CERCLE INSCRIT

DANS

UN TRIANGLE RECTANGLE

Jean - Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve originale et purement synthétique d'un problème de Dao Truong Giang[1] en réponse à la demande d'Emmanuel Lawrence connu sous le pseudonyme de "Mathangel" dans le site *Mathlinks* :

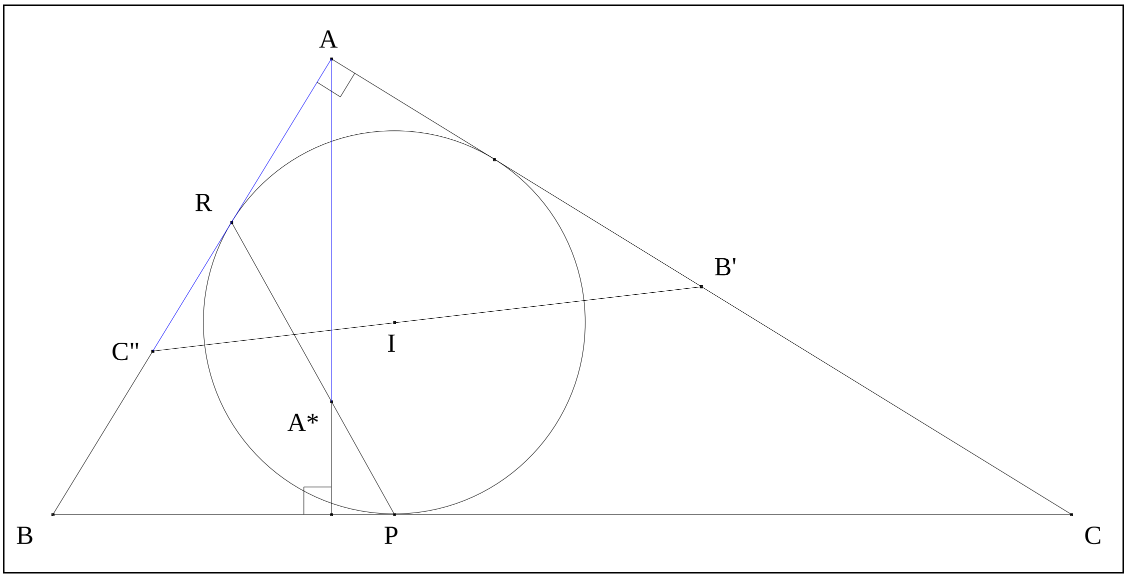
I use an ugly method to prove it (algebraic method).
Just wonder if there is a beautiful method (pure geometry).

Sommaire

I. INCIRCLE DE *MATHSCOPE* [2]

Figure

[1] Vietnamese Collection of Mathematical Problem, Problème 209. 3, www.imomath.com/othercomp/Journ/mathscope.pdf.
[2] http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=235828910&t=205814.



Traits : ABC un triangle A-rectangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
P, R les points de contact de *1* resp. avec (BC), (AB),
B' le milieu de [CA],
C" le point d'intersection de (B'I) et (AB),
et A* le point d'intersection de A-hauteur de ABC avec (PR).

Donné : AA* = AC".

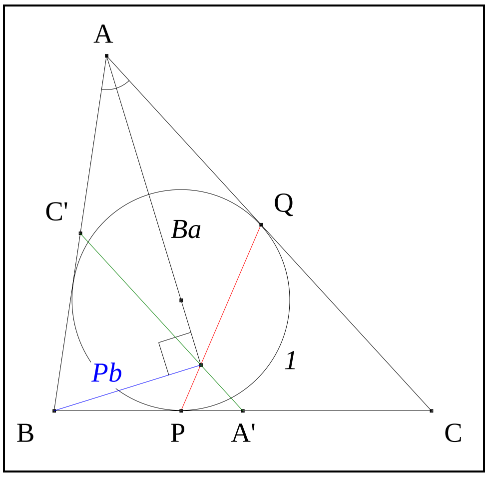
Commentaire : ce problème de *Mathscope* a été proposé par "Apollo" le 20 mai 2008 sur le site *Mathlinks*.
Les solutions qui ont été proposées sont de nature algébrique ("Mathangel"), trigonométrique (Giorgieri Gabriel et Vigil Nicula), projective (Kostas Vittas), métrique (Virgil Nicula).
Rappelons encore une fois la réflexion de "Mathangel" :

I use an ugly method to prove it (algebraic method). Just wonder if there is a beautiful method (pure geometry).

II. UN LEMME

1. An unlikely concurrence[3]

[3] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. 3.



Traits : ABC un triangle,
*B*a la A-bissectrice de ABC,
*P*b la perpendiculaire à *B*a, passant par B,
A', C' les milieux resp. de [BC], [AB],
et P, Q les points de contact de *1* resp. avec [BC], [CA].

Donné : *B*a, *P*b, (A'C') et (PQ) sont concourantes.

Note historique : l'historien allemand Max Simon[4] a signalé en 1906 qu'un ancien étudiant de Christophe Camille Gerono[5], Arthur Lascases[6] de la ville de Lorient (France) avait été le premier a montré en 1859, que *B*a et *P*b se brisent sur (A'C').
Un géomètre inconnu par l'auteur a montré que *B*a et *P*b se brisent sur (PQ)[7].
L'ensemble de ces deux résultats a été qualifié de *an unlikely concurrence* par Ross Honsberger[8] en 1995.
Une étude dans le cas particulier du triangle rectangle a été envisagée par Georges Papelier[9] en 1927.

