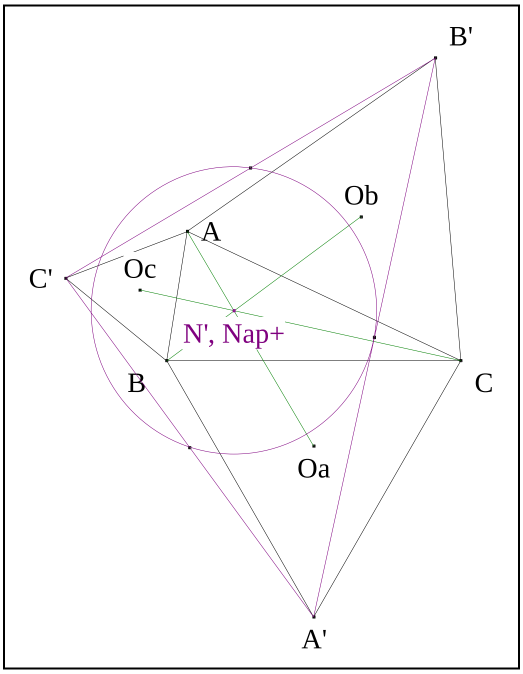
LE PREMIER POINT

DE

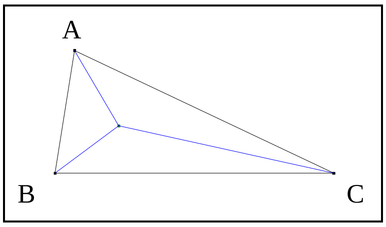
NAPOLÉON

Jean-Louis AYME



Résumé. Nous présentons une preuve originale et purement synthétique d'un résultat d'Arthur Engel, montrant que les droites extérieures de Napoléon d'un triangle passent par le centre du cercle d'Euler du triangle extérieur de Fermat associé à ce triangle.
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

I. UN POINT D'HISTOIRE



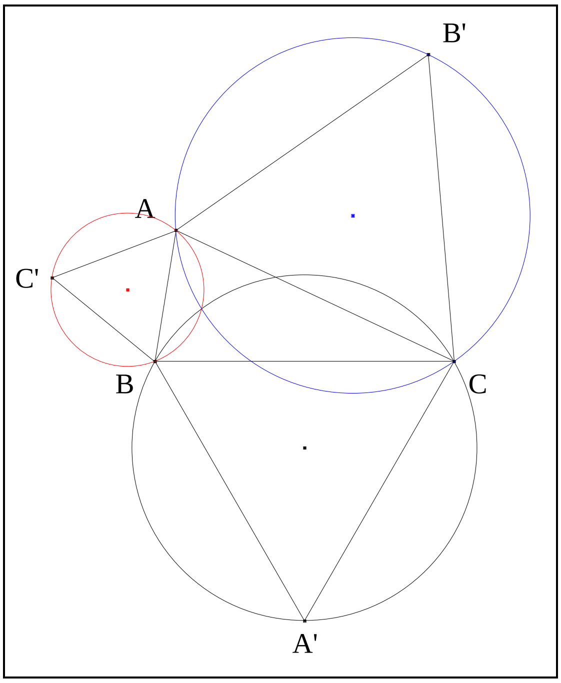
Au printemps 1644, le père Marin Mersenne[1] connu pour son cercle d'étude parisien que fréquentait le

---

[1] Mersenne M. (1588-1648).

jeune Blaise Pascal vers 1635, entreprenait un pèlerinage à Rome. Aux étapes de Bologne, puis de Florence, il montrait aux savants de l'époque, "le problème de Fermat[2]" qu'il emmenait avec lui dans ses bagages :

étant donné un triangle, rechercher le point tel que la somme de ses distances aux trois sommets, est minimale.



C'est ainsi que Bonaventure Cavalieri[3], Evangelista Torricelli[4] et Vincenzo Viviani[5] prendront connaissance de ce problème d'extrema. La solution de Torricelli publiée en 1659 par son élève Viviani qui deviendra le disciple de Galilée, avait pour point de départ la considération des trois triangles équilatéraux construits à l'extérieur sur les côtés du triangle et de leurs trois cercles circonscrits.
Au XIX-ième siècle, en souvenir de la solution de Torricelli, le belge Joseph Neuberg donnait aux cercles circonscrits, le nom de "cercles de Torricelli".

