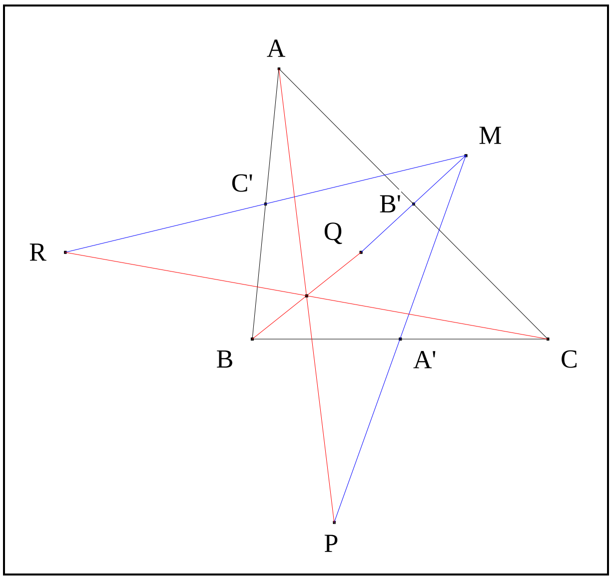
COMPLÉMENTARITÉ

HISTORIQUE - EXEMPLES - GÉNÉRALISATION

†

Jean-Louis AYME



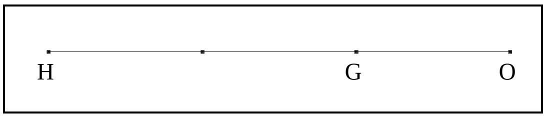
Résumé. Nous présentons le concept de complémentarité dans le cadre de la Géométrie du Triangle.
L'article commence par un court historique, relate l'apport de Maurice d'Ocagne, se poursuit par des exemples et se termine par une généralisation géométrique amorcée algébriquement par Adolphe Mineur qui offre aux géomètres un nouveau point de vue nettement plus large.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

Avertissement : les références indiquées sont celles trouvées par l'auteur et peuvent donc être modifiées.

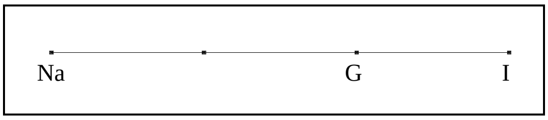
A. HISTORIQUE

C'est au début du III-ième siècle avant notre ère qu'Euclide[1] d'Alexandrie évoque le centre O du cercle circonscrit d'un triangle dans ses *Éléments*. Quelques décennies plus tard, Archimède[2] de Syracuse s'intéresse à deux points remarquables d'un triangle, le point médian G qu'il appelle "χεντρον βαρϖν" et à l'orthocentre[3] H qui, durant de nombreux siècles, sera appelé "point d'Archimède".

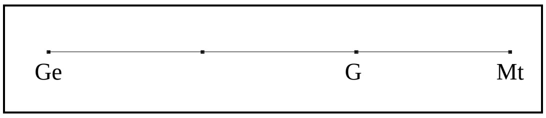


En 1765, Léonhard Euler[4] est le premier géomètre a avoir l'intuition de regrouper l'orthocentre, le point médian et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sur une droite qui aujourd'hui porte son nom. Cette démarche allait donner à la future "Géométrie du Triangle", le premier moule d'une synthèse d'un ordre plus élevé dont la nature allait être expliquée par ses successeurs.
En 1836, Christian von Nagel[5] écrit un livre intitulé *Le développement de la géométrie moderne du triangle* dans lequel il présente quatre autres triades[6] analogues à celle d'Euler par exemple, les trois triades formées par

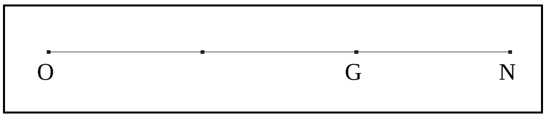
(1) le point de Nagel, le point médian et le centre du cercle inscrit



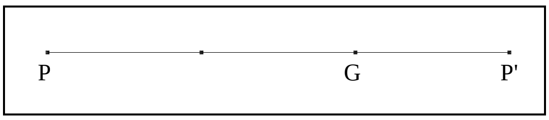
(2) le point de Gergonne Ge, le point médian G et le Mittenpunckt



(3) le centre du cercle circonscrit O, le point médian G et le centre du cercle d'Euler



En 1866, Carl Gustave Reuschle[7] du lycée de Stuttgart (Allemagne), généralise le résultat d'Euler en considérant les couples de points (P, P') relativement à un triangle donné pour lesquels G est le second tiers-point du segment [PP'] à partir de P.

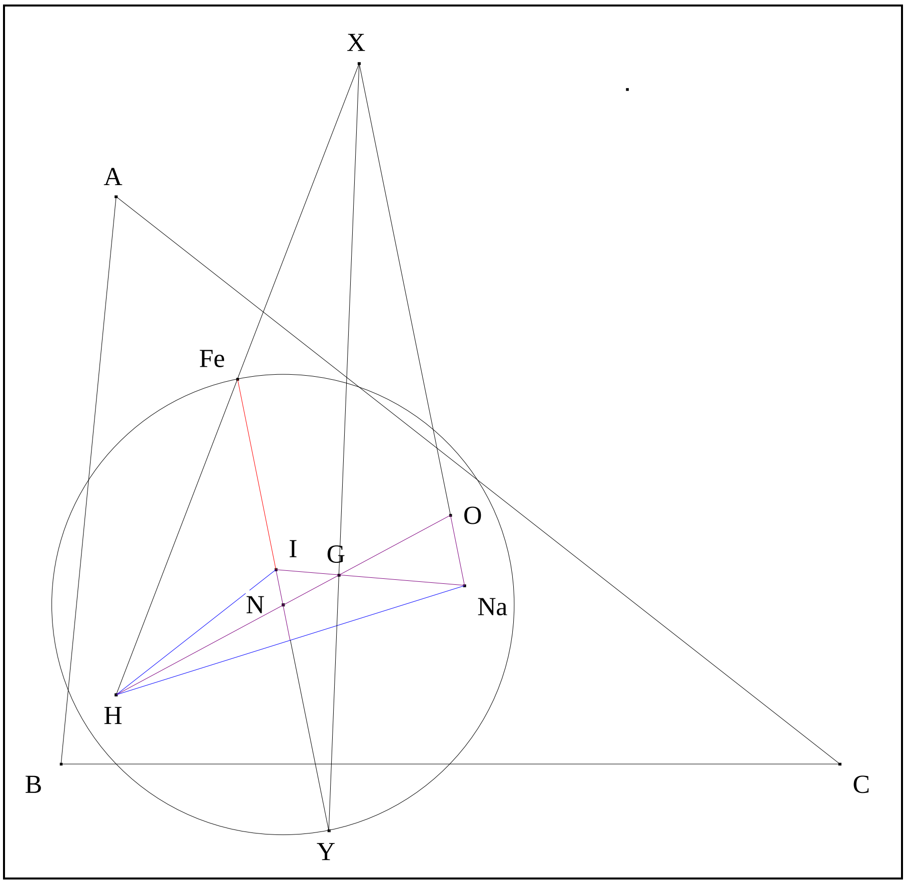


Reuschle observe que cette relation est vérifiée par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé, ainsi que par les points extrêmes participant aux triades précédentes. Travaillant sur la relation de conjugaison qui lie P à

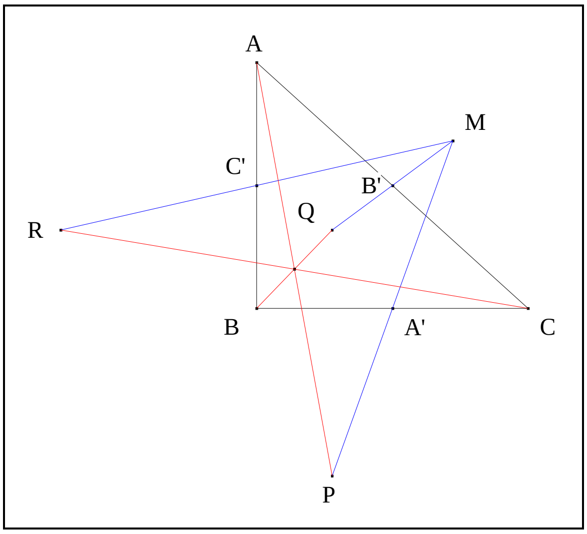
---

1 Euclide (vers 325 - vers 265 a. J.-C.), proposition 5, Livre IV des *Éléments*.
2 Archimède, proposition 13, Sobre el equilibrio de los platos, Livre I (vers 225 a. J.-C.).
3 Archimède, *Scolies*, lemme 5.
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge, 1897, Lemmas 5.
4 Euler, *Solutio facilis*, 1765.
5 Nagel (von) C., Untersuchungen ueber die wichtigsten zum Dreieck gehoerigen Kreise (1836)
6 Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992).
7 Reuschle C. G. (1812-1875), Über die Punckte des dreiecks, deren Verbindungsstrecken wom Schwerpunckt gedrittelt, *Zeitschrift für Mathemùatik und Physik* 11 (1866) 475-493.

P', il donne à (P, P') le nom de "couple de Nagel" et à (PP'), le nom de "droite d'Euler". Il présente à son tour, quatre nouveaux couples de Nagel dont celui-ci



où X est le point d'intersection de la droite joignant l'orthocentre au point de Feuerbach Fe avec la droite joignant le point de Nagel au centre du cercle circonscrit d'un triangle, et Y le point diamétralement opposé à Fe sur le cercle d'Euler de ce triangle. Précisons que ses trois autres couples de Nagel mettent en oeuvre les points adjoints de Fe et les trois cercles exinscrits.

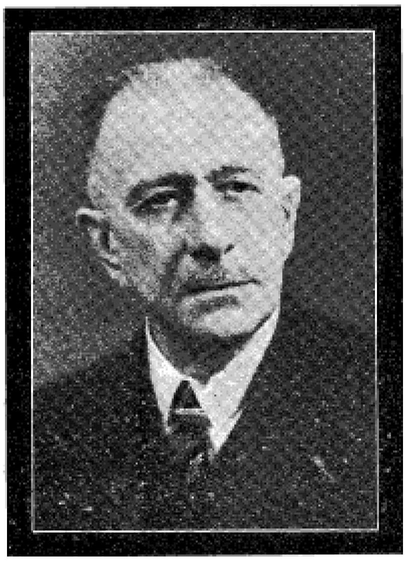


En 1882, Maurice d'Ocagne découvre une construction des couples (P, P') en considérant les symétriques de P par rapport aux sommet du triangle médian A'B'C' de ABC.

En 1884, Émile Hain[8] revisitant la relation de conjugaison en prenant pour exemple un sommet d'un triangle et le milieu du côté opposé, observe que celui-ci est le sommet correspondant du triangle complémentaire (médian, médial). En conséquence, il préfère envisager cette conjugaison sous l'aspect de la complémentarité. Ainsi, ce milieu devient le point complémentaire du sommet correspondant et par extension, P', le complémentaire de P.
En 1886, Gaston Gohierre de Longchamps[9] envisage la relation réciproque. Ainsi, P devient l'anticomplément de P'.
L'année suivante, Émile Vigarié[10], est apparemment le premier géomètre à formuler dans le langage vectoriel, cette complémentarité.

Comme la recherche ne désire nullement s'arrêter en si bon chemin, le professeur Adolphe Mineur (1867-1950) de l'université de Bruxelles (Belgique) écrit en 1924 *Cubiques Anallagmatiques*[11] un livre de 77 pages dans lequel il présente la meilleure description des cubiques d'un triangle selon le regretté Steve Sigur[12]. Dans ce livre, Mineur expose algébriquement en recourrant aux coordonnées barycentriques et trilinéaires, une extension du concept de complémentarité que de récents chercheurs traduiront géométriquement.

B. MAURICE PHILBERT D'OCAGNE



La géométrie pure, classique,
prolongement naturel des éléments d'Euclide
est une source intarissable d'enchantement
pour l'esprit auquel elle ouvre
les plus gracieuses, les plus captivantes perspectives
et fait goûter le plaisir délicat des démonstrations les plus fines,
des développements les plus ingénieux.

Maurice D'Ocagne est né le 26 mars 1862 à Paris (France).
Issu d'une vieille famille normande, fixée à Paris au XVIII-ème siècle, son père Mortimer d'Ocagne est connu pour avoir publié un ouvrage sur les *Grandes Écoles de France*.

8 Hain E., *Archives* de Grunert (1885) 214.
9 Longchamps (de) G., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1886) 131.
10 Vigarié E., *Mathesis* 7 (1887) 6, 57.
11 Mineur A., *Cubiques Anallagmatiques*, Librairie J. van Dijl, 38-38a Rue des Étudiants, Bruxelles.
12 http://www.paideiaschool.org/Teacherpages/Steve_Sigur/resources/analagmatic%20cubics/analagmatic%20cubics.html.

