UN ORTHOPÔLE

SUR

LA DROITE DE SEIMIYA

Jean-Louis AYME

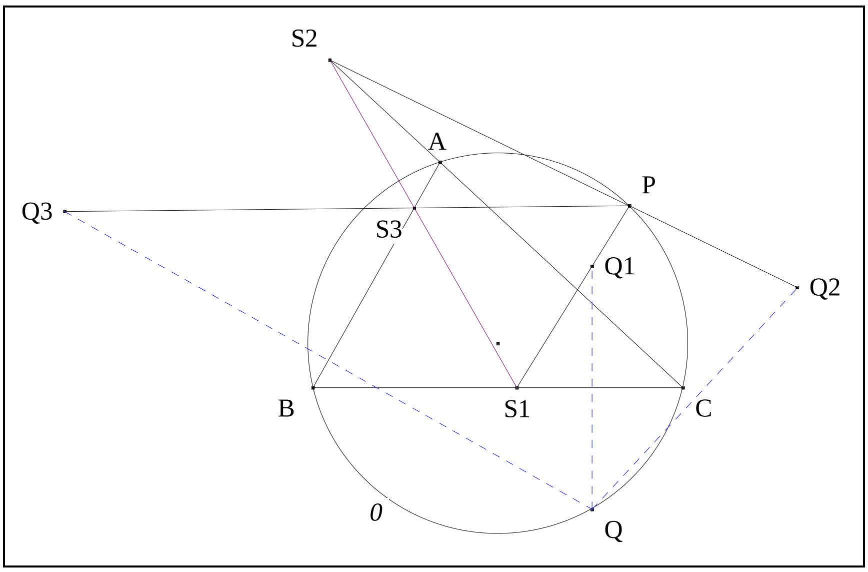
Résumé. Nous présentons une preuve originale et purement synthétique de la droite de Seimiya datant de 1926 alors qu'il n'avait que seize ans. Elle est suivie d'une courte note biographique et d'un résultat de l'auteur concernant un orthopôle sur cette droite.
Signalons qu'une partie de ce résultat sera utilisée pour démontrer "la droite de Turner".
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

1. LA DROITE DE SEIMIYA

VISION

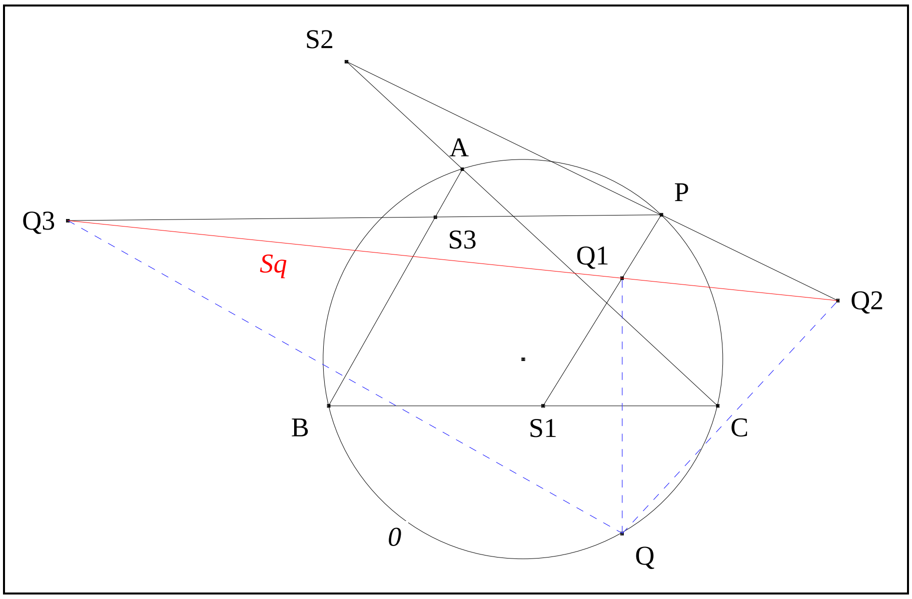
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Q	un point de *1*,
	Q1, Q2, Q3	les symétriques de Q par rapport à (BC), (CA), (AB),
	P	un point de *1*
et	S1, S2, S3	les points d'intersection de (PQ1) et (BC), (PQ2) et (CA), (PQ3) et (AB).

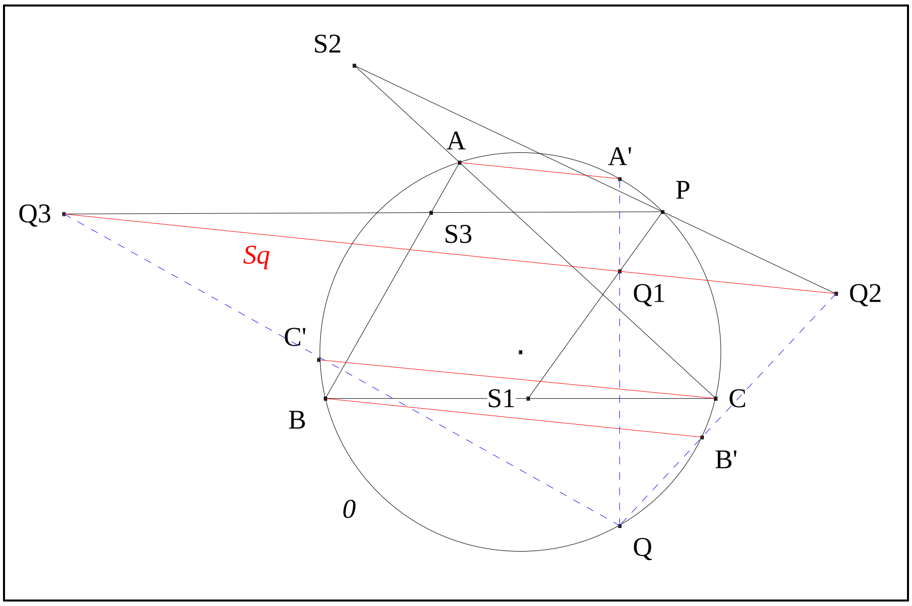
Donné : S1, S2 et S3 sont alignés[1].

