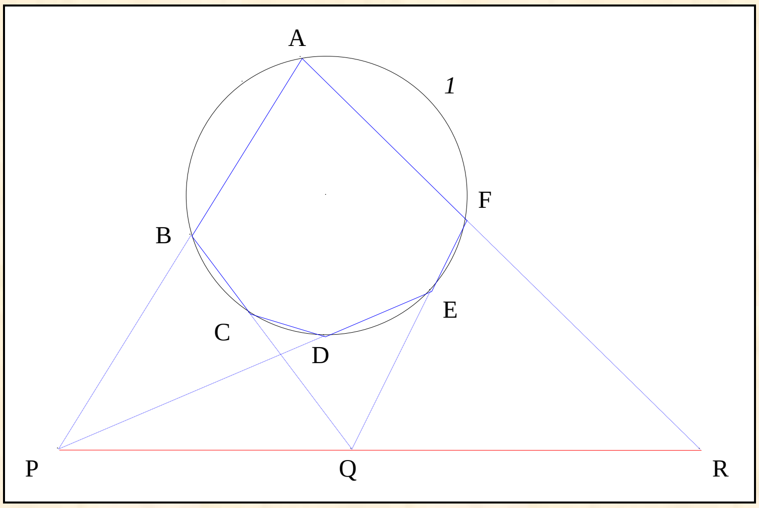
HEXAGRAMMA MYSTICUM

RAYONNEMENT * CHARME * BEAUTÉ

PASCAL - STEINER - KIRKMAN - CAYLEY - SALMON - PLÜKER - HESSE

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente le théorème de Blaise Pascal et quelques développements.
Le point de vue adopté est sommital et tabulaire. L'approche progressive purement géométrique et non combinatoire, est de nature expérimentale. L'auteur qui a désiré comprendre les fondements géométriques de cette question donne des règles de constructions obtenues par généralisation et les applique dans de nombreux exemples.
Exercices, notes historiques, biographiques, références et archives accompagnent le texte.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The paper presents the Blaise Pascal's theorem and some developments. View of the matter is summital and tabular. The progressive approach purely geometric and non-combinatorial is experimental. The author who has desired to understand the geometric basis for this question gives rules of construction obtained by generalizing and applies in many examples.
Exercises, notes historical, biographical, references and archives are associated with the text.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Remerciements : ils vont pour les photos incluses dans le texte au regretté Steve Sigur[2], enseignant au

---

[1] St.-Denis, Île de la Réunion (France) 2011.
[2] Sigur S., Triangle Geometry, http://www.paideiaschool.org/Teacherpages/Steve_Sigur/geometryIndex.htm
http://www.paideiaschool.org/teacherpages/steve_sigur/resources/pascal2/index.html

Paideia school d'Atlanta (Georgie, États-unis) et à J. C. Fisher et N. Fuller[3] de l'université de Regina (Saskatchewan, Canada).

Sommaire

[3] Fisher J. C. and Fuller N . ; http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

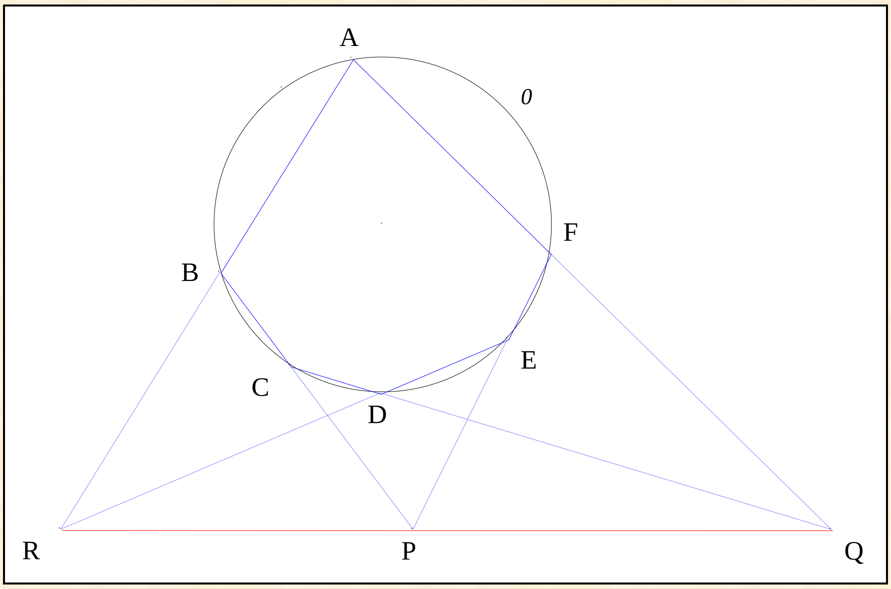
Sommaire (fin)

A. HEXAGRAMMA MYSTICUM

1. Le "lemme" de Blaise Pascal

VISION DOUBLE

Figure :

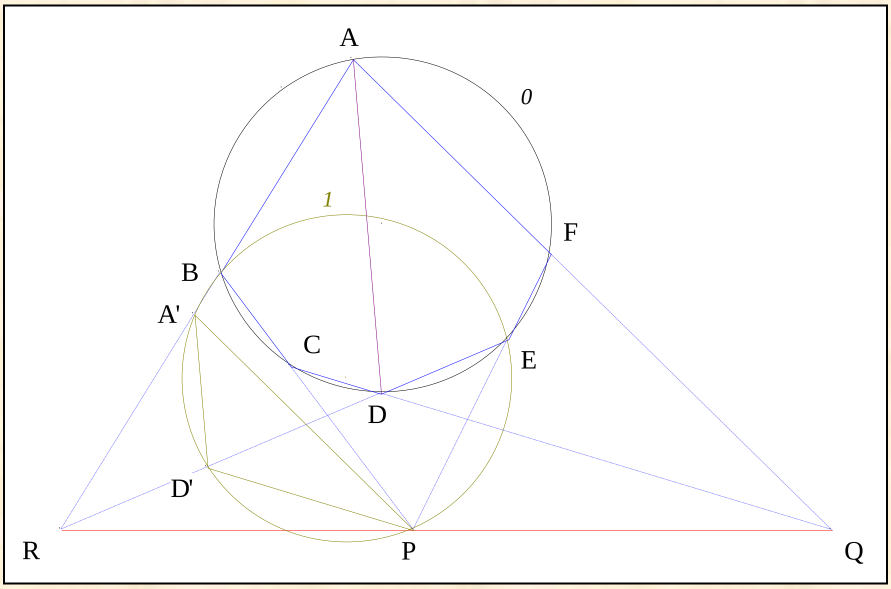


Traits :	*0*	un cercle,
	A, B, C, D, E, F	les six sommets dans cet ordre d'un hexagone tels que A, B, C, D, E soient sur *0*
et	P, Q, R	les points d'intersection de (EF) et (BC), (AF) et (CD), (AB) et (DE).

Donné : F est sur *0* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [4]

[4] Pascal B. (1639-1640).

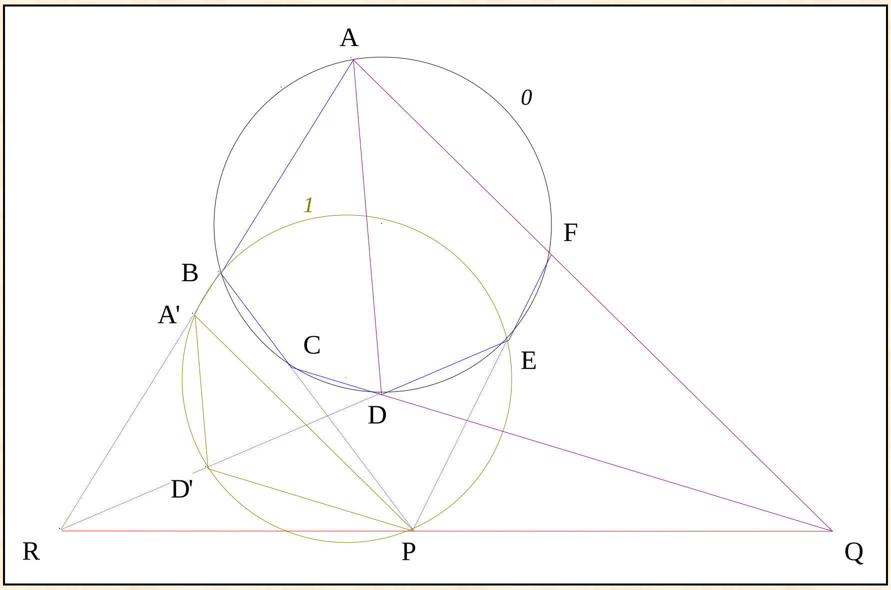


- Notons $\quad$ *1* $\quad$ le cercle passant par B, P, E,
  et $\quad$ A', D' $\quad$ les seconds points d'intersection de (AB), (DE) avec *1*.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et E, les moniennes (ABA') et (DED') conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que $\quad$ (AD) // (A'D').

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et E, les moniennes (DED') et (CBP) conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que $\quad$ (DC) // (D'P).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et E, les moniennes (FEP) et (ABA') conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que $\quad$ (FA) // (QA').

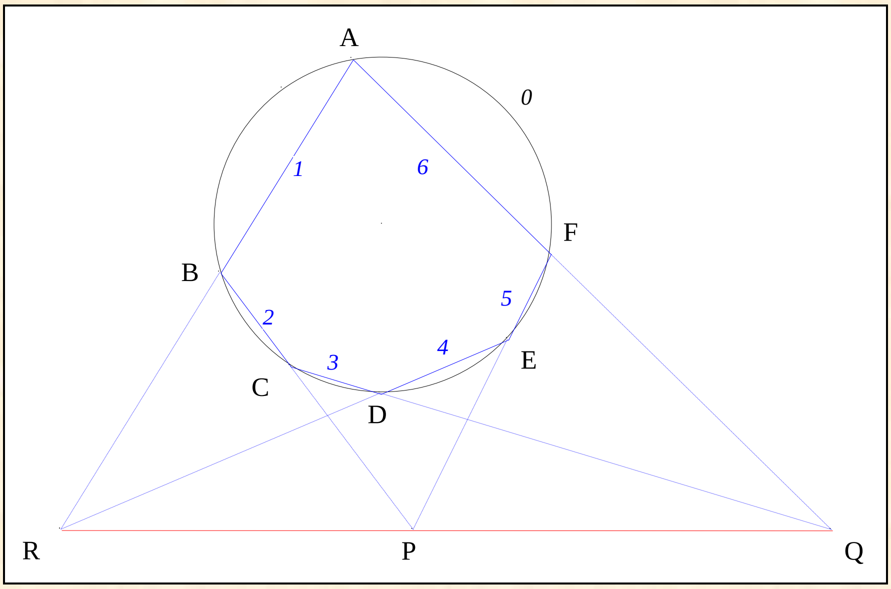


- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe **1**) appliqué aux triangles homothétiques ADQ et A'D'P, $\quad$ P, Q et R sont alignés.

Scolies : $\quad$ **(1)** $\quad$ l'hexagone cyclique, noté ABCDEF, est un "pascal de *0*".
Un pascal est un ensemble ordonné de six points, avec la convention qu'il peut être nommé à partir de l'un de ses points, et il est le même dans l'ordre inverse.

(2) (PQR) est "la pascale de ABCDEF".
Observons qu'il y a une correspondance biunivoque entre pascals et pascales.

(3) Notation des côtés d'un pascal ou vision latérale



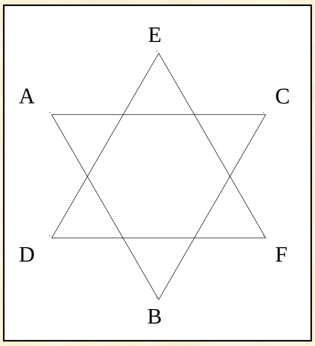
- Les côtés successifs du pascal ABCDEF sont, à partir de A, notés *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*.

Commentaire : c'est cette vision latérale qui est la plus souvent développée dans les articles que l'auteur a eu à sa disposition.

(4) Notation tabulaire ou vision sommitale

- Le pascal ABCDEF détermine, par exemple, deux triangles, le premier ABC et le second DEF.

- En considérant la conjonction de ABC et DEF, symbolisé par deux triangles équilatéraux,
  le premier la pointe B en bas et le second la pointe E en haut,
  nous formons comme l'indique la figure ci-après un double triangle qui s'anéantit dans une étoile à six pointes, voire "l'hexagramma mysticum" des alchimistes.



- Notation tabulaire du pascal ABCDEF

A	E	C
D	B	F

Elle rappelle la disposition des sommets des deux triangles précédents.[5]

[5] Levi F., Geometrische Konfigurationen, Hirzel S., Leipzig (1929) 178 ;
Klark B. G. (University of Alabama), An analytic study of the Pascal hexagon, *Am. Math. Monthly* (April 1937) 228-231.

- Pour noter la pascale (PQR) du pascal ABCDEF,

A	E	C
D	B	F
P	Q	R

nous ajoutons une ligne supplémentaire au tableau précédent que nous remplissons par les points P, Q et R.

- En développant ce tableau par rapport à la dernière ligne d'une façon analogue à un déterminant d'ordre 3,

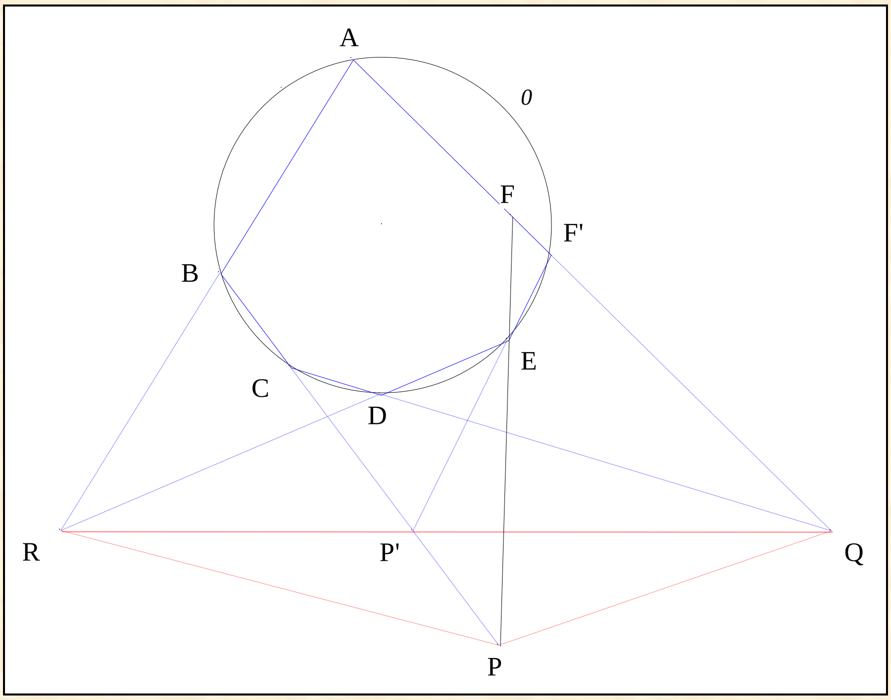
  * P est le point d'intersection de (EF) et (BC)
  * Q est le point d'intersection de (AF) et (CD)
  * R est le point d'intersection de (AB) et (DE).

Énoncés traditionnels : *les côtés opposés d'un pascal se coupent deux à deux, en trois points alignés*

ou

la pascale d'un pascal passe par les points d'intersection des côtés opposés.

VISION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant P, Q et R sont alignés et F n'est pas sur *0*.

- Notons F' le second point d'intersection de (AF) avec *0*
  et P' le point d'intersection de (EF') et (BC).

- **Scolie :** P' est distinct de P sinon, F serait sur *0*.

- D'après la visualisation nécessaire, (P'QR) est la pascale du pascal ABCDEF'

i.e.

P', Q et R sont alignés.

- D'après l'axiome d'incidence Ia, (PQR) et (P'QR) sont confondues

i.e.

P' est identique à P, ce qui est contradictoire.

- **Conclusion :** F est sur *0*.

Énoncé traditionnel : *si,* *cinq des six sommets d'un hexagone sont situés sur un cercle et que les trois paires de côtés opposés se coupent en des points alignés*
alors, *le sixième sommet est sur le cercle*.

2. Commentaire

Pour la visualisation nécessaire, l'auteur s'est inspiré de celle de celle proposée en 1993 par Jan van Yzeren[6] et l'a rendue encore plus légère en mettant en œuvre son théorème favori i.e. le théorème de Reim.
La littérature géométrique, nous apprend que la preuve de Jan van Yzeren était déjà en germe en 1967 dans celle de H. W. Guggenheimer qui recourrait à la méthode des faisceaux de cercles, et discrètement présente en 1902 dans celle du professeur Parrod[7] du lycée de Vesoul comme l'atteste le Frère Gabriel-Marie[8] dans ses *Exercices de Géométrie*.
Au sujet de la preuve de Jan van Yzeren, Harold Scott McDonald Coxeter écrivait :

It is indeed remarkable
that this elegant proof was not found in 350 *years,*
and also somewhat remarkable that Guggenheimer[9] *came close to it in* 1967
and then felt obliged to introduce a peculiar lemma.

3. Note historique

Parmi tous les théorèmes de géométrie, celui de Pascal est l'un des plus fascinants. Son auteur, Blaise Pascal, l'a découvert à l'âge de 16 ans et présenté à l'une des réunions du Révérend Père Marin Mersenne en juin 1639. Il en avait fait la base d'un traité qui parut en février 1640 sous forme d'affiche contenant trois définitions, trois lemmes, cinq théorèmes et trois figures. Ce traité de huit pages m-8°, intitulé *Essai pour les coniques* dans lequel, il mettait en tête son fameux "lemme" dans le cas du cercle comme étant de sa propre invention et qu'il appelait "Hexagrammatum mysticum", ne nous est pas parvenu.

Hexagrammum pascallanum mysticum ut vocat idemque semper conicum [10]

La démonstration de Blaise Pascal est à ce jour perdue, mais Gottfried Wilhelm Leibniz put la lire lors de son passage à Paris et il semble que ce dernier ait soulevé de graves objections. Leibniz nous fait connaître cet *Essai*, dans une lettre datée du 30 août 1676, adressée à Etienne Périer, neveu de Pascal et conseiller à la Cour des aides d'Auvergne, en donnant les titres des parties qui le composaient.

Rappelons que le Révérend Père Marin Mersenne disait que Blaise Pascal avait tiré quatre cents théorèmes et corollaires de son "lemme" de l'hexagone et que René Descartes qui n'admirait jamais rien, pensa que cet *Essai* qu'il avait vu, était de Girard Desargues ou d'Etienne Pascal, le père de Blaise, très versé dans les mathématiques.

---

6 van Yzeren Jan, A Simple Proof of Pascal's Hexagon Theorem, *American Mathematical Monthly* vol. **100**, n° **10** (1993) 930-931.
7 Parrod, *Journal* de Vuibert (1902) 41.
8 F.G.M., Exercices de Géométrie, 6th ed. (1920) ; rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 461.
9 Guggenheimer H. W., *Plane Geometry and Its Groups*, Holden Day Inc., Cambridge (1967).
10 Liebniz G. W. : Hexgramme de Pascal, mystique comme il l'appelle, et qui est toujours conique.

Cet *Essai* se perdit jusqu'au jour où l'abbé Charles Bossut imprima les Œuvres complètes de Pascal en 1779.

4. Règles tabulaires

- Notation tabulaire du pascal ABCDEF

A	E	C
D	B	F

- ABCDEF est inchangé
  - * par permutation des deux lignes
  - * par permutation de deux colonnes.

5. Une courte biographie de Blaise Pascal


[11]

Pour le monde, c'était un savant
qui avait choisi de faire retraite
pour vivre dans l'intimité de Dieu...

Blaise Pascal naît le 19 juin 1623 à Clermont-Ferrand (Auvergne, France).
Fils d'Etienne Pascal (02/05/1588-1651), mathématicien amateur et juriste comme second président à la cours des aides de Clermont, et d'Antoinette Begon (1596-1626). En 1630, Etienne Pascal vend sa charge et s'occupe de l'éducation de son fils dont il semble avoir deviné le génie naissant. Cependant Étienne Pascal a décidé que Blaise ne devait ne pas étudier les mathématiques avant l'âge de 15 ans et par conséquence tous les textes mathématiques ont été retirés de leur maison.
En novembre 1631, le jeune Blaise découvre Paris où son père vient de s'installer.
A l'âge de douze ans, son père le surprend à tenter de démontrer la 32-ème proposition d'Euclide à savoir que

la somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

En récompense, son père Etienne Pascal lui offre les *Éléments* d'Euclide.
A partir de 1637, il accompagne son père dans le cercle d'étude du Révérend Père Marin Mersenne où il se familiarise très rapidement avec les idées de Girard Desargues qu'il écoute et admire.

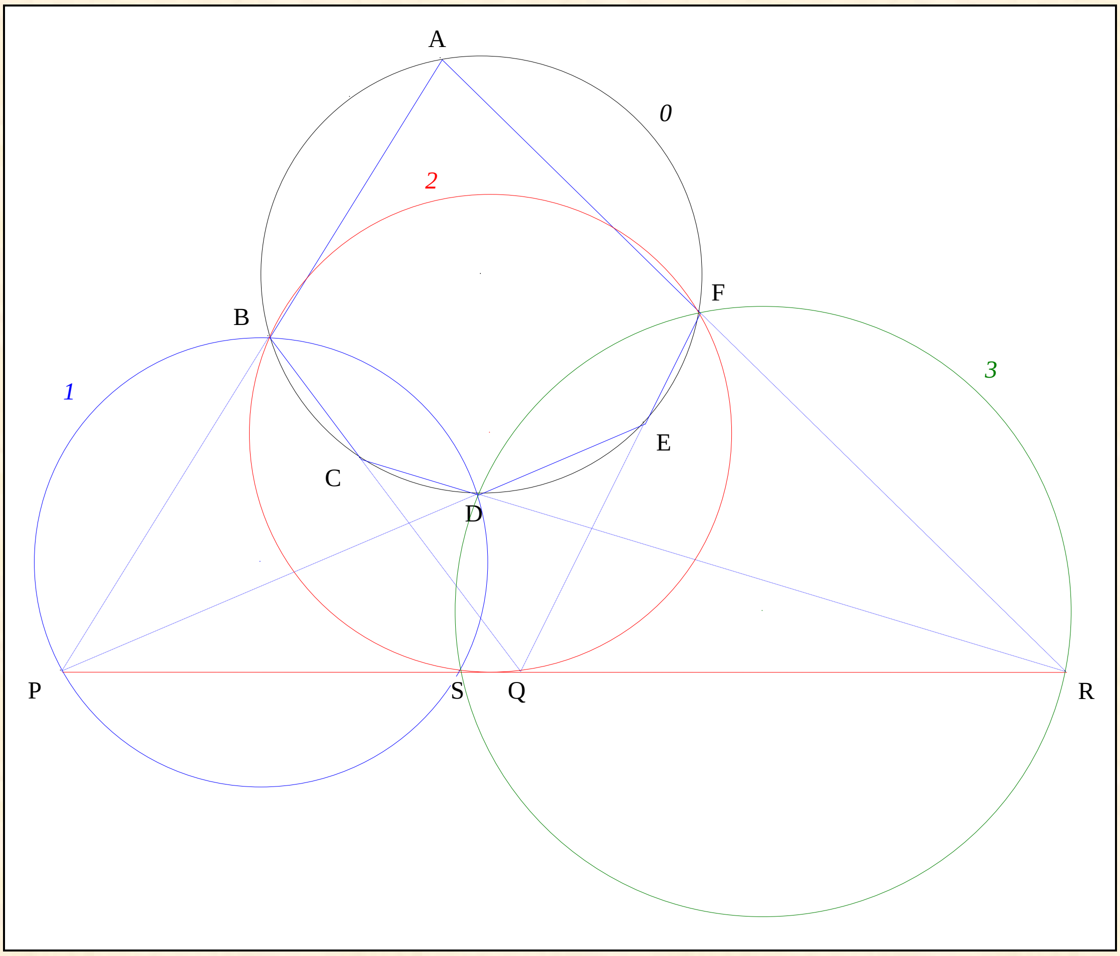
[11] *The MacTutor History of Mathematics Archive* ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

En décembre 1639, son père est nommé commissaire pour l'impôt en Haute-Normandie par le cardinal Richelieu et s'installe à Rouen avec son fils et ses deux filles.
En 1647, Etienne Pascal blessé à la jambe se fait soigner par deux jeunes frères d'un mouvement religieux qui finissent par convertir toute la famille Pascal au christianisme austère de Port-Royal.
La même année la famille s'installe à nouveau à Paris. C'est alors pour Blaise une période mondaine, riche d'une intense activité scientifique qui sera suivie d'une seconde "conversion" : lors de "la nuit de feu" du 23 novembre 1654 où il connaît une extase mystique, celle du "Dieu sensible au coeur", il décide de consacrer sa vie à la foi et à la piété en assistant les jansénistes dans leur combat contre les jésuites.
Avec la mort de son père le 24 septembre 1651, Blaise Pascal donne un sens profondément chrétien à la mort et ses réflexions philosophiques à ce sujet seront à la base des *Pensées*.
En 1658, Blaise Pascal est très malade.
Il décède le 19 août 1662 à Paris avant d'avoir achevé une *Apologie de la religion chrétienne*, dont les fragments seront publiés en 1670, sous le titre des *Pensées*.

6. Une autre visualisation

VISION

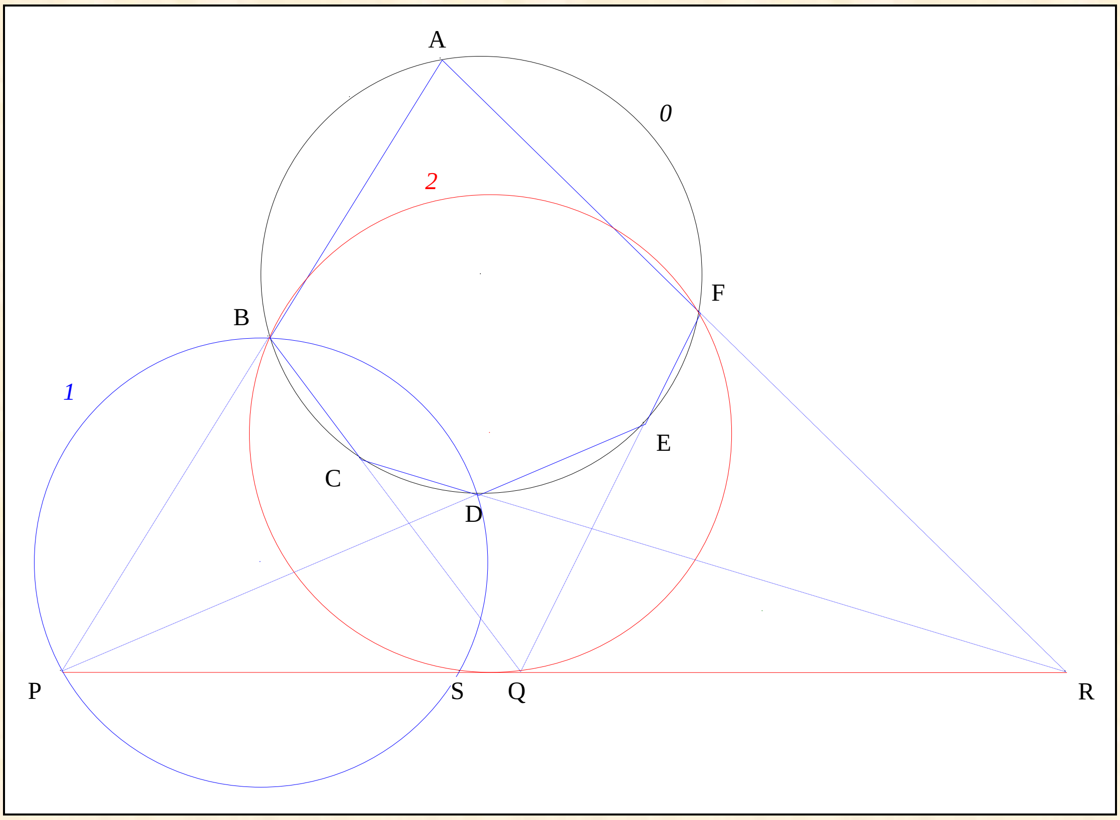
Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	A, B, C, D, E, F	les six sommets d'un hexagone tels que A, B, C, D, E soient sur *0*
et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

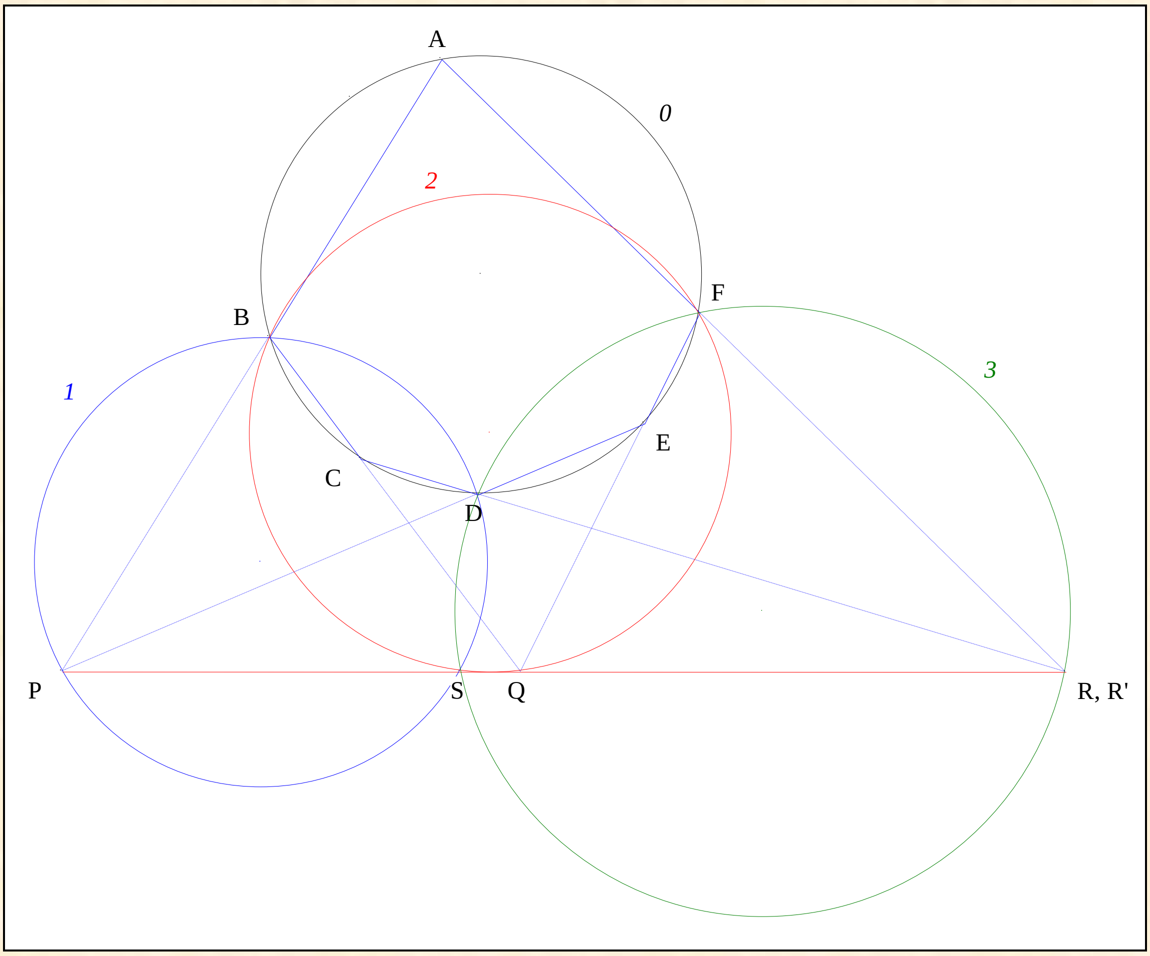
Donné : F est sur *0* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *1* le cercle passant par B, D, P,
  2 le cercle passant par D, F, B
  et S le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après "Le théorème des trois cercles concourants" (Cf. Annexe **2**)
  appliqué à *1*, *0*, *2* concourants en B et au triangle PEQ avec D sur (PE), F sur (EQ), S, P et S sont alignés.



- Notons *3* le cercle passant par D, F, S
  et R' le second point d'intersection de (PSQ) avec *3*.

- D'après "Le théorème des trois cercles concourants" (Cf. Annexe **2**)
  appliqué à *0*, *2*, *3* concourants en F et au triangle R'QC avec S sur (R'Q), B sur (QC),
  C, D et R' sont alignés.

- D'après "Le théorème des trois cercles concourants" (Cf. Annexe **2**)
  appliqué à *0*, *1*, *3* concourants en D et au triangle R'PA avec S sur (R'P), B sur (PA),
  A, Fet R' sont alignés.

- R' étant le point d'intersection de (CD) et (AF), est confondu avec R.

- **Conclusion :** P, Q et R sont alignés.

Commentaire : les points impliqués dans *1*, *2* et *3* correspondent au triangle BDF.