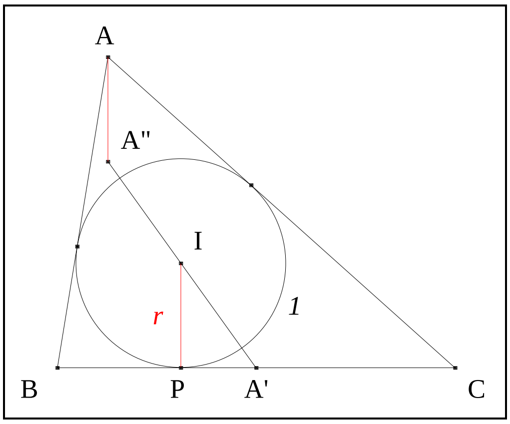
2. Un point sur une hauteur

VISION

Figure :

---

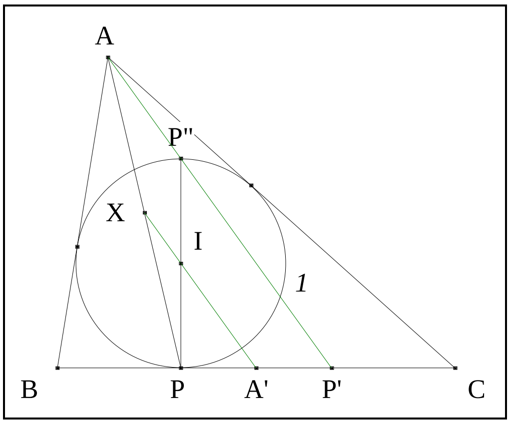
4 Simon M., *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX-Jahrhundert* (1906) 127, 133.
5 Gerono C. C. (1799-1891).
6 Lascases Arth., Question 477, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171.
7 Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc., (1952) exercise 43, p. 118.
8 Honsberger R., *Episodes in Nineteeth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31.
9 Papelier G., *Exercices de géométrie Modernes*, Pôles et polaires (1927) 19.



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
r le rayon de *1*,
P le point de contact de *1* avec (BC),
A' le milieu de [BC]
et A" le point d'intersection de (A'I) avec la A-hauteur de ABC.

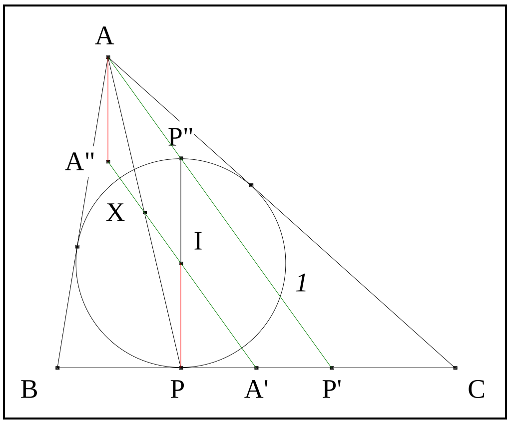
Donné : AA"= IP (= r).

VISUALISATION



- Notons X le point d'intersection de (A'I) avec la gergonnienne (AP) de ABC,
  P' l'isotomique de P relativement à [BC]
  et P" l'antipôle de P relativement à *1*.
- Nous savons que la nagelienne (AP') passe par P".
- D'après Thalès, "La droite des milieux" appliquée au triangle PP'P", (A'I) // (AP"P').
- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome de passage IIIa, X est le milieu de [AP] [10].

[10] Poncelet, *Annales* de Gergonne XII (1821-1822).



- Par définition de A" et P, (AA") ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (PIP") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AA") // (PIP") .

- Le quadrilatère AA"IP" ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme;
  en conséquence, AA" = IP" ;
  nous avons : IP" = IP.

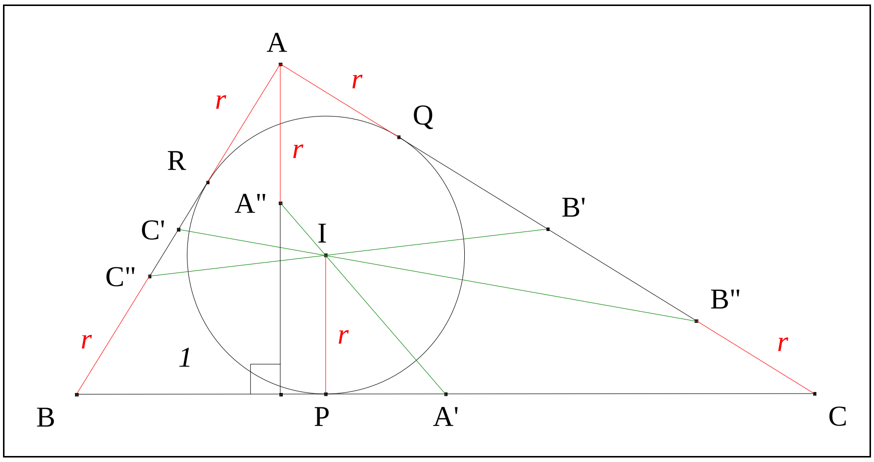
- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, AA" = IP (= r).

Énoncé traditionnel : la droite joignant le milieu d'un côté d'un triangle à son centre, coupe la hauteur correspondante en un point dont la distance au sommet correspondant est égale au rayon du cercle inscrit.

Scolies : **(1)** P' est le point de contact du A-excercle de ABC avec (BC).

(2) Nous savons que AR = AQ = r.

(3) Vision triangulaire



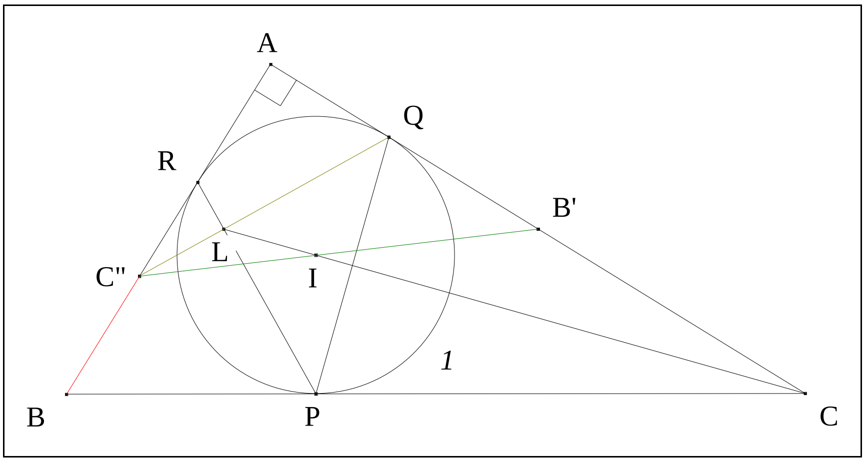
- Notons B', C' les milieux resp. de [CA], [AB].
  et B", C" les points d'intersection resp. de (B'I) avec la B-hauteur (BA) de ABC, de (C'I) avec la C-hauteur (CA) de ABC.

