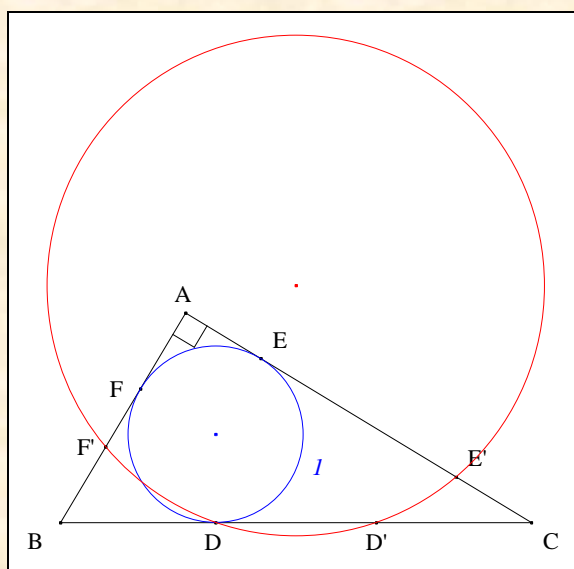


"PAYSAGE OUVERT"
OR
"AN OPEN LANDSCAPE"

UN RÉSULTAT REMARQUABLE
DE
STAN FULGER



Jean - Louis AYME ¹



Résumé.

Ce "Paysage ouvert" concerne un résultat remarquable de 2017 du roumain Stan Fulger que l'auteur a lié avec celui du vietnamien Đào Trường Giang datant de 2007. Cette situation peut aussi s'envisager comme un supplément de "Cercle inscrit dans un triangle rectangle" ². Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract.

This "open landscape" concern a remarkable result of 2017 of the Romanian Stan Fulger that author has linked with that of the Vietnamese Đào Trường Giang 2007. This situation can also be considered as a supplement to "Cercle inscrit dans un triangle rectangle" ³. The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

¹ St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/07/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

² Ayme J.-L., Cercle inscrit dans un triangle rectangle, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

³ Ayme J.-L., Cercle inscrit dans un triangle rectangle, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Sommaire	
A. Incircle de <i>Mathscope</i>	3
1. Le problème	
2. Archive	
3. Note historique	
4. Un résultat annexe	
B. Concyclic points in a right-angled triangle	9
1. Le problème	
2. Un résultat annexe	
3. Ouverture	
4. Une courte biographie de Stan Fulger	
C. Annexe	17
1. Deux cercles orthogonaux	
2. L'équivalence d'Aubert	
D. Lexique français-anglais	18

A. INCIRCLE DE MATHSCOPE

proposed

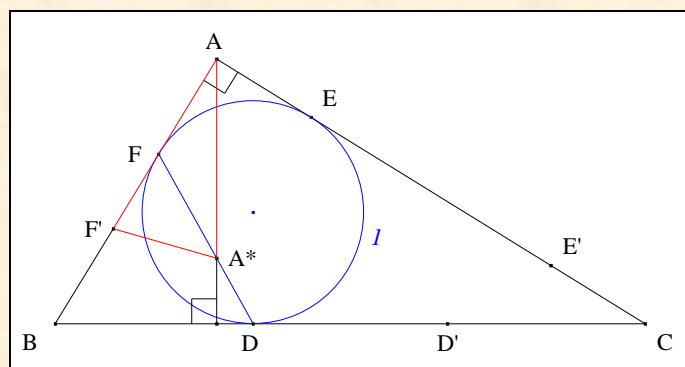
by

Đào Trường Giang (Viet Nam)

1. Le problème

VISION

Figure :