Presque un siècle plus tard, Napoléon Bonaparte naissait à Ajaccio, le 4 août 1769, un an après l'acquisition de la Corse par la France. Une bourse royale lui permettait de quitter l'île pour aller faire son éducation militaire à l'École Royale Militaire de Brienne où le père Patrault enseignait les mathématiques. En 1785, il passait son brevet de sous-lieutenant sous l'œil avisé de Pierre Simon Laplace et quittait Brienne pour aller rejoindre l'École Royale Militaire de Paris où ses professeurs de mathématiques le sensibiliseront à la Géométrie.
Nommé capitaine d'artillerie à Toulon, il obtient grâce au vicomte de Barras, le commandement de l'armée d'Italie. A la bataille d'Arcole en 1796, il défait les Autrichiens et rencontre l'abbé Lorenzo Mascheroni[6], l'auteur de *La Géométrie du Compas*.
Devenu commandant de l'expédition d'Égypte en 1798, il emmène Gaspard Monge avec lui et connaît la victoire. L'histoire nous apprend qu'il aimait côtoyer des mathématiciens comme Lagrange, Laplace et que parfois il se prenait pour l'un des leurs. Avant qu'il devienne empereur, Laplace lui aurait un jour répondu sévèrement :

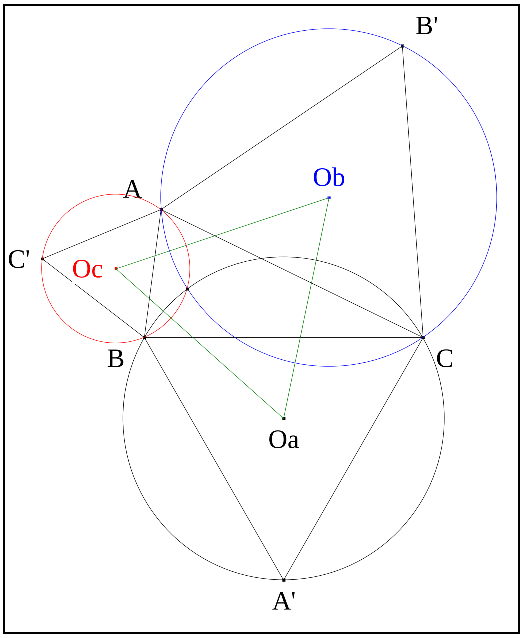
"Général, une leçon de géométrie est la dernière chose que nous ayons à vous demander".

Henri Léon Lebesgue[7] dans son livre *Leçons sur les constructions géométriques*, précise que la réponse de Laplace eut lieu à Paris le 10 décembre 1798, le lendemain de la cérémonie marquant la paix de Campo Formio, lorsque Bonaparte rencontrant Laplace et Lagrange chez François de Neufchâteau, lui expliqua les travaux de l'abbé Mascheroni.

---

[2] Fermat P. S. (de) (1601-1665).
[3] Cavalieri B. (1598-1647).
[4] Torricelli E. (1608-1647).
[5] Viviani V. (1622-1703).
[6] Mascheroni L. (1750-1800).
[7] Lebesgue H. L. (1875-1941).

Devenu Napoléon I-er le 2 décembre 1804, il organise, réorganise l'Empire et crée, en particulier, l'École polytechnique.
Il abdique en 1814 et reçoit la dérisoire souveraineté de l'île d'Elbe. Échappant à la surveillance anglaise, il rentre en France en 1815, inaugurant les Cent Jours. Battu à Waterloo, il abdique une seconde fois et est interné à l'île Sainte-Hélène, où il meurt le 5 mai 1821.



Une tradition attribue à Napoléon I-er, le résultat suivant :

les droites joignant les centres des cercles extérieurs de Torricelli
déterminent
un triangle équilatéral

D'après l'historien anglais John Sturgeon MacKey[8], la première trace écrite de ce résultat remonterait à l'année 1825. Il était présenté comme question par le Dr. W. Rutherford dans la revue *Ladies' Diary*[9].
C'est finalement Aureliano Faifofer[10] qui, en 1911, attribua ce résultat à Napoléon avec le commentaire suivant :

Theorema proposto per la dimostrazione da Napoleone a Lagrange.

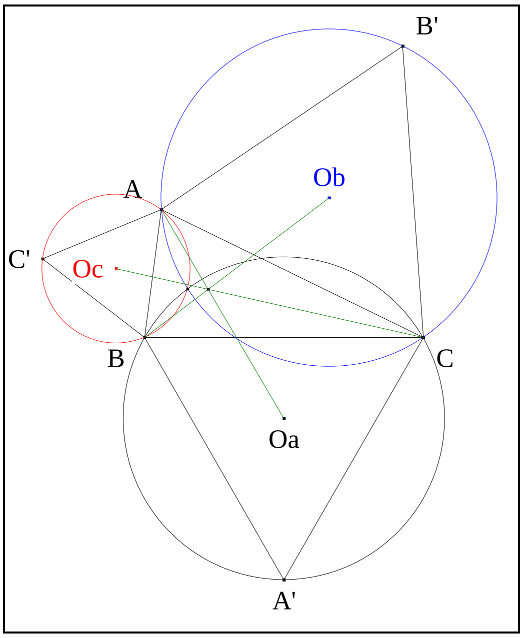
En 1992, John E. Wetzel[11] précisait dans le *Monthly* :

Why Napoleon ?
The early history of Napoleon's theorem and the Fermat points is summarized in Mackey, who traces the fact that LMN and L'M'N' are equilateral to 1825 to one Dr. W. Rutherford
and
remarks that the result is probably older.

