

LES POINTS

DE

STEINBART ET DE RABINOWITZ

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve originale et purement synthétique concernant les points de Steinbart et de Rabinowitz. Celle-ci nous permet, ensuite, de présenter d'une façon naturelle le point de Grinberg-Steinbart et la droite de Rabinowitz, et, enfin, de conclure par l'équivalence de Grinberg-Rabinowitz.
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire	
I. Le point de Steinbart	1
II. Le point de Rabinowitz	6
III. Les points adjoints au point de Rabinowitz	8
IV. Le point de Grinberg-Steinbart et la droite de Grinberg-Rabinowitz	13
V. L'auteur	18
VI. L'équivalence de Grinberg-Rabinowitz	20
VII. Annexe	21

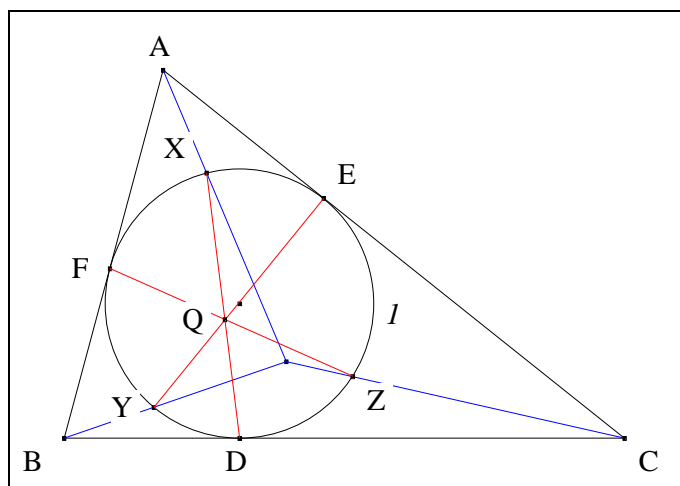
I. LE POINT DE STEINBART ¹

*Le nom du lycée d'Oliver Funck,
un géomètre allemand*

VISION

Figure :

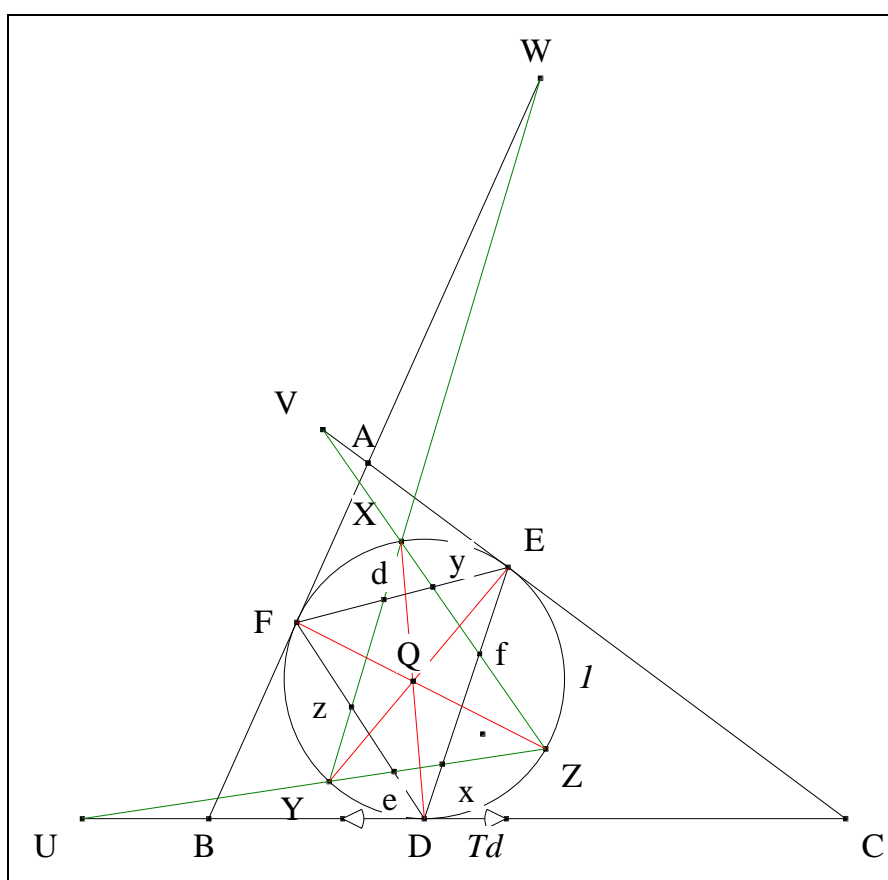
¹ Funck O., Geomtrische Untersuchungen mit Computerunterstützung ;
<http://www.uni-duisburg.de/SCHULEN/STG/Wettbewerbe/juf02.html>.



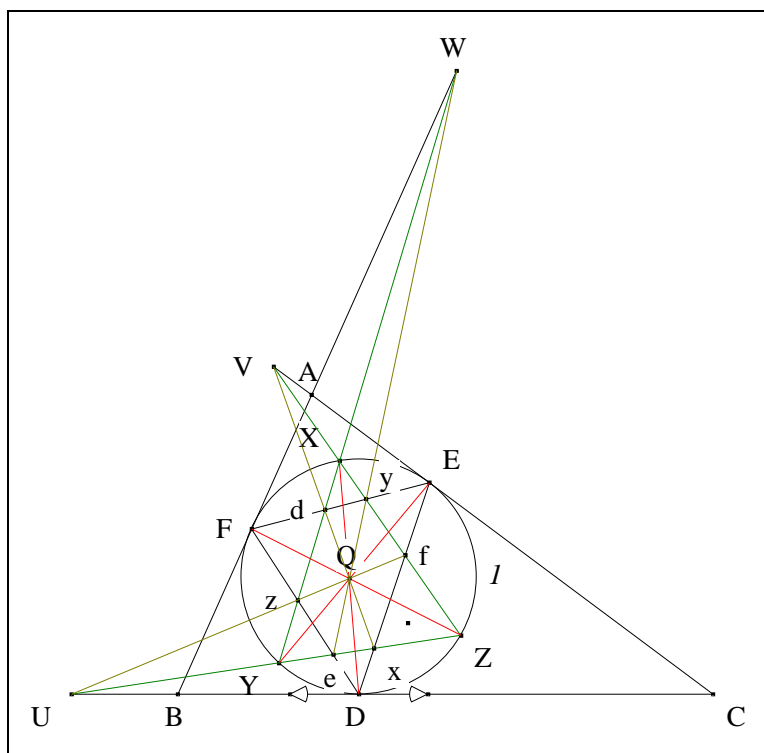
Traits : ABC un triangle,
 I le cercle inscrit de ABC ,
 D, E, F les points de contact de I avec les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$,
 Q un point
 et X, Y, Z les seconds points d'intersection des droites (DQ) , (EQ) et (FQ) avec I .

Donné : les droites (AX) , (BY) et (CZ) sont concourantes.