Note historique : cet exercice proposé dans un ouvrage des années 60 en France a été rappelé par François Rideau[12] et traitée par la technique des angles orientés dans le magazine français *Quadrature*.
Une preuve angulaire originale[13] a été présentée en 2008 sur le site *Mathlinks*, puis

---

12 Rideau F., Le théorème de Pascal, *Quadrature* **51** (janvier-mars 2004).

13 Juan ? (Mar del Plata, Argentine), Is Pascal for circles the same of "it exists the isog conj"?, A simple proof of Pascal's Theorem... *Mathlinks* du 02/08/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=218485&p=1211436#p1211436
Donaire Peña, Milton F. (Lima, Pérou) : *Una prueba elemental del teorema de Pascal. Revistaoim* **39** (juillet-août 2010).

reprise dans la revue *Revistaoim* du professeur Francisco Bellot Rosado.

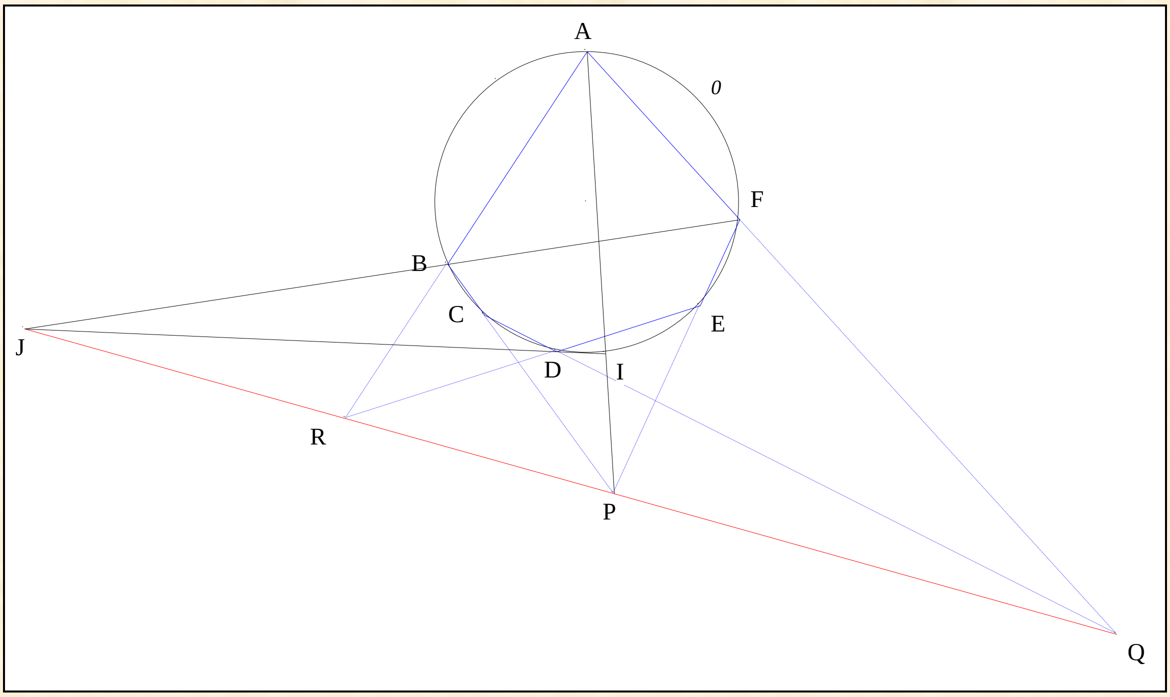
VISUALISATION SUFFISANTE

- Elle est laissée au soin du lecteur.

7. Un exercice de Paul Aubert

VISION DOUBLE

Figure :



Traits : *0* un cercle,
ABCDEF un pascal de *0*,
(PQR) la pascale de ABCDEF
I le second point d'intersection de (AP) avec *0*
et J le point d'intersection de (DI) et (BF).

Donné : F est sur (PQR).[14]

Conseil : appliqué le lemme de pascal au pascal BAIDEF

B	E	I
D	A	F
P	J	R

Énoncé traditionnel :

[14] Aubert P., Sur une propriété des sections coniques, *Cambridge Journals* (1888) 61-66 ; journals.cambridge.org/article_S0013091500030376

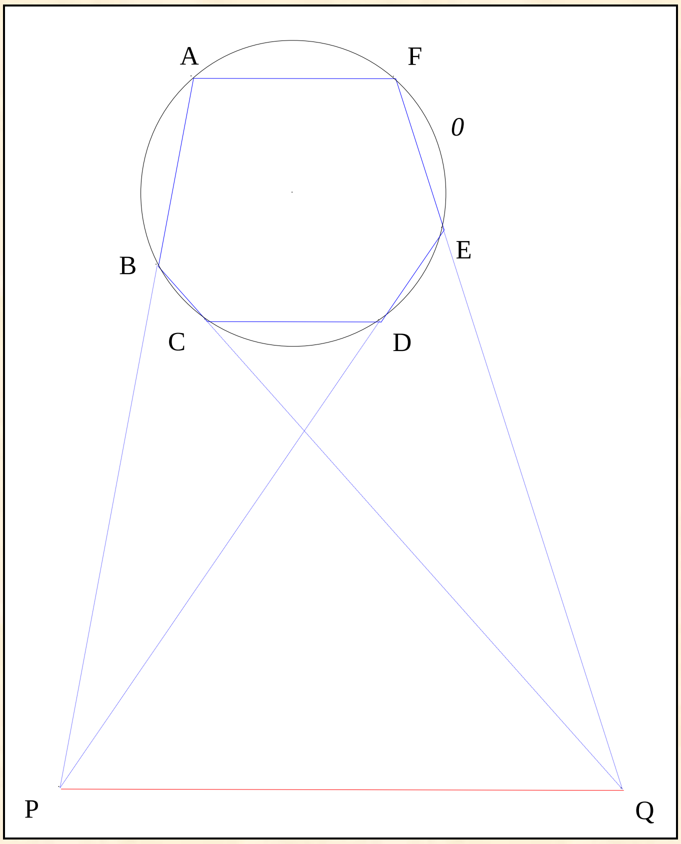
Si l'on inscrit un hexagone à une conique, les côtés opposés se coupent deux à deux en trois points en ligne droite. La droite qui joint le point de concours de deux côtés à l'un des deux sommets non situés sur ces côtés rencontre la courbe en un autre point. Si l'on joint ce point au sommet opposé au premier, la droite qui joint les deux sommets voisins de celui-ci rencontre la précédente en un point de la droite de Pascal. On obtient ainsi trois systèmes de trois points situés sur cette droite.

B. DEUX CAS PARTICULIER

1. L'équivalence de Paul Aubert

VISION DOUBLE

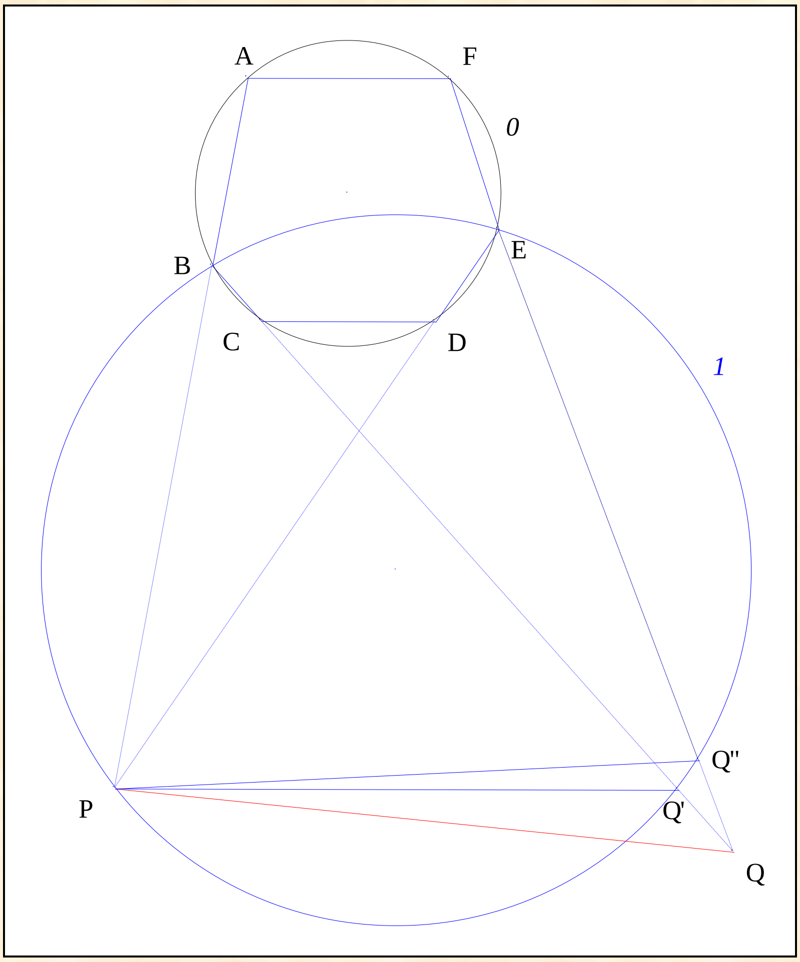
Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	A, B, C, D, E	cinq points de *0*,
	F	un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
et	P, Q	les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF).

Donné : F est sur *0* *si, et seulement si,* (PQ) est parallèle à (AF).

VISUALISATION NÉCESSAIRE [15]



- Notons *1* le cercle passant par P, E, B,
  et Q', Q" les seconds points d'intersection resp. de (BC), (FE) avec *1*.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et E, les moniennes (ABP) et (FEQ"), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AF) // (PQ").

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et E, les moniennes (CBQ') et (DEP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (CD) // (Q'P) ;
  en conséquence, (PQ') // (PQ") ;
  d'après le postulat d'Euclide, (PQ') = (PQ") ;
  par construction, Q, Q' et Q" sont confondus.

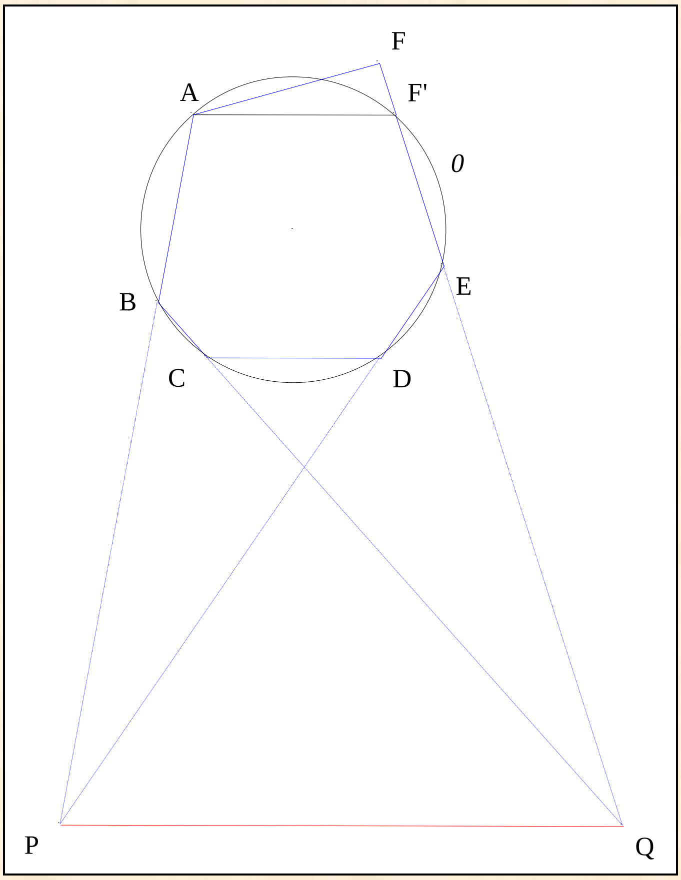
- **Conclusion :** (PQ) est parallèle à (AF).

Scolie : (PQ) est la pascale du pascal ABCDEF.

VISUALISATION SUFFISANTE [16]

---

15 Aubert P..
16 BMO (2006) problem **2**.

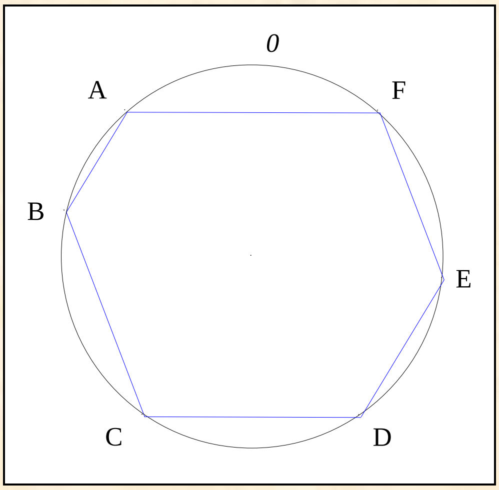


- Raisonnons par l'absurde en affirmant (PQ) est parallèle à (AF) et F n'est pas sur *0*.
- Notons F' le second point d'intersection de (EQ) avec *0*.
- **Scolie :** (AF') n'étant pas parallèle à (PQ), (AF') n'est pas parallèle à (CD).
- Notons R le point d'intersection de (AF') et (CD).
- D'après **A. 1.** Le "lemme" de Blaise Pascal, (PQR) est la pascale du pascal ABCDEF'A ;
  en conséquence, (PQR) n'est pas parallèle à (CD) ;
  il s'en suit que (PQR) n'est pas parallèle à (AF), ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** F est sur *0*.

2. L'équivalence de Joseph Diaz Gergonne

VISION DOUBLE

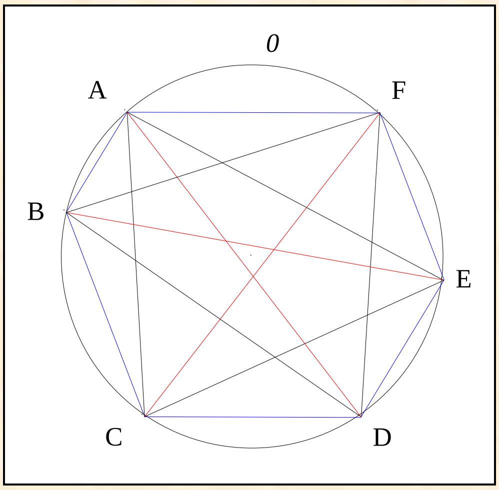
Figure :



Traits :	*0*	un cercle,	
	A, B, C, D, E	cinq points de *0* tel que	(AB) soit parallèle à (DE)
et	F	un point tel que	(BC) soit parallèle à (EF)

Donné :	F est sur *0*	*si, et seulement si,*	(CD) est parallèle à (AF).

VISUALISATION NÉCESSAIRE [17]



- Le trapèze ABDE étant cyclique est isocèle ; en conséquence, AD = BE.
- Le trapèze BCEF étant cyclique est isocèle ; en conséquence, BE = CF ;
  par transitivité de la relation =, AD = CF.
- Le quadrilatère convexe CDAF ayant ses deux diagonales égales, est isocèle.
- **Conclusion :** le quadrilatère CDAF étant isocèle, (CD) est parallèle à (AF).

Énoncé traditionnel : *si,* *deux paires de côtés opposés d'un pascal sont parallèles*
alors, *il en est de même pour la troisième paire.*

Scolie : la pascale du pascal ABCDEF est "la droite à l'infini".

---

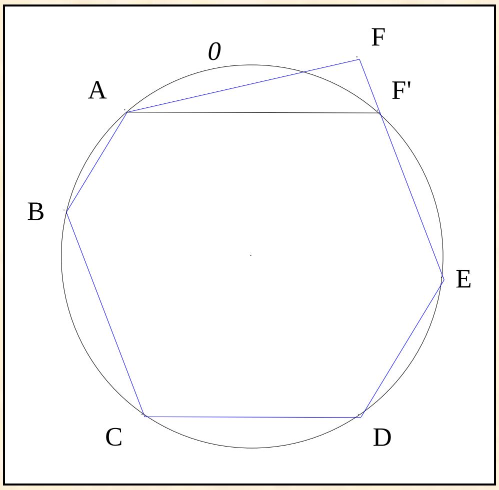
[17] Gergonne D. J. (1813).

Note historique : ce résultat a été évoqué et démontré par Joseph Diaz Gergonne[18] en 1813.

I. *Hexagone inscrit.*

1. Par les élémens de géométrie, il est facile de démontrer que, *si deux côtés consécutifs d'un hexagone inscrit au cercle sont respectivement parallèles à leurs opposés, les deux autres côtés opposés de cet hexagone seront aussi parallèles l'un à l'autre.* (*)

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant (CD) est parallèle à (AF) et F n'est pas sur *0*.
- Notons F' le second point d'intersection de (EF) avec *0*.
- D'après la visualisation nécessaire, (AF') est parallèle à (CD) ;
  en conséquence, (AF') est parallèle à (AF) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AF') est identique à (AF) ;
  par construction, F' et F sont confondus ;
  il s'en suit que F est sur *0*, ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** F est sur *0*.

[18] Gergone J. D., Géométrie de la règle. Application de la doctrine des projections à la démonstration des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques, *Annales* de Gergonne **4** (1813-1814) 78 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

C. RAYONNEMENT * BEAUTÉ * CHARME

Avertissement : cette partie n'engage que l'auteur.

PRÉPARATION

parmi les organes
un seul régit tous les autres :
c'est la tête pour certains, le cœur pour d'autres

Avant de se lancer dans l'étude d'une configuration hexagonale, le Géomètre commence par s'installer à son bureau, puis allume son ordinateur et clique sur l'icône de son logiciel de Géométrie qui s'ouvre dans un écran oblong symbolisant le monde académique.

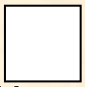
S'emparant des instruments[19] de Platon[20], il commence par déterminer sur son écran vierge un centre, trace ensuite un cercle autour de lui et, enfin, y inscrit avec soins un hexagone i.e. un pascal, en se souvenant au fur et à mesure des différents éléments nécessaires à sa construction. Face au tracé qu'il vient de réaliser avec son cœur, il se souvient de ce que certains de ses Maîtres inspirés lui avaient enseigné :

ne pas se comporter
comme un analyste froid et dominateur
mais comme un ardent amoureux épris de son Sujet

UNE SEMBLANCE

Par Grâce ou par Magie i.e. lorsque l'Âme universelle agit, le Géomètre au cœur pur se retrouve face à un spéculum[21] quadrangulaire, voire face à sa véritable nature.

Du rectangle au carré[22]



du monde

à l'uni-vers

Et dans les profondeurs sans fin de ce miroir magique, les nombreuses unités géométriques qu'il avait distinguées lors de la construction du pascal, se dissolvent les unes après les autres au sein d'une aurore naissante face à l'émergence d'une **Semblance**[23] rempli de charme i.e. d'un **être** cristallin[24] rayonnant de **beauté**. Ses traits essentiels transcendent le tracé électronique devenu, l'espace d'un instant, une figure iconique au **centre** d'un manchon circulaire de ténèbres.

---

19 La règle et le compas.

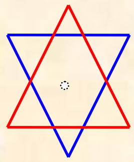
20 Philosophe grec, 428 ou 427-348 av. J.-C., disciple de Socrate qui oscilla entre la tendresse filiale qu'il vouait à son maître et l'affection sans limite pour Dion de Syracuse à la fin de sa vie. Dion était le frère du tyran Denis de Syracuse. Philolaüs tenté par une grande somme d'argent, leur vendit trois livres qui contenaient l'essence même de la doctrine secrète du pythagoricisme. Platon, lors de son premier séjour à Syracuse, eut accès grâce à Dion à ce trésor de connaissances. Appuyé par Carthage, Dion devint tyran de Syracuse de 357 à 354.

21 Miroir.

22 Le carré parfait répond aux exigences du cœur.

23 Sel Philosophal ou Materia prima ; ce Sel est semblable au cristal par sa transparence et sa sonorité. Il est à l'origine de l'art du vitrail au sein des cathédrales.

24 Cet être vivant est alors **inséparable** de la conscience de celui qui le regarde.



L'étoile de Salomon[25]

Au cours de cette effusion[26] silencieuse, le Géomètre au cœur grand ouvert sent qu'il est habité par une Présence[27] immanente et muette qui lui insuffle un enseignement lapidaire.

Omnia ab uno et in unum omnia [28]

Dérangé tout à coup dans ses travaux symboliques par un bruit insolite, son front se ride comme par réflexe et son regard s'aiguise à tel point qu'il se surprend à vouloir épingler avec ses deux yeux cette Semblance, ce qui est absolument déconseillé. Face à cette agression purement visuelle, l'*hexagramma mysticum* se rétracte aussitôt pour retomber et s'évanouir comme une étoile filante dans les profondeurs de son ciel intérieur... en laissant pour change de sa longue chevelure laiteuse,

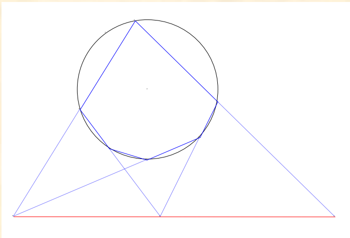
l'étude

i.e.

l'apprentissage et l'approfondissement

du

théorème de Pascal



Selon Michel Chasles, *l'hexagramme mystique* fut entre les mains de Pascal d'un usage magique.

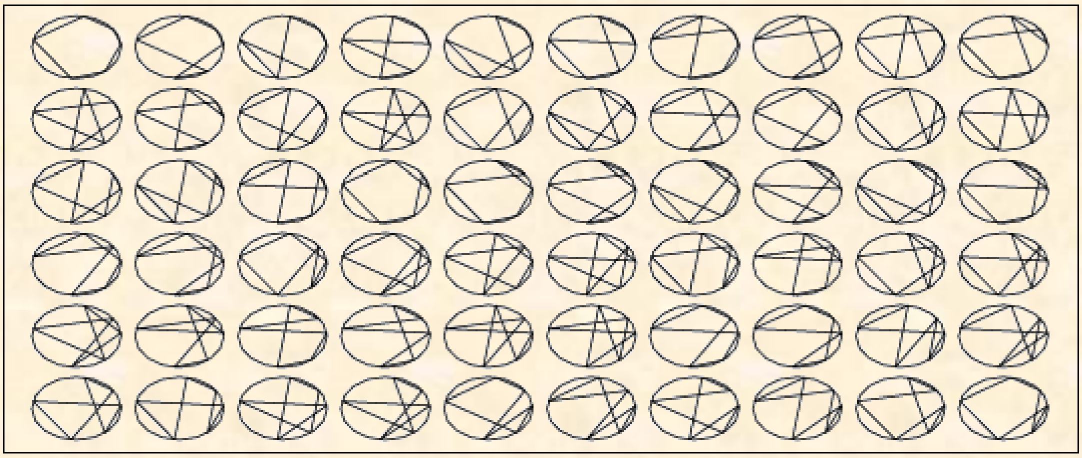
[25] Hexagramme, étoile à six pointes.
[26] Manifestation de tendresse et d'affection.
[27] L'Un.
[28] Un est dans Tout et Tout est dans Un ; en grec, "en to pan".

D. DÉVELOPPEMENTS

Commentaire : si, Blaise Pascal encore enfant avait trouvé en 1639-40 son théorème devenu célèbre par la suite, il faudra attendre l'année 1806 pour que Charles Julien Brianchon ne l'étende et 1828 pour que Jakob Steiner[29] s'y intéresse et commence un premier développement dans les *Annales* de Gergonne.

I. DÉNOMBREMENT

1. Pascals et pascales



30

- Notons *0* un cercle
  et A, B, C, D, E, F six points de *0*.

- En partant de n'importe quel point, par exemple A,
  nous pouvons joindre A à l'un des points restants de 5 façons différentes.

- En supposant que nous choisissons par exemple B,
  nous pouvons joindre B à l'un des points restants de 4 façons différentes.

- et ainsi de suite…

- Nous pouvons joindre A à un autre point, celui-ci à un autre et ainsi de suite jusqu'au point A de 5x4x3x3x2x1 façons différentes, mais compté deux fois.

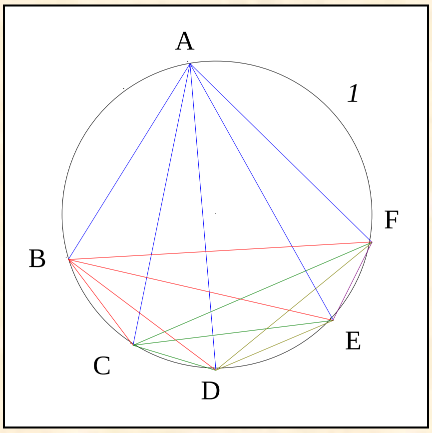
- **Conclusion :** six points cocycliques déterminent 60 pascals distincts.

Énoncé : 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales.*

2. c-droites

[29] Steiner, J. "Questions proposées. Théorèmes sur l'hexagramum mysticum." *Ann. Math.* de Gergonne **18** (1827-1828) 339-340 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

[30] Weisstein E., *WolframMathWorld* ; http://mathworld.wolfram.com/



- Notons *0* un cercle
  et A, B, C, D, E, F six point de *0*.

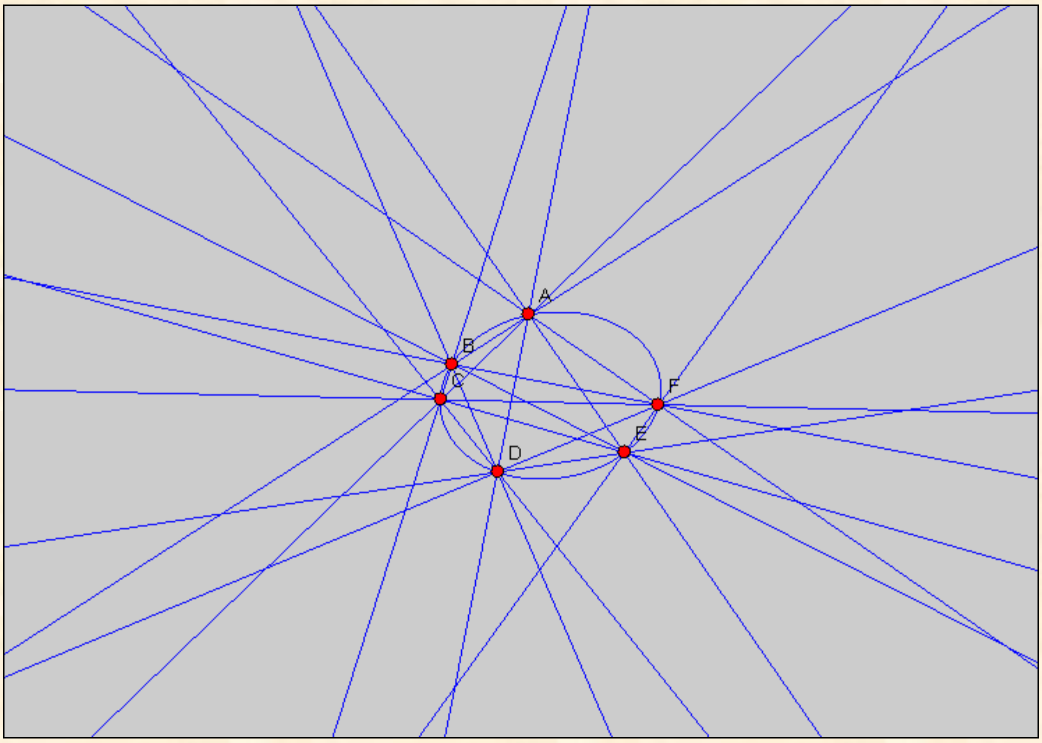
- Partons de A : nous pouvons le joindre à B, C, D, E, F par 5 droites ;
  puis avec B : nous pouvons le joindre à C, D, E, F par 4 droites.
  puis avec C : nous pouvons le joindre à D, E, F par 3 droites.
  puis avec D : nous pouvons le joindre à E, F par 2 droites.
  puis avec E : nous pouvons le joindre à F par 1 droite.

- **Conclusion :** nous pouvons réunir ces 6 points par 15 droites.

- Une telle droite est une "c-droite". (c pour côté)

Énoncé traditionnel: *six points cocycliques déterminent* 15 c-*droites.*

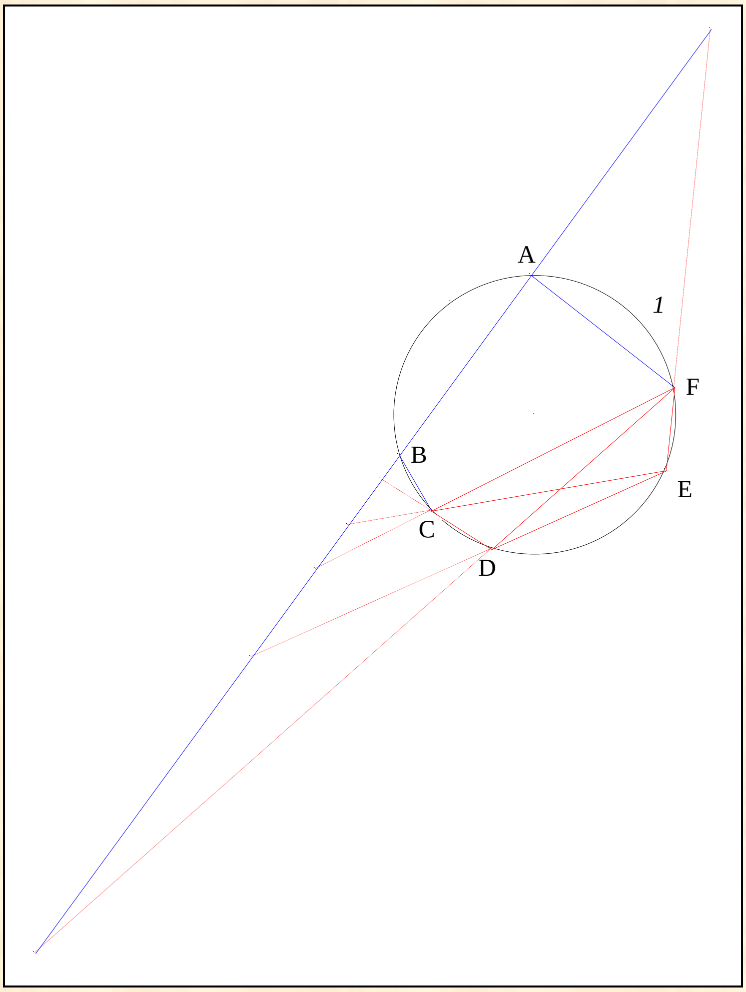
Une photo :



[31]

[31] Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ;
http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

3. p-points



- Notons 0 un cercle
  et A, B, C, D, E, F six point de 0.

- Par exemple, (AB) rencontre resp. (CD), (DE), (EF), (FC), (CE), (DF) en six points.

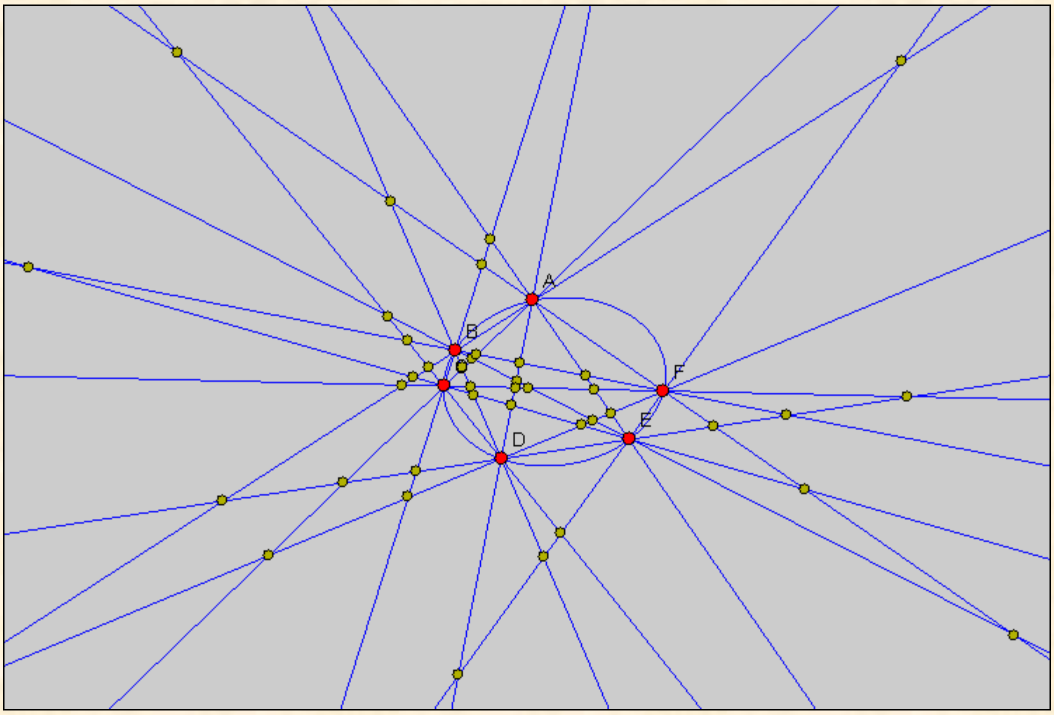
- D'une façon générale, chaque c-droite contient 6 points d'intersection en dehors des deux sommets qui la définissent.

- **Conclusion :** chaque point d'intersection étant compté deux fois,
  les 15 c-droites se coupent en (6.15)/2 points i.e. 45 points.

