DROITE DE SIMSON DE PÔLE Fe

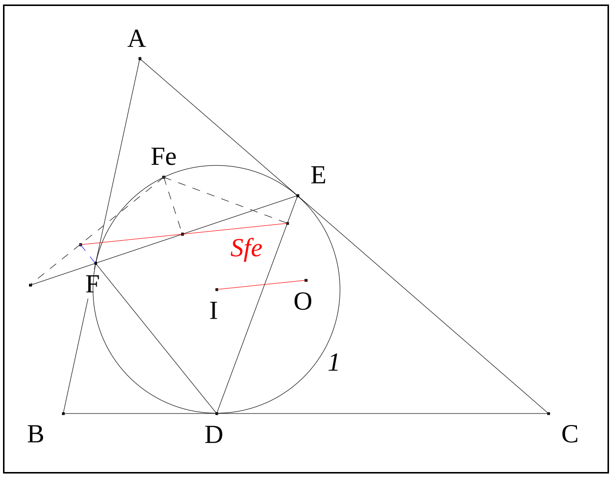
RELATIVEMENT

AU

TRIANGLE DE CONTACT

†

Jean-Louis AYME



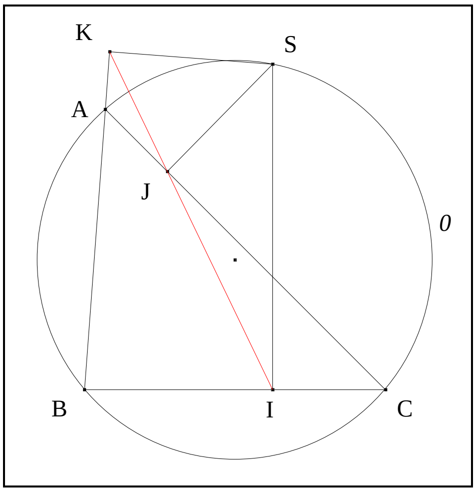
Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique d'un résultat d'Arnold Droz-Farny concernant la droite de Simson de pôle la point de Feuerbach relativement au triangle de contact d'un triangle.
Toutes les figures sont en positions générales et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

A. LA DROITE DE SIMSON - WALLACE

VISION

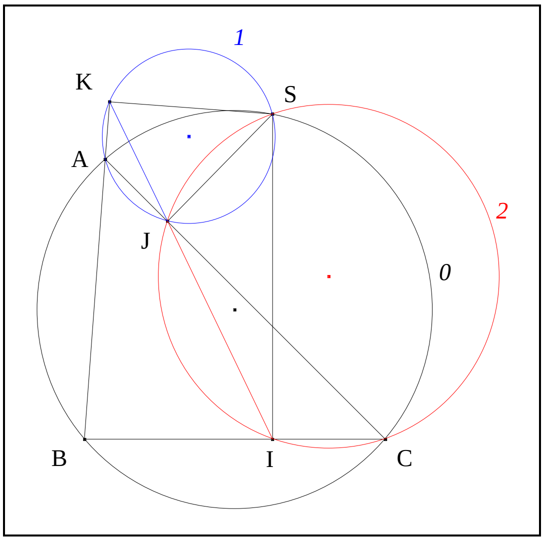
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
S un point
et I,J,K les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB).

Donné : S est sur *0* *si, et seulement si,* (IJK) est une ménélienne de ABC.[1]

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *1* le cercle de diamètre [SA] ; il passe par J et K ;

---

[1] Wallace, *Leybourne's* mathem. repository (old series) 2 (1798) 111.

et *2* le cercle de diamètre [SC] ; il passe par I et J.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1), I, J et K sont alignés.

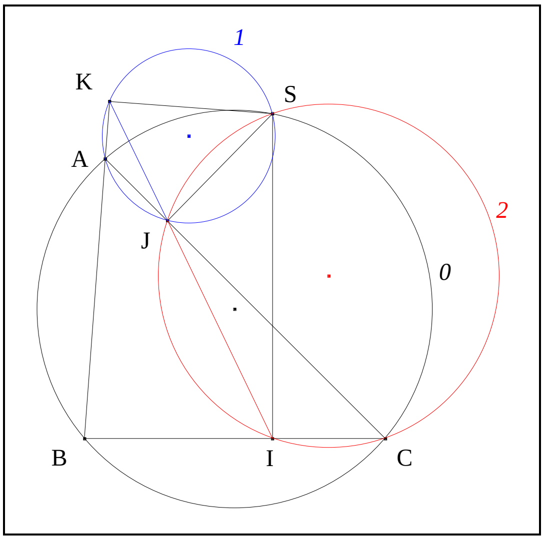
- **Conclusion :** (IJK) est une ménélienne de ABC.

Énoncé traditionnel : *si*, d'un point pris sur le cercle circonscrit à un triangle,
on abaisse des perpendiculaires sur chaque côté du triangle,
alors, les trois points obtenus sont alignés.

Scolies : **(1)** (IJK) est la droite de Simson-Wallace ou pédale de pôle S de *1* relativement à ABC ;
plus brièvement, (IJK) est la S-simsonienne et est notée : Δ^{S}_{ABC}.

(2) Deux cas particuliers :
la A-hauteur d'un triangle ABC coïncide avec la A-simsonienne ;
le côté opposé au sommet A d'un triangle ABC coïncide avec la A'-simsonienne
où A' est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons *1* le cercle de diamètre [SA] ; il passe par J et K ;
  et *2* le cercle de diamètre [SC] ;il passe par I et J.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le point de Miquel-Wallace" (Cf. annexe 2)
  appliqué à ABC et à (IJK), S est sur *0*.

Note historique : Bien que l'historien d'Edimburgh, John Sturgen Mackay[2] n'a trouvé aucune trace de la droite dite de Simson dans ses oeuvres, il montra que cette erreur en paternité provenait du géomètre français François Joseph Servois qui écrivait en 1814:

le théorème suivant, qui est, je crois, de Simson...[3].

