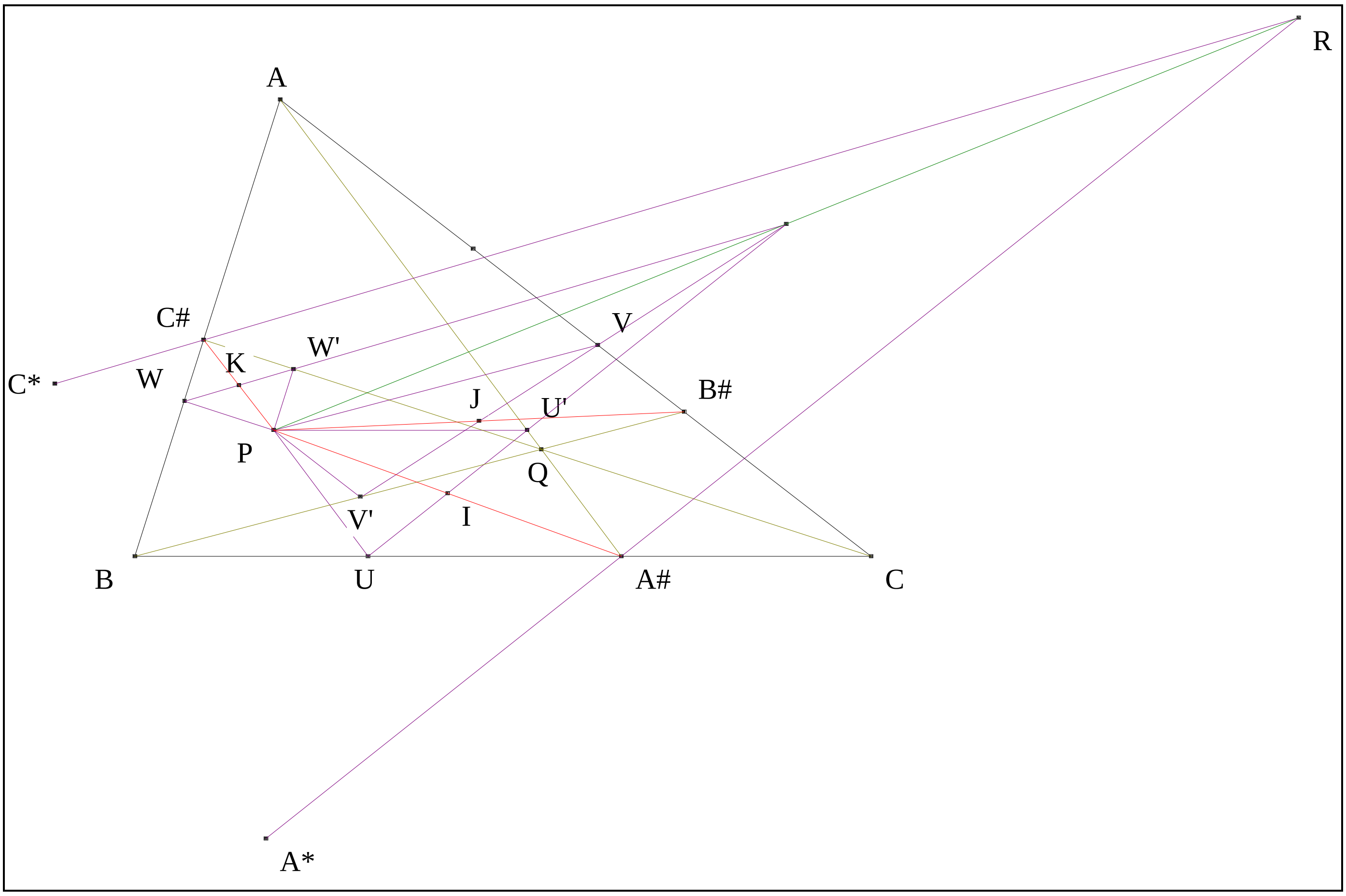


- Notons A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
  A", B", C" les pieds des A, B, C-anticéviennes de P relativement à ABC,
  A*B*C* le triangle P-anticévien de ABC
  et A#B#C# le triangle Q-cévien de ABC.



- D'après 4. Triangle P-anticévien et Q-cévien, A#B#C# est en perspective avec A*B*C* ;
  d'après la scolie, (A*A#), (B*B#) et (C*C#) sont concourantes ou parallèles.