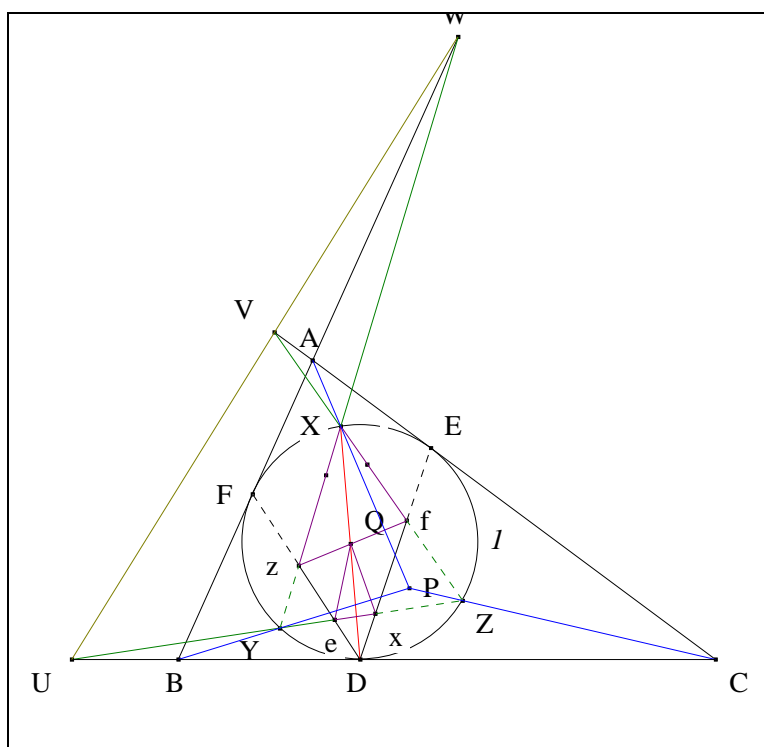
VISUALISATION



- Notons U, V, W les points d'intersection de (YZ) et (BC) , (ZX) et (CA) , (XY) et (AB) ,
 d, e, f les points d'intersection de (XY) et (EF) , (YZ) et (FD) , (ZX) et (DE) ,
 x, y, z les points d'intersection de (YZ) et (DE) , (ZX) et (EF) , (XY) et (FD)



- Mutatis mutandis, nous montrerions que les points V, Q, x et d sont alignés
les points W, Q, y et e sont alignés.



- Les triangles Qex et Xzf sont en perspective de centre D ;
d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2), (UVW) est l'axe de cette perspective.
- **Conclusion :** les triangles ABC et XYZ admettant (UVW) pour axe de perspective,
les droites (AX), (BY), (CZ) sont concourantes.

- Notons P ce point de concours.

Énoncé : "le triangle Q -circumcévien du triangle de contact d'un triangle est en perspective avec ce triangle".

Note historique : ce résultat d'Oliver Funck trouvé et prouvé à l'aide d'un logiciel resp. de Géométrie et de calcul, apparaît comme la réciproque de celui de Stanley Rabinowitz qui lui est antérieur.

Scolies :

- (1) P est appelé "point de Steinbart" par Oliver Funck en l'honneur du Gymnasium (lycée) où il enseigne.
- (2) Cas particuliers
 Q est un sommet de ABC : le point de Steinbart est le point de Gergonne de ABC ;
 Q est le point de Gergonne de ABC : le point de Steinbart est le point de Gergonne de ABC ;
 Q est sur I : le point de Steinbart est ce point Q ;
 Q est sur un côté de DEF : le point de Steinbart est le sommet correspondant de ABC .

Commentaires : nous venons de montrer que

si, les triangles DEF et XYZ sont perspectifs de centre Q
alors, les triangles XYZ et ABC sont perspectifs de centre P .

Envisageons à la réciproque de ce résultat.

Une courte biographie de Steinbart :

Quintin Steinbart, cinquième fils d'un pasteur, est né le 9 Février 1841 dans le Mark Brandebourg. C'est à l'université de Berlin qu'il étudie la Mathématique, la Physique et les langues modernes. A 22 ans, il enseigne à l'Institut Victoria à Falkenberg (Mark Brandebourg). Après une période d'essai d'une année dans une école professionnelle à Berlin, puis au Gymnasium de Prenzlau, il entre à l'Ecole Andrea de Berlin. Après son retour de la guerre de 1870, il prend la direction de la Realschule de Rawitsh (Posen).



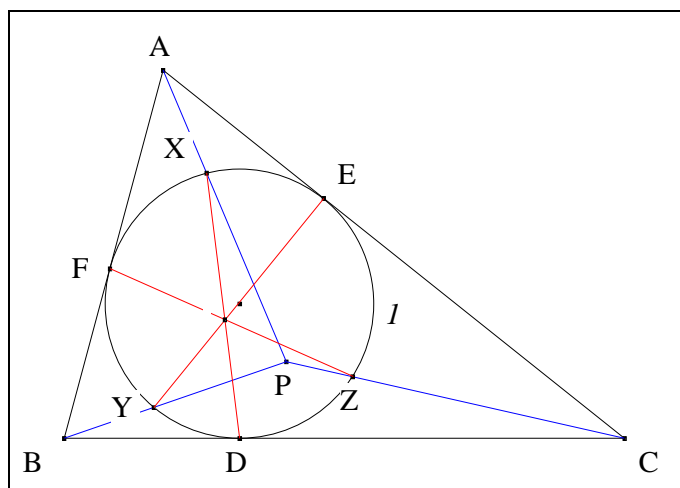
Quintin Steinbart (1841 - 1912)

En Septembre 1875, il devient directeur de la Realschule de Duisbourg. C'est durant l'année 1882-83 que l'établissement se transforme en "Realgymnasium". Il décède le 5 Juin 1912.

II. LE POINT DE RABINOWITZ ²

VISION

Figure :

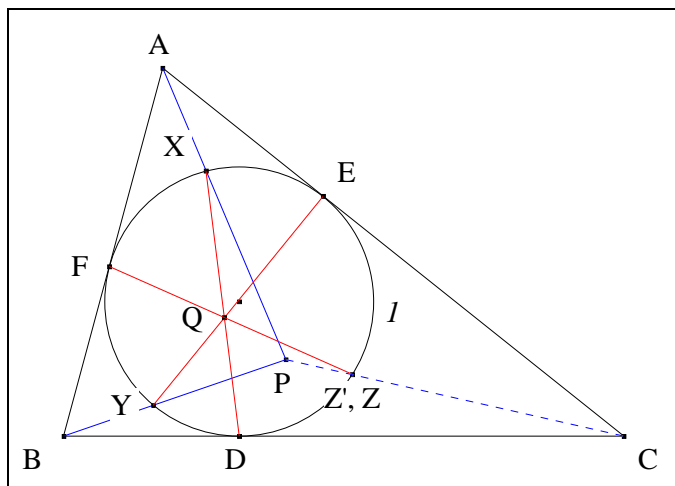


- Traits :** ABC un triangle,
 I le cercle inscrit de ABC,
 DEF le triangle de contact de ABC,
 P un point intérieur à ABC
 et X, Y, Z les points d'intersection "les plus proches" des sommets de ABC,
 de (PA), (PB), (PC) avec I .
- Donné :** les droites (DX), (EY), (FZ) sont concourantes.

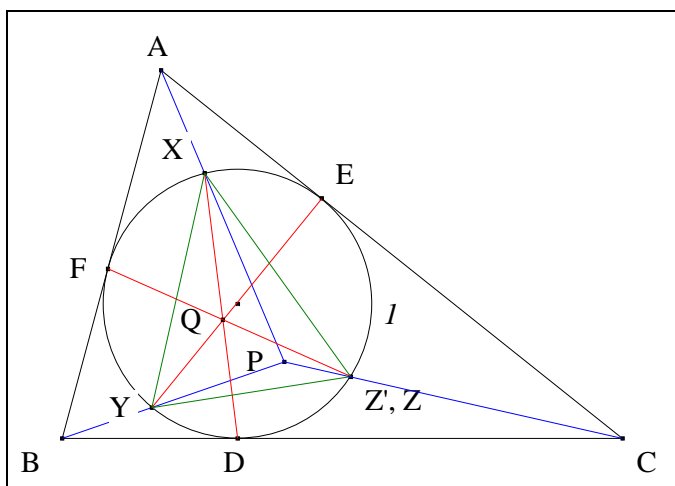
VISUALISATION

Figure :

² Rabinowitz St., Points of Rabinowitz, Question 1634, *Mathematics Magazine* 64, 1 (Feb. 1992) 59-61.