VISUALISATION



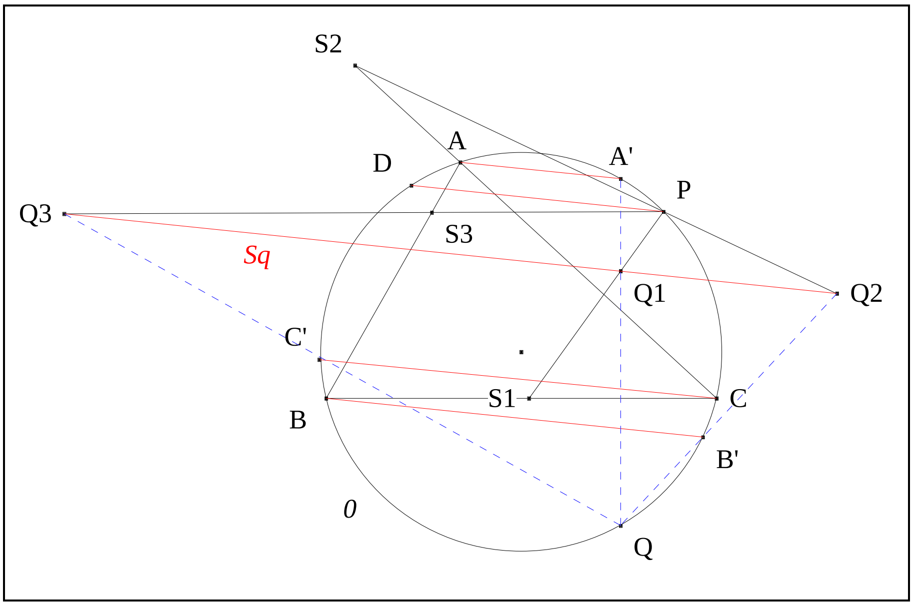
- D'après "La droite de Steiner" (Cf. Annexe 1), (Q1Q2Q3) est la droite de Steiner de pôle Q relativement à ABC.

- Notons *S*q cette droite.

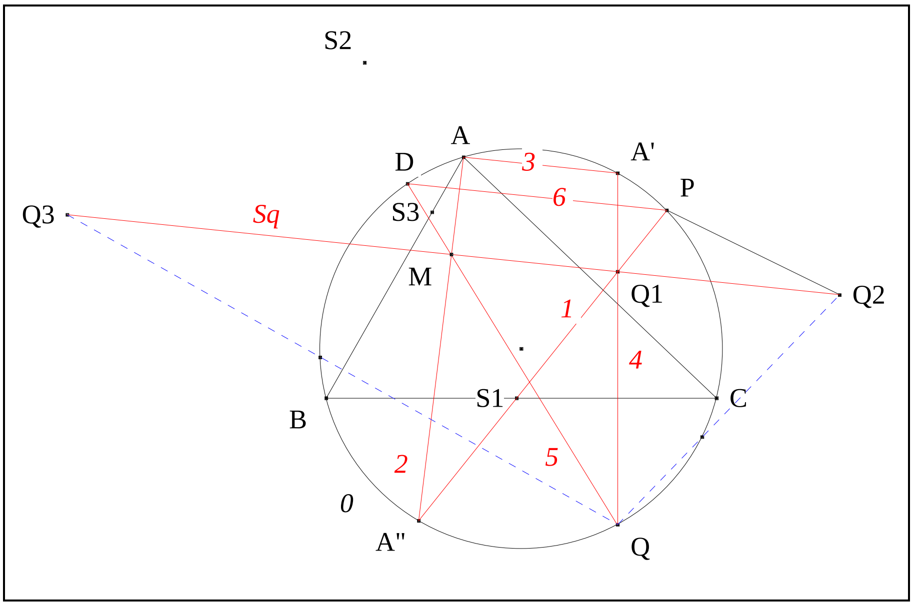


[1] Seimiya T. (1926).

- Notons A', B', C' les seconds points d'intersection de (QQ1), (QQ2), (QQ3) avec *1*.
- **Scolie :** les droites de Steiner et de Simson de pôle Q relativement à ABC, sont parallèles.
- D'après Heinen "Direction d'une droite de Simson" (Cf. Annexe 2), (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles à *S*q.

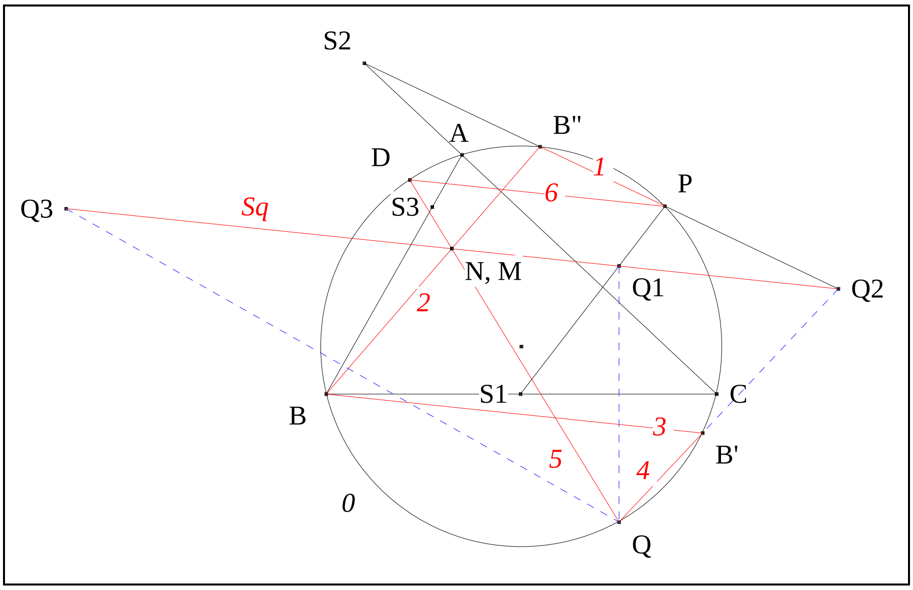


- Notons D le point de *1* tel que (PD) soit parallèle à (AA').



- Notons A" le second point d'intersection de (PQ1) avec *1*
  et M le point d'intersection de (QD) et (AA").

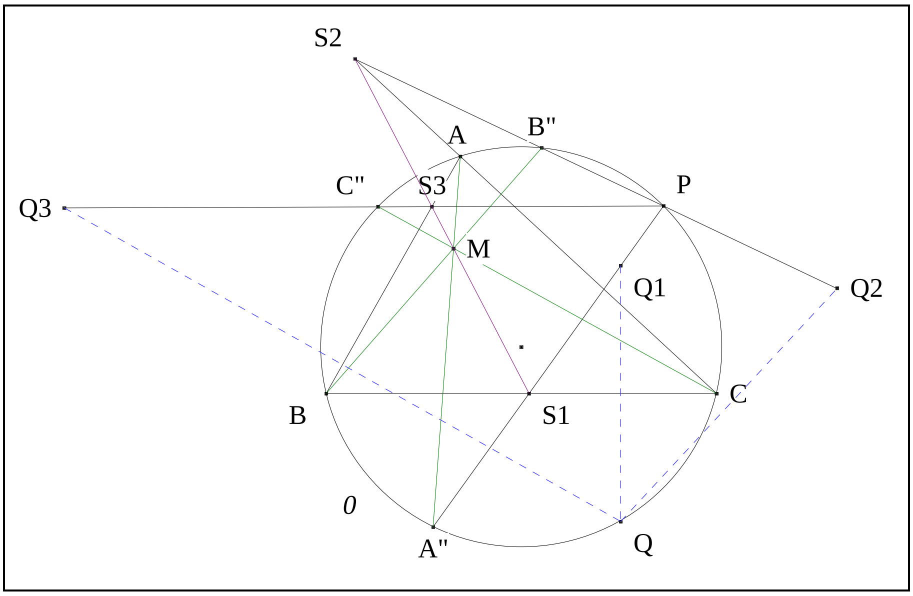
- D'après "L'équivalence d'Aubert-Mackensie" (Cf. Annexe 3),
  la pascale (Q1M) de l'hexagone cyclique PA"AA'QDP est parallèle à *S*q ;
  d'après le postulat d'Euclide, (Q1M) = *S*q ;
  en conséquence, M est sur *S*q.