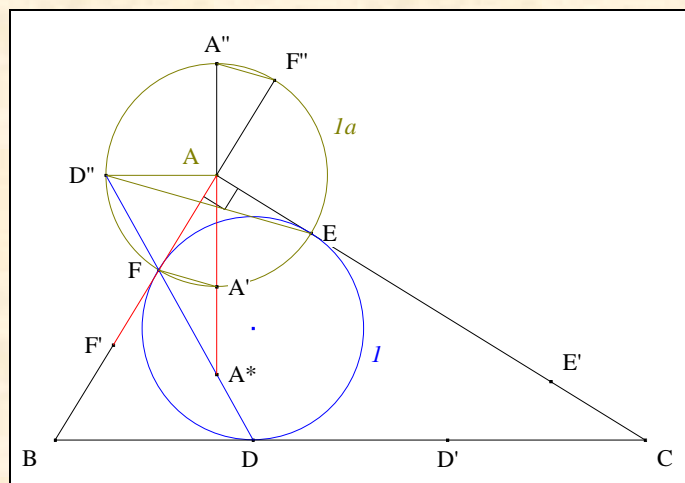


Traits : ABC un triangle A-rectangle,
 I le cercle inscrit de ABC ,
 DEF le triangle de contact de ABC ,
 $D'E'F'$ le triangle de Nagel de ABC
 A^* le point d'intersection de A-hauteur de ABC avec (DF) .
 et

Donné : le triangle AA^*F' est A-isocèle. ⁴

VISUALISATION

⁴ Đào Trường Giang, Problem **209.3**, *Mathscope* (2007) 3 ; <http://imomath.com/pcpdf/fl/f40.pdf>
 Problema **839**, *laboratorio virtual triangulos cabri*, EXTRA de verano de 2017 Del 1 de Julio al 31 de Agosto ;
 <http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>

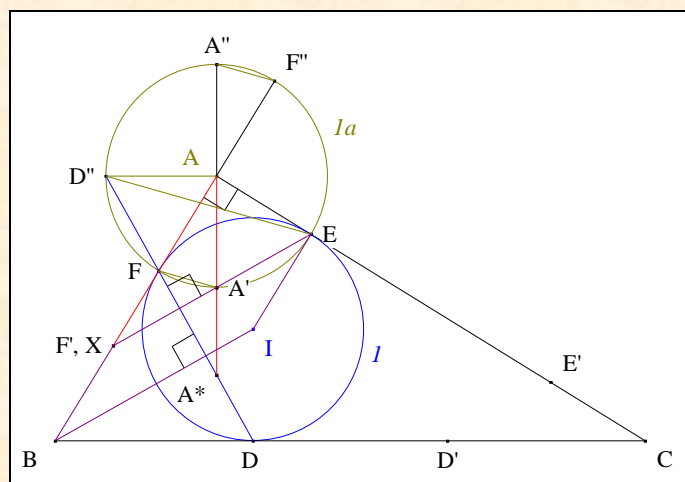


- Sachant que deux angles au centre et égaux sous tendent des cordes égales, le quadrilatère cyclique et convexe $D''FA'E'$ est un trapèze ; en conséquence,

$$A'D'' = EF ;$$

$$(A'F) \parallel (ED'').$$

- **Scolie :** $(A'F)$, $(A''F'')$ et (ED'') sont parallèles entre elles.



- Notons I le centre de I
et X le point d'intersection de $(A'E)$ et (AB) .

- **Scolie :** $(AB) \parallel (IE)$.

- Par une chasse angulaire, nous montrerions que par culture géométrique, d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,