- Notons R ce point de concours lorsqu'il existe.

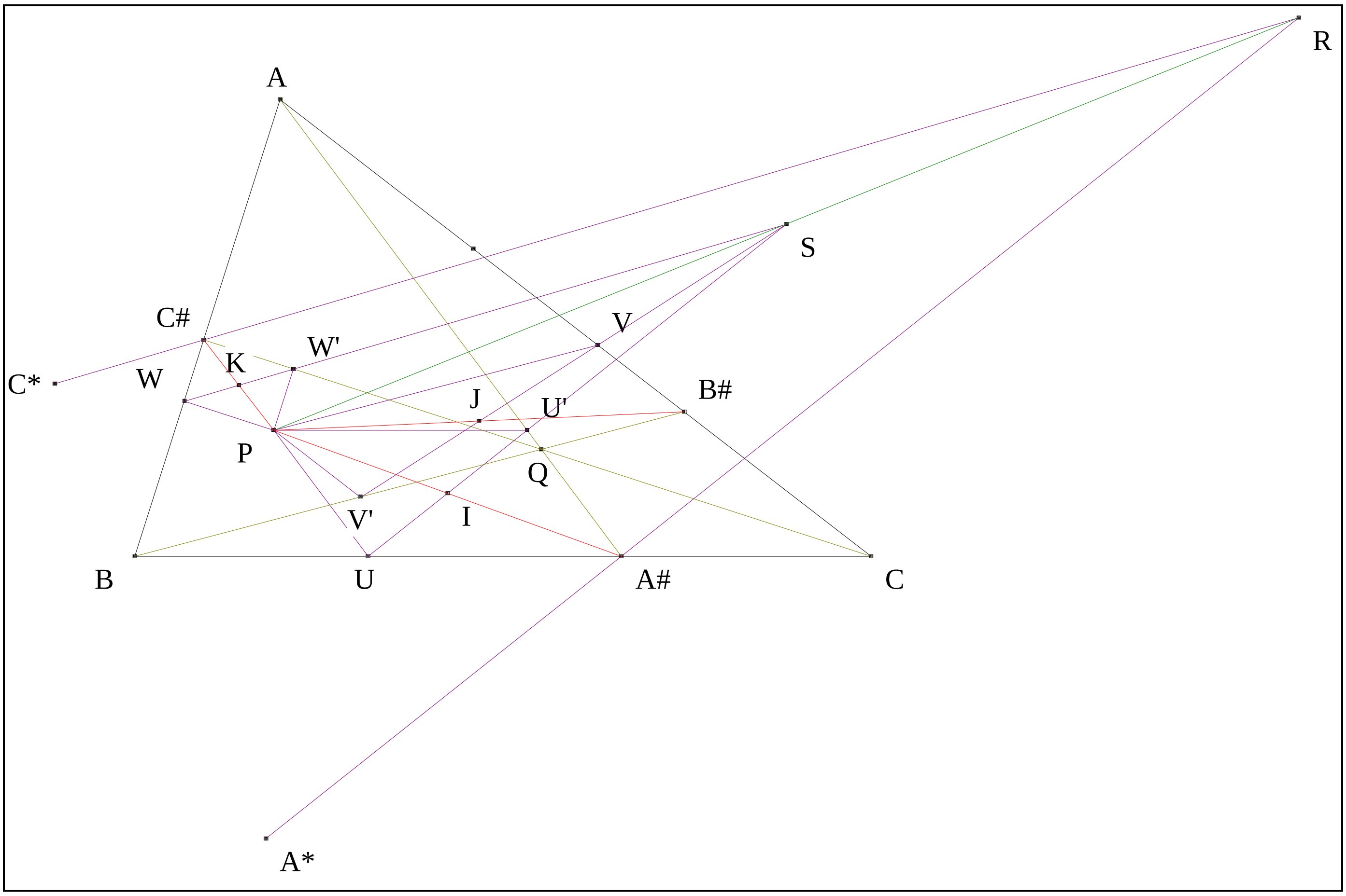


- D'après "5. Deux parallèles", (UU') // (A*A#)
  (VV') // (B*B#)
  (WW') // (C*C#).

- Notons I, J, K les milieux de [PA#], [PB#], [PC#].

- **Conclusion :** par homothétie de centre P et de rapport 2,
  (UU'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Scolies : **(1)** position du point de concours lorsqu'il existe



- Notons S ce point de concours.