- Notons B" le second point d'intersection de (PQ2) avec *1*
  et N le point d'intersection de (QD) et (BB").

- Mutatis mutandis, nous montrerions que N est sur *Sq* ;
  en conséquence, M et N sont confondus.

- **Conclusion partielle :** (BB") passe par M.



- Notons C" le second point d'intersection de (PQ3) avec *1*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CC") passe par M.

- **Conclusion :** d'après "L'équivalence d'Aubert-Neuberg " (Cf. Annexe 3)
  appliquée à la P-transversale de M sur notre figure, S1, S2 et S3 sont alignés.

Scolie : suite aux articles de Toshiyuki Kinoshita[2],
(S1S2S3) est "la droite de Seimiya de P et Q relativement à ABC".

---

2 Kinoshita T., On the Tarner lines and Seimiya lines, *Journal* Shoto Sugaku vol. 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45 (1999-2002).

Commentaire : l'introduction du point D, nous a permis de trouver une preuve synthétique, peut être la première car je n'en ai pas rencontrée dans la littérature.

Note historique : c'est Atul Dixit[3] qui, le premier, a interrogé le groupe *Hyacinthos* sur la définition d'une droite de Seimiya. Une réponse en a été donnée par Kotera Hiroshi[4] ainsi qu'une solution basée sur le théorème de Ménélaüs par Darij Grinberg[5].
Rappelons qu'une série d'articles auxquels je n'ai pas eu accès, ont été publié entre 1999 et 2002 sur ce sujet par Kinoshita Toshiyuki[6].
Une preuve de nature non connue et non accessible, signalée par Alexey Zaslavsky[7], a été trouvée par Arsenij Akopjan. Une preuve de François Rideau[8] basée sur les concepts de puissance, d'involution, de birapport et aboutissant au théorème de Ménélaüs a été présentée en 2008.

2. TOSHIO SEIMIYA

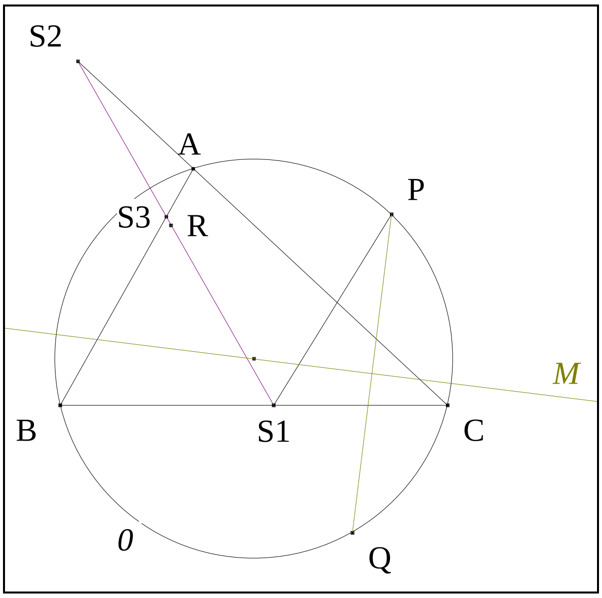
Toshio Seimiya est né le 30 mars 1910 à Tokyo (Japon).
A l'âge de quatorze ans, il apprend le théorème de Pythagore et en découvre de nouvelles preuves. En 1931, il entre à l'université impériale de Tokyo, en sort en 1934 pour commencer à enseigner les mathématiques à l'Académie militaire qu'il quitte en 1945. Quatre années plus tard, il rejoint l'université Gakugei de Tokyo, où il y enseignera jusqu'à sa retraite en 1973.
Il est connu pour avoir écrit de nombreux articles dans *Shoto Sugaku* et *Crux Mathematicorum*. Aujourd'hui encore, il propose et résout de nombreux exercices de géométrie.
Actuellement, il vit à Kawasaki (Japon).

3. UN RÉSULTAT DE L'AUTEUR

VISION

Figure :

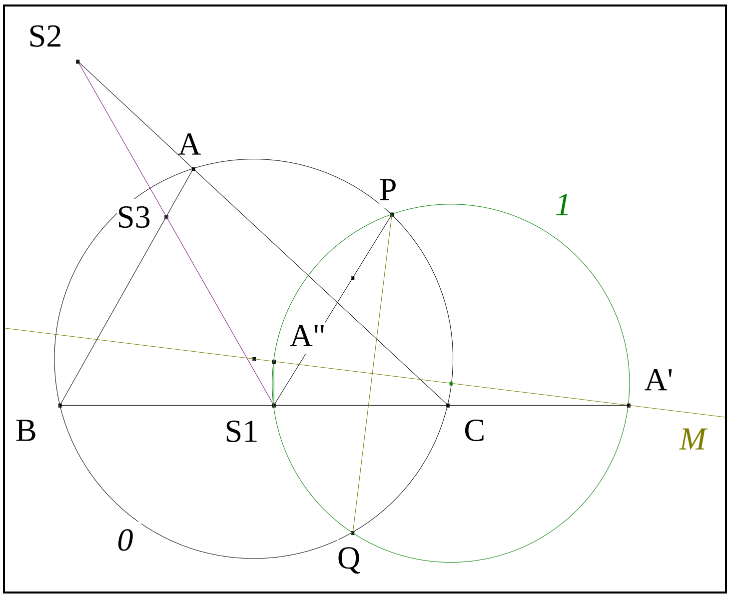
[3] Dixit A., Turner and Seimiya Lines, Message *Hyacinthos* # 5772 du 06/07/2002.
[4] Hirosho K., Turner and Seimiya Lines, Message *Hyacinthos* # 5774 du 07/07/2002.
[5] Grinberg D., More on projected reflections, Message *Hyacinthos* # 7696 du 27/08/2003.
[6] Kinoshita Toshiyuki, On the Turner lines and Seimiya lines , *Shoto Sugaku* vol. 39 (mai 2000).
[7] Zaslavsky A., Intersection on a circle, Message *Hyacinthos* # 16138 du 20/02/2008.
[8] Rideau F, Intersection on a circle, Message *Hyacinthos* # 16151 du 25/02/2008.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
Q, P deux points de *1*,
(S1S2S3) la droite de Seimiya de P et Q,
M la médiatrice de [PQ]
et R l'orthopôle de *M* relativement à ABC. (Cf. Annexe 4)

Donné : R est sur (S1S2S3) [9].