- **Conclusion :** d'après II. 2. Un point sur une hauteur, BC" = CB" = r.

3. Trois alignements[11]

VISION

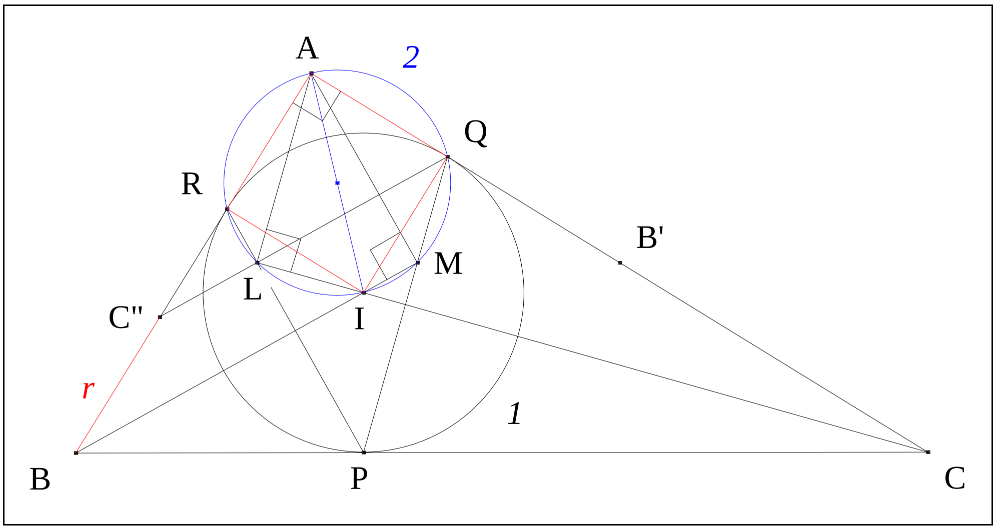
Figure :



Traits : ABC un triangle A-rectangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
PQR le triangle de contact de ABC,
L le point d'intersection de (CI) et (RP),
B' le milieu de [CA],
et C" les points d'intersection de (B'I) avec la B-hauteur (BA) de ABC.

Donné : Q, L et C" sont alignés.

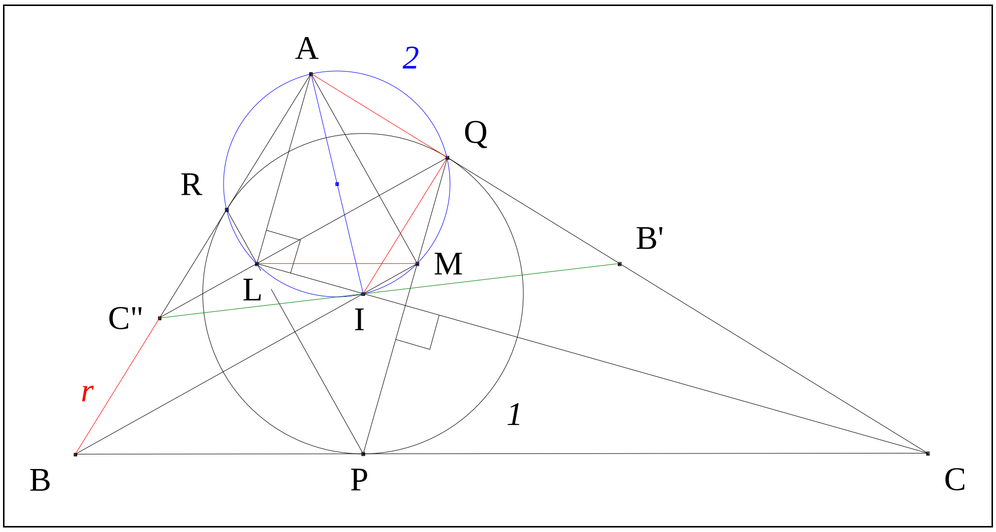
VISUALISATION



- Notons r le rayon de *1*,
  M le point d'intersection de (BI) et (PQ),
  et *2* le cercle de diamètre [AI].

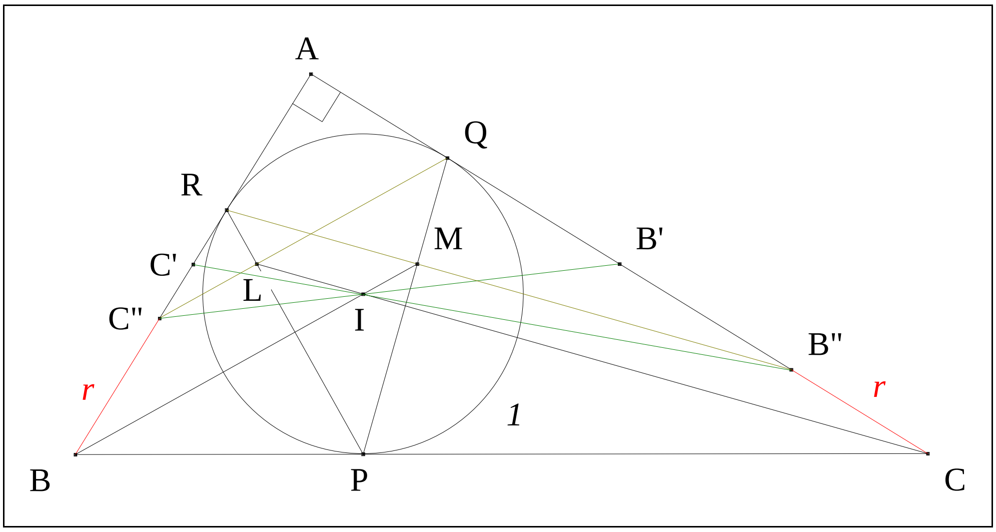
[11] O.M. Grèce (1994).