- **Conclusion :** par l'homothétie de centre P et de rapport 2, S est le milieu de [PR].

(2) En anglais, S est "the paracevian perspector of the points P and Q with respect to the triangle ABC".

7. NOTE HISTORIQUE

Un cas particulier du "Paracevian perspector" apparaît comme exercice, d'après mes sources, en 1986 dans le livre intitulé *Zadachi po planimetrii* de Viktor Vasil'evich Prasolov[6] en considérant pour P l'orthocentre d'un triangle. Ce résultat réapparaît en 1999 aux Olympiades Mathématiques d'Ukraine et dans la revue canadienne *Crux mathematicorum* où une solution de Toshio Seimiya est présentée.
Le 23 juillet 2004, le belge Éric Danneels[7] propose au sein du groupe *Hyacinthos* une généralisation de cette situation en libérant l'orthocentre pour un point quelconque. Le même jour, Bernard Gibert[8] précise la position du point de concours. Le premier septembre 2004, le lycéen Darij Grinberg[9] présente sur son site[10], la première preuve métrique basée sur les théorèmes de Céva et Ménélaüs appliqués au quadrilatère, "a rather long synthetic proof…" comme il la commente dans son Message *Hyacinthos*.

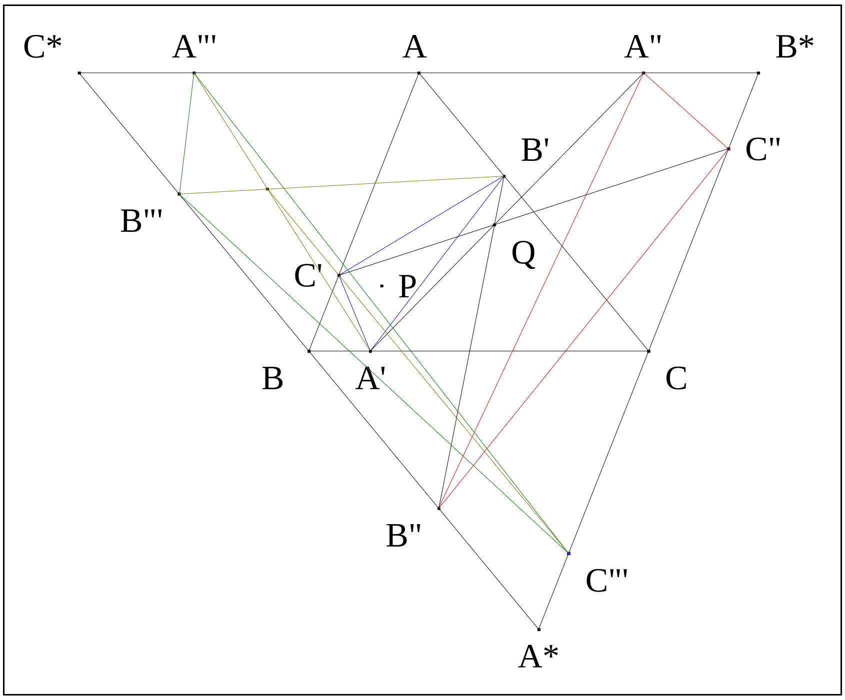
6 Prasolov V., *Plane Geometry* (1986) chapître 5, excercice 81.
7 Danneels E., Paracevian perspector ?, Message *Hyacinthos* # 10135 du 23/07/2004.
8 Gibert B., Paracevian perspector ?, Message *Hyacinthos* # 10136 du 23/07/2004.
9 Grinberg D., Paracevian perspector ? (Eric Danneels), Message *Hyacinthos* # 10358 du 01/09/2004.
10 http://de.geocities.com/darij_Grinberg/

En 2006, Quang Tuan Bui[11] représente à nouveau l'exercice de Prasolov en introduisant une conjugaison entre l'orthocentre et Q. Quelques jours plus tard, l'architecte grec Kostas Vittas[12] généralise cette situation en libérant l'orthocentre pour un point quelconque et présente une longue preuve métrique qu'il améliore par la suite[13] .

