DER MITTENPUNKT or THE MIDDELSPOINT

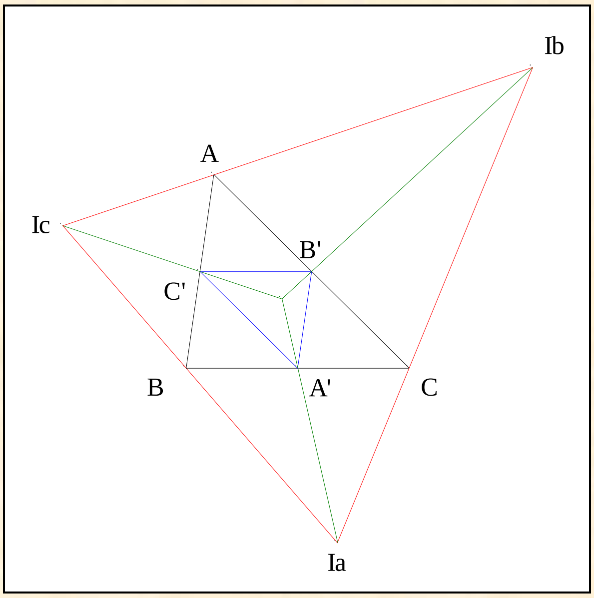
DE

CHRISTIAN HEINRICH von NAGEL

1836

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons des preuves purement synthétiques concernant le Mittenpunkt et des variantes autour de ce point. Deux relâchements de contraintes sont proposés ainsi qu'un appendice dû au géomètre et architecte grec Kosta Vittas qui permet de démontrer un remarquable alignement.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. We present purely synthetic proofs concerning the Mittenpunkt and variants around this point. Two releases of constraints are proposed. An appendix of the Greek geometer and architect Kosta Vittas is also present which allows proving a remarkable colinearity.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/09/2012.

Commentaire : le triangle P-cévien A'B'C' n'étant plus le triangle orthique de ABC,
nous allons nous baser sur le fait que ABC est le triangle orthique de IaIbIc.
En conséquence, nous allons envisager le triangle P-anticévien de IaIbIc.

Sommaire

A. UNE BRÈVE BIOGRAPHIE

DE

CHRISTIAN HEINRICH von NAGEL


[2]

Christian Heinrich Nagel [3] est né à Stuttgart (Bade-Wurtemberg, Allemagne), le 28 février 1803.
Fils d'un maître couturier, Christian Nagel, sous les conseils de son grand-père maternel, entre en 1817 au Gymnasium où ses professeurs découvrent un élève doué. Par manque d'argent, il entre en 1821 au séminaire de Blaubeuren et commence ses études de théologie à Tübingen durant quatre années i.e. jusqu'en 1825 date à laquelle il devient prêtre. Durant cette période, il a aussi suivi les cours de mathématiques et de physique donnés par Johann Gottlieb von Bohnenberger et par Friedrich Joseph Pythagoras Riecke Riecke à la même université.
En décembre 1826, il enseigne les mathématiques et la biologie au Gymnasium et à la Real-Schule de Tübingen tout en continuant des études de mathématiques à l'Université de cette ville. En 1830, il passe son doctorat et accepte en 1830 un poste d'enseignant au Gymnasium d'Ulm.
En 1833, il publie *Lehrbuch der ebenen Geometrie* qui sera réédité 15 fois et traduit en italien et hongrois. Ce livre s'inspire de celui écrit par le géomètre hollandais Jan Hendrik van Swinden traduit en allemand par Carl Ulrich Gaab.
En 1844, il devient directeur de la Real-Schule d'Ulm.
A côté de son travail, il trouve le temps de publier six articles et d'écrire en 1836, un livre intitulé *Le développement de la géométrie moderne du triangle* dans lequel il introduit la transformation désormais classique, l'homothétie de centre G et de rapport -2 qui retiendra toute l'attention de Maurice d'Ocagne et de Gaston Gohierre de Longchamps. [4]
En 1875, il est anoblit et prend sa retraite.
Il décède le 27 octobre 1882 à Ulm (Bade-Wurtemberg, Allemagne).

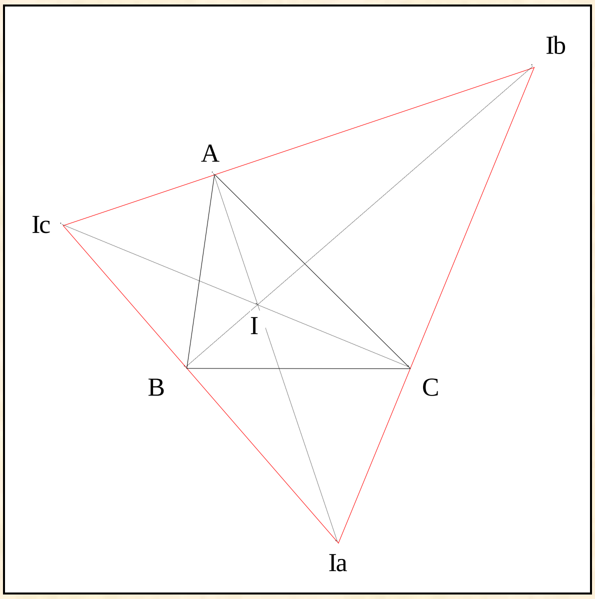
[2] Peinture à l'huile de Johannes Friedel (1847), Musée d'Ulm (Westphalie, Allemagne)
[3] Ne pas confondre ce géomètre du XIX-ème siècle avec le logicien du XX-ème siècle, Ernest Nagel
[4] Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992) 72

B. DER MITTENPUNKT

1. Le triangle excentral ou I-anticévien

VISION

Figure :



Finition :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC
et	Ia, Ib, Ic	les A, B, C-excentres de ABC.

Définition : IaIbIc est "le triangle excentral de ABC" ou "I-anticévien de ABC".

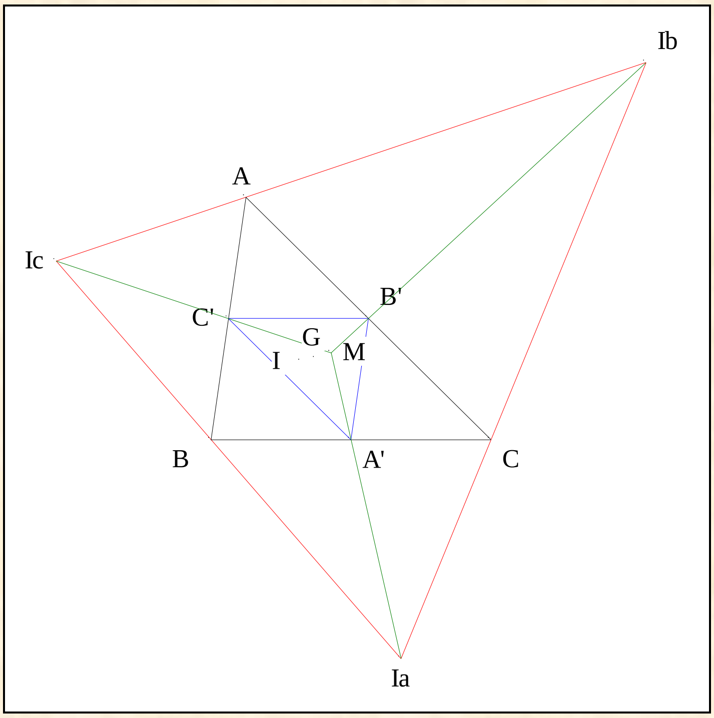
Scolie : ABC est "le triangle orthique de IaIbIc" ou "I-antipédal de ABC".

Commentaire : nous utiliserons le point de vue des "triangles" et non pas des "rayons" comme C. H. von Nagel.

2. Les triangles I-anticévien et G-cévien : der Mittenpunckt M

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	G	le point médian de ABC,
	A'B'C'	le triangle G-cévien (ou médian) de ABC
	I	le centre de ABC
et	IaIbIc	le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC.

Donné : IaIbIc et A'B'C' sont perspectifs. [5]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [6]

Scolies :

(1) le centre de cette perspective, noté M, est "le Mittenpunkt de ABC" ou encore "the middlespoint of ABC" comme l'a traduit en anglais R. H. Eddy [7]

(2) Pour mieux comprendre cette dénomination, rappelons que M est construit à partir du concept de *milosité* i.e. centres de cercles et milieux de segments

(3) (IaA'), (IbB'), (IcC') concourent en M

(4) M est répertorié sous X_9 chez ETC [8]

(5) M est le point de Lemoine de IaIbIc [9].

Note historique : nous trouvons une preuve de l'existence de ce point et d'une solution synthétique dans l'un des six articles quelque peu inaccessibles aujourd'hui, publiés par Christian Heinrich von Nagel comme le témoigne en 1990, R. H. Eddy [10]

---

5 Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836)

6 AymeJ.-L., Cinq théorème de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 14-16 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

7 Eddy R. H., A generalization of Nagel's middlespoint, *Elemente der Mathematik* **45**, **1** (1990) 14-18 ;
A Desarguesian dual for Nagel's Middlespoint, *Elemente der Mathematik* **44**, **3** (1989) 79-80

8 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

9 Gallatly W., The Modern Geometry of the Triangle, 2nd Ed. Francis Hogson, London circa 1920

10 Eddy R. H., A generalization of Nagel's middlespoint, *Elemente der Mathematik* **45** (1990) 14-18 ;
http://www.digizeitschriften.de/en/dms/img/?PPN=PPN378850199_0045&DMDID=dmdlog6

dans le résumé de son article

In an 1836 paper, C. H. von Nagel [11] *defines the Mittenpunkt of a given triangle*

et dans l'introduction

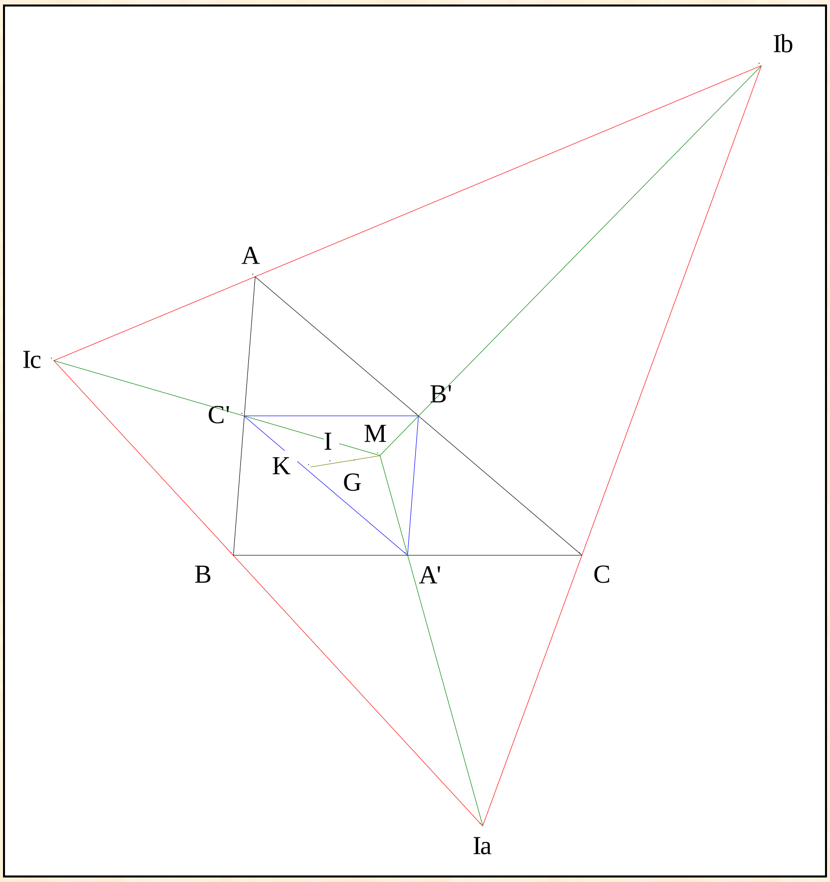
In what seems to be a little-known and somewhat inaccessible paper, C. H. von Nagel defines the middlespoint (Mittenpunkt) of...[12]

Ce résultat, sera redécouvert par Karl Feuerbach et démontré synthétiquement par Joseph Neuberg [13].

3. La droite de H.H. van Aubel ou l'alignement M-K-I

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
G	le point médian de ABC,
A'B'C'	le triangle G-cévien (ou médian) de ABC,
K	l'isogonal de G relativement à ABC,
I	le centre de ABC,
IaIbIc	le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC

[11] Nagel (von) C. H., Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehörigen Kreise, Leipzig (1836)
[12] Par les milosités.
[13] Neuberg J., *Nouvelle correspondance* **1** (1874)

et M le Mittenpunkt de ABC.

Donné : M, K et I sont alignés. [14]

Énoncé traditionnel :

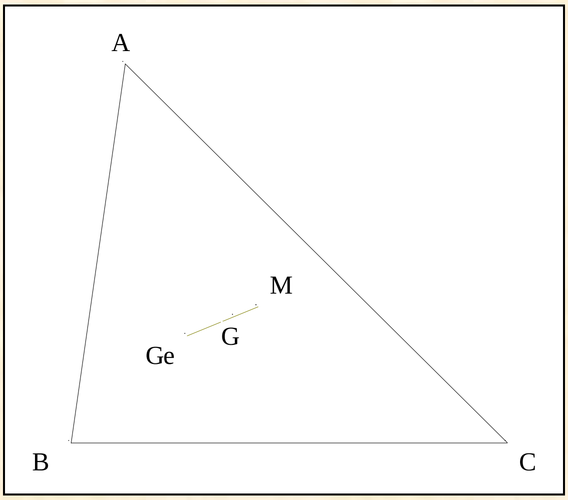
I étant le centre d'un triangle
l'isogonal du point médian G de ce triangle
est alignés avec
les centres de perspective du I-triangle anticévien resp. avec ce triangle et de son triangle G-cévien.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [15]
L'énoncé précédent a été choisi dans la logique des résultats suivants.

4. L'alignement M-G-Ge

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
G le point médian de ABC,
Ge le point de Gergonne de ABC
et M le Mittenpunkt de ABC.

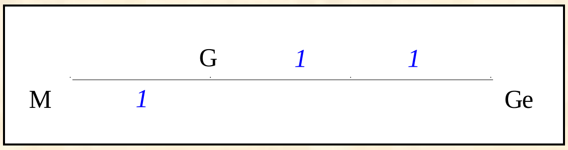
Donné : M, G et Ge sont alignés.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [16]

Scolies : **(1)** la disposition

---

14 van Aubel H. H..
15 Ayme J.-L., La droite de H. H. van Aubel, G.G.G. vol. **12**, p. 20-24 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
16 AymeJ.-L., Cinq théorème de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 18-21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Énoncé traditionnel :

le point médian d'un triangle
partage
le segment déterminé par
le Mittenpunkt et lepoint de Gergonne d'un triangle,
dans le rapport 1: 2.

Note historique : Peter Baptist [17] signale que ce résultat a été trouvé par C. H. von Nagel.