- D'après II. 1. An unlikely concurrence, (AL) ⊥ (CL) et (AM) ⊥ (BM).
- Nous avons : (IR) ⊥ (AB) et (IQ) ⊥ (CA).
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *2* passe par Q, R, M et L.



- Nous avons : (AL) ⊥ (CL) et (CL) ⊥ (PMQ) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AL) // (PMQ).
- Le trapèze ALMQ étant cyclique, est isocèle ; en conséquence, LM = AQ (= IQ).
- Le quadrilatère cyclique et convexe LIMQ ayant ses diagonales égales, est un trapèze ;
  en conséquence, (QL) // (MIB).
- Nous avons : (IQ) ⊥ (CA) et (CA) ⊥ (BC"A) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IQ) // (BC"A) ;
  d'après II. 2 Un point sur une hauteur, scolie 2, IQ = BC" (= r).
- Le quadrilatère BIQC" ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (MIB) // (QC") ;
  par transitivité de la relation //, (QL) // (QC") ;
  d'après le postulat d'Euclide, (QL) = (QC").
- **Conclusion :** Q, L et C" sont alignés.

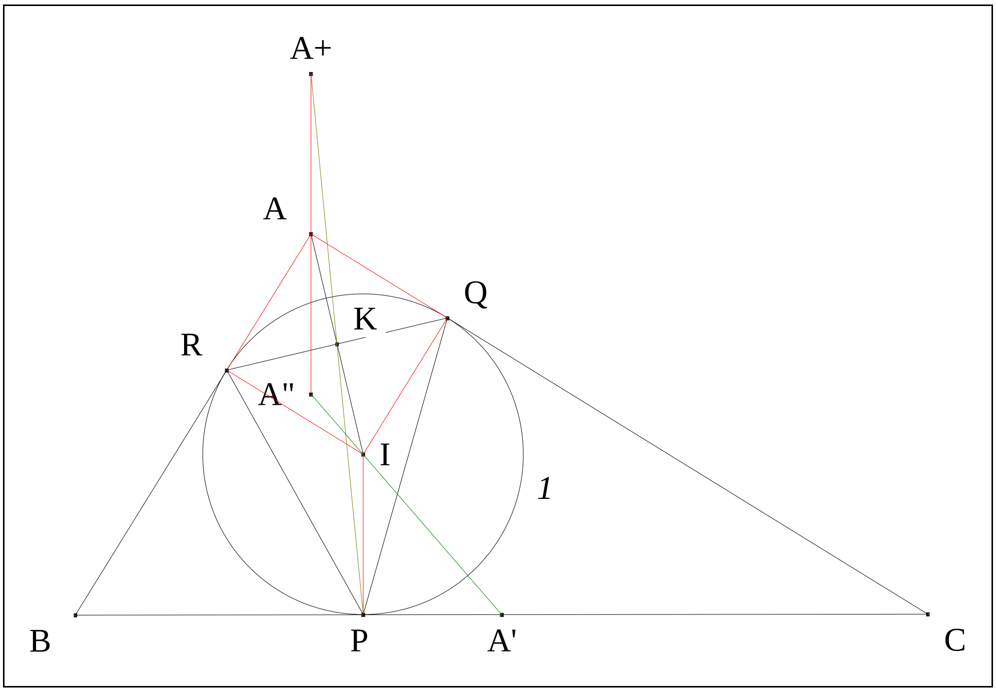
Scolies : **(1)** un deuxième alignement



• Notons	C'	le milieu de [AB]
et	B"	le point d'intersection de (C'I) avec la C-hauteur (CA) de ABC.

• **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que R, M et B" sont alignés

(2) Un troisième alignement



• Notons	A'	le milieu de [AB],
	A"	le point d'intersection de (A'I) avec la A-hauteur de ABC,
	A+	le symétrique de A" par rapport à A
et	K	le point d'intersection de (AI) et (QR).

• Le quadrilatère ARIQ étant un carré, K est le milieu de [AI].

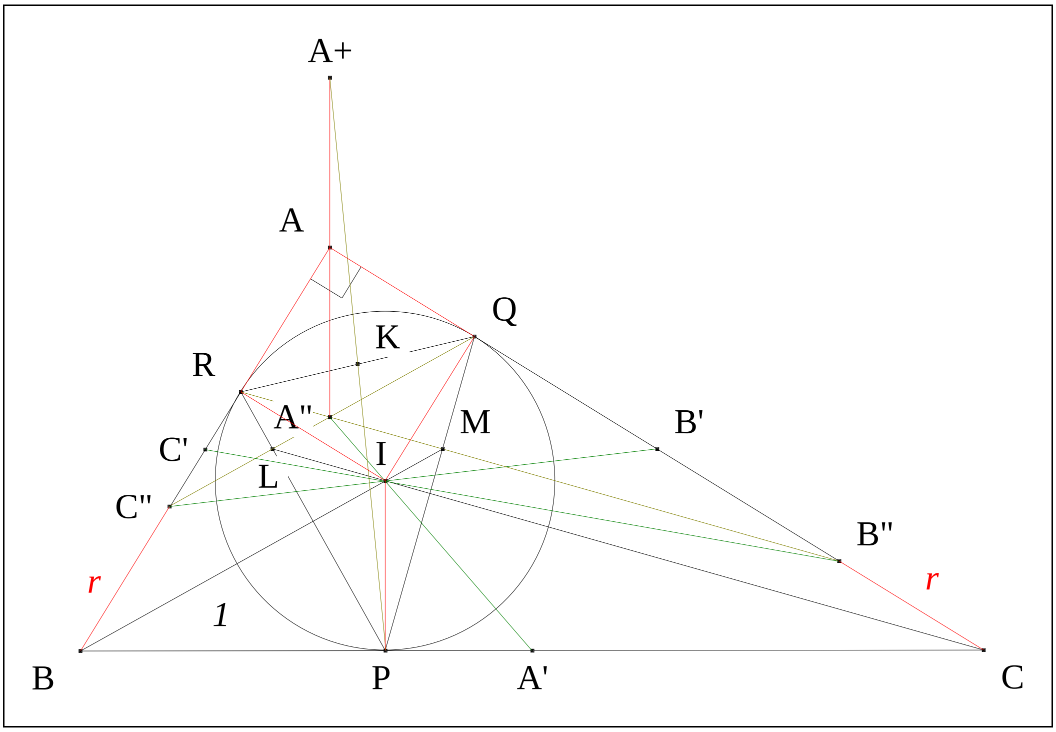
• D'après II. 2. Un point sur une hauteur, IP = AA" ;
par définition de A+, AA" = AA+ ;
par transitivité de la relation =, IP = AA+.

