31st INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

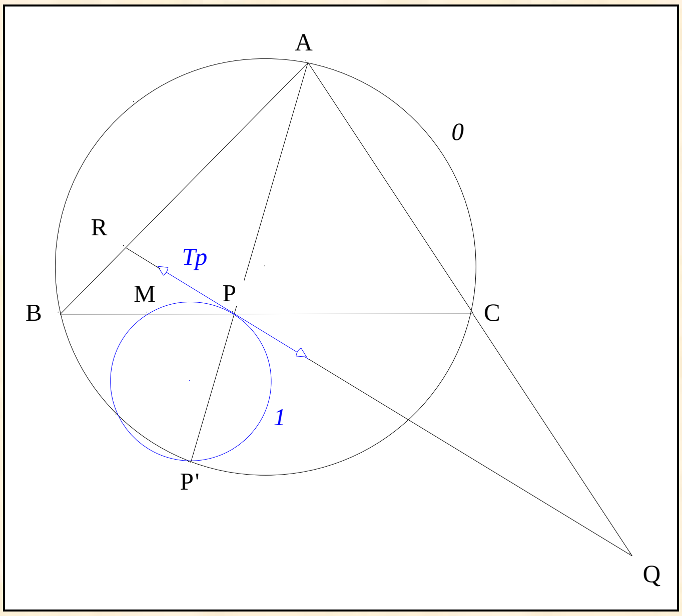
BEIJING CHINA

DAY 1 - PROBLEM 1

JULY 12, 1990

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. un problème de IMO de 1990 est résolu synthétiquement par l'auteur.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. a 1990 IMO problem is solved synthetically by the author.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Sommaire

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), 2011

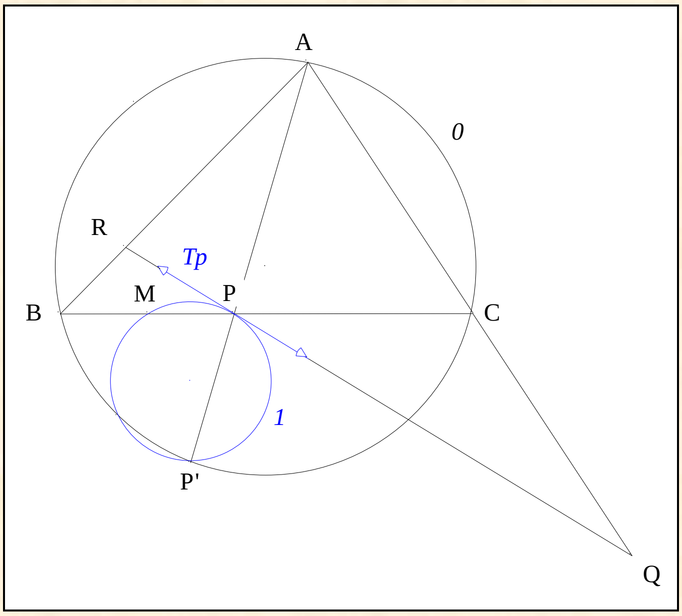
A. NOTE

Les Olympiades Internationales de Mathématiques[2] (OIM) peuvent être vues comme un championnat international de mathématiques destiné aux élèves terminant leurs études secondaires. Les premières Olympiades qui regroupaient sept pays de l'ancienne Europe de l'Est se sont déroulées en 1959 en Roumanie. Depuis leur instauration, le nombre de pays participants n'a cessé d'augmenter régulièrement jusqu'à atteindre une centaine de pays venant de tous les continents. Depuis 1959, elles se tiennent chaque année, sauf en 1980, en un pays différent dans une ambiance de vacances comprenant diverses activités non mathématiques.
Le Comité consultatif des OIM s'assure que chaque pays d'accueil observe les règlements et les traditions des OIM.
Chaque pays envoie une équipe de six candidats au maximum. L'épreuve consiste à résoudre sur deux jours, en deux séances de quatre heures et demie, deux séries de trois problèmes. Les énoncés sont très courts et difficiles. Leur résolution fait appel plus au raisonnement qu'à des connaissances sophistiquées : les solutions sont souvent courtes et élégantes. Des prix spéciaux peuvent être attribués pour des solutions extrêmement élégantes. Courantes avant 1980, elles sont rares depuis.
Chaque pays, excepté le pays organisateur, peut proposer des problèmes (ILL)[3] au Comité de sélection qui en retient certains afin d'écourter la liste (ISL)[4]. Les chefs des délégations arrivent quelques jours avant les élèves et se regroupent pour choisir six problèmes. Étant donné qu'ils connaissent les sujets avant les épreuves, ils sont séparés des élèves jusqu'à la fin de celles-ci.