Le théorème qui aujourd'hui porte son nom, si c'est vraiment le sien, montre que son imagination en Géométrie n'était pas limitée à des opérations militaires.

---

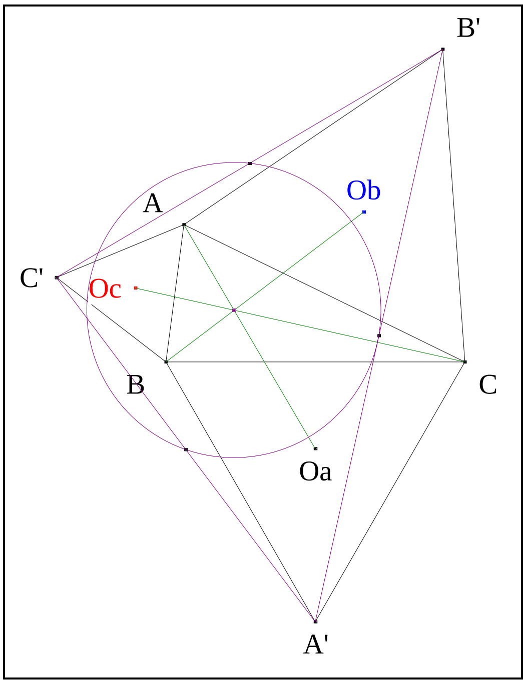
8 Mackey J. S., Isogonic centres of a triangle, *Proc. Edinburgh Math. Society* 15 (1897) 110-118.
9 Rutherford W., VII. Question 1439, *Ladies' Diary* n° 122 (1825) 47.
10 Faifofer A., *Elementi di Geometria*, 17th ed., Venezia (1911) 186.
11 Wentzel J. E., Converses of Napoleon's Theorem, *AMM* (1992) 399ff.



Ainsi, la figure de Torricelli allait devenir celle de Napoléon et toutes ses propriétés remarquables allaient être attribuée à Napoléon, par exemple :

Les droites joignant les sommets d'un triangle aux centres des cercles extérieurs de Napoléon correspondants
ou encore
les droites extérieures de Napoléon d'un triangle,
sont concourantes au premier point de Napoléon.

Rappelons que ce point de concours a été étudié par John Rigby[12] en 1988, Schmidt en 1990, Wentzel en 1992, Eddy et Fritsch en 1994.



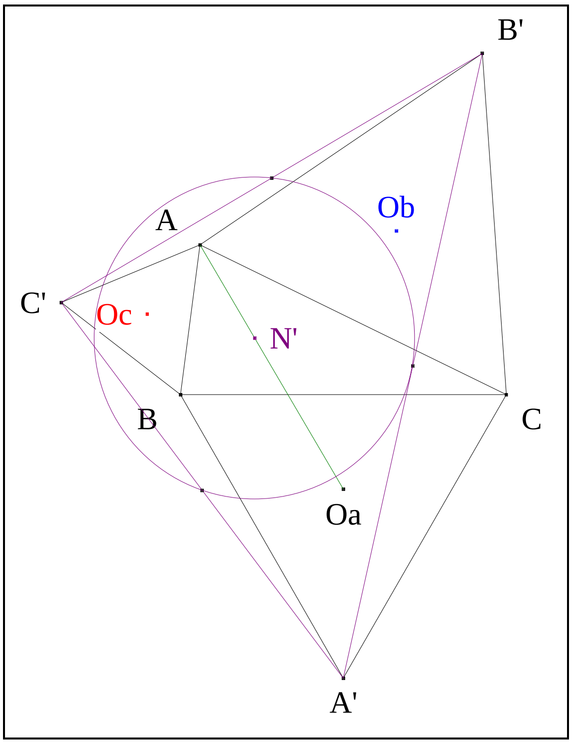
En 1995, Arthur Engel, le coach durant presque 30 ans de l'équipe allemande aux O.I.M., donne sans preuve dans son livre *Der Mathematik-Unterricht* la proposition suivante

12 Rigby J., Napoleon revisited, *Journal of Geometry* 33 (1988) 129-146.

le premier point de Napoléon d'un triangle
est
le centre du cercle d'Euler du triangle extérieur de Fermat associé à ce triangle.

De plus, il ajoute qu'il ne connaît pas de solution géométrique "ihm nicht bekannt" et qu'il est "ziemlich sicher, dass ein elementargeometrische Beweis nochnicht gefunden wurden".

