PROBLEMA 823 [1]

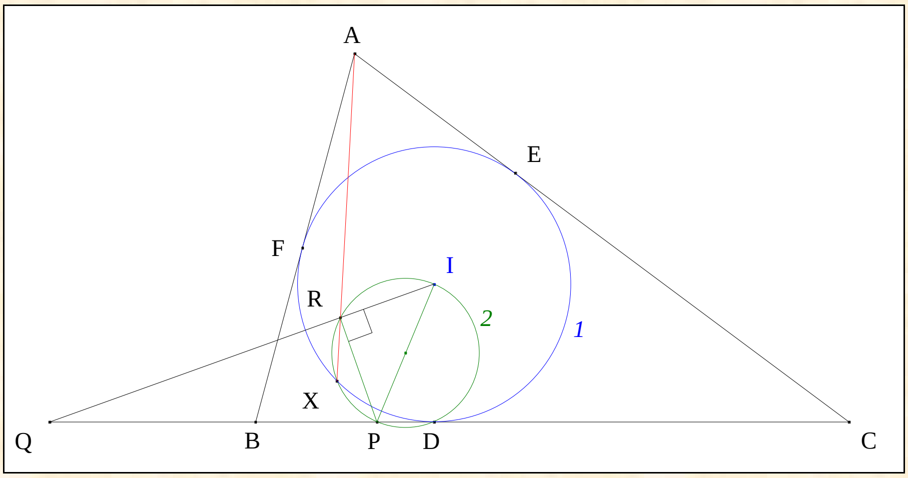
proposé

par

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
P, Q deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique,
R le pied de la perpendiculaires à (QI) issue de P,
2 le cercle de diamètre [IP]
et X le second point d'intersection de *2* et *1*.

Donné : X, R et A sont alignés.

[1] Ricardo Barroso, Quincena del 16 al 30 de Abril de 2017 ; Problema **823** ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
Site : http//jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

VISUALISATION

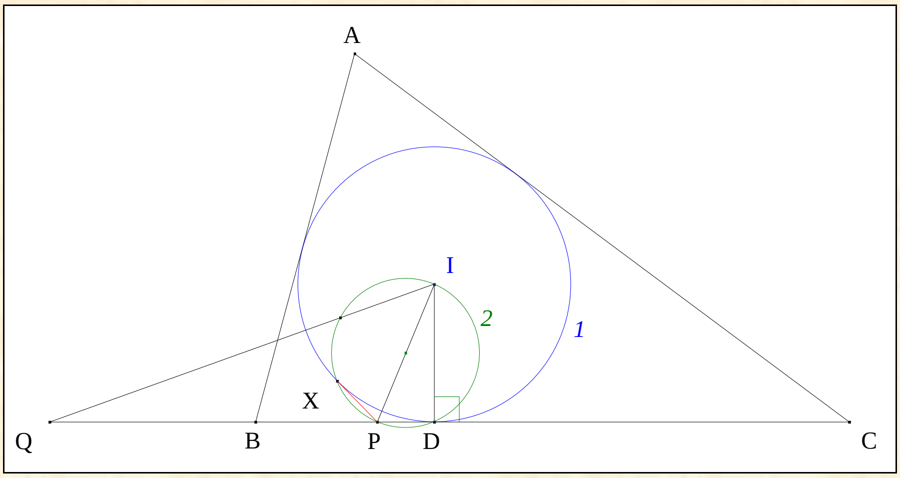
PAR

UNE SÉQUENCE

ÉTAPE 1

VISION

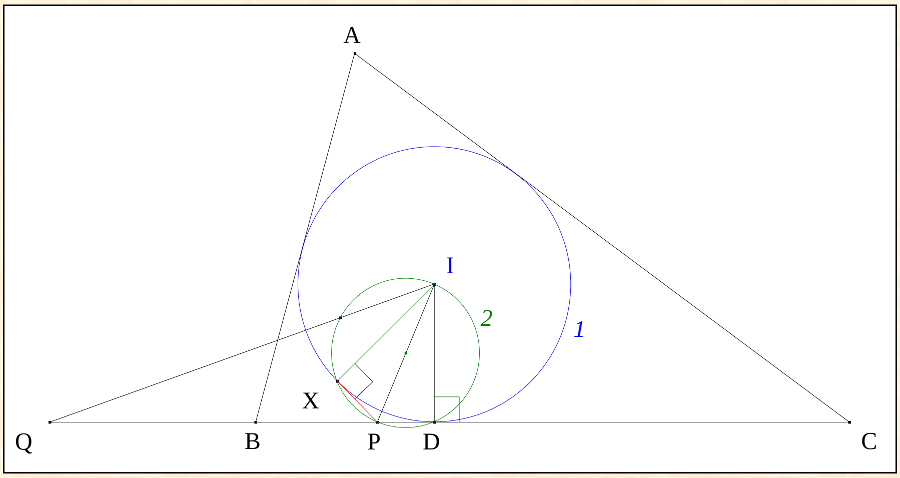
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	P, Q	deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique,
	D	le point de contact de *1* avec (BC),
	2	le cercle de diamètre [IP] ; il passe par D ;
et	X	le second point d'intersection de *2* et *1*.