• Nous savons que (IP) // (AA+).

- Le quadrilatère PIA+A ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ; en conséquence, ses diagonales se coupent en leur milieu K.

- **Conclusion :** P, K et A+ sont alignés.

(3) Vision triangulaire

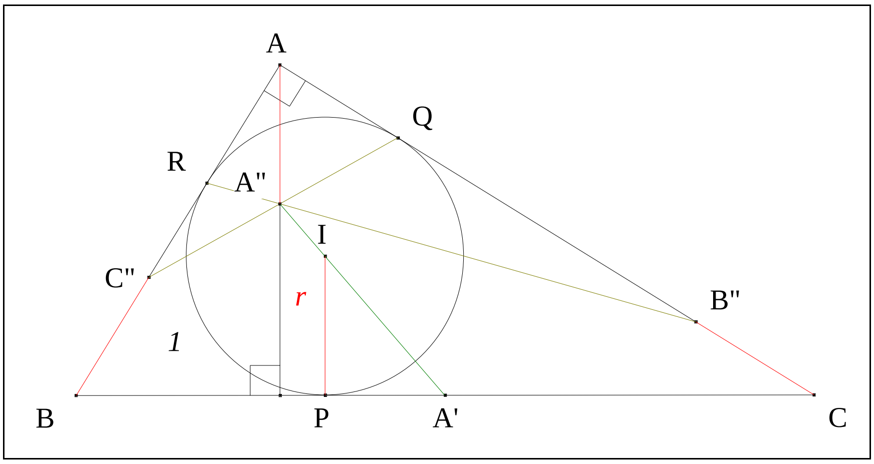


Commentaire : la figure précédente suggère une "concourance" remarquable.

4. Lemme

VISION

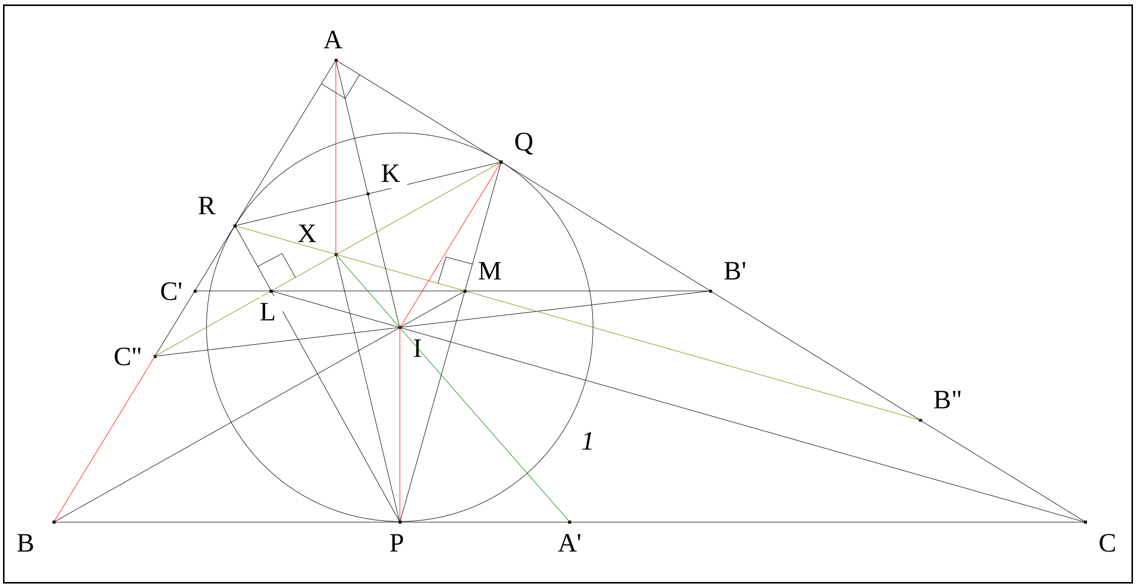
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : A" est le point d'intersection de (B"R) et (C"Q).

VISUALISATION



- Notons X le point d'intersection de (QC") et (RB").

- Nous avons : (RP) ⊥ (BI) ;
  BIQC" étant un parallélogramme, (BI) // (QLC") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (RP) ⊥ (QL).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (PQ) ⊥ (RM).

- **Conclusion partielle :** X étant l'orthocentre de PQR, (PX) ⊥ (QR).

- D'après Carnot "Une relation" (Cf. Annexe 1) appliqué à PQR, PX = IA.