Dans un Message *Hyacinthos* de 2003, l'élève Darij Grinberg[13] signale que l'étudiante Yin Xinghin du Steinbart-Gymnasium de Duisbourg (Allemagne) a prouvé en 2002 ce résultat[14]. Le compte rendu de sa recherche intitulée "Neue von Napoleon, Elementargeometrische Beweise zu zwei Sätze aus einem Aufsatz von Arthur Engel" présente sa démarche : elle vise, en premier, à prouver l'existence du point extérieur de Napoléon d'un triangle qui peut être obtenu à partir du théorème de Ludwig Kiepert, lui-même reposant sur le théorème Jean de Céva, puis, en second, à montrer que ce point n'est d'autre que le centre du cercle d'Euler du triangle de Fermat associé au triangle.



L'originalité de cet article réside dans le fait que nous montrons que toute droite extérieure de Napoléon d'un triangle passe par le centre du cercle d'Euler du triangle extérieur de Fermat associé à ce triangle.

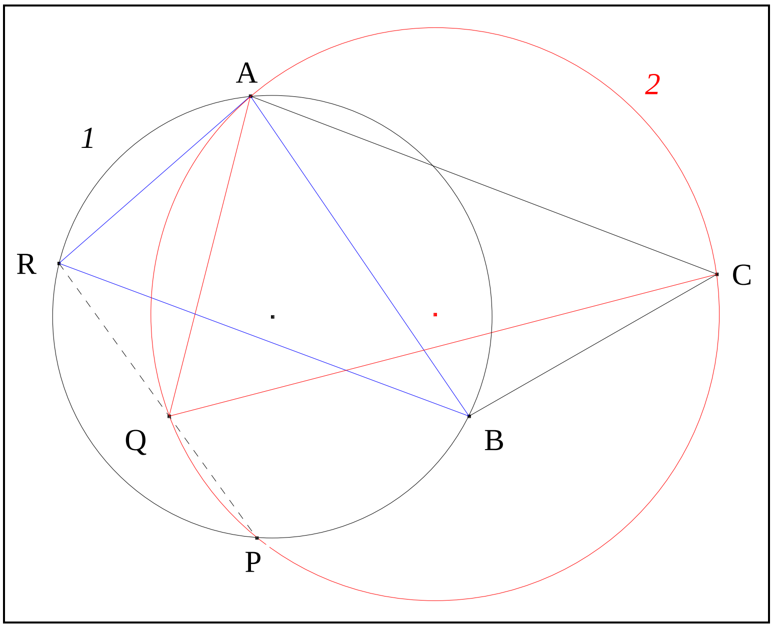
II. Hendricus van AUBEL (1830-1906)

1. Deux triangles directement semblables construits sur deux côtés d'un triangle

VISION

Figure :

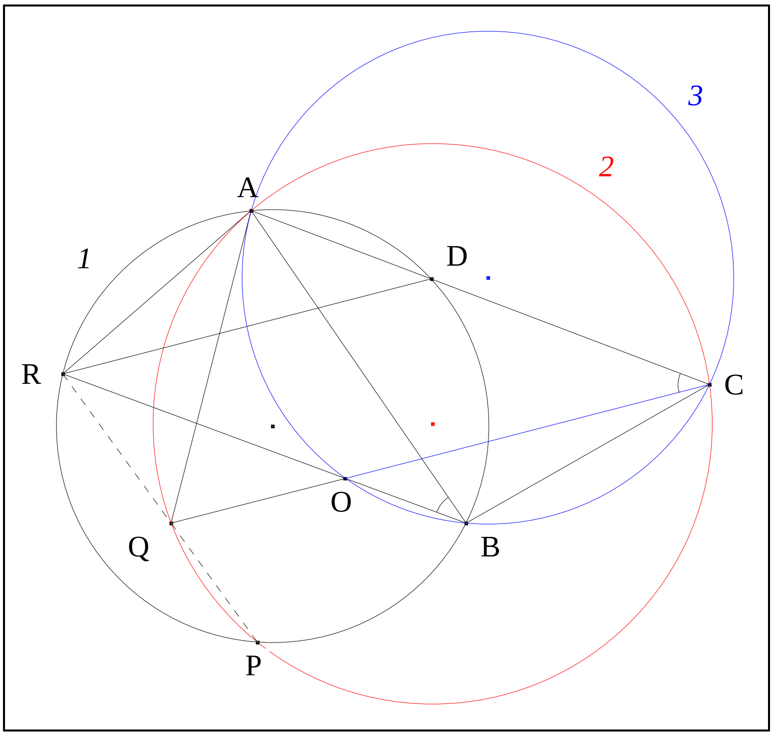
[13] Grinberg D., Crosspoint (for Clark and everybody else), Message *Hyacinthos* # 7336 du 07/07/2003.
[14] http://www.steinbart-gymnasium.de/page6/page40/page44/page87.html.



Traits : ABC un triangle,
ABR, ACQ deux triangles directement semblables resp. extérieur, intérieur à ABC,
1, *2* les cercles circonscrits resp. à ABR, ACQ
et P le second point d'intersection de *1* et *2*.