[2] MacKay J. S., *Proceedings Edinburgh Math Soc.*, (1890-1891) 83.
[3] Servois F. J., *Annales de Gergonne* 4 (1813-14) 250-251.

Cette erreur allait être reprise par Jean Victor Poncelet[4] qui, en omettant la remarque de Servois, allait perpétuer définitivement ce fait. C'est en 1799 que William Wallace[5] découvrait "cette droite", bien après la mort de Simson en 1768.

Une courte biographie :

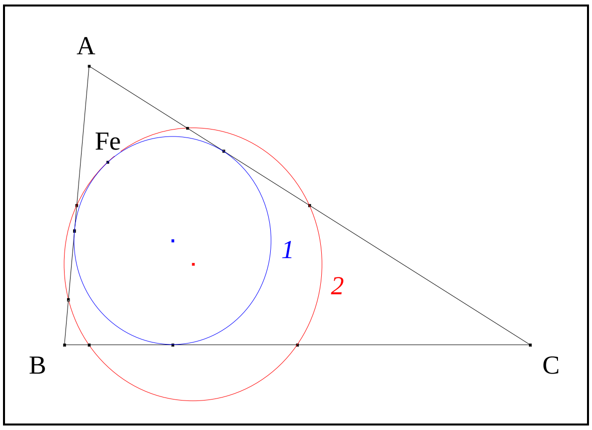
Robert Simson[6] est né le 14 Octobre 1687, à West Kilbride (Ayrshire), une petite ville d'Écosse.
A l'âge de 14 ans, il entre à l'université de Glasgow le 3 Mars 1702 et commence par étudier la médecine avant de se consacrer finalement aux mathématiques. Passionné de géométrie grecque, il est nommé professeur à l'Université de Glasgow de 1711 à 1761 et réédite en 1756, en anglais, les *Éléments* d'Euclide[7] qui influenceront les traductions successives. En 1746, il démontre la relation de son élève Stewart, que connaissait probablement Archimède, restaure en 1749 à partir des *Collections* de Pappus, le livre perdu d'Apollonius *Plane Loci* sous le titre de *The Loci plani of apollonius restored*, rétablit en 1751 la forme des énoncés de plusieurs porismes d'Euclide et publie en 1756, un *Traité des sections coniques* formé de cinq livres écrits dans le style vigoureux d'Apollonius. Ce traité qui trouva un retentissant écho, a été réédité 24 fois dans sa version anglaise jusque vers 1834.
Dans ses travaux géométriques, Simson donnait d'une proposition autant de démonstrations que la figure à laquelle elle se rapportait, prenait de formes différentes par le changement de position respective de ses parties.
Il décède le 1er Octobre 1768 à Glasgow (Écosse, Grande-Bretagne).

B. LE POINT DE FEUERBACH

VISION

Figure :

4 Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures* (1822).
5 Wallace W. (1768-1843), *Leybourne's* mathem. repository (old series) 2 (1798) 111.
6 A ne pas confondre avec Thomas Simpson (1710-1761) connu par sa méthode de quadrature.
7 Sir Henry Billingsley a traduit les *Éléments* en 1570.



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC
et *2* le cercle d'Euler [8] de ABC.

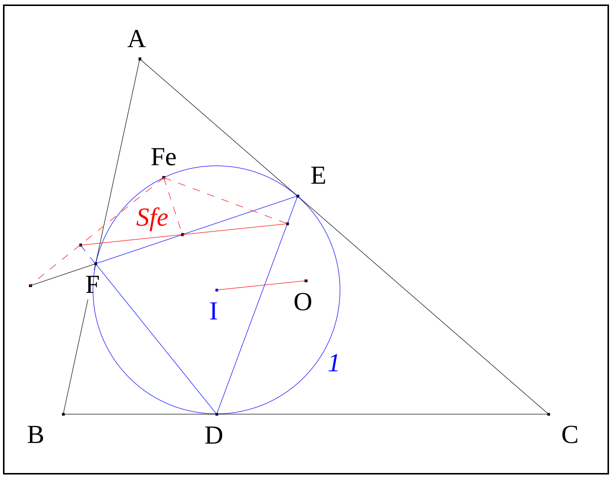
Donné : *2* est tangent à *1*. [9]

Scolies : **(1)** le point de contact de *1* et *2*, noté Fe, est "le point de Feuerbach de ABC" ; il est répertorié sous X_{11} chez ETC [10].

(2) Une courte biographie peut être lue dans l'article "Le théorème de Feuerbach"[11] ou sur le site de l'Université St Andrews (Écosse, Grande Bretagne)[12].

C. VISION DE DROZ - FARNY

Figure :



8 Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler…, G.G.G. vol. 2 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

9 Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/
El theorema de Feuerbach, *Revistaoim* (Espagne) 26 (2006) ; http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

10 Kimberling Clark, Triangle Centers and Central Triangles ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

11 Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

12 University of St Andrews ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Feuerbach.html.

Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
Fe le point de Feuerbach de ABC
et *S*fe la droite de Simson de pôle Fe relativement à DEF.

Donné : *S*fe est parallèle à (OI).[13]

Énoncé traditionnel : la droite de Simson du point de Feuerbach d'un triangle
est parallèle à
la droite joignant les centres des centres inscrit et circonscrit de ce triangle.

Scolies : **(1)** (OI) est la droite d'Euler de DEF.

(2) La vision de Droz-Farny peut se réinterpréter de la façon suivante :

la droite de Steiner du point de Feuerbach d'un triangle
est
la droite joignant les centres des centres inscrit et circonscrit de ce triangle.

(3) Une courte biographie d'Arnold Droz-Farny peut être lue dans l'article "La droite de Droz-Farny"[14] ou sur le site de l'Université St Andrews (Écosse, Grande Bretagne)[15].