- Notons Q le point d'intersection de (DX) et (EY) .
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que (FZ) ne passe pas par Q .
- Notons Z' le second point d'intersection de (FQ) avec I .
- **Scolies :**
 - (1) Z' et Z sont deux points distincts
 - (2) Z est le point d'intersection "le plus proche" du sommet C de ABC , de (PC) avec I .



- D'après Funck "Le point de Steinbart", les triangles ABC et XYZ' sont perspectifs de centre P ;
 en conséquence, (CZ') passe par P ;
 il s'en suit que les points Z et Z' sont confondus, ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** les droites (DX) , (EY) , (FZ) sont concourantes en Q .

Note historique : ce résultat a été découvert par Stanley Rabinowitz en 1990 et publié en 1992.
 La figure associée est devenue le logo du site de Rabinowitz³.
 Une solution trigonométrique a été proposée par Francisco Bellot Rosado, Maria Ascension Lopez et René De Vogelaere⁴.

Scolie : Q est "le point de Rabinowitz".

³ www.mathpropress.com/stan/

⁴ Solution of problem 1364 (Points of Rabinowitz) *Mathematics Magazine* 1/65 (1992) 59-61

Commentaires : ce résultat de Stanley Rabinowitz est la stricte réciproque de celui d'Oliver Funck :

si, les triangles ABC et XYZ sont perspectifs de centre P
 alors, les triangles XYZ et DEF sont perspectifs de centre Q.

La formulation "les plus proches des sommets de ABC" pouvant être dérangeante pour certains géomètres, Darij Grinberg a envisagé une approche métrique à partir des théorèmes de Céva et Ménélaüs, permettant de considérer tous les points d'intersection de (PA), (PB) et (PC) avec I i.e. plus précisément, tous les triangles que l'on peut former avec ces points.

Repartons à partir de la figure de Rabinowitz en considérant les triangles déterminés par "un point le plus proche" et deux points "les plus éloignés".

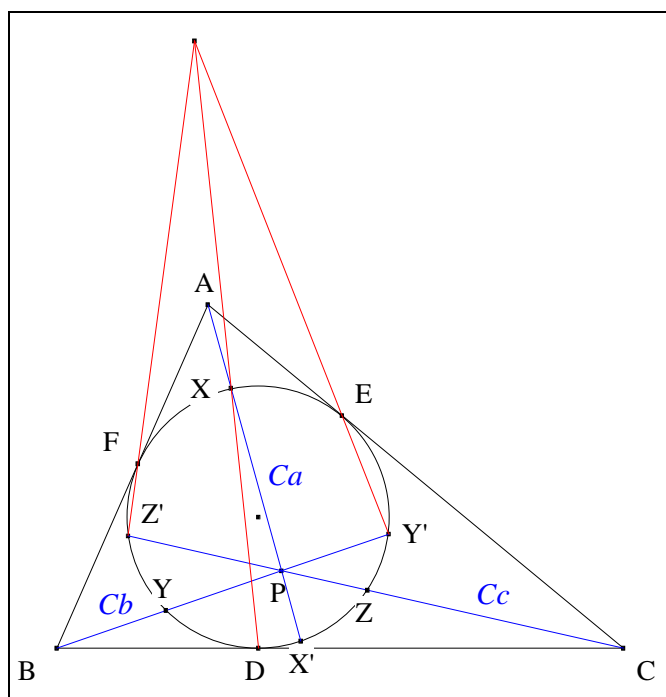
III. LES POINTS ADJOINTS

AU

POINT DE RABINOWITZ

VISION

Figure :

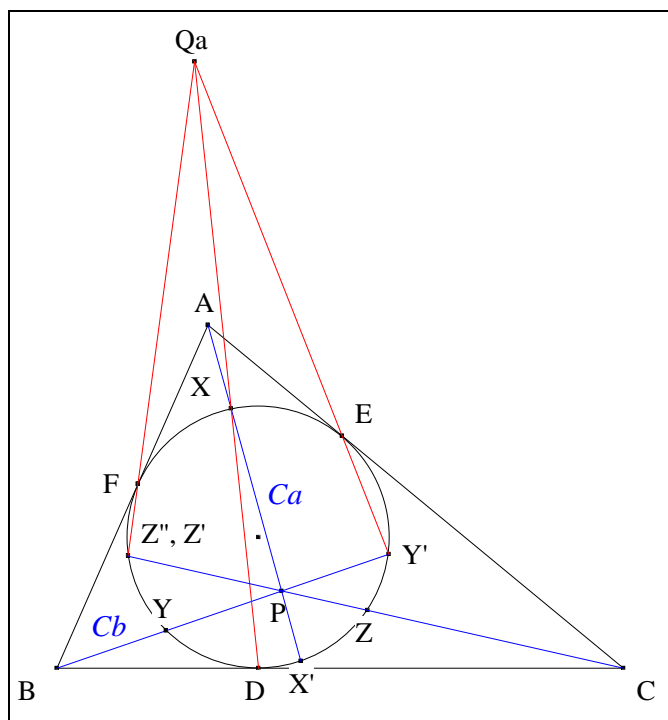


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le cercle inscrit de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	Ca, Cb, Cc	trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C,
	X, X'	les points d'intersection de Ca avec I tel que X soit "le plus proche" de A,
	Y, Y'	les points d'intersection de Cb avec I tel que Y soit "le plus proche" de B

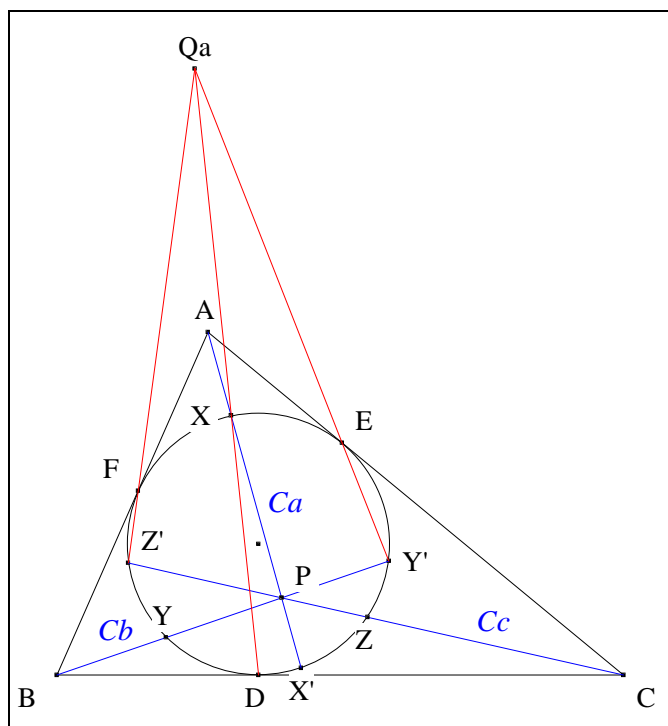
et Z, Z' les points d'intersection de Cc avec I tel que Z soit "le plus proche" de C .

Donné : Ca, Cb et Cc sont concourantes
si, et seulement si,
 les droites $(DX), (EY'), (FZ')$ sont concourantes.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons P le point de concours de Ca, Cb, Cc
 et Qa le point d'intersection de (DX) et (EY') .
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que (FZ') ne passe pas par Q .
- Notons Z'' le second point d'intersection de (FQ) avec I .
- **Scolies :**
 - (1) Z'' et Z' sont deux points distincts
 - (2) Z' est le point d'intersection "le plus éloigné" du sommet C de ABC , de (PC) avec I .