Donné : P, Q et R sont alignés.

VISUALISATION



- Notons D le second point d'intersection de (AC) avec *1*
  et O le point d'intersection de (BR) et (CQ).

- Par hypothèse, <ABO = <ACO ;

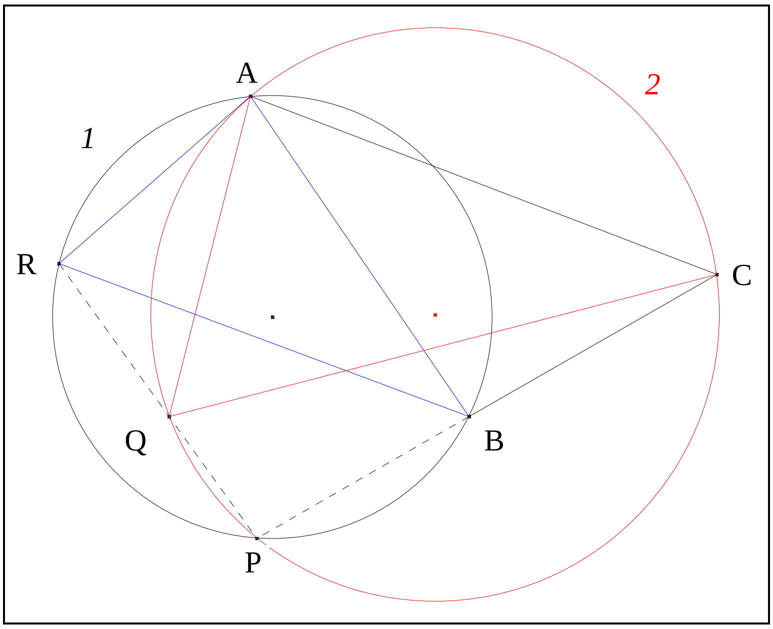
d'après "Le théorème de l'angle inscrit", A, O, B et C sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

- Les cercles *1* et *3*, les points de base A et B, les moniennes (DAC) et (RBO), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (DR) // (CO).

- **Conclusion :** les cercles *1* et *2*, les points de base A et P, la monienne (DAC), les parallèles (DR) // (COQ), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, R, P et Q sont alignés.

Scolies : **(1)** un autre alignement



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que B, P et C sont alignés.

(2) Les triangles ABR et ACQ sont dits A-pendulaires.

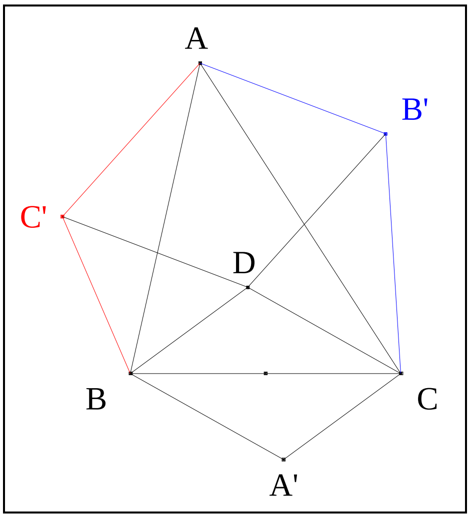
(3) **Énoncé traditionnel :**

les droites joignant les sommets correspondants de deux triangles pendulaires passent par le second point d'intersection des cercles circonscrits à ces deux triangles.

2. Le parallélogramme de van Aubel

VISION

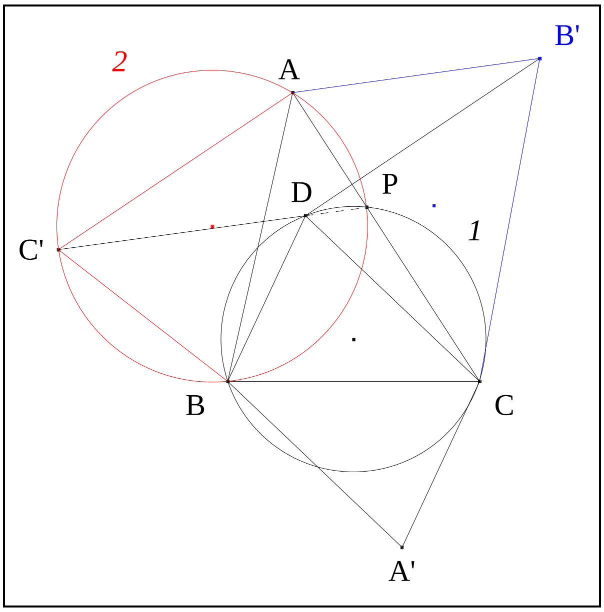
Figure :



Traits : ABC un triangle,
A'CB, B'AC, C'BA trois triangles directement semblables[15], extérieurs à ABC
et D le point tel que BA'CD soit un parallélogramme.