D. LA DROITE D'EULER

VISION

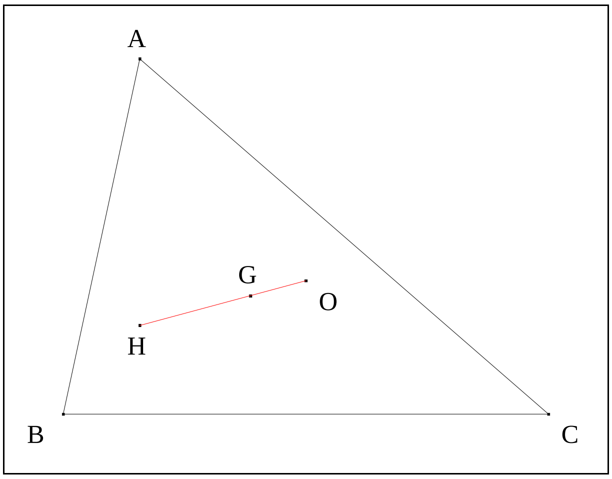
Figure :

---

13 Droz-Farny A., Problème 14075, *Educational Times* 71 (1899) 106.

14 Ayme J.-L., La droite de Droz-Farny, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
A purely synthetis proof of the Droz-Farny line theorem ; *Forum Geometricorum* vol. 4 (2004) 219-224 : http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200426index.html.

15 University of St Andrews ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Droz-Farny.html.



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
G le point médian de ABC
et H l'orthocentre de ABC.

Donné : H, G et O sont alignés[16].

Scolies : **(1)** suite à l'initiative de Joseph Neuberg, (HGO) est "la droite d'Euler de ABC".

(2) Une courte biographie de Leonhard Euler peut être lue sur le site de l'Université St Andrews (Écosse, Grande Bretagne)[17].

E. LA DROITE ET L'ANTIPOINT DE STEINER

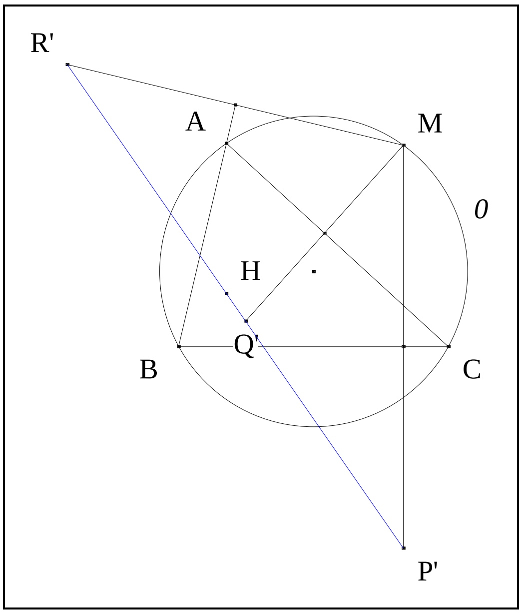
VISION

Figure :

---

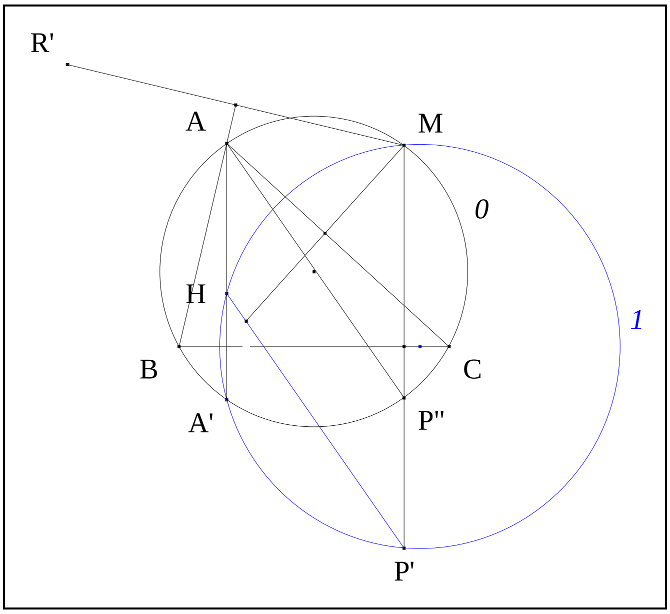
[16] Euler L., Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* 11 (1765) 114.
Euler L., *Opera Omnia* XXVI, éd. Andr. Speiser, Zürich (1953) 139-157 et surtout 149 ; ce traité fut présenté à l'Académie de St-Petersbourg le 21 décembre 1763 en style ancien.

[17] University of St Andrews ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html.



Traits :	ABC	un triangle,	
	H	l'orthocentre de ABC,	
	0	le cercle circonscrit à ABC,	
	M	un point,	
et	P', Q', R'	les symétriques de M resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).	
Donné :	M est sur *0*	*si, et seulement si,*	P', Q', R' et H sont alignés. [18]

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons A', P" les seconds points d'intersection resp. de (AH), (MP') avec *0*.

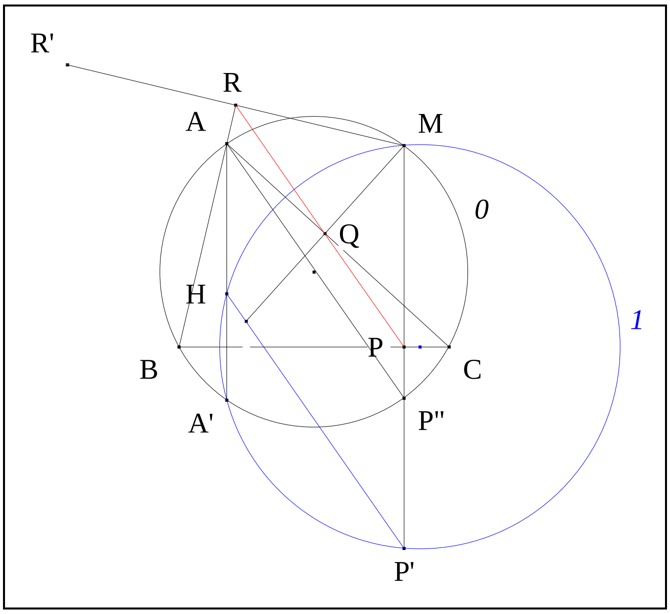
- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 4),
  (1) A' est sur *0*
  (2) A' est le symétrique de H par rapport à (BC).

