

THE CROSS - CEVIAN POINT

Jean-Louis AYME

Résumé.

Nous présentons une preuve originale et purement synthétique concernant "The cross-cevian point" suivie de trois exemples remarquables. Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

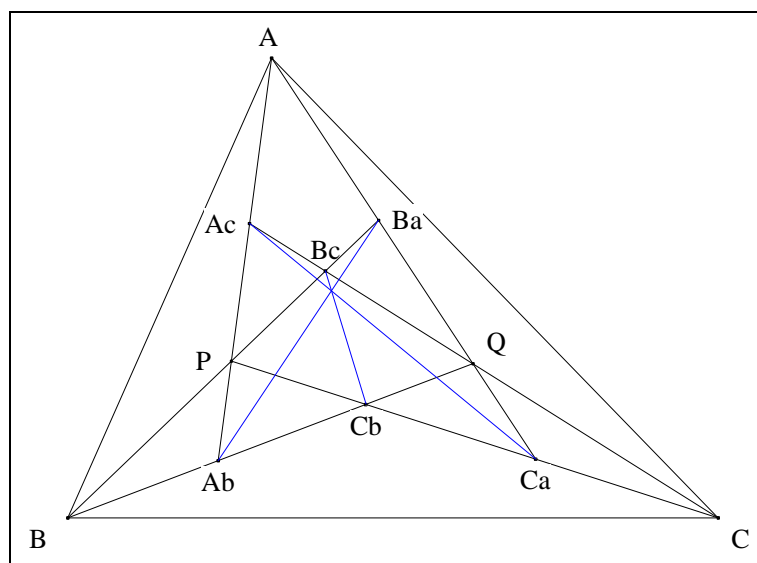
Sommaire

- I. Un lemme
- II. The cross-cevian point R of P and Q
- III. Le triangle R-anticévien
- IV. Quatre exemples
 - 1. Le cross-cevian point de G and Ge
 - 2. Le cross-cevian point de G and H
 - 3. Le cross-cevian point de G and Na
 - 4. Le cross-cevian point de H et I

I. UN LEMME ¹

VISION

Figure :



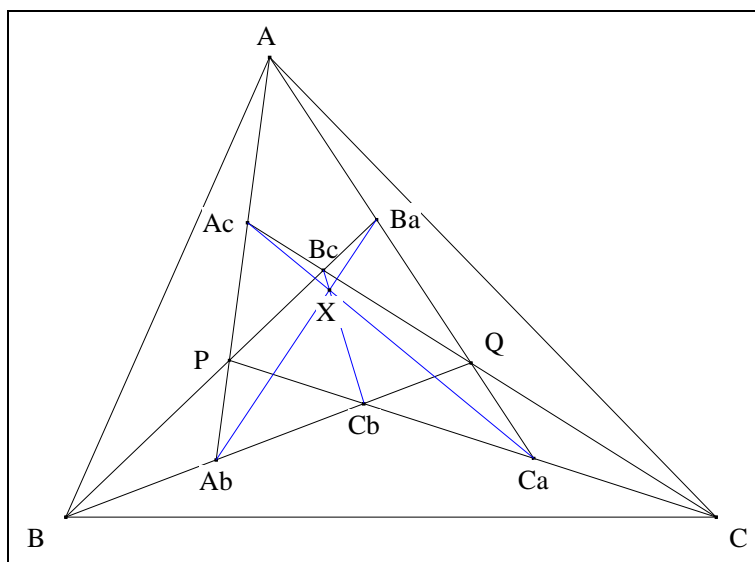
Traits : ABC un triangle,

¹ Gremmen Frans, Cross point, Ceva point, Message *Hyacinthos* # 6284 du 07/01/2003.

et P, Q deux points,
 Ab, Ba, Ac, Ca, Bc, Cb les points d'intersection resp. de (PA) et (QB) , de (PB) et (QA) ,
de (PA) et (QC) , de (PC) et (QA) , de (PB) et (QC) , de (PC) et (QB) .

Donné : $(AbBa)$, $(BcCb)$ et $(CaAc)$ sont concourantes.

VISUALISATION



- Par définition, les triangles $AbBcCa$ et $AcBaCb$ sont en perspective de centre P
les triangles $AbBcCa$ et $CbAcBa$ sont en perspective de centre Q .
- D'après Desargues "Le théorème de la double perspective" (Cf. Annexe 1),
les triangles $AbBcCa$ et $BaCbAc$ sont en perspective.
- Notons X le centre de cette perspective.
- **Conclusion :** $(AbBa)$, $(BcCb)$ et $(CaAc)$ sont concourantes.

Note historique : ce résultat s'affirme comme une généralisation de celui proposé dans l'*Educational Times* où P et Q sont resp. les points médian et de Lemoine de ABC .
L'anglais Christopher J. Bradley² de Bristol (Grande-Bretagne) a vérifié ce résultat avec deux points isogonaux, puis avec deux points quelconques en utilisant le logiciel Cabri.
Frans Gremmen de l'université de Nimègue (Pays-bas) a précisé sans preuve que X est le cross-cevian point de P et Q relativement à ABC .