Scolie : le point d'intersection de deux c-droites en dehors des deux sommets qui la définissent est un "p-point". (p pour Pascal)

Énoncé traditionnel : *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points.*

Une photo



[32]

4. p-point et pascales ; règles

La règle tabulaire

- Considérons le pascal ABCDEF **(1)**

A	E	C
D	B	F

- Recherchons tous les tableaux qui conduisent au p-point P, intersection de (EF) et (BC).
  Pour cela, fixons la première colonne
  et considérons le sous tableau

E	C
B	F

* Par permutation des deux premières lignes du sous tableau
nous obtenons le pascal A**EF**D**BC** **(2)**

A	B	F
D	E	C

* Par symétrie
par rapport à la diagonale principale E-F du sous tableau
nous obtenons le pascal A**CB**D**EF** **(3)**

A	E	B
D	C	F

* Par symétrie
par rapport à la diagonale secondaire B-C du sous tableau
nous obtenons le pascal A**BC**D**FE** **(4)**

A	F	C
D	B	E

- Notons que toutes les autres permutations relatives au point d'intersection considéré sont inopérantes.

- **Conclusion :** P est sur les pascales de **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(4)**.

[32] Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ;
http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

La règle ponctuelle

- Considérons le pascal **(1)** A**BC**D**EF** et P intersection de (EF) et (BC).

- Nous obtenons les trois autres pascals dont les pascales passent par P de la façon suivante

  (2) par permutation simultanée de BC et EF
  (3) par permutation de B et C
  (4) par permutation de E et F.

- **Conclusion :** P est sur les pascales de A**BC**D**EF**, A**EF**D**BC,** A**CB**D**EF,** A**BC**D**FE**.

Énoncé traditionnel: *par chaque* p-*point passent exactement* 4 *pascales*.

Scolies : **(1)** chaque p-point est dit "quadruple" relativement au nombre de pascales qui passent par ce p-point.

(2) Les 45 p-points sont sur 60 pascales.

Exercice : ABCDEF étant un pascal,
montrer de deux façons différentes que le point d'intersection R de (AB) et (DE),
est sur les pascales de ABCDEF, ABFDEC, ABCEDF et ABFEDC.

5. Première synthèse

* *un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*
* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*
* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *chaque* p-*point est quadruple*.

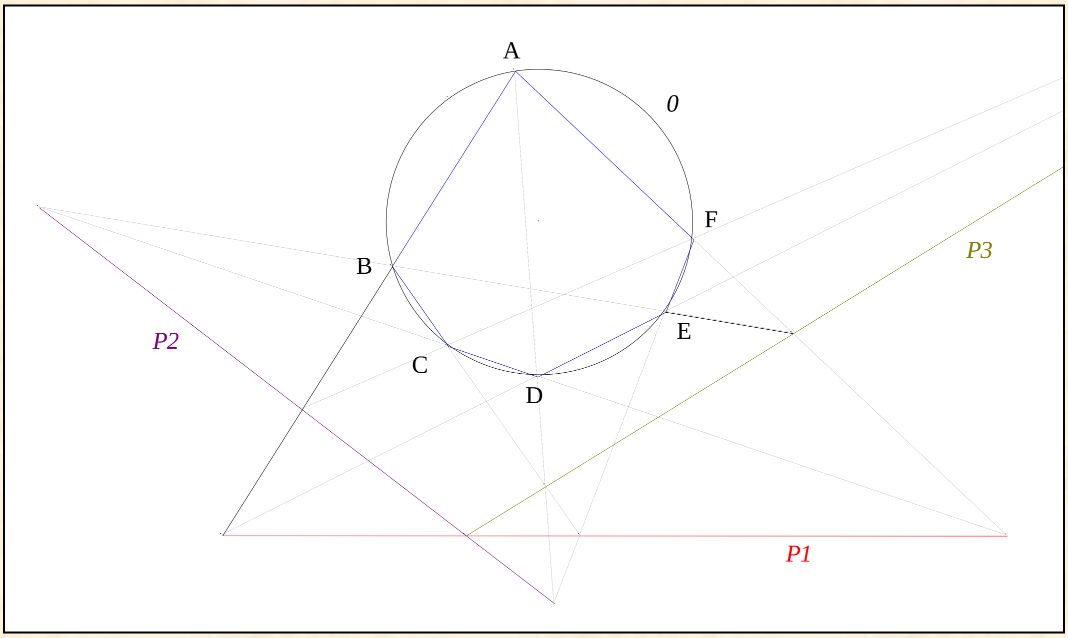
II. LE PREMIER THÉORÈME
DE
JAKOB STEINER

Commentaire : en considérant deux triangles disjoints et cocycliques,
l'auteur proposer une technique pour déterminer trois S-pascals dont les pascales sont concourantes.
Pour cela, considérons l'exemple de Jakob Steiner.[33]

1. s-point ou point de Steiner

VISION

Figure :

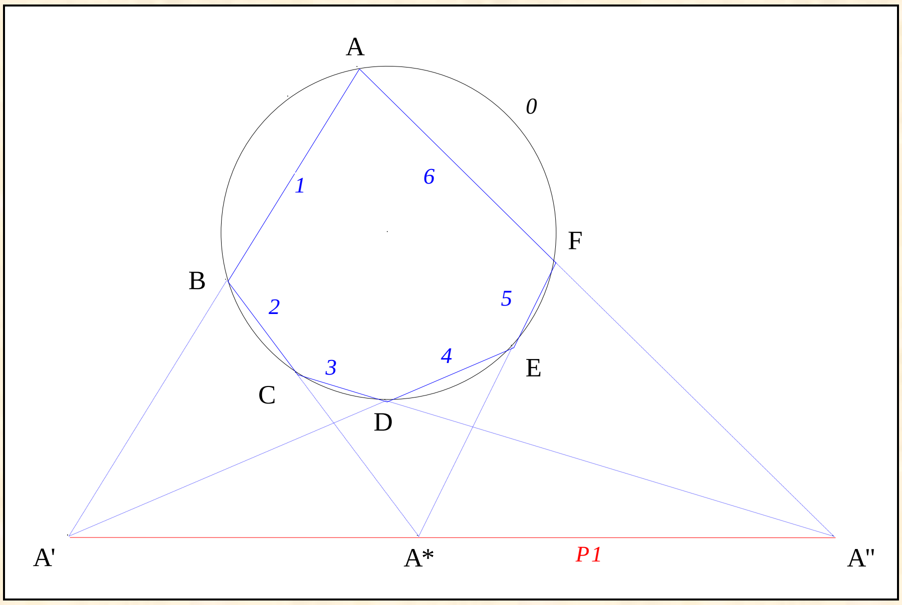


Traits :	*0*	un cercle,
	ABCDEF, ABEFCD, ADEBCF	trois pascals de *0*
et	*P1*, *P2*, *P3*	les pascales resp. de ABCDEF, ADEBCF, CFEBAD.

Donné : *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

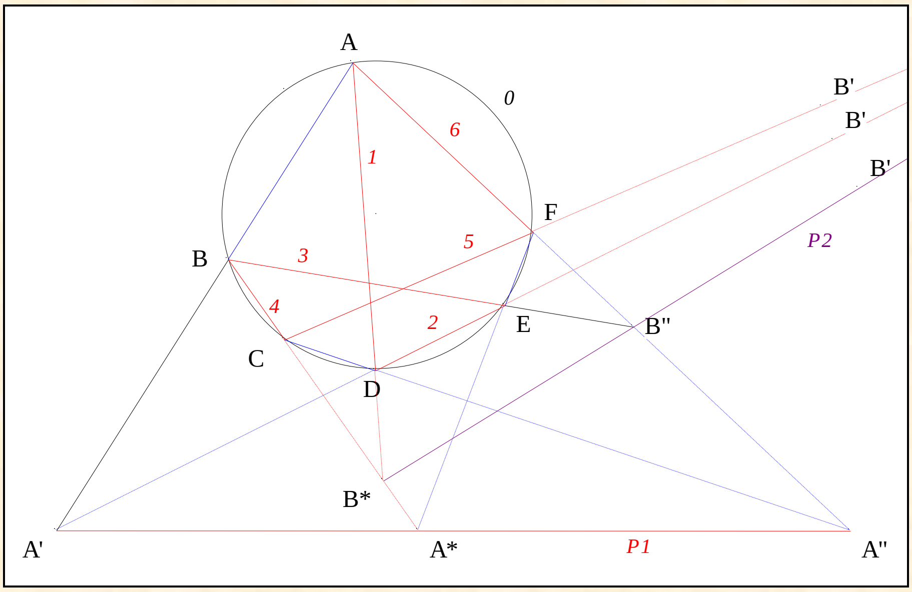
VISUALISATION

[33] Steiner J., Lehrsatz **4** bd**1** p. 177 ;
Steiner, J., Questions proposées. Théorèmes sur l'hexagramum mysticum. *Ann. Math.* de Gergonne **18** (1827-1828) 339-340 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA



A	E	C
D	B	F
A*	A"	A'

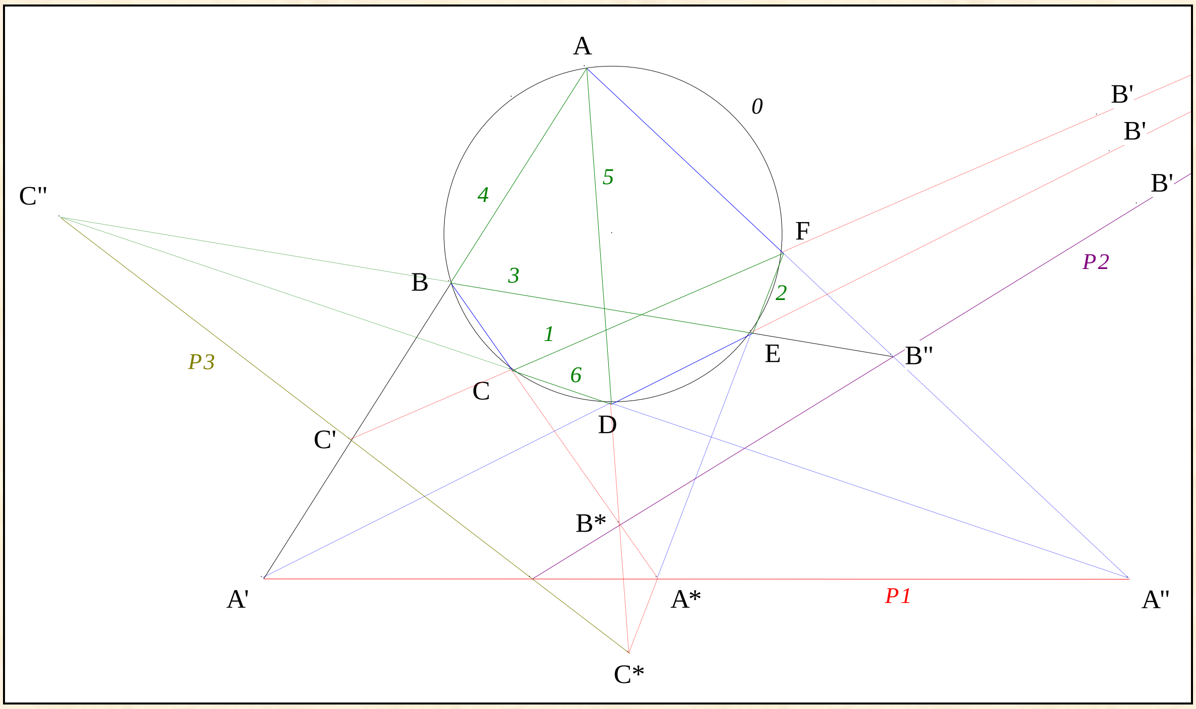
- Considérons le pascal de **départ** ABCDEF, sa pascale *P1* = (A'A"A*) et notons que *P1* est écrite de droite à gauche.



A	C	E
B	D	F
B'	B"	B*

- Considérons le pascal ADEBCF, sa pascale *P2* = (B'B"B*) et notons que *P2* est écrite de gauche à droite.

- **Scolie :** ABCDEF et ADEBCF ont trois côtés non successifs en commun [AF], [BC], [DE]. Les six autres côtés [CF], [FE], [EB], [BA], [AD], [DC] déterminent un troisième hexagone noté CFEBAD.



- Considérons le pascal CFEBAD, sa pascale *P3* = (C'C"C*) et notons que *P3* est écrite de droite à gauche

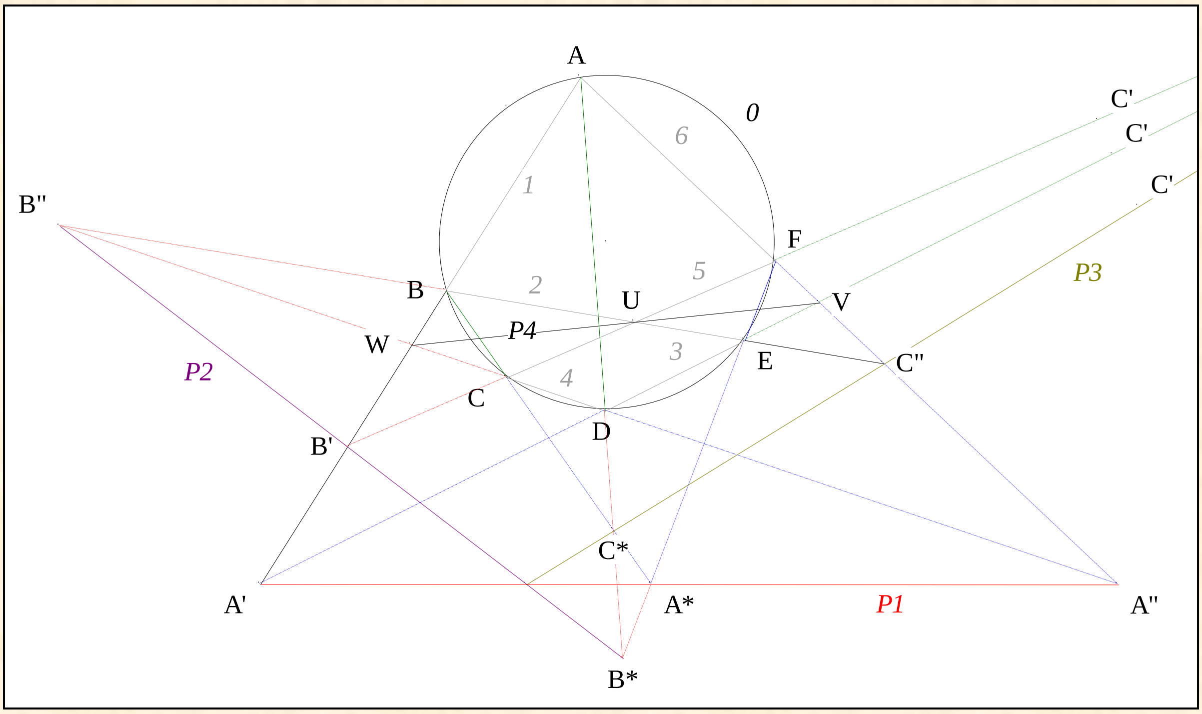
C	A	E
B	F	D
C*	C"	C'

- **Scolies :** **(1)** ADEBCF et CFEBAD ont trois côtés non successifs en commun [AD], [EB], [CF].

  (2) CFEBAD et ABCDEF ont trois côtés non successifs en commun [AB], [EF], [CD].

  (3) Les pascals mis en œuvre ABCDEF, ADEBCF et CFEBAD ont, deux à deux, trois côtés non successifs en commun.

  (4) Notons que les 6 c-droites restantes (AC), (AE), (EC), (BD), (BF) et (DF) ne déterminent pas un pascal
  mais deux triangles disjoints AEC et DBF qui apparaissent dans les deux premières lignes des 3 tableaux précédents.



A	C	E
D	B	F
U	V	W

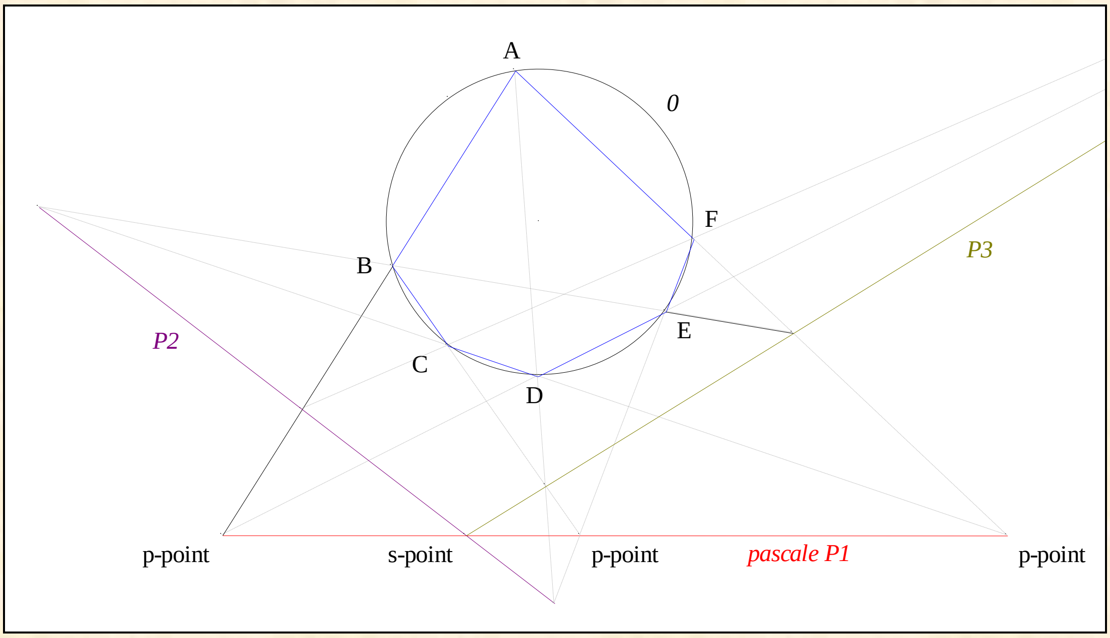
- Considérons le pascal ABEDCF et sa pascale *P4* = (UVW)

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **1**),
  les triangles A'B'C' et A"B"C" sont perspectifs d'axe (VWU) i.e. *P4* ;
  en conséquence, (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

- **Conclusion :** *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

Scolies : **(1)** ce point de concours est un "point de Steiner"
ou plus brièvement un "s-point". (s pour Steiner)

(2) Nous observons dans le dernier tableau que les deux triangles disjoints et cocycliques AEC et DBF apparaissent dans les deux premières lignes.



Énoncé traditionnel : *une pascale contient* 3 p-*points et un* s-*point*.

2. Nombre de s-point

- **Considérons** le pascal **(1)** FA BC DE et les côtés non successifs [FA], [BC], [DE].

- Les pascals

(2)	FA CB ED
(3)	FA DE CB
(4)	FA DE BC
(5)	FA DE BC
et **(6)**	FA DE CB

ont resp. les côtés non successifs [FA], [BC], [DE] en commun avec AB CD EF.

- **Scolies :**

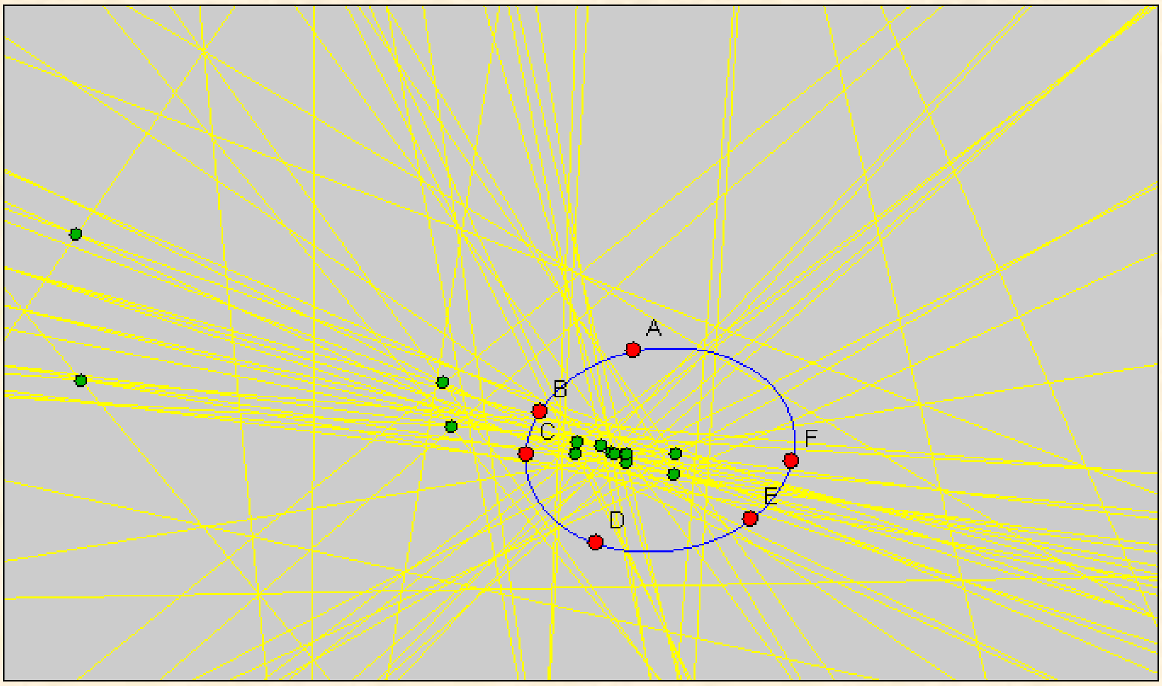
(1) d'après **D. II. 1.** s-point,
nous avons joint au pascal **(1)** AB CD EF, le pascal **(4)** FA DE BC.

(2) Tout autre pascal cité précédemment conduit à un autre point de Steiner.

(3) Nous dirons qu'un s-point est "triple" relativement au nombre de pascales qui passent par ce point.

- **Conclusion :** ayant montré que nous avons 60 pascals à partir de 6 points cocycliques
et que chaque s-point est triple,
nous obtenons 60 :3 i.e. 20 s-points.

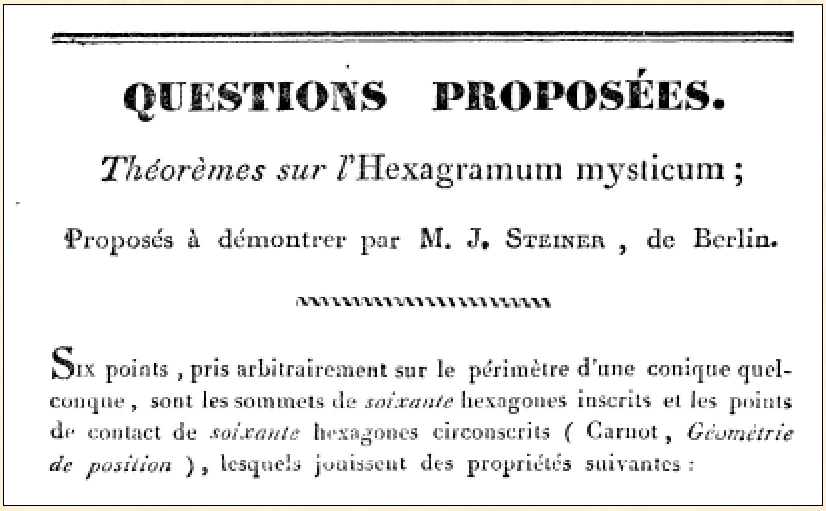
Photo :



[34]

Énoncé traditionnel : *chaque pascale contient* 3 p-*points et un* s-*point, et*
chacun des 20 s-*points est triple.*

Note historique : Jakob Steiner crut que ces 20 s-points étaient placés 4 à 4 sur 5 droites concourantes ; mais Julius Plücker montra qu'ils étaient placés 4 à 4 sur 15 droites.



QUESTIONS PROPOSÉES.

*Théorèmes sur l'*Hexagramum mysticum ;

Proposés à démontrer par M. J. STEINER, de Berlin.

SIX points, pris arbitrairement sur le périmètre d'une conique quelconque, sont les sommets de *soixante* hexagones inscrits et les points de contact de *soixante* hexagones circonscrits (Carnot, *Géométrie de position*), lesquels jouissent des propriétés suivantes :

[35]

[34] Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ; http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

[35] Steiner, J. "Questions proposées. Théorèmes sur l'hexagramum mysticum." *Ann. Math.* de Gergonne **18** (1827-1828) 339-340 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

340 QUESTIONS PROPOSÉES.

1.° Dans chacun des hexagones inscrits, les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite D (*Pascal*), de sorte qu'on obtient ainsi soixante droites D ;

2.° Ces soixante droites D concourent, trois à trois, en un même point p, de sorte qu'on obtient ainsi vingt points p ;

3.° Ces vingt points p appartiennent, quatre à quatre, à une même droite δ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq droites δ ;

4.° Ces cinq droites δ concourent en un même point ϖ' ;

1.° Dans chacun des hexagones circonscrits, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point P (*Brianchon*), de sorte qu'on obtient ainsi soixante points P ;

2.° Ces soixante points P appartiennent, trois à trois, à une même droite d ; de sorte qu'on obtient ainsi vingt droites d ;

3.° Ces vingt droites d concourent, quatre à quatre, en un même point ϖ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq points ϖ ;

4.° Ces cinq points ϖ appartiennent à une même droite δ' ;

5.° Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D ;

6.° Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d ;

7.° Les cinq points ϖ sont les pôles respectifs des cinq droites δ ;

8.° Enfin, le point ϖ' est le pôle de la droite δ'.

Notons que l'erreur de Jakob Steiner au 3° et 4° sera corrigée et démontré analytiquement l'année suivante par Julius Plüker[36] dans le *Journal* de Crelle.

3. Règles, S-pascals et notation d'un s-point

La règle tabulaire [37]

Hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal **A**B**C**D**E**F et sa pascale *P1* = (A'A"A*).

(1)

A	E	C
D	B	F
A*	A"	A'

- Fixons A et F dans le pascal de **départ** ABCDEF :

  * par permutation **horizontale** de E et C, puis de B et D,

(2)

A	C	E
B	D	F
B'	B"	B*

[36] Pluker J., Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbol und unbestimmter Coëfficienten, *Journal* de Crelle, vol. **5** (1829) 268-274.

[37] de l'auteur.

nous obtenons le deuxième pascal **A**DEBCF = **A**F**C**B**E**D et sa pascale *P2* = (B'B"B*).

- Fixons B et E dans le pascal de **précédent** ADEBCF :

* par permutation **horizontale** de A et C, puis de D et F,

(3)

C	A	E
B	F	D
C*	C"	C'

nous obtenons le dernier pascal CFEBAD = **A**D**C**F**E**B et sa pascale *P3* = (C'C"C*).

- **Scolies :** **(1)** les pascals ABCDEF, ADEBCF et CFEBAD ont deux à deux trois côtés non successifs en commun.

  (2) Fixons C et D dans le pascal de **précédent** CFEBAD ;
  par permutation **horizontale** de A et E, puis de B et F,

(1)

C	E	A
F	B	D
A'	A"	A*

nous obtenons le premier pascal CBAFED ou encore ABCDEF.

Les trois pascals

- **En partant** de **(2)** et en appliquant la procédure précédente, nous obtenons **(1)**, puis **(3)**.
- **En partant** de **(3)** et en appliquant la procédure précédente, nous obtenons **(1)**, puis **(2)**.

Preuve

- Fixons A et la seconde ligne dans le pascal de **départ** ABCDEF :

* par permutation horizontale de E et C,

(4)

A	C	E
D	B	F
U	V	W

nous obtenons le pascal ABEDCF et sa pascale (UVW) qui permet de conclure (Cf. p. **23-24**)

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **1**),
  les triangles A'B'C' et A"B"C" sont perspectifs d'axe (VWU) i.e. *P4* ;
  en conséquence, (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

- **Conclusion :** *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

Scolies : **(1)** ce point de concours est un "point de Steiner"
ou plus brièvement un s-point. (s pour Steiner)

(2) les 6 c-droites restantes ne déterminent pas un pascal
mais deux triangles disjoints AEC et DBF qui apparaissent dans les deux premières lignes des 4 tableaux précédents.

(3) A chaque permutation circulaire de D, B, F, la règle tabulaire conduit aux mêmes pascals à l'ordre près.

(3) Notation d'un s-point

à partir de l'observation précédente, le s-point de l’exemple traité est noté

AEC.DBF ou AEC.BFD ou AEC.FDB

(4) Les pascals ABCDEF, ADEBCF et CFEBAD mis en œuvre par la règle tabulaire sont les trois "S-pascals associé au s-point AEC.DBF".

La règle ponctuelle

Hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal **(1)** **A**B**C**D**E**F
  et fixons la position de trois lettres alternées, par exemple A, C et E.

- En permutant circulairement les lettres restantes i.e. B, D et F, nous obtenons les pascals

  AD**C**F**E**B i.e. **(3)** CFEBAD
  AF**C**B**E**D i.e. **(2)** ADEBCF

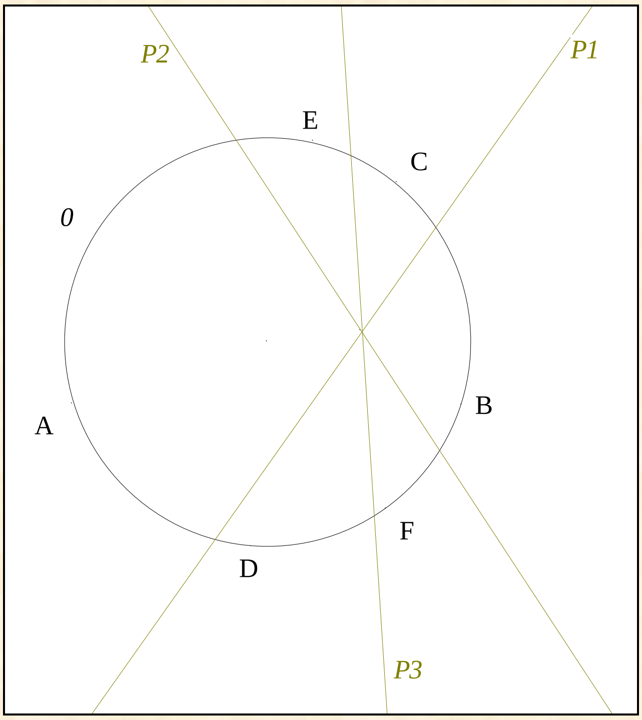
- Le s-point obtenu peut être noté **ACE.BDF**
  ce qui diffère de la précédente et que nous ne retiendrons pas.

5. Applications

EXEMPLE 1

VISION

Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	ABCFED, AFEBCD, CDEBAF	trois pascals de *0*
et	*P1*, *P2*, *P*3	les pascales de ABCFED, AFEBCD, CDEBAF.

Donné : *P1*, *P2* et *P*3 sont concourantes.[38]

Aide : à partir de ces trois pascals, les 6 c-droites restantes ne déterminent pas un pascal mais deux triangles disjoints.
Ces trois pascals ayant deux à deux trois côtés non successifs en commun,
leurs pascales concourent en un point de Steiner.
Sachant que l'ordre de ces pascals n'intervient pas dans la preuve,
considérons le pascal ABCFED noté

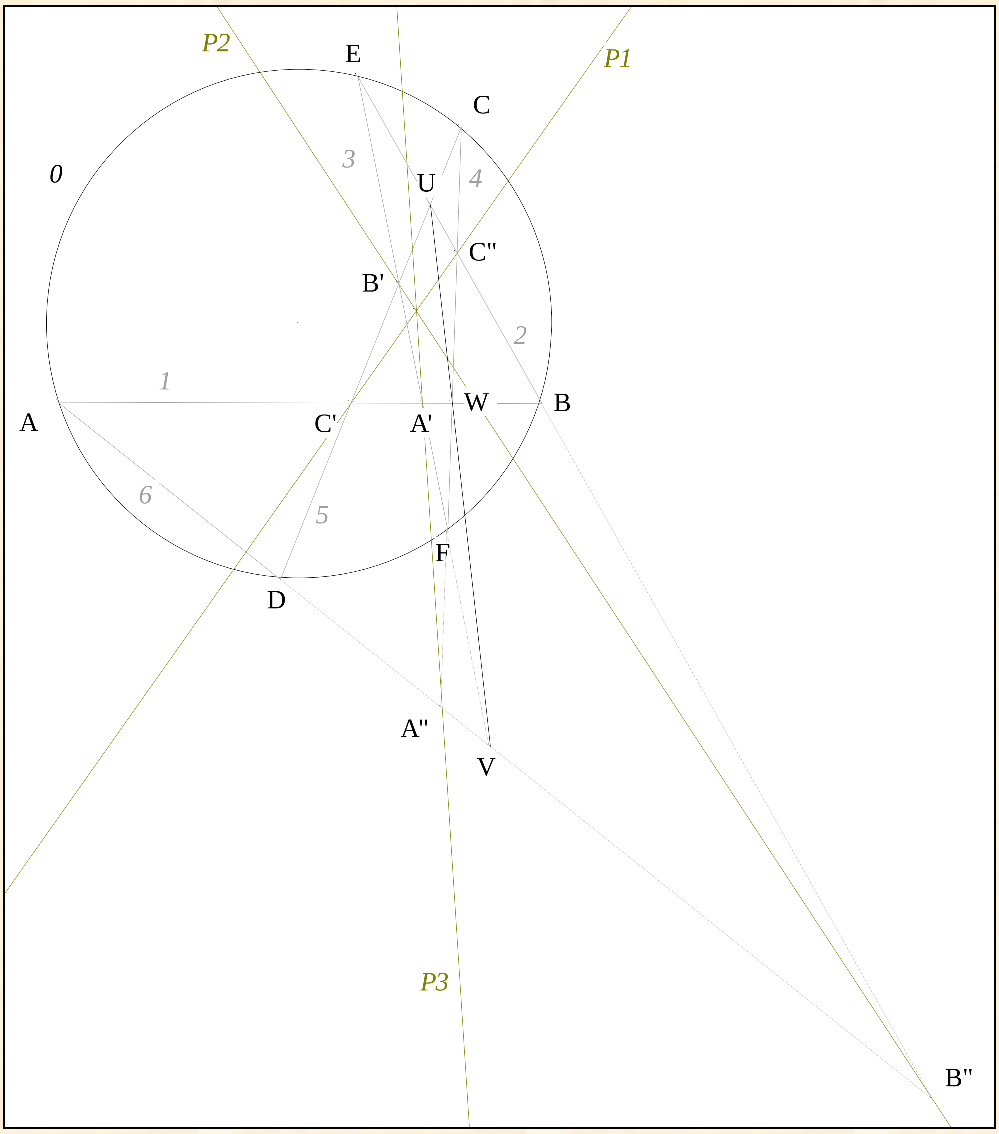
(1)

A	E	C
F	B	D
A*	A"	A'

et sa pascale *P1* = (A'A"A*).