$$(EX) \perp (DFD'') ;$$

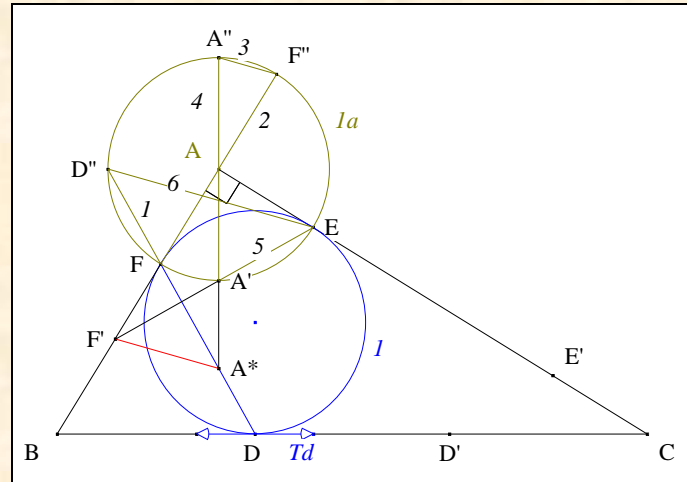
$$(DFD'') \perp (BI) ;$$

$$(EX) \parallel (BI).$$

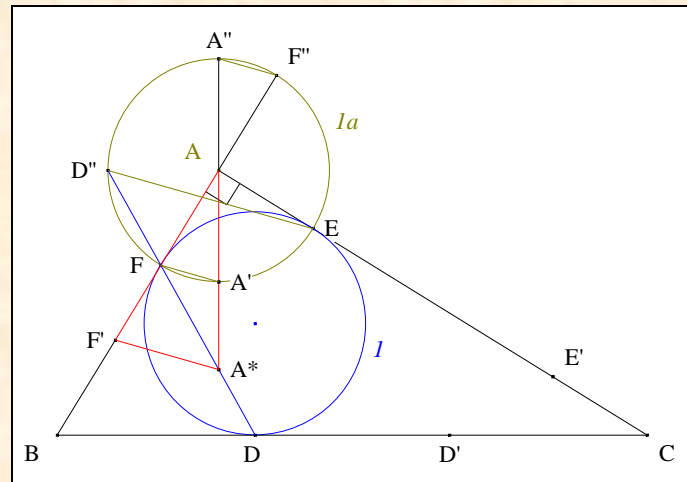
- Le quadrilatère $BIEX$ étant un parallélogramme, en conséquence,

$$BX = IE \quad (= AF) ;$$

X et F' sont confondus.



- D'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. C. Annexe 2), appliqué à l'hexagone cyclique $D''F''A''A'ED''$,
 - (1) (A^*F') en est la pascale
 - (2) $(A^*F') \parallel (ED'')$.



- **Scolie :** $(A^*F') \parallel (A'F)$.
- **Conclusion :** le triangle $AA'F$ étant A-isocèle, AA^*F' est A-isocèle.

2. Archive

209.3 (Đào Trường Giang) Given a right triangle with hypotenuse BC , the incircle of the triangle is tangent to the sides AB and BC respectively at P , and Q . A line through the incenter and the midpoint F of AC intersects side AB at E ; the line through P and Q meets the altitude AH at M . Prove that $AM = AE$.

THE MATHSCOPE

*All the best from
Vietnamese Problem Solving Journals*

February 12, 2007

please download for free at our website:
www.imo.org.yu

translated by Phạm Văn Thuận, Eckard Specht

Vol I, Problems in Mathematics Journal for the Youth

The Mathscape is a free problem resource selected from mathematical problem solving journals in Vietnam. This freely accessible collection is our effort to introduce elementary mathematics problems to foreign friends for either recreational or professional use. We would like to give you a new taste of Vietnamese mathematical culture. Whatever the purpose, we welcome suggestions and comments from you all. More communications can be addressed to Phạm Văn Thuận of Hanoi University, at pvthuan@gmail.com

It's now not too hard to find problems and solutions on the Internet due to the increasing number of websites devoted to mathematical problem solving. It is our hope that this collection saves you considerable time searching the problems you really want. We intend to give an outline of solutions to the problems in the future. Now enjoy these "cakes" from Vietnam first.

Pham Van Thuan

5

- 3. Note historique :** ce problème de *Mathscope* que l'auteur a légèrement modifié ⁶, a été proposé par "Apollo" ⁷ le 20 mai 2008 sur le site *Mathlinks*. Les solutions qui ont été proposées sont de nature algébrique ("Mathangel"), trigonométrique (Giorgieri Gabriel et Vigil Nicula), projective (Kostas Vittas) et métrique (Virgil Nicula). Rappelons encore une fois la réflexion de "Mathangel" ⁸:

*I use an ugly method to prove it (algebraic method).
Just wonder if there is a beautiful method (pure geometry).*

4. Un résultat annexe

⁵ *Mathscope* 2007 ; <http://imomath.com/pcpdf/f1/f40.pdf>
⁶ Ayme J.-L., Cercle inscrit dans un triangle rectangle, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
⁷ "Apollo", Incircle, AoPS du 20/05/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=235828910&t=205814.
⁸ Emmanuel Lawrence ; Lawrence is my name, Gabriel and my surname is Giorgieri