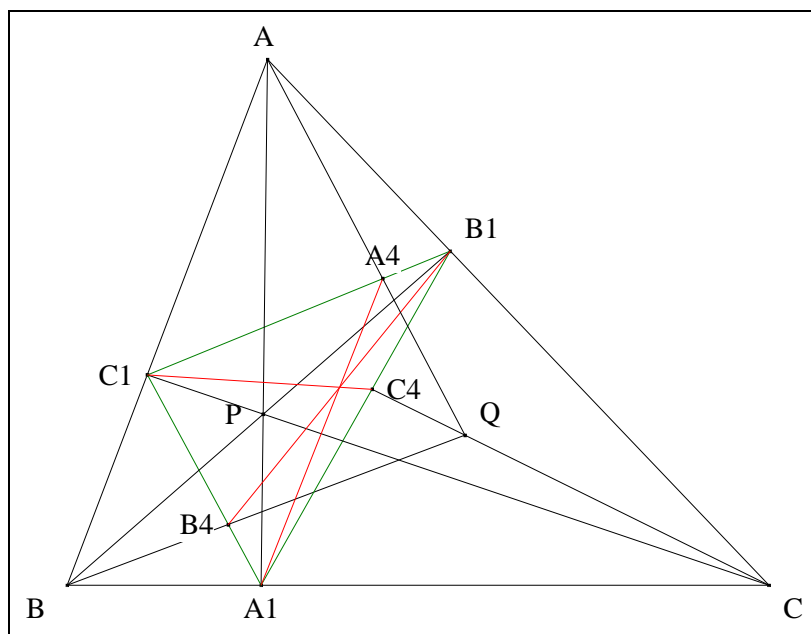
II. THE CROSS-CEVIAN POINT OF P AND Q³

VISION

² Bradley C. J., problème 3080, *Crux Mathematicorum* 7 vol. 31 (2005) 458.

³ Zaslavski A., A new theorem?, Message *Hyacinthos* # 10509 du 21/09/2004.

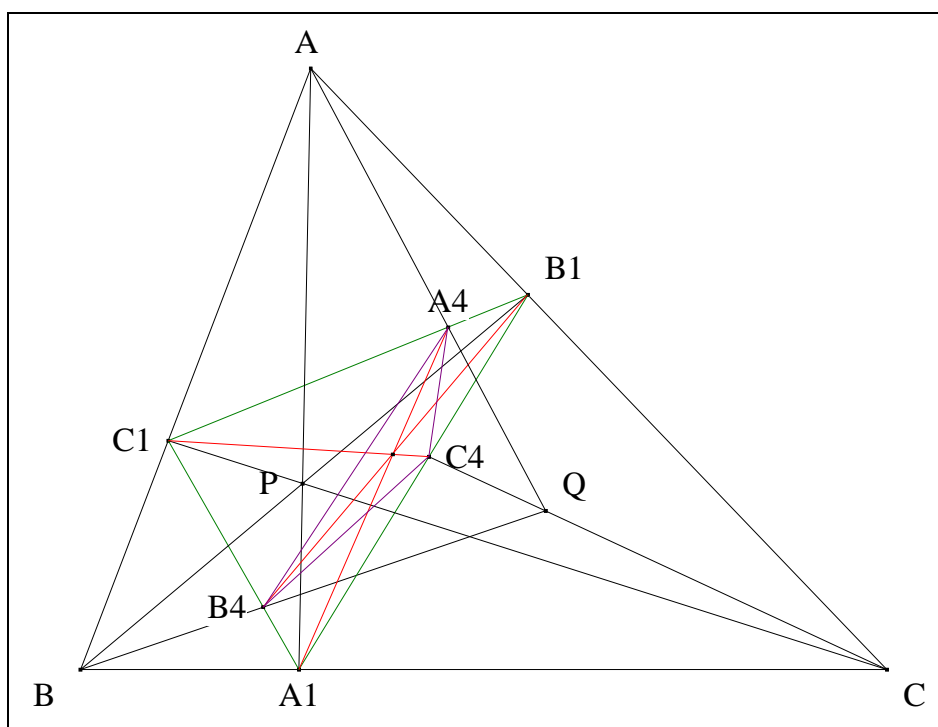
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points,
A1B1C1 le triangle P-cévien de ABC
et A4, B4, C4 les points d'intersection resp. de (QA) et (B1C1), de (QB) et (C1A1),
de (QC) et (A1B1).

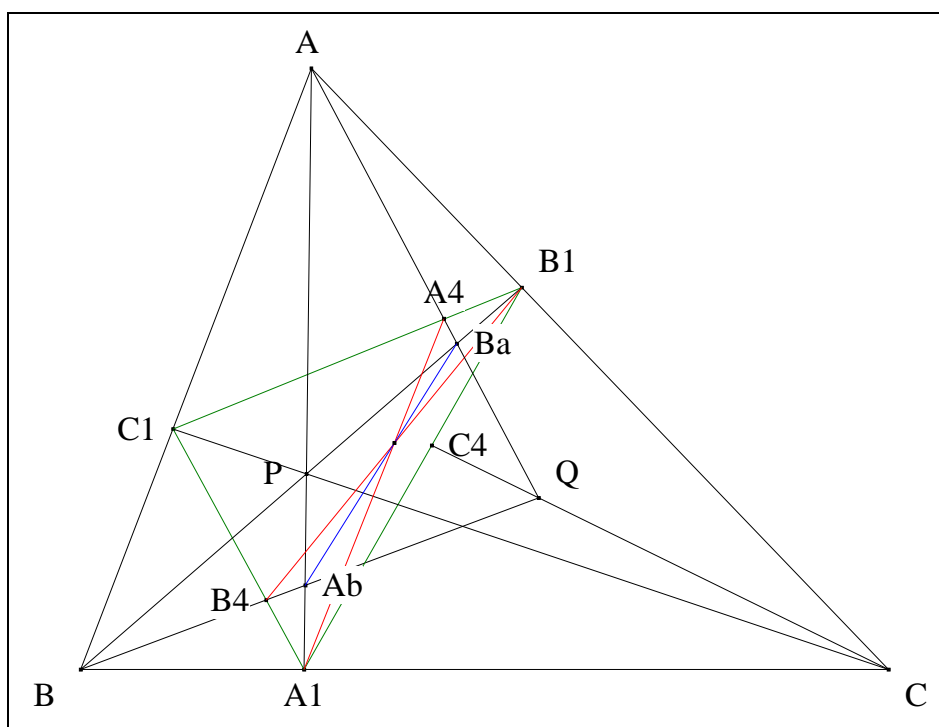
Donné : (A1A4), (B1B4) et (C1A4) sont concourantes.