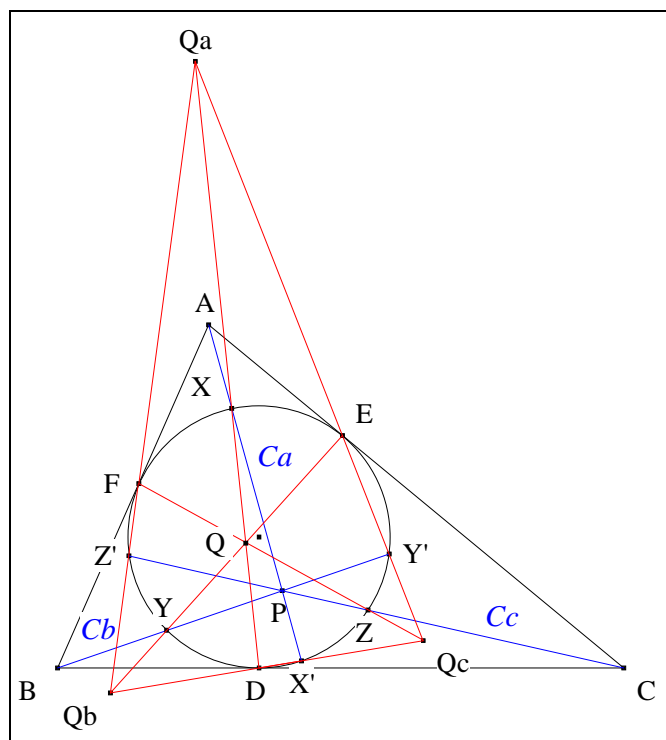


- Considérons les points "les plus proches" de ABC i.e. X, Y et Z.
- **Conclusion :** d'après "Le point de Steinbart", Ca, Cb et Cc sont concourantes.
- Notons P ce point.

Scolies : (1) une formulation stricte

Ca, Cb et Cc sont concourantes en P
si, et seulement si,
 les droites (DX), (EY'), (FZ') sont concourantes en Qa
 i.e.
 les triangles XY'Z' et DEF sont perspectifs de centre Qa.

(2) Vision triangulaire



- Notons Q_b, Q_c les points d'intersection de (EY) et (FZ') , de (FZ) et (DX') .

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions strictement que

* Ca, Cb et Cc sont concourantes en P
si, et seulement si,
 les droites (DX') , (EY) , (FZ') sont concourantes en Q_b
 i.e.
 les triangles $X'YZ'$ et DEF sont perspectifs de centre Q_b

* Ca, Cb et Cc sont concourantes en P
si, et seulement si,
 les droites (DX') , (EY') , (FZ) sont concourantes en Q_c
 i.e.
 les triangles $X'Y'Z$ et DEF sont perspectifs de centre Q_c .

- (3) Q étant le point de Rabinowitz de ABC
 i.e. le point d'intersection de (DX) , (EY) et (FZ) ,
 Q_b, Q_c sont "les B, C-points adjoints de Q relativement à ABC ".

Commentaire : notre point de vue à évoluer du fait que nous ne considérons plus le triangle XYZ déterminé par "les points les plus proches" mais les triangles déterminés par "un point le plus proche", par exemple X , et deux points "les plus éloignés", par exemple Y' et Z' .
 Une formulation moins stricte peut alors s'imposer :

Ca, Cb et Cc sont concourantes en P
si, et seulement si,
 les triangles DEF et $QaQbQc$ sont perspectifs de centre Q .

Pour aller encore plus de l'avant et ceci conformément à l'idée de Darij Grinberg, repartons encore de la figure de Rabinowitz en considérant les triangles déterminés par "deux points les plus proches" et un point "le plus éloigné".

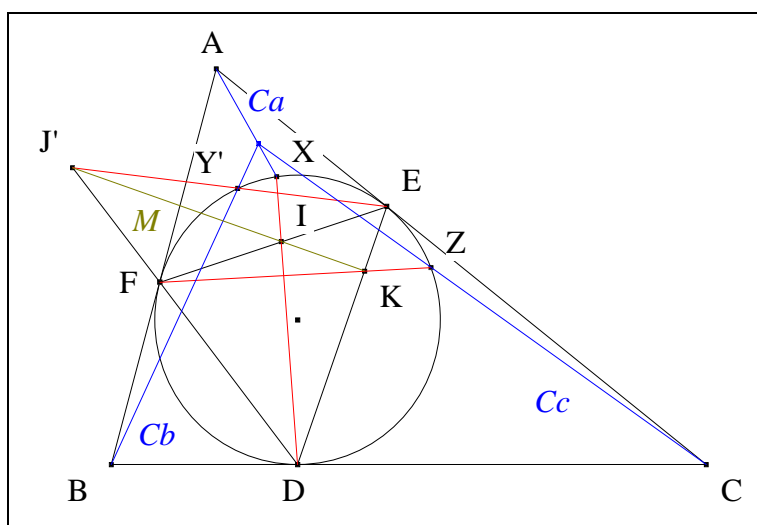
IV. LE POINT DE GRINBERG-STEINBART

ET

LA DROITE DE GRINBERG-RABINOWITZ⁵

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le cercle inscrit de ABC,
	D, E, F	les points de contact de I avec les côtés [BC], [CA], [AB],
	Ca, Cb, Cc	trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C,
	X, X'	les points d'intersection de Ca avec I tel que X soit "le plus proche" de A,
	Y, Y'	les points d'intersection de Cb avec I tel que Y soit "le plus proche" de B,
	Z, Z'	les points d'intersection de Cc avec I tel que Z soit "le plus proche" de C
et	I, J', K	les points d'intersection de (DX) et (EF), de (EY') et (FD), de (FZ) et (DE).

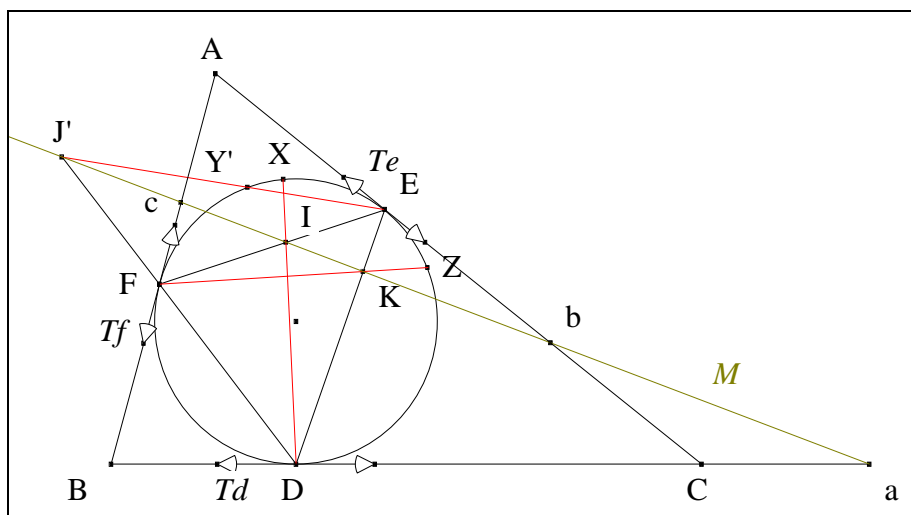
Donné : les points I, J' et K sont alignés
si, et seulement si,
 les droites (AX), (BY') et (CZ) sont concourantes.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