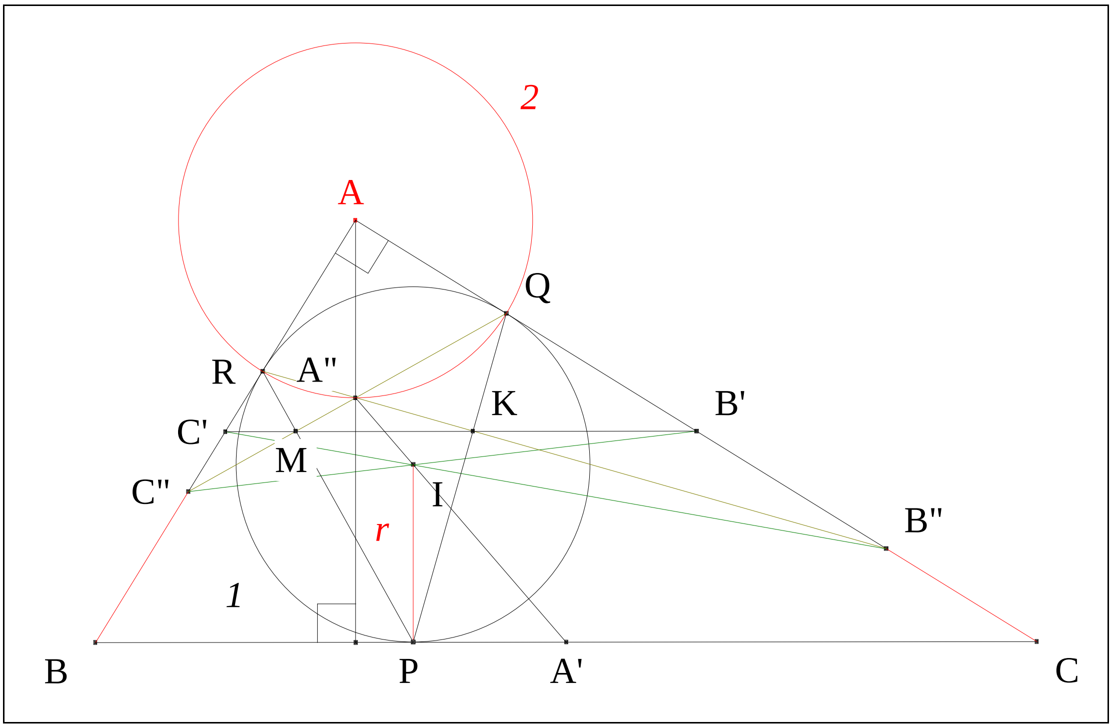
- Nous avons : (QR) ⊥ (IA) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PX) // (IA).

- Le quadrilatère PIAX ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (AX) // (PI) et AX = PI (= r) ;
  nous savons que (PI) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AX) ⊥ (BC).

- D'après II. 2. Un point sur une hauteur, X et A" sont confondus.

- **Conclusion :** A" est le point d'intersection de (B"R) et (C"Q).

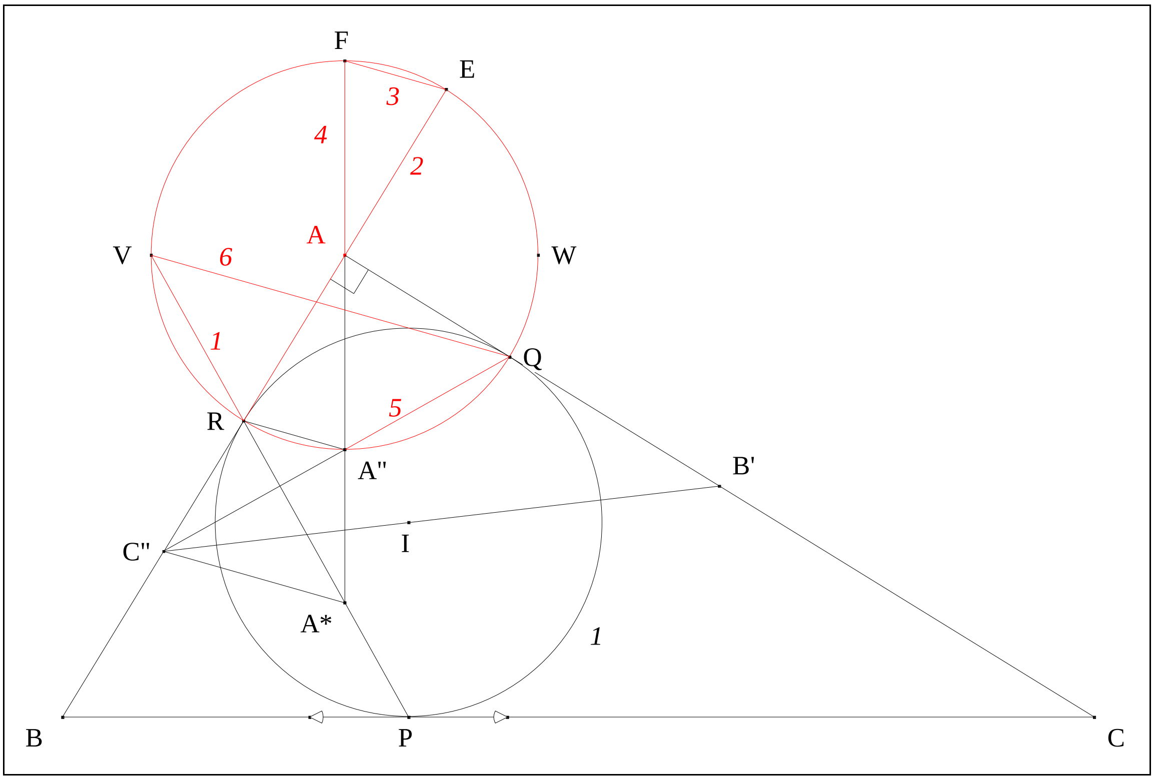
Scolie : le cercle *2* de centre A et de rayon r



Note historique : une autre preuve synthétique de ce résultat a été donnée par Amir Saeidy[12].
et une de nature métrique a été proposée par Virgil Nicula.

III. LA PREUVE DE L'AUTEUR

12 http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=218492.



- Notons V le second point d'intersection de (RP) avec *2*
  E, F les seconds points d'intersection resp. de (RA), (A"A) avec *2*
  et Tp la tangente à *1* en P.

- **Scolies :** **(1)** Tp = (BPC)
  (2) *1* et *2* sont orthogonaux.

- D'après "Deux cercles orthogonaux (Cf. Annexe 2), (VA) // Tp.

- Sachant que deux angles au centre et égaux soutendent des cordes égales, A"V = RQ ;
  en conséquence, le quadrilatère cyclique et convexe VRA"Q est un trapèze ; d'où (RA") // (VQ).

- **Scolie :** (RA"), (EF) et (QV) sont parallèles entre elles.