Schéma d'une preuve

[38] Salmon G., *A treatise* on *Conics Sections* (1848) 5th ed. p. 361.



- Fixons A et D dans le pascal de **départ** ABCDEF :

  * par permutation **horizontale** de C et E, puis de B et F,

(2)

A	C	E
B	F	D
B'	B"	B*

nous obtenons le deuxième pascal AFEBCD et sa pascale *P2* = (B'B"B*).

- Fixons B et E dans le pascal de **précédent** AFEBCD :

  * par permutation **horizontale** de A et C, puis de D et F,

(3)

C	A	E
B	D	F
C*	C"	C'

nous obtenons le dernier pascal CDEBAF et sa pascale *P3* = (C'C"C*).

Preuve

- Fixons A et la seconde ligne dans le pascal de **départ** ABCFED :

* par permutation horizontale de E et C,

(1)

A	C	E
F	B	D
U	V	W

nous obtenons le pascal ABEFCD et sa pascale (UVW) qui permet de conclure.

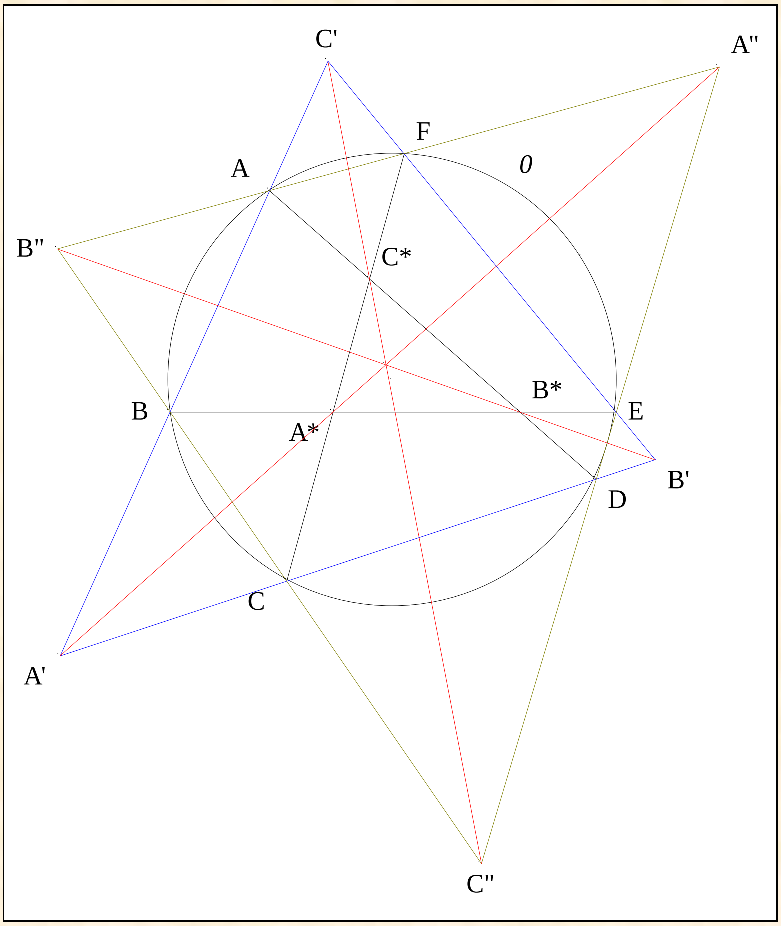
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **1**), les triangles A'B'C' et A"B"C" sont perspectifs d'axe (VWU) i.e. *P4* ; en conséquence, (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

- **Conclusion :** *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

EXEMPLE 2

VISION

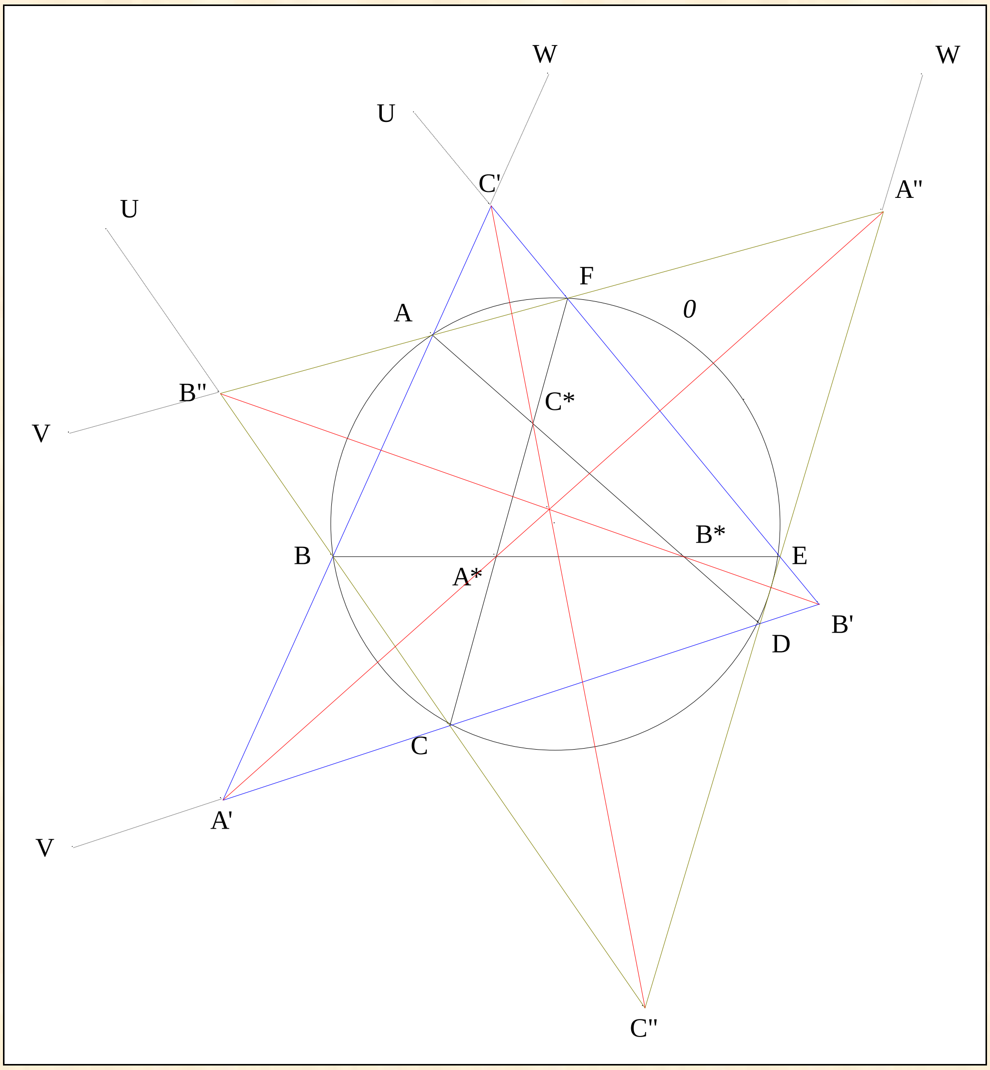
Figure :



Traits : *0* un cercle,
A, B, C, D, E, F six points de *0*
et A', B', C', A", B", C", A*, B*, C* neuf points comme indiqués sur la figure.

Donné : (A'A"A*), (B'B"B*) et (C'C"C*) sont concourantes.[39]

VISUALISATION



Hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal ABEDCF noté

(1)

A	C	E
D	B	F
A*	A"	A'

et sa pascale *P1* = (A'A"A*).

- Fixons A et F dans le pascal de **départ** ABEDCF :

  * par permutation horizontale de C et E, puis de B et D,

[39] Lachlan, section **181** p. 113

(2)

A	E	C
B	D	F
B'	B"	B*

nous obtenons le deuxième pascal ADCBEF et sa pascale *P2* = (B'B"B*).

- Fixons C et B dans le pascal précédent ADCBEF :

  * par permutation horizontale de E et C, puis de D et B,

(3)

E	A	C
B	F	D
C*	C"	C'

nous obtenons le dernier pascal EFCBAD et sa pascale *P3* = (C'C"C*).

- **Scolie :** les pascals ABEDCF, ADCBEF, EFCBAD ont deux à deux trois côtés non successifs en Commun et les 6 c-droites restantes ne déterminent pas un pascal.

Preuve

- Fixons A et la seconde ligne dans le pascal de **départ** ABEDCF :

  * par permutation horizontale de E et C,

A	E	C
D	B	F
U	V	W

nous obtenons le pascal ABCDEF et sa pascale (UVW) qui permet de conclure (Cf. p. 23-24)

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **1**),
  les triangles A'B'C' et A"B"C" sont perspectifs d'axe (VWU) i.e. *P4* ;
  en conséquence, (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

- **Conclusion :** *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

6. Deuxième synthèse

* *un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*
* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*
* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *par chaque* p-*point passent quatre pascales.*

* *chaque pascale contient* 3 p-*points et un* s-*point*
* *par chacun des* 20 s-*points passent trois pascales.*

7. Une courte biographie de Jakob Steiner

 [40]

Le plus grand géomètre depuis l'époque d'Apollonius

Fils du fermier suisse Niklaus Steiner et d'Anna Barbara Weber, Jacob Steiner dernier d'une famille de huit enfants, est né le 18 mars 1796 à Utzendorf (à 24 km au nord de Berne).
Analphabète jusqu'à l'âge de 14 ans, il est recueilli lors de sa 18-ème année et ce malgré l'opposition de ses parents, par le célèbre pédagogue Johann Heinrich Pestalozzi[41] qui développait une méthode d'enseignement très interactif à Yverdom à l'extrémité sud-est du lac de Neuchâtel. Le fait que Niklaus Steiner était incapable de payer quoi que ce soit pour les études de son fils n'était pas un problème, car Pestalozzi voulait essayer ses méthodes éducatives sur les pauvres.

En 1818, il est étudiant à l'université de Heidelberg (Allemagne) où il gagne sa vie en donnant des leçons privées de mathématiques. En 1821, il rejoint l'université de Berlin ou il survit avec les émoluments d'un modeste tutorat dans un établissement privé. La licence restreinte qu'il obtient lui permet d'enseigner uniquement les mathématiques au lycée de Werder à Berlin. Si, dans un premier temps, il reçoit de bons rapports concernant son enseignement, il entre rapidement en conflit avec son proviseur, le Dr Zimmermann. Ayant repris le poste de tutorat, il gagne assez d'argent pour lui permettre de suivre à nouveau des cours à l'Université de Berlin de novembre 1822 à août 1824.
En 1825, il obtient un poste de maître assistant à l'école technique de Berlin et rencontre les mêmes difficultés qu'au lycée de Werder en ne suivant pas les ordres du directeur K. F. Klöden. Malgré cette mauvaise ambiance, Jakob Steiner réussit à mener des recherches mathématiques et est promu maître principal en 1829. Dès le lancement en 1827 du *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Crelle, il publie son premier article concernant "La puissance d'un point par rapport à un cercle" suivi d'un autre dans les *Annales de Gergonne*[42].
En 1833, il écrit un ouvrage intitulé *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques* qui établit définitivement sa grande réputation.

Le 20 avril 1833, il reçoit suite à la recommandation de Charles Gustave Jacobi de huit ans plus jeune, le titre de docteur Honoris Causa de l'Université de Königsberg et le 5 juin de la même année, il est élu à l'Académie des Sciences de Prusse.
Le 8 octobre 1834, grâce au soutien de Charles Gustave Jacobi[43], de August Crelle et de von Humboldt, il est nommé "professor extraordinarius" à l'Université de Berlin, poste qu'il occupera jusqu'à sa mort.

---

[40] *The MacTutor History of Mathematics Archive* ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

[41] Pestalozzi Johann Heinrich (1746-1827) fut influencé par Jean-Jacques Rousseau. Sa pédagogie est fondée sur le travail manuel et sur l'enseignement mutuel.

[42] C'est dans les *Annales* **18** de 1827-28 qu'il propose dix questions sur le quadrilatère complet qui seront démontrées par de nombreux géomètres comme Miquel, Aubert...

[43] Jacobi C. G. (1804-185), professeur à l'université de Königsberg.

Jakob Steiner est le type même du géomètre pur ayant le souci permanent de privilégier la forme et non le nombre. Pour la petite histoire, ce Maître de la géométrie synthétique refusait de publier ses travaux dans les revues qui acceptaient des articles de géométrie analytique comme Julius Plücker affectait de les faire.

Suite à un problème rénal diagnostiqué en 1883, il passe la majeure partie de l'année dans sa Suisse natale, rejoignant Berlin en hiver pour donner des conférences. Cloué au lit, il est incapable d'exercer ses fonctions d'enseignant. Jamais marié, il décide de partager après sa mort, sa fortune, un tiers allant à l'Académie de Berlin pour fonder le prix Steiner, le reste divisé entre ses parents et l'école de son village natal pour que les enfants pauvres d'Utzendorf puissent avoir une meilleure chance que lui.

Il décède à Berne (Suisse) le premier avril 1893.[44]

[44] O'Connor J. J. and Robertson E. F., *The MacTutor History of Mathematics archive* ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

III. LE THÉORÈME

DU

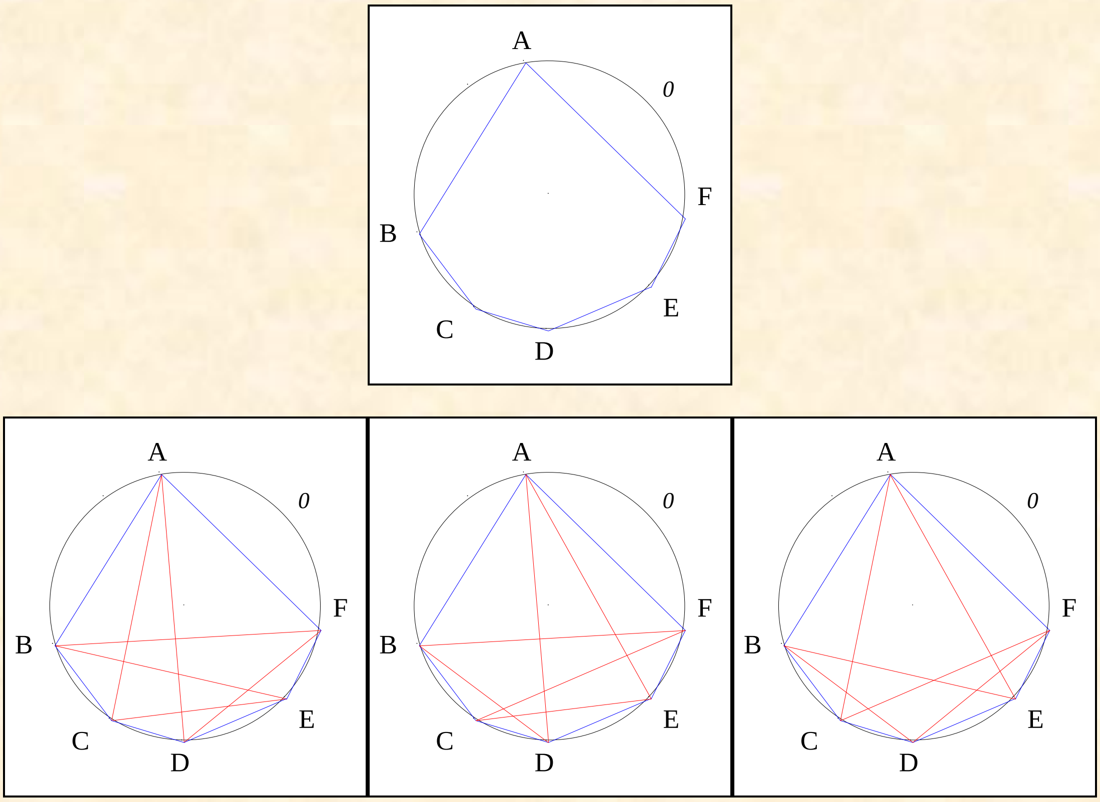
RÉVÉREND THOMAS KIRKMAN

Commentaire : en considérant un pascal,
l'auteur propose une technique pour déterminer trois pascals disjoints de l'initial et dont les pascales sont concourantes.

1. Pascals disjoints d'un pascal

VISION

Figures :



Finition : *0* un cercle,
ABCDEF un pascal de *0*
et ACEBFD, AECFBD, EACFDB trois pascals de *0*.

Définition : ACEBFD, AECFBD, EACFDB n'ayant aucun côté en commun avec ABCDEF sont dits "disjoints" par rapport avec ABCDEF.

Scolie : un pascal conduit à trois pascals disjoints.

2. Règle d'obtention de 3 pascals disjoints d'un pascal

- **Départ :** considérons, par exemple, le pascal ABCDEF noté

(0)

A	E	C
D	B	F

- Par écriture dans le sens **direct** des sommets du pascal de **départ** ABCDEF,

(1)

A	F	E
B	C	D

nous obtenons le premier pascal ACEBFD.

- Par symétrie par rapport à la diagonale principale A-D du tableau **précédent**,

(2)

A	B	C
F	E	D

nous obtenons le deuxième pascal AECFBD.

- **Scolie :** ACEBFD et AECFBD ont trois côtés non successifs en commun [CE], [BB], [DA].
Les six autres côtés [AC], [EB], [FD], [AE], [CF], [BD] déterminent un troisième hexagone noté ACFDBE ou encore EACFDB.

- Par symétrie par rapport à la diagonale secondaire C-F du tableau **précédent**,

(3)

E	D	C
F	A	B

nous obtenons le dernier pascal EACFDB.

- **Scolies :**

(1) par symétrie par rapport à la diagonale principale du tableau précédent,
nous retrouvons le premier pascal **(1)**

(2) AECFBD et EACFDB ont trois côtés non successifs en commun [AE], [CF], [BD].

(3) EACFDB et ACEBFD ont trois côtés non successifs en commun [AC], [FD], [BE].

(4) Les pascals mis en œuvre ACEBFD, AECFBD et EACFDB
ont, deux à deux, trois côtés non successifs en commun.

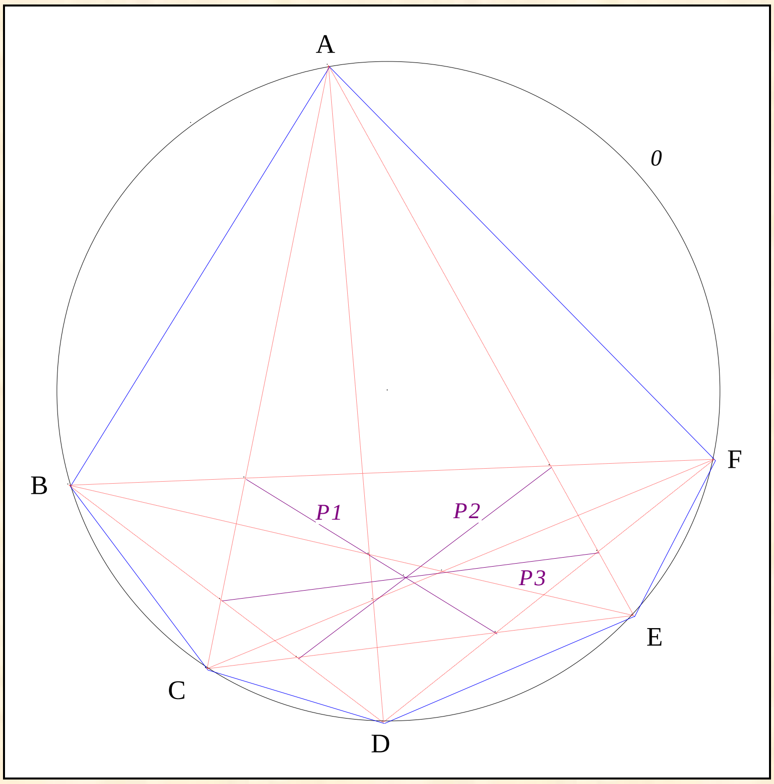
(5) Notons que les 6 c-droites restantes (AB), (BC), (CD), (DE), (EF) et (FA)
déterminent un pascal disjoint de **(1)**, **(2)** et **(3)**.

Commentaire : nous venons de montrer qu'à partir d'un pascal de départ donné,
la règle exposée nous permet de déduire successivement
les trois autres pascals disjoints de celui du départ, et inversement.

3. Premier théorème de Kirkman : k-point ou point de Kirkman

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,
ACEBFD, AECFBD, EACFDB trois pascals de ABCDEF
et *P1*, *P2*, *P3* les pascales resp. de ACEBFD, AECFBD, EACFDB.

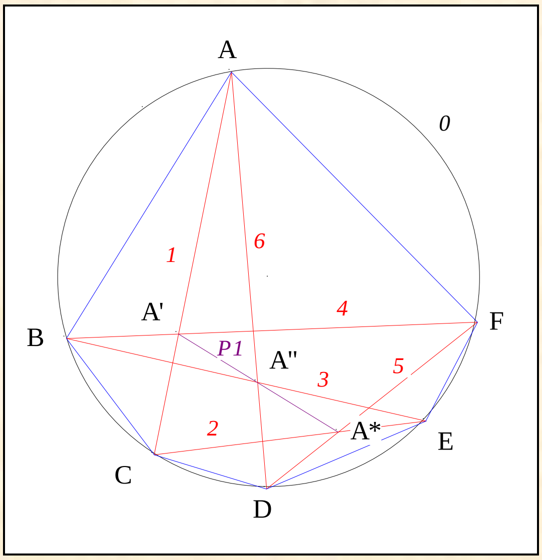
Donné : *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.[45]

VISUALISATION

- **Scolie :** ACEBFD, AECFBD et EACFDB sont disjoints par rapport à ABCDEF.

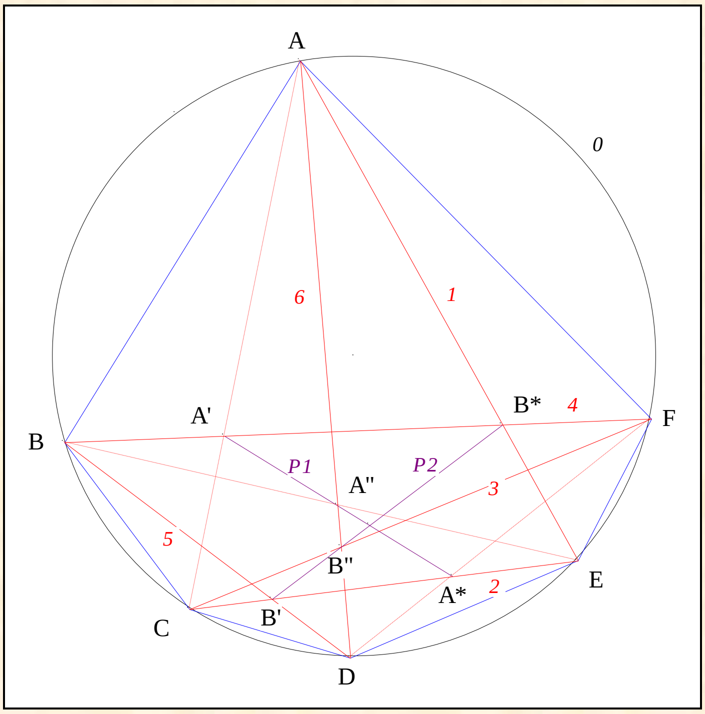
---

45 Salmon G., *A treatise* on *Conics Sections* (1848) 5th ed. p. 363.



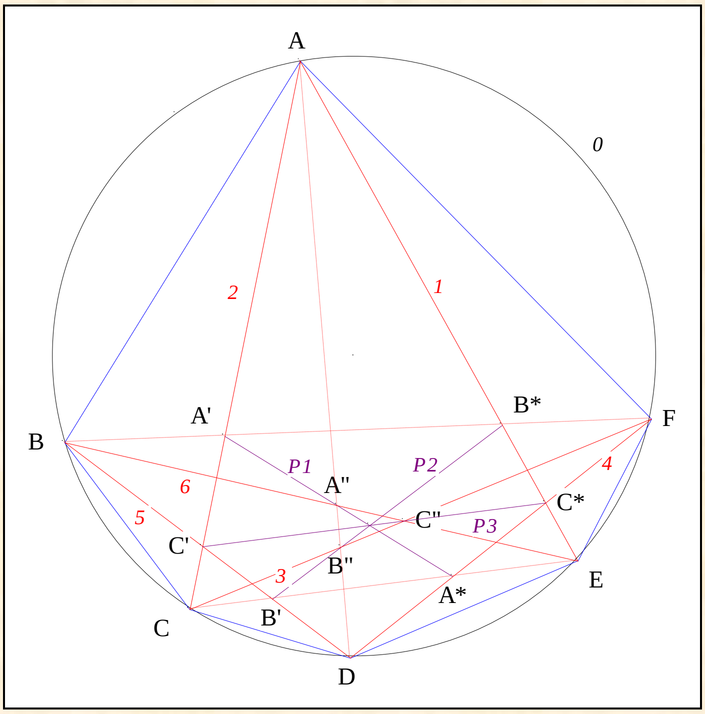
- Considérons le pascal ACEBFD, sa pascale *P1* et notons que *P1* est écrite de droite à gauche.

A	F	E
B	C	D
A*	A"	A'



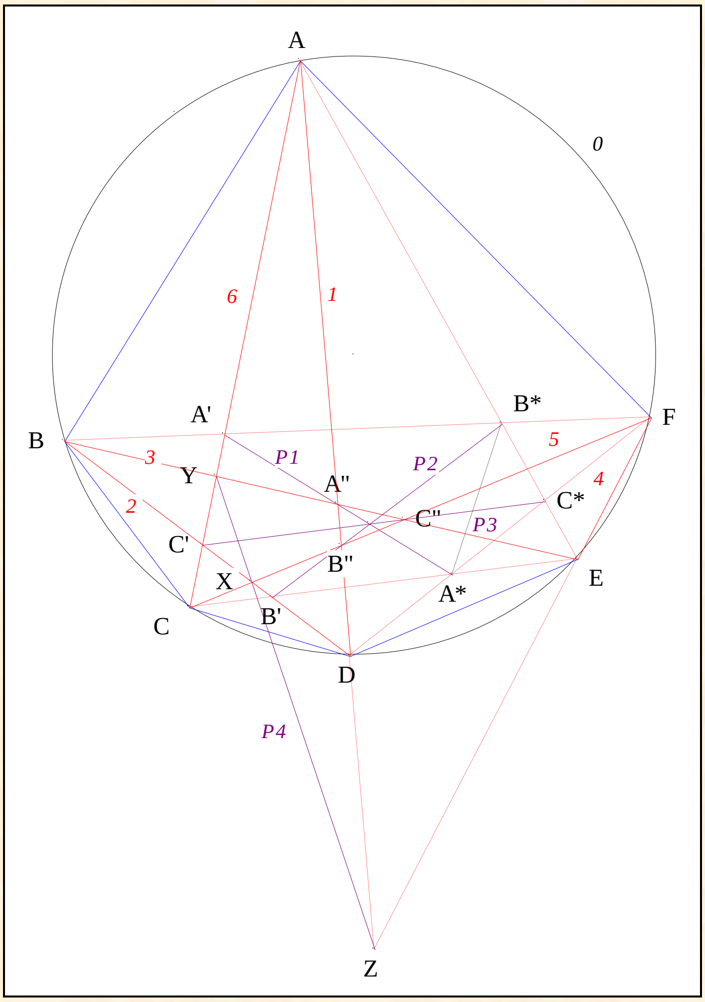
- Considérons le pascal AECFBD, sa pascale *P2* et notons que *P2* est écrite de gauche à droite.

A	B	C
F	E	D
B'	B"	B*



- Considérons le pascal EACFDB, sa pascale *P3* et notons que *P3* est écrite de gauche à droite.

E	D	C
F	A	B
C'	C"	C*



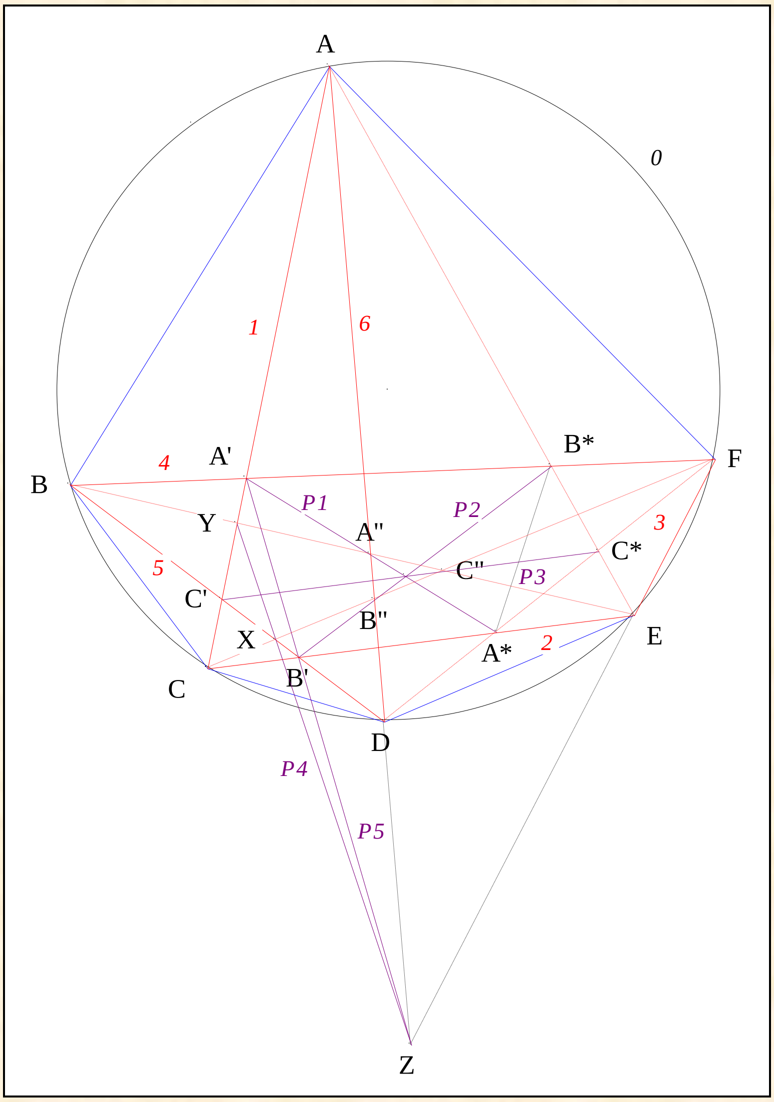
- Notons X, Y, Z les points d'intersection de (CF) et (BD), (AC) et (BE), (AD) et (EF).

- D'après **A. 1.** Le "lemme" de Pascal, (XYZ) est la pascale de ADBEFC notée

A	F	B
E	D	C
X	Y	Z

- Notons *P4* cette pascale.

- **Scolie :** ADBEFC est le premier pascal d'appui.



- D'après **A. 1.** Le "lemme" de Pascal, (A'B'Z) est la pascale de ACEFBD notée

A	B	E
F	C	D
B'	Z	A'

- Notons *P5* cette pascale.

- **Scolies :** **(1)** ACEFBD est le second pascal d'appui.
  (2) Z est le point d'intersection de (A'B') et (A"B")

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [46],
  les triangles A'B'C' et A"B"C" étant en perspective d'axe (XYZ),
  (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes i.e. *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

[46] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6** p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- **Conclusion :** *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

Scolies : **(1)** ce point de concours est
un "point de Kirkman relatif aux pascals ACEBFD, AECFBD, EACFDB"
ou encore un "k-point". (k pour Kirkman)

(2) Nous dirons qu'un k-point est "triple" relativement au nombre de pascales qui passent par ce point.

(3) Généralisation

Énoncé traditionnel : *chaque pascale contient* 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*point.*

Note historique : Thomas Kirkman[47] a présenté de nouveaux résultats dans le *Journal de Mathématiques de Cambridge et Dublin*.

4. Règle, K-pascals et notation d'un k-point

Hypothèses

- **Départ :** nous avons considéré le pascal ABCDEF noté

(0)

A	E	C
D	B	F

- Par écriture dans le sens **direct** des sommets du pascal de **départ** ABCDEF,

(1)

A	F	E
B	C	D
A*	A"	A'

nous obtenons le premier pascal ACEBFD et sa pascale *P1* = (A*A"A').

- Par symétrie par rapport à la diagonale principale A-D du sous-tableau **précédent**,

(2)

A	B	C
F	E	D
B'	B"	B*

nous obtenons le deuxième pascal AECFBD et sa pascale *P2* = (B'B"B*).