(2) M est le point complémentaire de Ge
ou encore
Ge est le point anticomplémentaire de M de ABC

(3) Le Mittenpunkt est le point de Gergonne du triangle médian

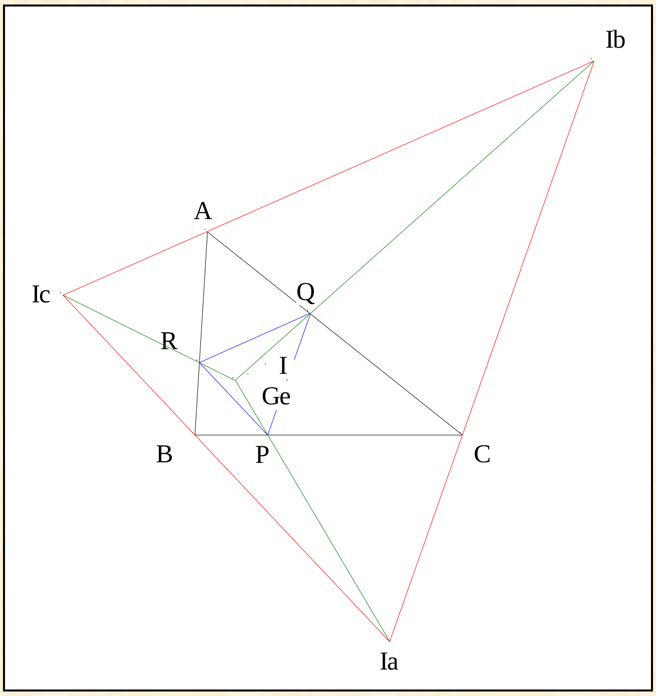
C. VARIANTES AUTOUR DER MITTENPUNKT

1. Les triangles I-anticévien et Ge-cévien : le point M*

VISION

Figure :

[17] Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992)

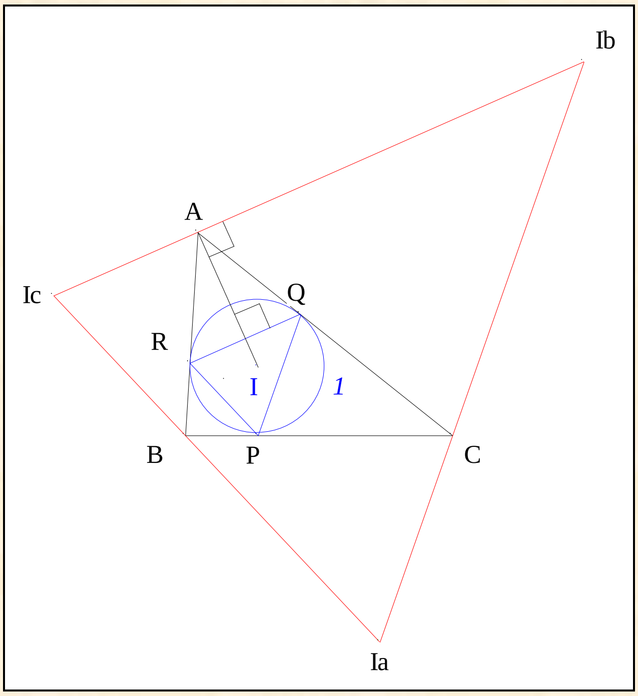


Traits : ABC un triangle,
Ge le point de Gergonne de ABC,
PQR le triangle Ge-cévien (ou de contact) de ABC,
I le centre de ABC,
et IaIbIc le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC.

Donné : IaIbIc et PQR sont perspectifs.[18]

VISUALISATION

[18] Döttl J., *Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks* (1886) n° **1** ;
Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1272**, *Crux Mathematicorum* vol. **13**, **1** (January 1987) 256

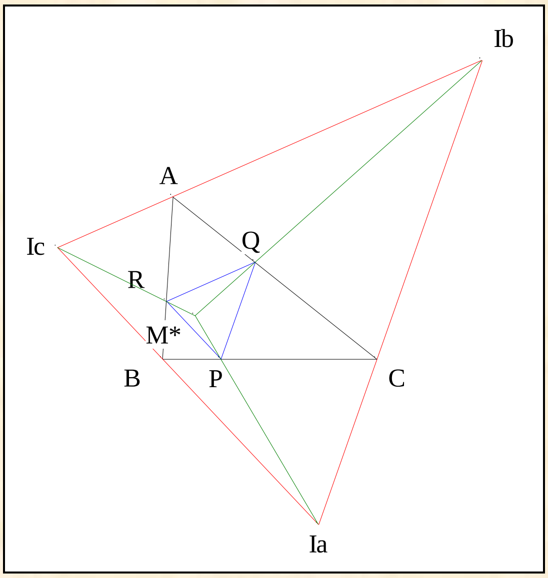


- Notons 1 le cercle inscrit de ABC.

- **Scolie :** (AI) est la A-bissectrice de ABC.

- D'après Euclide "Tangentes égales", nous avons : AQ = AR ; IQ = IR ;
  d'après le théorème de la médiatrice, (QR) ⊥ (AI) ;
  par définition du triangle excentral, (AI) ⊥ (IbAIc) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (QR) // (IbIc).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (RP) // (IcIa) et (PQ) // (IaIb).



- **Conclusion :** IaIbIc et PQR étant homothétiques, sont perspectifs.

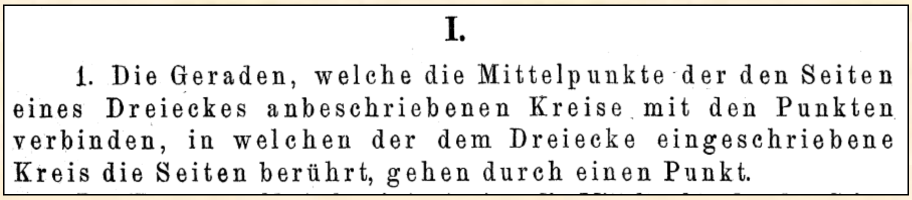
- Notons M* ce point de concours.

Scolies : **(1)** (IaP), (IbQ) et (IcR) sont concourantes

(2) M* est répertorié sous X_{57} chez ETC

(3) M* est le centre d'homothétie de IaIbIc et PQR

Archive :



I.

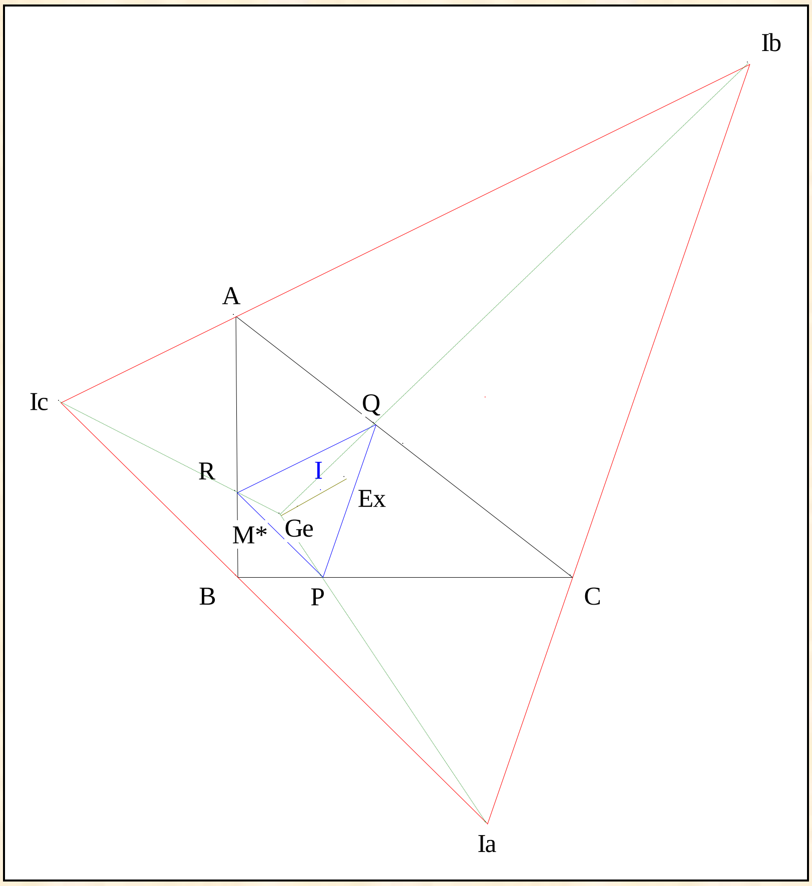
1. Die Geraden, welche die Mittelpunkte der den Seiten eines Dreieckes anbeschriebenen Kreise mit den Punkten verbinden, in welchen der dem Dreiecke eingeschriebene Kreis die Seiten berührt, gehen durch einen Punkt.

[19]

1. 1. L'alignement M*-Ex-I

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,

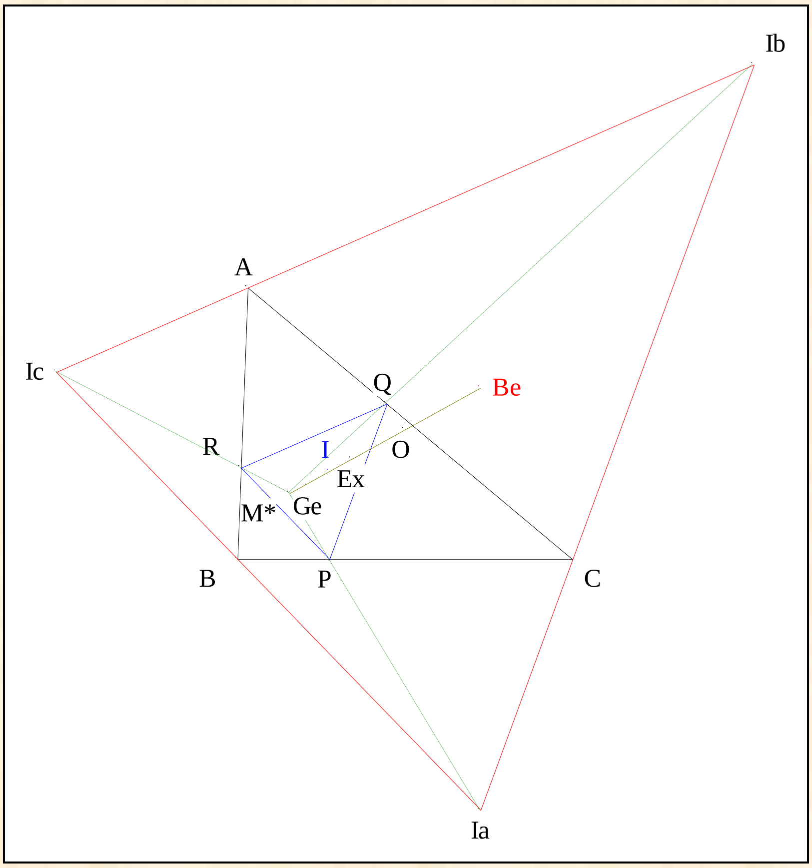
---

[19] Döttl J., *Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks* (1886) n° **1**

	Ge	le point de Gergonne de ABC,
	PQR	le triangle Ge-cévien (ou de contact) de ABC,
	Ex	le point d'Exeter (ou l'isogonal de Ge) de ABC, [20]
	I	le centre de *1*,
	IaIbIc	le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC,
et	M*	le centre d'homothétie de IaIbIc et PQR

Donné : M*, Ex et I sont alignés.

VISUALISATION



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC
  et Be le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.

- **Scolie :** Be est le point de Bevan [21] de ABC.

- **Conclusion partielle :** M* étant le centre d'homothétie de IaIbIc et PQR, Be, I et M* sont alignés.

- D'après "Cinq théorèmes de C. H. von Nagel" [22], O est le milieu de [BeI] ;
  d'après l'axiome d'incidence **Ia**, Be, O, I et M* sont alignés.

- Ex étant le centre interne d'homothétie
  entre les cercles circonscrits de ABC et IaIbIc, Ex est sur (OBe).

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, M*, Ex et I sont alignés.

---

[20] Ayme J.-L., Le point d'Exeter, G.G.G. vol. **12**, p. 7-9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[21] AymeJ.-L., Cinq théorème de C. H. von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 22-24 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[22] AymeJ.-L., Cinq théorème de C. H. von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 22-24 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Énoncé traditionnel :

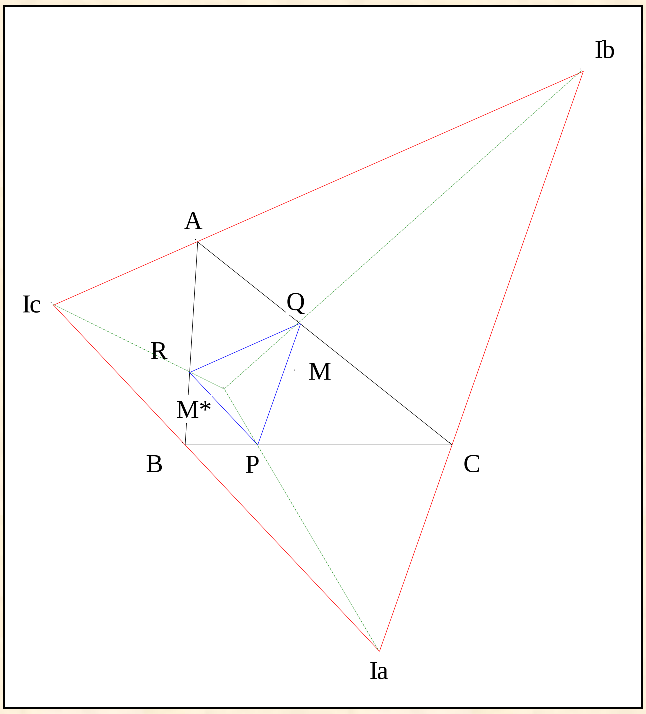
I *étant le centre d'un triangle*
l'isogonal du point de Gergonne Ge *de ce triangle*
est alignés avec
les centres de perspective du I-*triangle anticévien resp. avec ce triangle et de son triangle* Ge-*cévien.*

Commentaire : l'énoncé précédent a été choisi dans la logique des résultats suivants.

1. 2. Nature géométrique de M*

VISION

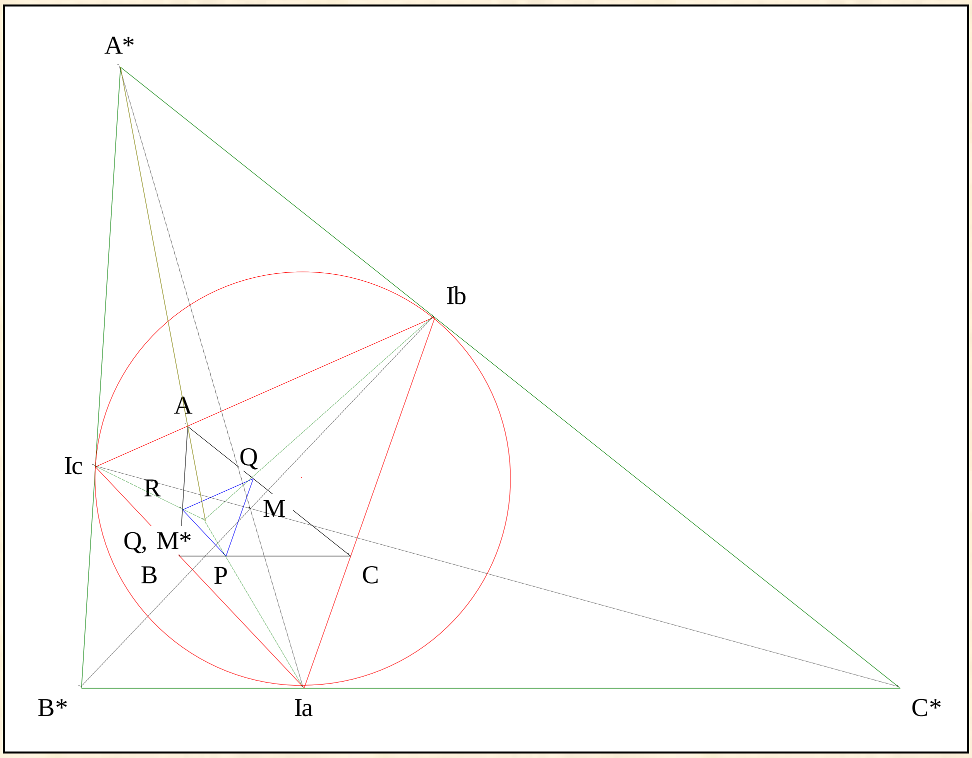
Figure :



Traits : ABC un triangle,
M le Mittenpunkt de ABC,
Ge le point de Gergonne de ABC,
PQR le triangle Ge-cévien (de contact) de ABC,
I le centre de ABC,
IaIbIc le triangle I-anticévien (excentral) de ABC
et M* le perspector (centre d'homothétie) de IaIbIc et PQR.