B. CONCYCLIC POINTS
IN
A RIGHT-ANGLED TRIANGLE

proposed

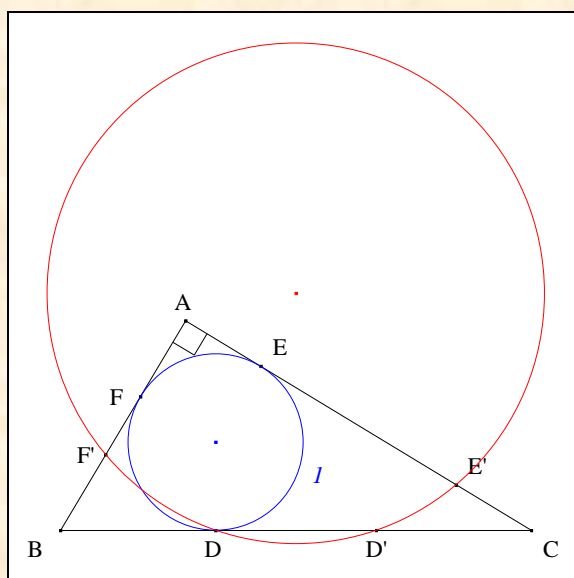
by

Stan Fulger (Roumanie)

1. Le problème

VISION

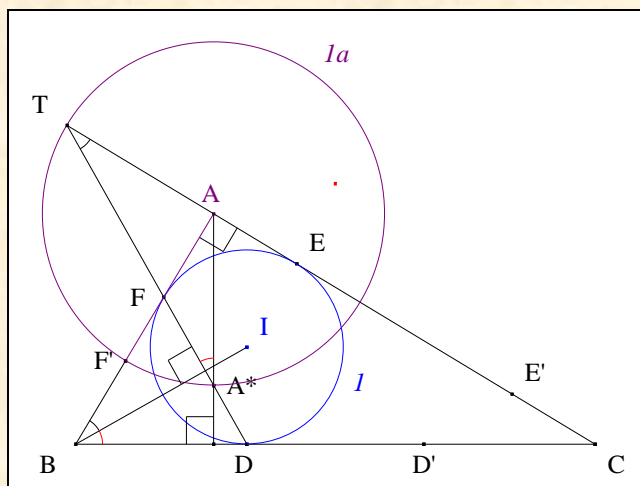
Figure :



Traits :	ABC	un triangle A-rectangle,
	I	le cercle inscrit à ABC,
	DEF	le triangle de contact (Gergonne) de ABC,
	$D'E'F'$	le triangle de Nagel de ABC
et	I'	le cercle circonscrit à $D'E'F'$.
Donné :	I' passe par D. ⁹	

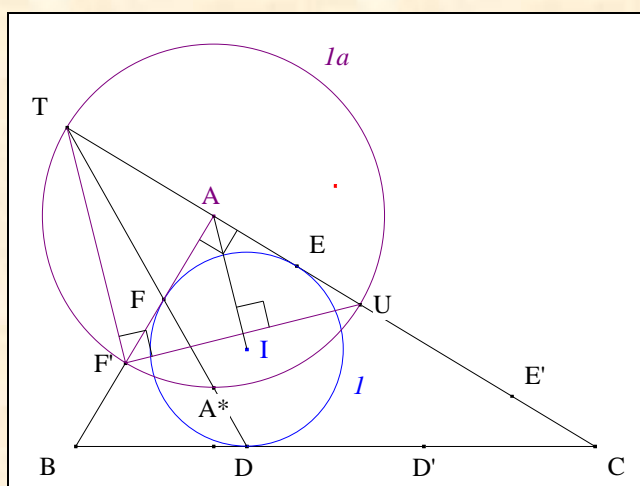
VISUALISATION

⁹ Fulger S., Concylic points in a right-angled triangle, AoPS du 17/06/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1463378_concylic_points_in_a_rightangled_triangle