Élève du collège Chaptal, puis du lycée Fontanges, il entre en 1880 à l'École Polytechnique après avoir déjà publié dans le *Journal de Mathématiques* de Bourget, et en sort comme ingénieur dans le corps des Ponts et Chaussées.
En 1883, il écrit un article dans *les Nouvelles Annales de mathématiques* où il introduit le terme de "symédiane" lequel allait remplacer celui de "médiane antiparallèle" introduit par Lemoine dans les *Nouvelles Annales* de 1873.
En 1885, il est affecté à Cherbourg pour y construire une station hydraulique.
En 1892, il reçoit le prix Leconte pour sa *Nomographie* publiée l'année précédente et en 1894 le prix Dalmont pour l'ensemble de ses travaux mathématiques, ces deux prix étant décernés par L'Académie des Sciences.
Répétiteur à l'École polytechnique en 1893, puis professeur de géométrie à l'École Nationale des Ponts et Chaussées l'année suivante, il prend la direction du Service des cartes en 1901.
Nommé professeur à l'École Polytechnique en 1912, il est invité deux années après au colloque de la Edinburgh Mathematical Society pour donner deux conférences.
En 1920, il devient Inspecteur général des Ponts et Chaussées et est élu Académicien libre à l'Académie des sciences, le 30 janvier 1922,
Il décède le 23 septembre 1938 au Havre (France).[13]

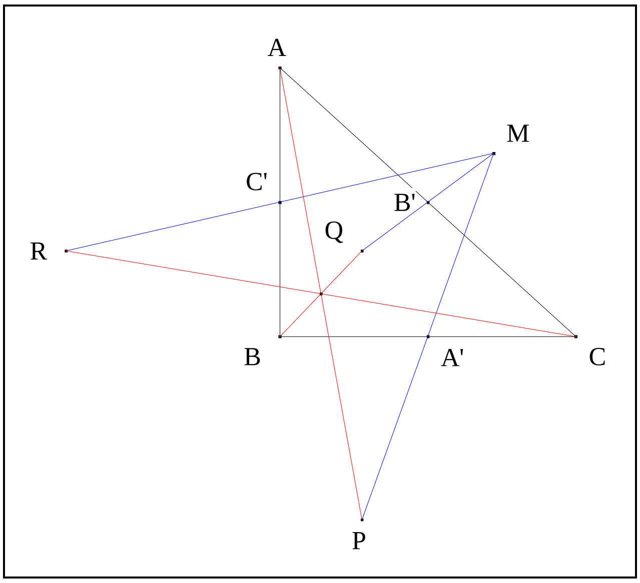
En 1955, son ami René Dugas, ingénieur des Mines, complète et publie une *Histoire abrégée des sciences mathématique*s.
Rappelons que sous le pseudonyme de Pierre Delix, Maurice d'Ocagne a produit quelques essais littéraires, et notamment une comédie en un acte, *la Candidate*, qui a eu plus de cent représentation à Paris au théâtre Cluny (1888-89).
Pour terminer, notons aussi qu'une avenue et une école maternelle du XIV-ème arrondissement de Paris portent son nom.

C. DÉFINITIONS

1. Point complémentaire ou la construction d'Ocagne

VISION

Figure :

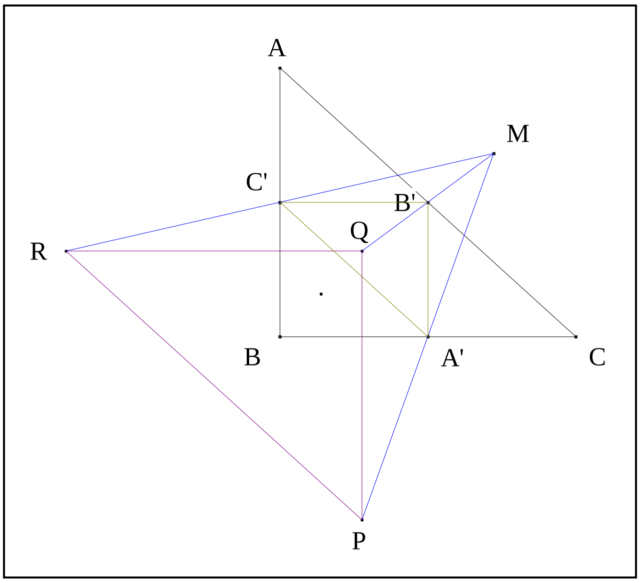


[13] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html.

Traits : ABC un triangle,
M un point,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et P, Q, R les symétriques de A, B, C resp. par rapport à A', B', C'

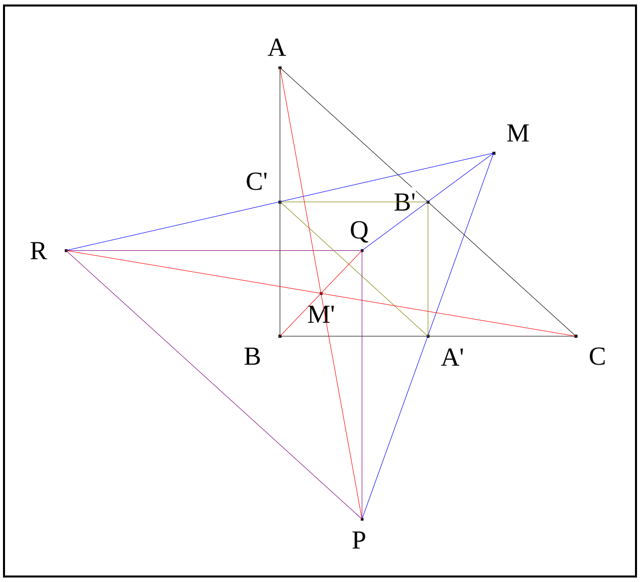
Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes. [14]

VISUALISATION



- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué resp. aux triangles ABC et MPQ, (AB) // (A'B') et (A'B') // (PQ) ;
  par transitivité de la relation //, (A'B') // (PQ).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'C') // (QR) et (C'A') // (RP).



- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 1)
  appliqué aux triangles indirectement homothétiques ABC et PQR,

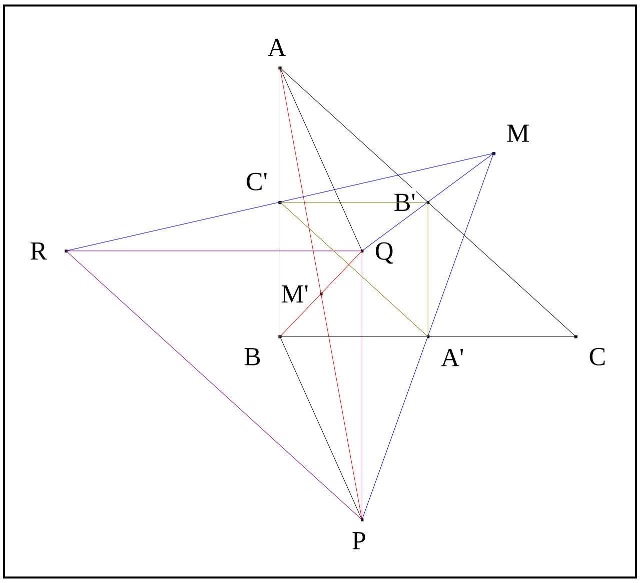
14 d'Ocagne M. (1882).

(AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

- Notons M' ce point de concours.

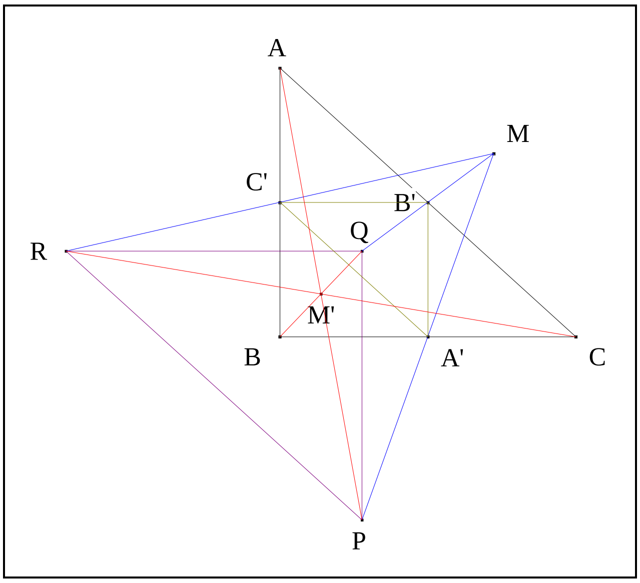
Énoncé traditionnel : le triangle déterminés par
les symétriques d'un point par rapport aux sommets du triangle médian d'un triangle est en perspective avec ce triangle.

Scolies : **(1)** miliosité de M'



- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué resp. à ABC et MPQ, AB = 2.A'B' et 2.A'B' = PQ ;
  par transitivité de la relation =, AB = PQ.

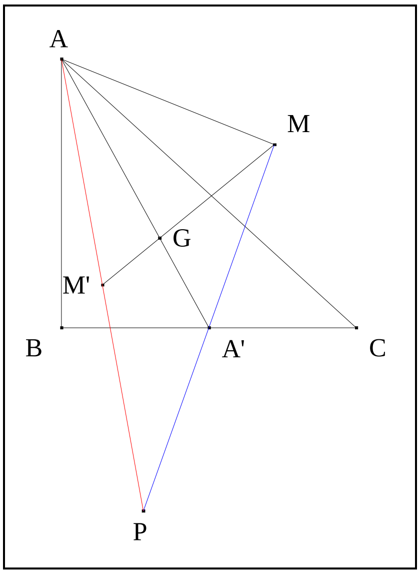
- Le quadrilatère ABPQ ayant deux côtés opposés égaux et parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence M' est le milieu de [AP] et [BQ].



- Mutatis mutandis, nous montrerions que M' est le milieu de [CR].

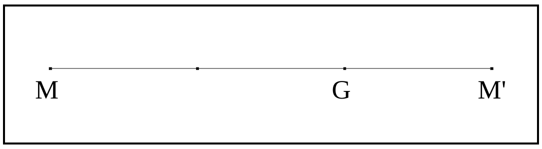
- **Conclusion :** M' est le milieu de [AP], [BQ], [CR].

(2) Le point médian de ABC



- Notons G le point d'intersection de (AA') et (MM').
- Par définition, G est le point médian du triangle MAP et est situé au tiers de [AA'] à partir de A'.
- **Conclusion :** G est le point médian de ABC

(3) Un alignement et une relation



M, G et M' sont alignés dans cet ordre et GM' = ½. GM.

(4) Terminologie

* M' est "le point complémentaire[15] de M relativement à ABC".

Pour faire court,

M' est le complément de M relativement à ABC.

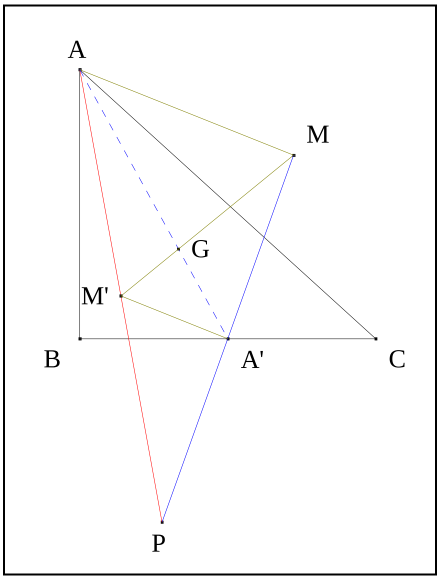
* M' est le point subordonné ou inférieur ou image médiale[16] de M relativement à ABC

Note historique : le terme "points complémentaires"[17] a été initié Christian von par Nagel[18] en 1836, repris par Maurice P. d'Ocagne en 1882, par Émile Hain en 1885, par Gaston Gohierre de Longchamps[19] en 1886, et formulé par Émile Vigarié[20] en 1887.

15 En anglais, inferior, subordinate ou medial image i.e. the complement of a point with respect to a triangle is the image of this point in the homothety centered at the centroid of this triangle and having factor -1/2.
16 Terminologie de John Horton Conway.
17 Hain E., *Archives de Grunert* (1885) 214.
18 Von Nagel C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836).
19 de Longchamps G., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1886).
20 Vigarié E., *Mathesis* 7 (1887).

Commentaire : nous avons une technique pour construire le complément d'un point relativement à un triangle.