Donné : M* est l'isogonal de M relativement à ABC.

VISUALISATION



- D'après **D. 2.** Un reversement du point de vue,
  considérons pour P, le Mittenpunkt M de ABC i.e. le point de Lemoine de IaIbIc.

- Le triangle M-anticévien de IaIbIc est le triangle tangentiel de IaIbIc.

- Notons A*B*C* ce triangle tangentiel.

- D'après **D. 2.** Un reversement du point de vue, IaIbIc et ABC sont perspectifs.

- Notons Q le perspector (centre de perspective) de IaIbIc et ABC.

- D'après **D. 2.** Un reversement du point de vue**,** scolie **2**, Q est l'isogonal de M relativement à ABC.

- **Commentaire :** nous devons montrer que Q et M* sont confondus.

- **Scolie :** (AP) // (A*Ia) (Cf. **G.** Annexe **1**)

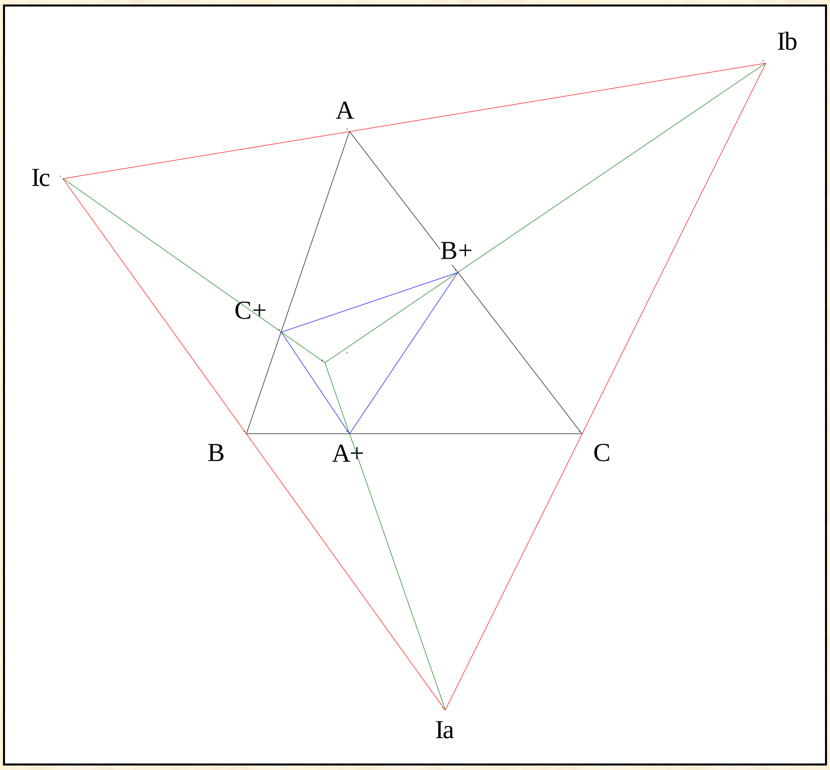
- Les triangles ARP et A*IcIa étant homothétiques, Q et M* sont confondus.

- **Conclusion :** M* est l'isogonal de M relativement à ABC.

2. Les triangles I-anticévien et H-cévien

VISION

Figure :

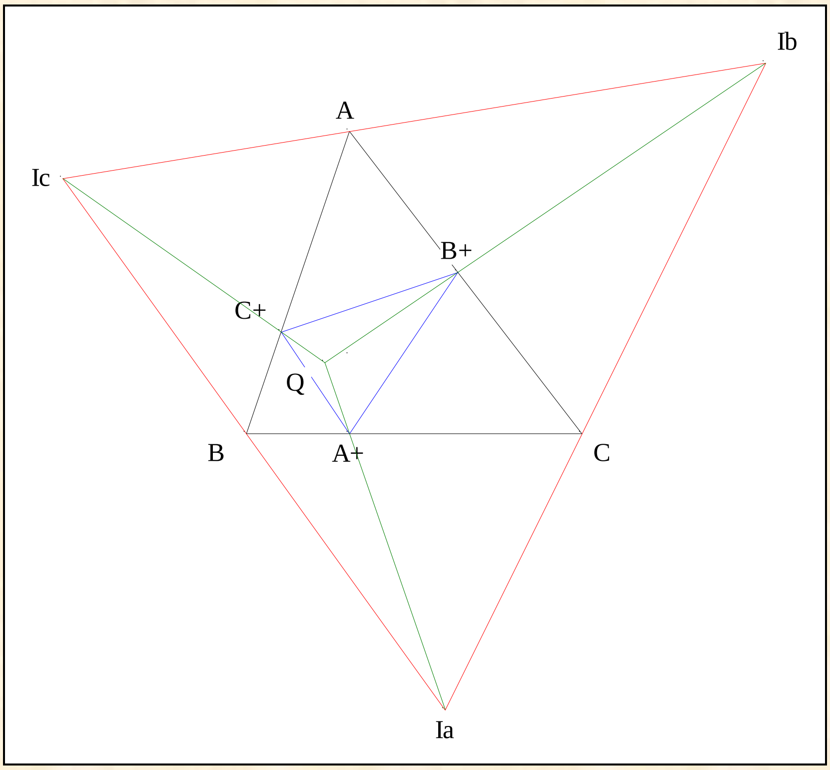


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC ,
	A+B+C+	le triangle H-cévien (ou orthique)de ABC,
	I	le centre de ABC,
et	IaIbIc	le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC.

Donné : IaIbIc et A+B+C+ sont perspectifs. [23]

VISUALISATION

[23] Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1295**, *Crux Mathematicorum* vol. **13**, **10** (December 1987) 321 ; Solution de Shiko Iwata (Gifu, Japan), *Crux Mathematicorum* vol. **15**, **1** (January 1989) 17-18



- Nous avons : A+B+C+ est inscrit dans ABC, ABC est inscrit dans IaIbIc ;
  A+B+C+ est en perspective avec ABC, ABC est en perspective avec IaIbIc.

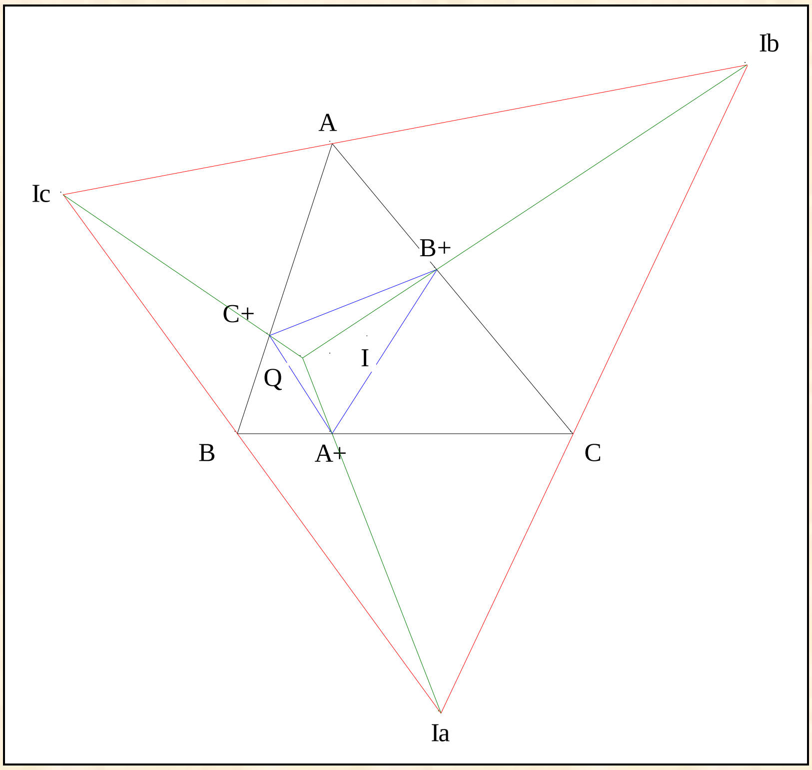
- **Conclusion :** d'après Döttl "The cevian nest theorem" [24], IaIbIc et A+B+C+ sont perspectifs.

- Notons Q le perspector (ou centre de perspective) de IaIbIc et A+B+C+.

Scolies : **(1)** (IaA+), (IbB+) et (IcC+) sont concourantes

(2) Nature de Q

[24] Ayme J.-L., The cevian nest theorem, vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



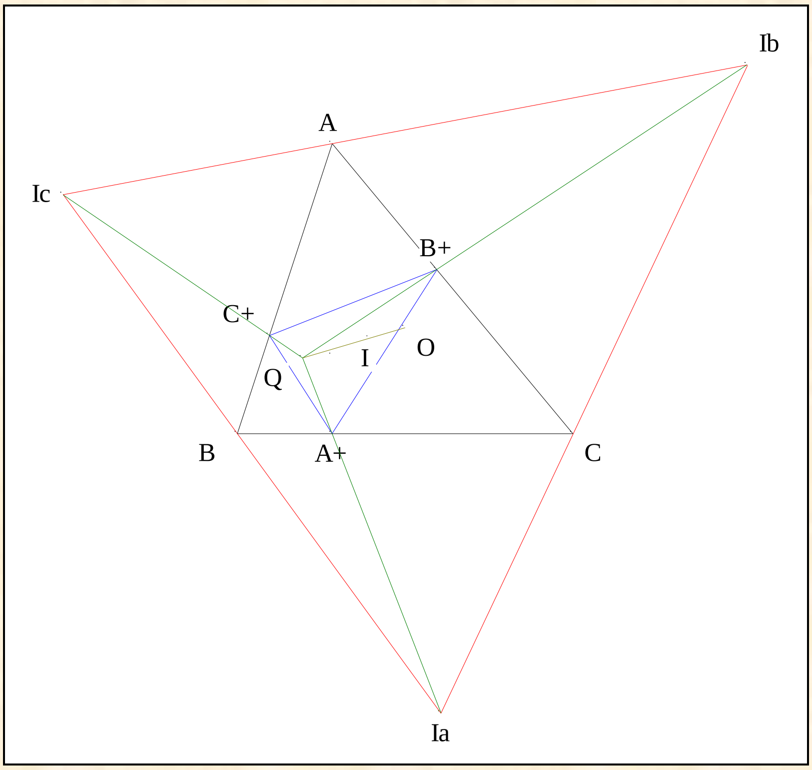
- Notons I le centre de ABC i.e. le centre de perspective de IaIbIc et ABC.

- **Conclusion :** IaIbIc étant le triangle I-anticévien de ABC,
  d'après **C. 3.** Les triangles P-anticévien et P-symétrico, scolie **2**,
  Q est l'isogonal de I relativement à A+B+C+.

2. 1. L'alignement Q-O-I

VISION

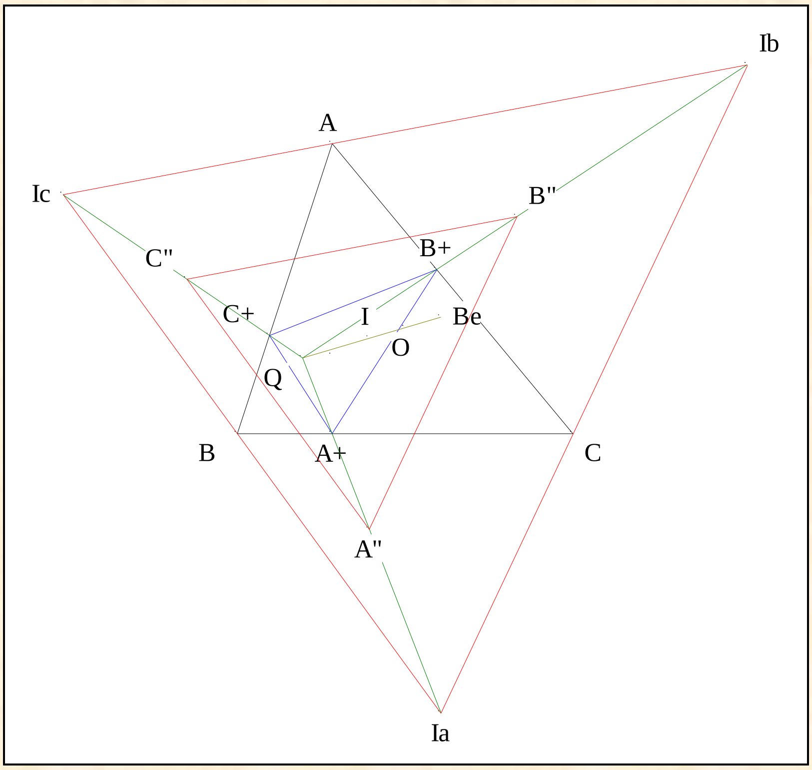
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC ,
	A+B+C+	le triangle H-cévien (ou orthique)de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit (ou l'isogonal de H) de ABC
	I	le centre de ABC,
	IaIbIc	le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC
et	Q	le perspector de IaIbIc et A+B+C+.

Donné : Q, O et I sont alignés.

VISUALISATION



- Notons A"B"C" le triangle I-symétrico de ABC
  et Be le point de Bevan de ABC i.e. le centre du cercle circonscrit à IaIbIc.

- D'après **C. 3.** Les triangles P-anticévien et P-symétrico, A" est sur (QA+Ia)
  B" est sur (QB+Ib)
  C" est sur (QC+Ic).

- I étant le centre du cercle circonscrit à A"B"C",
  A"B"C" étant homothétique à IaIbIc de centre de perspective Q, Q, Be et I sont alignés.

- D'après von Nagel "Le troisième théorème I-O-Be" [25], O est le milieu de [IBe].

- **Conclusion :** Q, O et I sont alignés.

Énoncé traditionnel :

I *étant le centre d'un triangle*
l'isogonal de l'orthocentre H *de ce triangle*
est alignés avec
les centres de perspective du I-*triangle anticévien resp. avec ce triangle et de son triangle* H-*cévien.*

Commentaire : l'énoncé précédent a été choisi dans la logique des résultats précédents.

Archive :

[25] Ayme j.-L., Cinq théorèmes de von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 21-25 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

– 321 –

<u>1295</u>. *Proposed by J.T. Groenman, Arnhem, The Netherlands.*

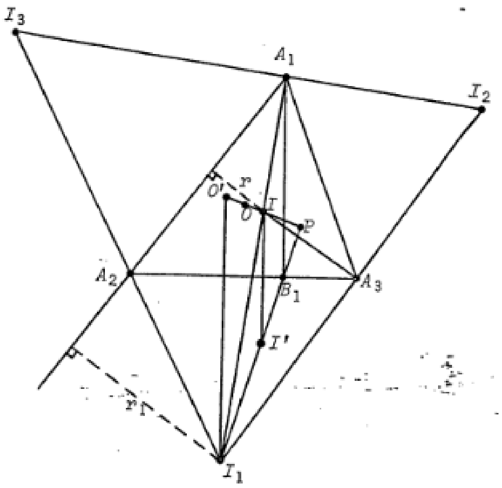
Let $A_1A_2A_3$ be a triangle with I_1, I_2, I_3 the excenters and B_1, B_2, B_3 the feet of the altitudes. Show that the lines I_1B_1, I_2B_2, I_3B_3 concur at a point collinear with the incenter and circumcenter of the triangle.