[18] Steiner J..

- **Scolie :** le trapèze HA'P'M est cyclique.

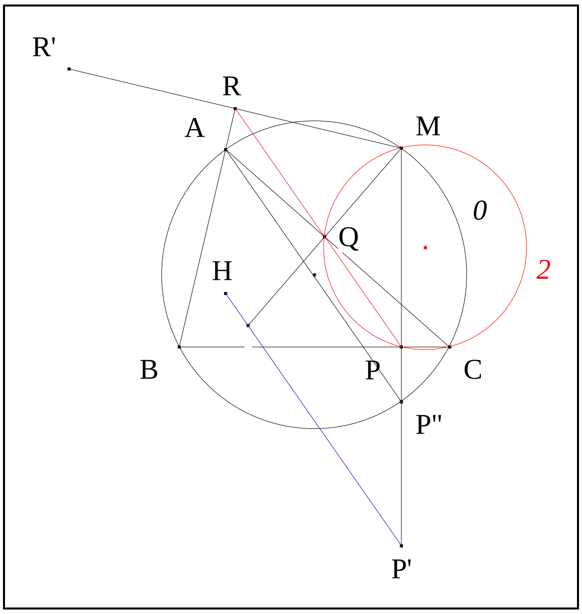
- Notons *1* ce cercle.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base A' et M, les moniennes (HA'A) et (P'MP"), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (HP') // (AP").



- Notons P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (BC), (CA), (AB).

- **Scolie :** (PQR) est la droite de Simson de pôle M du triangle ABC.



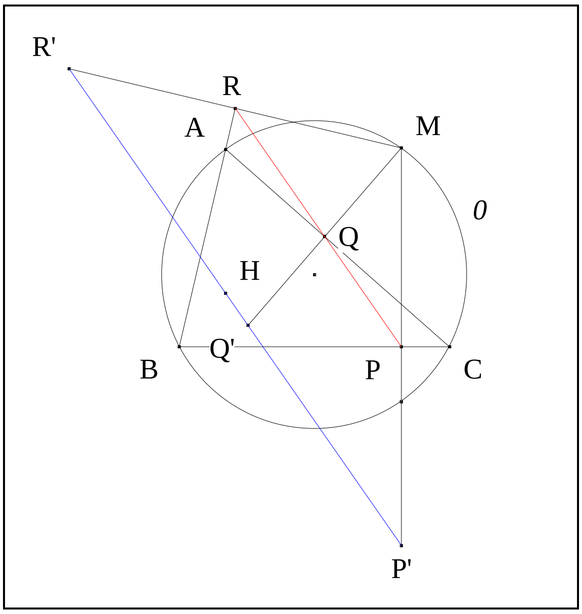
- Notons *2* le cercle de diamètre [MC] ; il passe par P et Q.

- Le résultat de Franz Heinen :
  les cercles *0* et *2*, les points de base C et M, les moniennes (ACQ) et (P"MP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AP") // (QP) [19].

---

[19] Heinen, *Journal de Crelle* 3 (1828) 285-287.

- Par transitivité de la relation //, (HP') // (QP)
  ou encore (HP') // (PQR).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (HQ') // (PQR) et (HR') // (PQR).

- D'après le postulat d'Euclide, (HP'), (HQ') et (HR') étant parallèles à (PQR), sont confondues.

- **Conclusion :** P', Q', R' et H sont alignés.

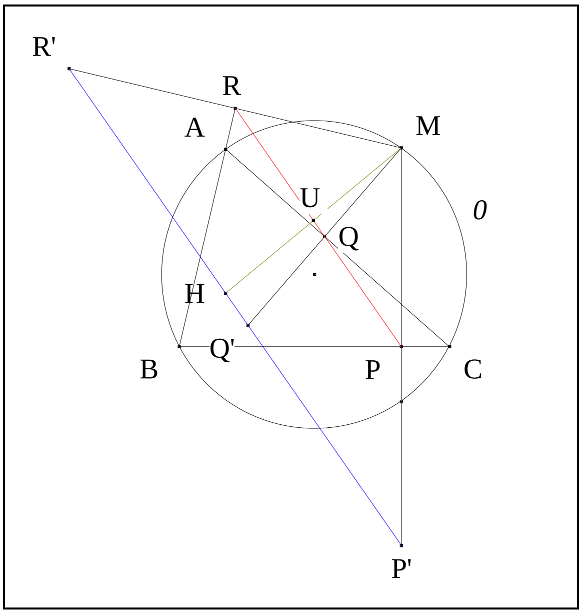
Scolies :

(1) La droite passant par P', Q', R' et H est "la droite de Steiner de pôle M relativement à ABC".

Énoncé traditionnel : les symétriques d'un point du cercle circonscrit à un triangle par rapport aux côtés de celui-ci,
sont sur la droite de Steiner.

(2) La droite de Steiner est parallèle à la droite de Simson (PQR) de pôle M relativement à ABC.

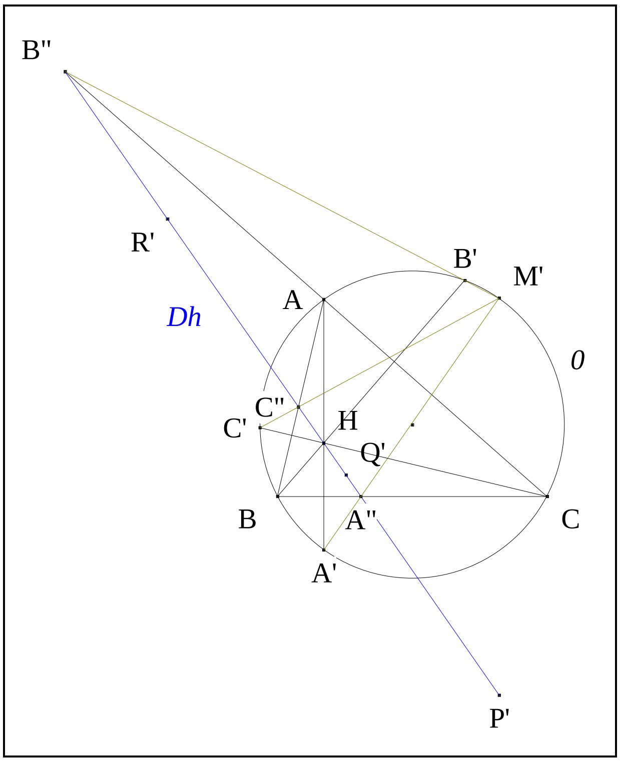
(3) Le milieu de [MH]



- Notons U le point d'intersection de (PQR) et (MH).

- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIb, U est le milieu de [MH].[20]

VISUALISATION NÉCESSAIRE

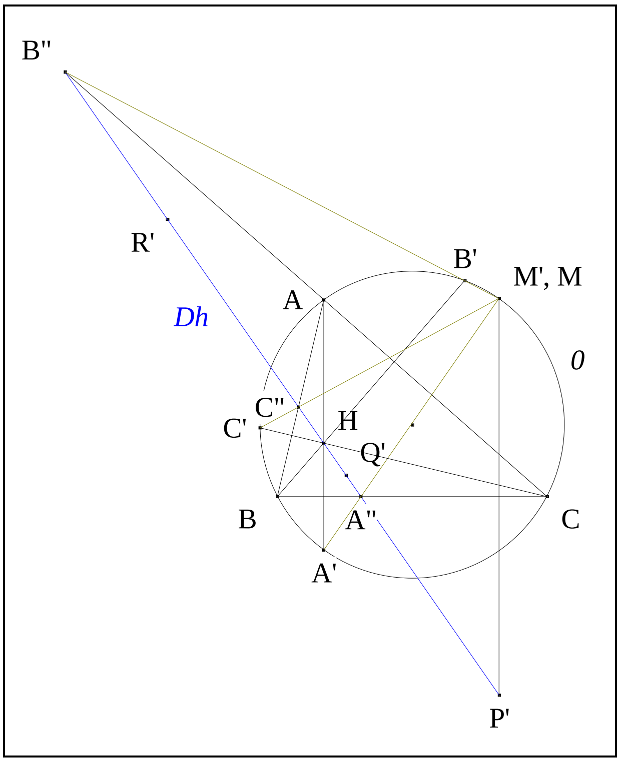


- Notons *Dh* la ménélienne (HP'Q'R') de ABC passant par H,
  A', B', C' les seconds points d'intersection resp. de (HA), de (HB), de (HC) avec *0*
  et A", B", C" les points d'intersection de *D* resp. avec (BC), (CA), (AB).

[20] Cette question a été proposée en 1827-28 par Steiner dans les *Annales Mathématiques* 18 de Gergonne ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA.

- D'après "L'équivalence de Clawson-Ayme"[21], (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes sur *0*.

- Notons M' ce point de concours.



- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 4),
  A' est le symétrique de H par rapport à (BC). ;
  en conséquence, **(1)** (A'A") est la symétrique de *D* par rapport à (BC)
  (2) le symétrique M de P' par rapport à (BC) est sur (A'A") i.e.
  (A'A" passe par M.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B") passe par M
  (C'C") passe par M ;
  en conséquence, M et M' sont confondus.

- **Conclusion :** M est sur *0*.

Énoncé traditionnel : les symétriques d'une ménélienne passant l'orthocentre d'un triangle
par rapport aux côtés de ce triangle,
concourent sur le cercle circonscrit de ce triangle.

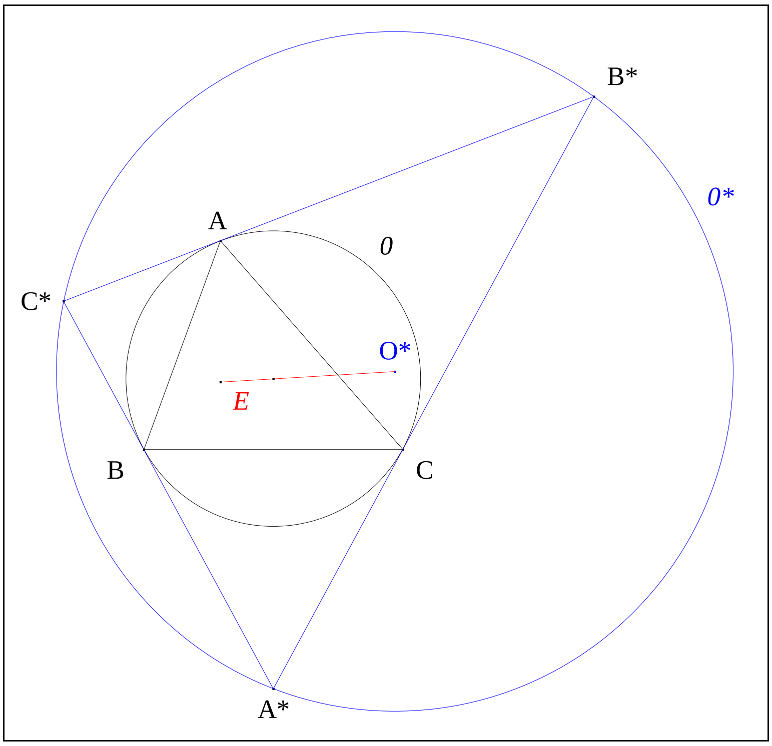
Scolie : M est "l'antipoint de Steiner de *D* relativement à ABC".