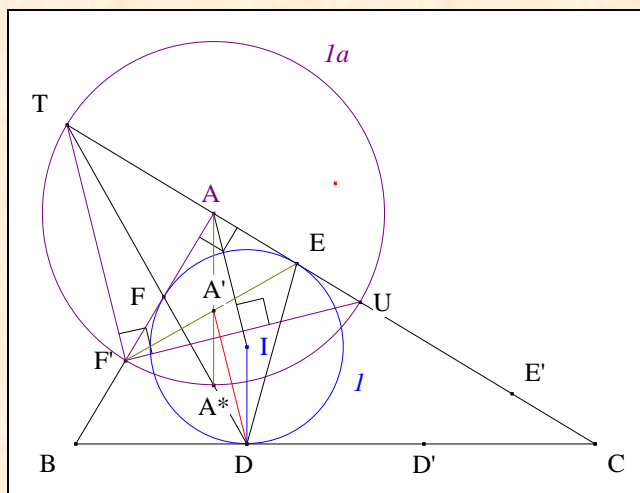
- Notons A^* le point d'intersection de la A-hauteur de ABC avec (DF)
- D'après A. 1., le triangle AA^*F' est A-isocèle.
- Notons I le centre de I ,
 Ia le cercle de centre A passant par A^* ; il passe par F' ;
 et T le point d'intersection de (DF) et (AC).
- Une chasse angulaire :

*	par "Angles à côtés perpendiculaires",	$\angle A^*TA = \angle IBA$
*	(BI) étant la B-bissectrice intérieure de ABC,	$\angle IBA = \angle DBI$
*	par "Angles à côtés perpendiculaires",	$\angle DBI = \angle AA^*T$
*	par transitivité de =,	$\angle A^*TA = \angle AA^*T$.
- **Conclusion partielle** : AA^*T étant A-isocèle, Ia passe par T.

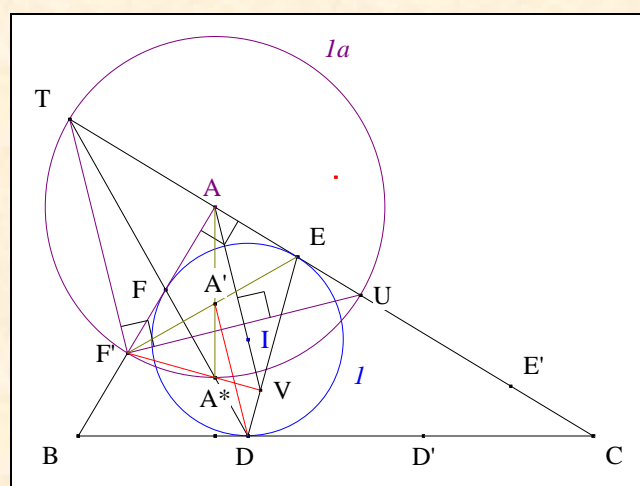


- Notons U le second point d'intersection de (TC) avec Ia .
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi-cercle",
 d'après Thalès "Rapports",
 le triangle $AF'U$ étant A-isocèle,
 en conséquence,

$(TF') \perp (F'U)$;
$(F'U) \parallel (FE)$;
$(FE) \perp (AI)$;
$(TF') \parallel (AI)$.



- Notons A' le point d'intersection de (AA^*) et (EF') .
- D'après A. 1., le quadrilatère $AA'DI$ ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ; en conséquence, $(DA') \parallel (AI)$.



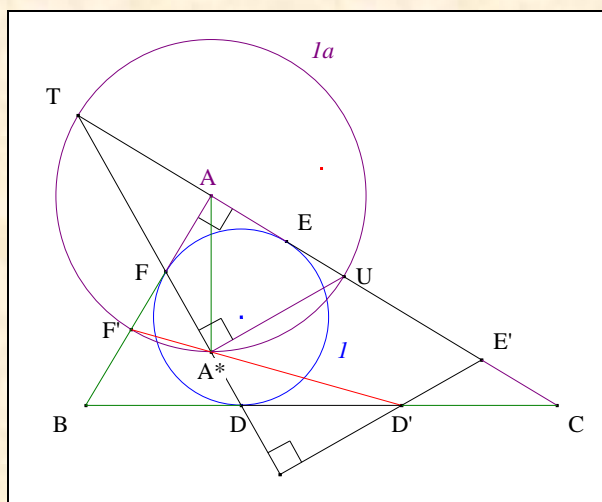
- Notons V le point d'intersection de (AI) et (DE) .
- D'après Pappus d'Alexandrie "La proposition 139"¹⁰ (DJ) étant la pappusienne de l'hexagone $F'TA^*AVEF'$, F', A^* et V sont alignés.
- D'après A. 4., $(F'V) \perp (DE)$.