(5) Deux parallèles



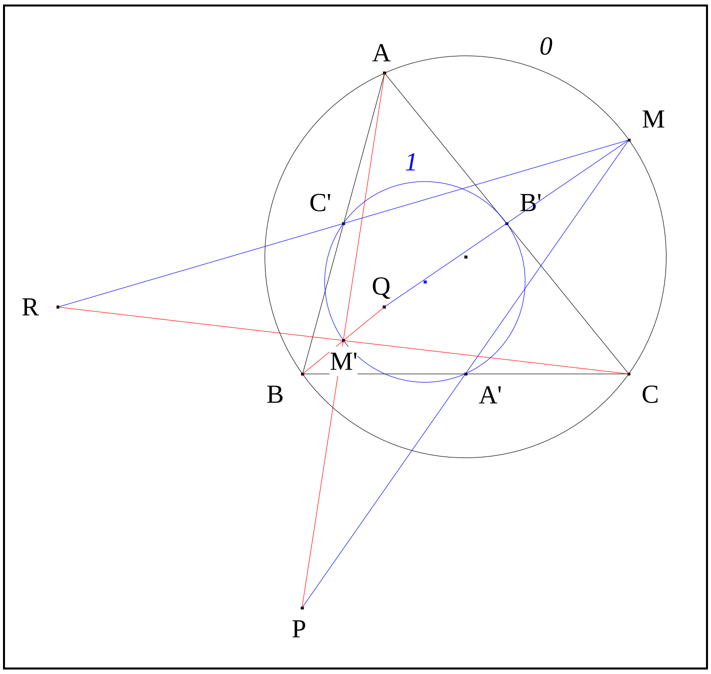
- **Conclusion :** (AM) // (A'M').

Commentaire : cette technique pour construire le complément d'un point relativement à un triangle sera plus efficace par la suite.
Rappelons que nous partons de M pour aller à un sommet du triangle, puis nous allons par parallélisme au sommet correspond du triangle médian.
Pour résumer, nous allons du triangle ABC à son triangle complémentaire A'B'C'.

2. Le point d'Ocagne

VISION

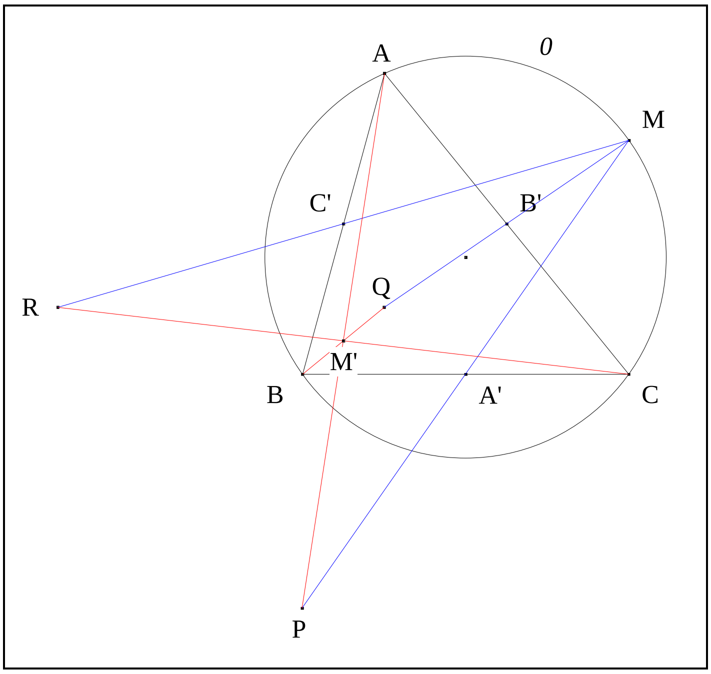
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de *0*,
A'B'C' le triangle médian de ABC,
P, Q, R les symétriques de A, B, C resp. par rapport à A', B', C',
M' le point d'intersection de (AP), (BQ), (CR)
et *1* le cercle d'Euler de ABC.

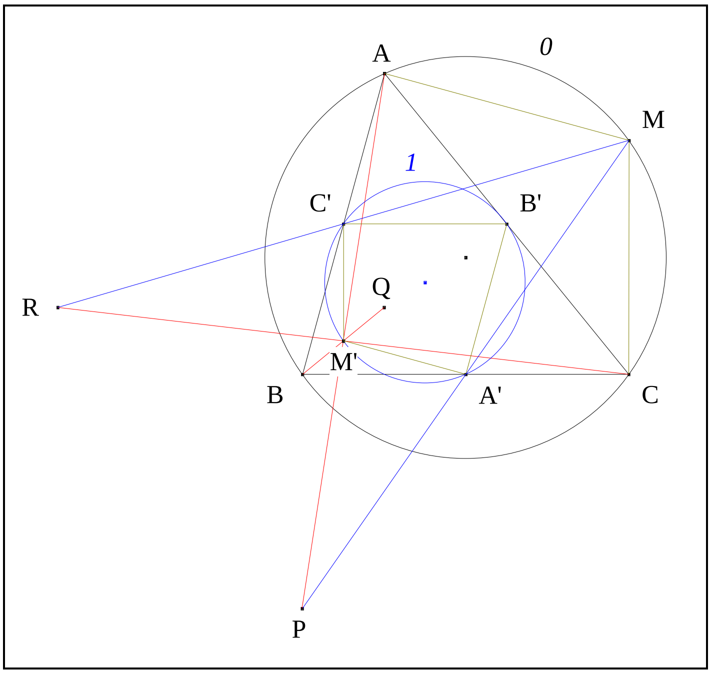
Donné : M' est sur *1*.[21]

VISUALISATION



[21] d'Ocagne M..

- **Scolie :** d'après C. 1. Le point complémentaire, [AP], [BQ] et [CR] concourent en leur milieu M'.



- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué

(1)	au triangle MAP,	(M'A') // (MA) ;
(2)	au triangle ABC,	(A'B') // (AB) , (B'C') // (BC) ;
(3)	au triangle MCR,	(C'M') // (CM).

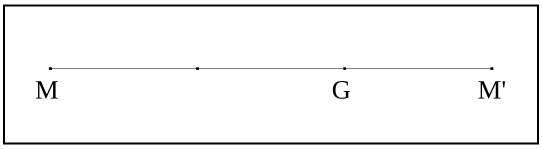
- **Scolies :** **(1)** *1* est le cercle circonscrit de A'B'C'
  (2) le quadrilatère A'B'C'M' est homothétique à ABCD.

- Le quadrilatère ABCD étant cyclique, A'B'C'M' est cyclique.

- **Conclusion :** d'après "Le cercle d'Euler"[22], M' est sur *1*.

Scolies : **(1)** M' est "le point d'Ocagne de M relativement à ABC".

(2) Un alignement et une relation



- Notons G le point médian de ABC.

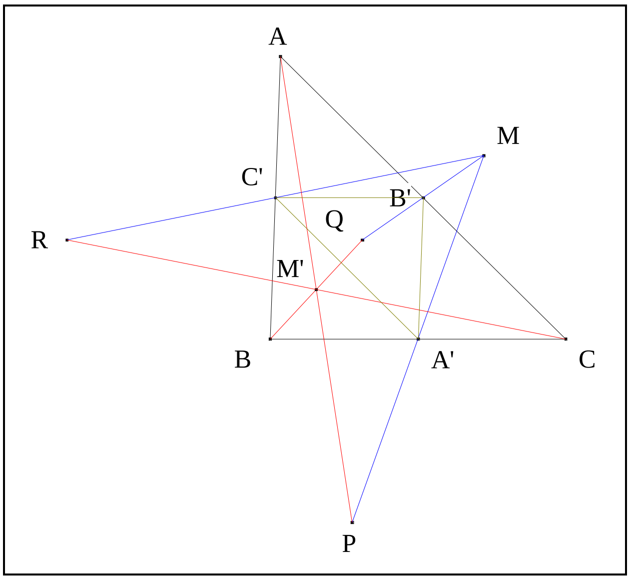
- **Conclusion :** M, G et M' sont alignés dans cet ordre et GM = 2.GM'.

3. Point anticomplémentaire – construction

VISION

[22] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	M'	un point,
	P, Q, R	les symétriques de A, B, C par rapport à M'
et	A'B'C'	le triangle médian de ABC.

Donné : (A'P), (B'Q) et (C'R) sont concourantes.

VISUALISATION

- La preuve se calque inversement sur la démarche mis en œuvre dans C. 1. Le point complémentaire.

- **Conclusion :** (A'P), (B'Q) et (C'R) sont concourantes.

- Notons M ce point de concours.

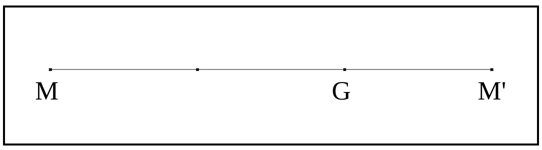
Énoncé traditionnel : le triangle déterminés par
les symétriques d'un point par rapport aux sommets d'un triangle est en perspective
avec le triangle médian de ce triangle.

Scolies : **(1)** miliosités

- **Conclusion :** A', B', C' sont resp. les milieux de [MP], [MQ], [MR].

(2) Un alignement et une relation

- Notons G le point médian de ABC



M, G et M' sont alignés dans cet ordre et GM = 2.GM'.

(3) Terminologie

* M est le point anticomplémentaire de M' relativement à ABC.

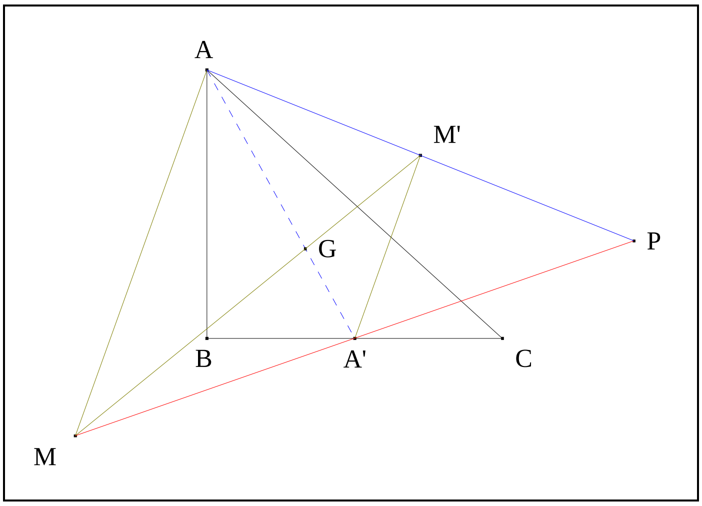
Pour faire court,

M est l'anticomplément de M' relativement à ABC.

* M est le point supérieur[23] de M' relativement à ABC.

Commentaire : nous avons une technique pour construire l'anticomplément d'un point relativement à un triangle.

(4) Deux parallèles



- **Conclusion :** (AM) // (A'M').

Commentaire : cette technique pour construire le complément d'un point relativement à un triangle sera plus efficace par la suite.
Rappelons que nous partons de M" pour aller à un sommet du triangle complémentaire, puis nous allons par parallélisme au sommet correspond du triangle.
Pour résumer, nous allons du triangle (médian) A'B'C' à son triangle anticomplémentaire ABC.

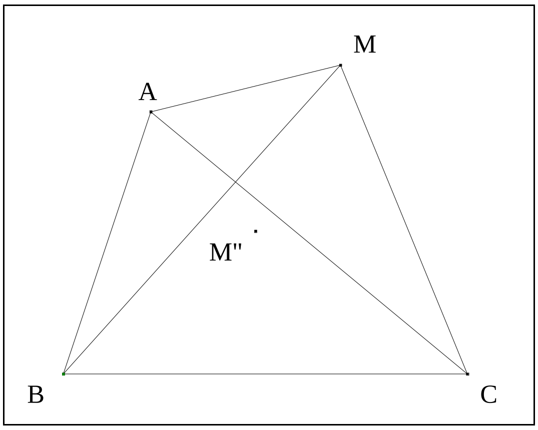
D. EXEMPLES

1. Complément du complément et le point médian d'un quadrilatère

VISION

Figure :

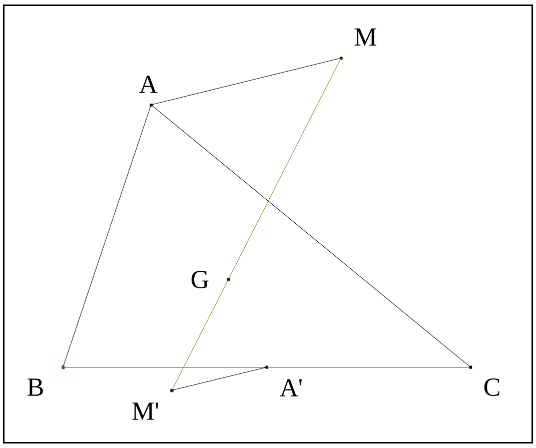
[23] Terminologie de John Horton Conway.



Traits : ABC un triangle,
et M, M" deux points.

Donné : M" est le complément du complément de M relativement à ABC
si, *et seulement si*,
M" est le point médian du quadrilatère ABCM.

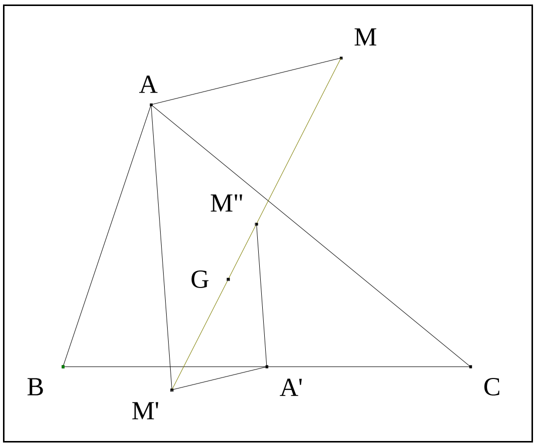
VISUALISATION NÉCESSAIRE



- D'après C. 1. Le point complémentaire, scolie 6,
  construisons le point complémentaire de M relativement à ABC.