[26]

– 18 –

I. *Solution by Shiko Iwata, Gifu, Japan.*

(I,r), (O,R), and (O',R') are the centers and radii of the incircle and circumcircle of $\Delta A_1A_2A_3$ and the circumcircle of $\Delta I_1I_2I_3$, respectively. Then, since I is the orthocenter of $\Delta I_1I_2I_3$ and the circumcircle (O,R) of $\Delta A_1A_2A_3$ is the nine–point circle of $\Delta I_1I_2I_3$ ([1], page 197), O', O and I are collinear and $R' = 2R$. Also,



$$\begin{aligned}\angle O'I_1A_3 &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle I_1O'I_2\\ &= 90^\circ - \angle I_3\\ &= \angle A_2I_1I = \angle A_2A_3I\\ &= 90^\circ - \angle A_2A_3I_1,\end{aligned}$$

so $A_2A_3 \perp O'I_1$, i.e. $A_1B_1 \| O'I_1$. Let P be the meeting point of I_1B_1 and IO, and let I' be on PI_1 such that $II' \| O'I_1$. Then we have

$$PI{:}PO' = II'{:}O'I_1. \qquad (1)$$

On the other hand,

$$\frac{II'}{A_1B_1} = \frac{II_1}{A_1I_1} = \frac{r_1 - r}{r_1} = 1 - \frac{r}{r_1} = 1 - \frac{s - a_1}{s} = \frac{a_1}{s}$$

where s is the semiperimeter of $\Delta A_1A_2A_3$, so that

$$II' = \frac{a_1 \cdot A_1B_1}{s} = \frac{2\Delta}{s} = 2r,$$

where Δ is the area of $\Delta A_1A_2A_3$. Thus from (1)

$$PI{:}PO' = 2r{:}R' = r{:}R.$$

It follows that P is independent of I_1, so lies on I_2B_2 and I_3B_3 too.

Reference:

[1] R.A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960.

[27]

[26] Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1295**, *Crux Mathematicorum* vol. **13**, **10** (December 1987) 321

[27] Solution du Problem **1295** par Shiko Iwata (Gifu, Japan), *Crux Mathematicorum* vol. **15**, **1** (January 1989) 17

C. DEUX GENERALISATIONS

I. RELACHEMENT DE LA CONTRAINTE

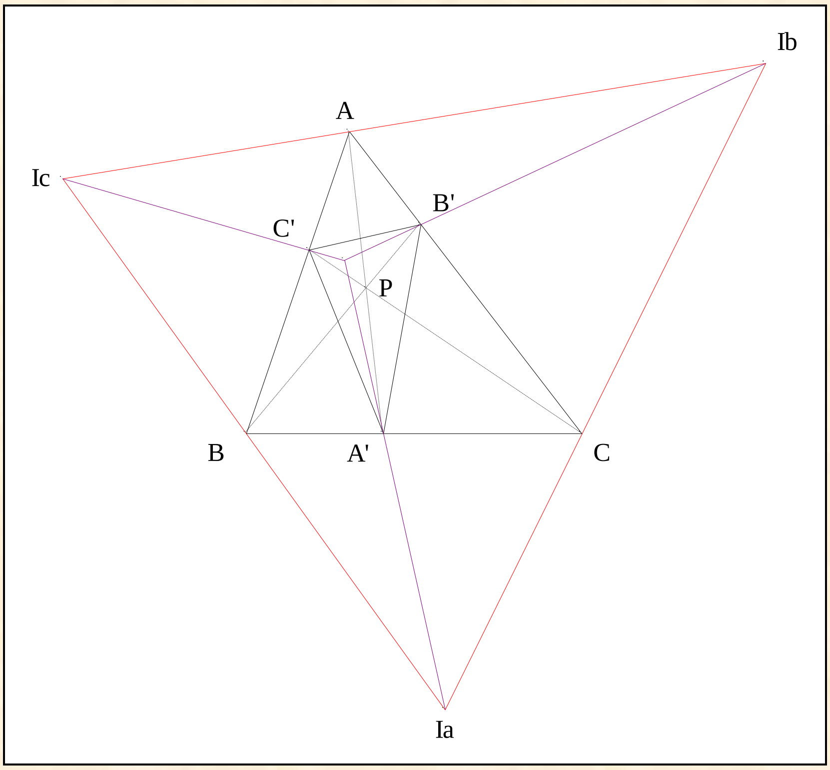
SUR

LE TRIANGLE CÉVIEN

1. Les triangles I-anticévien et P-cévien

VISION

Figure :



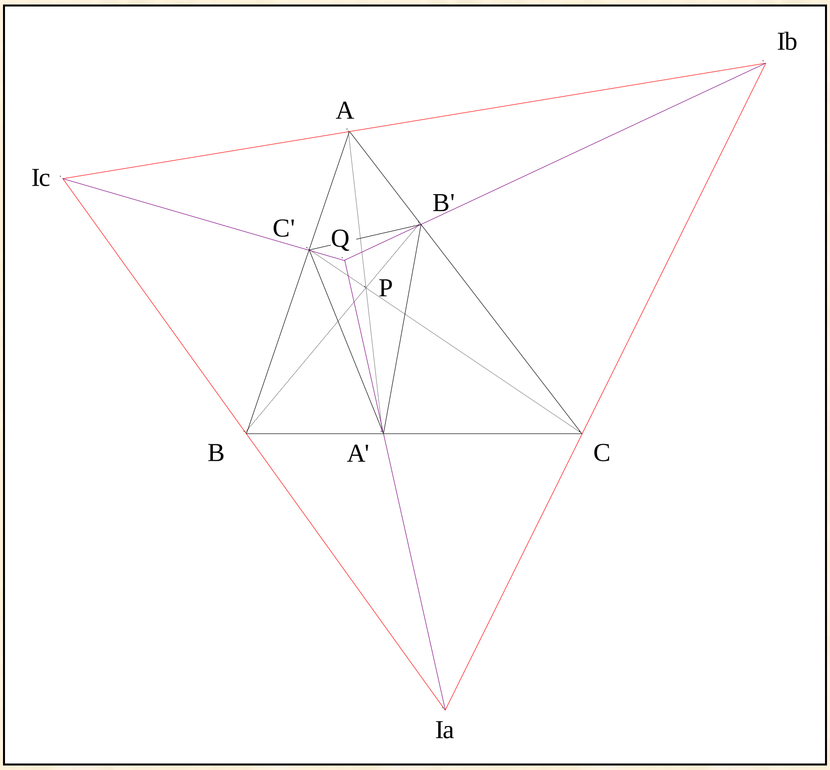
Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
I le centre de ABC,
et IaIbIc le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC.

Donné : IaIbIc et A'B'C' sont perspectifs. [28]

VISUALISATION

---

[28] Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1541**, *Crux Mathematicorum* vol. **16**, **5** (May 1990) 143 ;
Solution de Eddy R. H. (Memorial University of Newfoundland, Canada), *Crux Mathematicorum* vol. **17**, **6** (June 1991) 189



- Nous avons : A'B'C' est inscrit dans ABC, ABC est inscrit dans IaIbIc ;
  A'B'C' est en perspective avec ABC, ABC est en perspective avec IaIbIc.

- **Conclusion :** d'après Döttl "The cevian nest theorem" [29], IaIbIc et A'B'C' sont perspectifs.

- Notons Q ce point de concours.

Scolie : **(1)** (IaA'), (IbB') et (IcC') sont concourantes

(2) Q est le perspector (ou le centre de perspective) de IaIbIc et A'B'C'.

Commentaire : le théorème de Johann Döttl ne précise pas la nature géométrique de Q et nous ne pouvons en dire davantage car le triangle P-cévien A'B'C' n'étant plus le triangle orthique de ABC.

Note historique : R. H. Eddy constate que Jakob Tjakko Groenman vient d'approcher sa généralisation dans ce problème n° **1295**.

For Groenman's problem **1272**, P is the Gergonne point and Q is the incentre, while for **1295**, P is the orthocentre and Q is again the incentre. Also noted in [6] is the fact that the point in **1272** is the isogonal conjugate of the mittenpunkt. This problem was discovered at the proofreading stage of [6] and thus was able to be included.

It is interesting that Groenman seemed to be approaching the same generalization. In his solution to **1295** he has P in general position while Q is still the incentre. A related class of points referred to by Nagel as *interior mittenpunkts* (defined by replacing one of the excentres by the incentre and interchanging the other two) is also given in [9]. This class is also generalized in [6]. A dual notion for T, the *mittenlinie* (middleline), is given in [5].

[30]

[29] Ayme J.-L., The cevian nest theorem, vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[30] Eddy R. H., On an idea of Groenman, *Crux Mathematicorum* vol. **17**, **7** (September 1991) 193-195

II. RELACHEMENT DE LA CONTRAINTE

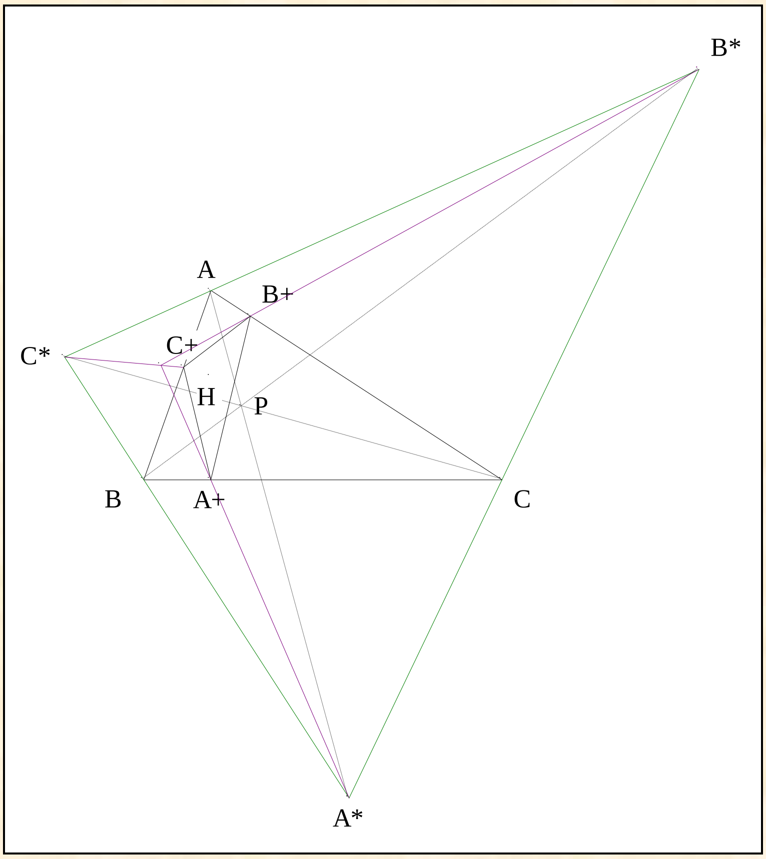
SUR

LE TRIANGLE ANTICÉVIEN

1. Les triangles P-anticévien et H-cévien

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A+B+C+	le triangle H-cévien (orthique) de ABC,
	P	un point
et	A*B*C*	le triangle P-anticévien [31] de ABC.

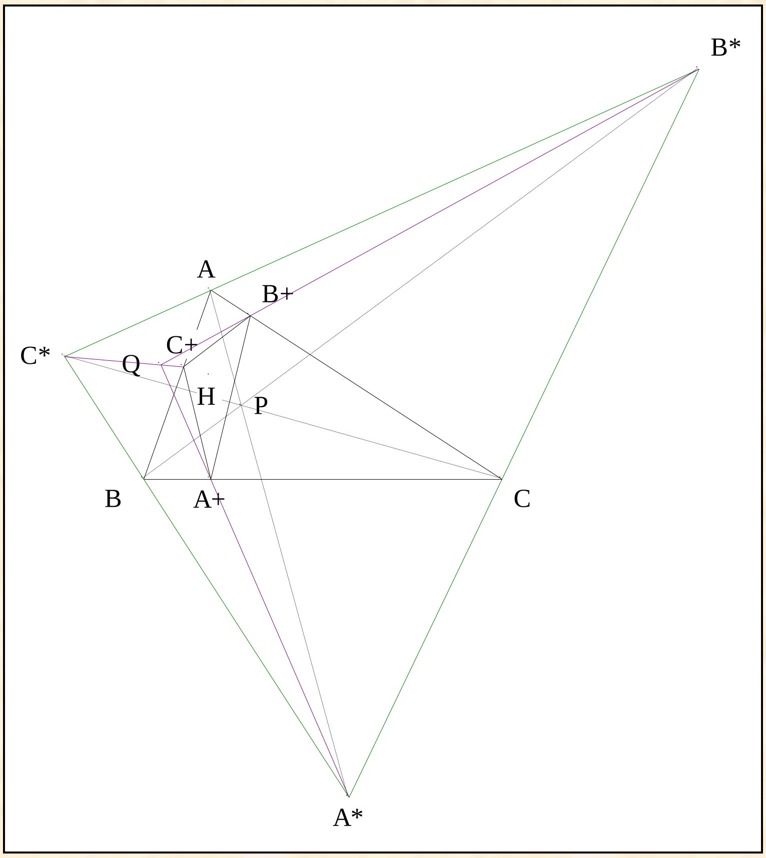
Donné : A*B*C* et A+B+C+ sont perspectifs. [32]

VISUALISATION

---

[31] Ayme J.-L., Produit et Quotient cévien de deux points, vol. **3**, p. 3-8 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[32] Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1295**, *Crux Mathematicorum* vol. **13**, **10** (December 1987) 321 ;



- Nous avons : A+B+C+ est inscrit dans ABC, ABC est inscrit dans A*B*C* ;
  A+B+C+ est en perspective avec ABC, ABC est en perspective avec AµBµCµ.

- **Conclusion :** d'après Döttl "The cevian nest theorem" [33], A*B*C* et A+B+C+ sont perspectifs.

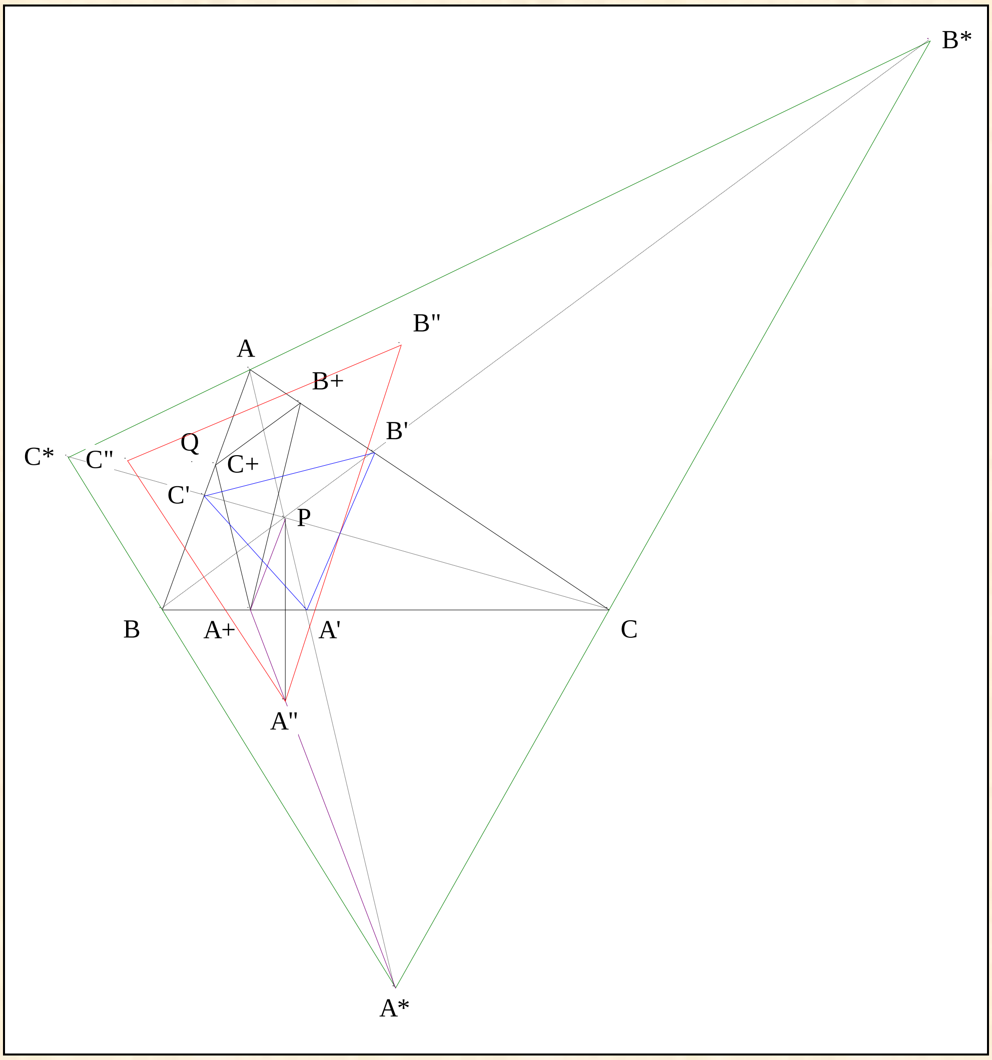
- Notons Q le perspector (centre de perspective) de A*B*C* et A+B+C+.