F. LE RÉSULTAT DE GOB

21 Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. 3, p. 8-12 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

VISION

Figure :

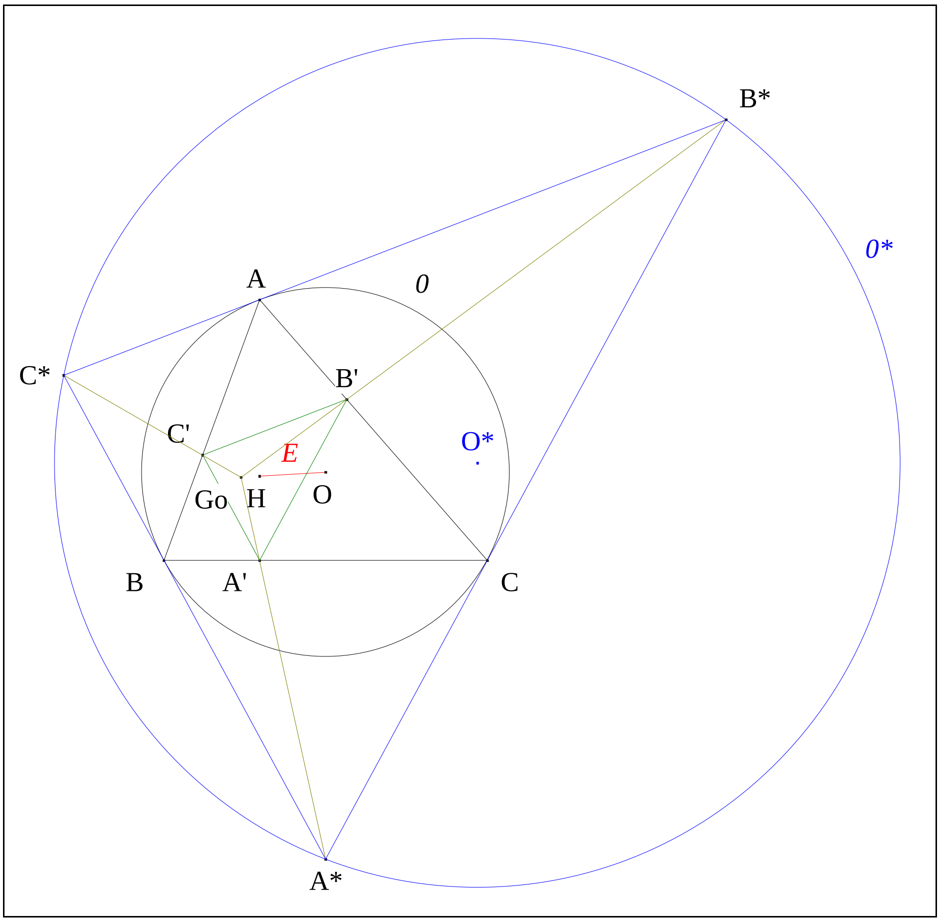


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
E la droite d'Euler de ABC,
A*B*C* le triangle tangentiel de ABC,
*0** le cercle circonscrit à A*B*C*
et O* le centre de *0**.

Donné : O* est sur *E*. [22]

VISUALISATION

[22] Gob A., proposition 2, Sur la droite et le cercle d'Euler, *Notes de Géométrie Récentes*, supplément de *Mathesis* **9** (1889).



- Notons O le centre de *0*,
  H l'orthocentre de ABC
  et A'B'C' le triangle orthique de ABC.

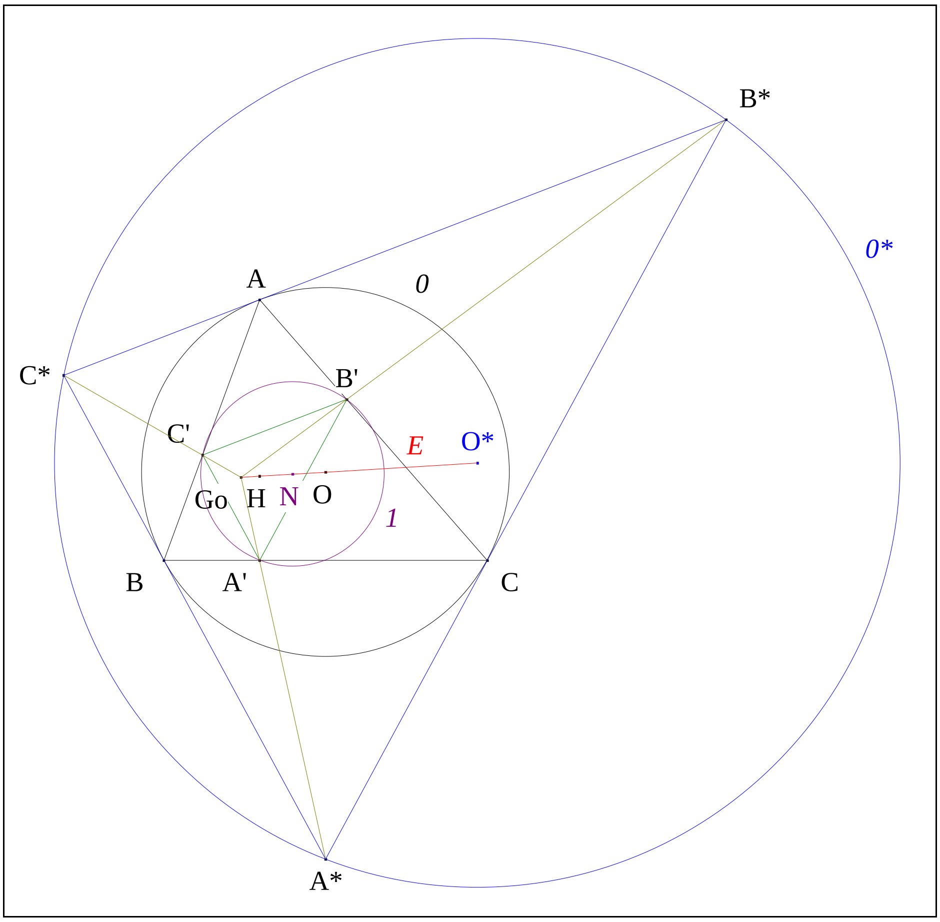
- **Scolies :** **(1)** *E* = (OH)
  (2) A'B'C' est homothétique à A*B*C*.