- Notons A' le milieu de [BC],
  G le point médian de ABC
  et M' le point d'intersection de la parallèle à (AM) passant par A' avec (MG).

- **Conclusion partielle :** **(1)** M' est le complément de M relativement à ABC
  (2) M, G et M' sont alignés dans cet ordre
  (3) GM = 2.GM'.

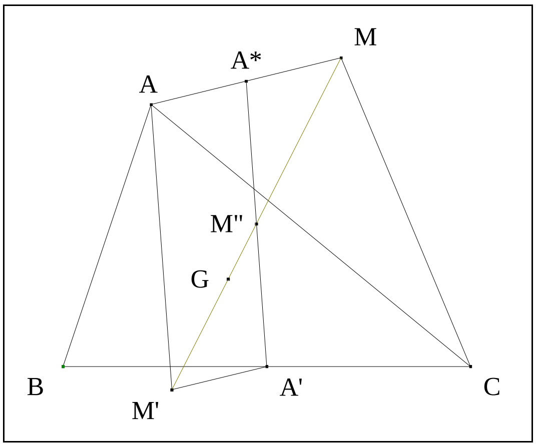


- D'après C. 1. Le point complémentaire, scolie 5,
  construisons le point complémentaire de M' relativement à ABC.

- Notons M" le point d'intersection de la parallèle à (AM') passant par A' avec (M'G).

- **Scolies :** **(1)** M" est le complément de M' relativement à ABC
  (2) M', G et M" sont alignés dans cet ordre
  (3) GM' = 2.GM".

- **Conclusion partielle :** M" est le complément du complément de M relativement à ABC.



- **Scolie :** M" est le milieu de [MM'].

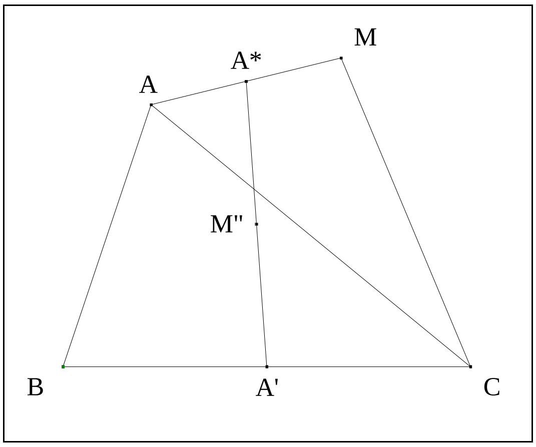
- Notons A* le milieu de [AM].

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AMM', (A'M') passe par A*.

- D'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontières (AM) et (A'M'),
  M" est le milieu de [A'A*].

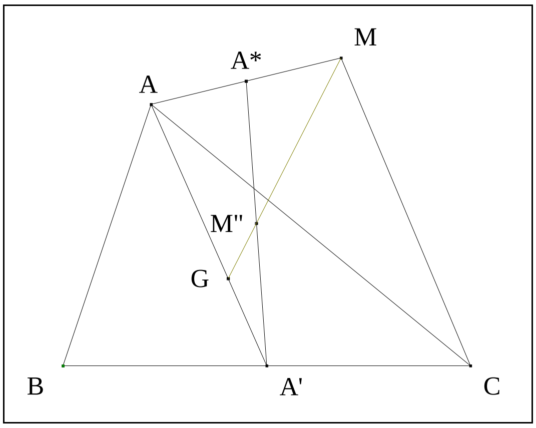
- **Conclusion :** M" étant le milieu de la médiane [A'A*] du quadrilatère ABCM,
  M" est le point médian du quadrilatère ABCM.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons A' le milieu de [BC]
  et A* le milieu de [AM].

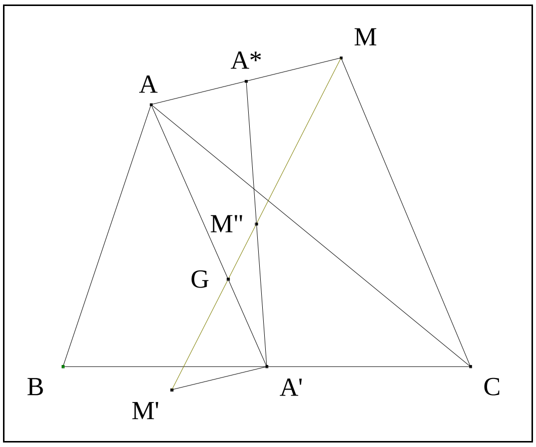
- **Scolie :** M" est le milieu de [A'A*]



- Notons G le point médian de ABC

- **Scolie :** G est le premier tiers-point de [AA'] à partir de A'.

- D'après "Tiers-point et milieu" (Cf. Annexe 2) appliqué au triangle AA'A*, G, M" et M sont alignés.



- Notons M' le point d'intersection de la parallèle à (AM) passant par A' avec (MG).

- D'après C. 1. Le point complémentaire, scolie 5, M' est le complément de M relativement à ABC.

- D'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontières (AM) et (A'M'), M" est le milieu de [MM'].

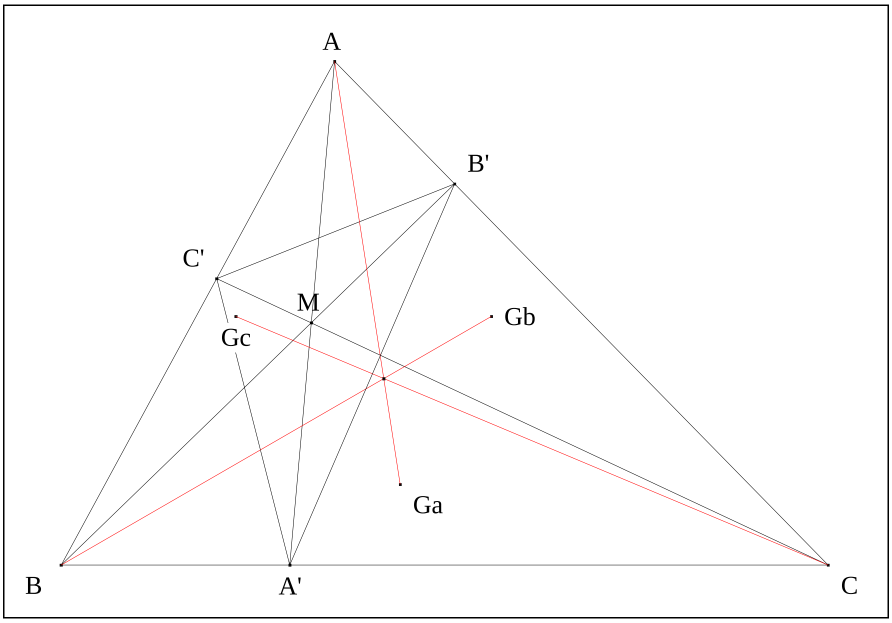
- **Conclusion :** d'après la condition nécessaire,
  M" est le complément du complément de M relativement à ABC.

Note historique : en 2002, Darij Grinberg[24] s'est intéressé au cas où M est le centre du triangle ABC.
Dans ce cas, M" est répertorié sous X_{1125} chez ETC.

2. Complément du complément et points médians partiels d'un quadrilatère

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	M	un point,
	A'B'C'	le triangle M-cévien de ABC
et	Ga, Gb, Gc	les points médians resp. des triangles MBC, MCA, MAB.

Donné : (AGa), (BGb) et (CGc) sont concourantes.[25]

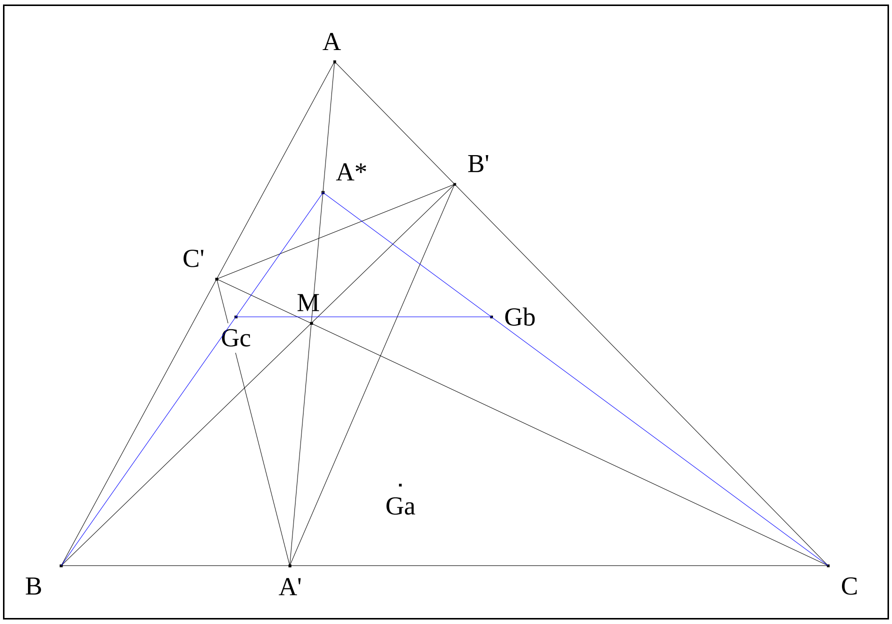
VISUALISATION

- **Commentaire :** Ga, Gb, Gc sont trois des quatre points médians partiels du quadrilatère ABMC, le quatrième étant le point médian G de ABC.
  Pour faire court, nous pouvons faire référence au résultat de Jakob Steiner suivant :

[24] Grinberg D., Message *Hyacinthos* # 7892 du 28/12/2002.
[25] Bui Q. T., Three Centroïd around Cevian Triangle, Message *Hyacinthos* # 13793 du 28/07/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos.

(AGa), (BGb), (CGc) et (MG) concourent au point médian du quadrilatère ABMC ainsi que ses deux médianes et la droites joignant les milieux de ses deux diagonales.

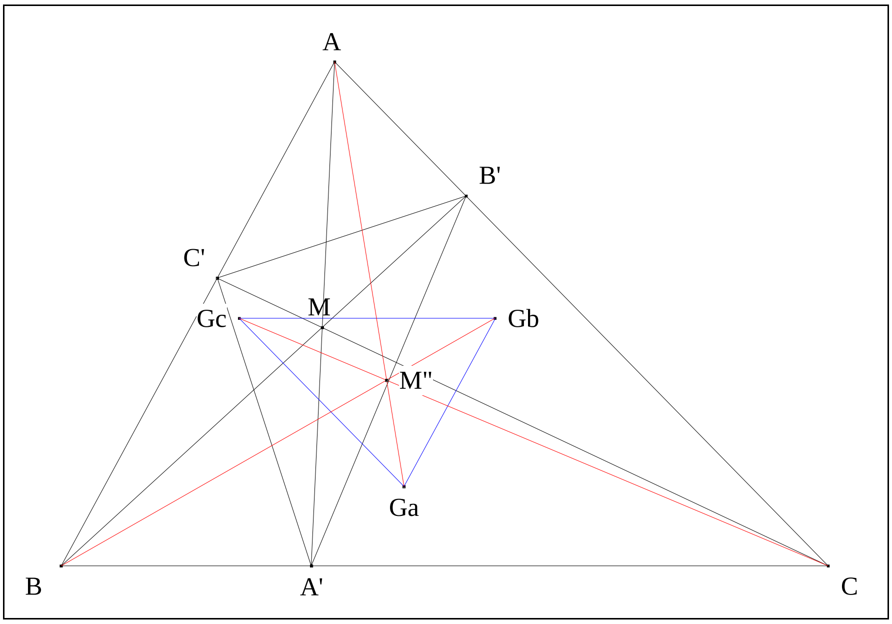
Pour éviter "d'écraser" ce problème, l'auteur a préféré reprendre une partie de la preuve et faire découvrir ainsi au lecteur certains liens avec d'autres problèmes.



- Notons A* le milieu de [AM].

- **Scolies :** **(1)** A*, Gc et B sont alignés
  (2) A*, Gb et C sont alignés.

- D'après Thalès "Rapports", (GbGc) // (BC).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (GcGa) // (CA)
  (GaGb) // (AB).