VISUALISATION

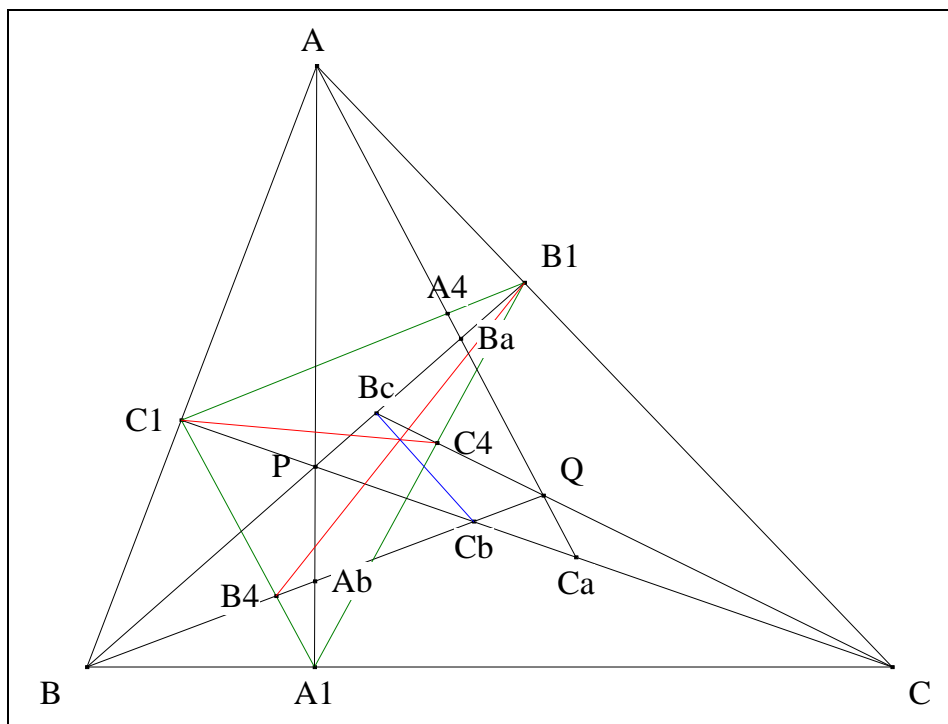


- Par définition, ABC et $A_4B_4C_4$ sont en perspective de centre Q .
- Nous avons : $A_4B_4C_4$ est inscrit dans $A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_1$ est inscrit dans ABC ;
 $A_4B_4C_4$ est en perspective avec ABC , $A_1B_1C_1$ est en perspective avec ABC ;
d'après Döttl "The cevian nests theorem"⁴, $A_4B_4C_4$ est en perspective avec $A_1B_1C_1$.
- **Conclusion** : par définition, (A_1A_4) , (B_1B_4) et (C_1C_4) sont concourantes.