¹⁰

Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

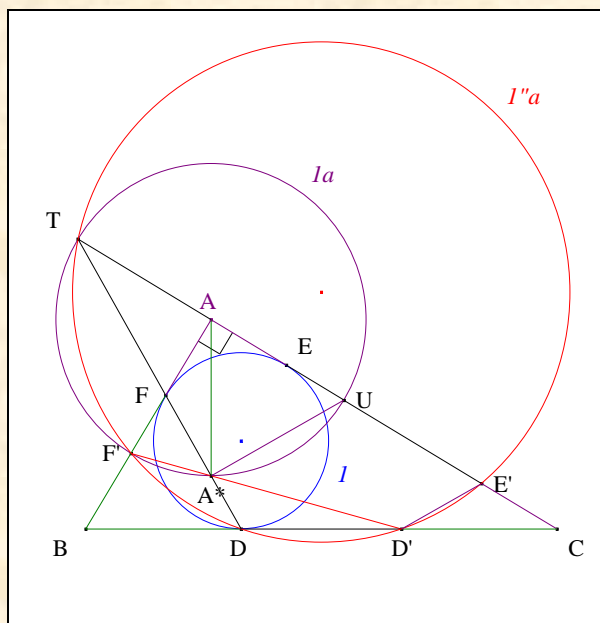
- Le cercle Ia , les points de base T et F', les moniennes naissantes (A*TD) et (A*F'D'), les parallèles Ta^* et (DD'), conduisent au théorème 1'' de Reim ;
en conséquence, T, F', D, D' sont cocycliques.
- Notons $I'a$ ce cercle.

Commentaire : il reste à montrer que E' est sur $l'a$.



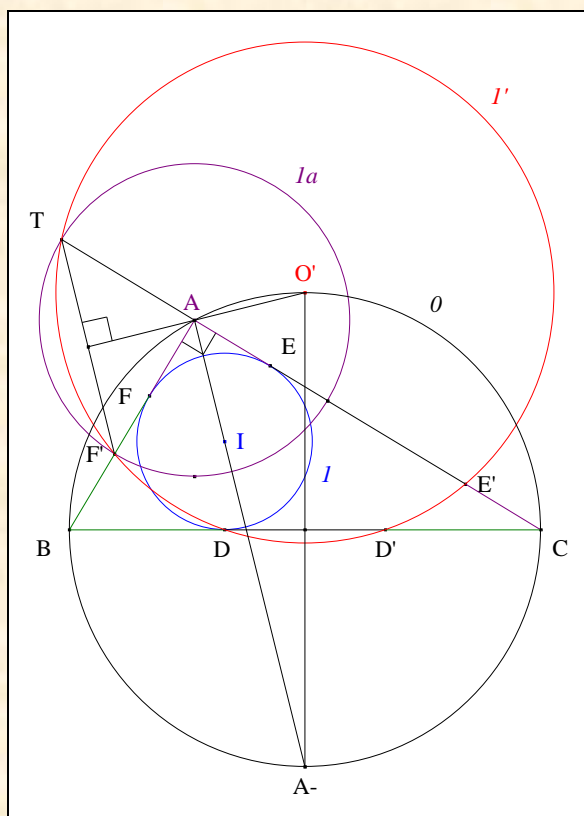
- Par "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle E'CD' = \angle FAA^*$.
- Une première chasse segmentaire :
 - * E' étant l'isotome de E relativement à [AC], $E'C = AE$
 - * d'après Euclide "Deux tangentes égales", $AE = AF$
 - * par transitivité de $=$, $E'C = AF$.
- Une seconde chasse segmentaire :
 - * D' étant l'isotome de D relativement à [BC], $CD' = BD$
 - * d'après Euclide "Deux tangentes égales", $BD = BF$
 - * F étant l'isotome de F' relativement à [AB], $BF = AF'$
 - * d'après **A. 1.**, $AF' = AA^*$
 - * par transitivité de $=$, $CD' = AA^*$.
- D'après "Le théorème c.a.c.", les triangles CD'E' et AA*F sont égaux.
- CD'E' ayant deux côtés resp. perpendiculaires aux côtés correspondants de AFA*, $(D'E') \perp (A^*F)$;
 d'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi-cercle", $(A^*F) \perp (A^*U)$ ¹³ ;
 d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, $(D'E') \parallel (A^*U)$.