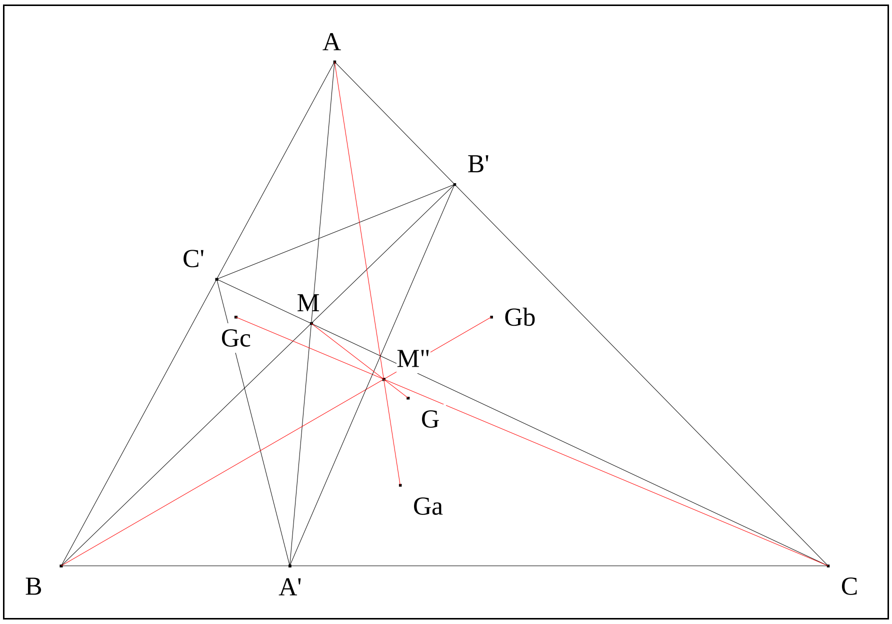
- **Conclusion :** les triangles GaGbGc et ABC étant homothétiques,

d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 1),
(AGa), (BGb) et (CGc) sont concourantes.

- Notons M" ce point d'intersection.

Note historique : ce résultat de Quang Tuan Bui datant de 2006 a été redécouvert par Nguyen Van Linh[26] en 2009.
Rappelons que l'origine de cette question revient à Jakob Steiner[27].

Scolies : **(1)** une autre droite passant par M"



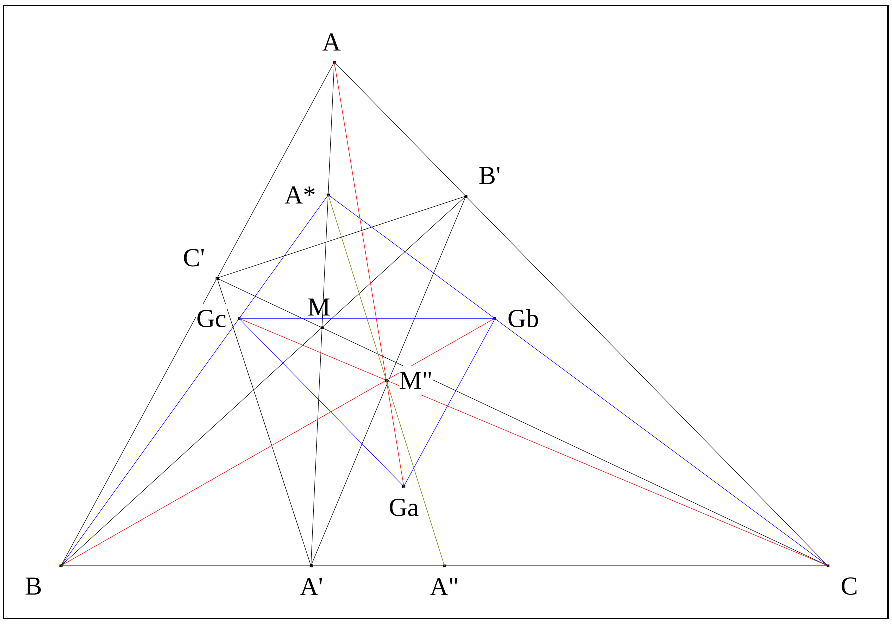
- Notons G le point médian de ABC.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (MG) passe par M".

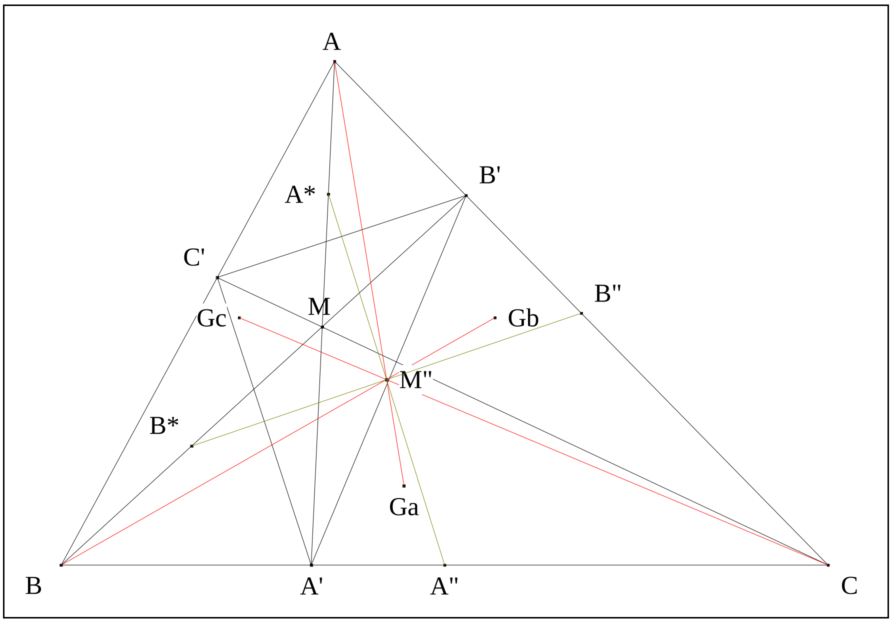
Commentaire : G est le dernier des quatre points médians partiels du quadrilatère ABMC.

(2) Nature de M"

[26] A concurrent problem, *Mathlinks* du 10/07/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=287985
[27] Steiner J., *Gesammelte Werke* **1**, p. 128 ; *Annales de Gergonne* **19**.



- Notons A" le milieu de [BC].
- D'après "Le trapèze complet" appliqué au trapèze BCGbGc, A*, M" et A" sont alignés.



- Notons B* le milieu de [BM]
  et B" le milieu de [CA].
- Mutatis mutandis, nous montrerions que B*, M" et B" sont alignés.
- **Conclusion partielle :** M" est le point médian du quadrilatère ABCM.
- **Conclusion :** d'après D. 1. Complément du complément et le point médian d'un quadrilatère M" est le complément du complément de M relativement à ABC.

(3) Un point sur une gaussienne

- (B*B") est la gaussienne[28] du quadrilatère complet ABCM ; elle passe par le milieu de [A'C'].

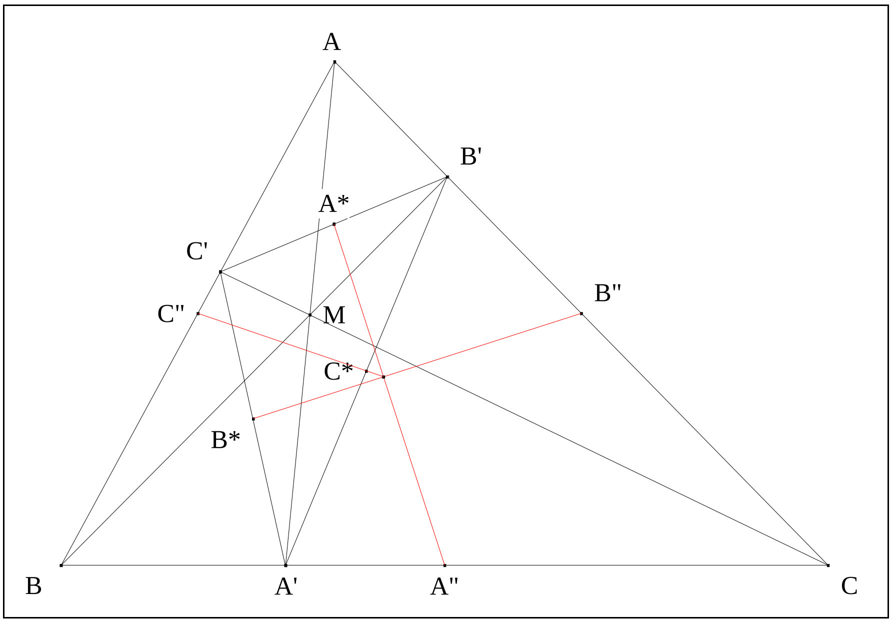
- **Conclusion :** (B*B") passe par M".

Note historique : la nature géométrique du point de concours a été redécouverte par Éric Danneels [29].

3. Complément du complément et gaussienne d'un quadrilatère

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
M un point,
A'B'C' le triangle M-cévien de ABC,
A", B", C" les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]
et A*, B*, C* les milieux resp. de [B'C'], [C'A'], [A'B'].

Donné : (A"A*), (B"B*) et (C"C*) sont concourantes. [30]

VISUALISATION

- Notons M" le complément du complément de M.

- D'après D. 2. Complément du complément et points médians partiels d'un quadrilatère, scolie 3,

---

28 Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

29 Danneels E., Three Centroïd around Cevian Triangle, Message *Hyacinthos* # 13797du 28/07/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos.

30 A concurrent problem, *Mathlinks* du 10/07/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=287985. Concurrent lines II, *Mathlinks* du 23/05/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=150123&ml=1.

(1) la gaussienne (A*A") du quadrilatère complet ABMC passe par M"

(2) la gaussienne (B*B") du quadrilatère complet BCMA passe par M"

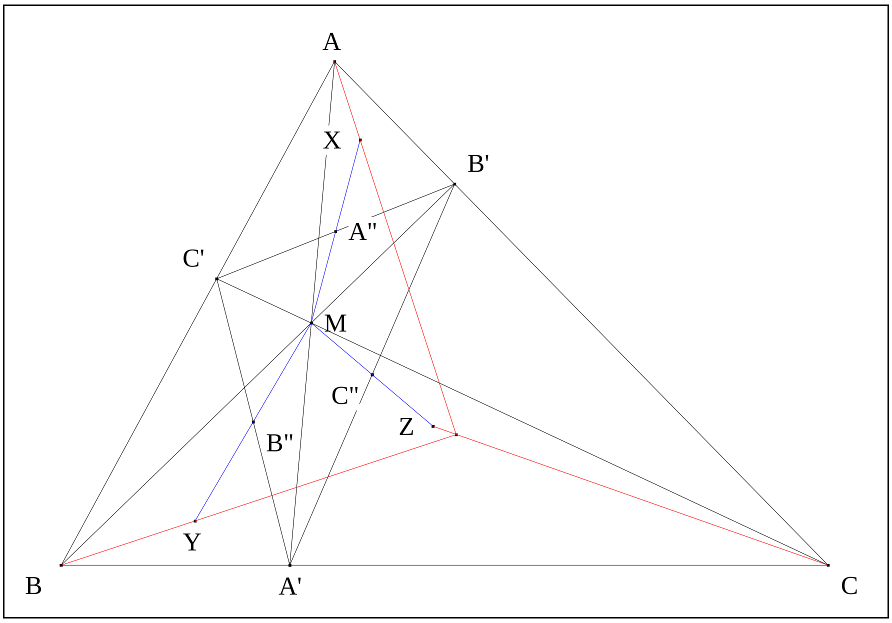
(3) la gaussienne (C*C") du quadrilatère complet CAMN passe par M".

- **Conclusion :** (A"A*), (B"B*) et (C"C*) sont concourantes.

4. Complément d'un point de Ceva

VISION

Figure :



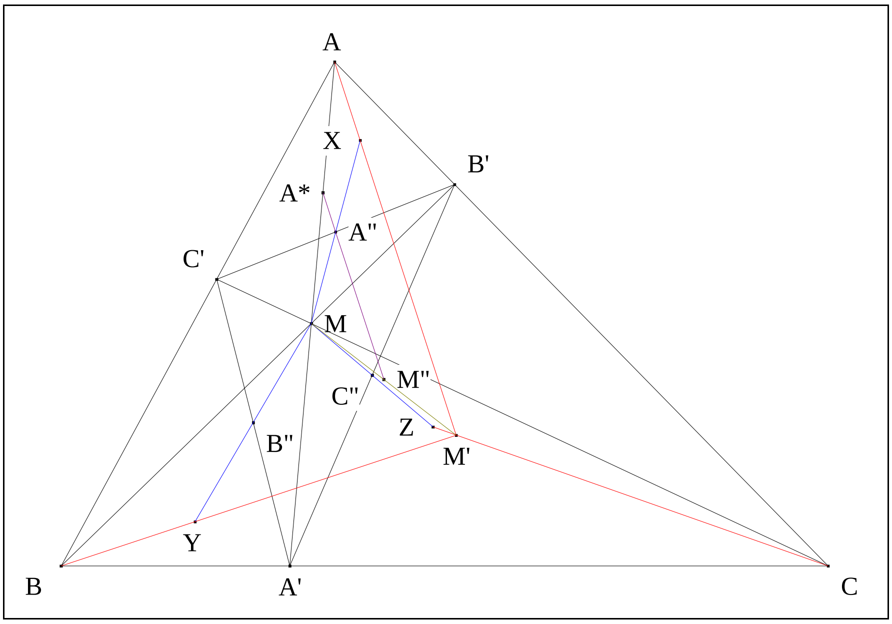
Traits : ABC un triangle,
M un point,
A'B'C' le triangle M-cévien de ABC,
A", B", C" les milieux resp. de [B'C'], [C'A'], [A'B'],
et X, Y, Z les symétriques de P resp. par rapport à X, Y, Z.