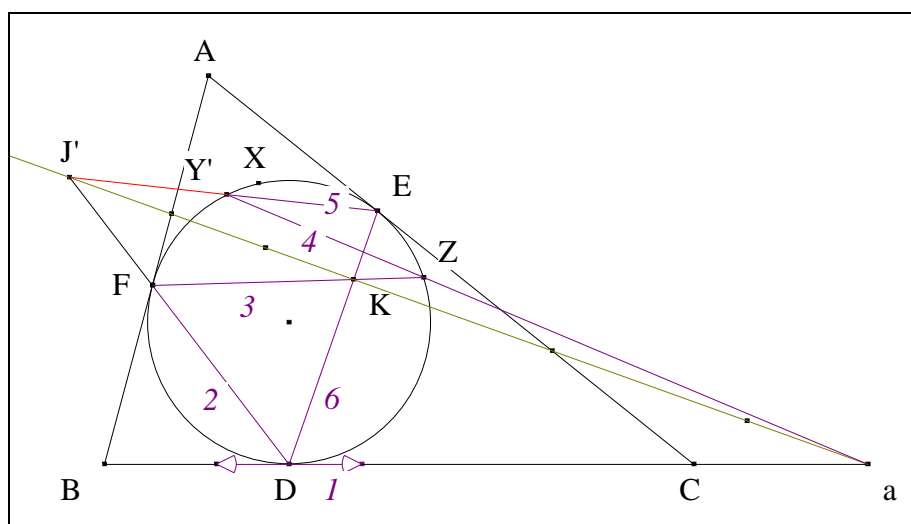
- **Scolie :** les droites (DIX), (EJ'Y') et (FKZ) ne sont pas concourantes.

⁵

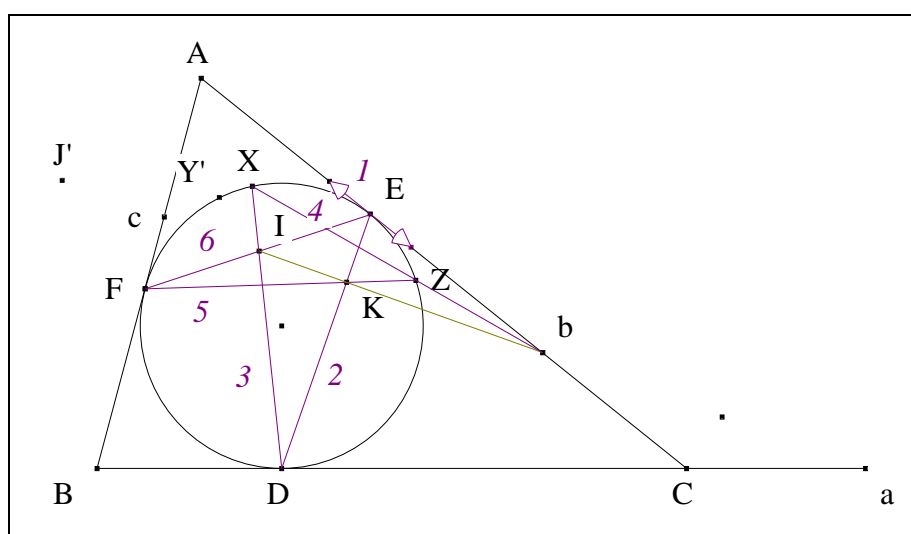
Grinberg D., Variations of the Steinbart Theorem ; http://de.geocities.com/darij_grinberg/



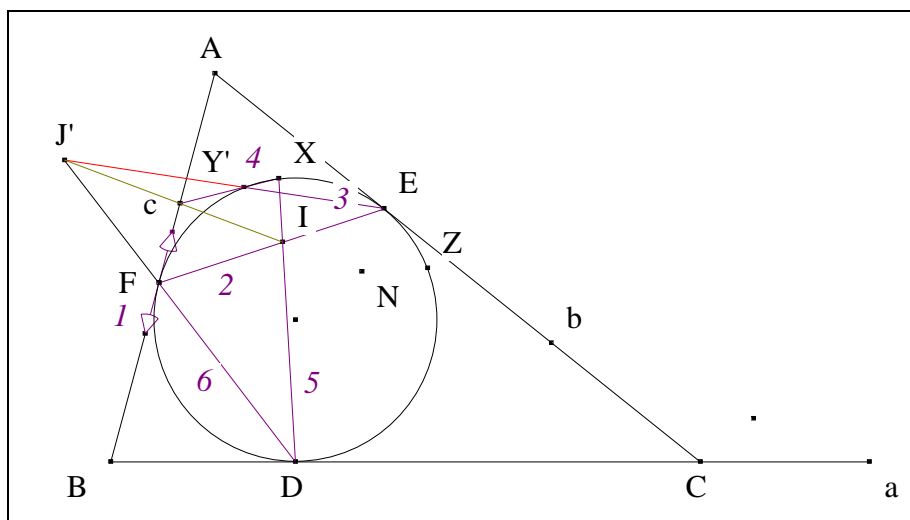
- Notons a, b, c les points d'intersection de M avec $(BC), (CA), (AB)$
et T_d, T_e, T_f les droites tangentes $(BC), (CA), (AB)$ à I resp. en D, E, F .



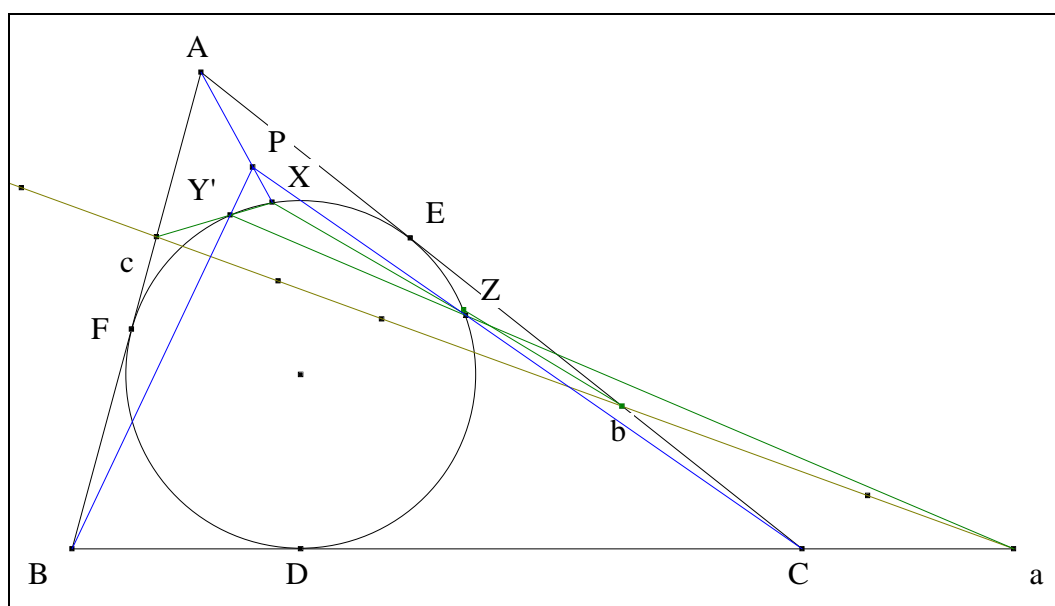
- D'après Carnot "Pentagramma mysticum" (Cf. Annexe 1),
(J'K) étant la pascale de l'hexagone dégénéré et cyclique T_D FZY'ED, (Y'Z) passe par a.



- D'après Carnot "Pentagramma mysticum" (Cf. Annexe 1),
(KI) étant la pascale de de l'hexagone dégénéré et cyclique $T_E DXZFE$, (XZ) passe par b.