- D'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. Annexe 3),
  (1) (A*C") est la pascale de l'hexagone cyclique VREFA"QV
  (2) (A*C") // (VQ).

- **Scolie :** (A*C") // (RA").

- Le triangle ARA" étant A-isocèle, le triangle AC"A* l'est aussi.

- **Conclusion :** AC" = AA*.

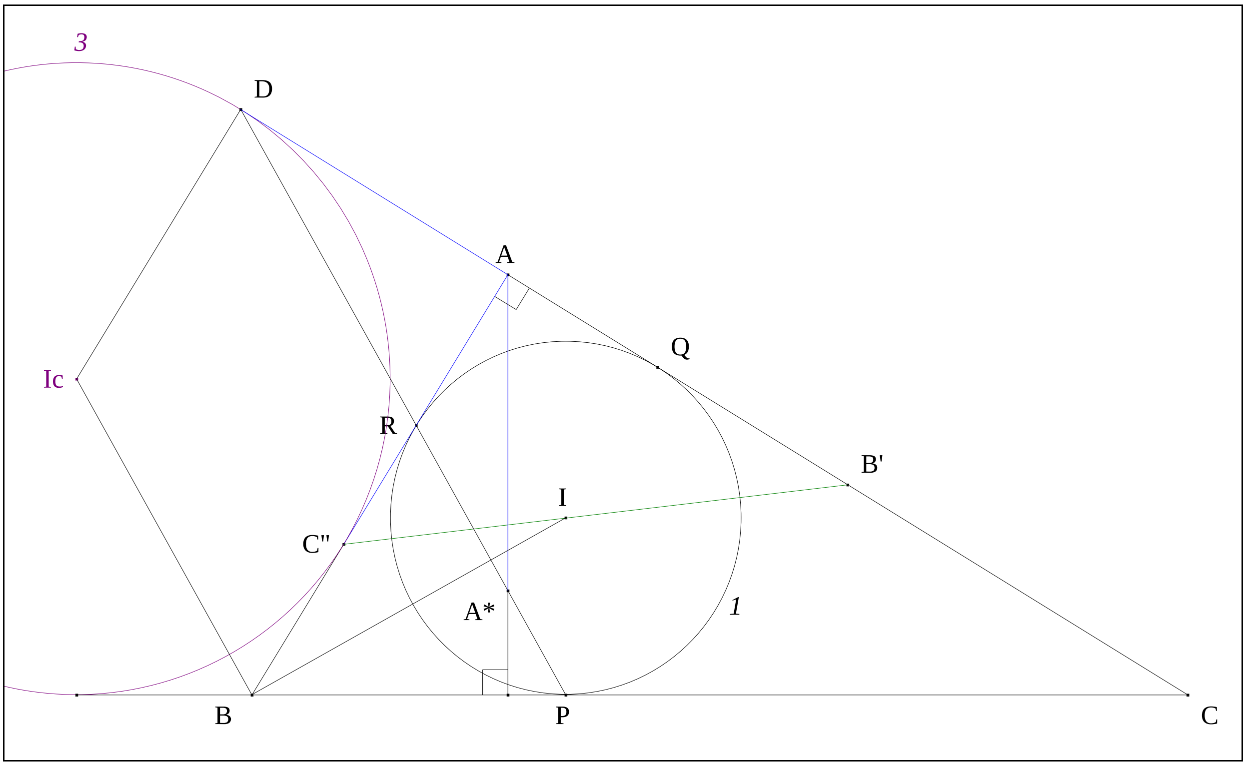
Note historique : suite à la demande d'Emmanuel Lawrence connu sous le pseudonyme de "Mathangel" dans le site *Mathlinks*

I use an ugly method to prove it (algebraic method).
Just wonder if there is a beautiful method (pure geometry).

des solutions de nature différente ont été présentées :

trigonométrique	par	Giorgieri Gabriel
harmonique	par	Kostas Vittas
métrique	par	Virgil Nicula
rapports	par	"Tobeno"
angulaire	par	Amir Saeidy.

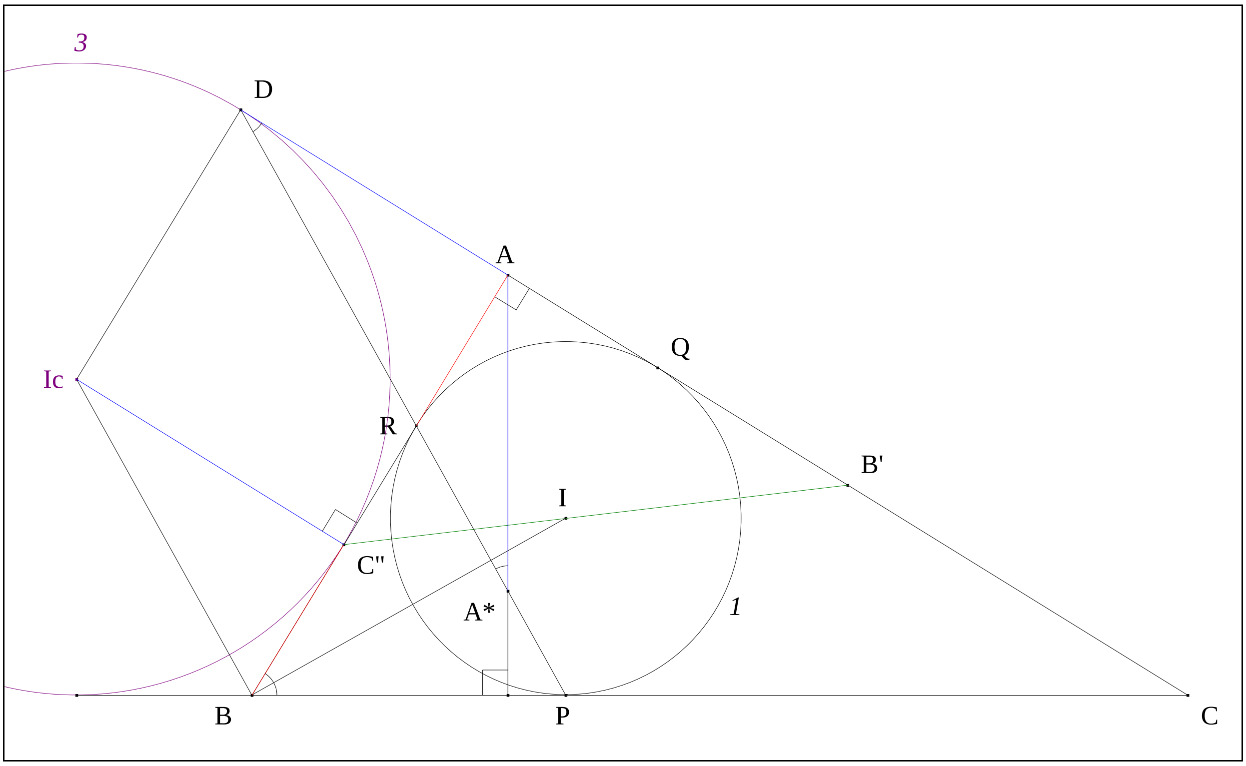
IV. LA PREUVE D'AMIR SAEIDY [13]