Donné : (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes. [31]

VISUALISATION

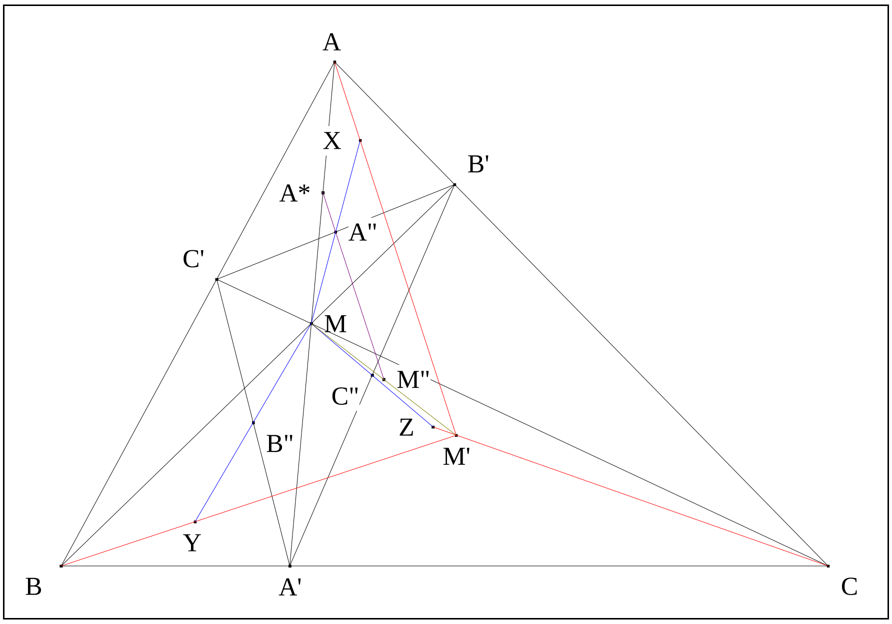
- **Scolie :** M est le point de Ceva de A'B'C' relativement à ABC.

[31] Believe me it's not very hard [reflections in midpoints], *Mathlinks* du 13/06/2004 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=6187.



- Notons A* le milieu de [AM]
  et M" le complément du complément de M.

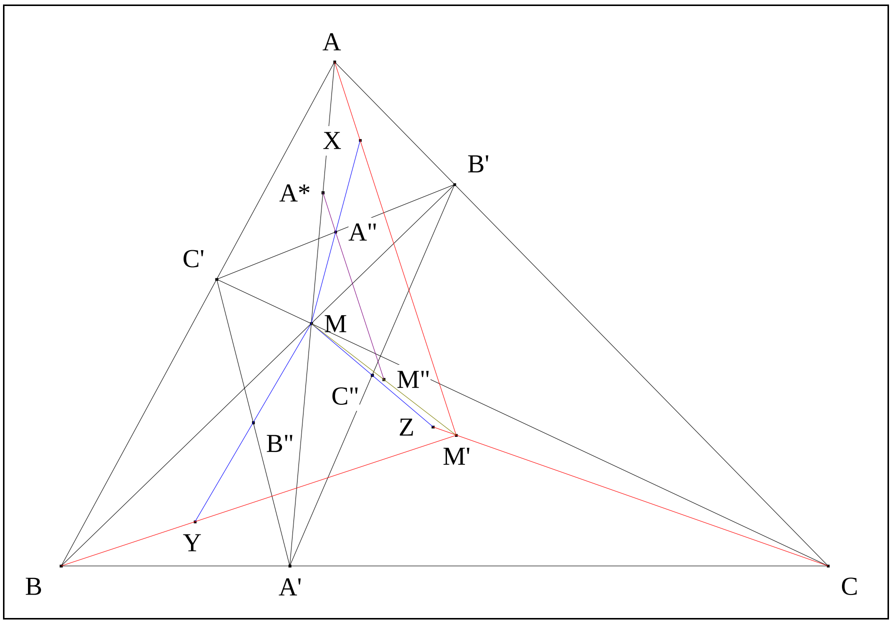
- D'après 2. Complément du complément et points médians partiels d'un quadrilatère, la gaussienne (A*A") du quadrilatère complet ABMC passe par M".



- Notons M' le complément de M.

- D'après D. 1. Complément du complément et le point médian d'un quadrilatère, M" est le milieu de [MM'].

- **Conclusion partielle :** (AX) passe par M'.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BY) passe par M'.
  (CZ) passe par M'.

- **Conclusion :** (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes.

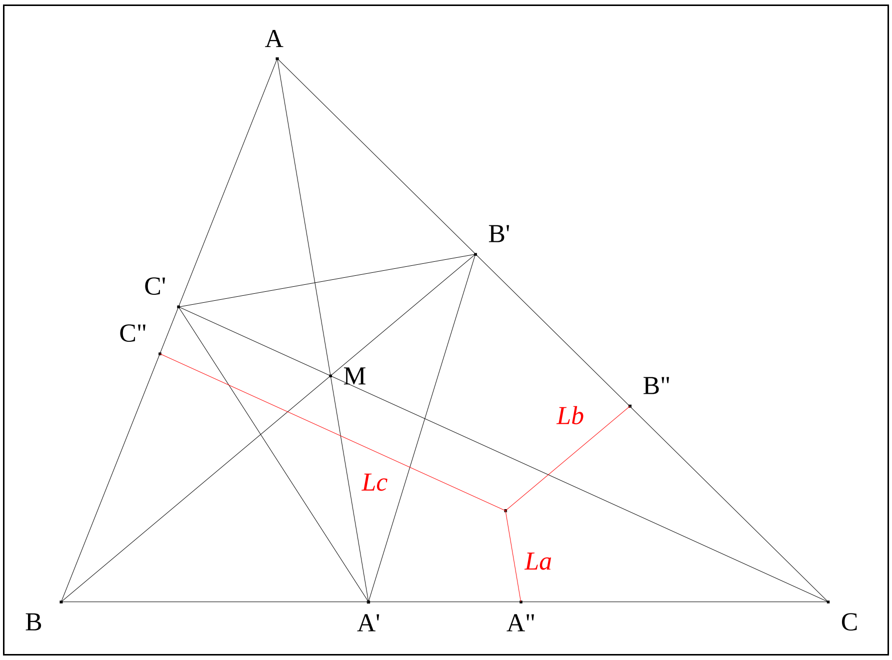
Scolie : les quadrilatères XB'MC', YC'MA' et ZA'MB' sont des parallélogrammes.[32]

5. Anticomplément d'un point de Ceva

VISION

Figure :

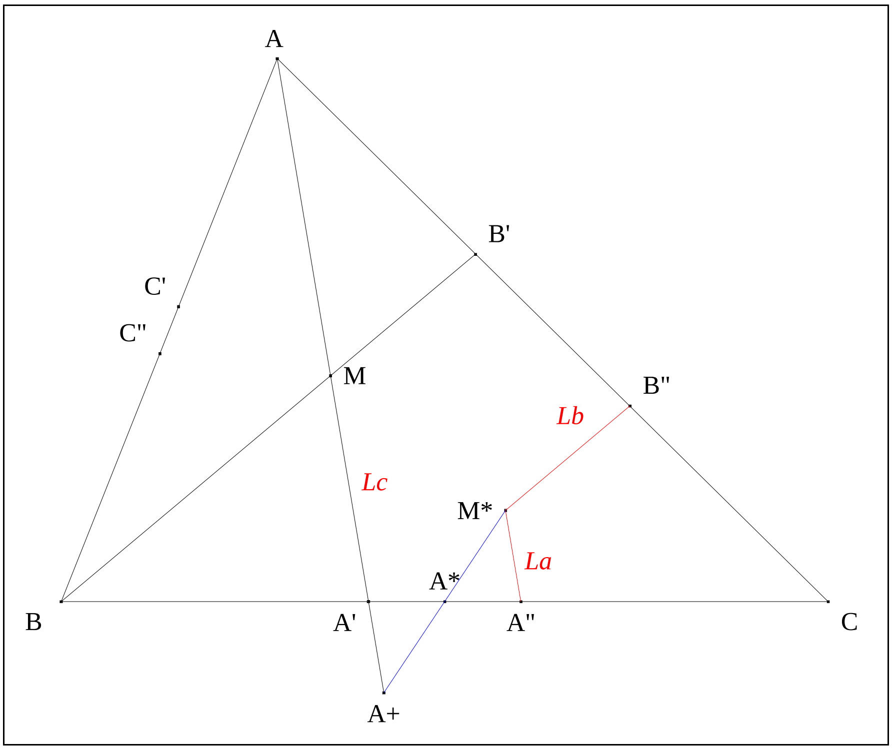
[32] Nicula V., Concurrence in a triangle, *Mathlinks* du 27/02/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=261303.



Traits :	ABC	un triangle,
	M	un point,
	A'B'C'	le triangle M-cévien de ABC,
	A", B", C"	les isotomiques de A", B", C" resp. par rapport à [BC], [CA], [AB]
et	*La*, *Lb*, *Lc*	les parallèles à (AA'), (BB'), (CC') passant resp. par A", B", C".

Donné : *La*, *Lb* et *Lc* sont concourantes. [33]

VISUALISATION



[33] Funny Lemma, *Mathlinks* du 16/06/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=210277.

- Notons M* le point d'intersection de *La* et *Lb*,
  A* le milieu de [BC]
  et A+ le point d'intersection de (M*A*) et (AA').

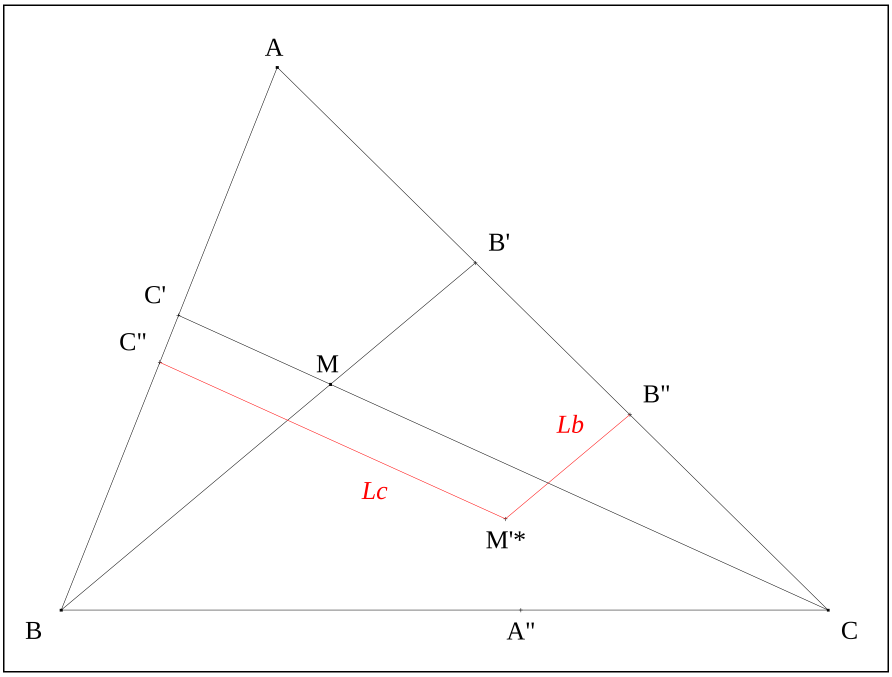
- D'après l'axiome de passage IIIb, A* est le milieu de [M*A+]
  ou encore, A+ est le symétrique de M* par rapport à A*.

- **Conclusion partielle :** (AA') passe par le complément de M* relativement à ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB') passe par le complément de M* relativement à ABC.

- Par hypothèse et par définition, M est le complément de M* relativement à ABC.

- **Conclusion partielle :** par définition, M* est l'anticomplément de M relativement à ABC.



- Notons M'* le point d'intersection de *Lb* et *Lc*.