Donné : le quadrilatère AC'DB' est un parallélogramme.

VISUALISATION



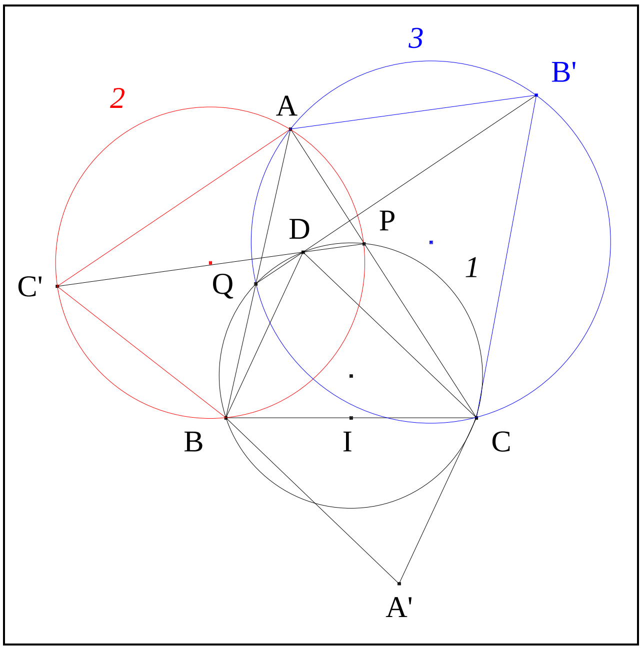
- **Scolie :** les triangles BDC et BC'A sont B-pendulaires.

- Notons *1*, *2* les cercles circonscrits resp. à BDC, BC'A
  et P le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après II. 1. Scolie 3, (DC') et (CA) sont sécantes en P.

---

15 Dans la notation des triangles extérieurs, les sommets sont homologues.



- **Scolie :** les triangles BDC et AB'C sont C-pendulaires.

- Notons *3* le cercle circonscrit au triangle AB'C
  et Q le second point d'intersection de *1* et *3*.

- D'après II. 1. Scolie 3, (BA) et (DB') sont sécantes en Q.

- Les cercles *1* et *3*, les points de base Q et C, les moniennes (DQB') et (PCA), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (DP) // (B'A).

- Les cercles *1* et *2*, les points de base B et P, les moniennes (QBA) et (DPC'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (QD) // (AC').

- **Conclusion :** le quadrilatère AC'DB' ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme.

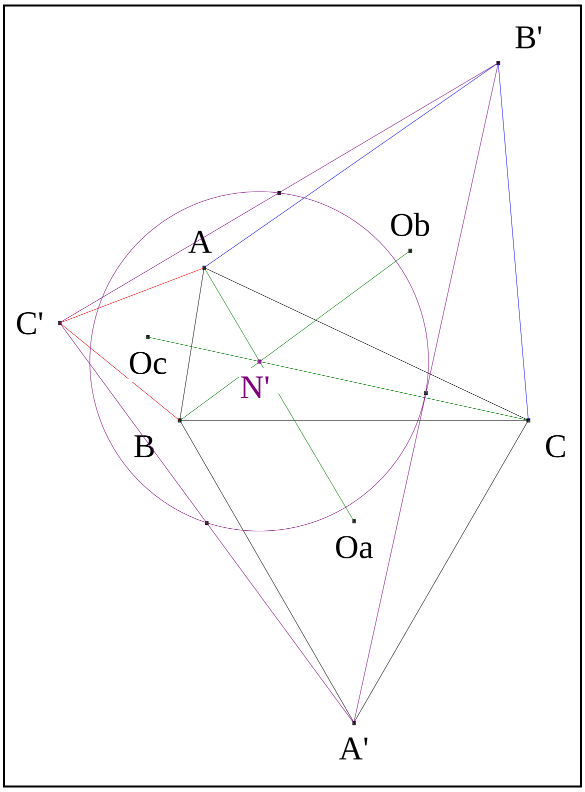
Scolies : **(1)** ce résultat vient d'être obtenu à partir de deux triangles extérieurs et d'un triangle intérieur

(2) Nous obtiendrons le même résultat en partant de deux triangles intérieurs et d'un triangle extérieur.