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle passant par P, Q, S1
  et A' le second point d'intersection de (BC) avec *1*.

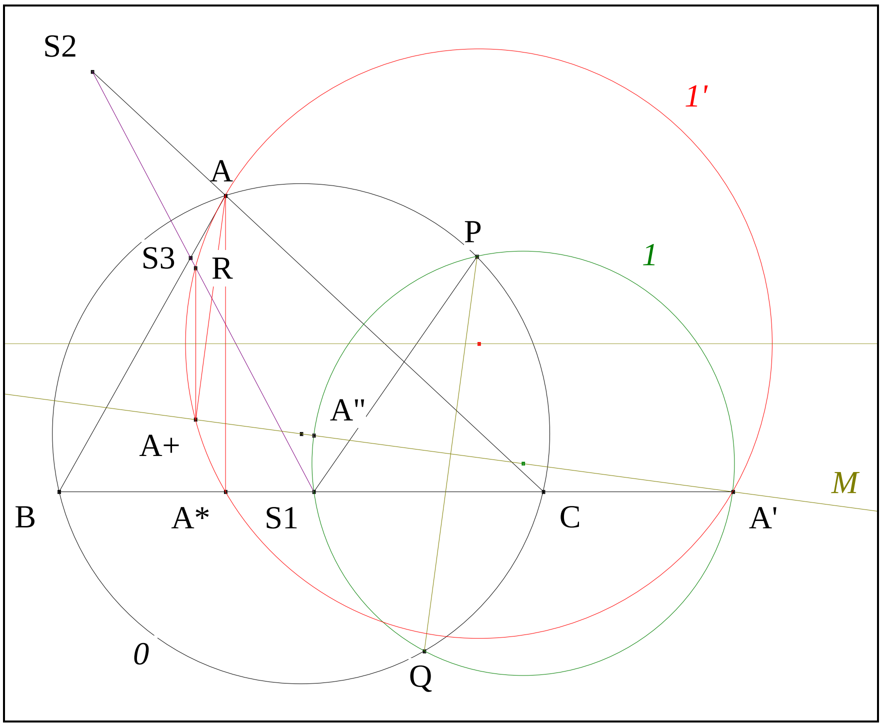
- Par construction de S1, A' est le second S1-perpoint du triangle S1PQ.

[9] Ayme Jean-Louis, Orthopôle, *Mathlinks* (05/02/2008) ; orthopôle on the Seimiya's line, message *Hyacinthos* # 16142 du 20/02/2008.

- **Conclusion partielle :** *M* passe par A'.

- Notons A" le second point d'intersection de *M* avec *1*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A"S1) ⊥ (BC).



- Notons A* le pied de la A-hauteur de ABC,
  A+ le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur *M*
  et *1'* le cercle de diamètre [AA'] ; il passe par A+ et A*.

- **Scolies :** **(1)** *M* est un diamètre de *0*
  (2) les projections des sommets d'un triangle sur *M*,
  sont les symétriques de l'orthopôle R par rapport aux côtés du triangle médian[10]
  (Cf. Annexe 5)
  (3) R est sur le cercle d'Euler de ABC.

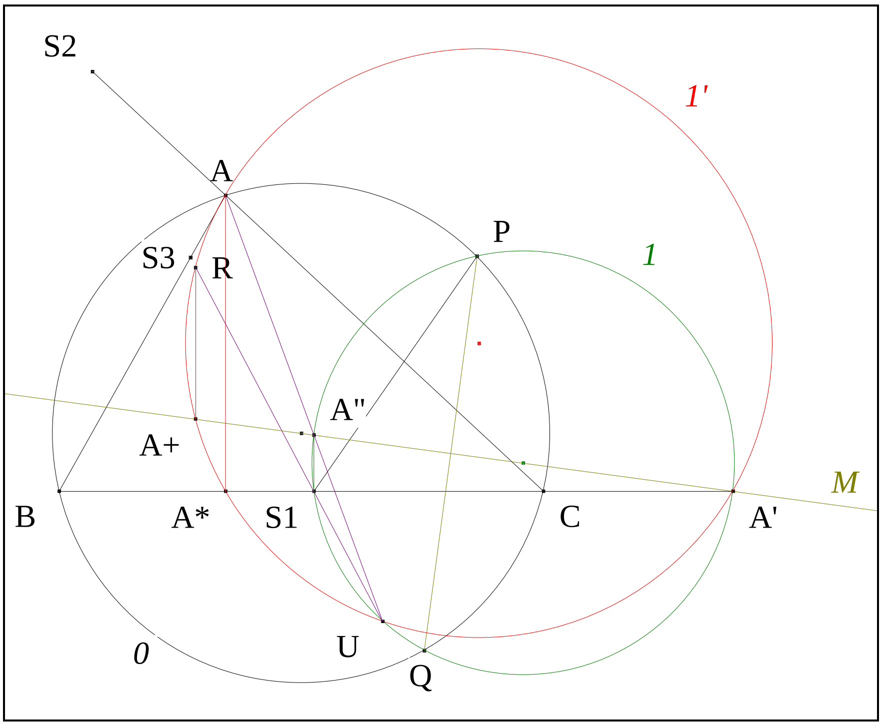
- La médiatrice de [AA*]
  étant un côté du triangle médian de ABC et passant par le centre de *1'*, R est sur *1'*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (BC) ⊥ (A+R).

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A"S1) // (A+R).

---

[10] Lalesco T., *La Géométrie du Triangle*, Bucharest (1916) Rééditions Jacques Gabay, Paris (1987), n° 2.29 p. 13.



- Notons U le second point d'intersection de *1* et *1'*.