- Par symétrie par rapport à la diagonale secondaire C-F du sous-tableau **précédent**,

(3)

E	D	C
F	A	B
C'	C"	C*

nous obtenons le dernier pascal EACFDB et sa pascale *P3* = (C'C"C*).

47 Kirkman T., *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. 5 (1850) 185-200.

Preuve

ou

les deux pascals d'appui

- Par symétrie **horizontale** et permutation de A et F dans le tableau **(3)**

(1')

A	F	B
E	D	C
X	Y	Z

nous obtenons le premier pascal d'appui ADBEFC et sa pascale *P4* = (XYZ).

- Par permutation de E et C dans le tableau **(2)**

(2')

A	B	E
F	C	D
B'	Z	A'

nous obtenons le second pascal d'appui ACEFBD et sa pascale *P5* = (B'ZA').

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [48],
les triangles A'B'C' et A"B"C" étant en perspective d'axe *P4* = (XYZ),
(A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes i.e. *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

- **Conclusion :** *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes en un point de Kirkman ou plus simplement un k-point.

Scolies : **(1)** nous observons que tous les pascals mis en œuvres dépendent de leurs précédent et qu'en conséquence ils dépendent tous du premier i.e. de ABCDEF.

(2) Notation du k-point : ABCDEF.

(3) Les pascals ACEBFD, AECFBD, EACFDB sont
les trois "K-pascals associé au k-point ABCDEF".

Exercices : **(1)** Rechercher les trois K-pascals conduisant au k-point ACEBFD.

(2) Montrer que les trois pascals ABCDEF, ABEFDC, AFDEBC
conduisent au k-point ACFDBE.

(3) Montrer que les trois pascals ABCDEF, ABEFDC, AFDEBC conduisent à un k-point.

5. Nombre de k-point

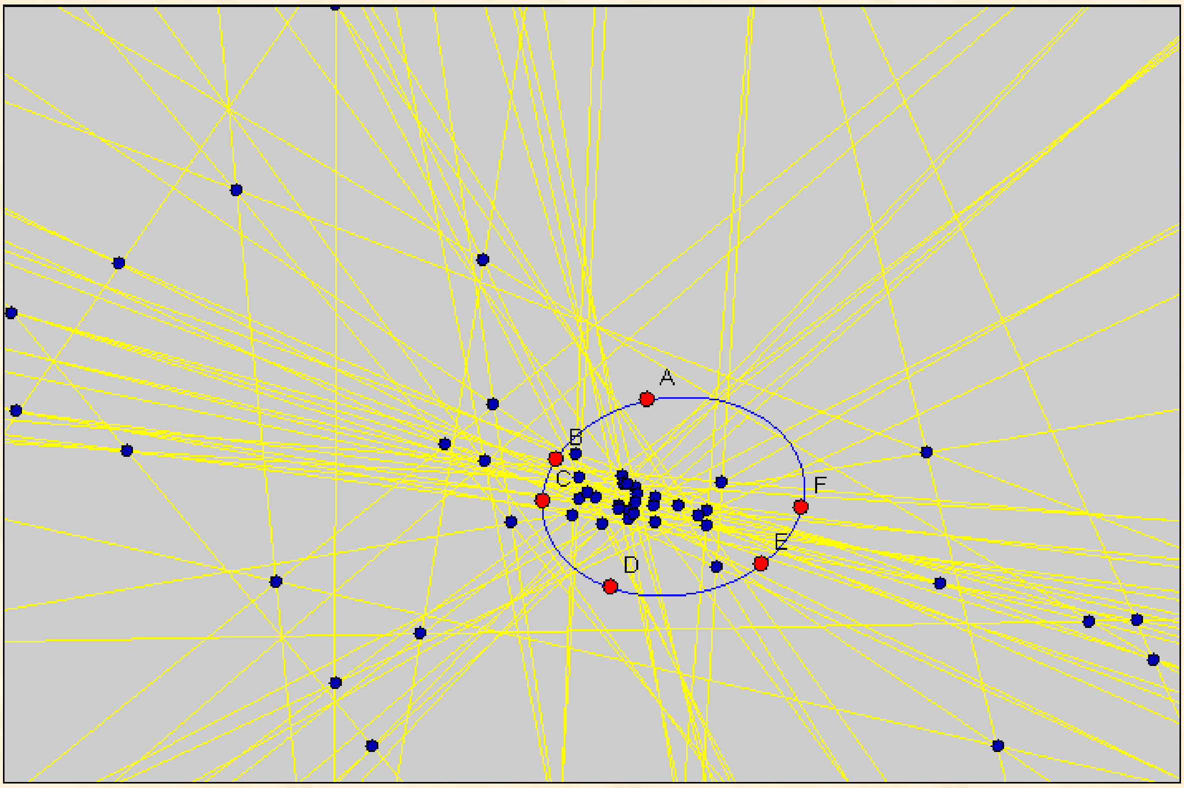
- Chaque pascal conduit par application de la règle précédente à un k-point du pascal de départ ;
en conséquence, nous avons 60 k-points.

Énoncé traditionnel : *par chacun des* 60 k-*points passent trois pascales*
chaque pascale contient 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*points.*

---

[48] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6** p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Photo :



[49]

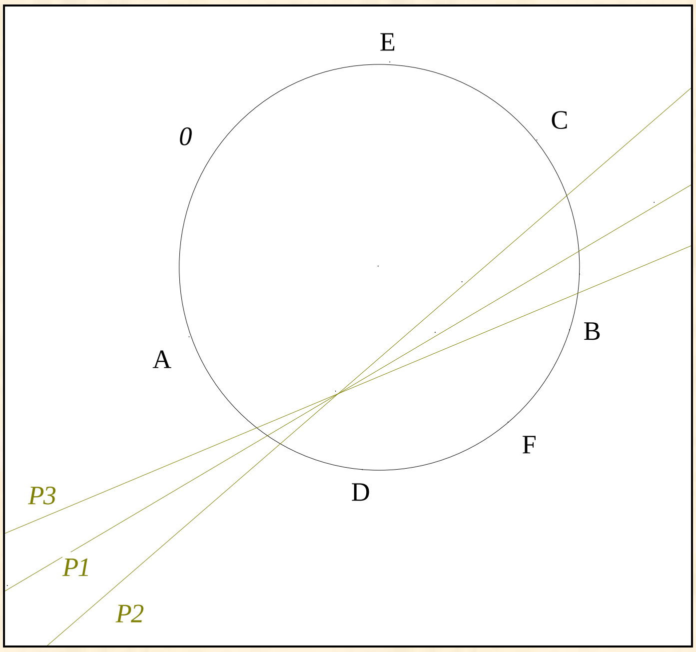
6. Applications

EXEMPLE 1

VISION

Figure :

[49] Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ; http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html



Traits :	*0*	un cercle,
	ACEFDB, AECDFB, EACDBF	trois pascals de *0*
et	*P*1, *P*2, *P*3	les pascales de ACEFDB, AECDFB, EACDBF.

Donné : *P*1, *P*2 et *P*3 sont concourantes.[50]

VISUALISATION

- **Scolie :** à partir de ces trois pascals, nous observons que le pascal AFCBED leur est disjoint. Ces trois pascals se déduisant de AFCBED par la procédure indiquée, leurs pascales concourent au point de Kirkman de AFCBED.

Hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal AFCBED (obtenu en joignant les points non connectés) noté

(0)

A	E	C
B	F	D

- Par écriture dans le sens direct des sommets du pascal de départ AFCBED,

(1)

A	D	E
F	C	B
A*	A"	A'

nous obtenons le premier pascal ACEFDB et sa pascale *P1* = (A*A"A').

- Par symétrie par rapport à la diagonale principale A-B du sous-tableau précédent,

[50] Kirkman T. P., Sur l'hexagone complet inscrits dans les sections coniques, *Cambridge Dublin Math. J.* **5** (1849) 185.

(2)

A	F	C
D	E	B
B'	B"	B*

nous obtenons le deuxième pascal AECDFB et sa pascale *P2* = (B'B"B*).

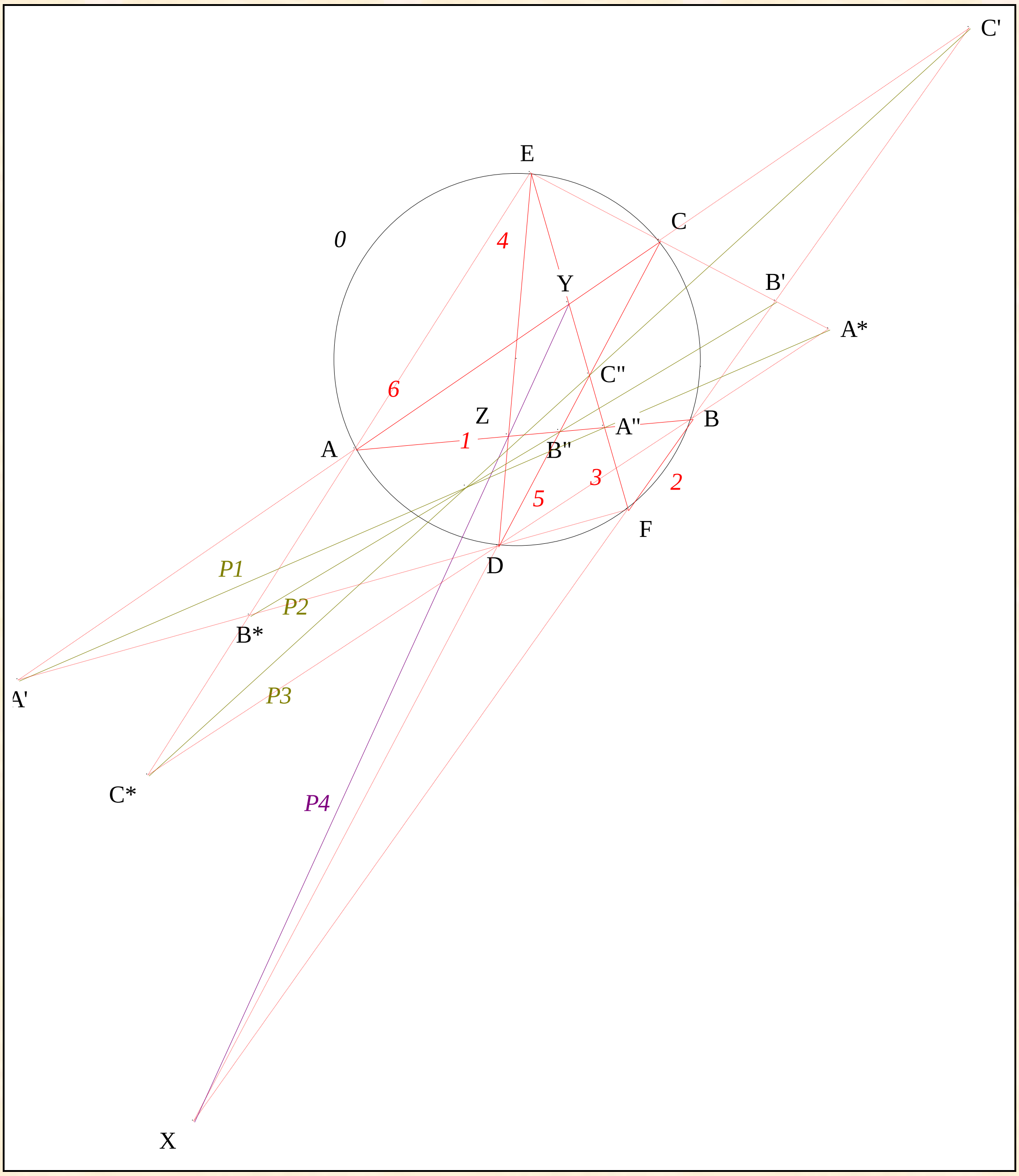
- Par symétrie par rapport à la diagonale secondaire C-D du sous-tableau précédent,

(3)

E	B	C
D	A	F
C'	C"	C*

nous obtenons le dernier pascal EACDBF et sa pascale *P3* = (C'C"C*).

Preuve

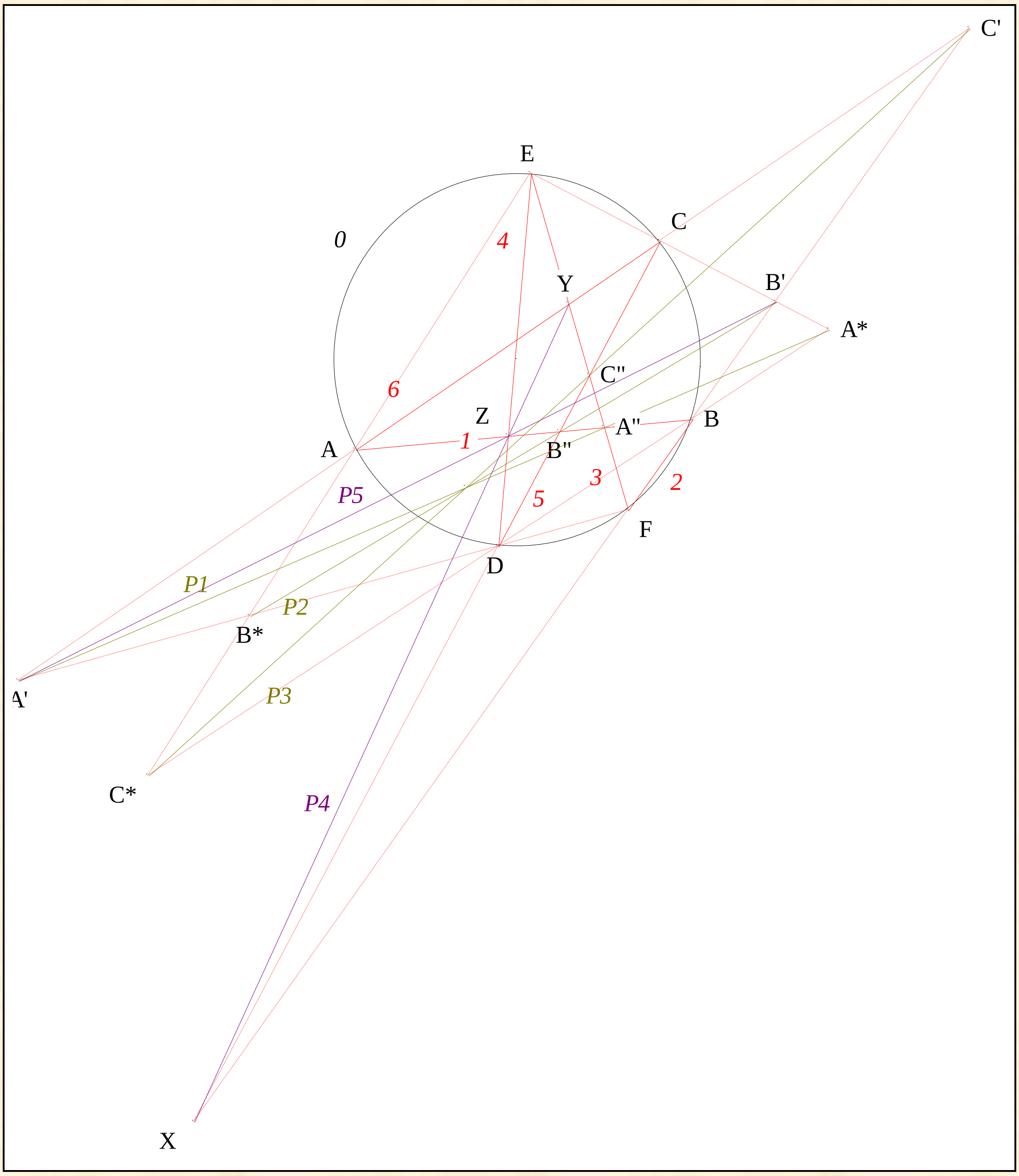


- Par symétrie horizontale et permutation de A et D dans le tableau **(3)**

(1')

A	D	F
E	B	C
X	Y	Z

nous obtenons le premier pascal d'appui ABFEDC et sa pascale *P4* = (XYZ).



- Par permutation de E et C dans le tableau **(2)**

(2')

A	F	E
D	C	B
B'	Z	A'

nous obtenons le second pascal d'appui ACEDFB et sa pascale *P5* = (B'ZA').

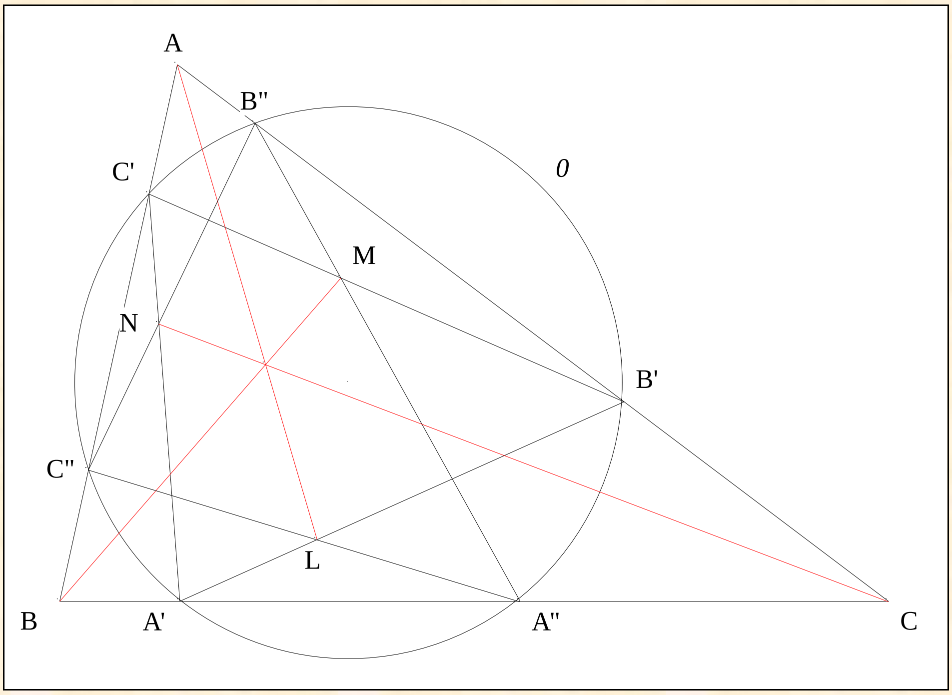
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [51],
  les triangles A'B'C' et A"B"C" étant en perspective d'axe *P4* = (XYZ),
  (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes i.e. *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

- **Conclusion :** *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.

EXEMPLE 2

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 un cercle,
A', A" les points d'intersection de *0* avec (BC),
B', B" les points d'intersection de *0* avec (CA),
C', C" les points d'intersection de *0* avec (AB),
et L, M, N les points d'intersection de (A'B') et (C"A"), (B'C') et (A"B"), (C'A') et (B"C").

Donné : (AL), (BM) et (CN) sont concourantes.[52]

VISUALISATION

51 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6** p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

52 circle that cuts side of a triangle in 6 points - china 2005, china mathematical olympiad cmo 2005 final round - Problem **2**, *Mathlinks* du 22/01/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=24378
AL, BM, CN meeting at one point, *Mathlinks* du 06/06/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=281381
Grinberg D., Specialize this as you want, Message *Hyacinthos* # **9873** du 06/06/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/9873?expand=1

Hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal A'B"C'A"B'C" (obtenu en joignant les points non connectés) noté

(0)

A'	B'	C'
A"	B"	C"

- Par écriture dans le sens direct des sommets du pascal de départ A'B"C'A"B'C",

(1)

A'	C"	B'
B"	C'	A"
W	C	N

nous obtenons le premier pascal A'C'B'B"C"A" et sa pascale *P1* = (NCA*).

- Par symétrie par rapport à la diagonale principale du tableau précédent,

(2)

A'	B"	C'
C"	B'	A"
M	B	V

nous obtenons le deuxième pascal A'B'C'C"B"A" et sa pascale *P2* = (MBV).

- Par symétrie par rapport à la diagonale secondaire du tableau précédent,

(3)

B'	A"	C'
C"	A'	B"
U	A	L

nous obtenons le dernier pascal B'A'C'C"A"B" et sa pascale *P3* = (UAL).

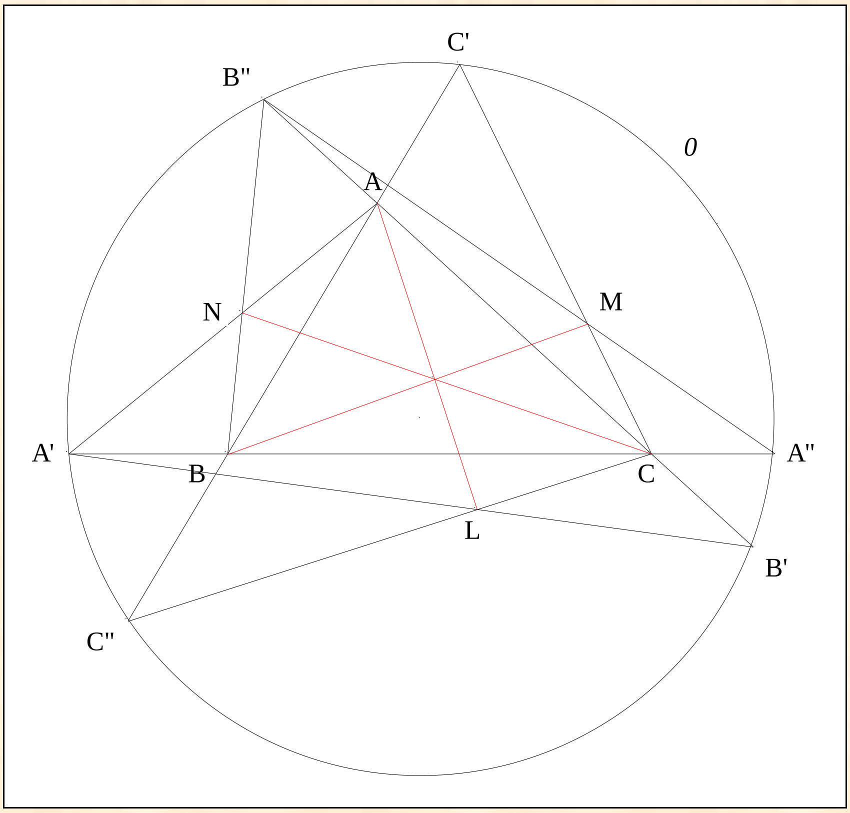
Preuve

- D'après **D. III. 3.** Un point de Kirkman, *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.
- **Conclusion :** (AL), (BM) et (CN) sont concourantes au k-point de A'B"C'A"B'C".

EXEMPLE 3

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	un cercle,
	A', A"	les points d'intersection de *0* avec (BC),
	B', B"	les points d'intersection de *0* avec (CA),
	C', C"	les points d'intersection de *0* avec (AB),
et	L, M, N	les points d'intersection de (A'B') et (C"A"), (B'C') et (A"B"), (C'A') et (B"C").

Donné : (AL), (BM) et (CN) sont concourantes.[53]

VISUALISATION

- **Départ :** considérons le pascal A'B"C'A"B'C" (obtenu en joignant les points non connectés) noté

A'	B'	C'
A"	B"	C"

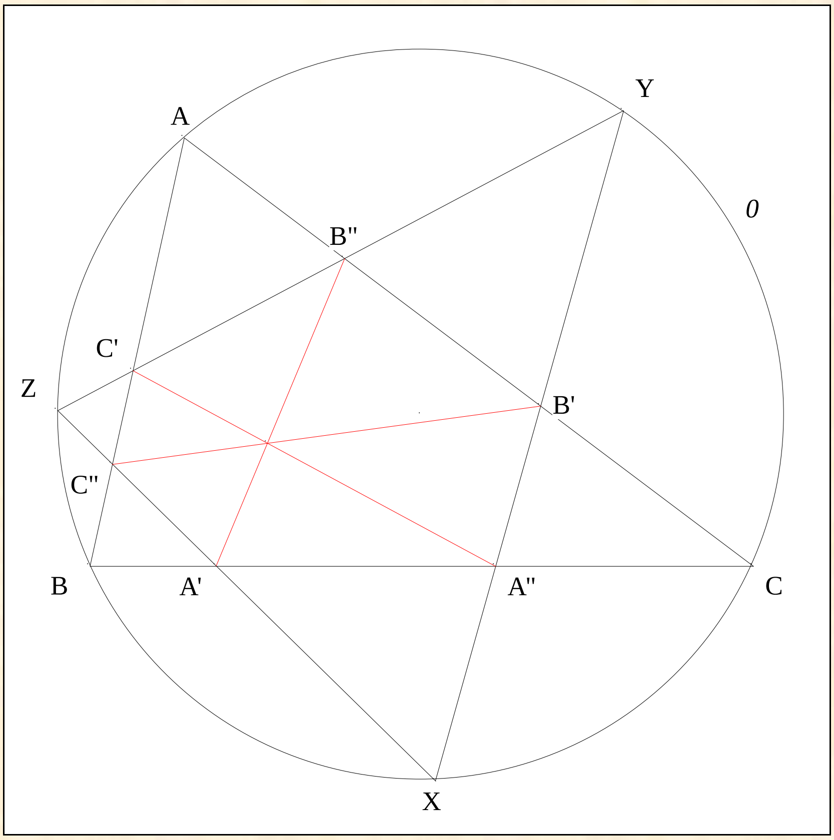
- **Commentaire :** la preuve envisagée est identique à la précédente.
- **Conclusion :** (AL), (BM) et (CN) sont concourantes au k-point de A'B"C'A"B'C".

EXEMPLE 4

VISION

[53] interesting concurrency in circle, *Mathlinks* du 06/08/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=161737

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	un cercle,
	XYZ	un triangle inscrit dans *0*,
	A', A"	les points d'intersection de (BC) avec (XZ), (XY),
	B', B"	les points d'intersection de (CA) avec (YX), (YZ)
et	C', C"	les points d'intersection de (AB) avec (ZY), (ZX).

Donné : (A'B"), (B'C") et (C'A") sont concourantes.[54]

VISUALISATION

Hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal AZBXCY noté

(0)

A	C	B
X	Z	Y

- Par écriture dans le sens direct des sommets du pascal de départ AZBXCY,

(1)

A	Y	C
Z	B	X
A"	V	C'

[54] Two triangles with the same circumcircle, *Mathlinks* du 26/07/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=103574

nous obtenons le premier pascal ABCZYX et sa pascale *P1* = (C'UA").

- Par symétrie par rapport à la diagonale principale A-X du sous-tableau précédent,

(2)

A	Z	B
Y	C	X
A'	W	B"

nous obtenons le deuxième pascal ACBYZX et sa pascale *P2* = (A'WB").

- Par symétrie par rapport à la diagonale secondaire B-Y du sous-tableau précédent,

(3)

C	X	B
Y	A	Z
C"	U	B'

nous obtenons le dernier pascal CABYXZ et sa pascale *P3* = (C"UB').

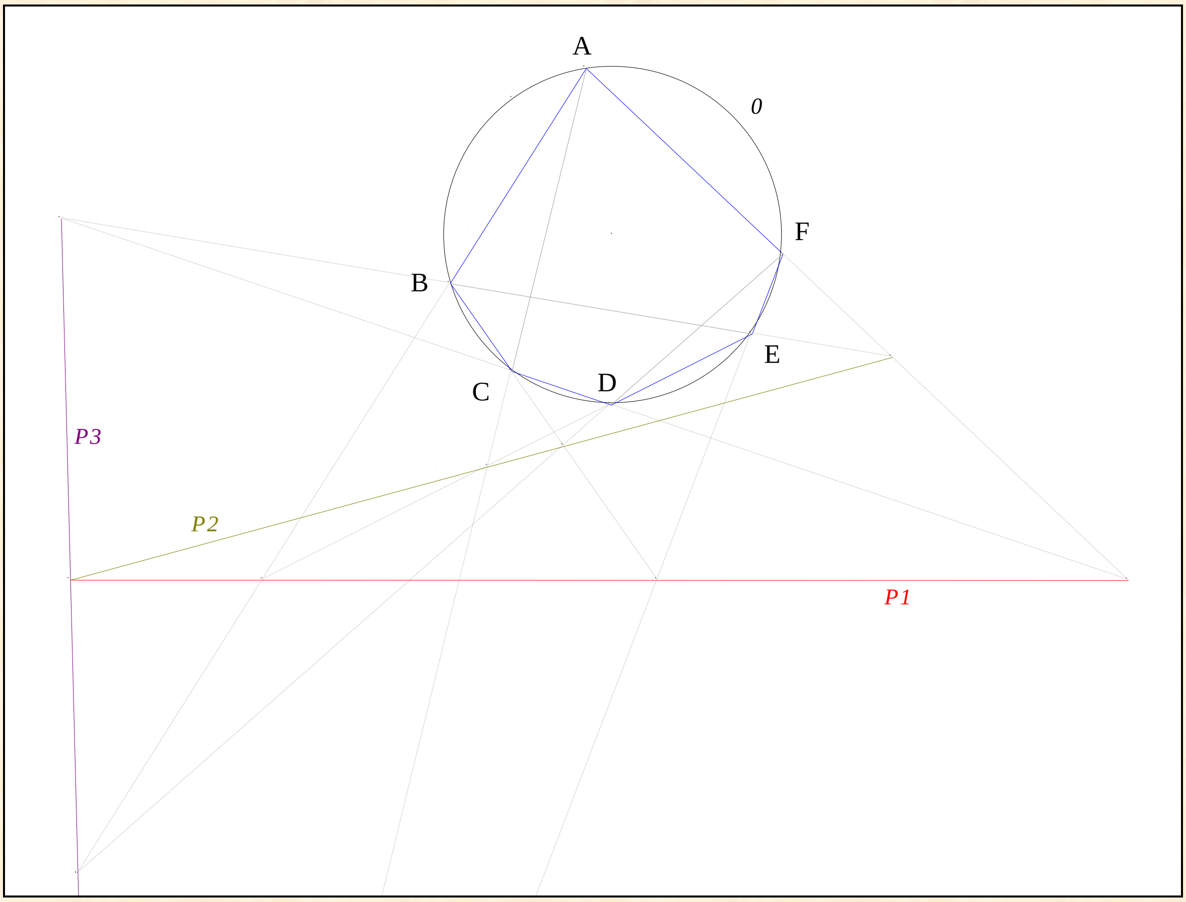
Preuve

- D'après **D. III. 3.** Un point de Kirkman, *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes.
- **Conclusion :** (AL), (BM) et (CN) sont concourantes au k-point de AZBXCY.

EXEMPLE 5

VISION

Figure :

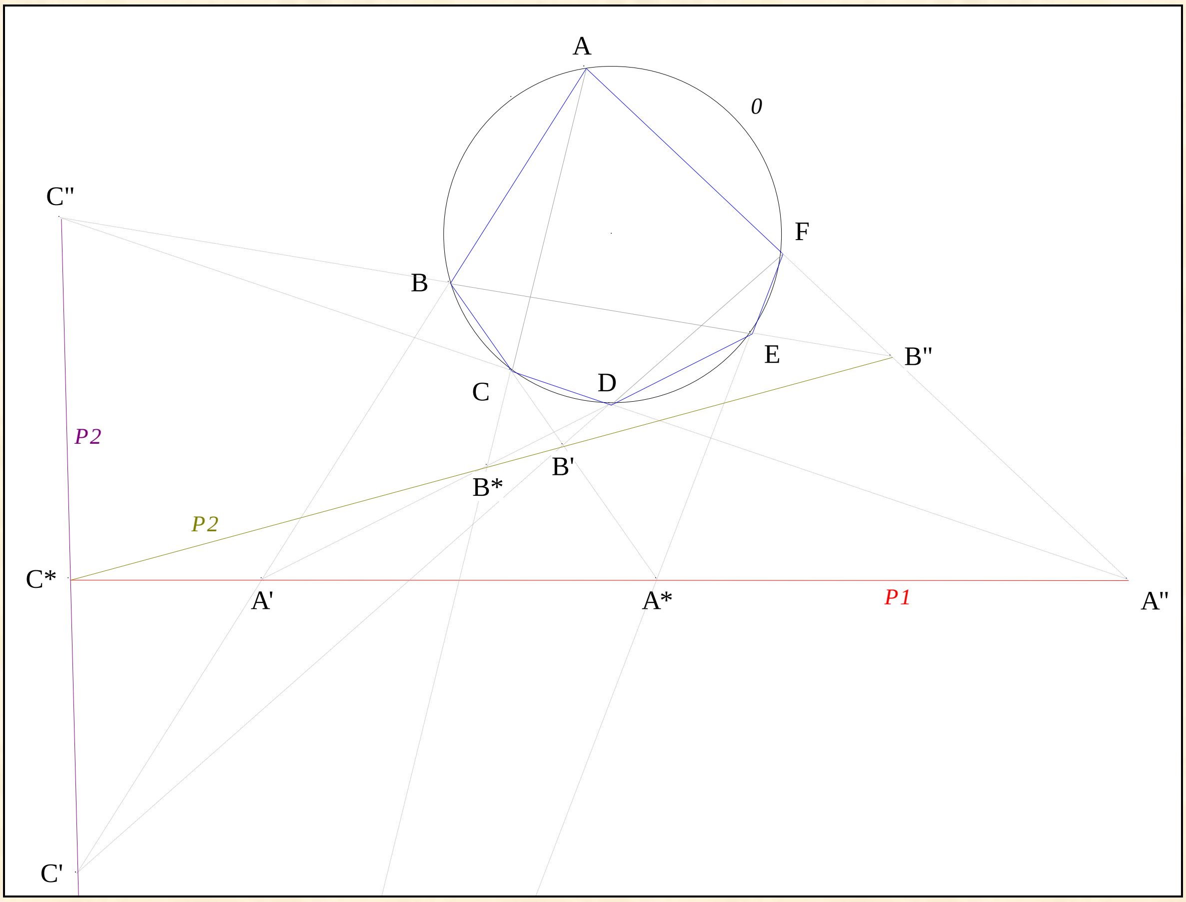


Traits : *0* un cercle,
ABCDEF, ACBEDF, CABEFD trois pascals de *0*
et *P1*, *P2*, *P3* les pascales resp. de ABCDEF, ACBEDF, CABEFD.