¹³ Ayme J.-L., Two perpendiculars, AoPS du 19/06/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1464472_two_perpendiculars



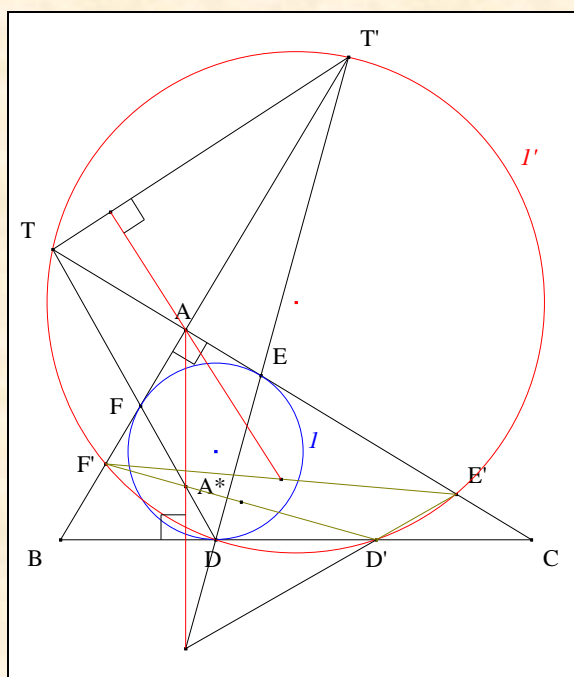
- Le cercle Ia , les points de base F' et T , les moniennes naissantes $(A^*F'D')$ et (UTE') , les parallèles (A^*U) et $(D'E')$, conduisent au théorème $0''$ de Reim ;
en conséquence, F', T, D', E' sont cocycliques.
- Notons $I''a$ ce cercle.
- Les cercles I'' et $I'a$ ayant trois points en commun sont égaux ;
en conséquence, ce cercle n'est d'autre que le cercle circonscrit à $D'E'F'$ i.e. I' .
- **Conclusion :** I' passe par D .

2. Un résultat annexe



- Notons O le cercle circonscrit à ABC ,
 O' le centre de O
 et $A-$ le second A-perpoint de ABC .
- **Scolies :**
 - (1) (AO') est la médiatrice de $[F'T]$
 - (2) $(O'A-)$ est la médiatrice de $[DD']$ ou encore de $[BC]$.
- (TF') étant parallèle à $(AIA-)$, $(AA-) \perp (AO')$.
- D'après Thalès "Triangle inscritible dans un demi-cercle", O' est sur O .
- **Conclusion :** le centre de I' est sur O .

3. Ouverture



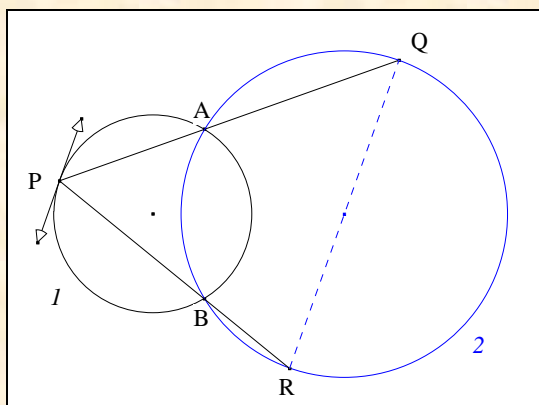
4. Une très courte biographie de Stan Fulger



Stan Fulger is a Master Mariner ¹⁵ and geometry is only his hobby.
 Actually, he is 63 years old and also a happy father of two girls and one boy, who is a ph. d. in mathematics i.e. doctor in mathematics
 Usually he lives in Constanta (Roumania).