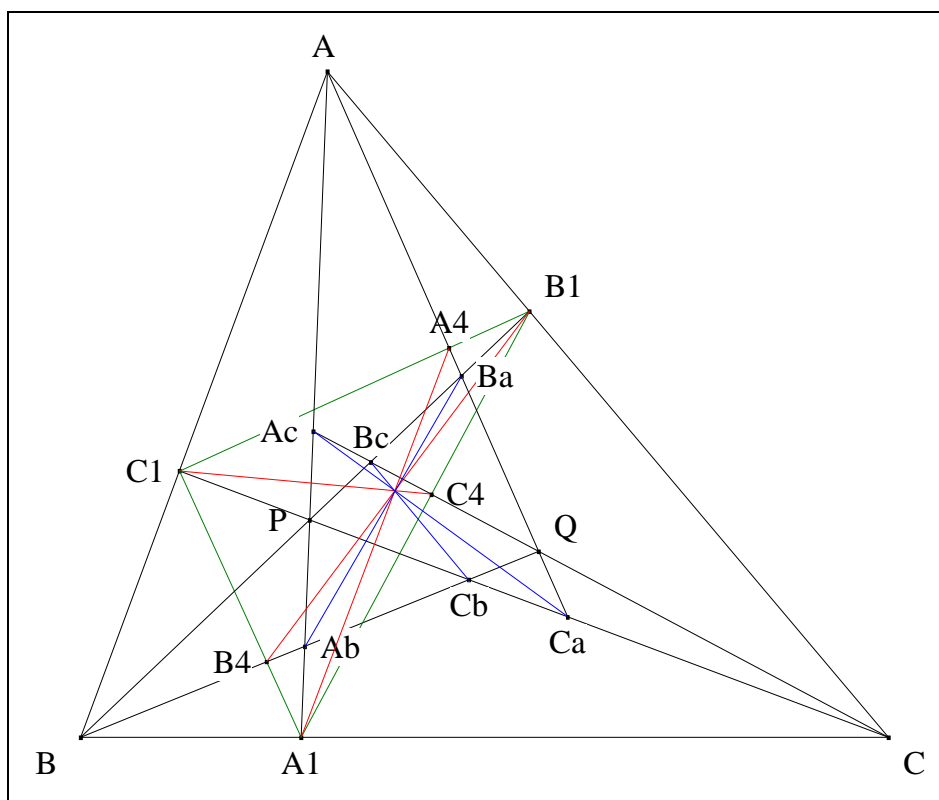
Scolies : (1) six droites concourantes



- Notons Ab, Ba les points d'intersection resp. de (PA) et (QB) , de (PB) et (QA) .
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2), (BC_1A) étant l'arguésienne des triangles BaB_1A_4 et AbB_4A_1 , $(BaAb)$, (B_1B_4) et (A_4A_1) sont concourantes.



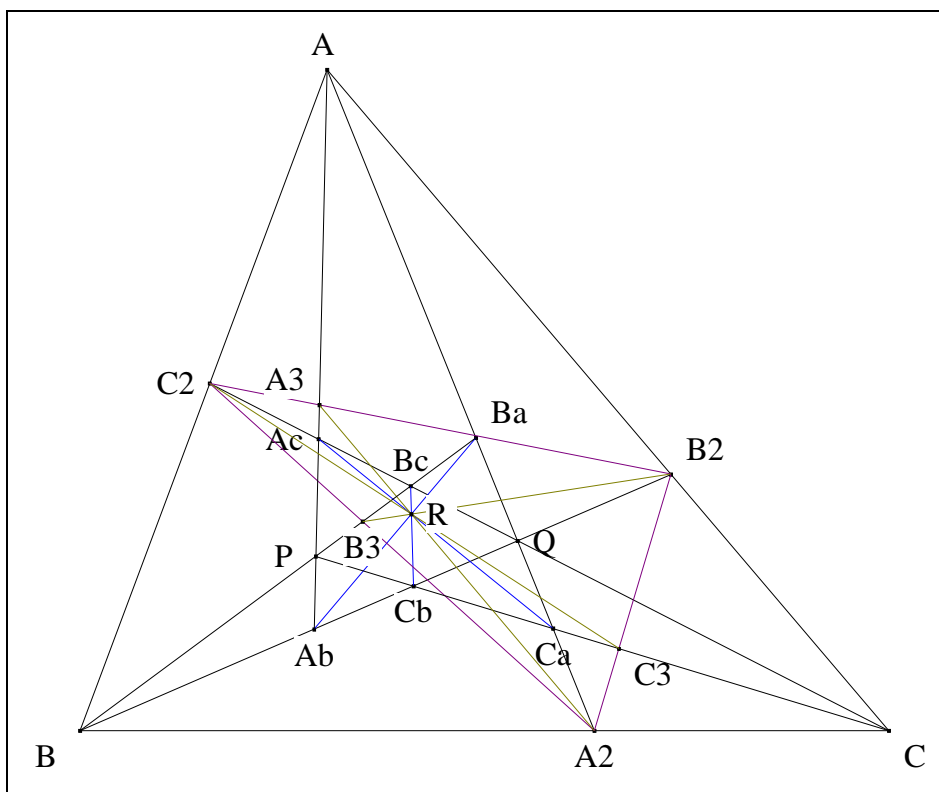
- Notons B_c, C_b les points d'intersection resp. de (PB) et (QC) , de (PC) et (QB) .
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 2), $(CA1B)$ étant l'arguésienne des triangles $BcC4B1$ et $CbC1B4$; (BcC_b) , $(C4C1)$ et $(B1B4)$ sont concourantes.
- **Conclusion partielle :** (BcC_b) , $(C4C1)$, $(B1B4)$, $(BaAb)$ et $(A4A1)$ sont concourantes.



- Notons A_c, C_a les points d'intersection resp. de (PA) et (QC) , de (PC) et (QA) .

- **Conclusion :** d'après 1. Lemme,
 (A_1A_4) , (B_1B_4) , (C_1C_4) , $(AbBa)$, $(BcCb)$ et $(CaAc)$ sont concourantes.