Commentaire : le théorème de Johann Döttl ne précise pas la nature géométrique de Q.

Scolies : **(1)** Q est le X_4-céva conjugué de P, X_4 étant l'orthocentre de ABC.

(2) Nature de Q

[33] Ayme J.-L., The cevian nest theorem, vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
  A"B"C" le triangle P-symétrico de ABC
  et A+B+C+ le triangle orthique de ABC.

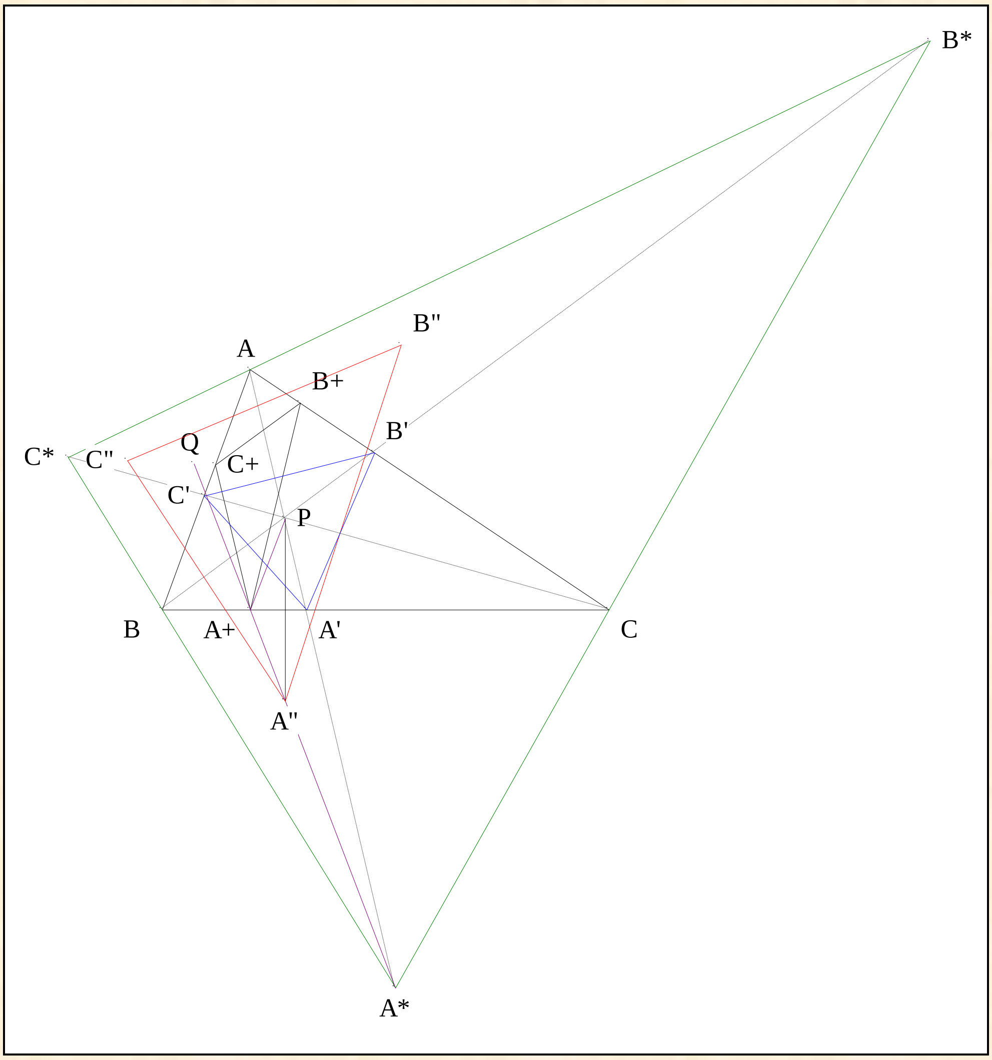
- D'après Lemoine "Triangles cévien et anticévien" [34], **(1)** A, P, A' et A* sont alignés
  (2) le quaterne (A, A', P, A*) est harmonique.

- **Scolie :** **(1)** (A+A) ⊥ (BA+A'C)
  (2) le pinceau (A+ ; A, A', P, A) est harmonique.

- Le pinceau harmonique (A+ ; A, A', P, A) ayant deux rayons perpendiculaires,
  (A+A') et (A+A) sont les bissectrices de <PA+A*.

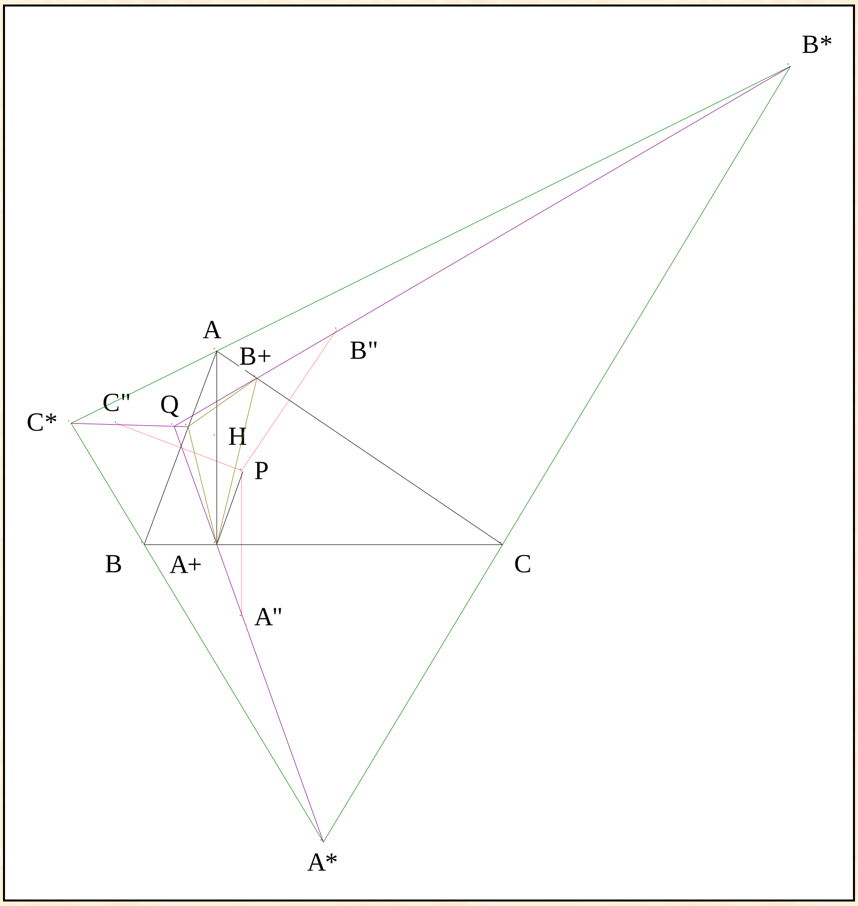
- Nous avons : (PA") ⊥ (BC) ;
  par construction, (BC) ⊥ (A+A) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (PA") // (A+A) ;
  en conséquence, A" est sur le rayon (A+A*).

[34] Ayme J.-L., Produit et Quotient cévien de deux points, vol. **3**, p. 3-8 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- **Conclusion partielle :** (A*A"A+) passe par Q.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (A*A"A+) passe par Q
  (A*A"A+) passe par Q.



- Notons H l'orthocentre de ABC.
- D'après Naudé "D'une hauteur à une bissectrice", H est le centre de A+B+C+.
- (BC) et (A+A) étant les bissectrices de <PA+A*, (A+P) et (A+Q) sont deux A+-isogonales de A+B+C+.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B+P) et (B+Q) sont deux B+-isogonales de A+B+C+
  (C+P) et (C+Q) sont deux C+-isogonales de A+B+C+.
- **Conclusion :** Q est l'isogonal de P relativement à A+B+C+.

Note historique :

relativement à mes sources, il apparaît que l'initiation de ce résultat revient aux époux Emelyanov [35].
En 2003, Jean-Pierre Erhmann [36] reconsidère cette situation du point de vue inverse i.e. en allant vers le triangle tangentiel et non pas vers le triangle de contact, et la généralise de la façon suivante

le triangle P-*symétrico relativement à un triangle* P-*cévien de ABC*
est
en perspective avec ABC.

et propose sa preuve quatre jours plus tard [37].

---

35 Emelyanov L. A., Emelyanova T. L., **XIV** Tournement Towns Conference,Beloresk (2002)
36 Ehrmann J.-P., Another stellar (or flowered) transformation, Message *Hyacinthos* # **7999** du 24/09/2003
37 Ehrmann J.-P., Another stellar (or flowered) transformation, Message *Hyacinthos* # **8039** du 28/09/2003
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Énoncés traditionnels :

le triangle P-*anticévien d'un triangle*
est en perspective
avec le triangle P-*symétrico de ce triangle*

ou

le triangle P-*anticévien d'un triangle*
est en perspective
avec le triangle orthique de ce triangle

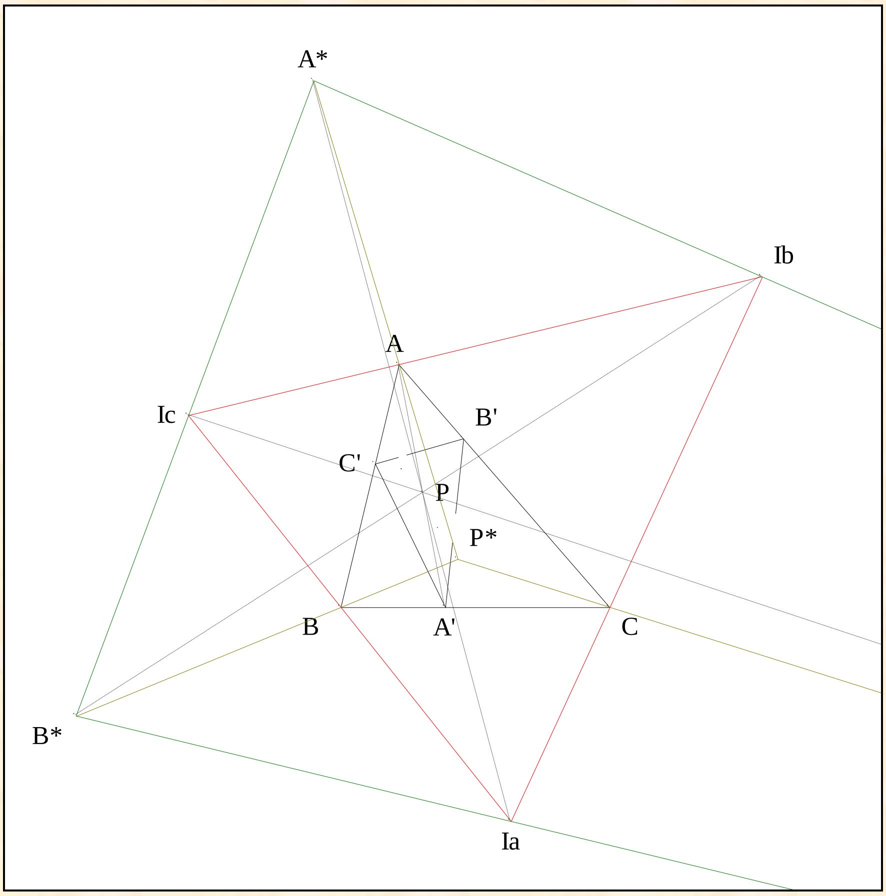
ou

le triangle P-*symétrico d'un triangle*
est en perspective
avec le triangle orthique de ce triangle.

2. Un reversement du point de vue

VISION

Figure :



Traits : IaIbIc un triangle,
H l'orthocentre de IaIbIc,

	ABC	le triangle H-cévien (orthique) de ABC,
	P	un point
et	A*B*C*	le triangle P-anticévien de IaIbIc.

Donné : A*B*C* et ABC sont perspectifs. [38]

VISUALISATION

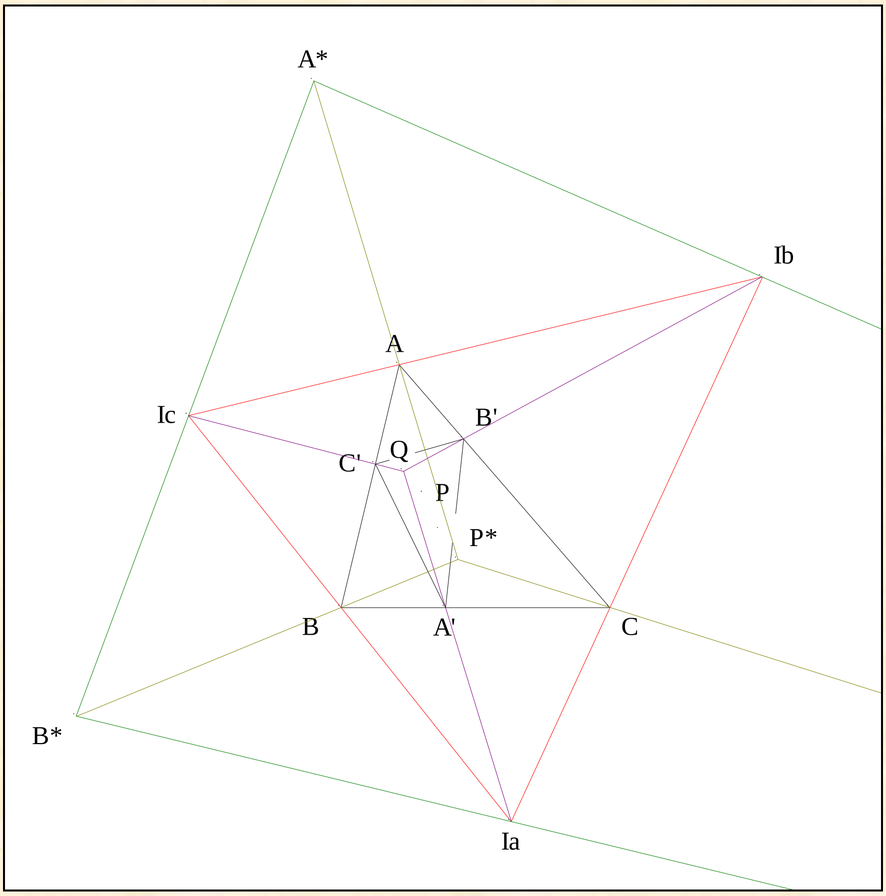
- **Conclusion :** d'après **D. 1.** Les triangles P-anticévien et H-cévien, A*B*C* et ABC sont perspectifs.

- Notons P* le perspector (centre de perspective) de A*B*C* et ABC.

Scolies : **(1)** nature de P*

- **Conclusion :** d'après **D. 1.** Les triangles P-anticévien et H-cévien, scolie **2**, P* est l'isogonal de P relativement à ABC.

(2) Le point Q



- Notons I le centre de ABC i.e. l'orthocentre de IaIbIc.

- **Conclusion :** IaIbIc étant le triangle I-anticévien de ABC, d'après **C. 1.** Les triangles I-anticévien et P-cévien, IaIbIc et A'B'C' sont perspectifs.