7. UN THÉORÈME DE PERSPECTIVE [14]

VISION

Figure :

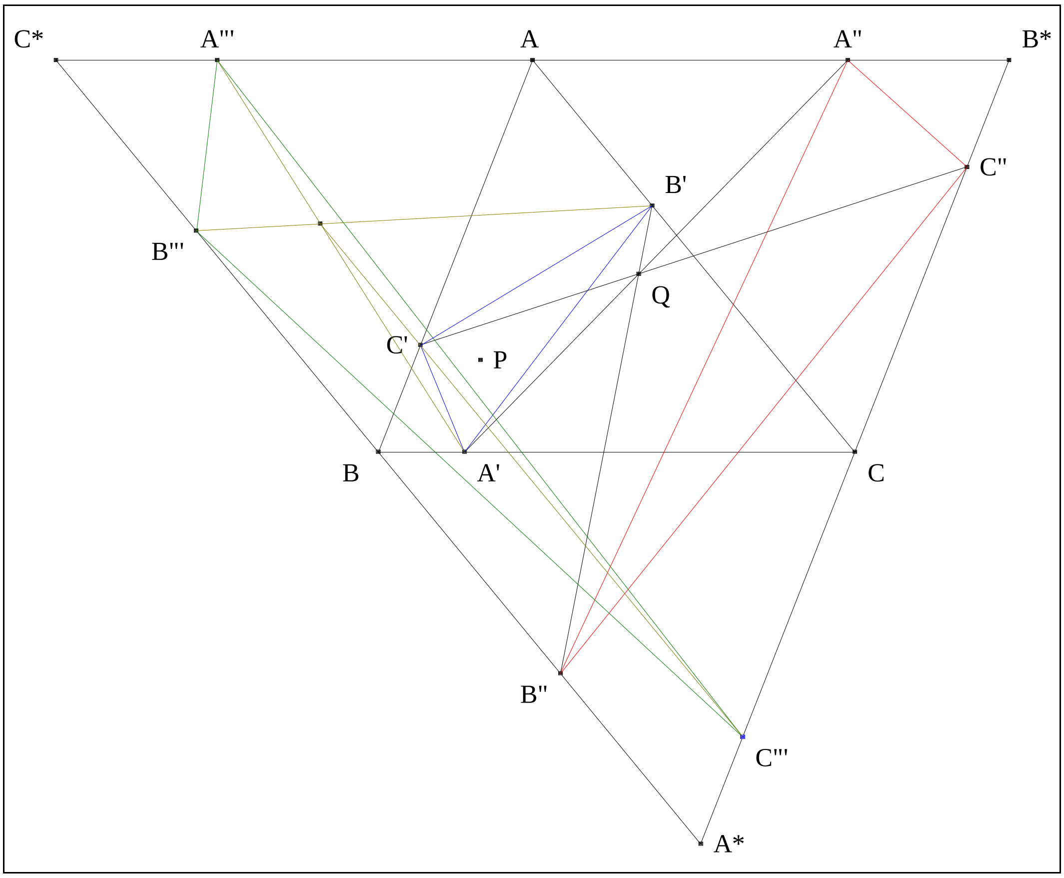


Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	Q	un point,
	A*B*C*	le triangle antimédian de ABC,
	A"B"C"	le triangle inscrit dans A*B*C* et en perspective de centre Q avec A'B'C',
et	A'''B'''C'''	le triangle isotomique de A"B"C" relativement à A*B*C*.

Donné : A'''B'''C''' et A'B'C' sont perspectifs.

VISUALISATION

[11] Bui Q. T., Projections on the sides ans altitudes of reference triangle, Message *Hyacinthos* # 13907 du 08/08/2006.
[12] Vittas K., Projections on the sides ans altitudes of reference triangle, Message *Hyacinthos* # 14034 du 20/08/2006.
[13] Vittas K., Projections on the sides ans altitudes of reference triangle, Message *Hyacinthos* # 14088 du 24/08/2006.
[14] Ayme J.-L., (17/03/2007).



- **Conclusion :** d'après 6. The Paracevian perspector, A'''B'''C''' et A'B'C' sont perspectifs.