(2) Avec le triangle Q-cévien de ABC

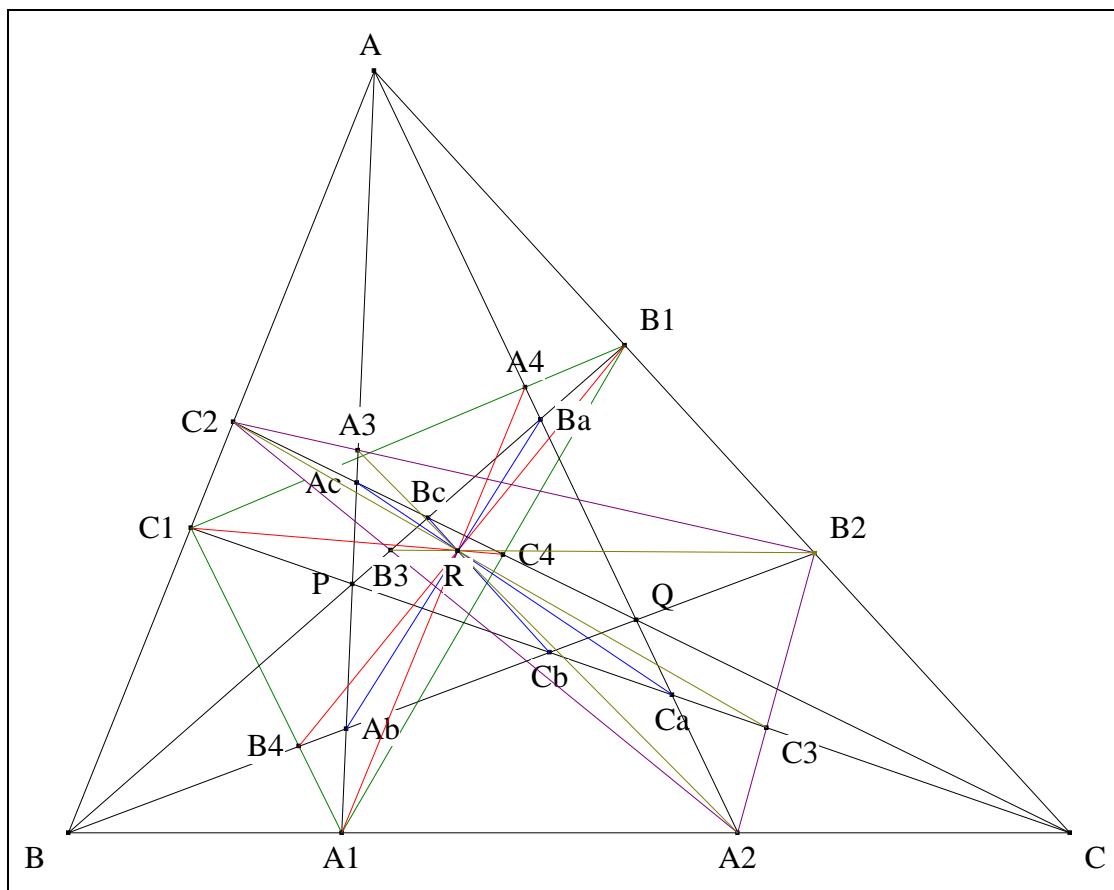


- Notons $A_2B_2C_2$ le triangle Q-cévien de ABC
 et A_3, B_3, C_3 les points d'intersection resp. de (PA) et (B_2C_2) , de (PB) et (C_2A_2) , de (PC) et (A_2B_2) .

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
 (A_2A_3) , (B_2B_3) , (C_2C_3) , $(AbBa)$, $(BcCb)$ et $(CaAc)$ sont concourantes.

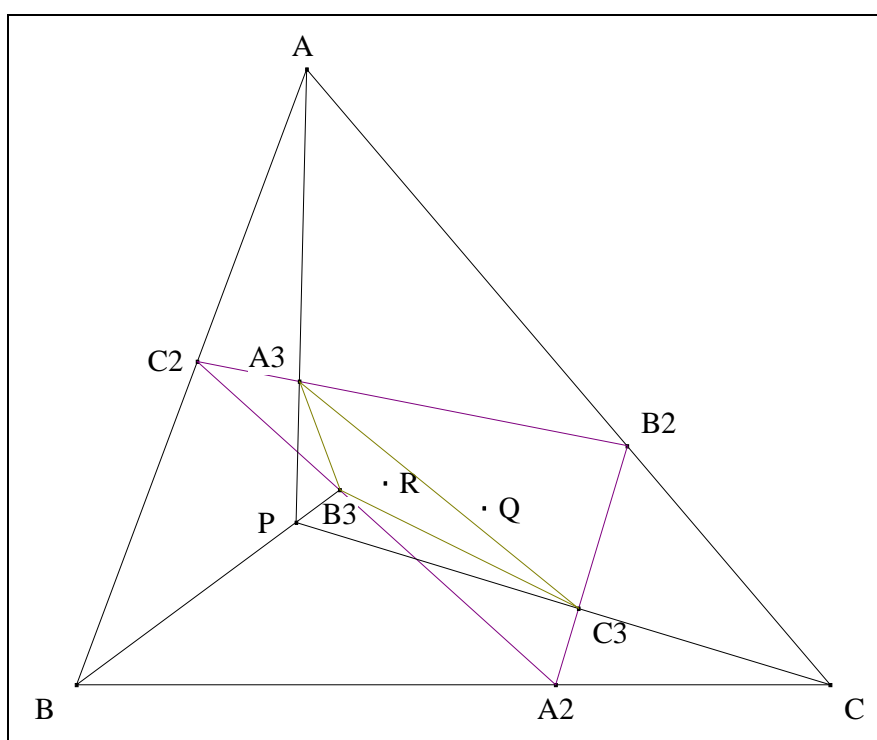
- Notons R ce point de concours.