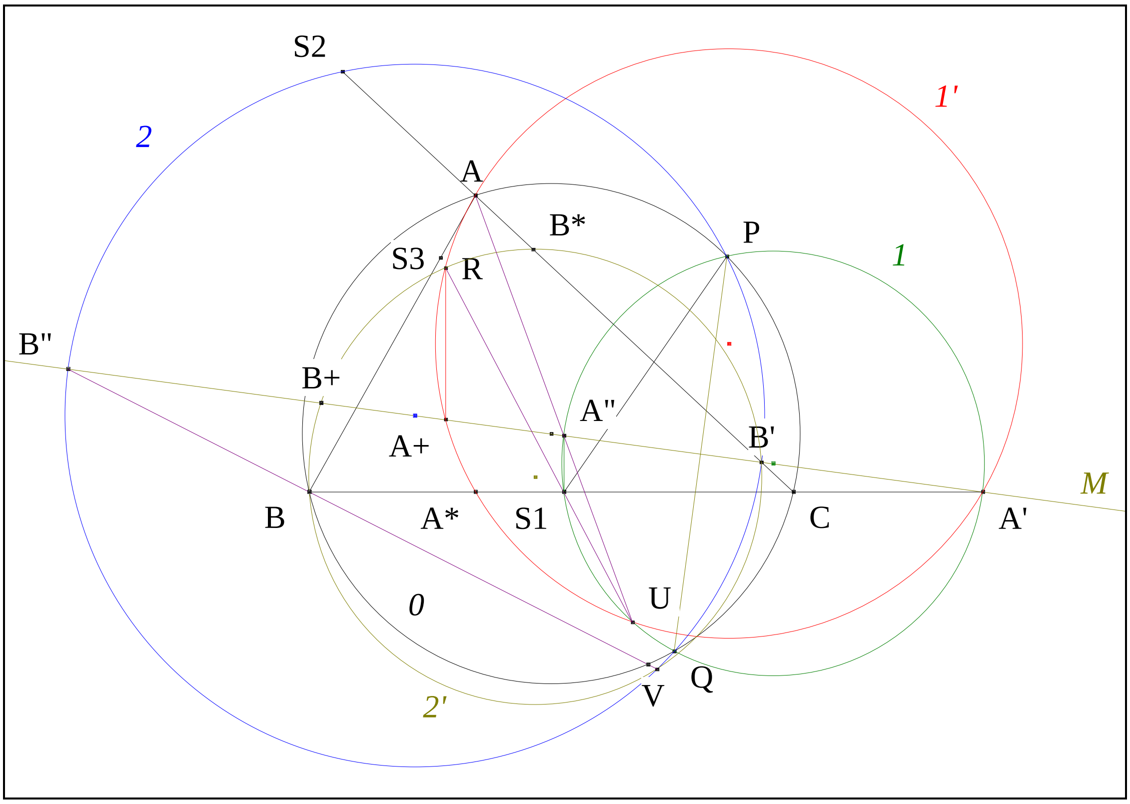
- Les cercles *1* et *1'*, les points de base A' et U, la monienne (A"A'A+), les parallèles (A"S1) et (A+R), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, S1, U et R sont alignés.

- Les cercles *1* et *1'*, les points de base A' et U, la monienne (S1A'A*), les parallèles (S1A") et (A*A), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, A", U et A sont alignés.

- **Conclusion partielle :** (AA") et (RS1) concourent en U.[11]

- **Scolie :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (AA"U) $\perp$ (A'U).

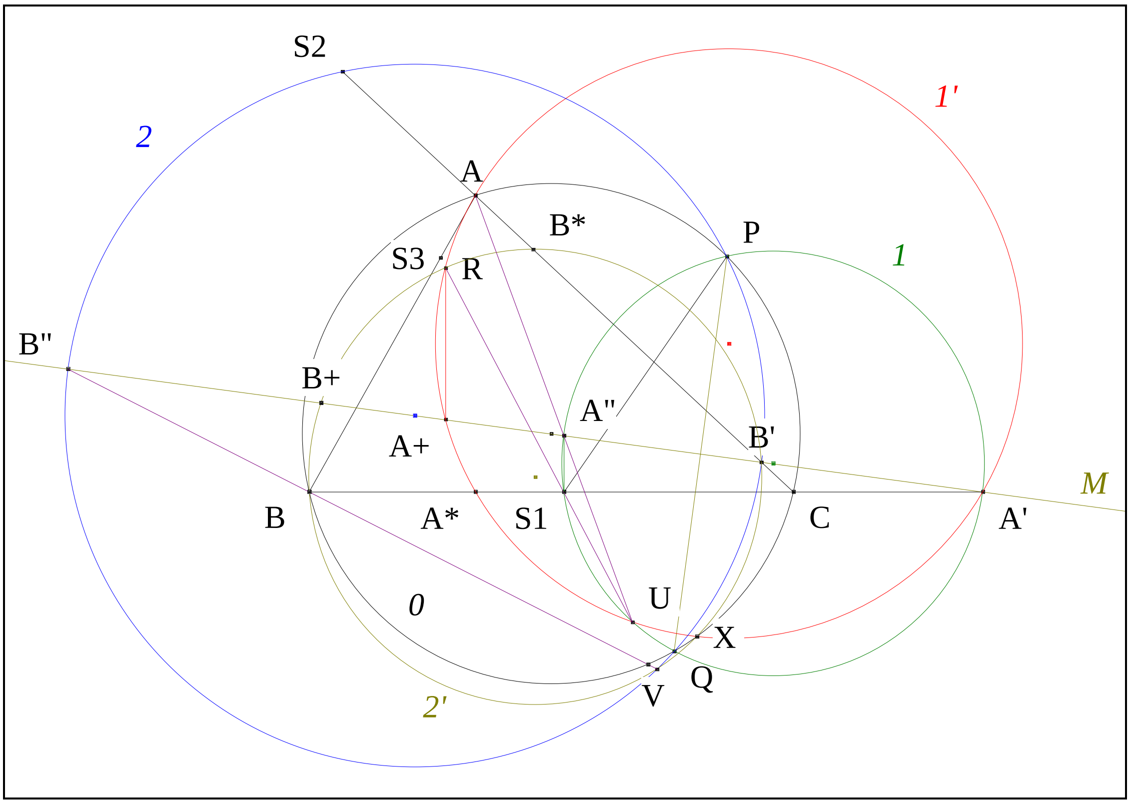
[11] Ayme J.-L., Intersection on a circle, *Mathlinks* (05/02/2008) ; Concurrency on a cercle, Message *Hyacinthos* # 16130 du 19/02/2008.



- Notons

	2	le cercle passant par P, Q, S2,
	B'	le second point d'intersection de (CA) avec *2*,
	B*	le pied de la B-hauteur de ABC,
	B+	le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur *M*,
	2'	le cercle de diamètre [BB'] ; il passe par B+ et B* ;
et	V	le second point d'intersection de *2* et *2'*.