Donné : (XP) est tangente à *1* en X.

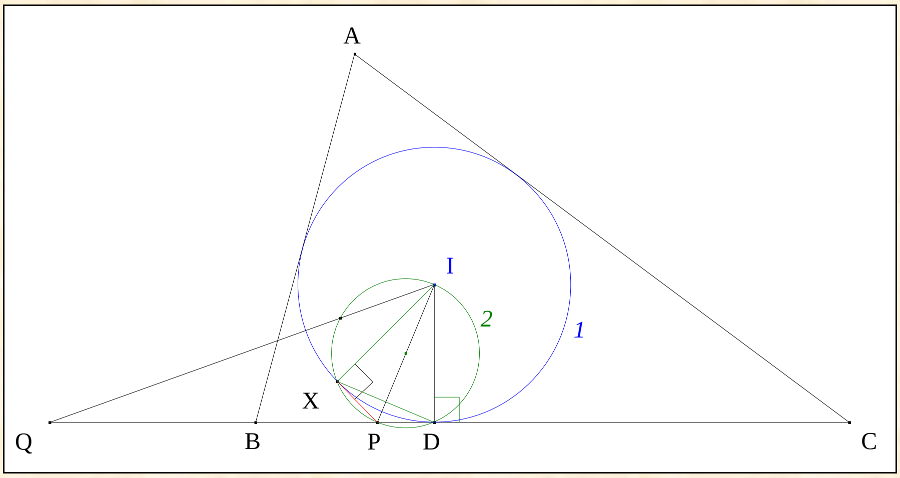
VISUALISATION



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", le triangle XPI est X-rectangle.

- **Conclusion :** par définition d'une tangente appliquée à *1*, (XP) est la tangente à *1* en X.

Scolie :

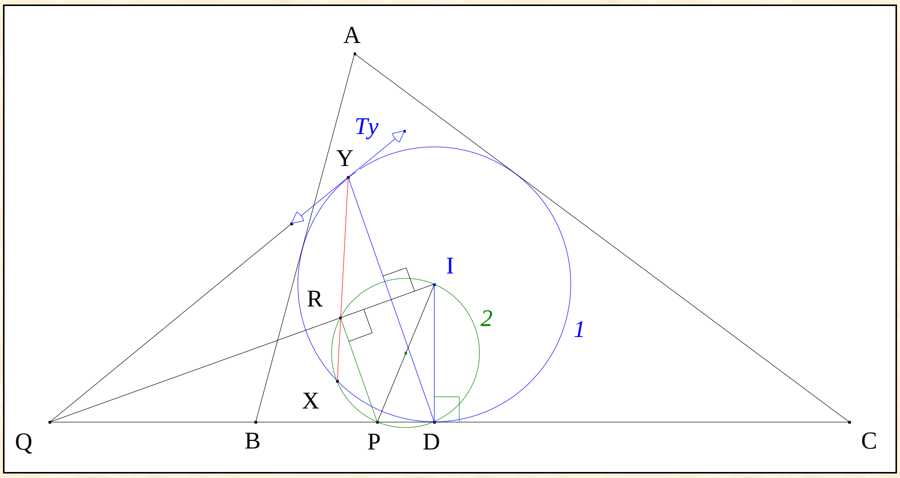


- **Conclusion :** (PI) est la P-bissectrice intérieure du triangle PDX.