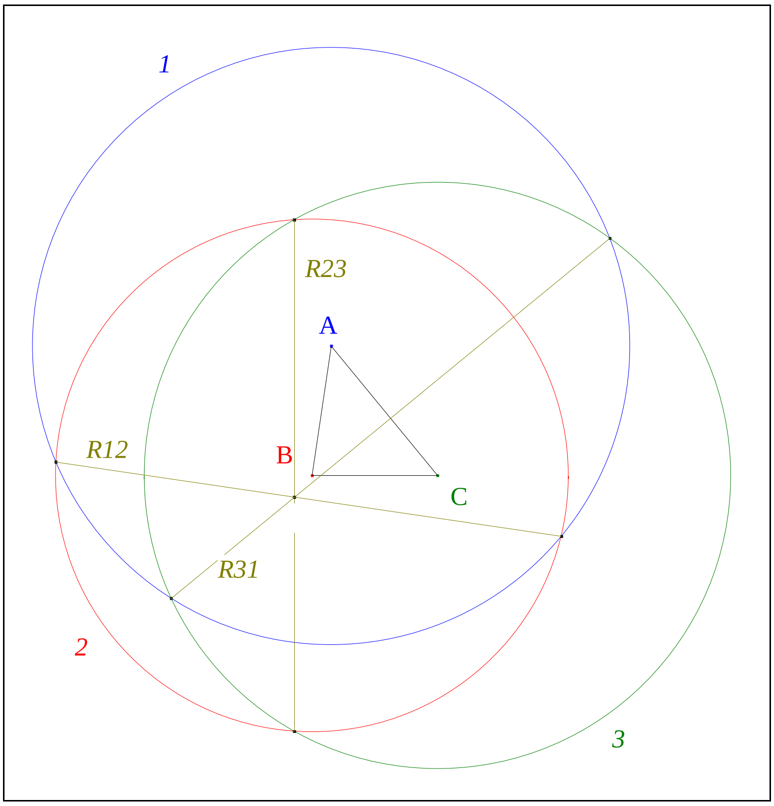
- Mutatis mutandis, nous montrerions que M'* est l'anticomplément de M relativement à ABC ;
  en conséquence, M'* et M* sont confondus.

- **Conclusion :** *La*, *Lb* et *Lc* sont concourantes.

6. Anticomplément du point de Bevan ou le point de Longuet-Higgins

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle de centre A et de rayon AB + AC,
2 le cercle de centre B et de rayon BC + BA,
3 le cercle de centre C et de rayon CA + CB,
et *R12*, *R23*, *R31* les axes radicaux resp. de *1* et *2*, de *2* et *3*, de *3* et *1*.

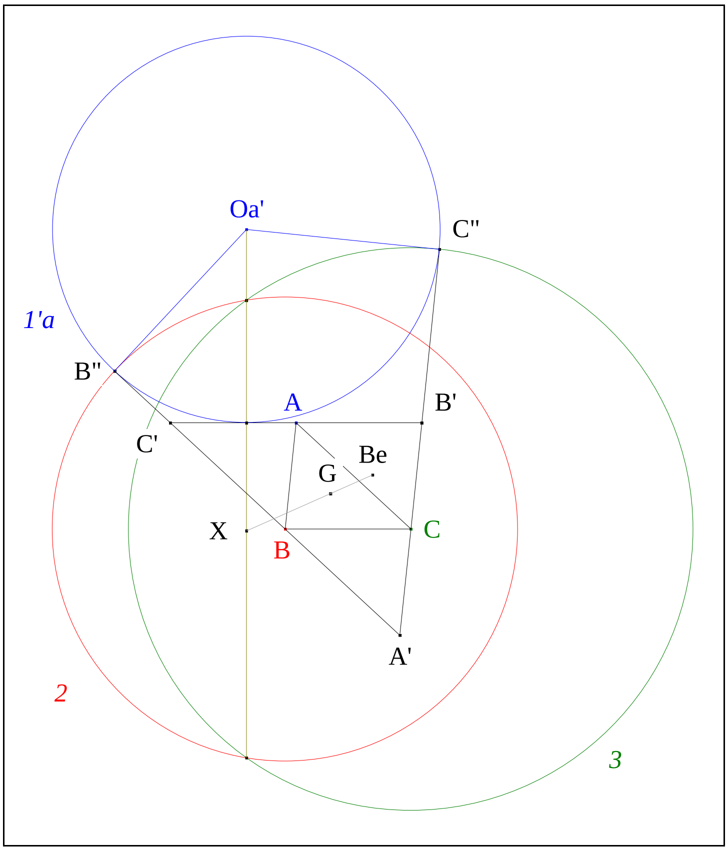
Donné : *R12*, *R23* et *R31* sont concourants. [34]

VISUALISATION

- **Commentaire :** nous admettons que les trois cercles sont sécants deux à deux.
- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [35], *R12*, *R23* et *R31* sont concourants.
- Notons Lh ce point de concours.

Scolies : **(1)** nature de Lh

[34] Longuet-Higgins M. S., On the principal Centers of a Triangle, *Elemente der Mathematik* 56 (2001) 122-129.
[35] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



- Notons A'B'C' le triangle antimédian de ABC,
  1'a le A'-excercle de A'B'C',
  Oa' le centre de *1'a*
  et B", C" les points de contact de *1'a* resp. avec (A'C), (A'B').

- Un calcul segmentaire : BB" = BC' + C'B" ;
  BC' = CA , C'B" = ½ (A'B' + B'C' + C'A') – A'C' ;
  A'B' = 2.AB , B'C' = 2.BC , C'A' = 2.CA ;

  BB" = CA + AB + BC + CA – 2.CA
  BB" = AB + AC ;

  en conséquence, *1'a* passe par B".

- Mutatis mutandis, *1'a* passe par C".

- Par définition, * *1'a* est orthogonal à *2* et *3*
  * Oa' est sur *R23*.

- Notons Be, Be' les points de Bevan resp. de ABC, A'B'C'.

- *R23* étant perpendiculaire à (B'C'), *R23* passe par Be'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *R31* passe par Be'
  R12 passe par Be' ;
  en conséquence, Be' et Lh sont confondus.

- **Conclusion :** Lh est l'anticomplément de Be relativement à ABC.

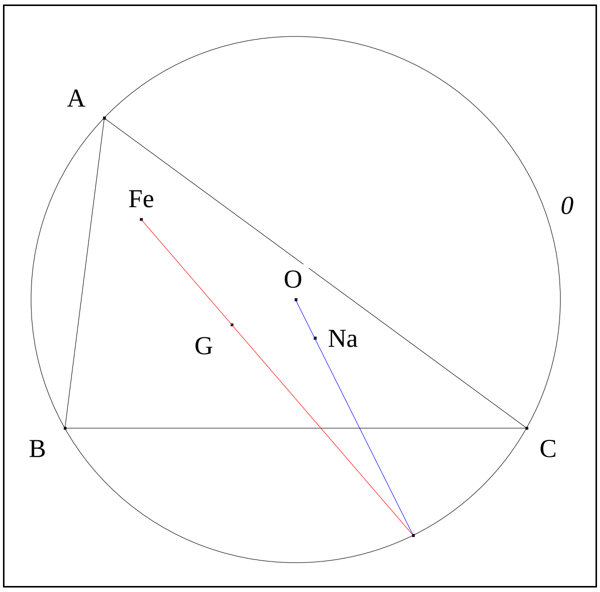
  (2) Lh est "le point est le Longuet-Higgins de ABC".

Note historique : ce problème a été posé par Floor van Lamoen[36] en 1999 de le *Monthly*.
Une solution en a été donnée par J. C. Binz[37] l'année suivante.
Ce même problème a été reproposé en 1999 par Jiro Fukuta[38] dans le *College Mathematical Journal*.

7. Anticomplément du point de Feuerbach ou le point X_{100}

VISION

Figure :



Traits :

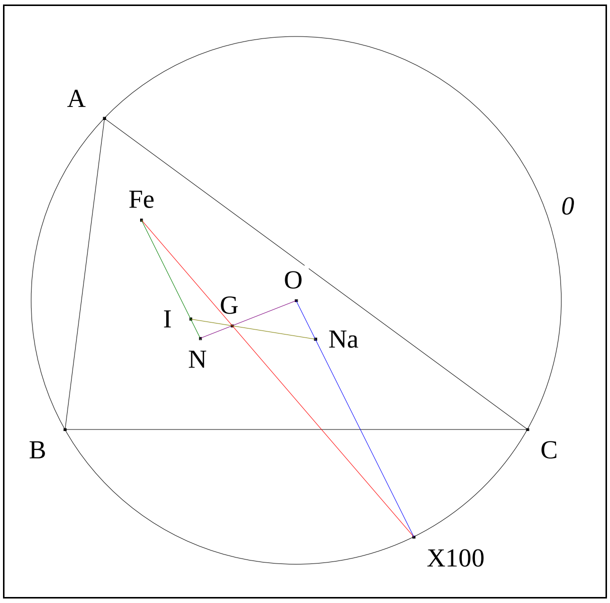
	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	G	le point médian de ABC,
	Fe	le point de Feuerbach de ABC
et	Na	le point de Nagel de ABC.

Donné : (ONa) et (GFe) concourent sur *0*.

VISUALISATION

---

[36] van Lamoen F., E10734, *Amer. Math. Montly* 106 (1999) 470.
[37] Binz J. C., E10734, *Amer. Math. Montly* 107 (2000) 658-659.
[38] Fukuta J., problem 664, *College Math. J.*, (nov. 1999).



- Notons I le centre de ABC
  et N le centre du cercle d'Euler de ABC.

- D'après "Le point de Feuerbach" [39], I, N et Fe sont alignés.

- D'après "La droite d'Euler" [40], N, G et O sont alignés et GO = 2.GN.

- D'après "La droite de Nagel" [41], I, G et Na sont alignés et GNa = 2.GI.

- D'après Thalès "Rapports", (INFe) et (ONa) sont parallèles.

- Notons X le point d'intersection de (GFe) et (ONa).

- D'après Thalès "Rapports", OX = 2. NFe.

- D'après Feuerbach "Le centre N" [42], X est sur *0*.

- **Conclusion :** (ONa) et (GFe) concourent sur *0*.

Scolies : **(1)** X est répertorié sous X_{100} chez ETC

(2) X_{100} est l'anticomplément de Fe relativement à ABC.

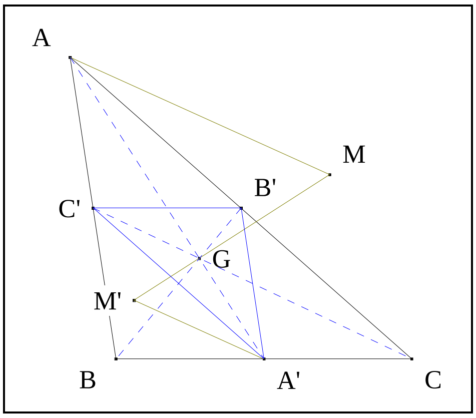
E. GÉNÉRALISATION

OU LA

P-COMPLÉMENTARITÉ

[39] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[40] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[41] Ayme J.-L., Cinq théorème de Christian von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[42] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

1. Le point de vue adopté



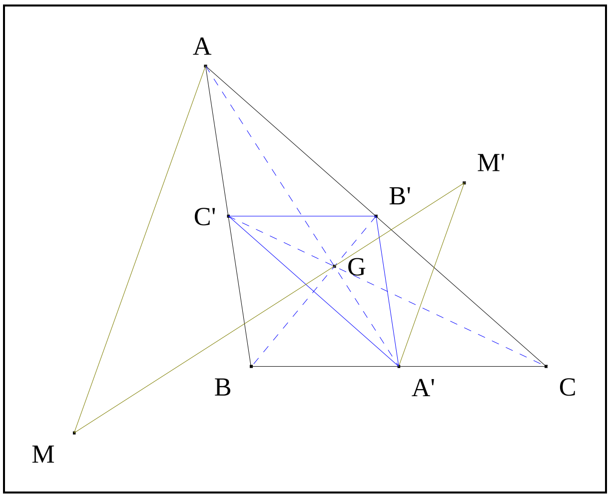
Rappelons la démarche historique sous le point de vue des triangles.

Pour le point complémentaire

Nous partons d'un triangle ABC et de son triangle complémentaire (médian) A'B'C' en perspective de centre G, point médian de ABC et A'B'C', et admettant la droite à l'infini pour axe de perspective.
Ensuite, nous envisageons un point M et la droite (MG).
Enfin, nous considérons le complément M' de M, intersection de la parallèle à (MA) passant par A' avec (MG).

Notons que (MA) et (M'A) se coupent sur la droite à l'infini.