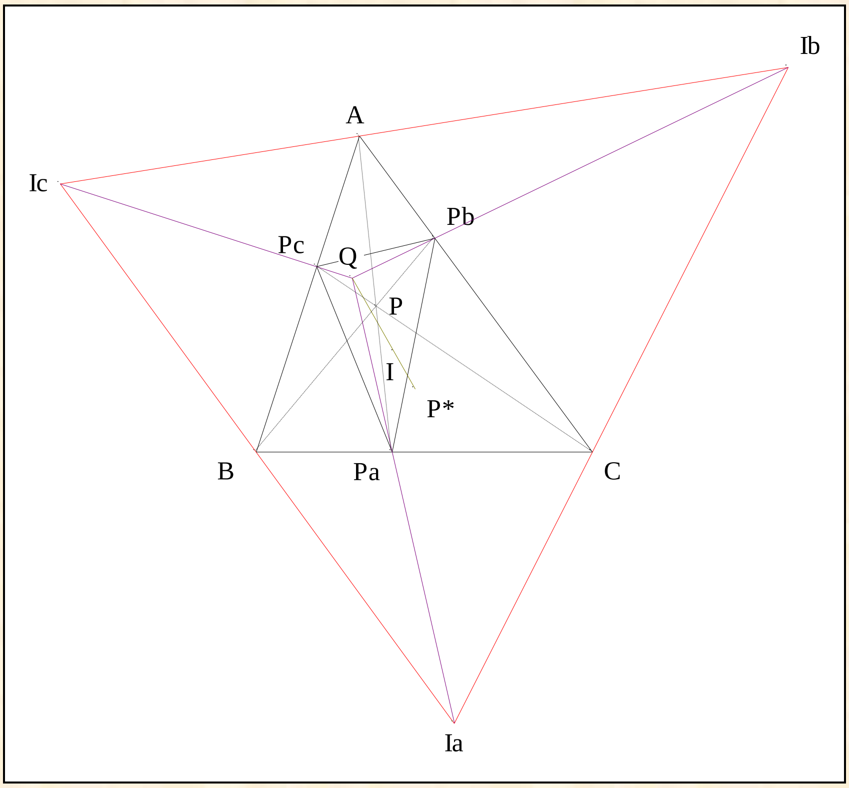
- Notons Q le perspector (centre de perspective) de IaIbIc et A'B'C'.

[38] Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1295**, *Crux Mathematicorum* vol. **13**, **10** (December 1987) 321 ;

3. Le résultat de Jakob Tjakko Groenman ou l'alignement Q-P*-I

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	PaPbPc	le triangle P-cévien de ABC,
	P*	l'isogonal de P de ABC,
	I	le centre de ABC,
	IaIbIc	le triangle I-anticévien (ou excentral) de ABC
et	Q	le perspector de IaIbIc et A'B'C'.

Donné : Q, P* et I sont alignés. [39]

VISUALISATION

DE

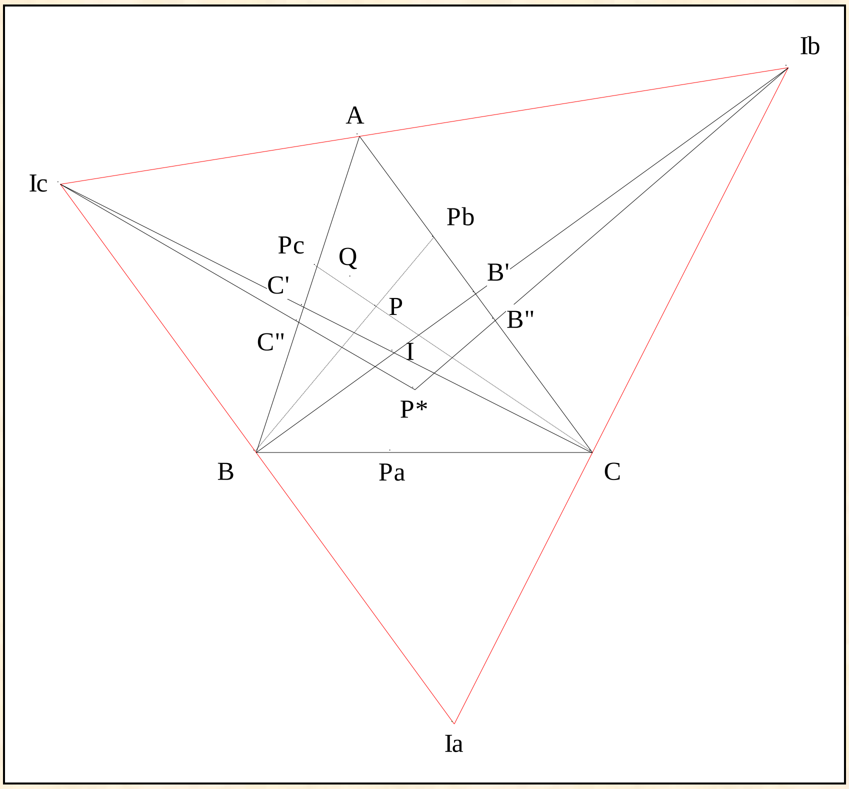
Kosta VITTAS

[39] Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1295**, *Crux Mathematicorum* vol. **15**, **1** (January 1989) 17-18 ;
Three collinear points, AoPS du 23/07/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=490249

- A propos de Q

nous avons : PaPbPc est inscrit dans ABC, ABC est inscrit dans IaIbIc ;
PaPbPc est en perspective avec ABC, ABC est en perspective avec IaIbIc ;

d'après Döttl "The cevian nests theorem" [40], PaPbPc est en perspective avec IaIbIc.

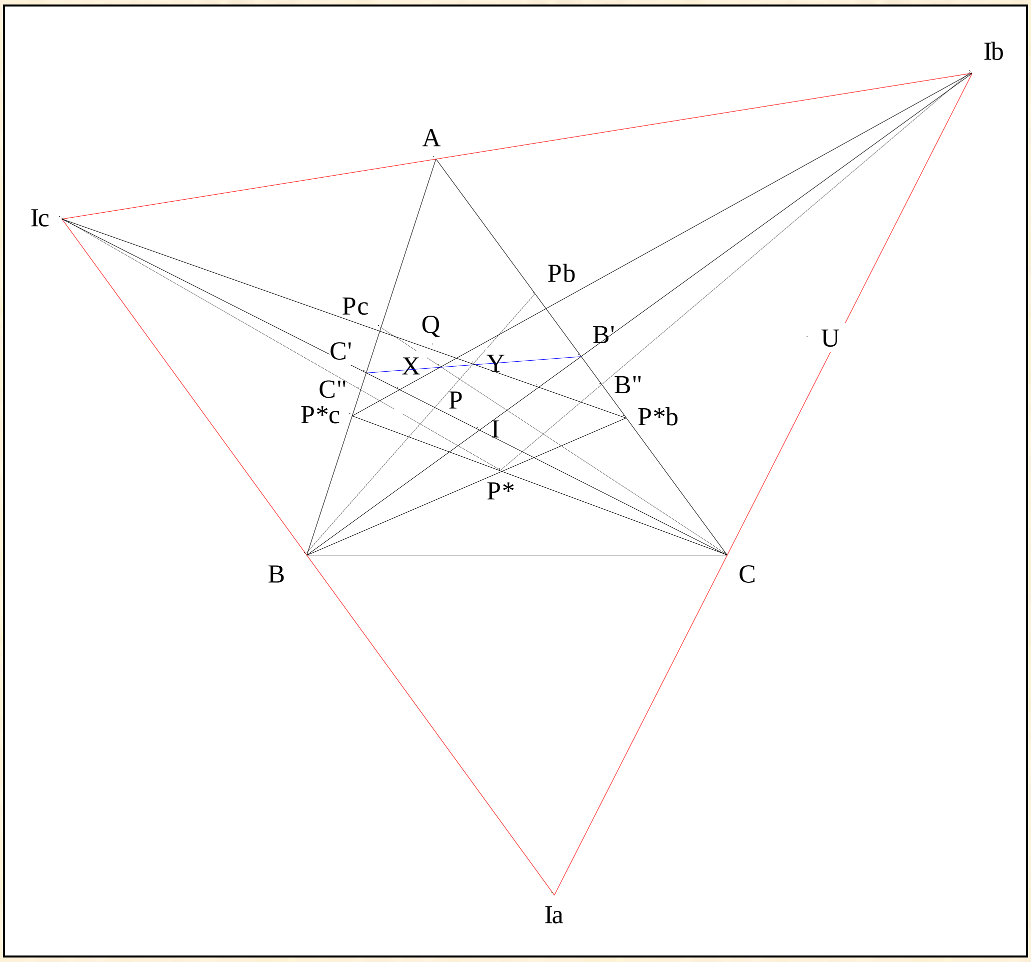


- **Scolies :** **(1)** B, I et Ib sont alignés
(2) C, I et Ic sont alignés.

- Notons A'B'C' le triangle I-cévien de ABC
et B", C" les points d'intersection resp. de (AC) et (IbP*), (AB) et (IcP*).

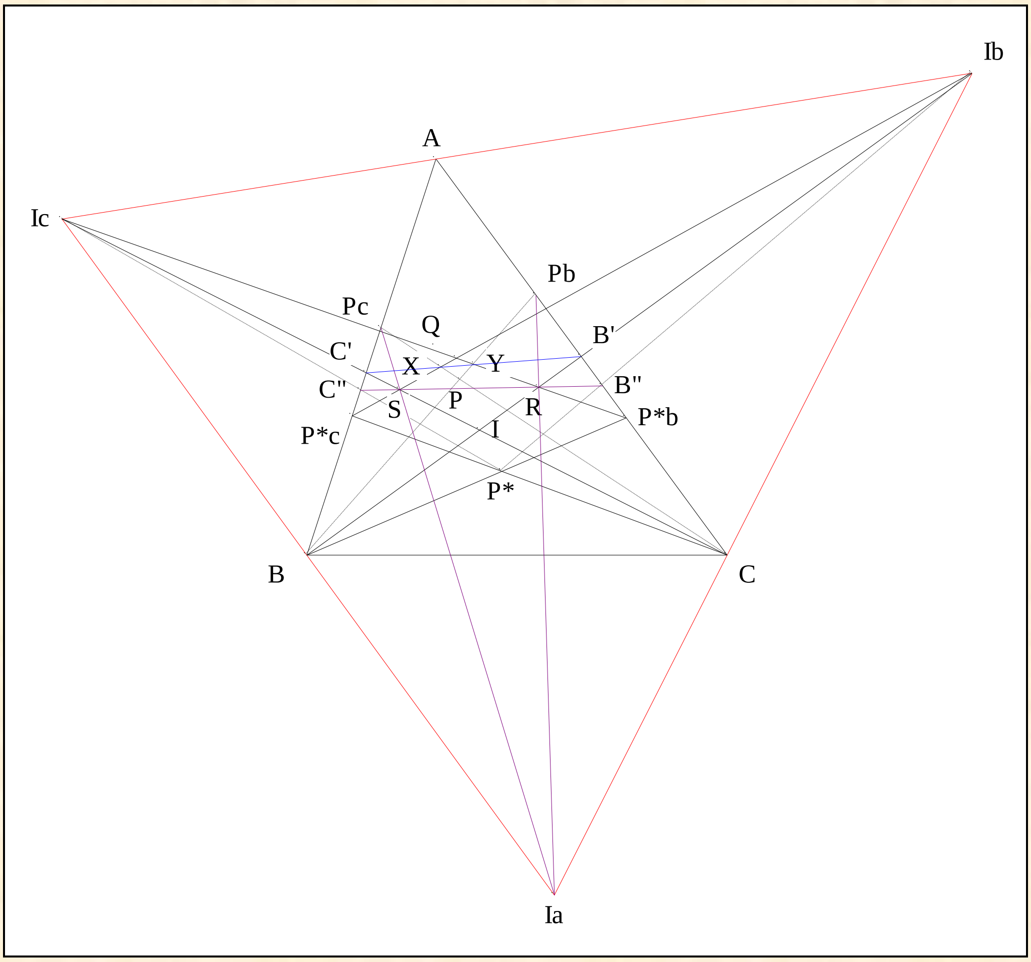
- **Commentaire :** pour montrer que Q, I et P* sont alignés,
montrons que les quaternes (A, B', Pb, B") et (A, C', Pc, C") sont égaux
ou encore que (B'C'), (PbPc) et (B"C") sont concourantes.

[40] Ayme J.-L., The cevians nests theorem, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

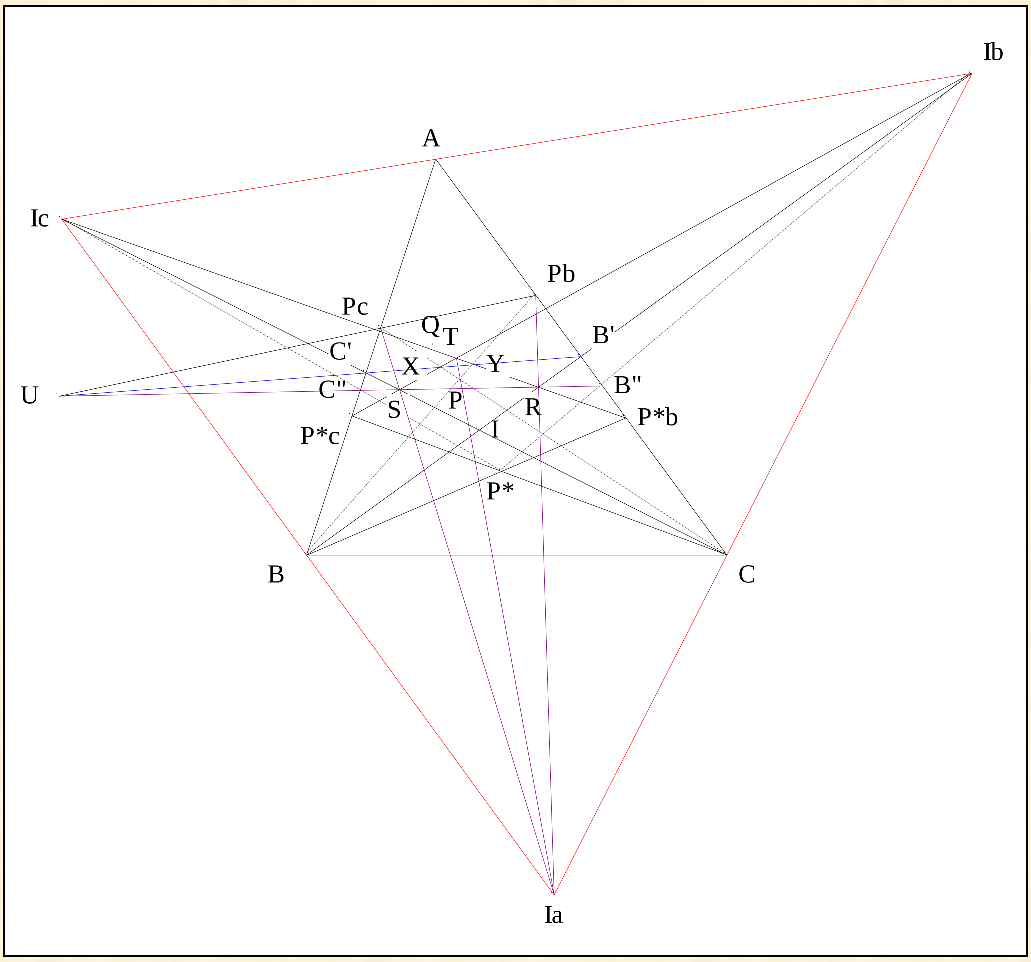


- Notons P*aP*bP*c le triangle P*-cévien de ABC
  et X, Y les points d'intersection resp. de (BP) et (IcP*b), (CP) et (IbP*c).

- D'après **F.** Appendice **1**, X et Y sont sur (B'C').



- Notons R, S les points d'intersection resp. de (IaPb) et (IcP*b), (IaPc) et (IbP*c).
- D'après **F.** Appendice **2** scolie, R et S sont sur (B"C").



- Notons T le point d'intersection de (IbP*c) et (IcP*b).

- D'après **F.** Appendice **3**, T, P et Ia sont alignés.

- Notons U le point d'intersection de (RS) et (PbPc).

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles", [41]
  les triangles RST et PbPcP étant perspectifs de centre Ia, U, X et Y sont alignés ;
  nous savons que X, Y sont sur (B'C') ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, U est sur (B'C').