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 3) appliqué à A'B'C' et A*B*C*, (A'A*), (B'B*) et (C'C*) sont concourantes. [23]

- Notons Go ce point de concours.

- **Scolie :** Go est le point de Gob et est répertorié sous X_{25} chez ETC. [24]

[23] Gob A., proposition 1, Sur la droite et le cercle d'Euler, *Notes de Géométrie récente*, supplément de *Mathesis*, vol. IX (1889).
[24] Kimberling Clark, Triangle Centers and Central Triangles ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



- Notons $\quad$ *1* $\quad$ le cercle d'Euler de ABC
  et $\quad$ N $\quad$ le centre de *1*.

- **Scolies :** $\quad$ **(1)** $\quad$ *1* est le cercle circonscrit de A'B'C'

  (3) $\quad$ H est le centre de A'B'C'
  i.e. le point d'intersection des bissectrices intérieures de A'B'C'
  ou encore le centre du cercle inscrit de A'B'C'
  (4) $\quad$ *0* est le cercle inscrit de A*B*C*.

- A'B'C' étant homothétique à A*B*C*,
  (1) $\quad$ les centres de leur cercle inscrit resp. $\quad$ H et O sont alignés avec Go
  (2) $\quad$ les centres de leur cercle circonscrit resp. $\quad$ N et O* sont alignés avec Go.

- **Scolie :** $\quad$ N est le milieu de [OH].

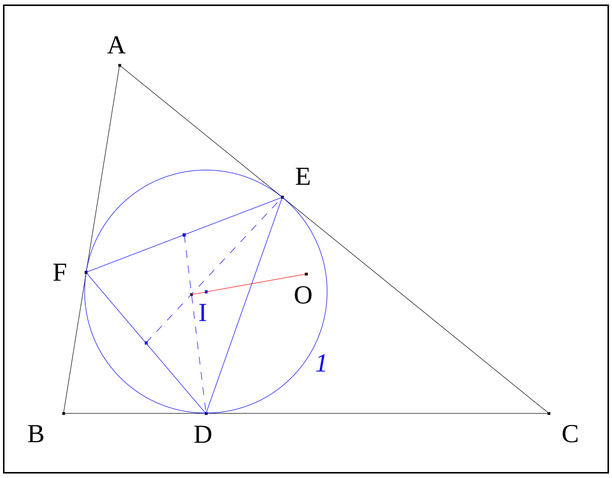
- D'après l'axiome d'incidence Ia, $\quad$ Go, H, N, O et O* sont alignés.

- **Conclusion :** O* est sur *E*.

Énoncé traditionnel : $\quad$ le centre du cercle circonscrit du triangle tangentiel d'un triangle
est sur la droite d'Euler de ce triangle.

Note historique : $\quad$ la preuve d'Antoine Gob est trigonométrique.

Nous trouvons une preuve synthétique de ce résultat chez Mihalescu[25].
Lo Jacomo représentera ce résultat dans la revue française *APMEP*[26].



Si, Gob est parti d'un triangle pour considérer son triangle tangentiel, inversement, nous pouvons partir d'un triangle ABC pour considérer son triangle de contact DEF :

le centre du cercle circonscrit d'un triangle
est
sur la droite d'Euler du triangle de contact.

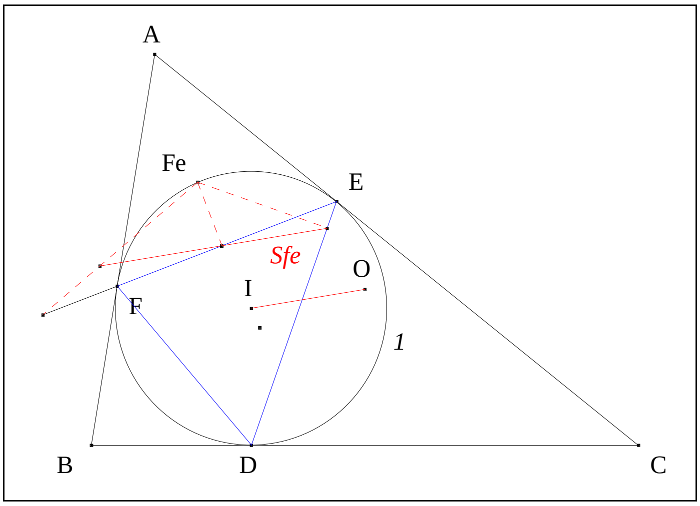
Sachant que le point médian de DEF est sur la droite d'Euler de DEF, nous avons une nouvelle formulation due à Matthieu Weill :

le centre du cercle circonscrit d'un triangle, le centre de son cercle inscrit
et le point médian du triangle de contact,
sont alignés.

Une courte biographie :
En 1894, Antoine Gob est professeur agrégé de l'Enseignement moyen à Hasselt (Belgique).
Avec Joseph Neuberg, il écrit un papier *Sur les foyers de Steiner d'un triangle*.
En 1889, il signe un article intitulé *Sur la droite et le cercle d'Euler* dans *Notes de Géométrie récente*, un supplément de *Mathesis*. La même année et l'année suivante, il publie des articles dans la revue de l'*AFAS*.
En 1890, au congrès scientifique de Limoges, il est le précurseur de l'inversion symétrique dû à Bernès, professeur à Paris.
En 1891, il est présent au congrès de l'*AFAS* à Marseille et publie à nouveau dans *Mathesis*.

G. VISUALISATION

[25] Mihalescu C., *Geometria elementelor remarcabile*, Ed. Tehnica, Bucarest (1957) 42-43.
[26] Lo Jacomo F., *APMEP*, n°425, énoncé 268.



- D'après B. Le point de Feuerbach, Fe est sur *1*.

- D'après F. Le résultat de Gob, (OI) est la droite d'Euler de DEF.