B. LE PROBLÈME 1

VISION

Figure :



Traits[5] **:**	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	un point de [BC] distinct de B et C,

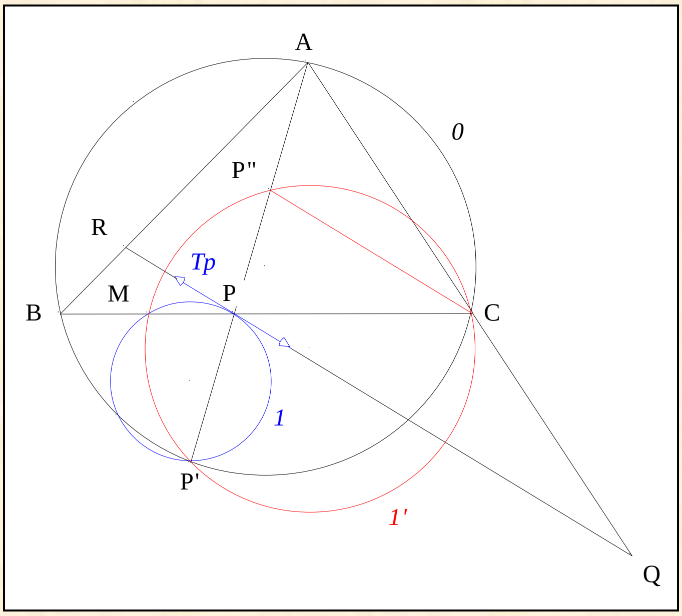
---

[2] International Mathematical Olympiad (IMO) en anglais
[3] IMO LongList.
[4] IMO ShortList.
[5] Reformulation de l'auteur

	P'	le second point d'intersection de (AP) avec *0*,
	M	un point de [PB] distinct de P et B,
	1	le cercle passant par M, P', P,
	Tp	la tangente à *1* en P
et	Q, R	les points d'intersection de *Tp* resp. avec (CA), (AB).

Donné : $\frac{PQ}{PR} = \frac{MC}{MB}$. [6]

VISUALISATION

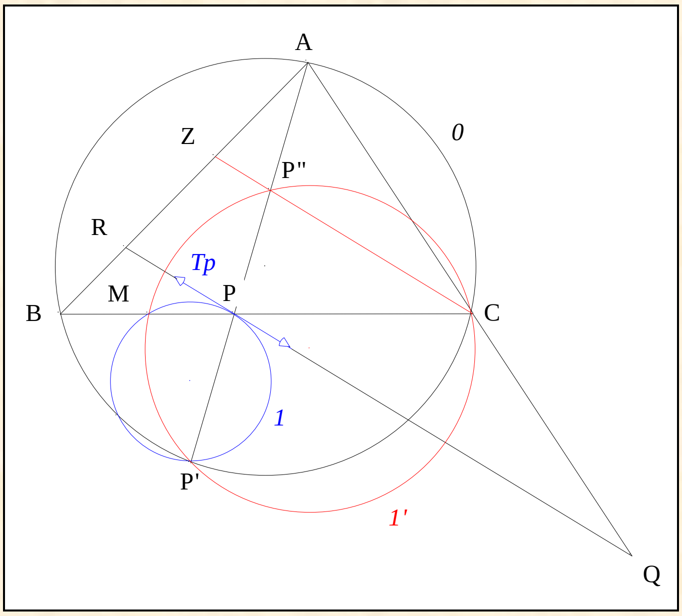


- Notons *1'* le cercle passant par M, P', C
  et P" le second point d'intersection de (AP) avec *1'*.