(3) Figure finale

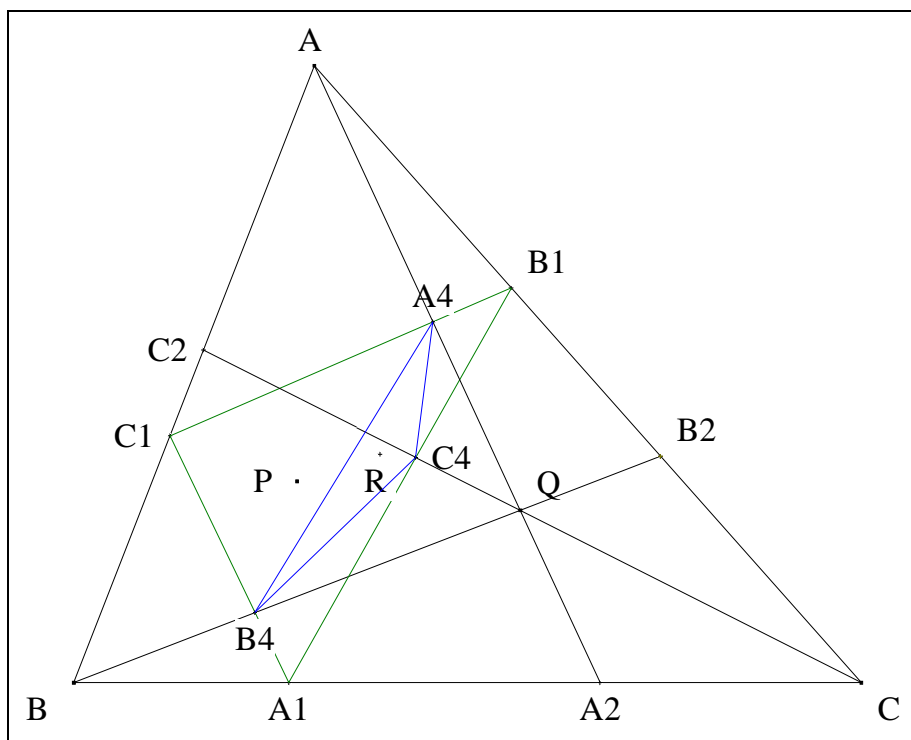


- **Conclusion :** les neuf droites (A_1A_4) , (B_1B_4) , (C_1C_4) , (A_2A_3) , (B_2B_3) , (C_2C_3) , $(AbBa)$, $(BcCb)$ et $(CaAc)$ sont concourantes en R.

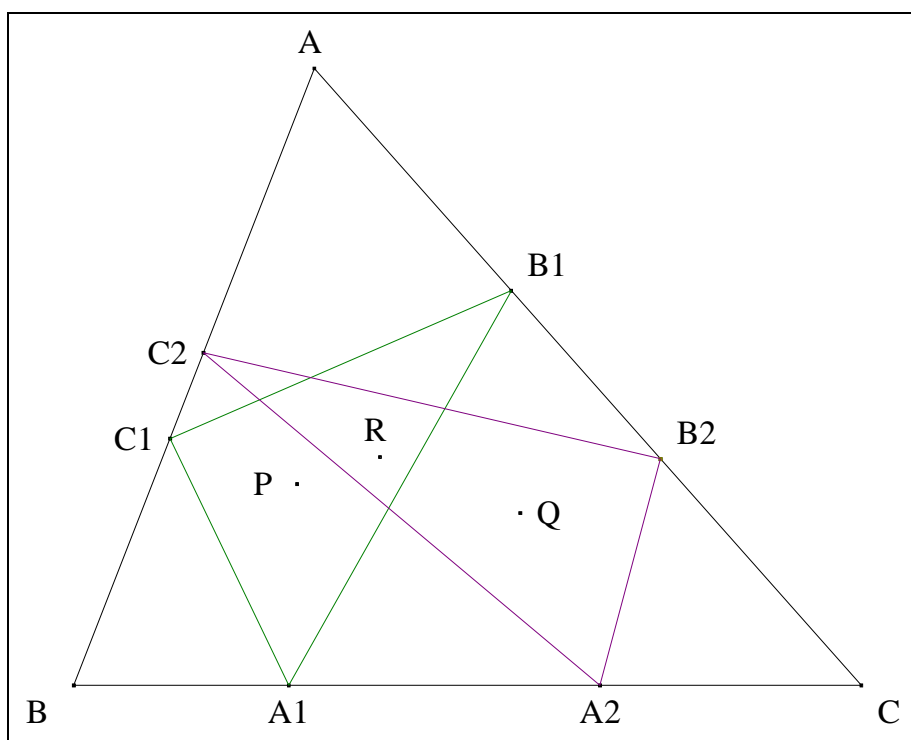
(4) Définitions



$A_3B_3C_3$ est le P-cross-triangle de P et Q relativement à ABC.



$A_4B_4C_4$ est le Q-cross-triangle de P et Q relativement à ABC.



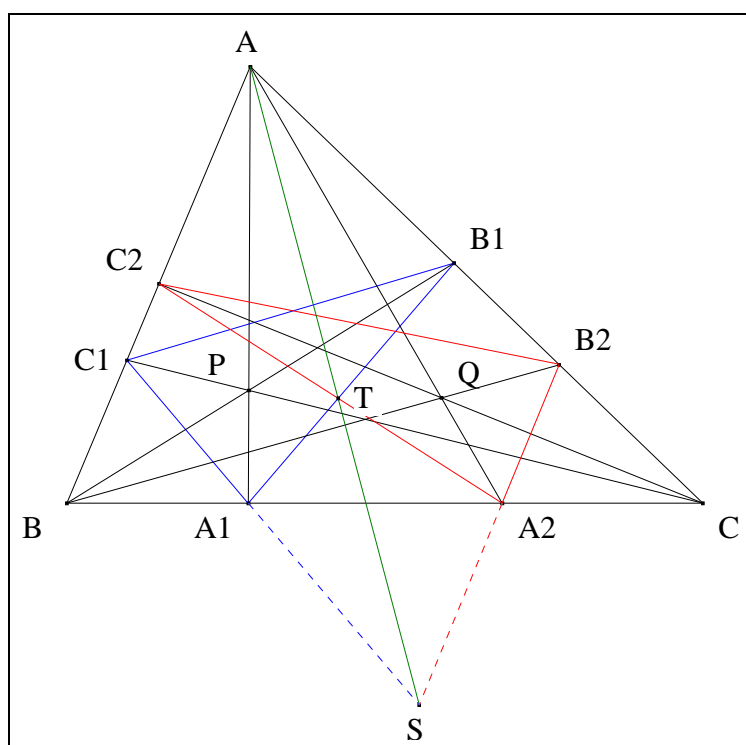
R est le cross-cevian point de P et Q relativement à ABC.
 Pour ETC, Q est le R-Ceva conjugate of P
 P est le R-Ceva conjugate of Q.