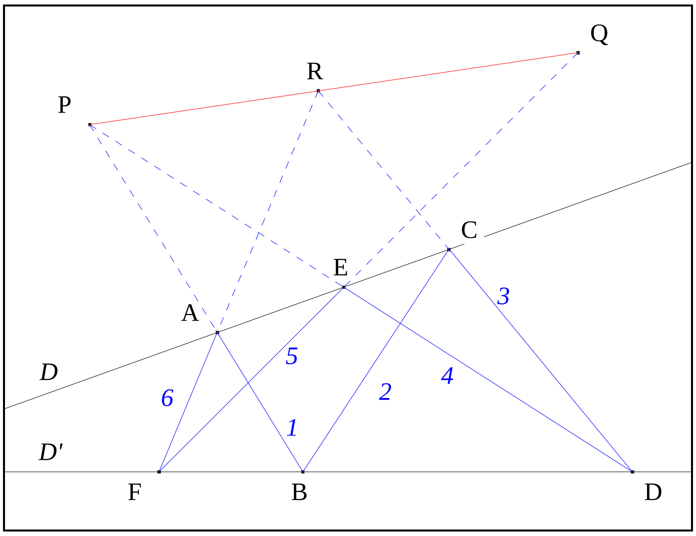
Commentaire : cette preuve s'inspire du point de départ de celle de Darij Grinberg.

Énoncé : un triangle P-cévien de ABC étant en P-perspective avec le triangle inscrit dans le triangle antimédian de ABC,
est en perspective avec le triangle isotomique de ce triangle inscrit.

ANNEXE

1. "Proposition 139" de Pappus[15]

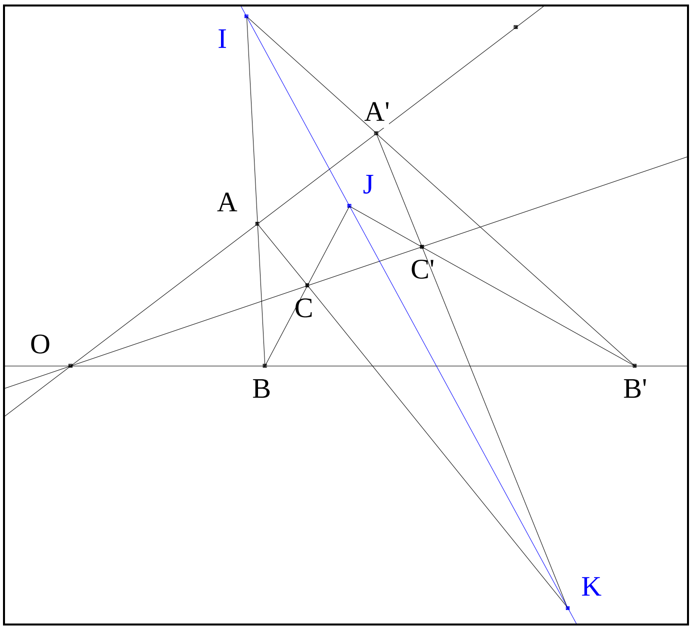
[15] Pappus, *Collections*, Livre VII.



Traits :	D, D'	deux droites,
	ABCDEFA	un hexagone de Pappus
et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : E est sur la droite (AC) *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.

2. "Théorème des deux triangles" de Desargues[16]



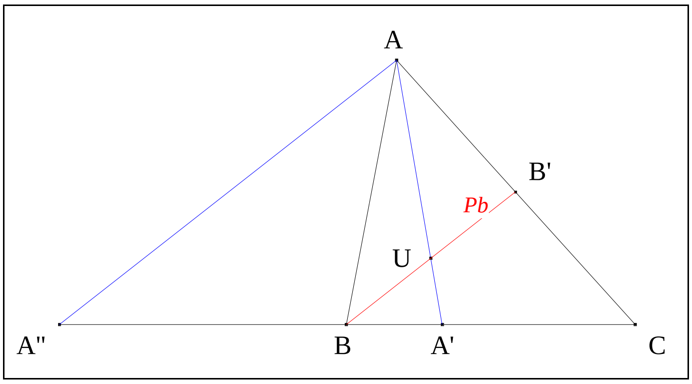
Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
	O	le point de concours de (AA') et (BB'),
	I	le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'),
	J	le point d'intersection des droites (BC) et (B'C')
et	K	le point d'intersection des droites (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* les points I, J et K sont alignés.

---

[16] Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.

3. "Proposition 137" de Pappus[17]



Traits :	ABC	un triangle,
	A', A"	deux points,
	*P*b	une B-cévienne de ABC,
	B', U	les points d'intersection de (BB') resp. avec (AC), (AA').

Donné : la quaterne (B, C, A', A") est harmonique
si, et seulement si,
U est le milieu de [BB'].

[17] Pappus, *Collections*, Livre VII.