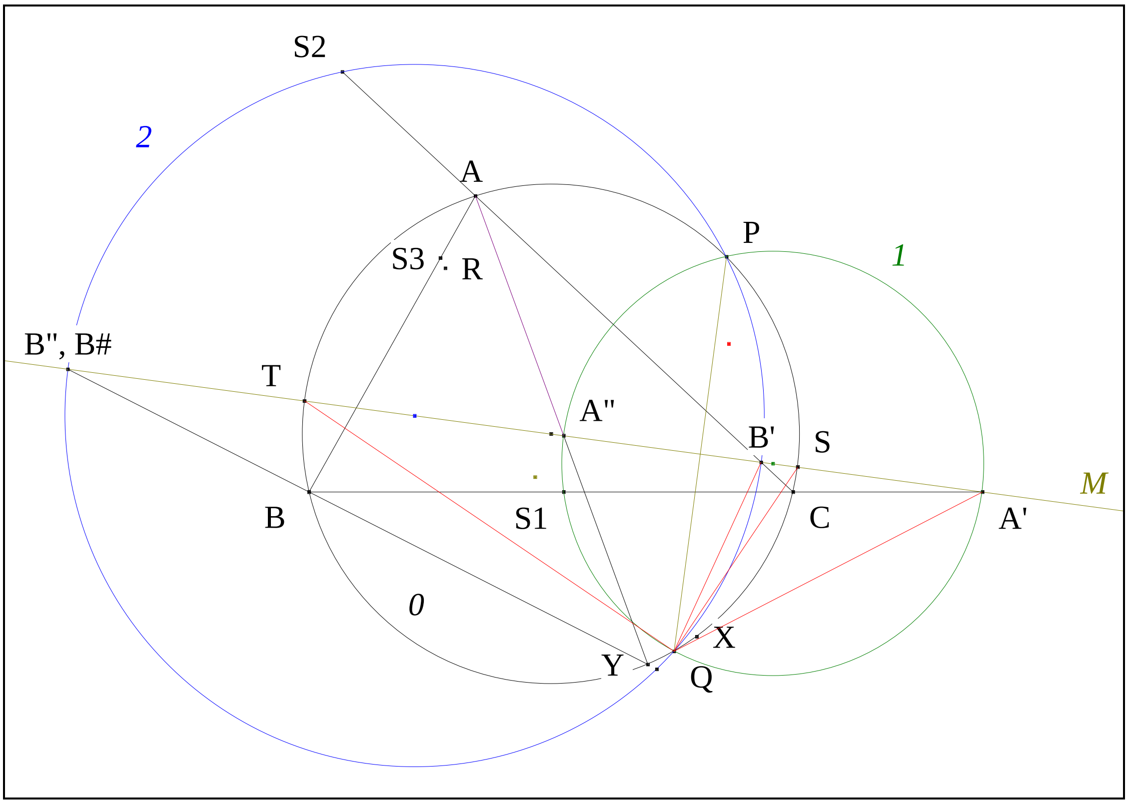
- **Conclusion partielle :** mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** R est sur *1'*
  (2) (BB") et (RS2) concourent en V.



- **Scolie :** *1'* et *2'* concourent sur le cercle d'Euler de ABC en R.

- **Conclusion partielle :** d'après Thébault "Intersection sur les cercles d'Euler et circonscrit" (Cf. Annexe 6), *1'* et *2'* concourent sur *0*.

- Notons X ce point de concours.



- Notons S, T les points d'intersection de *0* avec *M*
  et B# le second point d'intersection de (YB) avec *2*.

- Considérons la quaterne anharmonique (A', B', S, T) ;
  puis, les pinceaux anharmoniques, (Q ; A', B', S, T) et (Q ; A", B", T, S).

- Par perpendicularité, (Q ; A", B", T, S) = (Q ; A', B', S, T).

- Notons Y le second point d'intersection de (AA") avec *0*.

- Par changement d'origine : (Y ; A", B", T, S) = (C ; A', B', S, T).

- En considérant le cercle *0*, (C ; A', B', S, T) = (C ; B, A, S, T)

- Par changement d'origine : (C ; B, A, S, T) = (Y ; B, A, S, T).

- Considérons *M* : (Y ; B, A, S, T) = (Y ; B#, A", S, T).

- Par permutation simultanée du premier avec le deuxième point, du troisième avec le quatrième,
  (Y ; B#, A", S, T) = (Y ; A", B#, T, S) ;
  par transitivité de la relation =, (Y ; A", B", T, S) = (Y ; A", B#, T, S) ;
  en conséquence, B" et B# sont confondus.

- **Conclusion partielle :** (AA") et (BB") concourent sur *0*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB") et (CC") concourent sur *0*.

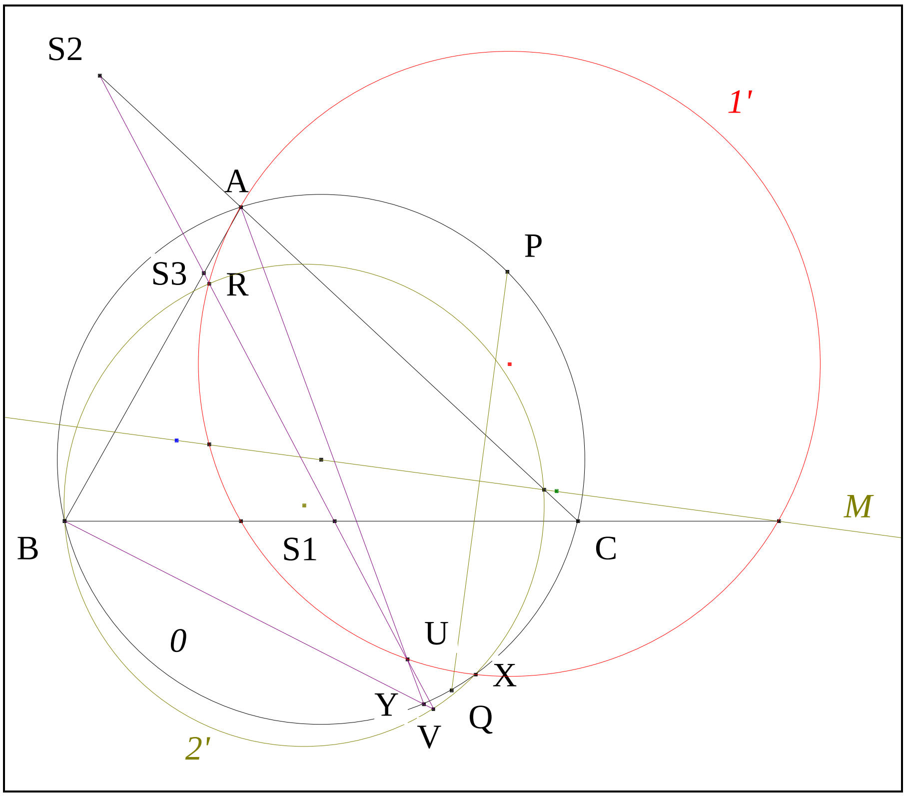
- **Conclusion :** (AA"), (BB") et (CC") concourent sur *0*.[12]

Note historique : la preuve précédente s'inspire de celle proposée par le physicien Vladimir Zajic du Brookhaven National Laboratory (États-unis), plus connu sous le pseudonyme Yetti dans le site *Mathlinks*. La présentation précédente est plus proche de celle communiquée après rédaction, par Alexey Zaslavsky[13].

---

[12] Ayme J.-L., Concurrency on a circle, message *Hyacinthos* # 16149 du 25/02/2008.

[13] Zsalavsky A., Concurrency on a circle, message *Hyacinthos* # 16157 du 27/02/2008.