III. LE PREMIER POINT DE NAPOLÉON

VISION

Figure :

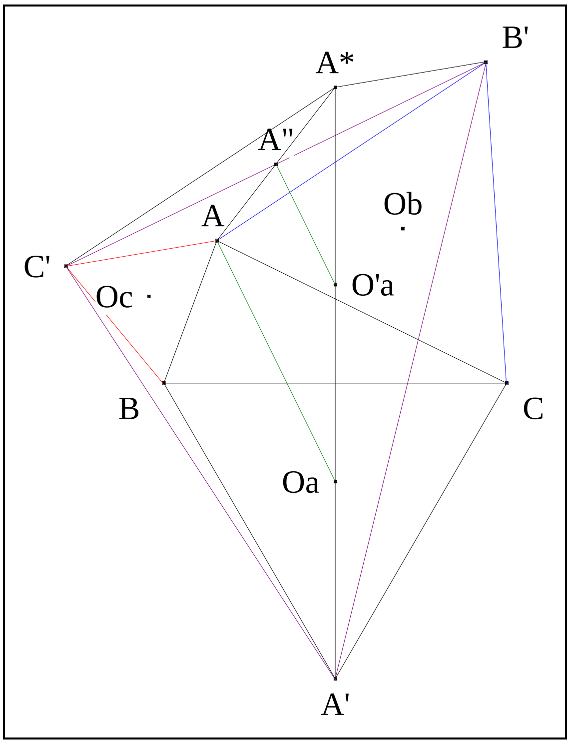


Traits : ABC		un triangle,
	A'CB, B'AC, C'BA	trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à ABC,
	Oa, Ob, Oc	les centres resp. de A'CB, B'AC, C'BA
et	N'	le centre du cercle d'Euler-Bevan de A'B'C'.

Donné : (AOa), (BOb) et (COc) passent par N'.

VISUALISATION

- **Scolies :**
  (1) A'B'C' est le triangle extérieur de Fermat de ABC
  (2) OaObOc est le triangle extérieur de Napoléon
  (3) (AOa), (Bob), (COc) sont les droites extérieures de Napoléon.

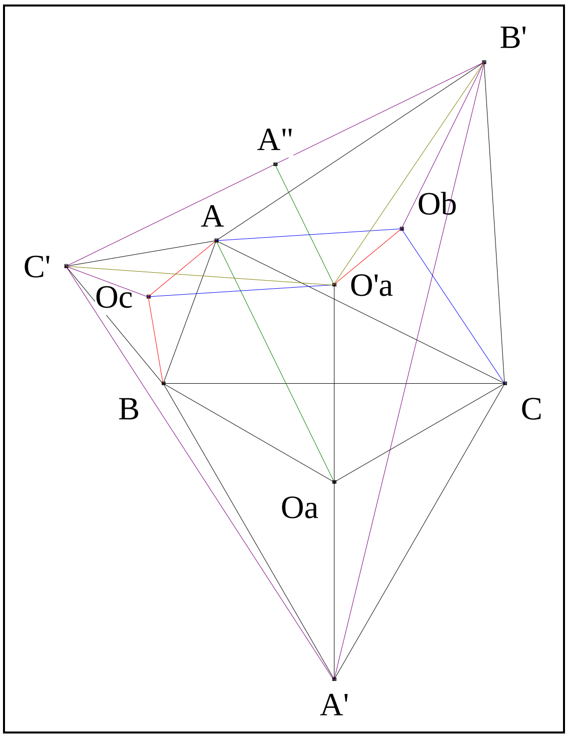


• Notons	A"	le milieu de [B'C'],
	A*	le symétrique de A' par rapport à (BC)
et	O'a	le symétrique de Oa par rapport à (BC).

- D’après II. 2, le quadrilatère AB'A*C' est un parallélogramme ;
  en conséquence, A, A" et A* sont alignés.

- **Scolie :** O'a est le milieu de [A*Oa].

- **Conclusion partielle :** d’après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle A*AOa, (AOa) // (A"O'a).

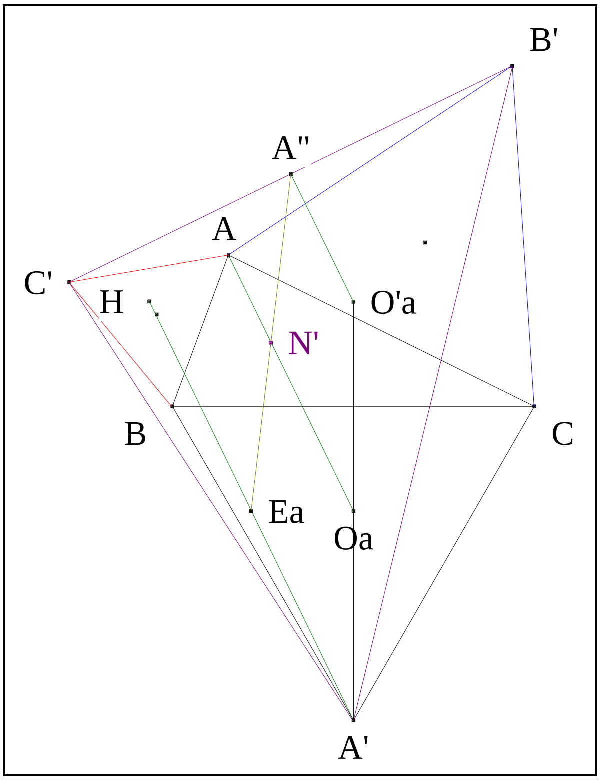


- **Scolies :** **(1)** les triangles OaCB, ObAC et OcBA sont semblables
  (2) O'a est le symétrique de Oa par rapport à (BC).