III. LE TRIANGLE R-ANTICÉVIEN

1. Trois points alignés

VISION

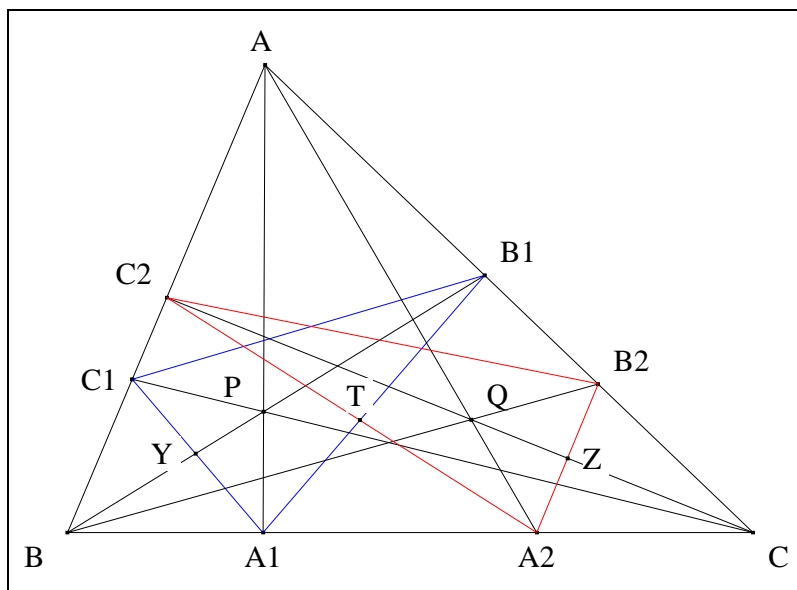
Figure :



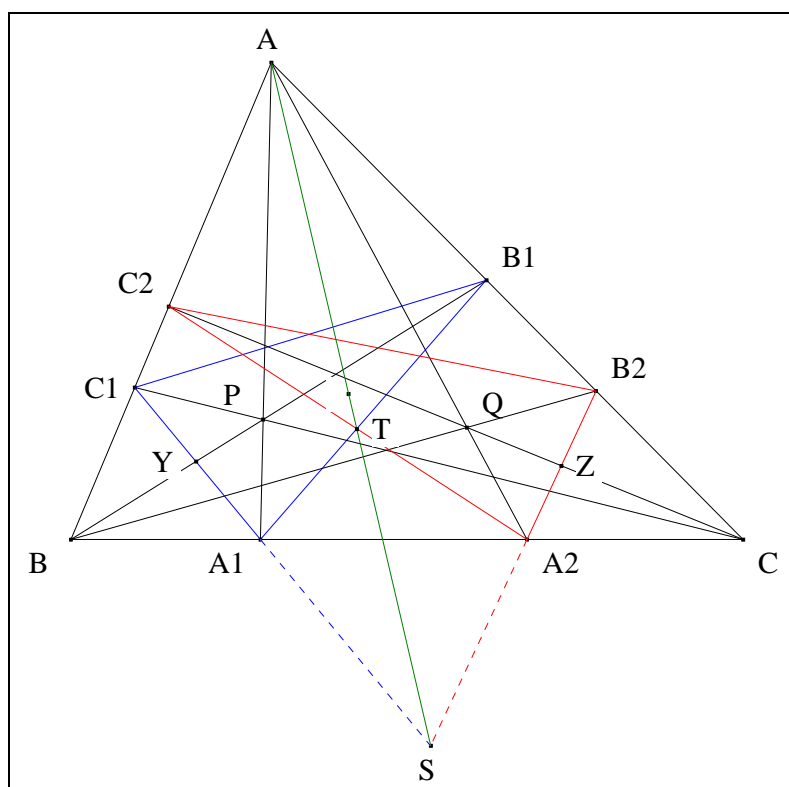
Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points,
A1B1C1 le triangle P-cévien de ABC,
A2B2C2 le triangle Q-cévien de ABC
et S, T les points d'intersection resp. de (A1C1) et (A2B2), de (A1B1) et (A2C2).

Donné : A, S et T sont alignés.

VISUALISATION



- Notons Y, Z le point d'intersection resp. de (BP) et (A_1C_1) , de (CQ) et (A_2B_2) .
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 3) appliqué au
 - (1) quadrilatère complet PC_1BA_1 , la quaterne (B, P, Y, B_1) est harmonique.
 - (2) quadrilatère complet QA_2CB_2 , la quaterne (C, Q, Z, C_2) est harmonique.
- **Conclusion partielle** : les pinceaux $(A_1; B, P, Y, B_1)$ et $(A_2; C, Q, Z, C_2)$ sont harmoniques.