Donné : *P1*, *P2* et *P3* sont concourantes[55].

VISUALISATION

[55] Steiner J., Lehrsatz **4** bd**1** p. 177 ;
Steiner, J., Questions proposées. Théorèmes sur l'hexagramum mysticum. *Ann. Math.* de Gergonne **18** (1827-1828) 339-340 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA



Hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal ADBFCE (obtenu en joignant les points non connectés) noté

(0)

A	C	B
F	D	E

- Par écriture dans le sens direct des sommets du pascal de départ ADBFCE,

(1)

A	E	C
D	B	F
A*	A"	A'

nous obtenons le premier pascal ABCDEF et sa pascale *P1* = (A'A"A*).

- Par symétrie par rapport à la diagonale principale A-F du sous-tableau précédent,

(2)

A	D	B
E	C	F
B'	B"	B*

nous obtenons le deuxième pascal ACBEDF et sa pascale *P2* = (B'B"B*).

- Par symétrie par rapport à la diagonale secondaire B-E du sous-tableau précédent,

(3)

C	F	B
E	A	D
C'	C"	C*

nous obtenons le dernier pascal CABEFD et sa pascale *P3* = (C'C"C*).

- **Scolie :** Les pascals mis en œuvres ABCDEF, ACBEDF et CABEFD ont, deux à deux, trois côtés non successifs en commun et sont disjoints de ADBFCE.

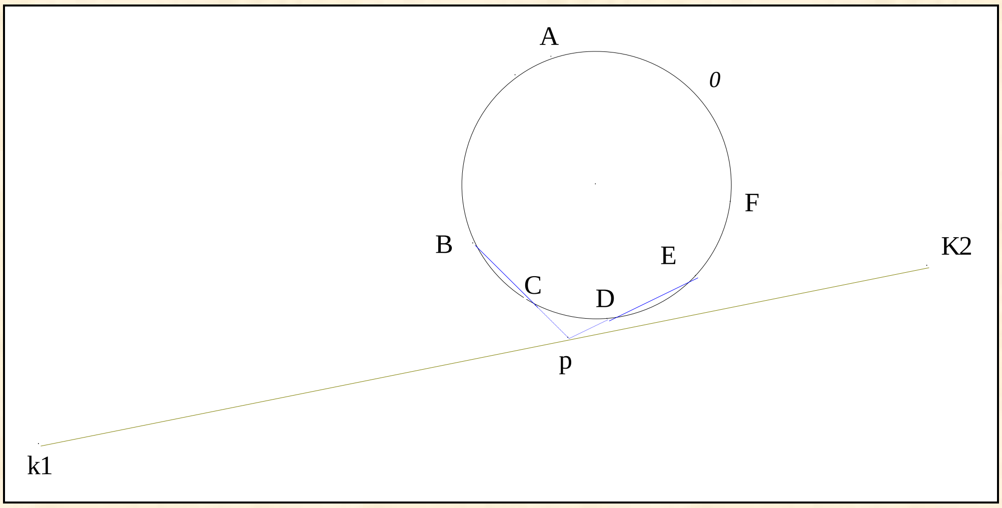
Preuve

- **Conclusion :** d'après **D. III. 3.** Un point de Kirkman, *P1*, *P2* et *P3* concourent au k-point de ADBFCE.

7. Second théorème de Kirkman : K-droite ou droite de Kirkman

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,
k1 le k-point ADBFCE,
k2 le k-point ABDFEC
et p le point d'intersection de (BC) et (DE).

Donné : k1, k2 et p sont alignés.[56]

VISUALISATION

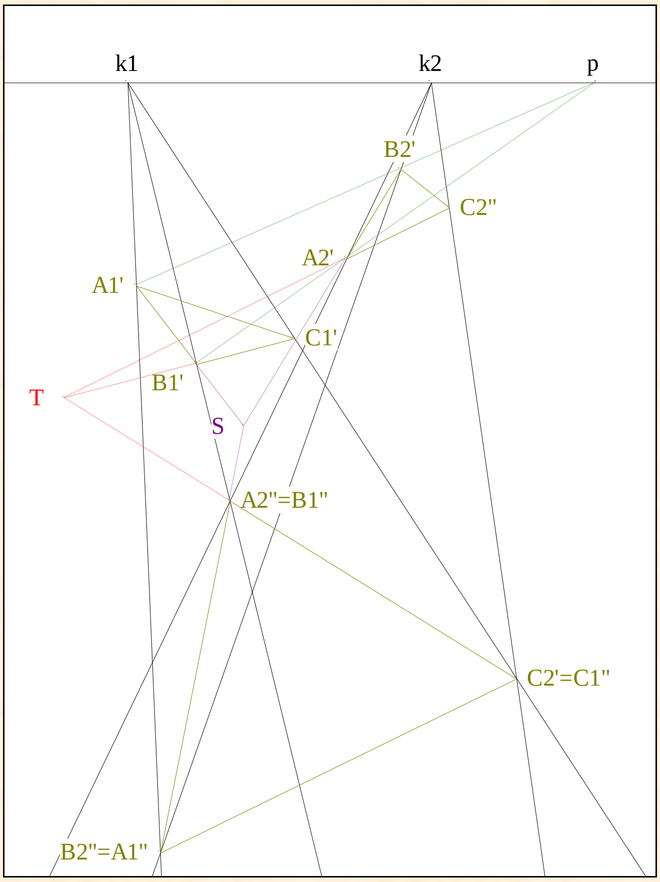
- **Scolie :** d'après **D. III. 2.** La règle d'obtention (d'un k-point), p n'est sur aucunes des pascales passant par k1 et K2.

- Par application de **D. III. 2.** La règle d'obtention (d'un k-point)

(1) au pascal ADBFCE, nous obtenons successivement les pascals ABCDEF, ACBEDF, CABEFD

[56] Théorème de Pascal et ses conséquences ; d'après MM. Steiner, Plucker, Otto Hesse, Cayley, Kirkman, Salmon ; *Nouvelles Annales de Mathématiques* série **1** t. **XI** (1852) 163-176 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

(2) au pascal ABDFEC, nous obtenons successivement les pascals ADEBCF, AEDCBF, EADCFB



- Les points mis en œuvre dans **(1)**

A	E	C
D	B	F
A1*	A1"	A1'

A	D	B
E	C	F
B1'	B1"	B1*

C	F	B
E	A	D
C1'	C1"	C1*

- Les points mis en œuvre dans **(2)**

A	C	E
B	D	F
A2*	A2"=B1"	A2'

A	B	D
C	E	F
B2'	B2"=A1"	B2*

A	B	C
F	D	E
C2'=C1"	C2"	C2*

- **Scolie :** p intersection de (BC) et (DE) est un p-point**.**

- D'après **D. III. 3.** Le premier théorème de Kirkman : k-point ou point de Kirkman,

(1) k1 est le centre de perspective des triangles A1'B1'C1' et A1"B1"C1" (= B2"A2"C2')

(2) k2 est le centre de perspective des triangles B2"A2"C2' et B2'A2'C2"

- Les triangles B2'A2'C2" et A1'B1'C1' sont perspectifs de centre p

(1) (B2'A1') est la droite (DE).

(2) (A2'B1') est la droite (BC).

(3) (B2'A1'), (A2'B1') et (C2"C1') étant concourantes en p, les triangles B2'A2'C2" et A1'B1'C1' sont perspectifs de centre p.

- **Scolie :** A1'B1'C1', B2"A2"C2' et B2'A2'C2" sont perspectifs deux à deux.

- L'arguésienne de A1'B1'C1', B2"A2"C2' et B2'A2'C2"

(1) (A1'B1') étant la pascale de

F	B	E
C	D	A
A1'	S	B1'

(B2"A2") la droite (AF) et

(B2'A2') la pascale de

A	B	E
C	D	F
B2'	S	A2'

ces trois droites sont concourantes en S. (p-point)

(2) (B1'C1') étant la droite (DF)

(A2"C2') la droite (BE) et

(A2'C2") la pascale de

F	A	B
E	C	D
A2'	T	C2"

ces trois droites sont concourantes en T. (p-point)

- **Conclusion :** d'après Casey "Trois triangles deux à deux en perspective"
appliqué à A1'B1'C1', B2"A2"C2' et B2'A2'C2" ayant le même axe de perspective (ST),
k1, k2 et p sont alignés.

Scolie : (k1k2p) est "une K-droite" (K pour Kirkman)

8. Règle d'obtention d'une K-droite à partir d'un k-point

Règle tabulaire

- **Départ :** considérons, par exemple, le k-point k1 noté ADBFCE
lié au pascal ADBFCE **(0)**

A	C	B
F	D	E

* **le p-point est l'intersection de (BC) et (DE)**

- La première colonne de **(0)** est fixe.

- Par permutation de B et D, C et E i.e. par crocetta[57] **(1)**

A	E	D
F	B	C

nous obtenons le pascal ABDFEC qui conduit à k-point noté ABDFEC.

* **le p-point est l'intersection de (AB) et (EF)**

- La deuxième colonne de **(0)** est fixe.

E	C	F
B	D	A

[57] en italien, petite croix.

- Par crocetta, **(2)**

  nous obtenons le pascal EDFBCA qui conduit au k-point noté EDFBCF.

* **le p-point est l'intersection de (AC) et (DF)**

- La troisième colonne de **(0)** est fixe.
- Par crocetta des deux dernières colonnes, **(3)**

D	F	B
C	A	E

  nous obtenons le pascal DABCFE qui conduit au k-point noté DABCFE.

Énoncé traditionnel : *par chaque* k-*point passent* 3 K-*droites*.

Exercice : préciser le second k-point sachant que
la K-droite passant par le k-point BFCAED et le p-point BE.AF

9. Règle d'obtention d'une K-droite à partir d'un p-point

- **Départ :** considérons, par exemple,
  le p-point intersection de (BE) et (CD)
  et le pascal ADBFEC **(0)**

A	E	B
F	D	C

- Par permutation des points de la première colonne de **(0)**, nous obtenons les deux K-droites possibles :

A	E	B
F	D	C

F	E	B
A	D	C

Énoncé traditionnel : *par chaque* p-*point passent* 2 K-*droites*.

10. Nombre de K-droites

- **Conclusion :** deux K-droites passant par chacun des 45 p-point, nous avons 90 K-droites.

Énoncé traditionnel : *il existe* 90 K-*droites*
chaque K-*droite contient deux* k-*points et un* p-*point*.

11. Troisième synthèse

* *un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

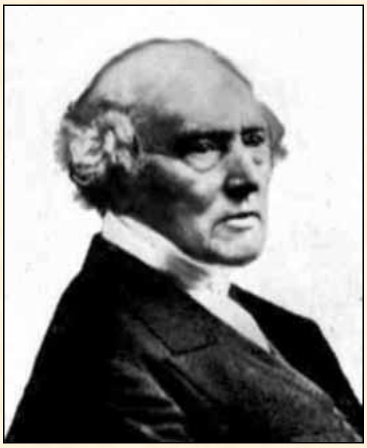
* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*
* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*

* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *par chaque* p-*point passent quatre pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*point*
* *par chacun des* 20 s-*points passent trois pascales.*

* *Chaque* K-*droite contient deux* k-*points et un* p-*point*
* *par chaque* k-*point passent* 3 pascales, 3 K-*droites*
* *par chaque* p-*point passent* 2 K-*droites*
* *il existe* 90 K-*droites.*

12. Une courte biographie du Révérend Thomas Kirkman


[58]

Thomas Kirkman est né le 31 mars 1806 à Bolton (près de Manchester, Angleterre).
Il fait ses premières classes à Bolton où il ne reçoit aucun enseignement de mathématiques. Bien que ses enseignants voient en lui un futur élève de Cambridge, son père le retire de l'école à l'âge de 14 ans. En travaillant chez son père, il continue à approfondir sa culture en grec, en latin et se lance dans l'apprentissage du français et de l'anglais. Après 9 années de travail, il se décide à entrer au Trinity College de Dublin pour étudier les mathématiques en particulier. De retour en Angleterre en 1835, il entre dans les ordres. Durant 5 années, il est curé à Bury, puis à Lymm. En 1839, il devient vicaire de la paroisse de Southworth (Lancashire), une charge qu'il honorera durant 52 ans.
En 1846 à l'âge de 40 ans, il publie dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* son premier article de mathématique en réponse à un problème du *Lady's and Gentleman's Diary* de 1845. En 1848, il écrit un livre dans lequel il tente de rendre les formules mathématiques plus mémorisables et l'année suivante, il trouve 45 résultats concernant "l'hexagramma mysticum" qui seront publiés dans le *Manchester courrier* du 27 juin 1849.
Jusqu'à sa 89-ième année, il continue à étudier les mathématiques en envoyant des problèmes et des solutions à l'*Educational Times*.
Le Révérend Thomas J. Penyngton A. Kirkman décède le 4 février 1895 à Bowdon.

---

[58] O'Connor J. J. and Robertson E. F., *The MacTutor History of Mathematics Archive* ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

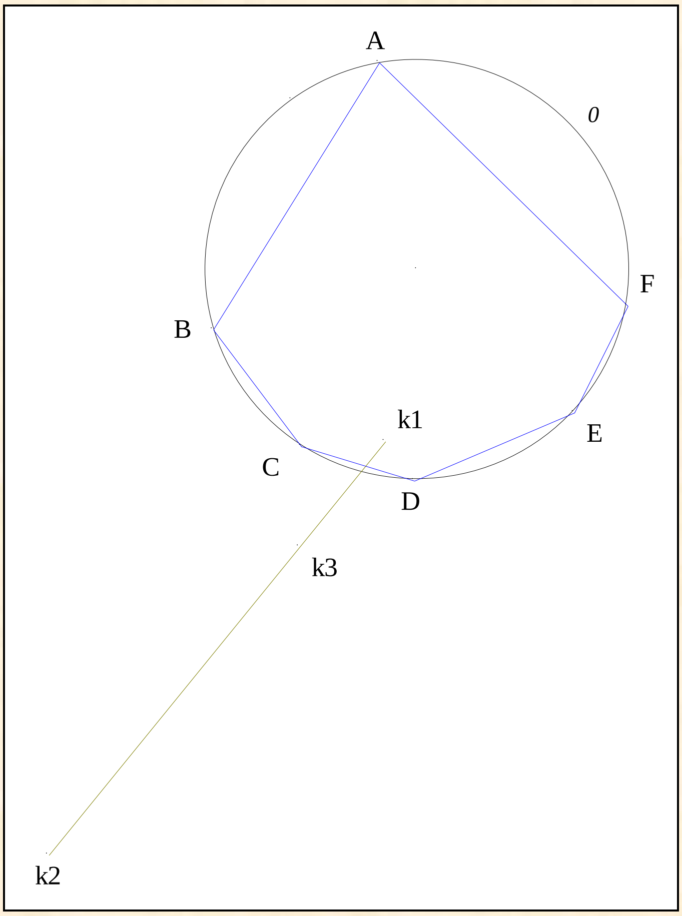
IV. LE THÉORÈME
DE
ARTHUR CAYLEY

Commentaire : en considérant comme invariantes les droites latérales deux triangles disjoints et cocycliques, l'auteur qui a proposé une technique pour en déterminer trois S-pascals, montre sur un exemple que leurs trois k-points sont alignés.

1. C-droite ou droite de Cayley

VISION

Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	AFBDCE, ADBECF, AEBFCD	trois pascals de *0*,
et	k1, k2, k3	les k-points AFBDCE, ADBECF, AEBFCD.

Donné : k1, k2 et k3 sont alignés.[59]

---

[59] Cayley A., Note sur quelques théorèmes de la géométrie de position (1851) ; http://www.reference-global.com/doi/abs/10.1515/crll.1851.41.66

VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** les pascals **(1)** AFBDCE, **(2)** ADBECF et **(3)** AEBFCD
  répondent à **D. II. 3.** Règle d'obtention d'un s-point
  où **(1)** conduit à **(3)**, et **(3)** conduit à **(2)**.

  (2) AFBDCE, ADBECF et AEBFCD conduisent au s-point ACB.DFE

- Par application de **D. III. 2.** La règle d'obtention (d'un k-point)

  (1) au pascal AFBDCE, nous obtenons successivement les pascals ABCFED, ACBEFD, CABEDF

  (2) au pascal ADBECF, nous obtenons successivement les pascals ABCDFE, ACBFDE, CABFED

  (3) au pascal AEBFCD, nous obtenons successivement les pascals ABCEDF, ACBDEF, CABDFE

- Les points mis en œuvre dans **(1)** et avec les deux pascals d'appui

A	E	C
F	B	D
A1*	A1"	A1'

A	F	B
E	C	D
B1'	B1"	B1*

C	D	B
E	A	F
C1'	C1"	C1*

A	E	F
C	D	B
X1	Y1	Z1

A	F	C
E	B	D
B1'	Z1	A1'

- Les points mis en œuvre dans **(2)** et avec les deux pascals d'appui

A	F	C
D	B	E
A2*=B3'	A2"	A2'=C1'

A	D	B
F	C	E
B2'=A1*	B2"	B2*=C3*

C	E	B
F	A	D
C2'	C2"	C2*=B1*

A	F	D
C	E	B
X2	Y2	Z2

A	D	C
F	B	E
B2'=A1*	Z2	A2'=C1'

- Les points mis en œuvre dans **(3)** et avec les deux pascals d'appui

A	D	C
E	B	F
A3*=B1'	A3"	A3'=C2'

A	E	B
D	C	F
B3'=A2*	B3"	B3*=C1*

C	F	B
D	A	E
C3'=A1'	C3"	C3*=B2*

A	D	E
C	F	B
X3	Y3	Z3

A	E	C
D	B	F
B3'=A2*	Z3	A3'=C2'

- D'après **D. III. 3.** Un point de Kirkman,

  (1) k1 est le centre de perspective des triangles A1'B1'C1* et A1*B1*C1' (= B2'C2*A2')

(2) k2 est le centre de perspective des triangles B2'C2*A2' et B2*C2'A2* (= C3*A3'B3')

(3) k3 est le centre de perspective des triangles C3*A3'B3' et C3'A3*B3* (= A1'B1'C1*).

- **Scolie :** A1'B1'C1*, A1*B1*C1' et B2*C2'A2* sont deux à deux en perspective.

- Nous avons : (A1'B1'Z1) est la pascale de ABCEFD
  (A1*B1*B*) est la pascale de ACBFED
  (B2*C2'A*) est la pascale de EDFBAC. [60]

- **Conclusion partielle :** d'après **D. III. 3.** Un point de Kirkman,
  ces trois derniers pascals étant disjoints de AEBDCF
  (A1'B1'), (A1*B1*) et (B2*C2') concourent au k-point AFCDEB.[61]

- Notons K1 le k-point AFCDEB.

- Nous avons : (B1'C1*C') est la pascale de AFDEBC
  (B1*C1'B') est la pascale de DFEBAC
  (C2'A2*Z3) est la pascale de ABCDEF. [62]

- **Conclusion partielle :** d'après **D. III. 3.** Un point de Kirkman,
  ces trois derniers pascals étant disjoints de ADBFCE,
  (B1'C1*), (B1*C1') et (C2'A2*) concourent au k-point ADBFCE.

- Notons K2 le k-point ADBFCE.

- Nous avons : (A1'C1* C") est la pascale de DEFCAB
  (A1*C1' Z2) est la pascale de CBAEDF
  (B2*A2* A") est la pascale de ACBDFE. [63]

- **Conclusion partielle :** d'après **D. III. 3.** Un point de Kirkman,
  ces trois pascals étant disjoints de ADCEBF,
  (A1'C1*), (A1*C1') et (B2*A2*) concourent au k-point ADCEBF.

- Notons K3 le k-point ADCEBF.

- **Conclusion :** A1'B1'C1*, A1*B1*C1' et B2*C2'A2*
  étant deux à deux perspectifs et partageant le même axe,
  leurs centres k1, k2 et k3 sont alignés.

Commentaire : cette approche originale de l'auteur est basée sur les points de Kirkman.

Énoncé traditionnel : *si,* *trois pascals conduisent à un* s-*point*
alors, *leurs* 3 k-*points sont alignés*.

Scolies : **(1)** (k1k2k3) est "une C-droite" ou "une droite de Cayley" (C pour Cayley).

(2) Notation d'une C-droite :

les pascals AFBDCE, ADBECF et AEBFCD conduisant au s-point ACB.DFE,

---

[60] A* et B* seront définis en **D. V. 1.**
[61] de l'auteur.
[62] B' et C' seront définis en **D. V. 1.**
[63] A" et C" seront définis en **D. V. 1.**

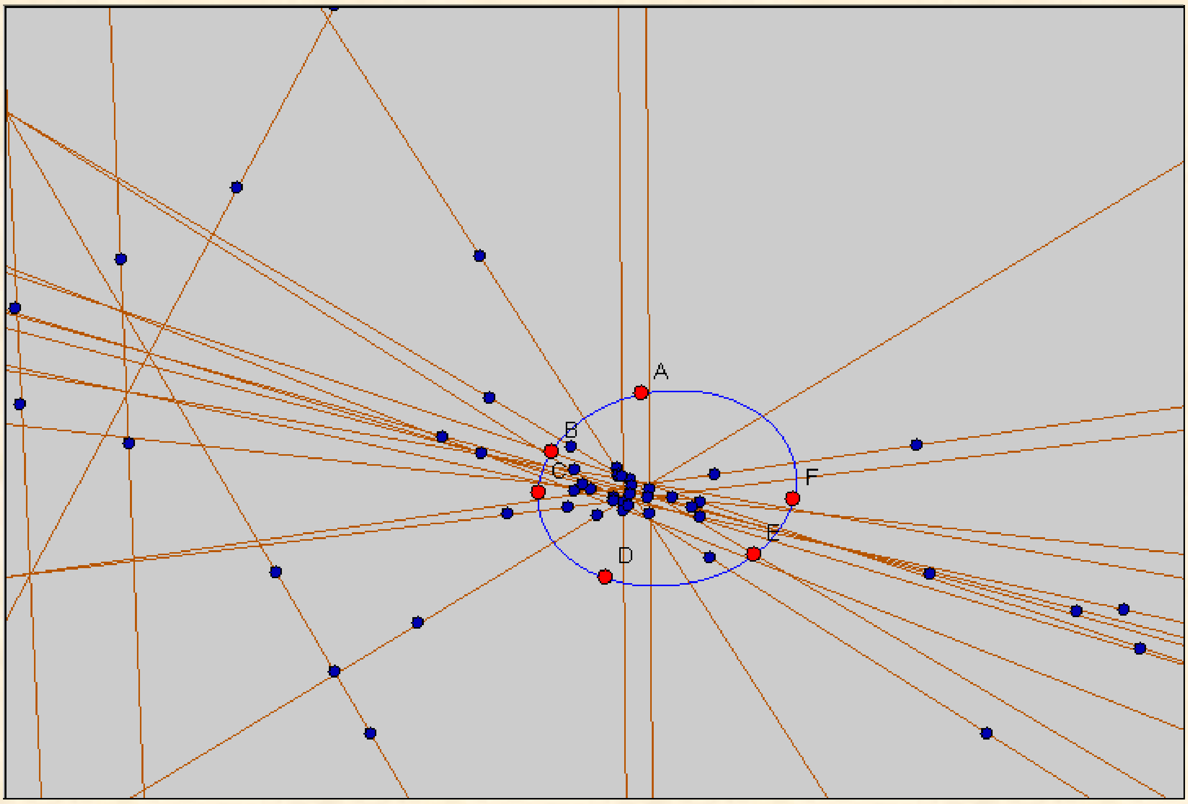
(k1k2k3) se notera (ACB.DFE).
Cette notation sera confirmée par la suite.

Note historique : dans un remarquable article Arthur Cayley[64] développe, à Cambridge, en 1846, le point de vue latéral.

2. Nombre de C-droites

Énoncé traditionnel : *les* 60 k-*points sont sur* 20 C-*droites.*[65]

Photo :



[66]

En bleu, le point de Kirkman et en ocre les droites de Cayley.

3. Quatrième synthèse

* *un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*

---

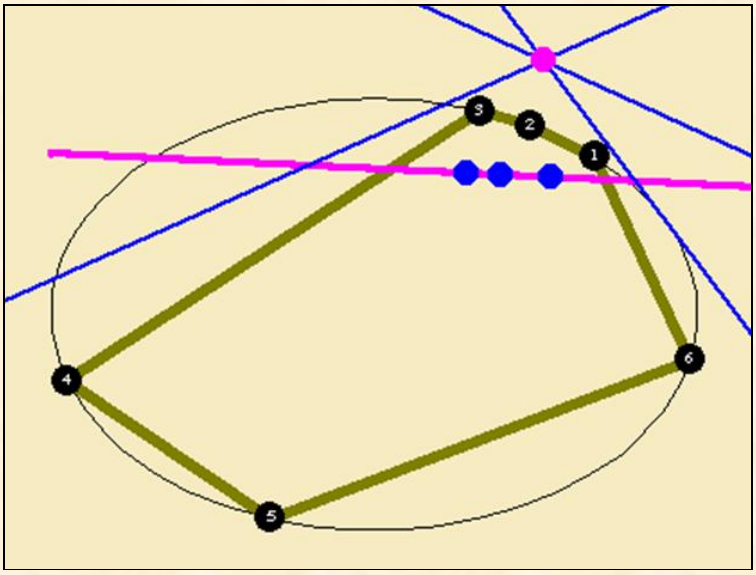
64 Cayley A., Sur quelques théorèmes de la géométrie de position, *Journal* de Crelle **31** (1846) 213-230 ; **34** (1847 270-275 ; **38** (1849) 97-104 ;
65 Cayley A. Note sur quelques théorèmes de la géométrie de position (1851) ; http://www.reference-global.com/doi/abs/10.1515/crll.1851.41.66
66 Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ; http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*
* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *par chaque* p-*point passent quatre pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*point*
* *par chacun des* 60 k-*points passent trois pascales*.

* *Chaque* K-*droite contient deux* k-*points et un* p-*point*
* *par chaque* k-*point passent* 3 pascales, 3 K-*droites*
* *par chaque* p-*point passent* 2 K-*droites*
* *il existe* 90 K-*droites*.

* *Si*, 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés*
* *les* 60 k-*points sont sur* 20 C-*droites.*
* *par chaque* k-*point passent* 3 pascales, 3 K-*droites*, 1 C-*droite*.

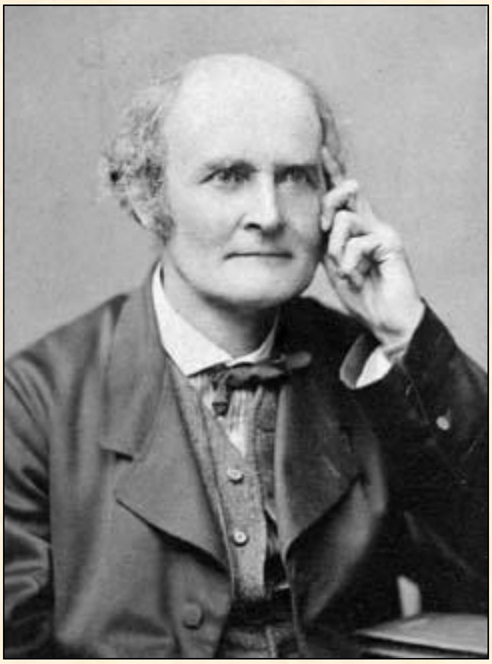


[67]

* Une certaine réciprocité [68] : *un* s-*point est sur trois pascales*
trois k-*points sont sur une* C-*droite.*

4. Une courte biographie d'Arthur Cayley

[67] Sigur S., ; http://www.paideiaschool.org/teacherpages/steve_sigur/resources/pascal2/index.html
[68] Idée et expression d'Otto Hesse.

 [69]

Arthur Cayley est né le 16 août 1821 à Richmond (Surrey, Angleterre).
C'est à Saint-Pétersbourg (Russie) où son père Henry Cayley réside qu'Arthur Cayley passe ses huit premières années avant que ses parents reviennent en Angleterre pour s'installer près de Londres.
Doué en calculs, il est élève au King's College School en 1835, puis commence en 1838 ses études au Trinity College de Cambridge. Après 1842, il enseigne durant quatre années à Cambridge grâce à l'octroi d'une bourse et publie 28 articles dans la revue *Cambridge Mathematical Journal*.
A la fin de sa bourse, Arthur Cayley choisit le droit et est admis au Barreau en 1849. Il passe ainsi14 années comme avocat et saisit l'occasion d'aller à Dublin pour entendre les conférences de William Hamilton sur les quaternions. Au cours de l'une de ces conférences, il rencontre Georges Salmon et de là naît un fructueux échange d'idées qui durera pendant de nombreuses années. Le dynamisme d'Arthur Cayley l'amène à croiser James Joseph Sylvester qui comme lui est un juriste à la Cour de Lincoln Inn à Londres. Devenus amis, il n'hésite pas à parler de mathématiques au cours de leur journée de travail.
En 1863, Arthur Cayley est un "Sadleirian" de Mathématiques pures à Cambridge. Sa tâche consiste à expliquer et à enseigner les principes des mathématiques et de s'impliquer dans la recherche.
En 1882, il est invité à donner un cours à l'université John Hopkins (États-Unis) où son ami James Joseph Sylvester enseigne.
En 1883, il est élu président du *British Association for the Advancement of Science*.
Il décède le 26 janvier 1895 à Cambridge (Cambridgeshire, Angleterre).

[69] O'Connor J. J. and Robertson E. F., *The MacTutor History of Mathematics Archive* ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

V. LE THÉORÈME

DU

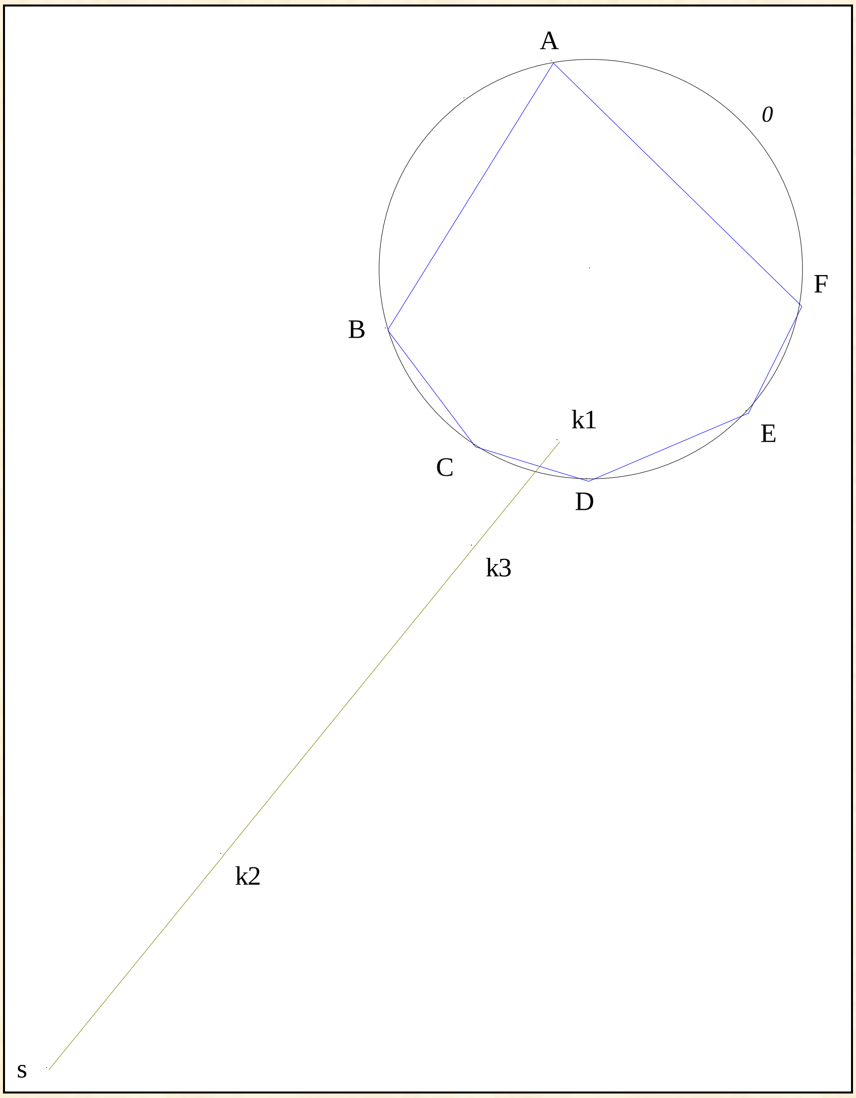
RÉVÉRENT GEORGES SALMON

Commentaire : en considérant comme invariantes les droites **latérales** deux triangles disjoints et cocycliques, l'auteur qui a proposé une technique pour en déterminer trois S-pascals, montre, sur un exemple, que leurs trois k-points sont alignés sur une C-droite avec le s-point associé aux deux triangles de départ.