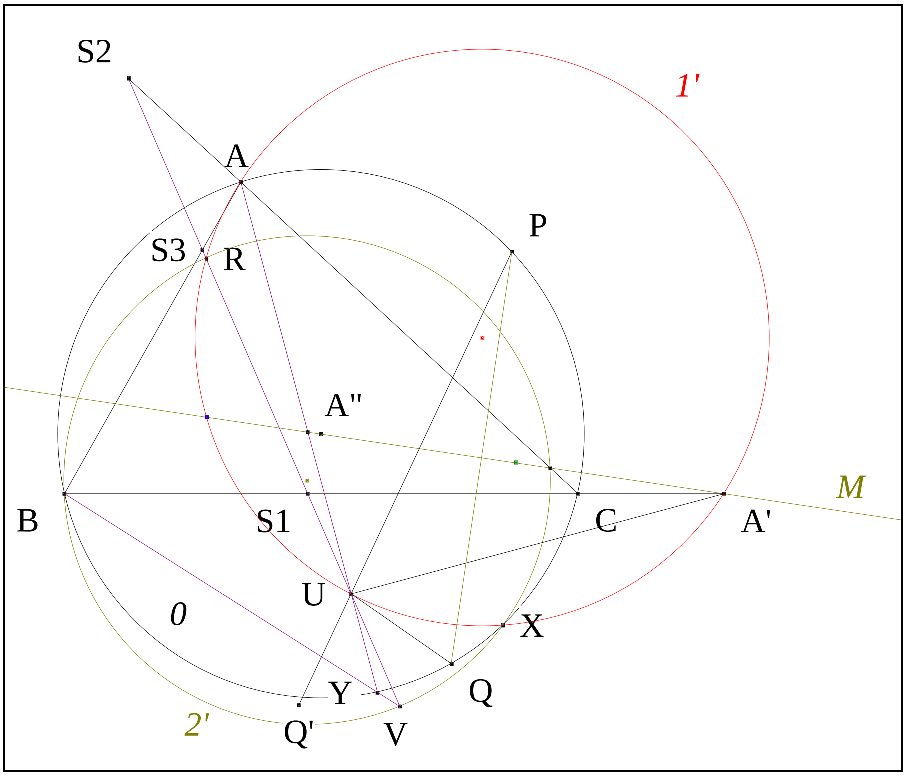


- D'après le théorème des trois cercles (Cf. Annexe 7) appliqué à *0*, *1'* et *2'*, R, U et V sont alignés.

- D'après l'axiome d'incidence Ia, **(1)** R, S1, U et V sont alignés
  (2) R, S1, S2, S3, U et V sont alignés.

- **Conclusion :** R est sur (S1S2S3).

Scolies : **(1)** deux triangles "coseimiyans"



- Notons Q' le symétrique de Q par rapport à (AA"UY).
- (UA') et (UA"A) sont les bissectrice de <QUP ;
  en conséquence, Q', U et P sont alignés.
- **Conclusion :** d'après I., (S3UV) est la droite de Seimiya de P et Q relativement au triangle ABY.

(2) Nous dirons que ABC et ABY sont coseimiyans".

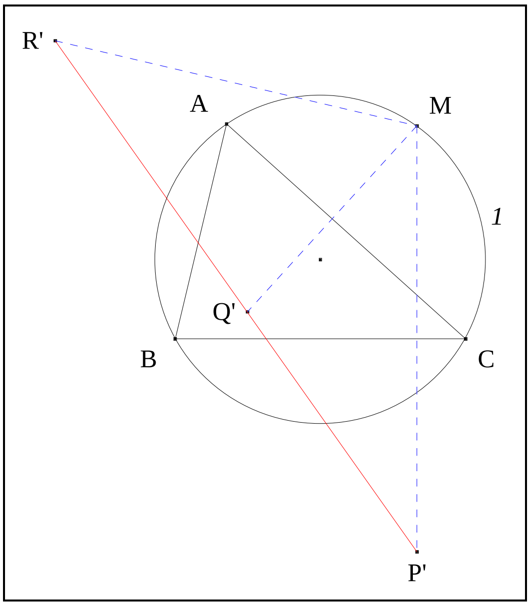
(3) Les triangles ABC, ABY, BCY et ACY sont coseimiyans".

4. ANNEXE

1. La droite de Steiner[14]

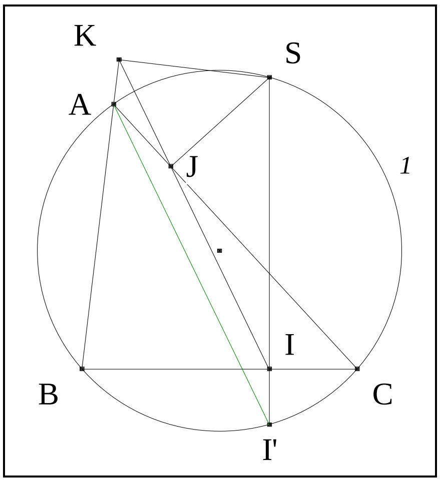
---

[14] Steiner J..



Traits :	ABC	un triangle acutangle,	
	1	le cercle circonscrit à ABC,	
	M	un point,	
et	P', Q', R'	les symétriques de M par rapport à (BC), (CA), (AB).	
Donné :	M est sur *1*	*si, et seulement si,*	les points P', Q' et R' sont alignés.

2. Direction d'une droite de Simson[15]

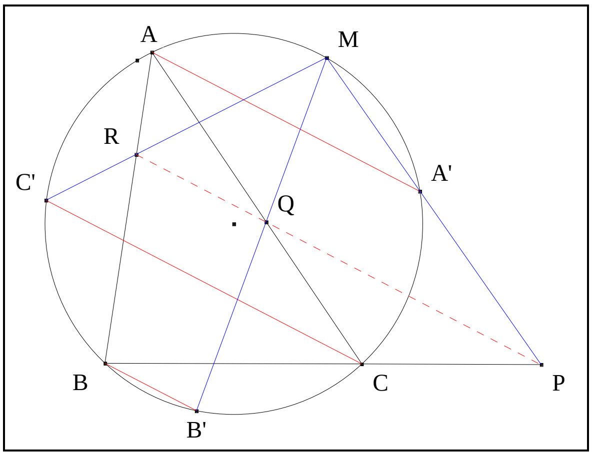


Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle circonscrit à ABC,
	S	un point de *1*,
	I, J, K	les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB)
et	I'	le second point d'intersection de la droite (SI) avec *1*.

Donné : (AI') et (IJK) sont parallèles.

3. L'équivalence d'Aubert-MacKensie[16]

[15] Heinen, *Journal de Crelle* 3 (1828) 285-287.
[16] Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. volume 3.