ÉTAPE 2 [2]

VISION

Figure :



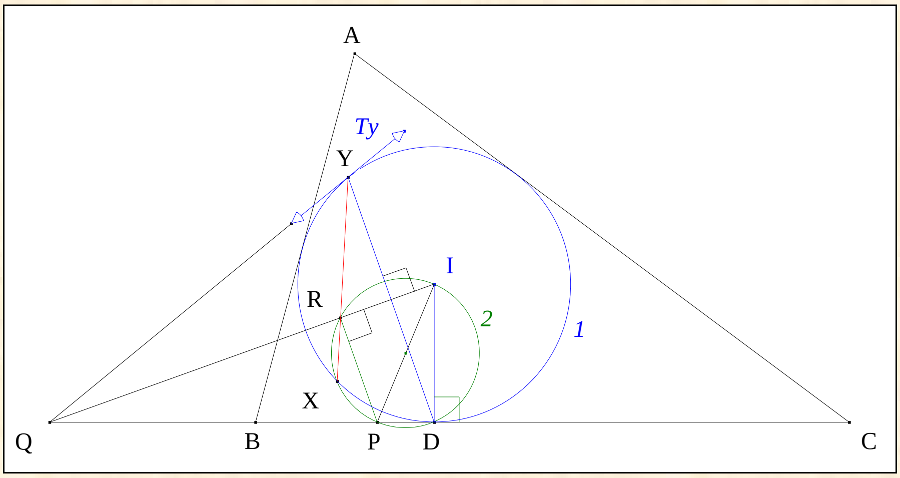
Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	P, Q	deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique,
	D, R	les pieds des perpendiculaires à (BC), (QI) issues resp. de I, P,
	2	le cercle de diamètre [IP] ; il passe par D et R ;

[2] Ayme J.-L., Collinear, AoPS du 09/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1425396_collinear

	X	le second point d'intersection de *2* et *1*,
	Y	le symétrique de D par rapport à (QI) ; Y est sur *1* ;
et	*Ty*	la tangente à *1* en Y.

Donné : R, X et Y sont alignés.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** par symétrie d'axe (QI), *Ty* passe par Q

  (2) (QI) est la médiatrice de [DY]

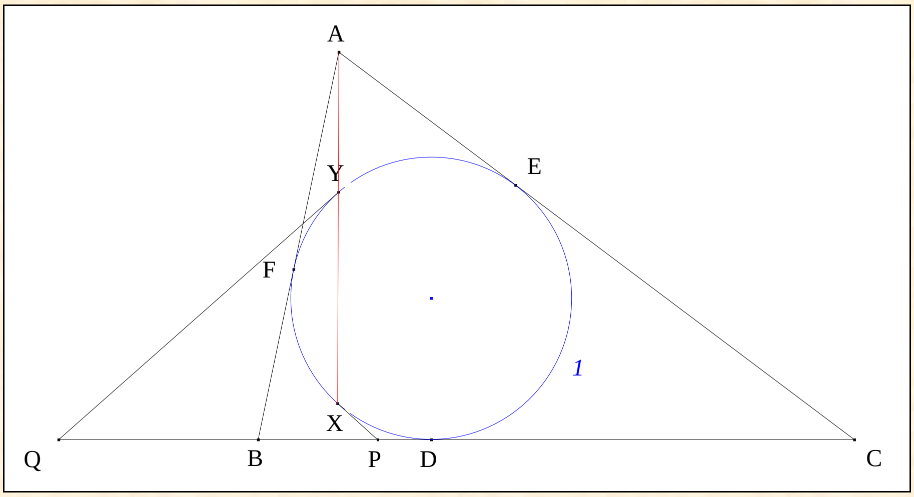
  (3) (PR) // (DY).

- **Conclusion :** les cercles *2* et *1*, les points de base D et X, la monienne (PDD), les parallèles (PR) et (DY), conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, R, X et Y sont alignés.

ÉTAPE 3

VISION

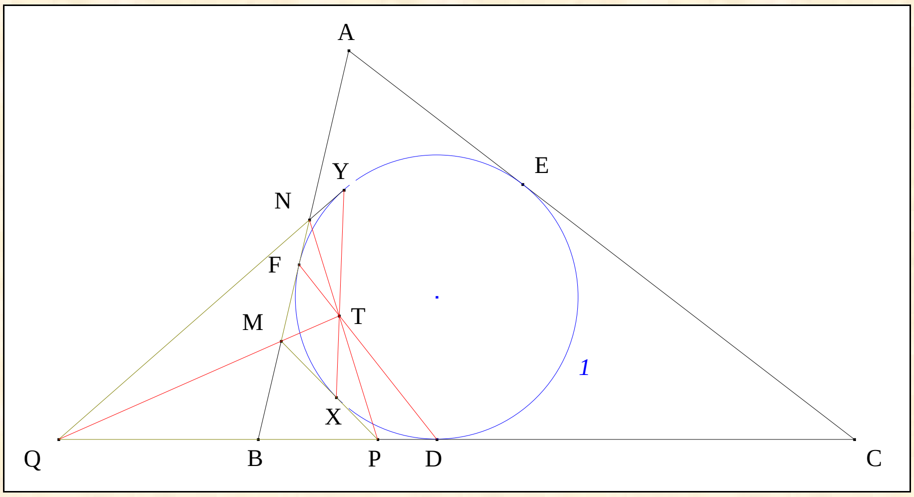
Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
P, Q deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique
et Y, Z les seconds points de contact des tangentes à *1* issues resp. de P, Q.