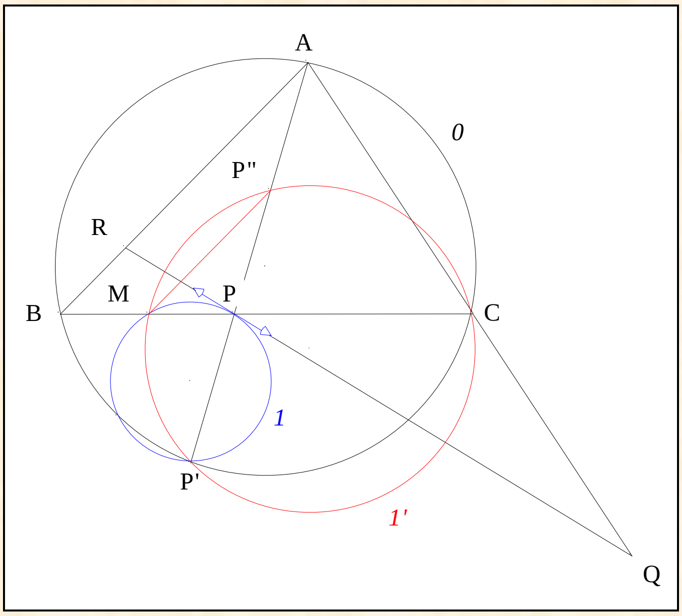
- Les cercles *1* et *1'*, les points de base M et P', les moniennes (PMC) et (PP'P"), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que *Tp* // (CP").

---

6 IMO 1990, Day **1**, problem **1** ;
Döhring O., IMO ShortList 1990, *Mathlinks* du 20/08/2004 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1075848073&t=15577 (problem **12**, p. 22-23)
Chords AB and CD of a circle intersect at a point E, *Mathlinks* du 11/11/2005 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1360306744&t=60736
Two cords intersect at point E, AoPS DU 15/09/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=498513



- Notons Z le point d'intersection de (CP") et (AB).
- **Conclusion partielle :** d'après Thalès, $\frac{PQ}{PR} = \frac{P''C}{P''Z}$.



- Les cercles *1'* et *0*, les points de base P' et C, les moniennes (P"P'A) et (MCB), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (P"M) // (AB).

- D'après Thalès, $\frac{P''C}{P''Z} = \frac{MC}{MB}$.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, $\frac{PQ}{PR} = \frac{MC}{MB}$.

Scolie : le résultat reste inchangé en prenant un point M de [PC] distinct de P et C.

Note historique : le problème proposé par le Docteur C. R. Pranesachar (Inde) qui a été retenu pour les

IMO [7] de 1990 du 8 au 19 juillet 1990 à Beijing regroupant 54 pays et 308 participants était le suivant :

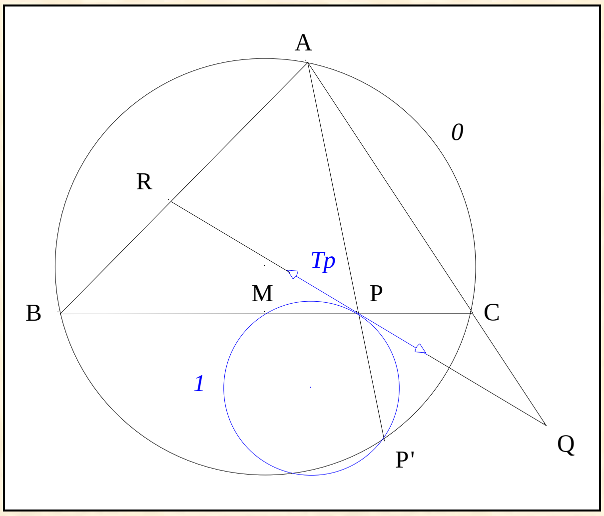
A, *B*, *C* et *D* sont quatre points distincts d'un même cercle tels que les segments $[A, B]$ et $[C, D]$ se coupent en *E* ; *M* est un point du segment $[B, E]$ distinct de *B* et de *E*.

La tangente en *E* au cercle passant par les trois points *D*, *E* et *M* coupe respectivement les droites *BC* et *AC* en *F* et *G*.

Calculer le quotient $\frac{EG}{EF}$ en fonction de $t = \frac{AM}{AB}$.

Commentaire : ce problème est considéré comme difficile par Jean-Marie Monier [8] ; la démonstration qu'il propose en recourant à la technique des aires est très lourde.
La solution proposée par Theo Koupelis de l'Université du Wisconsin (Marathon, E.U.), est plus légère : elle utilise deux couples de triangles semblables, suivi d'une division de rapports.

C. UNE ÉQUIVALENCE



Conclusion : M est le milieu de [BC] *si, et seulement si,* P est le milieu de [QR]. [9]

Note : la preuve est laissée au soin du lecteur.

---

7 http://en.wikipedia.org/wiki/International_Mathematical_Olympiad
8 Monier J.-M., *Géométrie*, Tome **7**, Dunod (1997) 101
9 Ayme J.-L., Two midpoints, *Mathlinks* du 10/02/2010 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/index.php?f=47&t=330790