1. Un s-point sur une C-droite

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,

	AFBDCE, ADBECF, AEBFCD	trois pascals de *0*,
	k1, k2, k3	les k-points AFBDCE, ADBECF, AEBFCD
et	s	le s-point ACB.DFE

Donné : s est sur (k1k2k3).

VISUALISATION

- **Commentaire :** les hypothèses et notations sont identiques à celles présentées en **D. IV. 1.** C-droite.
- **Scolies :** **(1)** k1, k2 et k3 sont alignés

  (2) s est le point de Steiner des S-pascals AFBDCE, ADBECF et AEBFCD.

Vérification des hypothèses

- **Départ :** considérons le pascal AFBDCE et sa pascale *P1* = (A'A"A*)

(1)

A	C	B
D	F	E
A*	A"	A'=Z3

- Fixons A et E dans le pascal de **départ** AFBDCE :

  * par permutation **horizontale** de C et B, puis de D et F,

(3)

A	B	C
F	D	E
B'	B"=Z2	B*

nous obtenons le pascal **(3)** ADCFBE et sa pascale *P2* = (B'B"B*).

- Fixons C et F dans le pascal de **précédent** ADCFBE :

  * par permutation **horizontale** de A et B, puis de D et E,

(2)

B	A	C
F	E	D
C*=Z1	C"	C'

nous obtenons le pascal **(2)** BECFAD et sa pascale *P3* = (C'C"C*).

- Les pascals **(1)** AFBDCE, **(2)** ADBECF et **(3)** AEBFCD
  répondent à **D. II. 3.** Règle d'obtention d'un s-point
  où **(1)** conduit à **(3)**, et **(3)** conduit à **(2)**.

- s est le s-point ACB.DFE

Preuve

- Considérons les triangles A*Z3C2' et Z1C'B1'.

- Analyse des points d'intersection de leurs côtés

*	(A*Z3) et (Z1C')	se coupent en	s
*	(Z3C2') et (C'B1')	se coupent en	k2
*	(A*C2') et (Z1B1')	se coupent en	k1.

- Analyse du point de concours de leurs droites sommitales

*	(A*Z1)	est la droite	(CE)
*	(Z3C')	est la droite	(AF)
*	(C2'B1')	est la pascale de ABCEDF noté	

A	D	C
E	B	F
B1'	M	C2'

où M est le point d'intersection de (CE) et (AF).

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **1**), les triangles A*Z3C2' et Z1C'B1' étant perspectifs de centre M, s, k1 et k2 sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, s est sur (k1k2k3).

Commentaire : cette approche originale de l'auteur est basée sur la technicité mis en œuvre.

Scolies : **(1)** la C-droite (s k1k2k3) est noté en fonction du s-point ACB.DFE i.e.

(ACB.DFE) ou (ACB.FED) ou (ACD.EDF)

ce qui confirme la notation de la C-droite (k1k2k3) envisagée en **D. IV. 1**.

(2) Par le s-point ACB.DFE passent deux autre C-droites obtenues à partir de ses deux autres écritures i.e. ACB.FED et ACD.EDF.

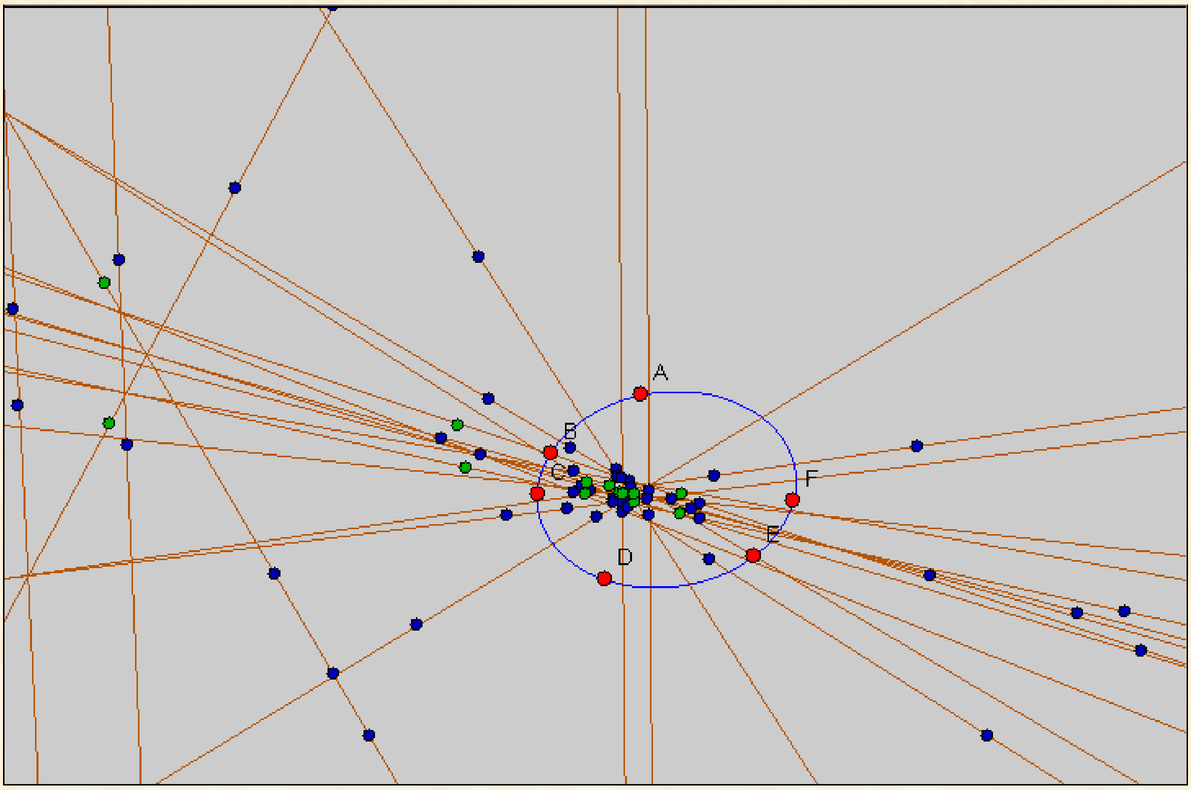
Énoncé traditionnel : *chaque* C-*droite passe par un* s-*point*

ou

si, 3 *pascals conduisent à un* s-*point*
alors, *leurs* 3 k-*points sont alignés avec ce* s-*point*.

Note historique : le professeur Cayley[70] a publié dans le *Quaterly Journal* une table montrant la nature des points d'intersection des pascales.

[70] Cayley A., *Quaterly Journal* vol. **IX**.



71

En bleu, le point de Kirkman, en vert les points de Steiner et en ocre les droites de Cayley.

Exercice : Montrer que le s-point ACE.FBD est sur la K-droite déterminé par les k-points ACEBFD, ACFDBE et ADBFCE.

2. Cinquième synthèse

* *Un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*
* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*
* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *par chaque* p-*point passent quatre pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points et un* s-*point*
* *par chacun des* 20 s-*points passent trois pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*point*
* *par chacun des* 60 k-*points passent trois pascales*.

* *Chaque* K-*droite contient deux* k-*points et un* p-*point*
* *par chaque* k-*point passent* 3 pascales, 3 K-*droites*
* *par chaque* p-*point passent* 2 K-*droites*
* *il existe* 90 K-*droites*.

* *Si*, 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés*

[71] Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ; http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

* *les* 60 k-*points sont sur* 20 C-*droites.*

* *Chaque* C-*droite passe par un* s-*point*
ou
si, 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés avec ce* s-*point*
* *par chaque s-point passent* 3 *pascales et* 3 C-*droite.*

* Une certaine réciprocité [72] : *un* s-*point est sur trois pascales*
trois k-*points sont sur une* C-*droite.*

3. Une courte biographie de George Salmon

73

George Salmon est né le 25 septembre 1819 à Dublin (Irlande).
Fils unique du marchand de lin Michael Salmon et d'Helen Weekes, George Salmon fréquente l'école de M. Porter dans sa ville natale avant d'entrer en 1834 au Trinity College de Dublin pour étudier les mathématiques. En 1841, pour honorer sa bourse de recherche à Trinity, il entre dans les ordres de l'église anglicane. Diacre en 1844, prêtre en 1845, il se marie la même année avec Frances Anne Salvador, la fille du révérend J. L. Salvador avec qui il aura six enfants, quatre garçons et deux filles dont deux survivront.
En 1848, il est chargé de cours en mathématiques à Trinity et s'intéresse durant une courte période à la géométrie synthétique. En 1866, il est professeur de théologie à Trinity.
En 1876, la *Nouvelle correspondance mathématiques* publie un article de Catalan concernant le théorème dit des "trois cordes" attribué à Salmon ; ce théorème qui apparaît comme un corollaire de "La droite de Simson", avait été publié par les *Annales* de 1813 qui précisait dans une note que ce résultat était connu de Gergonne.
En 1888, il est doyen de Trinity et occupera ce poste jusqu'à sa mort.
George Salmon décède à Dublin le 22 janvier 1904.

---

[72] Idée et expression d'Otto Hesse.
[73] O'Connor J. J. and Robertson E. F., *The MacTutor History of Mathematics Archive* ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

VI. LE THÉORÈME

DE

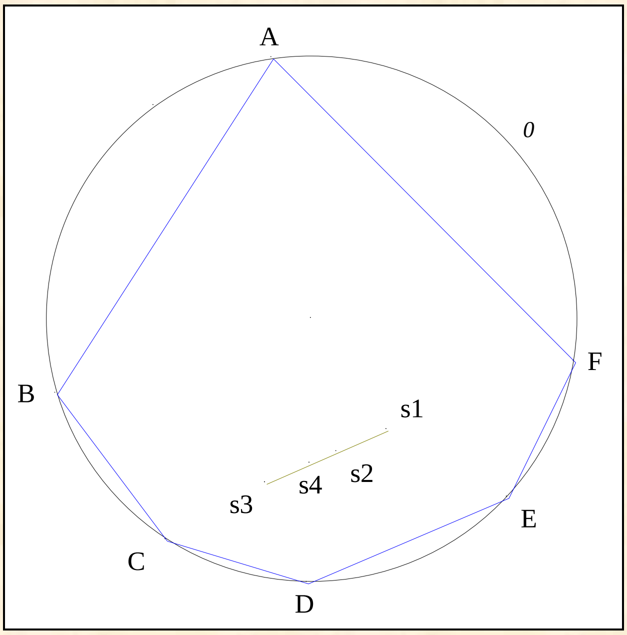
JULIUS PLÜKER

Commentaire : en considérant comme invariantes les droites sommitales de deux triangles disjoints et cocycliques, l'auteur propose une technique pour en déterminer trois P-pascals, et montre, sur un exemple, que leurs trois s-points sont alignés sur une P-droite avec le s-point associé aux deux triangles de départ.

1. P-droite ou droite de Plüker

VISION

Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	A, B, C, D, E, F	six points de *0*
et	s1, s2, s3, s4	les s-points BDA.ECF, BCA.EDF, BFC.EAD, BDF.ECA.

Donné : s1, s2, s3 et s4 sont alignés.

VISUALISATION

- Les points mis en œuvre dans s1

B	D	A
E	C	F
A1*	A1"	A1'

B	A	D
C	E	F
B1'	B1"	B1*

A	B	D
C	F	E
C1*	C1"	C1'

B	A	D
E	C	F
U1	V1	W1

- Les points mis en œuvre dans **s2**

B	C	A
E	D	F
A2*	A2"=A1"	A2'

B	A	C
D	E	F
B2'	B2"=B1"	B2*

A	B	C
D	F	E
C2*	C2"=C1"	C2'

B	A	C
E	D	F
U2=U1	V2	W2

- Les points mis en œuvre dans **s3**

B	F	C
E	A	D
A3*=A1*	A3"=A2'	A3'

B	C	F
A	E	D
B3'	B3"=C2'	B3*=B1*

C	B	F
A	D	E
C3*=C1*	C3"=B2'	C3'

B	C	F
E	A	D
U3=U2	V3	W3

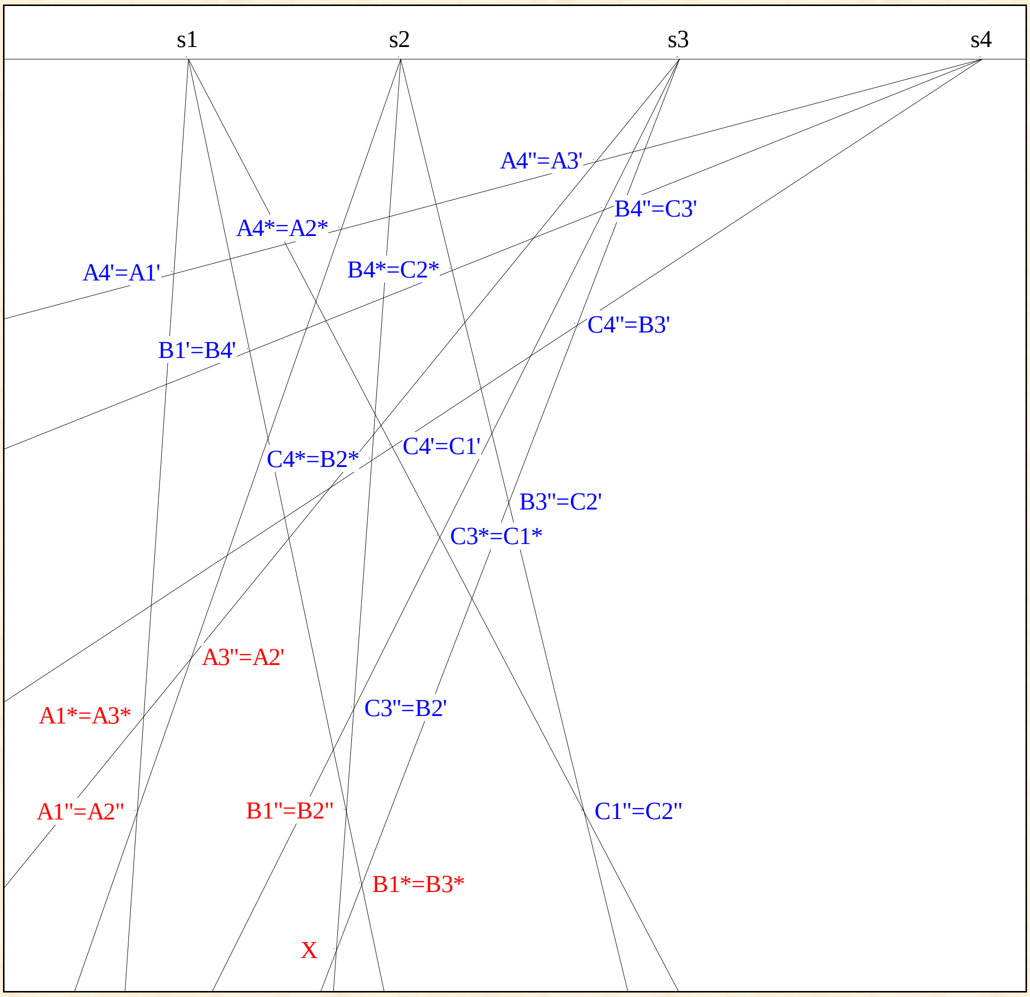
- Les points mis en œuvre dans **s4**

B	D	F
E	C	A
A4*=A2*	A4"=A3'	A4'=A1'

B	F	D
C	E	A
B4'=B1'	B4"=C3'	B4*=C2*

F	B	D
C	A	E
C4*=B2*	C4"=B3'	C4'=C1'

B	F	D
E	C	A
U4=U2	V4	W4



- Montrons que s1, s2 et s3 sont alignés.

- **Commentaire :** l'auteur a tracé sur une feuille tous les points mis en œuvre et a eu l'intuition que (s1s2s3) pouvait être l'axe de perspective de deux triangles à déterminer.
C'est une nouvelle approche de l'alignement recherché.

- Notons X le point d'intersection de (B1*C2') et (B2"C3").

- Les deux triangles A1*A2'A2" et B1*XB2" conduisent à 3 droites sommitales

  * (A1*B1*) est la droite (AC)

  * (A2"B2") est la droite (BF)

  * (A2'X)

- Notons L, M les points d'intersection de (AC) et (BF), (AD) et (EF).

- Nous avons : (A2'ML) est la pascale de CADBFE **(1)**

C	F	D
B	A	E
M	A2'	L

- X étant le point d'intersection de (B1*C2') et (B2"C3"), (B1*C2') est la pascale de ACDBEF **(2)**

A	E	D
B	C	F
B3'	C2'	B1*

(B2"C3") est la pascale de ADCEBF **(3)**

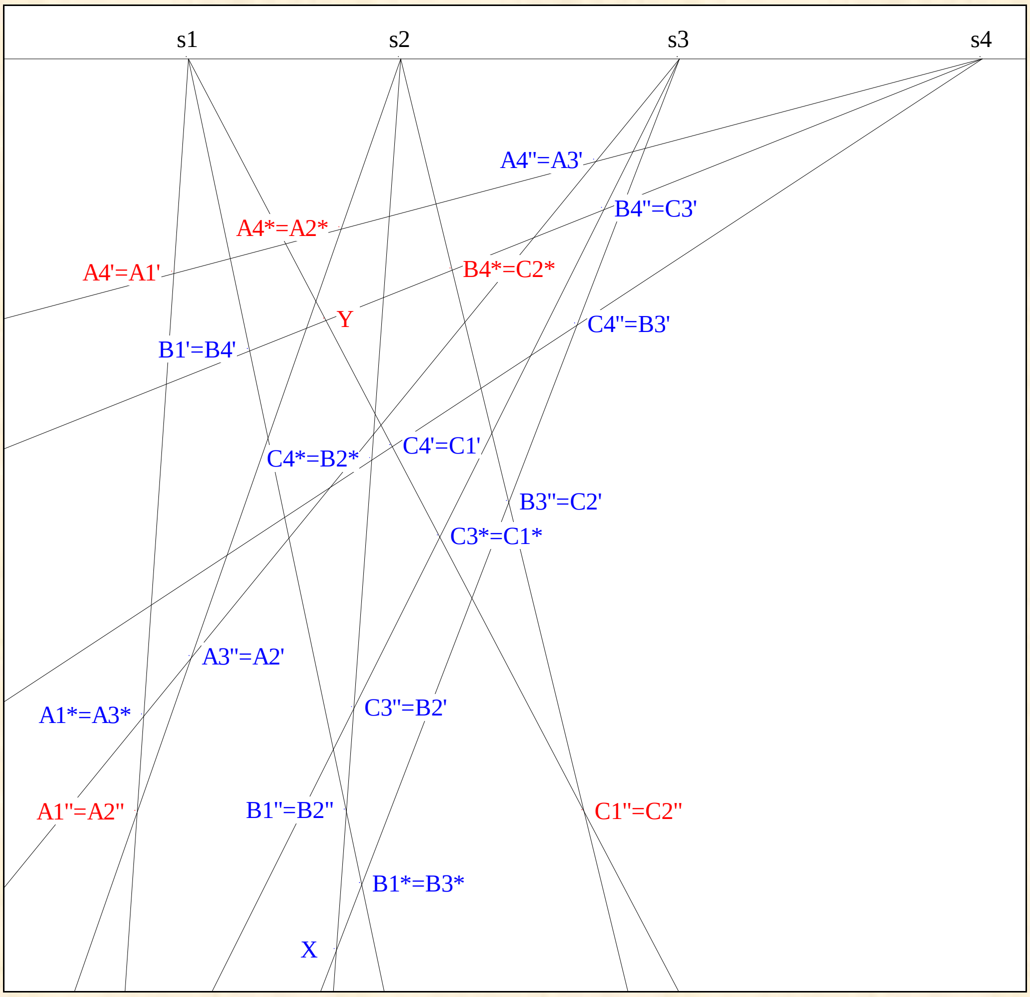
A	B	C
E	D	F
B2"	C3"	B2*

- Les K-pascals CADBFE, ACDBEF et ADCEBF étant disjoints du pascal AEDFCB et ayant, deux à deux, trois côtés non successifs en commun,[74]
leurs pascales (A2'ML), (B1*C2') et (B2"C3") sont concourantes au k-point AEDFCB.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe),
(s1s2s3) est l'axe de perspective de A1*A2'A2" et B1*XB2".

- **Conclusion partielle :** s1, s2 et s3 sont alignés.

- Montrons que s1, s2 et s4 sont alignés.



- Notons Y le point d'intersection de (C1"C1') et (B4*B4").

- Les deux triangles A4*A1'A1" et B4*YC1" conduisent à 3 droites sommitales

[74] Le lecteur pourra vérifier qu'à partir du pascal AEDFCB, nous retrouvons les pascals **(3)**, **(2)**, **(1)** par application de la règle énoncée en **D. III. 2.**

* (A4*B4*) est la droite (CF)

* (A1"C1") est la droite (AE)

* (A1'Y)

- Notons N, O les points d'intersection de (CF) et (AE), (AB) et (FD).

- Nous avons : (A1'ON) est la pascale de AEDFCB **(1)**

A	C	D
F	E	B
A1'	O	N

- Y étant le point d'intersection de (C1"C1') et (B4*B4"),

(C1"C1') est la pascale de AFDCBE **(2)**

A	B	D
C	F	E
C1*	C1"	C1'

(B4*B4") est la pascale de BEDCFA **(3)**

B	F	D
C	E	A
B4'=B1'	B4"=C3'	B4*=C2*

- Les K-pascals AEDFCB, AFDCBE et BEDCFA étant disjoints du pascal ACEFBD et ayant, deux à deux, trois côtés non successifs en commun,[75]
leurs pascales (A1'ON), (C1"C1') et (B4*B4") sont concourantes au k-point ACEFBD.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe),
(s1s2s4) est l'axe de perspective de A4*A1'A1" et B4*YC1".

- **Conclusion partielle :** s1, s2 et s4 sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, s1, s2, s3 et s4 sont alignés.

Scolies : **(1)** (s1s2s3s4) est "une P-droite" ou "une droite de Plüker". (P pour Plüker)

(2) Les pascals

B	D	A
E	C	F

B	C	A
E	D	F

B	F	C
E	A	D

B	D	F
E	C	A

sont respectivement les tableaux associés aux s-points s1, s2, s3, s4
i.e. BDA.ECF, BCA.EDF, BFC.EAD, BDF.ECA.

En considérant, par exemple, les deux triangles disjoints et cocycliques BCA et EDF, nous observons les colonnes sont les mêmes à l'ordre près de leurs éléments.

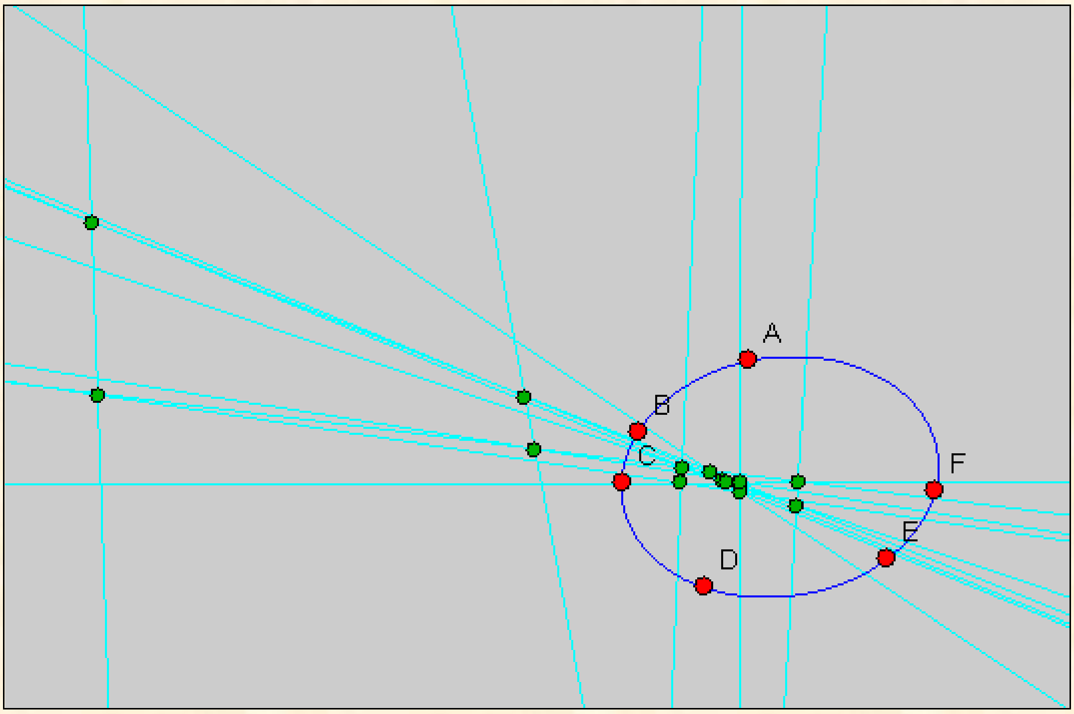
(3) Nous dirons que les 4 pascals précédents sont des "P-pascals relativement à BCA et EDF".

Énoncé traditionnel : *les 20 points de Steiner sont par 4 alignés sur une* P-*droite*.

---

[75] Le lecteur pourra vérifier qu'à partir du pascal AEDFCB, nous retrouvons les pascals **(3)**, **(2)**, **(1)** par application de la règle énoncée en **D. III. 2.**

Photo :



[76]

En vert les s-points et en turquoise les 15 P-droites.

Note historique : Jakob Steiner avait relaté en 1832 dans *Systematische Entwicklungen der Abhängigkeit geometrischer gestalten* que les pascales sont par trois concourantes et que les 20 s-points obtenus sont alignés 4 par 4 sur 15 droites. Il précisee qu'il n'a pas réussi à trouver le règle d'alignement de 4 s-points et ajoute

il me paraît qu'il est impossible de les trouver.[77]

Notons que l'erreur de Jakob Steiner à la 3° et 4° question sera corrigée et démontrée analytiquement l'année suivante par Julius Plüker[78] dans le *Journal* de Crelle.

2. Règle d'obtention d'une P-droite et notation

- Rappel de l'exemple précédent

* départ avec le s1-point BDA.ECF **(1)**

B	D	A
E	C	F

* Dans **(1)**, permutons les éléments C et D de la deuxième colonne ; **(2)**

B	C	A
E	D	F

nous obtenons le s2-point BCA.EDF.

[76] Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ; http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

[77] Plüker J., Note sur le théorème de Pascal, *Journal* de Crelle **34** (1847) 337-340.

[78] Pluker J., Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbol und unbestimmter Coëfficienten, *Journal* de Crelle, vol. **5** (1829) 268-274.

* Dans **(1)**, permutons les éléments C et D, A et F des deuxième et troisième colonnes ; **(3)**

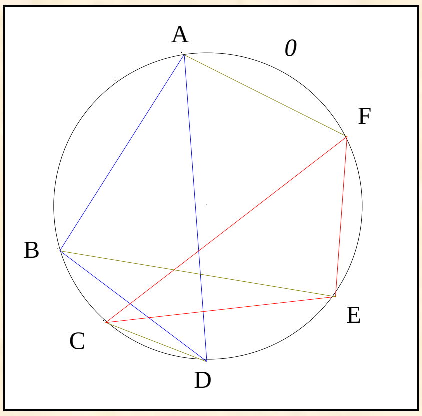
B	C	F
E	D	A

nous obtenons le s3-point BCF.EDA.[79]

* Dans **(1)**, permutons les éléments A et F de la troisième colonne ; **(4)**

B	D	F
E	C	A

nous obtenons le s4-point BDF.ECA.



- Nous dirons que les 4 pascals précédents sont des P-pascals dans lesquels les colonnes sont les mêmes à l'ordre près de ses éléments.

- Notation d'une P-droite : la P-droite (s1s2s3s4) se notera (BE.DC.AF)

Scolies : **(1)** la mise en évidence de deux triangles disjoints et cocycliques est importante mais pas l'ordre des lettres de ces deux derniers. (Cf. **A. 4.** Règles tabulaires)
Seule la composition des colonnes est à respecter.

(2) **Exemple**

* Sélectionnons deux triangles disjoints et cycliques BDA et ECF

et considérons le tableau

B	D	A
E	C	F

* A partir de là, nous pouvons considérer 3 tableaux respectant les colonnes et conduisant à des pascals distincts comme nous le montrons dans le paragraphe suivant.

3. Droites de Plüker passant par un s-point

- **Commentaire :** nous considérons deux triangles disjoints et cycliques, par exemple, BDA et ECF et d'après la preuve en **D. VI. 1.** P-droite, une permutation circulaire des sommets de ECF conduit à un alignes des s-points correspondants.

[79] Nous montrerions que BCF.EDA = BFC.EAD d'après **A. 4.** Règles tabulaires.

- Considérons dans l'exemple précédent le s1-point BDA.ECF
  et recherchons le P-droites passant ce s-point :

* première droite de Plüker *P1* : (BE.DC.AF) **(1)**

B	D	A
E	C	F

* deuxième droite de Plücker *P2* : (BF.DE.AC) **(2)**

B	D	A
F	E	C

* troisième droite de Plücker *P3* : (BC.DF.AE) **(3)**

B	D	A
C	F	E

Énoncé traditionnel : *par un* s-*point passent trois* P-*droites.*

Exercices : **(1)** ABC.DEF étant un s-point, trouver les trois P-droites passant par ce s-point. [80]

(2) La P-droite (AD.BF.CE) ne passe pas par le s-point ABC.DEF

3. Nombre de P-droites

- Il correspond au nombre de partition des 6 lettres en 3 groupes de deux lettres.
  En recourant au coefficient multinomial 6 ! / 2 !2 !2 ! nous en trouvons 15.6 = 75
  que nous devons diviser par 3 !
  puisque l'ordre des lettres dans les deux triangles disjoints et cycliques n'intervient pas.

- **Conclusion :** il y a 15 P-droites.

Énoncé Traditionnel : *il existe* 15 P-*droites* et
les 20 s-*points sont par* 4 *alignés sur ces* 15 P-*droites*.

4. Sixième synthèse

* *un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*
* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*
* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *par chaque* p-*point passent quatre pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points et un* s-*point,*
* *par chacun des* 20 s-*points passent trois pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*point.*
* *par chacun des* 60 k-*points passent trois pascales*.

---

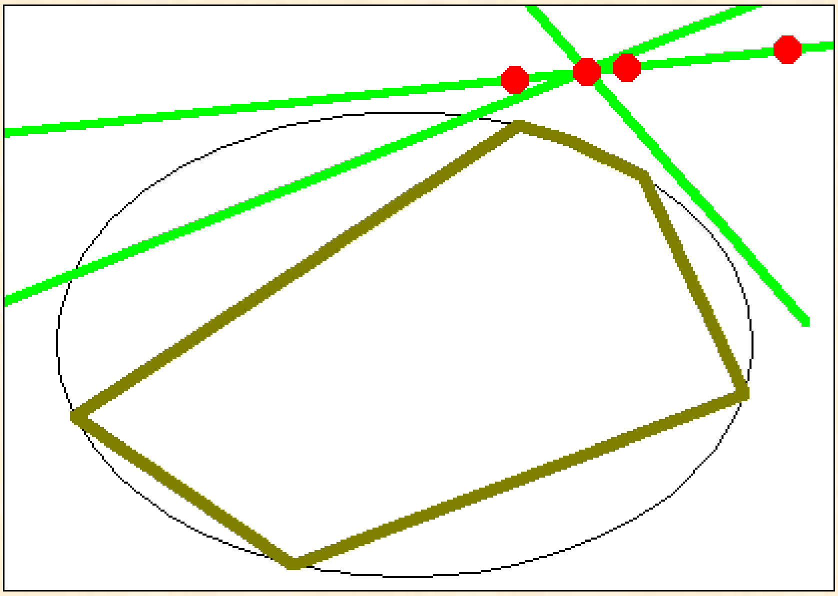
[80] (AB.CD.EF), (AD.CF.EB), (AF.CB.ED).

* *Chaque* K-*droite contient deux* k-*points et un* p-*point*
* *par chaque* k-*point passent* 3 pascales, 3 K-*droites*
* *par chaque* p-*point passent* 2 K-*droites*
* *il existe* 90 K-*droites*.

* *Si*, 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés*
* *les* 60 k-*points sont sur* 20 C-*droites.*

* *Chaque* C-*droite passe par un* s-*point*
  ou
  si, 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés avec ce* s-*point*.

* *Les* 20 s-*points sont par* 4 *alignés sur une* P-*droite*
* *par un* s-*point passent trois* P-*droites*
* *il existe* 15 P-*droites*
* *par chaque s-point passent* 3 *pascales*, 3 C-*droites*, 3 P-*droites*.


[81]

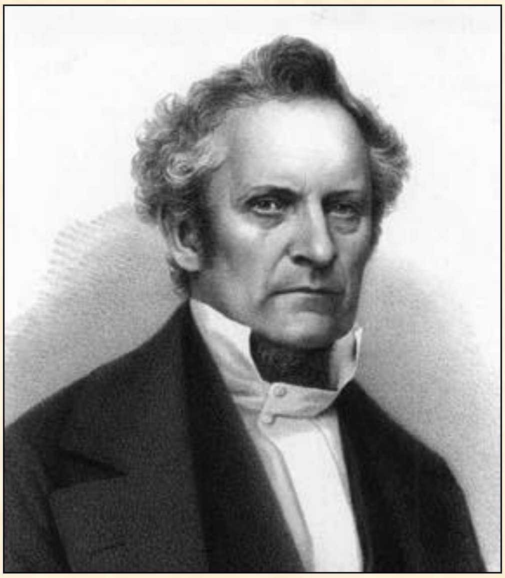
En rouge les s-points et en vert les P-droites

* Une certaine réciprocité [82] : *un* s-*point est sur trois pascales*
  trois k-*points sont sur une* C-*droite.*

  Un s-*point est sur trois* P-*droites*
  trois k-*points sont sur une* C-*droite*
  quatre s-*points sur une* P-*droite*.