Donné : A, X et Y sont alignés.

VISUALISATION

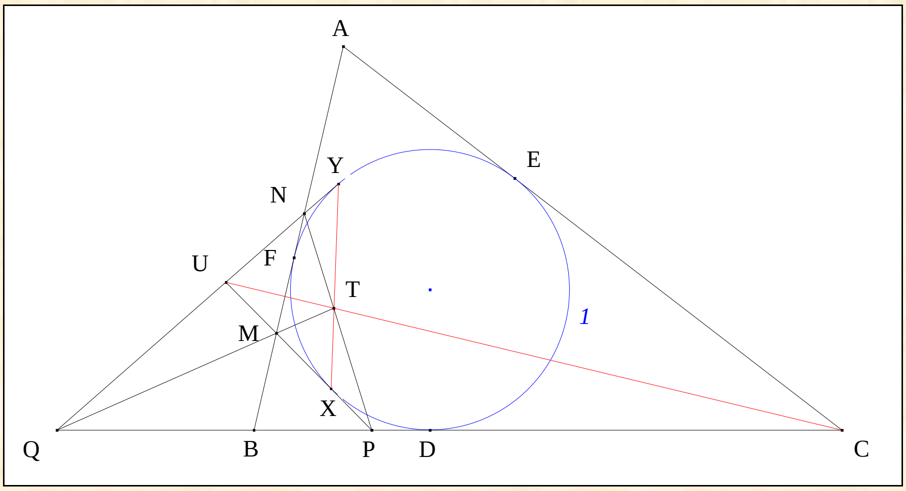


- Notons M, N les points d'intersection de (AB) resp. avec (PX), (QY).

- D'après "Le théorème de Newton" [3]
  appliqué au quadrilatère circonscriptible PQNM, (XY), (DF), (QM) et (PN) sont concourantes.

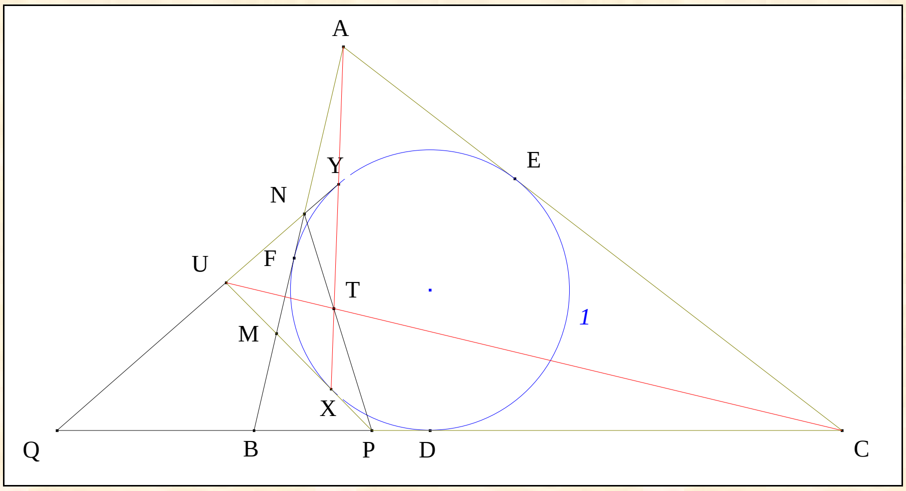
- Notons T ce point de concours.

[3] Ayme J.-L., La ponctuelle de Newton, G.G.G. vol. **8**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons U le point d'intersection de (PM) et (NQ).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" [4]
  appliqué au triangle NPQ et à la transversale (UT), (UT) passe par C.