Pour le point anticomplémentaire

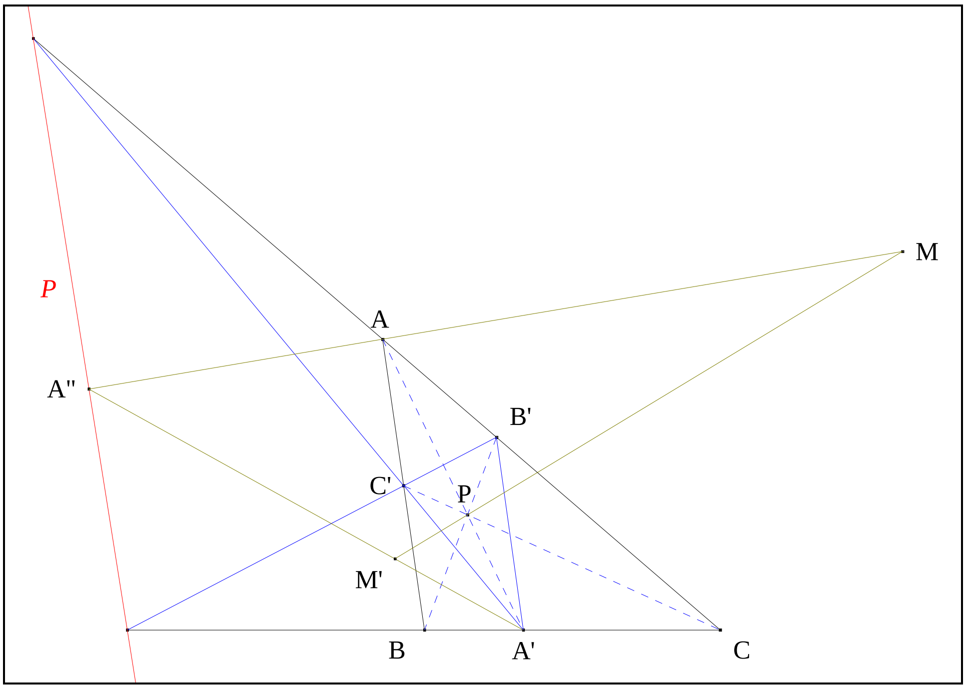


Nous partons d'un triangle A'B'C' et de son triangle anticomplémentaire (antimédian) ABC en perspective de centre G, point médian de A'B'C' et ABC, et admettant la droite à l'infini pour axe de perspective.
Ensuite, nous envisageons un point M' et la droite (MG).
Enfin, nous considérons l'anticomplément M de , intersection de la parallèle à (M'A') passant par A avec (M'G).

Notons que (M'A') et (MA) se coupent sur la droite à l'infini.

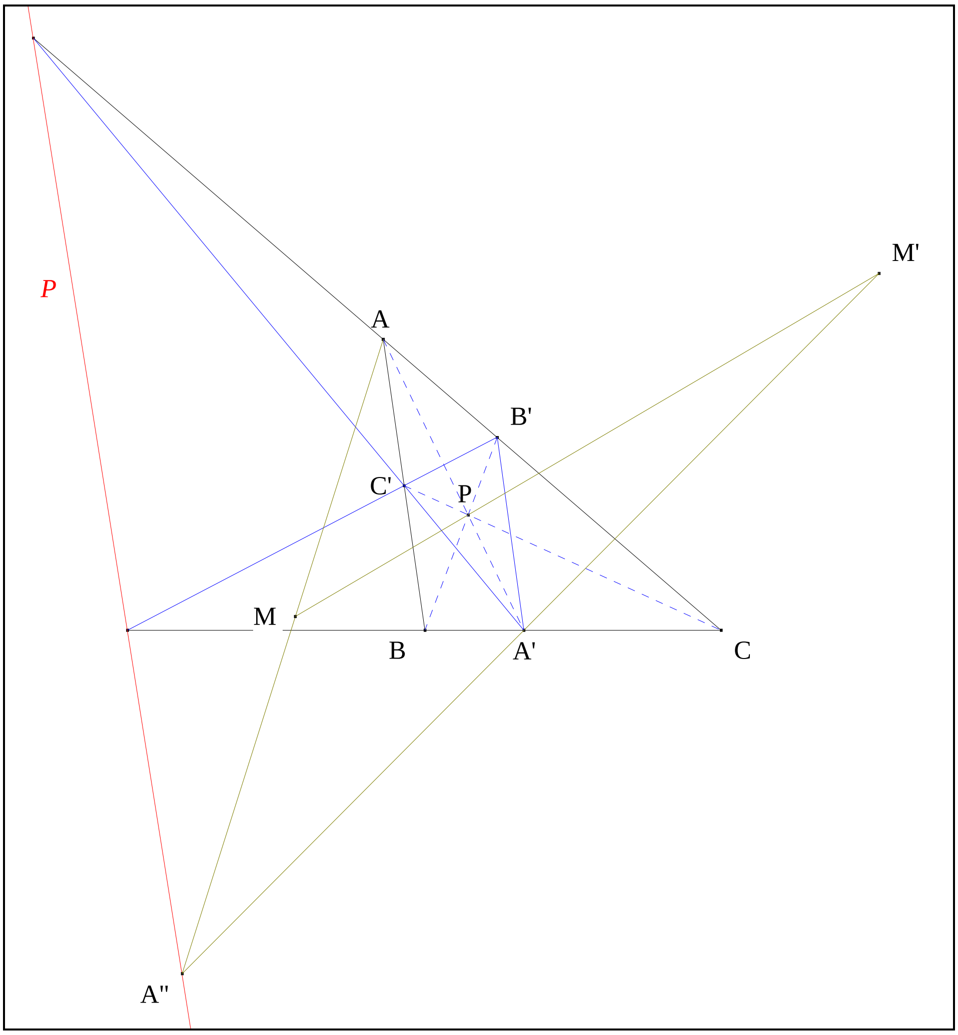
2. La P-complémentarité

Pour le point complémentaire



Nous partons d'un triangle ABC et d'un triangle cévien A'B'C' en perspective de centre P, et admettant la droite *P* pour axe de perspective.
Ensuite, nous envisageons un point M et la droite (MP).
Enfin, nous considérons le complément M' de M, intersection de la droite brisée (MAA') en A" sur *P* avec (MP).

Pour le point anticomplémentaire

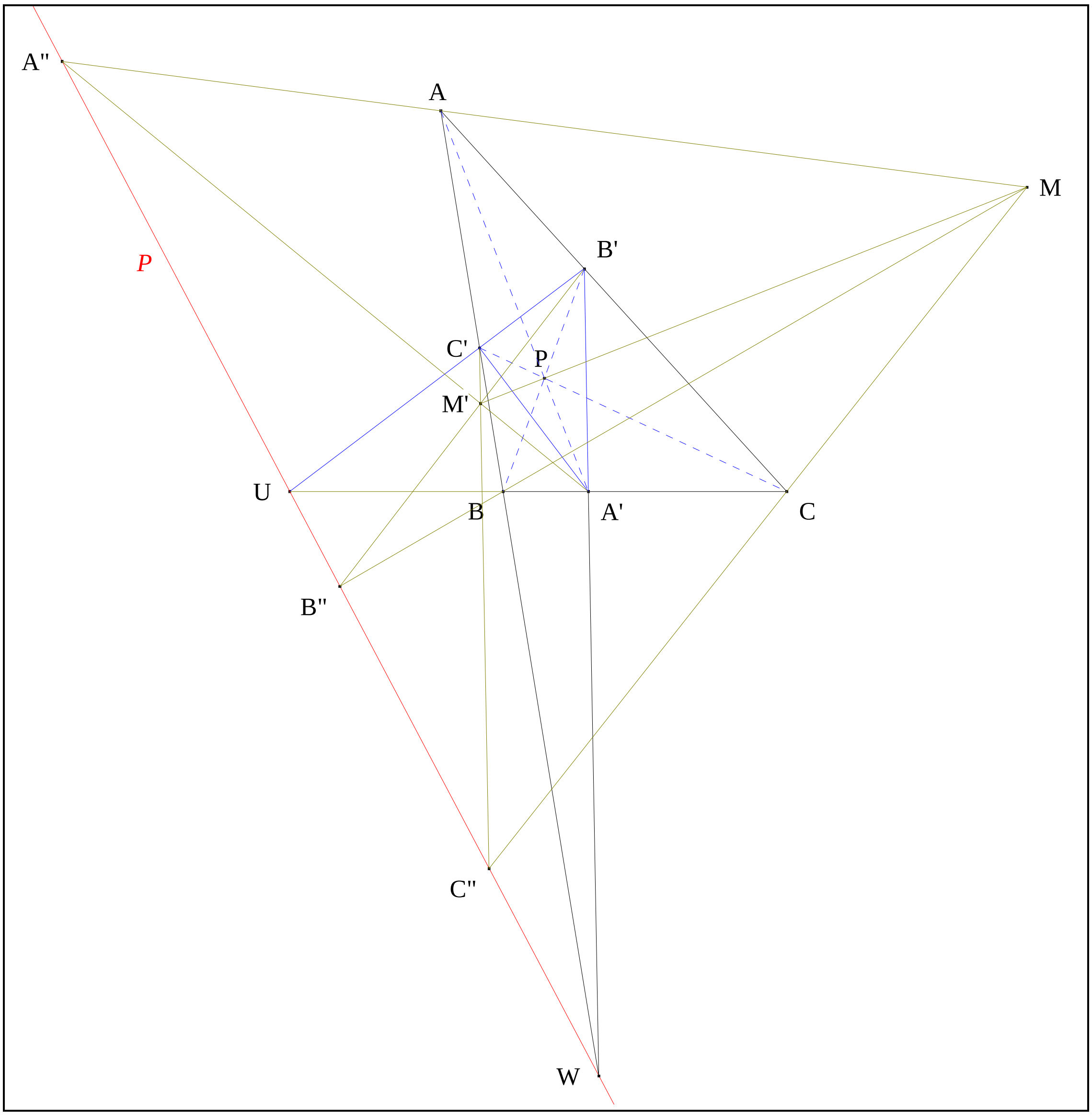


Nous partons d'un triangle A'B'C' et d'un triangle anticévien ABC en perspective de centre P, et admettant la droite *P* pour axe de perspective.
Ensuite, nous envisageons un point M' et la droite (M'P).
Enfin, nous considérons l'anticomplément M de M', intersection de la droite brisée (MA'A') en A" sur *P* avec (M'P).

3. Cohérence

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
U, V, W les points d'intersection de (BC) et (B'C'), de (CA) et (C'A') de (AB) et (A'B'),
M un point,
et A", B", C" les point d'intersection resp. de (MA), (MB), (MC) avec (UVW),

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

VISUALISATION

- **Scolie :** (UVW) est l'axe de perspective de A'B'C' et ABC.
- Notons M' le point d'intersection de (A'A") et (B'B").
- Les triangles M'A"B" et PAB admettant (A'B'W) pour axe de perspective, sont perspectifs.
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles"[43], (M'P), (A"A) et (B"B) sont concourantes.

[43] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

- **Conclusion partielle :** M', P et M sont alignés.
- Notons M'1 le point d'intersection de (B'B") et (C'C").
- Mutatis mutandis, nous montrerions que M'1, P et M sont alignés. en conséquence, M'1 et M' sont confondus.
- **Conclusion :** (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

Scolies : **(1)** M' est le P-complément de M relativement à ABC.

(2) Lorsque P est le point médian G de ABC, nous retrouvons la définition originale.

(3) Lorsque I est le centre de ABC, nous dirons que

* le triangle central A'B'C' est le triangle supplémentaire de ABC
* M' est le supplément de M relativement à ABC.

Commentaire : l'auteur laisse le soin au lecteur d'envisager le P-anticomplément et l'antisupplément de M relativement à ABC.

Note historique : les termes de supplément et d'antisupplément sont de Joseph Neuberg. Pour le regretté Steve Sigur[44], ces concepts se trouvent dans le livre d'Adolphe Mineur écrit en 1924 et intitulé *Cubiques Anallagmatiques*

Remerciements : ils vont particulièrement à Bernard Gibert[45] qui a su m'éclairer sur le concept de P-complément.

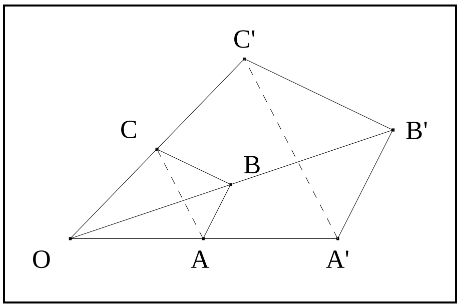
4. Vers une généralisation plus large

Nous partons d'un triangle ABC
Ensuite, nous envisageons un triangle P-cévien de ABC, d'axe *P* et un second triangle M-cévien la droite (MP).
Enfin, nous considérons le complément M' de M, intersection de la droite brisée (MAA') en A" sur *P* avec (MP).

F. ANNEXE

1. Le théorème faible de Desargues

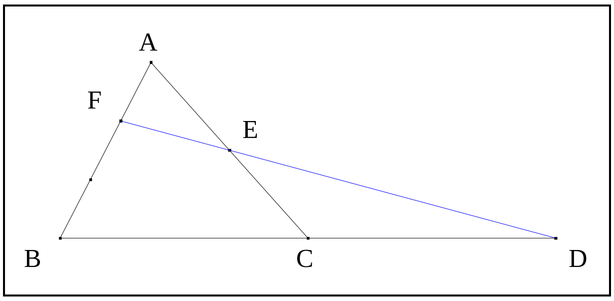
44 Sigur S., Triangle Geometry, http://www.paideiaschool.org/Teacherpages/Steve_Sigur/geometryIndex.htm.
45 Gibert B., Cubics in the Triangle Plane, http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/index.html.



Traits :	ABC	un triangle,		
et	A'B'C'	un triangle tel que	**(1)**	(AA') et (BB') soient concourantes en O
			(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
			(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

2. Tiers-point et milieu



Traits :	ABC	un triangle,
	F	le second tiers-point de [BA] à partir de B,
	E	le milieu de [AC]
et	D	le point d'intersection de (EF) et (BC).

Donné : C est le milieu de [BD].