3. Une courte biographie de Julius Plüker

[81] Sigur S. ; http://www.paideiaschool.org/teacherpages/steve_sigur/resources/pascal2/index.html
[82] Idée et expression d'Otto Hesse.

 [83]

Julius Plüker est né le 16 juin 1801 à Elberfeld (Wuppertal) dans le duché de Berg (Allemagne). Fils d'une famille de marchands originaire d'Aix-la-Chapelle, il sera toute sa vie partagé entre les cultures française et allemande.
Après avoir été élève au Gymnasium de Düsseldorf, il est comme tout étudiant allemand de cette époque, successivement étudiant à l'université de Bonn, d'Heidelberg, de Berlin et de Paris en 1823. Il soutient sa thèse de doctorat la même année à l'université de Marburg.
Assistant en 1824 à Bonn, "professor extraordinarius " en 1828 à Bonn, puis à Berlin en 1838, il enseigne la même année au Gymnasium Friedrich Wilhelm de cette ville.
Notons pour la petite histoire, le conflit entre Jakob Steiner, le maître de la géométrie synthétique, et Julius Plüker qui en développait une approche analytique. Ce conflit éclate au grand jour lorsque Léopold Crelle préfére Plüker à Steiner pour le poste à pourvoir à Polytechnique.
Pour éviter cette désagréable situation, Julius Plüker préfère s'éloigner de Berlin pour aller enseigner à Halle en 1834 comme "professor ordinarius", puis rejoint en 1836 l'université Friedrich-Wilhelm de Bonn. L'année suivante, il épouse mademoiselle Altstätten avec qui il aura un fils.
En 1847, il accepte la chaire de physique à Bonn qu'il occupera jusqu'à sa mort et aura pour assistant Félix Klein de 1866 à 1868.
Il décède le 22 mai 1868 à Bonn (Allemagne)

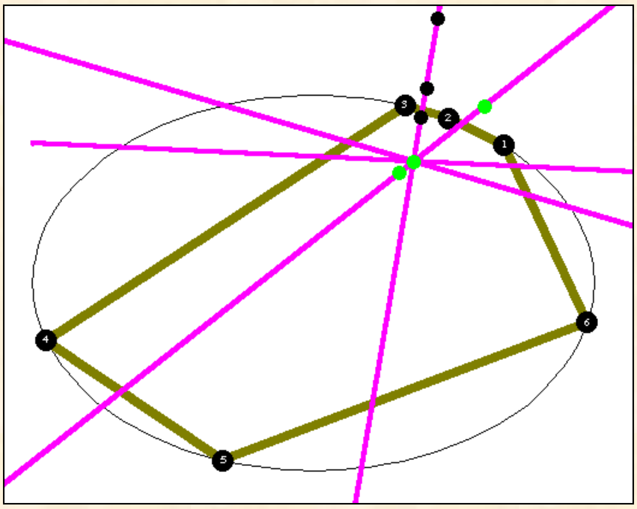
[83] O'Connor J. J. and Robertson E. F., *The MacTutor History of Mathematics Archive* ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

VII. POINTS DE SALMON

1. I-point ou point de Salmon

VISION

Figure :


[84]

Traits : *0* un cercle,
A, B, C, D, E, F six points de *0*
et *C1*, *C2*, *C3*, *C4* les C-droites (BDA.ECF), (BCA.EDF), (BCF.EDA), (BDF.ECA).

Donné : *C1*, *C2*, *C3* et *C4* sont concourantes.

VISUALISATION

- **Commentaire :** BDA.ECF, BCA.EDF, BCF.EDA et BDF.ECA sont 4 s-points alignés sur une P-droite notée (BE.DC.AF).
Ces quatre s-points conduisent à quatre C-droites.
Nous analysons chaque C-droite en mettant sur la première ligne les 3 k-points correspondants et en colonne le processus de leurs obtentions.

- Analyse des 4 C-droites

* le s-point BDA.ECF et les 3 k-points sur *C1*

B	D	A
E	C	F

k11-point BCAEDF

B	A	D
C	E	F

k12-point BEDCAF

A	B	D
C	F	E

k13-point AFDCBE

B	F	D
C	A	E

B	F	A
E	D	C

A	E	B
F	D	C

[84] Sigur S. ; http://www.paideiaschool.org/teacherpages/steve_sigur/resources/pascal2/index.html

B	C	A
F	D	E

B	E	D
F	A	C

A	F	D
E	B	C

D	E	A
F	B	C

A	C	D
F	B	E

B	C	D
E	A	F

* le s-point BCA.EDF et les 3 k-points sur *C2*

B	C	A
E	D	F

B	A	C
D	E	F

A	B	C
D	F	E

k21-point BDAECF   k22-point BECDAF   k23-point AFCDBE

B	F	C
D	A	E

B	F	A
E	C	D

A	E	B
F	C	D

B	D	A
F	C	E

B	E	C
F	A	D

A	F	C
E	B	D

C	E	A
F	B	D

A	D	C
F	B	E

B	D	C
E	A	F

* le s-point BCF.EDA et les 3 k-points sur *C3*

B	C	F
E	D	A

B	F	C
D	E	A

F	B	C
D	A	E

k31-point BDFECA   k32-point BECDFA   k33-point FACDBE

B	A	C
D	F	E

B	A	F
E	C	D

F	E	B
A	C	D

B	D	F
A	C	E

B	E	C
A	F	D

F	A	C
E	B	D

C	E	F
A	B	D

F	D	C
A	B	E

B	D	C
E	F	A

* le s-point BDF.ECA et les 3 k-points sur *C4*

B	D	F
E	C	A

B	F	D
C	E	A

F	B	D
C	A	E

k41-point BCFEDA   k42-point BEDCFA   k43-point FADCBE

B	A	D
C	F	E

B	A	F
E	D	C

F	E	B
A	D	C

B	C	F
A	D	E

B	E	D
A	F	C

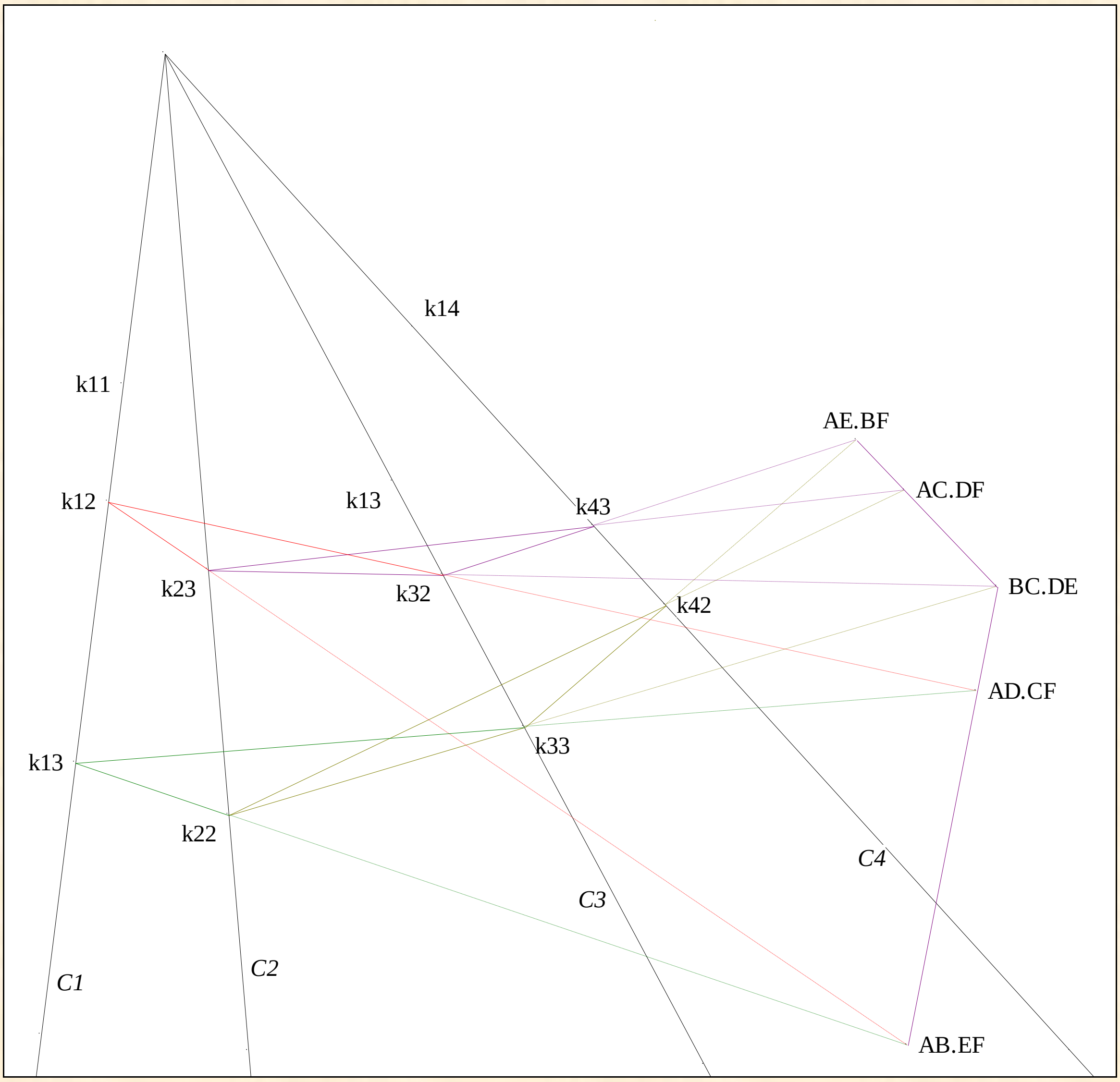
F	A	D
E	B	C

D	E	F
A	B	C

F	C	D
A	B	E

B	C	D
E	F	A

- La photo obtenue ci-dessous après analyse du point précédent, nous permet de considérer trois triangles en perspective.



* Les triangles k12k23k32 et k13k22k33 admettant (AB.EF, BC.DE, AD.CF) pour arguésienne sont perspectifs.

D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" appliqué à ces deux triangles, C1, C2 et C3 sont concourantes.

* Les triangles k23k32k43 et k22k33k42 admettant (BC.DE, AC.BF, AE.BF) pour arguésienne sont perspectifs.

D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" appliqué à ces deux triangles, C2, C3 et C4 sont concourantes

- **Conclusion :** *C1*, *C2*, *C3* et *C4* sont concourantes.

Scolie : **(1)** ce point de concours est "le point Salmon relativement à *C1*, *C2*, *C3* et *C4*" ou plus brièvement "I-point".

(2) Notation du I-point

- Rappelons

* les 4 C-droites considérées : (BDA.ECF), (BCA.EDF), (BCF.EDA), (BDF.ECA)
et les 4 tableaux associés :

B	D	A
E	C	F

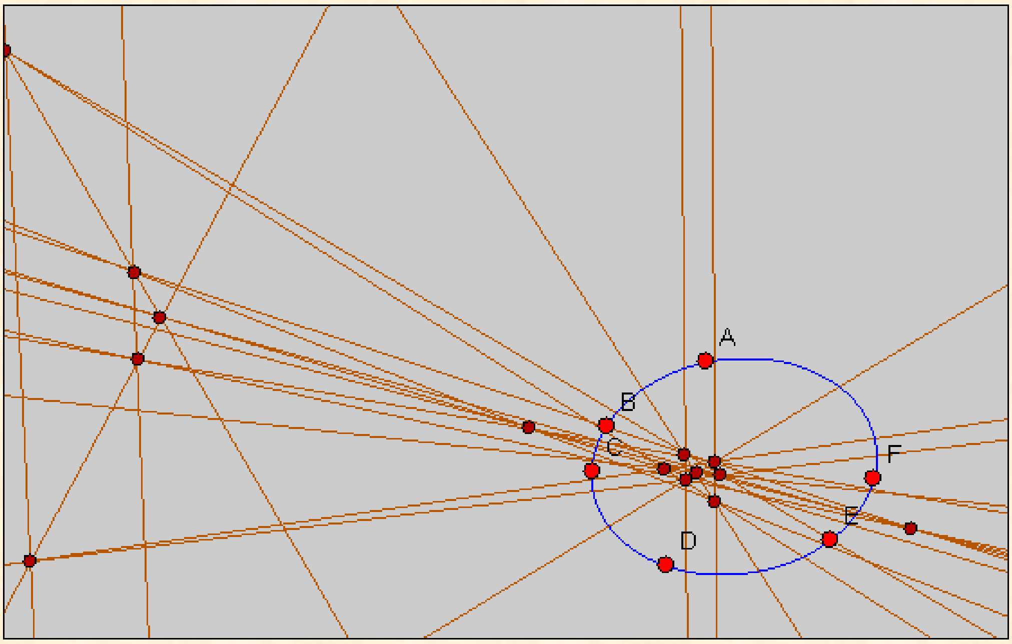
B	C	A
E	D	F

B	C	F
E	D	A

B	D	F
E	C	A

- Nous observons que ces tableaux ont les mêmes colonnes à l'ordre près de leurs éléments.

- **Conclusion :** le point d'intersection de *C1*, *C2*, *C3* et *C4* est noté BE.DC.AF



[85]

En grenat les points de Salmon et en ocre les droites de Cayley.

Énoncé traditionnel : *les* 20 C-*droites se coupent* 4 *à* 4 en 15 I-*points*.[86]

Note historique : rappelons que Cayley et Georges Salmon ont trouvé en même temps que les 60 s-points sont situés 3 à 3 sur 20 C-droites souvent appelées droites de Cayley-Salmon.
Georges Salmon a démontré par la suite que ces 20 C-droites se coupent 4 à 4 en 15 I-points et que chacune d'elles passe par un seul s-point.

---

85 Fisher J. C., Fuller N., University of Regina (Canada) ; http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/TransparentHexagram/pmh.html

86 Résultat à prouver.

2. Règle d'obtention d'un I-point

- La procédure :

  * **départ** avec la C1-droite de Cayley (BDA.ECF) **(1)**

B	D	A
E	C	F

  * Dans **(1)**, fixons la première colonne
  puis permutons D et C **(2)**

B	C	A
E	D	F

  nous obtenons la C2-droite de Cayley (BCA.EDF)

  * Dans **(1)**, fixons la première colonne,
  puis permutons C et D, A et B **(3)**

B	C	F
E	D	A

  nous obtenons la C3-droite de Cayley (BCF.EDA)

  * Dans **(1)**, fixons la première colonne,
  puis permutons A et F **(4)**

B	D	F
E	C	A

  nous obtenons la C4-droite de Cayley (BDF.ECA).

3. Nombre de I-points

- **Conclusion :** les 20 C-droites passent par groupe de 4 par 15 I-points.

4. Septième synthèse

* *un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*
* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*
* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *par chaque* p-*point passent quatre pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points et un* s-*point,*
* *par chacun des* 20 s-*points passent trois pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*point.*
* *par chacun des* 60 k-*points passent trois pascales.*

* *Chaque* K-*droite contient deux* k-*points et un* p-*point*
* *par chaque* k-*point passent* 3 pascales, 3 K-*droites*
* *par chaque* p-*point passent* 2 K-*droites*
* *il existe* 90 K-*droites.*

* *Si,* 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés*
* *les* 60 k-*points sont sur* 20 C-*droites*
* *par chaque* k-*point passent trois pascales, trois* C-*droites.*

* *Chaque* C-*droite passe par un* s-*point*
ou
si, 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés avec ce* s-*point*.

* *Les* 20 s-*points sont par* 4 *alignés sur une* P-*droite*
* *par un* s-*point passent trois pascales, trois* C- *droites, trois* P-*droites*
* *il existe* 15 P-*droites*.

* *les* 20 C-*droites se coupent* 4 *à* 4 en 15 I-*points*
par un i-*point passent* 4 C-*droites.*

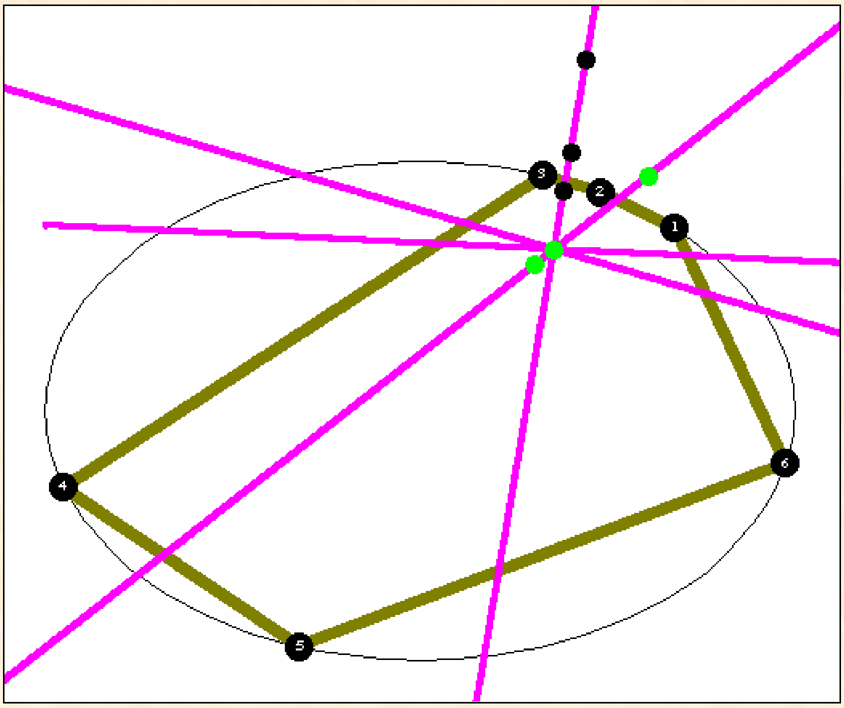
* Une certaine réciprocité [87] : *un* s-*point est sur trois pascales*
trois k-*points sont sur une* C-*droite.*

un s-*point est sur trois* P-*droites*
trois k-*points sont sur une* C-*droite*
quatre s-*points sur une* P-*droite*.

Les pascales déterminent des s-*points et ceux-ci des* P-*droites* ;
les k-*points déterminent des* C-*droites et celles-ci des* i-*points.*

Par un i-*points passent* 4 C-*droites et* 3 i-*points sont sur une* C-*droite*. [88]

Quatre s-*points sur une* P-*droite et* 3 P-*droites passent par un* i-*point.* [89]



[90]

En rose des C-droite, en noir des points des k-points, en vert des i-points.

[87] Idée et expression d'Otto Hesse.
[88] À prouver.
[89] À prouver.
[90] Sigur S. ; http://www.paideiaschool.org/teacherpages/steve_sigur/resources/pascal2/index.html

VI. LE THÉORÈME DE OTTO HESSE

1. Le résultat d'Otto Hesse

Traits :	*0*	un cercle,
	A, B, C, D, E, F	six points de *0*,
	s	le s-point BDA.ECF,
	P1, *P2*, *P3*	les P-droites (BE.DC.AF), (BC.DF.AE), (BF.DE.AC),
	s11, s12, s13	les trois s-points de *P1*,
	s21, s22, s23	les trois s-points de *P2*,
	s31, s32, s33	les trois s-points de *P3*
et	*P'1*, *P'2*, *P'3*	les trois arguésiennes des triangles s11s12s13 et s21s22s23 s21s22s23 et s31s32s33, s11s12s13 et s31s32s33

Donné : *P'1*, *P'2*, *P'3* sont concourantes.[91]

Note historique :

12. THÉORÈME DE M. OTTO HESSE. *Soit* O *un point où se réunissent trois droites* S, *et soient* $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$, *les autres points s qui se trouvent respectivement sur la première, la deuxième et la troisième droite* S; *les points* $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$, *sont les sommets de trois triangles. Les intersections des côtés homologues des triangles* $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$, *donnent trois points s situés sur une droite* S; *de même les intersections respectives des triangles* $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ *et* $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$ *et* $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$; *les trois nouvelles droites* S *se rencontrent en un point* O' *qui est aussi un point s; les points* O *et* O' *sont conjugués relativement à la conique. Cette figure renferme quinze droites, savoir : les trois droites* S *données, les neuf côtés des triangles et les trois droites* S *qui s'en déduisent; et vingt points, savoir : les dix points s donnés et les dix points qui s'en déduisent; ce sont les quinze droites* S *et les vingt points s; ces vingt points forment dix couples, et les points de chaque couple sont conjugués relativement à la conique.*

Démonstration. A trouver.[92]

[91] Théorème de Pascal et ses conséquences ; d'après MM. Steiner, Plucker, Otto Hesse, Cayley, Kirkman, Salmon ; *Nouvelles Annales de Mathématiques* série **1** t. **XI** (1852) 163-176 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[92] Théorème de Pascal et ses conséquences ; d'après MM. Steiner, Plucker, Otto Hesse, Cayley, Kirkman, Salmon ; *Nouvelles Annales de Mathématiques* série **1** t. **XI** (1852) 163-176 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0 ; Hesse O., Eine Bemerkung sum Pascalschen Theorem, Journal de Crelle **41** (1851) 269

2. Huitième synthèse

* *un pascal est un hexagone cyclique*
* *la pascale est une droite passant par les points d'intersection des côtés opposés d'un pascal.*

* 6 *points cocycliques déterminent* 15 c-*droites*
* *les* 15 c-*droites se coupent en* 45 p-*points*
* 6 *points cocycliques déterminent* 60 *pascals et* 60 *pascales*
* *par chaque* p-*point passent quatre pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points et un* s-*point,*
* *par chacun des* 20 s-*points passent trois pascales.*

* *Chaque pascale contient* 3 p-*points, un* s-*point et un* k-*point.*
* *par chacun des* 60 k-*points passent trois pascales*.

* *Chaque* K-*droite contient deux* k-*points et un* p-*point*
* *par chaque* k-*point passent* 3 *pascales,* 3 K-*droites*
* *par chaque* p-*point passent* 2 K-*droites*
* *il existe* 90 K-*droites*.

* *Si,* 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés*
* *les* 60 k-*points sont sur* 20 C-*droites*
* *par chaque* k-*point passent trois pascales, trois* K-*droites, trois* C-*droites*.

* *Chaque* C-*droite passe par un* s-*point*
ou
si, 3 *pascals conduisent à un* s-*point alors, leurs* 3 k-*points sont alignés avec ce* s-*point*.

* *Les* 20 s-*points sont par* 4 *alignés sur une* P-*droite*
* *par un* s-*point passent trois pascales, trois* C- *droites, trois* P-*droites*
* *il existe* 15 P-*droites*.

* *Les* 20 C-*droites se coupent* 4 *à* 4 en 15 I-*points*
par un i-*point passent* 4 C-*droites et* 3 P-*droites.*[93]

* Une certaine réciprocité [94] : *un* s-*point est sur trois pascales*
trois k-*points sont sur une* C-*droite.*

un s-*point est sur trois* P-*droites*
trois k-*points sont sur une* C-*droite*
quatre s-*points sur une* P-*droite*.

Les pascales déterminent des s-*points et ceux-ci des* P-*droites* ;
les k-*points déterminent des* C-*droites et celles-ci des* i-*points*.

Par un i-*points passent* 4 C-*droites et* 3 i-*points sont sur une* C-*droite*. [95]

Quatre s-*points sur une* P-*droite et* 3 P-*droites passent par un* i-*point.* [96]

Il y a une relation duale entre *les* 20 s-*points et les* 20 C-droites
les 15 P-*droites* [97] *et les* 15 i-points.[98]

---

93 A prouver.
94 Idée et expression d'Otto Hesse dès 1868
95 À prouver.
96 À prouver.

3. Une courte biographie d'Otto Hesse

 [99]

Ludwig Otto Hesse est né à Königsberg (Prusse, aujourd'hui Kaliningrad, Russie), le 22 avril 1811. Étudiant, puis professeur dans une école de commerce de Königsberg, il devient à partir de 1845, professeur de l'Université de cette ville. De 1856 à 1868, il professe à l'Université d'Heidelberg avant d'enseigner à l'École polytechnique de Munich. A partir de 1868, il devient membre de l'Académie bavaroise des sciences.
Il décède le 4 août 1874 à Munich (Allemagne).

IX. RÉSUMÉ

DES

POINTS ET DROITES

- 20 C-droites : sur chaque C-droite, nous avons 1 s-point, 3 k-points, 3 i-points
- 15 P-droites : sur chaque P-droite, nous avons 4 s-points
- 20 s-points : par chaque s-point passent 3 pascales, 3 C-droites, 3 P-droites
- 60 k-points : par chaque k-point passent 3 pascales, 1 C-droite
- 15 i-points : par chaque i-point passent 4 C-droites, 3 P-droites.

---

[97] Plücker, M. J., reine angew. Math. **5** p. 274.
[98] Salmon G., Notes: Pascal's theorem, Art. 267.
[99] O'Connor J. J. and Robertson E. F., *The MacTutor History of Mathematics Archive* ;
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

E. RÉFÉRENCES

1. Dewulf E., Hexagramme de Pascal, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 2e série, tome **1,** n° 1 (1877) 348-350 ; archive.numdam.org/article/BSMA_1877_2_1_1_348_1.pdf

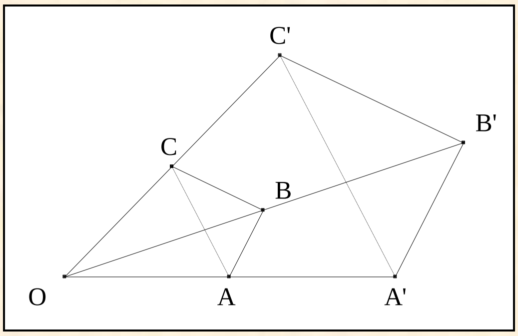
2. Veronese G., *Ann. pura appl.* (2) **11**(1882-3) 143-236, 284-90

3. Ladd Franklin, Christine, The Pascal Hexagram, Science, Volume 1, Issue 21 506/1883) 592-594

4. Fisher J. Chris and Fuller Norma, The Complete Pascal Figure Graphically Presented, http://www.math.uregina.ca/~fisher/Norma/paper.html

F. ANNEXE

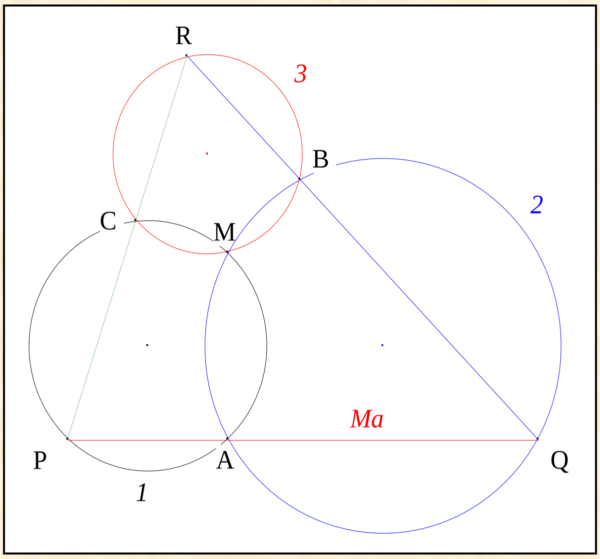
1. Le théorème faible de Desargues



Hypothèses : ABC un triangle
et A'B'C' un triangle tel que **(1)** (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C').

Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

2. Le théorème des trois cercles concourants



Traits :	*1*, *2*, *3*	trois cercles concourants,
	M	le point de concours de *1*, *2*, *3*,
	A	le second point d'intersection de *1* et *2*,
	*M*a	une A-monienne de *1* et *2*,
	P, Q	les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*,
	B, C	les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1*
et	R	un point de *3*.

Donné : (QBR) est une monienne de *2* et *3*
si, et seulement si,
(PCR) est une C-monienne de *1* et *3*.

G. ARCHIVES

Édition critique de la lettre de Leibniz à Périer du 30 août 1676

19 II. Apres avoir expliqué la generation [*du*] des sections du Cone [et *des*] [*de ses sections opti*] faite optiquement
20 par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cone [*vus*] des [*xx*] rayons ; il explique
21 [*fait voir*] les proprietez remarquables d'une certaine figure composée de six lignes droites,
22 qu'il appelle Hexagramme mystique ; et il fait voir par le moyen des projections que tout
23 Hexagramme Mystique convient à une section conique ; et que toute la section conique
24 donne un Hexagramme Mystique. J'ay mis [*sur le titre*] au devant ces mots de Hexagrammo
25 mystico et conico. [*Cette piece se trouve repetée*] Une partie de cette
26 piece se trouve repetée et inserée mot à mot dans une autre, sçavoir les
27 definitions (avec leurs corollaires) [*avec*] et les propositions (mais sans les demonstrations qui [*sont*] se trouvent repetées
28 dans le traité de loco solido dont je parleray cy dessous [*Et*] je croy meme que les figures du traité
29 [*de* [*celle*] *la derniere piece*] de loco solido [*xx*] suppleeront au defaut de [*celles*] quelques unes qui manquent
30 dans celuy-cy : de Hexagrammo.
31 [*III. Et comme il arrive que quelques unes de ces six droites qui font l'Hexagramme*
32 *sont infiniment petites, c'est de là que viennent les* [*th*] *proprietez des touchantes des*
33 *sections du Cone, expli*]
34 [*L'usage de l'Hexagramme paroist dans les traitez suivans ou*]

II°. Apres avoir expliqué la generation des sections du cone, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cone des rayons, il explique les proprietez remarquables d'une certaine figure, composée de six lignes droites, qu'il appelle Hexagramme mystique. J'ai mis au devant ces mots : *De hexagrammo mystico et conico.* Une partie de cette piece se trouve repetée et inserée mot a mot dans une autre, sçavoir les définitions (avec leurs corrollaires) et les propositions (mais sans les demonstrations) qui se trouvent repetées dans le traité *De loco solido* (1) dont je parlerai ci-dessous. Je crois même que les figures du traité *De loco solido* suppleeront au defaut de quelques-unes qui manquent dans celui-ci, *De hexagrammo.*

[100]

[100] Mesnard J., Taton R., *Persée* vol. **16** (1963) http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1963_num_16_1_4438

fifteen lines I, marked according to the plan I 12. 34. 56. The ninety lines, each containing two of the sixty points H, are marked J, according to the plan J 12. 43. The sixty points H lie three together on twenty lines, X.

Different notations are employed by von Staudt,[1] Cayley,[2] and Salmon.[3] A new notation was offered by Christine Ladd (Mrs. Franklin),[4] in which the vertices of the conic S are represented by A, B, C, D, E, F; the lines tangent to S at these vertices by a, b, c, d, e, f; the intersection of two fundamental lines AB, DE is called $P(AB.\ DE)$; the line joining two fundamental points ab, de is called $p'(ab.\ de)$. Here $p'(ab.de)$ is the pole of $P(AB.DE)$. The Pascal line of $ABCDEF$ is called $h(ABCDEF)$; it passes through the points $P(AB.DE)$, $P(BC.EF)$, $P(CD.FA)$. Similarly, the intersection of the lines $p'(ab.de)$, $p'(bc.ef)$, $p'(cd.fa)$ is the Brianchon point $H'(abcdef)$ of the hexagon $abcdef$. The three Pascal lines, $h(ABCFED)$, $h(AFCDEB)$, $h(ADCBEF)$, meet in a Steiner point $G(ACE.BFD)$. The four G points, $G(BDA.ECF)$ $G(EDF.BCA)$, $G(BCF.EDA)$, $G(BDF.ECA)$, lie on a Steiner-Plücker line $i(BE.CD.AF)$. The Kirkman point $H(ABCDEF)$ is the intersection of the Pascal lines $h(ACEBFD)$, $h(CEADBF)$, $h(EACFDB)$. A Cayley-Salmon line is marked $g(ACE.BFD)$; a Salmon point by $I(BE.CD.AF)$. Cayley "gives a table to show in what kind of a point each Pascal line meets every one of the 59 other Pascal lines. By attending to the notation of Pascal lines such a table may be dispensed with. His 90 points m, 360 points r, 360 points t, 360 points z, and 90 points w are the intersections each of two Pascals whose symbols can easily be derived one from another." For instance,

For instance,

$$\left.\begin{matrix} h(ABCDEF) \\ h(ABC\,FED) \end{matrix}\right\rangle m\,.$$

"By the notation here given," continues the author, "it is immediately evident what points are on every line and what lines pass through every point, without referring to tables, as Veronese[5] is obliged to do."

[1] Von Staudt, *Crelle's Journal*, Vol. LXII (1863), p. 142–50.

[2] A. Cayley, *Quarterly Journal*, Vol. IX (1868), p. 268–74.

[3] G. Salmon, *Conic Sections* (6th ed., 1879), p. 379–83 n.

[4] C. Ladd, *American Journal of Mathematics*, Vol. II (1879), p. 1–12.

[5] Veronese's notation and additions to the Pascal hexagram are given in *Atti della R. Accademia dei Lincei* (3d ser.), "Memorie della classe de scienze fisiche ecc.," Vol. I (Rome, 1879), p. 649–703.

[101]

[101] Cajori F., A history of mathematics notations, vol. **1**, **2** (1928-1929) 326.