- D'après Carnot "Pentagramma mysticum" (Cf. Annexe 1),
(IJ') étant la pascale de l'hexagone dégénéré et cyclique $T_F EY'XDF$, (Y'X) passe par c.

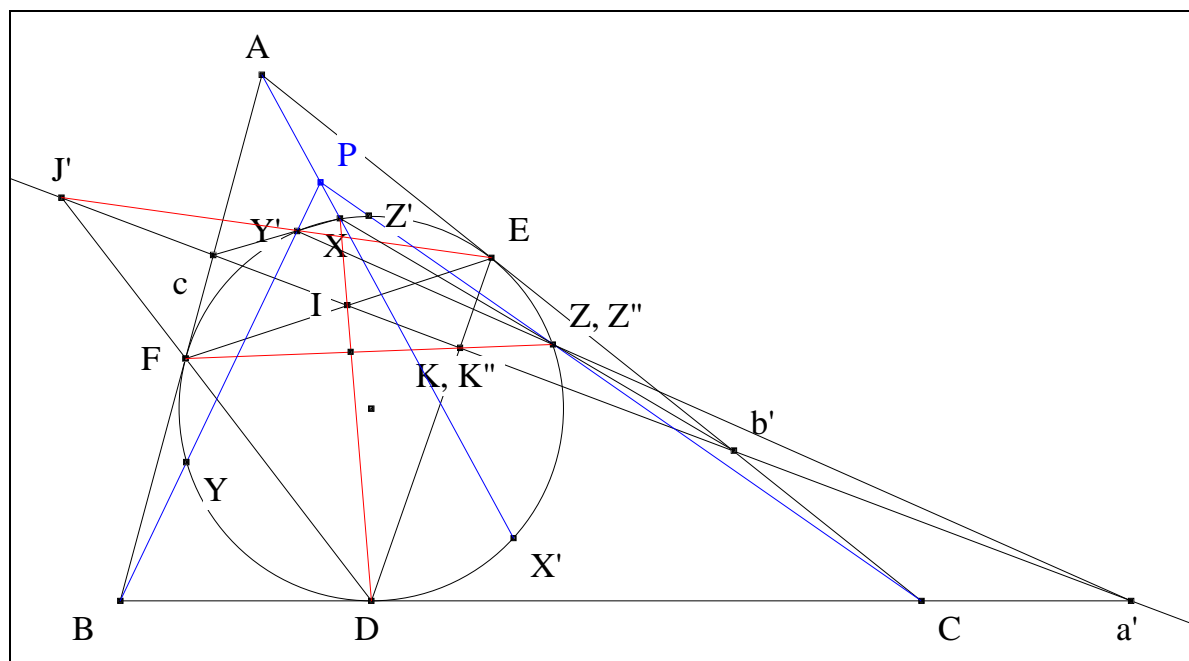


- **Scolie :** (abc) est l'axe de perspective des triangles ABC et XY'Z.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2), les droites (AX), (BY') et (CZ) sont concourantes.
- Notons P ce point de concours.

Commentaire : les droites (DIX), (EJ'Y') et (FKZ) ne sont pas concourantes, mais les droites (AX), (BY'), (CZ) le sont.

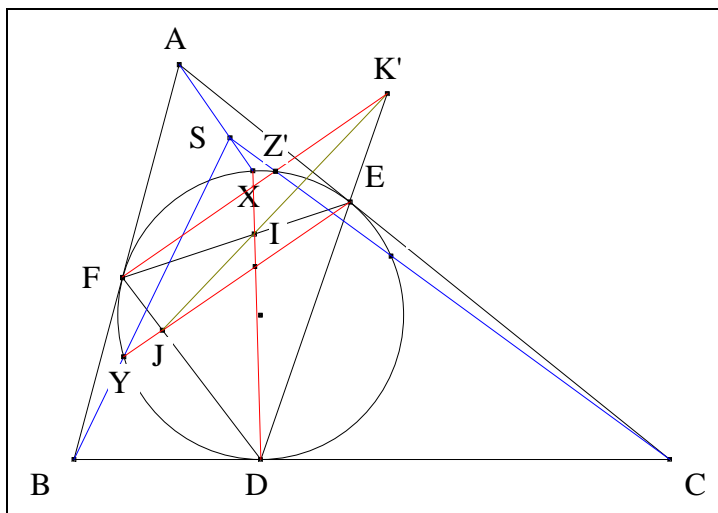
VISUALISATION SUFFISANTE

- **Scolie :** Darij Grinberg considère le point "le plus éloigné du sommet B de ABC" i.e. Y' sur Cb et les deux points "les plus proches des sommets A et C de ABC" i.e. X sur Ca et Z sur Cc.



- Notons P le point de concours de Ca , Cb et Cc .
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que les points I , J' et K ne sont pas alignés.
- Notons K'' le point d'intersection de (IJ') et (DE) ,
 Z'' le second point d'intersection de (FK'') avec l
et a', b', c les points d'intersection de $(IJ'K'')$ avec (BC) , (CA) , (AB) .
- Remarquons que (1) les points K et K'' sont distincts
(2) les points Z et Z'' sont distincts.
- D'après la visualisation nécessaire,
les triangles ABC et $XY'Z''$ admettant $(a'b'c)$ pour axe de perspective,
les droites (AX) , (BY) , (CZ'') sont concourantes en P ;
en conséquence, les points Z et Z'' sont confondus, ce qui est contradictoire ;
il s'en suit que les points K et K'' sont confondus.
- **Conclusion :** les points I , J' et K sont alignés.

- Scolies :**
- (1) $(IJ'K)$ est "la droite de Grinberg-Rabinowitz de ABC relativement à P ".
 - (2) Première équivalence
les points I , J' et K sont alignés
si, et seulement si,
les droites (AX) , (BY') et (CZ) sont concourantes i.e. Ca , Cb , Cc sont concourantes.
 - (2) Deuxième équivalence



- Notons I, J, K' les points d'intersection de (DX) et (EF) , de (EY) et (FD) , de (FZ') et (DE) .

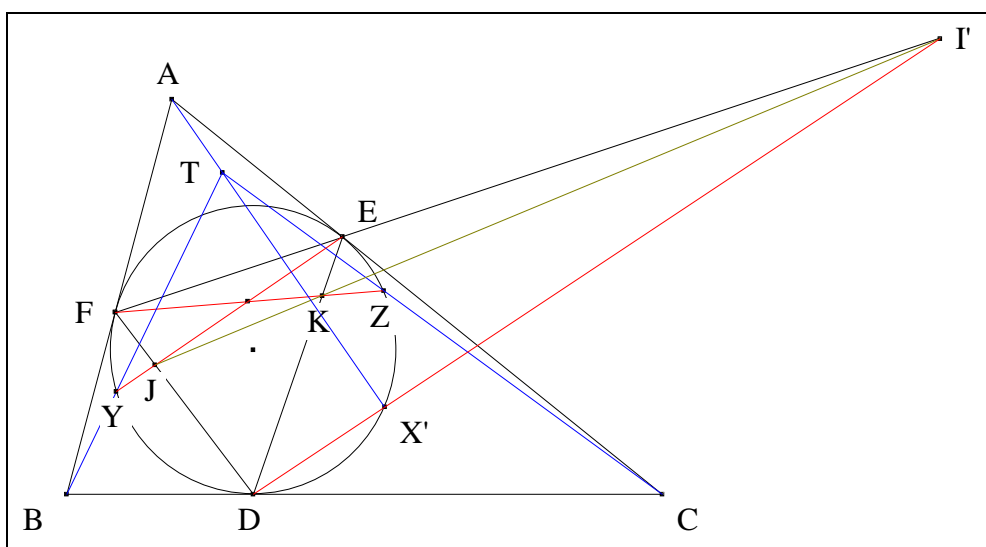
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

les points J, K' et I sont alignés

si, et seulement si,

les droites (BY) , (CZ') et (AX) sont concourantes i.e. Ca, Cb, Cc sont concourantes.