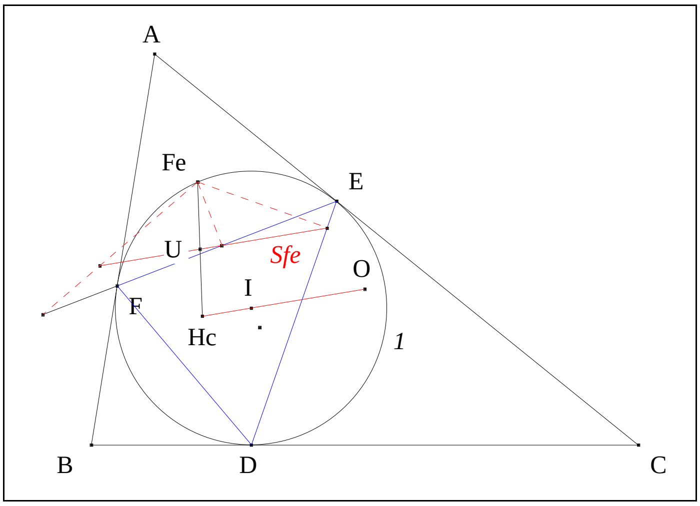
- D'après E. La droite et l'antipoint de Steiner, l'antipoint de Steiner de (OI) est sur *1*.

- D'après Ayme "Symétriques de (OI)…" [27], Fe est l'antipoint de Steiner de (OI).

- D'après E. La droite et l'antipoint de Steiner,
  (1) (OI) est la droite de Steiner de pôle Fe relativement à DEF
  (2) (OI) est parallèle à la droite de Simson de pôle Fe relativement à DEF.

- **Conclusion :** *S*fe est parallèle à la droite (OI).

Scolie : situation de (OI)



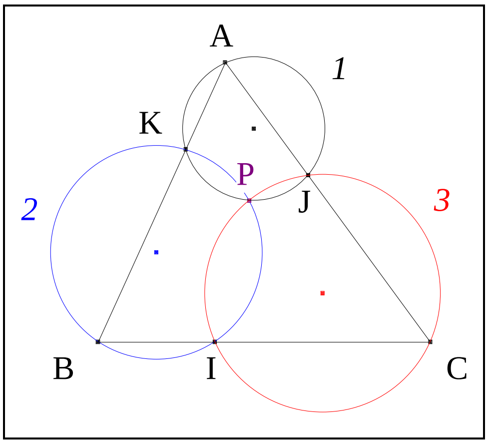
- Notons Hc l'orthocentre du triangle de contact DEF
  et U le milieu de [FeHc].

- **Conclusion :** d'après E. La droite et l'antipoint de Steiner, *S*fe passe par le milieu de [AHc].

[27] Ayme J.-L., Symétriques de (OI)..., G.G.G. vol. 4, p. 26-28 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

H. ANNEXE

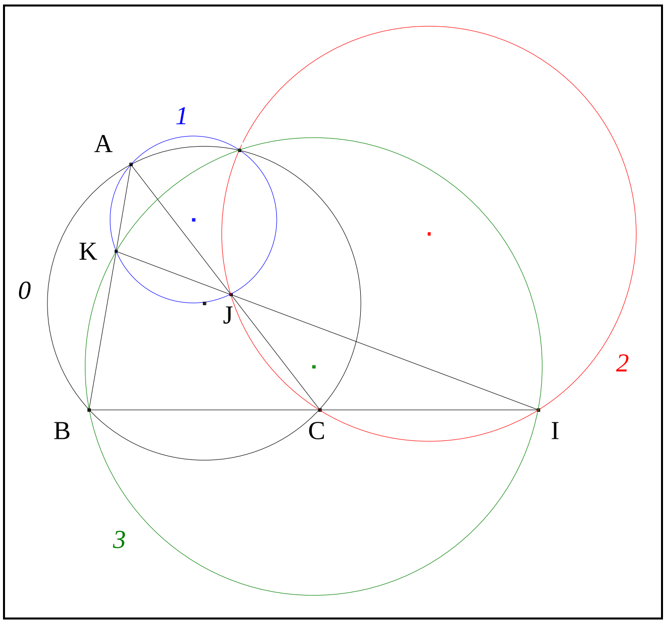
1. Le théorème du pivot [28]



Traits :	*1*, *2*, *3*	trois cercles sécants deux à deux,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

2. Le point de Miquel-Wallace [29]



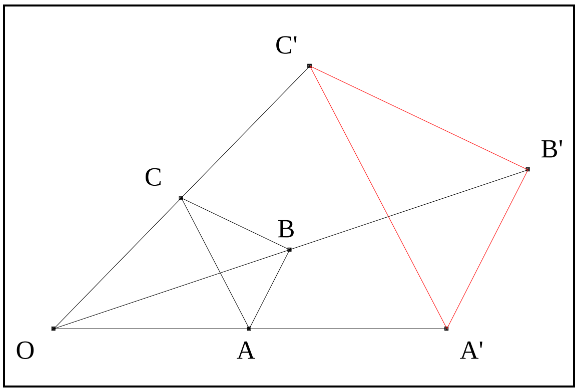
[28] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.

[29] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.

Traits : ABC un triangle,
I, J, K trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB),
0 le cercle circonscrit à ABC,
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

Donné : I, J et K sont alignés *si, et seulement si,* *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

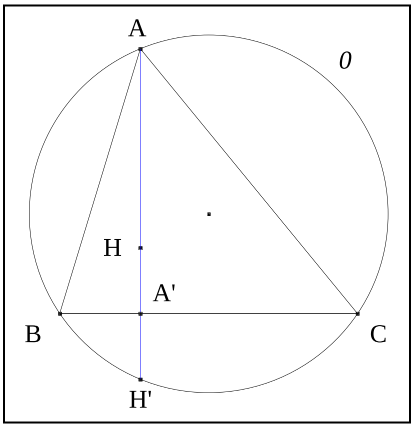
3. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que (1) (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

4. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté [30]



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre du triangle,
A' le pied de la hauteur de ABC en A,
0 le cercle circonscrit à ABC
et H' le pied de la hauteur de ABC en A sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

[30] Carnot L., n° 142, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101.