- **Conclusion partielle :** R et S étant sur (B"C"), (B'C'), (PbPc) et (B"C") sont concourantes.

- Les quaternes (A, B', Pb, B") et (A, C', Pc, C") étant égaux,
  les pinceaux (Ib ; A, B', Pb, B") et (Ic ; A, C', Pc, C") sont égaux.

- **Conclusion :** Q, I et P* sont alignés.

Énoncé traditionnel :

L'isogonal d'un point P *relativement à un triangle*
est alignés avec
les centres de perspective du triangle excentral resp. avec ce triangle et de son triangle P-cévien.

---

[41] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Archive :

II. *Generalization by the proposer.*

We prove more generally that *if P is any point in the plane of $\Delta A_1A_2A_3$, Q is its isogonal conjugate, and P_1 is the intersection of A_1P and A_2A_3 (with analogous definitions for P_2, P_3), then the lines P_1I_1, P_2I_2, P_3I_3 are concurrent at a point collinear with Q and the incenter I of the triangle.* The given result follows by letting P be the orthocenter so that Q is the circumcenter.

We use normal homogeneous triangular coordinates, with

Kimberling notes that the proposal is a known result (*John Casey*, Analytic Geometry, *2nd ed., Hodges & Figgis, Dublin*, 1893, *p.*85).

[42]

E. LE RELACHEMENT DES CONTRAINTES

SUR

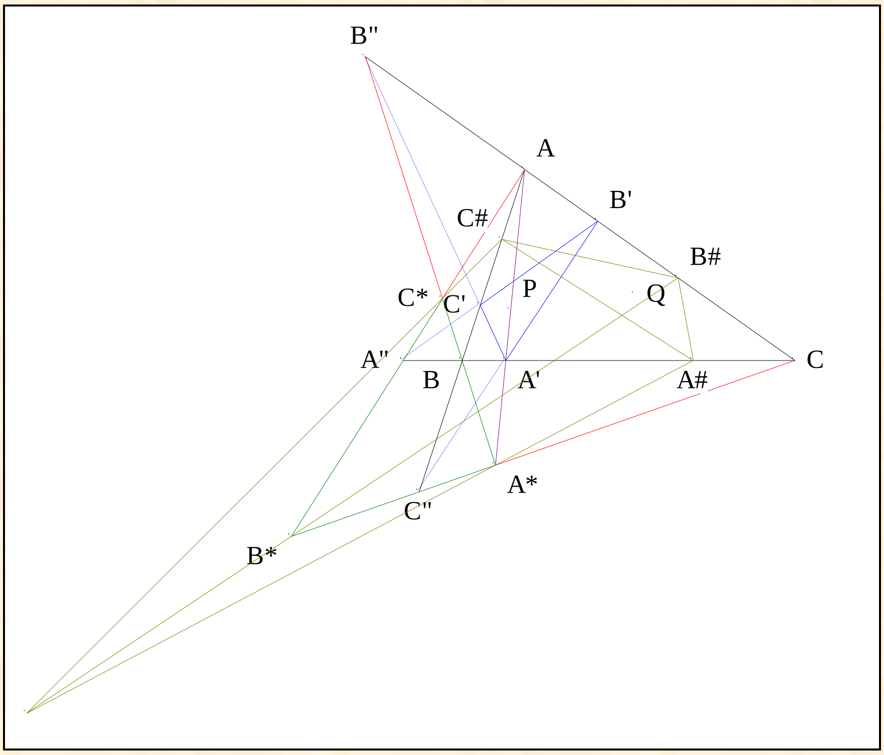
LES TRIANGLES CÉVIEN ET ANTICÉVIEN

1. Triangles Q-cévien et P-anticévien

VISION

Figure :

[42] Groenman J. T. (Arnhem, The Netherlands), Problem **1295**, *Crux Mathematicorum* vol. **15**, **1** (January 1989) 17-18



Traits : ABC un triangle,
P un point,
A*B*C* le triangle P-anticévien de ABC,
Q un point
et A#B#C# le triangle Q-cévien de ABC.

Donné : A#B#C# et A*B*C* sont perspectifs. [43]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [44].

Note historique :

The following generalization is given in [6]. A point P in the interior of the given triangle determines an inscribed triangle $P_1P_2P_3$, where $P_i = A_iP \cap A_{i+1}A_{i+2}$, $i = 1, 2, 3$. (Subscripts here and below are taken modulo 3.) A second interior point Q determines a circumscribed triangle in the following manner. Consider the harmonic conjugates Q'_1, Q'_2, Q'_3 of Q_1, Q_2, Q_3 with respect to the point pairs $(A_2, A_3), (A_3, A_1)$, and (A_1, A_2) which lie on a line q, the *trilinear polar* of $Q(y_i)$ with respect to the given triangle [1]. Let $Q^i = A_{i+1}Q'_{i+1} \cap A_{i+2}Q'_{i+2}$. Then the trilinear coordinates of Q^i are $((-1)^{\delta_{ij}}y_j)$, where $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$ and 0 otherwise. The following theorem follows readily.

The triangles $P_1P_2P_3$ and $Q^1Q^2Q^3$ are perspective from the point $T = \cap P_iQ^i$, $i = 1, 2, 3$.

The restriction to P being in the interior of the triangle is unnecessary: see the solution of *Crux* 1541 [1991: 189]. For alternative formulations, see [1] or [2]. We are told that the theorem also appears in [8] and [10]. (We thank the referees for supplying references [1], [2], [8] and [10] which were previously unknown to us.)

[45]

---

43 Sawayama Y., *Tokyo Buturi Gakko* (1903)
Altshiller-Court N., *College Geometry*, supplementary exercise **7**, page 165
Aubert et Papelier, *Exercices de Géométrie Analytique*, Vol. **1**, 10th ed., Paris (1957) problem **52**, p. 35
Iwata S., *Encyclopedia of Geometry*, Vol. **3** (1976), problem **676**
Eddy R. H., A generalization of Nagel's middlespoint, *Elemente der Mathematik* **45** (1990) 14-18

44 Ayme J.-L., Produit de deux points, G.G.G. vol. **3**, p. 8-9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

45 Eddy R. H., On an idea of Groenman, *Crux Mathematicorum* vol. **17**, **7** (September 1991) 193-195; 194

F. APPENDICE

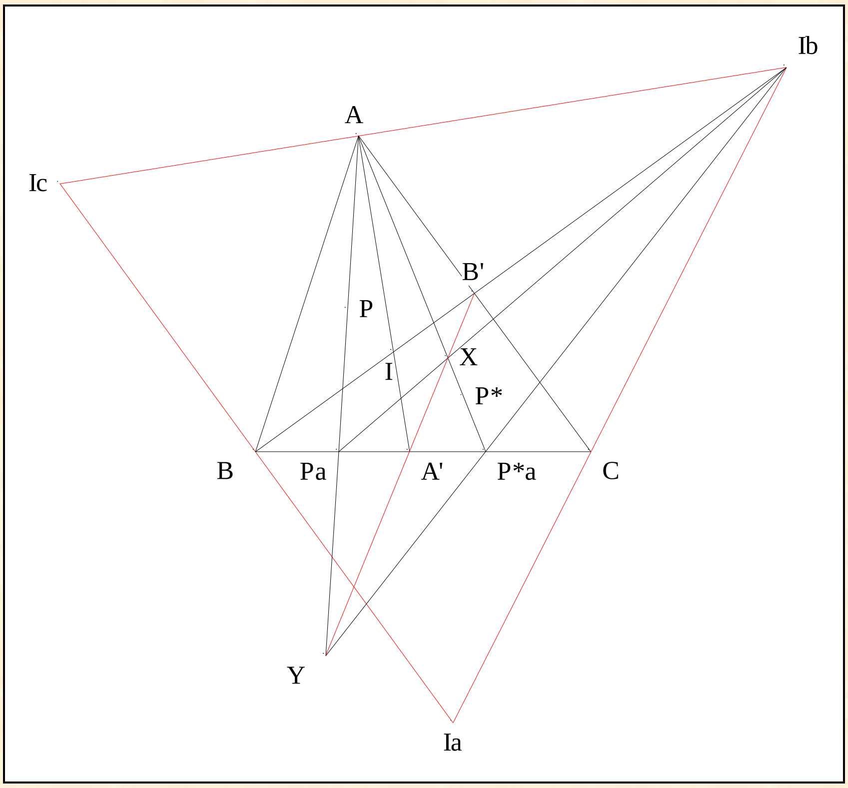
DE

KOSTA VITTAS

1. Deux points sur un côté du triangle I-cévien

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle I-cévien de ABC,
	Ib	le B-excentre de ABC,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P de ABC,
	Pa, P*a	les points d'intersection de (BC) resp. avec (AP), (AP*)
et	X, Y	les point d'intersection resp. de (AP*) et (IbPa), (AP) et (IbP*a).

Donné : X et Y sont sur (A'B').[46]

VISUALISATION

[46] Vittas K., Three collinear points, AoPS du 23/07/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=490249

- Considérons le pinceau anharmonique, (A ; Pa, P*a, C, Ib) ;
  par symétrie par rapport à (AI) (A ; Pa, P*a, C, Ib) = (A ; P*a, Pa, B, Ib) ;
  par changement d'origine, (A ; P*a, Pa, B, Ib) = (Ib ; P*a, Pa, B, A) ;
  par transitivité de la relation =, (A ; Pa, P*a, C, Ib) = (Ib ; P*a, Pa, B, A).

- **Conclusion partielle :** ces deux pinceaux ayant le rayon (AIb) en commun, Y, X et B' sont alignés.

- Mutatis mutandis, nous montrions que Y, X et A' sont alignés.

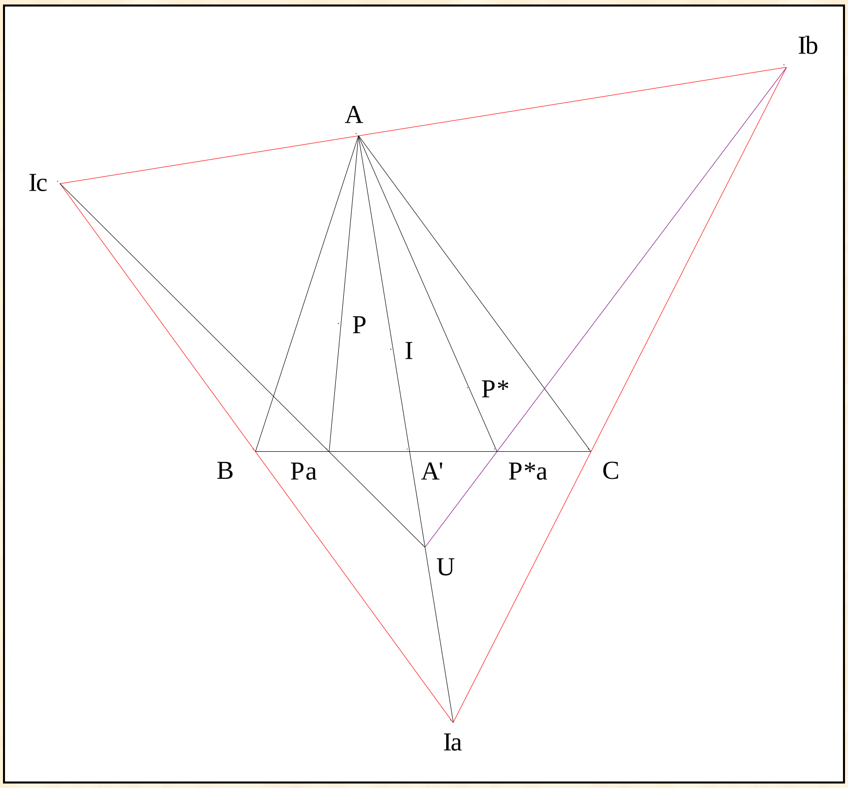
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, X et Y sont sur (A'B').

Commentaire : l'énoncé met en œuvre deux A-céviennes de ABC
et deux Ib-céviennes de IaIbIc.
Les points X et Y sont sur la droite latérale (A'B') de A'B'C'.

2. Un point sur la A-bissectrice intérieure d'un triangle

VISION

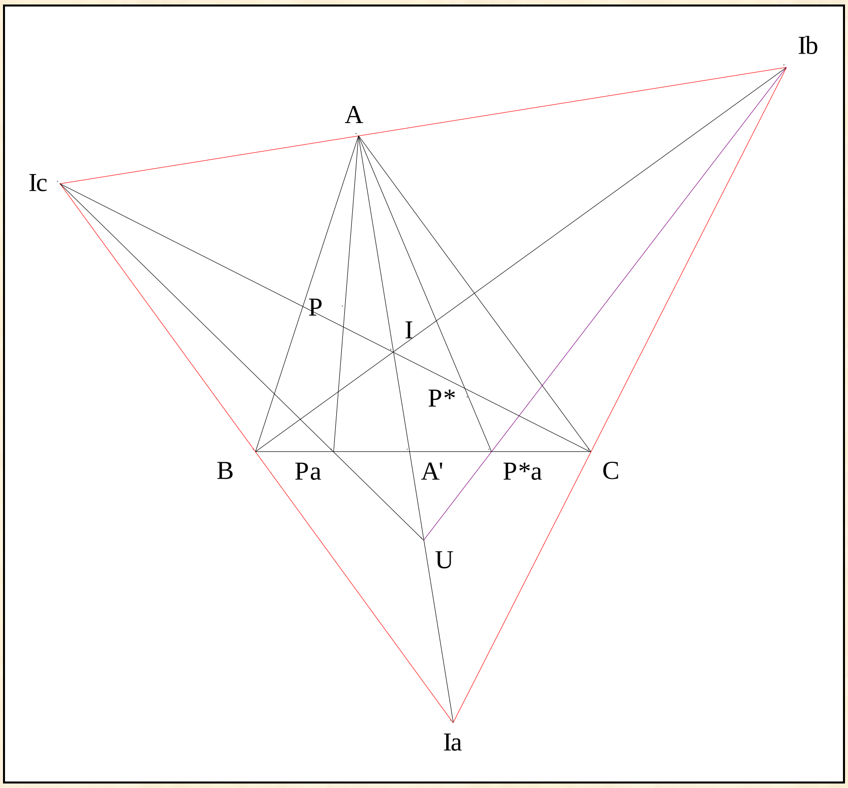
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle I-cévien de ABC,
IaIbIc le triangle excentral de ABC,
P un point,
P* l'isogonal de P de ABC,
Pa, P*a les points d'intersection de (BC) resp. avec (AP), (AP*)
et U le point d'intersection de (IbP*a) et (IcPa).