(3) Troisième équivalence



- Notons I', J, K les points d'intersection de (DX') et (EF) , de (EY) et (FD) , de (FZ) et (DE) .

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

les points K, I' et J sont alignés

si, et seulement si,

les droites (CZ) , (AX') et (BY) sont concourantes i.e. Ca, Cb, Cc sont concourantes.

Commentaire : en considérant les triangles déterminés par "deux points les plus proches" et un point "le plus éloigné", une formulation plus large peut alors s'imposer :

Ca, Cb et Cc sont concourantes en P

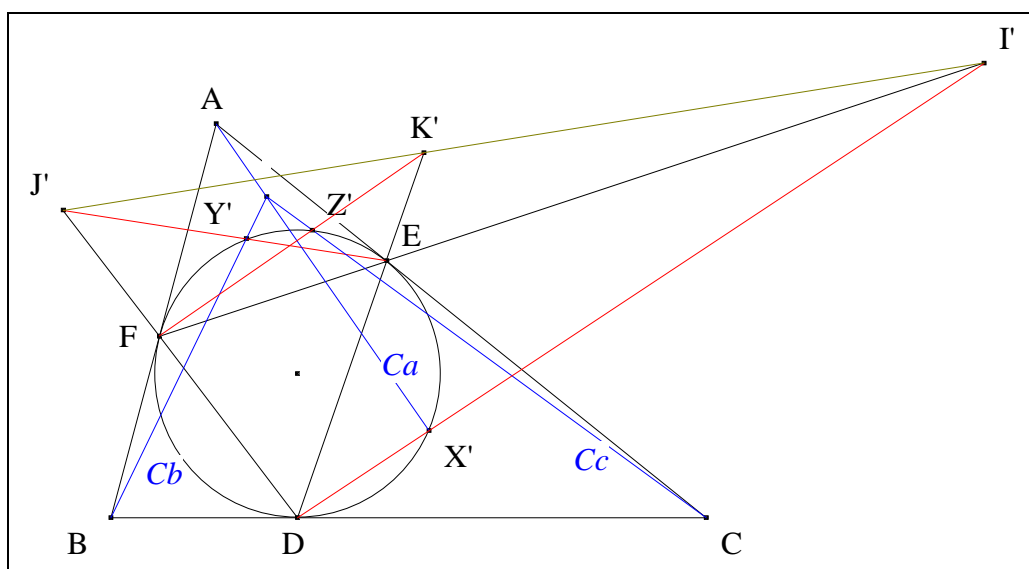
si, et seulement si,
les triangles DEF, IJK et QaQbQc sont perspectifs de même centre Q.

Pour terminer, repartons pour une dernière fois, de la figure de Rabinowitz en considérant le triangle déterminé par "trois points les plus éloignés".

V. L'AUTEUR

VISION

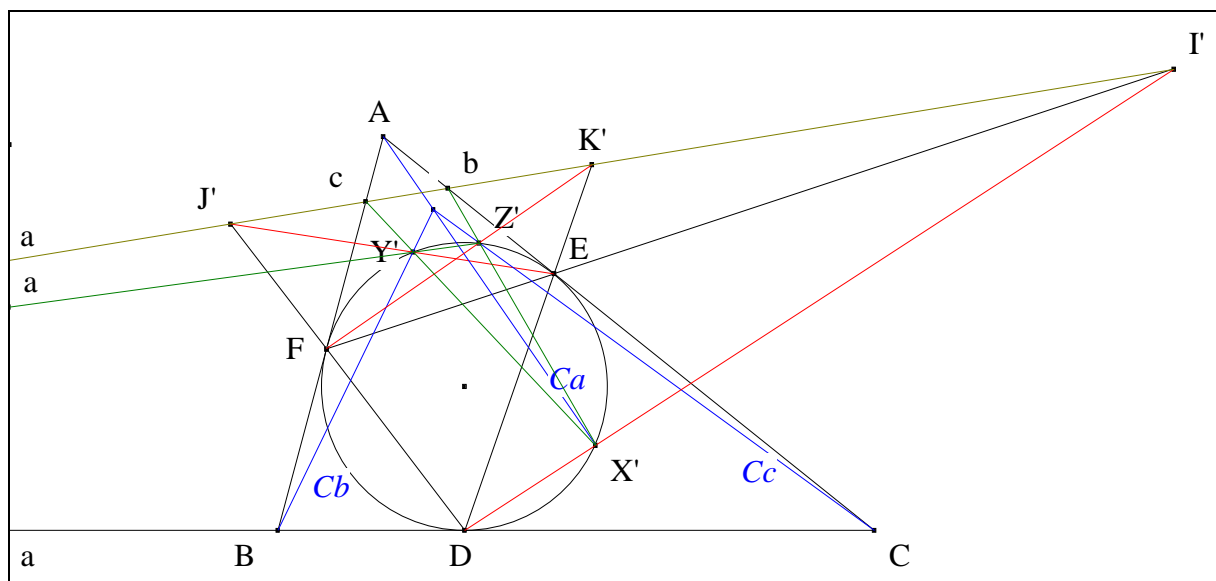
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le cercle inscrit de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	Ca, Cb, Cc	trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C,
	X'	les points d'intersection de Ca avec I tel que X soit "le plus éloigné" de A,
	Y'	les points d'intersection de Cb avec I tel que Y soit "le plus éloigné" de B,
	Z'	les points d'intersection de Cc avec I tel que Z soit "le plus éloigné" de C,
	et I', J', K'	les points d'intersection de (DX') et (EF), de (EY') et (FD), de (FZ') et (DE).

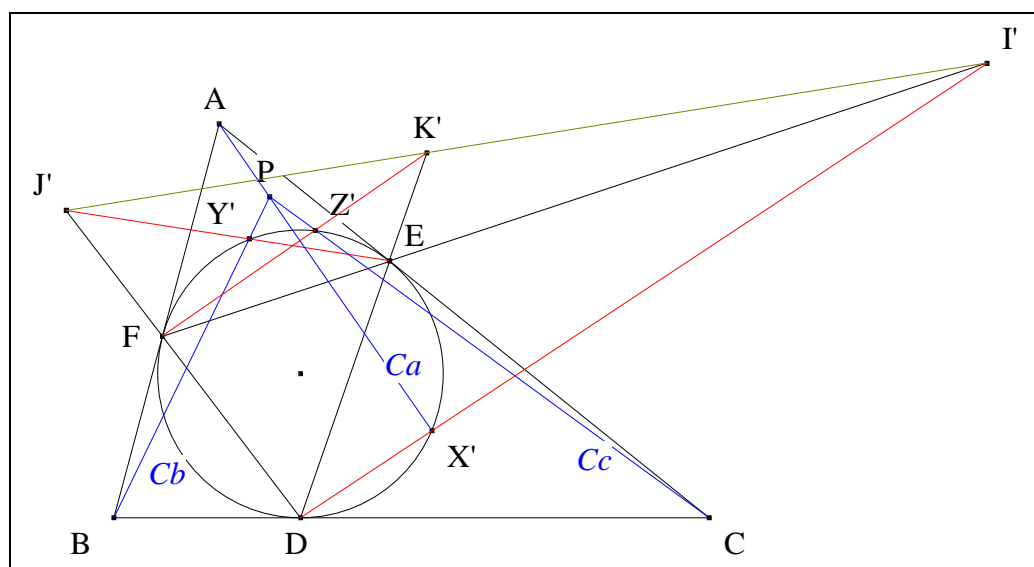
Donné : les points I', J' et K' sont alignés
si, et seulement si,
 les droites (AX'), (BY') et (CZ') sont concourantes.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons a, b, c les points d'intersection de M avec (BC) , (CA) , (AB)
- Considérons la visualisation nécessaire du "point de Grinberg-Steinbart".
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - $(Y'Z')$ passe par a .
 - $(Z'X')$ passe par b
 - $(X'Y')$ passe par c .
- **Scolie :** (abc) est l'axe de perspective des triangles ABC et $X'Y'Z'$.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2), les droites (AX') , (BY') et (CZ') sont concourantes.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons P le point de concours de Ca , Cb et Cc .
- Considérons la visualisation suffisante de "La droite de Grinberg-Rabinowitz".

- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que les points I' , J' et K' sont alignés.

Scolies : (1) quatrième équivalence

les points I' , J' et K' sont alignés

si, et seulement si,

les droites (AX') , (BY') et (CZ') sont concourantes i.e. Ca , Cb , Cc sont concourantes.

(2) Les quatre équivalences constituent "le théorème de Grinberg".

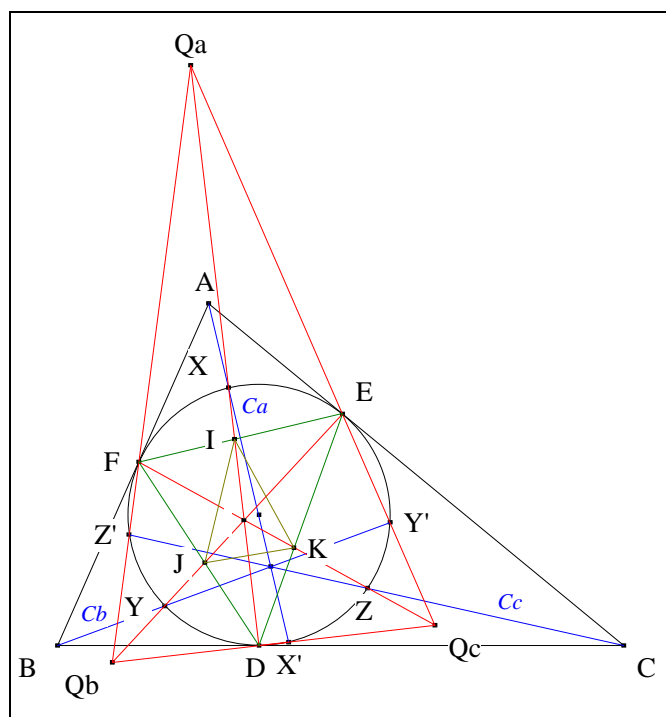
(3) Les triangles DEF , IJK et $QaQbQc$ sont perspectifs de même axe.

Commentaire : la formulation "les plus proches des sommets de ABC ", nous a conduit à considérer tous les triangles que l'on peut former avec les points d'intersection de (PA) , (PB) et (PC) avec I .
A présent, nous sommes prêts à procéder à une synthèse sous la forme d'une équivalence résumant toute notre étude.

VI. L'ÉQUIVALENCE DE GRINBERG-RABINOWITZ ⁶

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le cercle inscrit de ABC ,
 DEF le triangle de contact de ABC ,

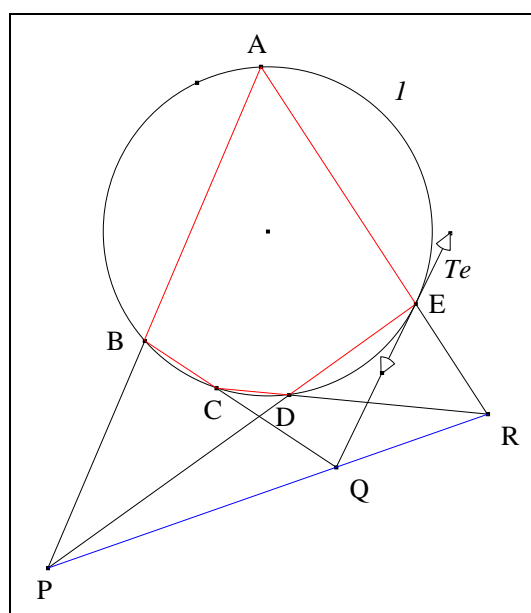
⁶ Grinberg D., Variations of the Steinbart Theorem ; http://de.geocities.com/darij_grinberg/

	Ca, Cb, Cc	trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C ,
	X, X'	les points d'intersection de Ca avec I tel que X soit "le plus proche" de A ,
	Y, Y'	les points d'intersection de Cb avec I tel que Y soit "le plus proche" de B ,
	Z, Z'	les points d'intersection de Cc avec I tel que Z soit "le plus proche" de C ,
	I, J, K	les points d'intersection de (DX) et (EF) , de (EY) et (FD) , de (FZ) et (DE) ,
et	Qa, Qb, Qc	les points d'intersection de (EY') et (FZ') , de (FZ') et (DX') , de (DX') et (EY') .

Donné⁷ : Ca, Cb et Cc sont concourantes
si, et seulement si,
les triangles DEF, IJK et $QaQbQc$ sont perspectifs de même centre et de même axe.

VII. ANNEXE

1. Pentagramma mysticum⁸



Traits : I un cercle,
 $ABCDEA$ un pentagone tels que les points A, B, C, E soient sur I ,
 Te la tangente à I en E
et P, Q, R les points d'intersection des droites (AB) et (DE) , (BC) et Te , (CD) et (EA) .

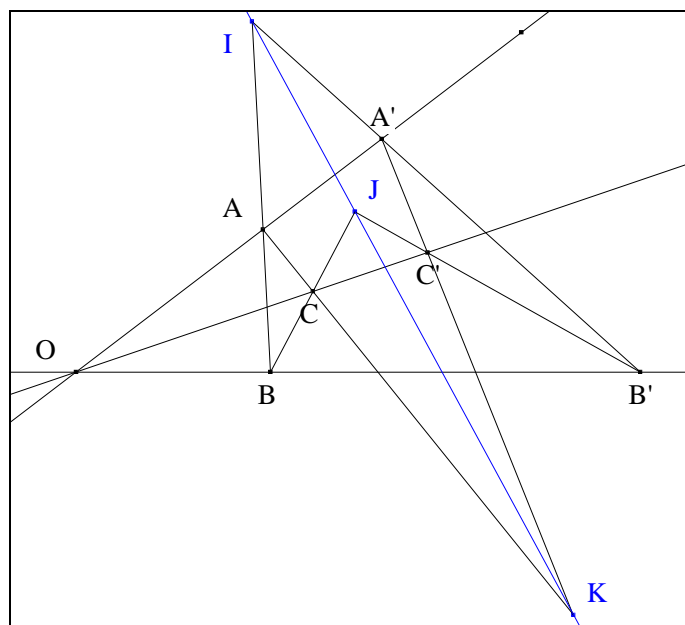
Donné : D est sur I *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.

2. Le théorème des deux triangles⁹

⁷ Reformulé par l'auteur.

⁸ Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456.

⁹ Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.



Traits : ABC un triangle,
 $A'B'C'$ un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
 O le point de concours de (AA') et (BB') ,
 I le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$,
 J le point d'intersection des droites (BC) et $(B'C')$
 et K le point d'intersection des droites (CA) et $(C'A')$.

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* les points I, J et K sont alignés.