- D'après II. 2, le quadrilatèreAOcO'aOb est un parallélogramme.

- D'après le cas "c.a.c." d'égalité de deux triangles, les triangles O'aC'Oc et B'O'aOb sont égaux ;
  en conséquence, O'aC' = B'O'a.

- **Conclusion partielle :** le triangle O'aB'C' étant isocèle en O'a,
  la O'a-médiane (O'aA") est aussi la médiatrice de [B'C'].

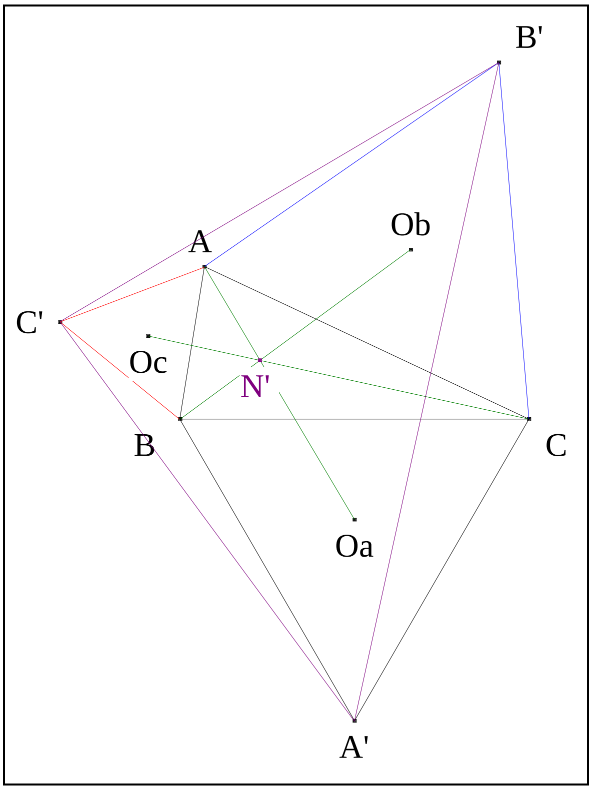


- Notons H l'orthocentre de A'B'C'
  et Ea le A-point d'Euler de A'B'C'.

- **Scolies :** **(1)** (O'aA"), (OaA) et (A'EaH) sont parallèles entre elles
  (2) Oa est le milieu de [A'O'a].

- D'après Feuerbach "Le centre N" (Cf. Annexe), **(1)** A", N' et Ea sont alignés
  (2) N' est le milieu de [A"Ea].

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome de passage IIIb
  appliqué à la bande de frontières (O'aA") et (A'EaH), (AOa) passe par N'.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BOb) passe par N'
(COc) passe par N'.

- **Conclusion :** (AOa), (BOb) et (COc) sont passent par N'.

Scolie : ce point de concours, noté Nap+ relativement à ABC,
est le "premier point de Napoléon de ABC" et est répertorié sous X_{17} cher ETC.

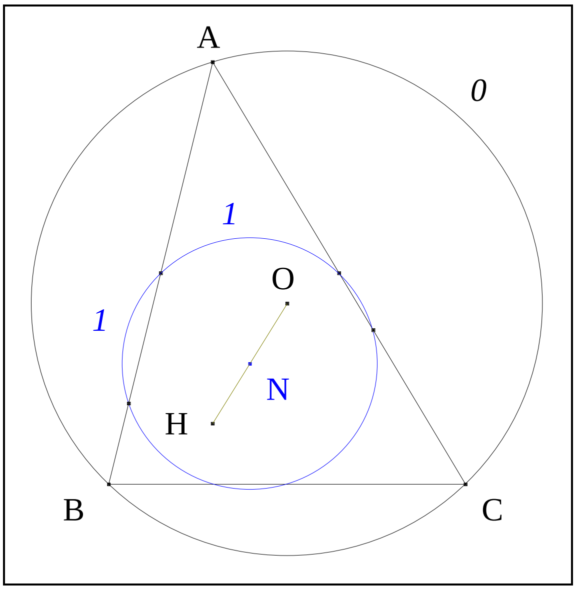
Commentaire : en remplaçant "extérieur" par intérieur", mutatis mutandis, nous montrerions que

le second point de Napoléon[16] *d'un triangle*
est
le centre du cercle d'Euler du triangle intérieur de Fermat associé à ce triangle.

ANNEXE

Le centre N[17]

16 X_{18} cher ETC.
17 Feuerbach K...



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	1	le cercle d'Euler de ABC
et	N	le centre de *1*.

Donné : N est sur le milieu de [OH].