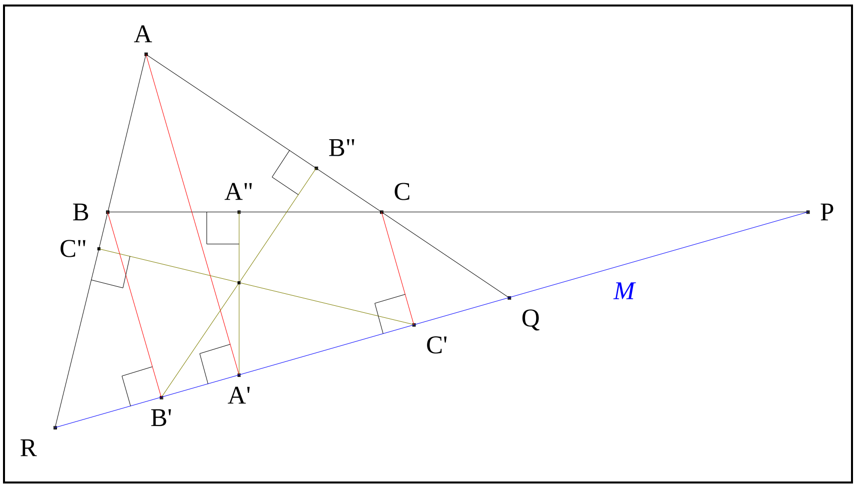


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A', B', C' trois points de *0* tels que (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles entre elles,
M un point,
et P, Q, R les point d'intersection de (MA') et (BC), (MB') et (CA), (MC') et (AB).

Donné : M est sur *0* *si, et seulement si*, (PQR) est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA').

Scolie : la visualisation nécessaire est de Paul Aubert[17] et suffisante de M'Kensie[18].

4. Orthopôle d'une ménélienne relativement à un triangle[19]

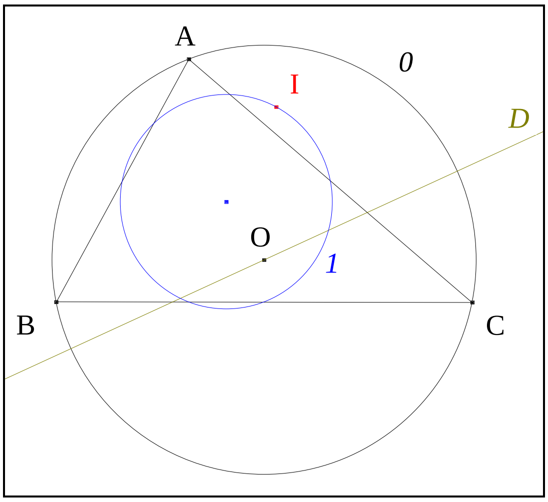


Traits : ABC un triangle,
M une ménélienne de ABC,
P, Q, R les points d'intersection de *D* resp. avec (BC), (CA), (AB),
A', B', C' les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A, B, C sur *M*
et A", B", C" les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A' sur (BC), de B' sur (CA), de C' sur (AB).

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

5. Orthopôle d'un diamètre relativement à un triangle[20]

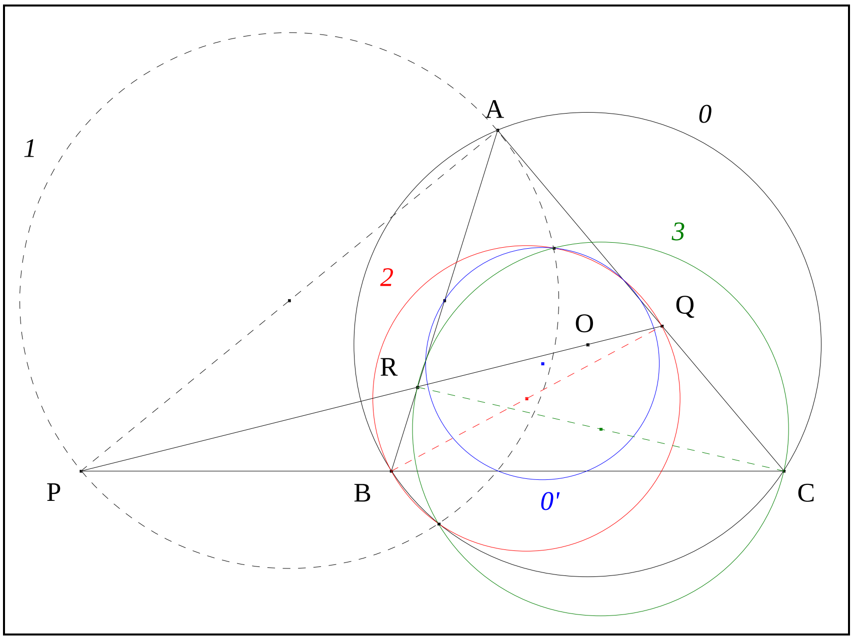
17 Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899).
18 M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201.
19 Goormaghtigh, Question 2388, *Nouvelles Annales de mathématiques*, Série **4**, 19 (1919) 39.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
D une droite diamétrale de *0*,
I l'orthopôle de *D* relativement à ABC
et *1* le cercle d'Euler de ABC.

Donné : I est sur *1*.

6. Intersection sur les cercles d'Euler et circonscrit[21]



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
*M*o une ménélienne de ABC, passant par O,
P, Q, R les points d'intersection de *M*o resp. avec (BC), (CA), (AB),
0' le cercle d'Euler de ABC

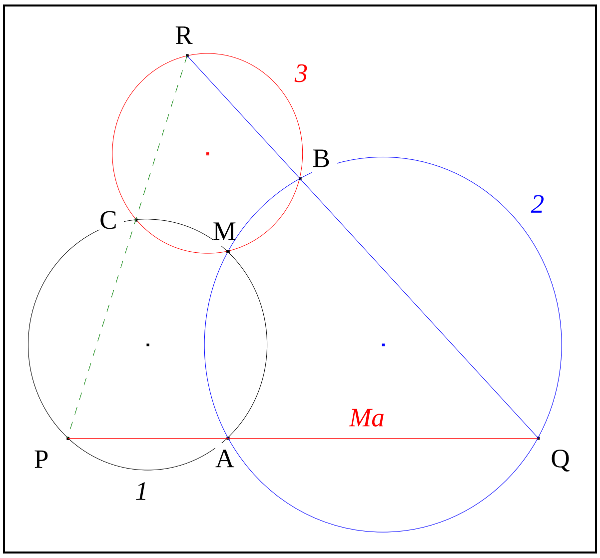
---

20 Soons M., Théorème de Géométrie, *Mathesis* **6** (1896) 57-59.
21 Thébault V., Sur quelques théorèmes de géométrie élémentaire, *Nouvelles Annales*, Séries 4, vol. 10, (1910) 271-281.

et *1*, *2*, *3* les cercles de diamètre resp. [AP], [BQ], [CR].

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants sur *0* et *0'*.

7. Le théorème des trois cercles



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles concourants,
M le point de concours de *1*, *2*, *3*,
A le second point d'intersection de *1* et *2*,
*M*a une A-monienne de *1* et *2*,
P, Q les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*,
B, C les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1*
et R un point de *3*.

Donné : (QBR) est une monienne de *2* et *3*
si, et seulement si,
(PCR) est une C-monienne de *1* et *3*.

Commentaire : ce résultat est une réciproque du pivot de Miquel[22].
Il reste vrai dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

[22] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.