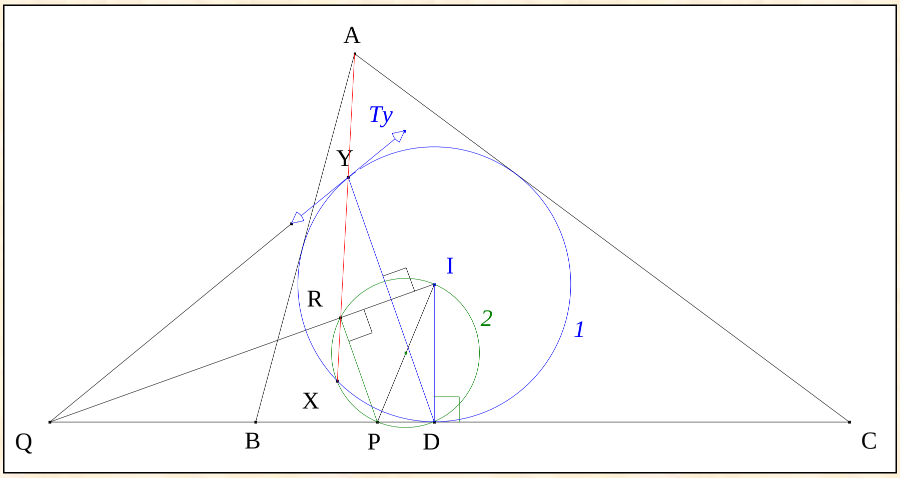


- D'après Carnot "Pentagone tangentiel" [5]
  appliqué à UPCANU, (XA), (UC) et (PN) sont concourantes en T
  ou encore, X, T et A sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, A, X et Y sont alignés.

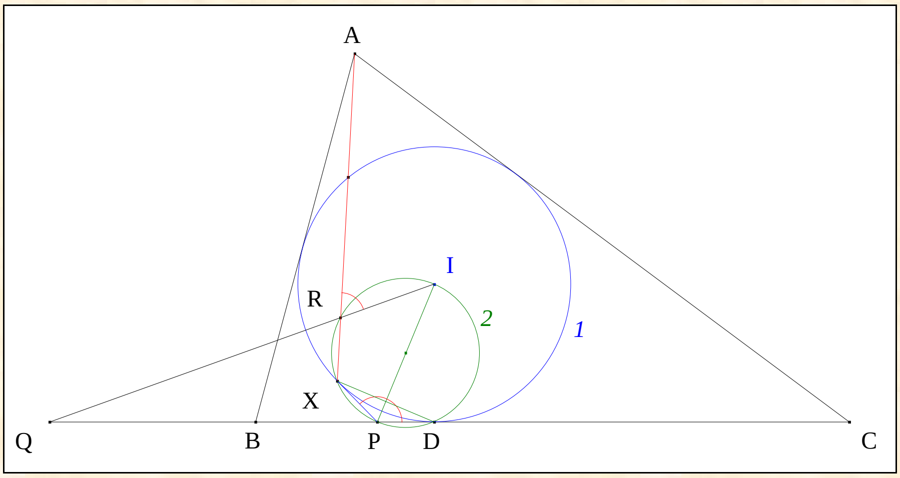
[4] Pappus d'Alexandrie, Collections, Livre **VII**, proposition **131**
[5] Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456

Scolies : **(1)** un merveilleux alignement



- **Conclusion :** d'après Étape **2**, A, X, Y et R sont alignés.

(2) Une égalité angulaire inattendue [6]



- Une chasse angulaire :

  * le quadrilatère IRXP étant cyclique, <IRA = <IPX
  * d'après Étape **1** scolie, <IPX = <DPI
  * par une autre écriture, <DPI = <CPI.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <IRA = <CPI.

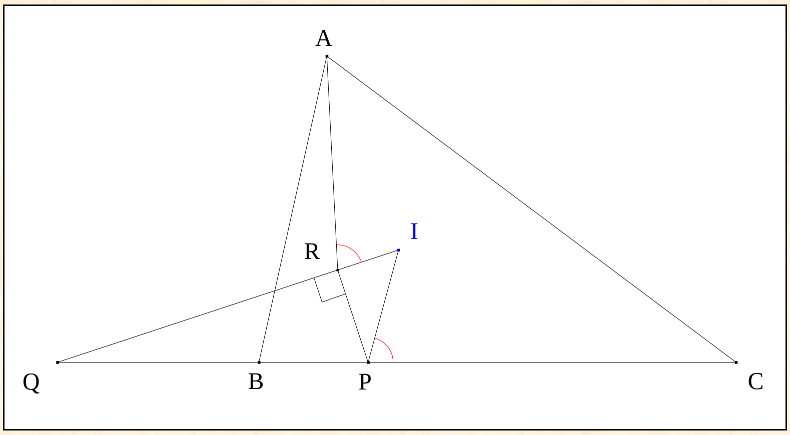
[6] Equal angle, AoPS du 15/12/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1354216_equal_angle

ÉTAPE 4 [7]

Restitution d'un problème angulaire

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
P, Q deux points de (BC) tels que le quaterne (B, C, P, Q) soit harmonique
et R le pied de la perpendiculaire à (QI) issue de P.

Donné : <IRA= <CPI.

[7] Equal angle, AoPS du 15/12/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1354216_equal_angle