Donné : U est sur (AIIa).[47]

VISUALISATION



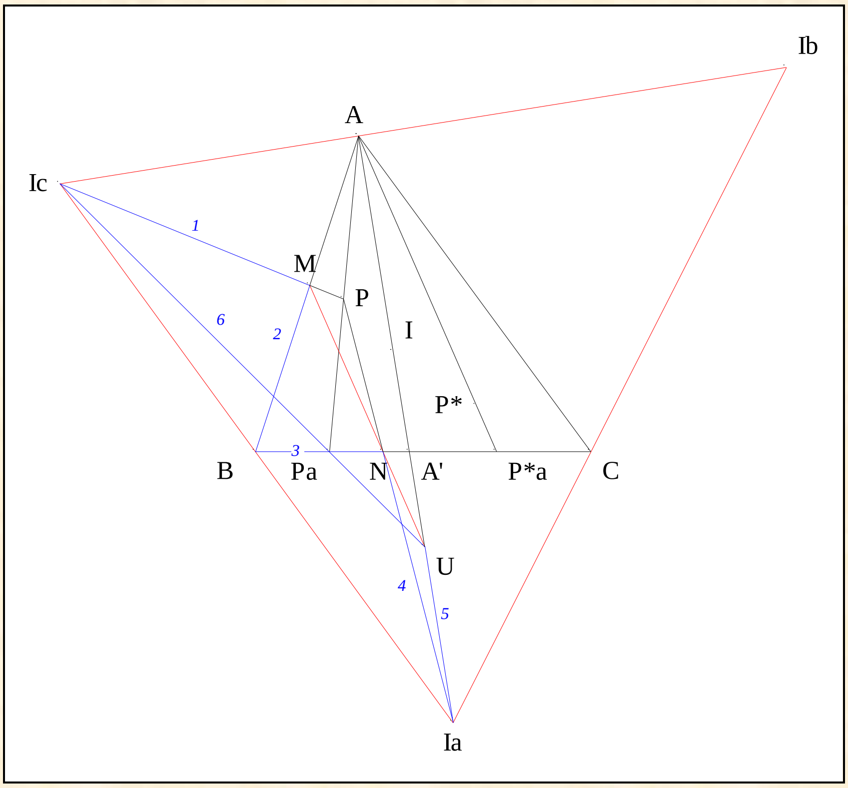
- Considérons le pinceau anharmonique, (Ib ; A, B, P*a, C) ;
  par changement d'origine, (Ib ; A, B, P*a, C) = (A ; Ib, B, P*a, C) ;
  par symétrie par rapport à (AI), (A ; Ib, B, P*a, C) = (A ; Ic, C, Pa, B) ;
  par changement d'origine, (A ; Ic, C, Pa, B) = (Ic ; A, C, Pa, B)
  par transitivité de la relation =, (Ib ; A, B, P*a, C) = (Ic ; A, C, Pa, B).

- Ces deux pinceaux ayant le rayon (AIbIc) en commun, I, U et Ia sont alignés.

- **Conclusion** : U est sur (AIIa).

Scolie : trois points alignés

[47] Vittas K., Three collinear points, AoPS du 23/07/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=490249



- Notons M, N les point d'intersection resp. de (AB) et (PIc), (BC) et (PIa).

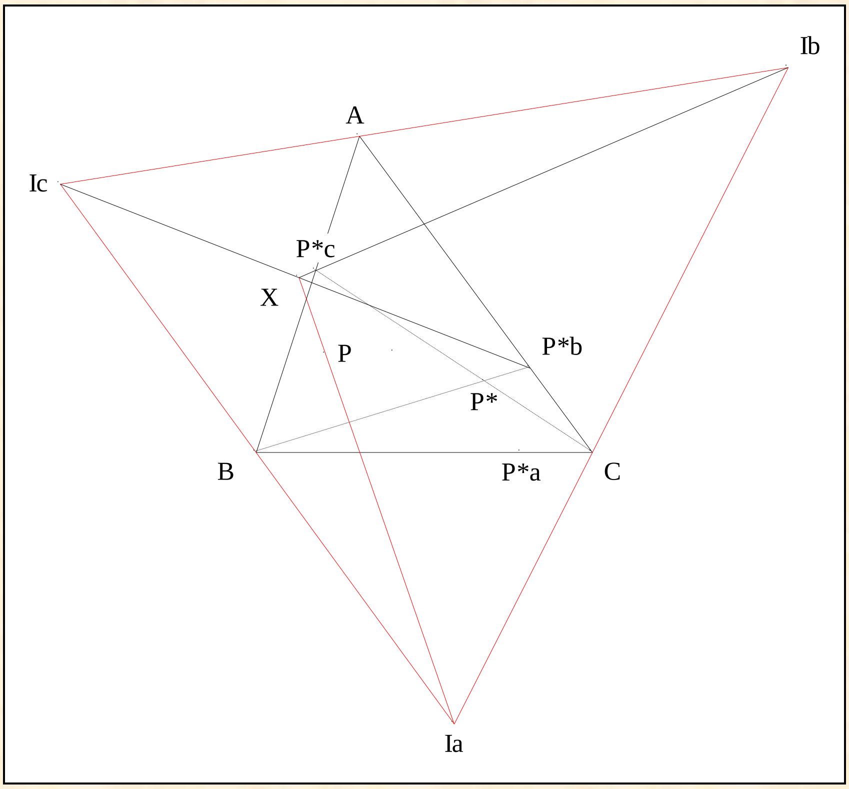
- **Conclusion :** d'après Pappus "La proposition 139", [48]
(PAPa) étant la pappusienne de l'hexagone IcMBNIaUIc, M, N et U sont alignés.

3. Un point sur une cévienne du triangle excentral

VISION

Figure :

[48] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

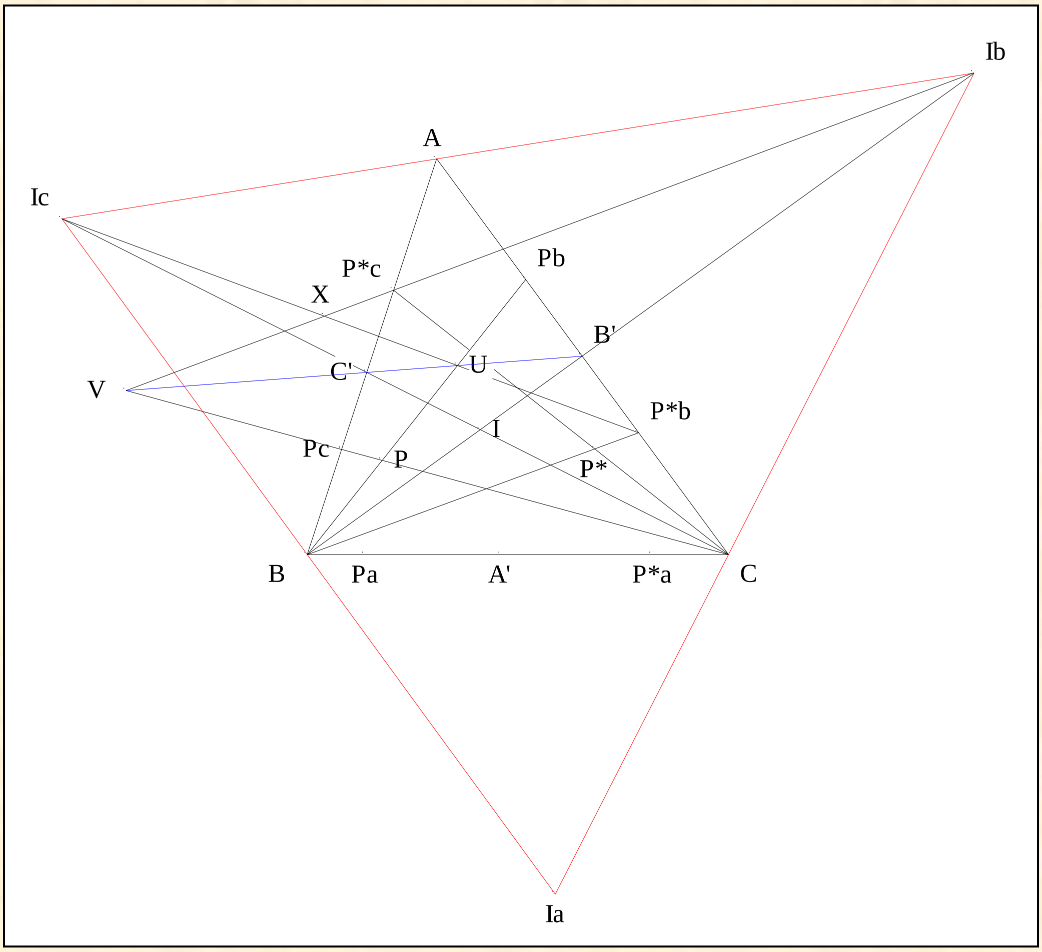


Traits :	ABC	un triangle,
	IaIbIc	le triangle excentral de ABC,
	P	un point,
	P*	l'isogonal de P de ABC,
	P*aP*bP*c	le triangle P*-cévien de ABC,
et	X	le point d'intersection de (IbP*c) et (IcP*b).

Donné : X, P et Ia sont alignés.[49]

VISUALISATION

[49] Vittas K., Three collinear points, AoPS du 23/07/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=490249



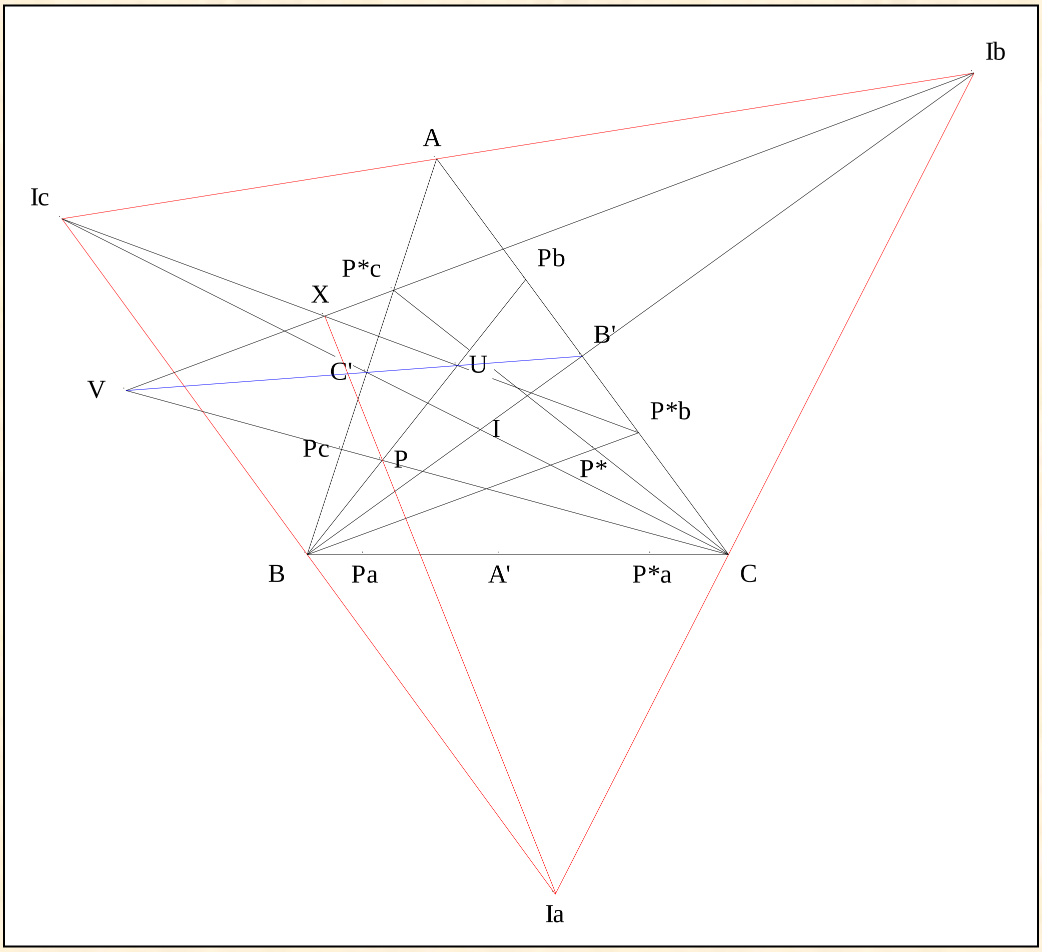
- Notons I le centre de ABC,
  A'B'C' le triangle I-cévien de ABC
  et U, V les point d'intersection resp. de (BP) et (IcP*b), (CP) et (IbP*c).

- D'après Problème **7**, U et V sont sur (B'C').

- **Scolies :** **(1)** B, I et Ib sont alignés
  (2) C, I et Ic sont alignés.

- Notons A* le conjugué harmonique de A' relativement à [BC].

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" (Cf. **G.** Annexe **2**)
  appliqué aux quadrilatères AB'I' et BIbCIc, (BC), (B'C') et (IbIc) concourent en A*.



- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [50]
  appliqué aux triangles perspectifs XIbIc et PBC d'axe (VA*U), (XP), IbB) et (IcC) concourent en Ia.

- **Conclusion :** X, P et Ia sont alignés.

4. Une courte biographie de Kostas Vittas

Kostas Vittas est né Grèce en 1949.

---

[50] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Il termine ses études d'Architecture à l'université d'Athènes en 1973 et se consacre principalement à la construction de maisons privées.
Il se marie avec l'ingénieure Jane Strofila, s'installe à Marousi, une banlieue d'Athènes, et aura trois de cette union, Nikos, Giorgos et Alejandros. C'est en 1999 que Kostas redécouvre sa passion pour la Géométrie en commençant par résoudre comme un débutant des problèmes de cette ancestrale discipline. Cette passion pour la Géométrie qui l'habitait déjà lorsqu'il était un jeune lycéen, il la partage largement aujourd'hui avec les membres du célèbre site *Mathlinks* où il apparaît comme un "solver" de talent.
Il prend sa retraite en août 2009 et m'a confié qu'il envisageait d'écrire prochainement un recueil d'exercices de Géométrie.
Pour terminer, il ajoutait

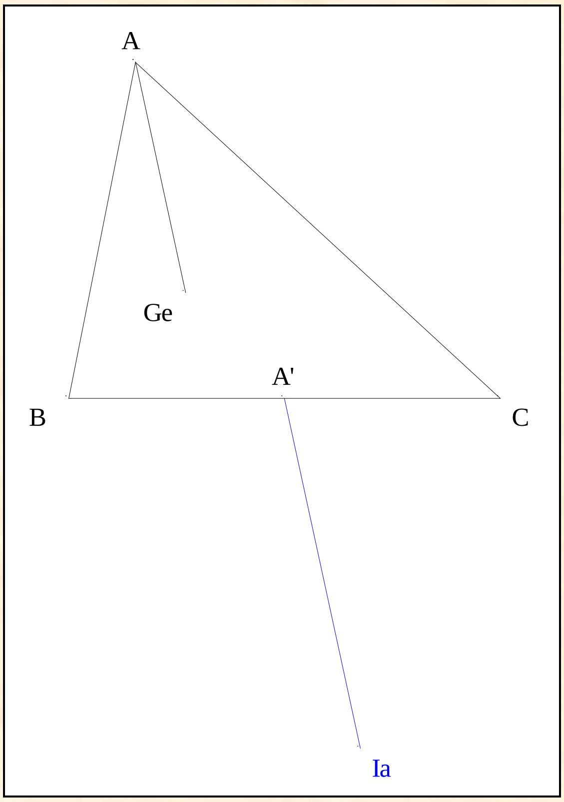
I can only say that I am glad to participate in the Greec Mathematical forum mathematica last two years and also I am happy because its co-ordinators choosed me as a member of the manager's office of this forum, although I am not a Mathematician.

G. ANNEXE

1. Parallèle à une gergonnienne

VISION

Figure :

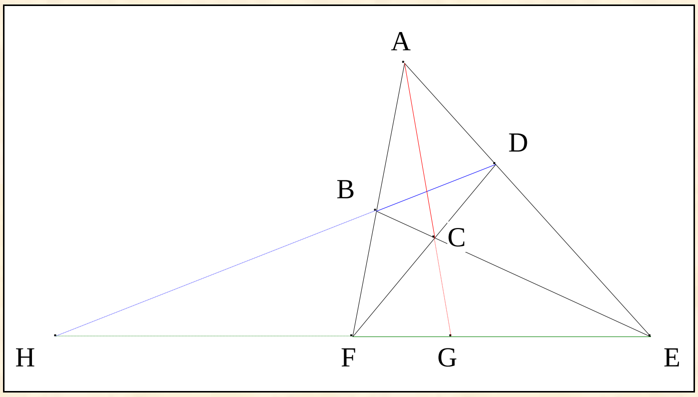


Traits :	ABC	un triangle,
	Ia	le A-excentre de ABC,
	A'	le milieu de [BC]
et	Ge	le point de Gergonne de ABC.

Donné : (AGe) est parallèle à (A'Ia).

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [51]

2. Diagonales d'un quadrilatère complet [52]



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
et G, H le point d'intersection resp. de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

---

[51] AymeJ.-L., Cinq théorème de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 18-21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[52] Pappus, *Collections*, Livre **7**, proposition **131**.