- Notons *3* le C-excercle de ABC
  et Ic le centre de *3*.

- D'après II. 2. Un point sur une hauteur, scolie 3, C" est le point de contact de *3* avec (AB).

[13] http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=205814.



- Nous avons : **(1)** AC" = AD
  (2) AC" = BR.

- Le quadrilatère convexe ADIcC" ayant trois angles droits, est un rectangle ;
  celui-ci ayant deux côtés consécutifs égaux, est un carré ;
  en conséquence, IcD = AC".

- Nous avons : (IcD) ⊥ (DAC) et (DAC) ⊥ (ARB) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IcD) // (BR).

- Le quadrilatère convexe DRBIc ayant deux côtés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (DR) // (BIc).

- Nous avons : (BIc) ⊥ (BI) et (BI) ⊥ (RP) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BIc) // (RP)
  par transitivité de la relation //, (DR) // (RP) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (DR) = (RP).

- **Conclusion partielle :** D, R et P sont alignés.

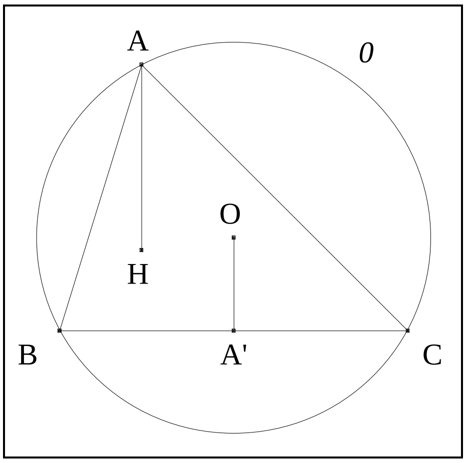
- Une chasse angulaire : <PDA = <IBA ;
  <IBA = <CBI ;
  <CBI = <AA*D ;
  par transitivité de la relation =, <PDA = < AA*D ;
  en conséquence, le triangle ADA* est A-isocèle.

- Nous avons : AD = AA* ;

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, AC" = AA*.

V. ANNEXE

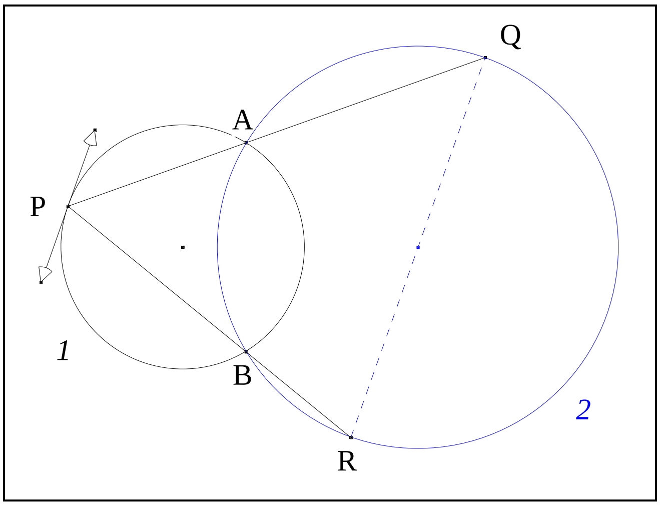
1. Une relation de Carnot[14]



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et A' le milieu de [BC],

Donné : AH = 2.OA'.

2. Deux cercles orthogonaux[15]

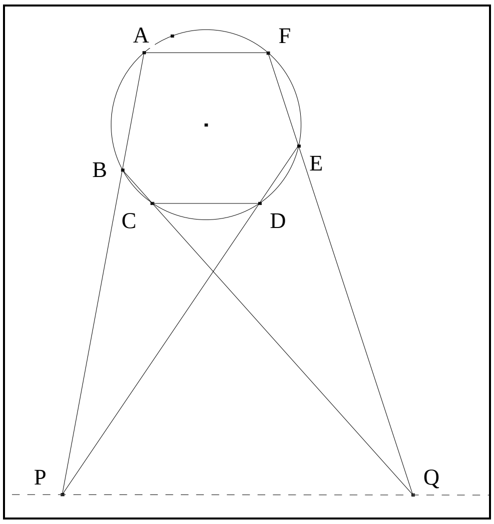


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les deux points d'intersection de *1* et *2*,
P un point de *1*,
Tp la tangente à *1* en P
et Q, R les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec *2*.

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux
si, et seulement si,
(QR) est une droite diamétrale de *2*, parallèle à Tp.

[14] Carnot L., *Géométrie de position* (1803).
[15] Altshiller-Curt N., Note on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* (34) 500-501.

3. L'équivalence d'Aubert[16]



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDE	un pentagone inscrit dans *1*,
	F	un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
et	P, Q	les points d'intersection de (AB) et (DE), de (BC) et (EF).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si*, (PQ) et (AF) sont parallèles.

[16] La condition nécessaire est de Paul Aubert.