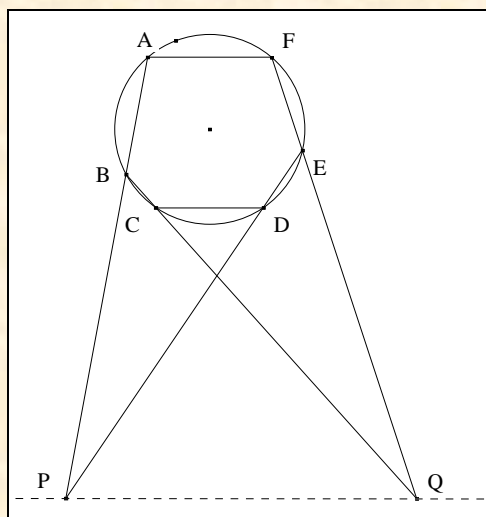
14 Phare de la Mer Noire
15 capitaine de bateau commercial

C. ANNEXE

1. Deux cercles orthogonaux ¹⁶

Traits : $I, 2$ deux cercles sécants,
 A, B les deux points d'intersection de I et 2 ,
 P un point de I ,
 T_p la tangente à I en P
 et Q, R les seconds points d'intersection resp. de $(PA), (PB)$ avec 2 .

Donné : I et 2 sont orthogonaux
si, et seulement si,
 (QR) est une droite diamétrale de 2 , parallèle à T_p .

2. L'équivalence d'Aubert ¹⁷

Traits : I un cercle,
 $ABCDE$ un pentagone inscrit dans I ,
 F un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
 et P, Q les points d'intersection resp. de (AB) et (DE) , (BC) et (EF) .

Donné : F est sur I *si, et seulement si,* (PQ) et (AF) sont parallèles.

¹⁶

¹⁷ Altshiller-Curt N., Note on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* (34) 500-501
 La condition nécessaire est de Paul Aubert

D. LEXIQUE
FRANÇAIS - ANGLAIS

A		N	
aligné	collinear	Notons	name
annexe	annex	nécessaire	necessary
axiome	axiom	note historique	historic note
appendice	appendix	O	
adjoint	associate		
a propos	by the way btw	orthocentre	orthocenter
acutangle	acute angle	ou encore	otherwise
axiome	axiom	P	
B		parallèle	parallel
bissectrice	bisector	parallèles entre elles	parallel to each other
bande	strip	parallélogramme	parallelogram
C		pédal	pedal
centre	incenter	perpendiculaire	perpendicular
centre du cercle circonscrit	circumcenter	pied	foot
cercle circonscrit	circumcircle	point de vue	point of view
cévienne	cevian	postulat	postulate
colinéaire	collinear	point	point
concourance	concurrence	pour tout	for any
coincide	coincide	Q	
confondu	coincident		
côté	side	quadrilatère	quadrilateral
par conséquence	consequently	R	
commentaire	comment	remerciements	thanks
D		reconnaissance	acknowledgement
d'après	according to	respectivement	respectively
donc	therefore	rapport	ratio
droite	line	répertorié	to index
d'où	hence	S	
distinct de	different from	semblable	similar
E		sens	clockwise in this
extérieur	external	order	
F		segment	segment
figure	figure	Sommaire	summary
H		symédiane	symmedian
hauteur	altitude	suffisante	sufficient
hypothèse	hypothesis	sommet (s)	vertex (vertice)
I		T	
intérieur	internal	trapèze	trapezium
identique	identical	tel que	such as
i.e.	namely	théorème	theorem
incidence	incidence	triangle	triangle
L		triangle de contact	contact triangle
lemme	lemma	triangle rectangle	right-angle triangle
lisibilité	legibility		
M			
mediane	median		
médiatrice	perpendicular bisector		
milieu	midpoint		