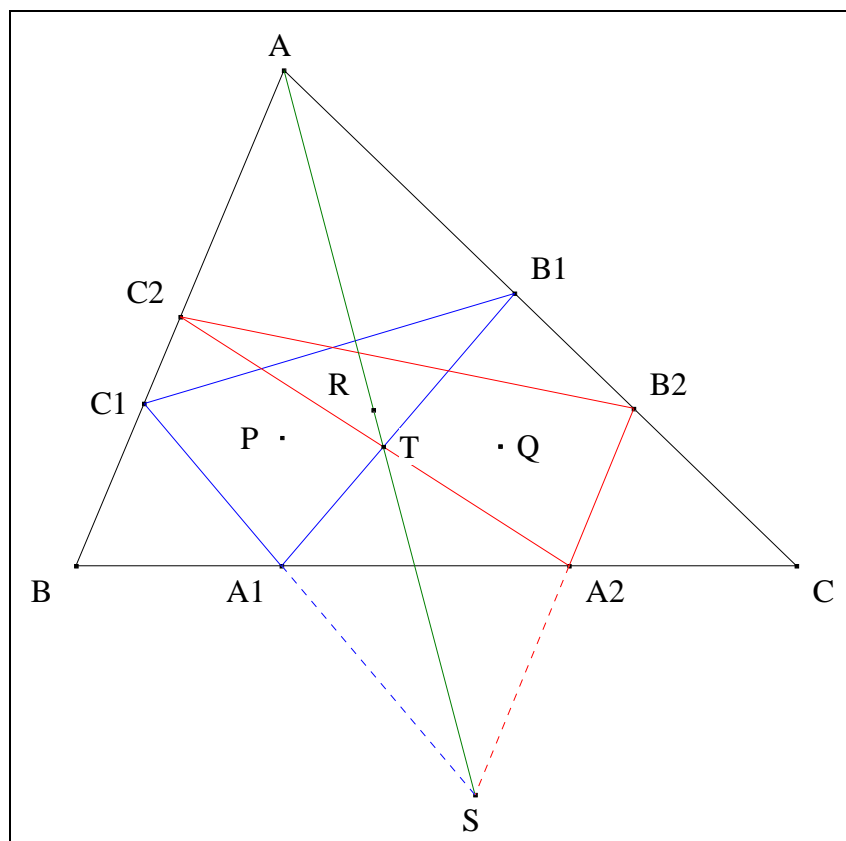


- **Scolie** : les deux pinceaux harmoniques précédents ont le rayon (BC) en commun.
- **Conclusion** : A, S et T sont alignés.

2. La droite (AST) passe par le cross-point R

VISION

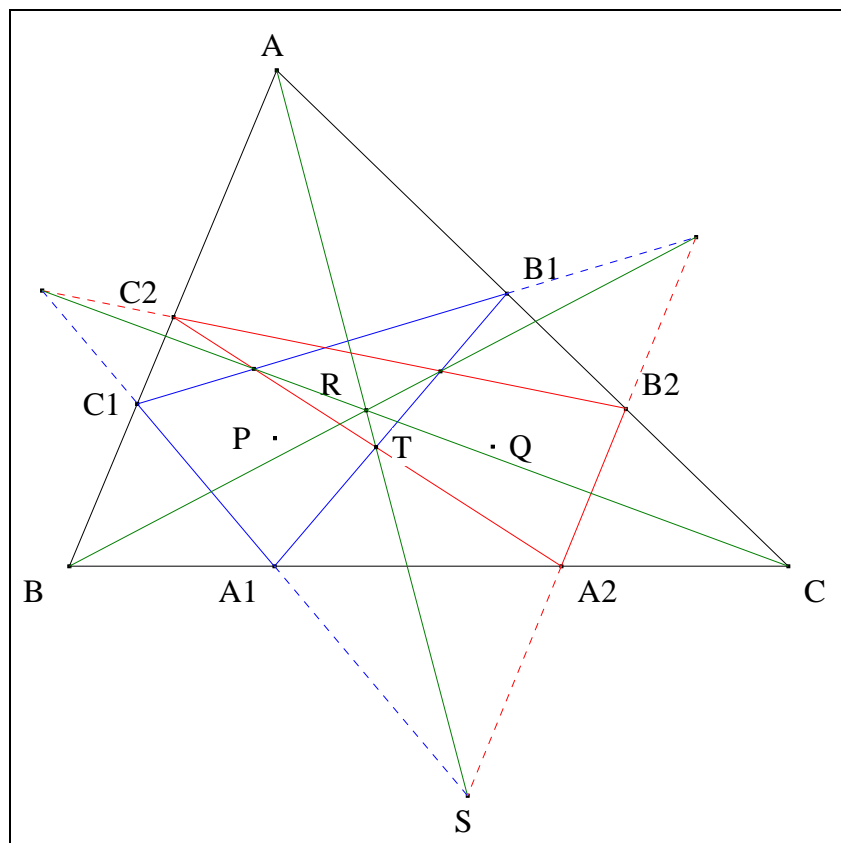
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points,
A1B1C1 le triangle P-cévien de ABC,
A2B2C2 le triangle Q-cévien de ABC
S, T les points d'intersection de (A1C1) et (A2B2), de (A1B1) et (A2C2),
et R le cross-point de P et Q relativement à ABC.

Donné : (AST) passe par R.

VISUALISATION



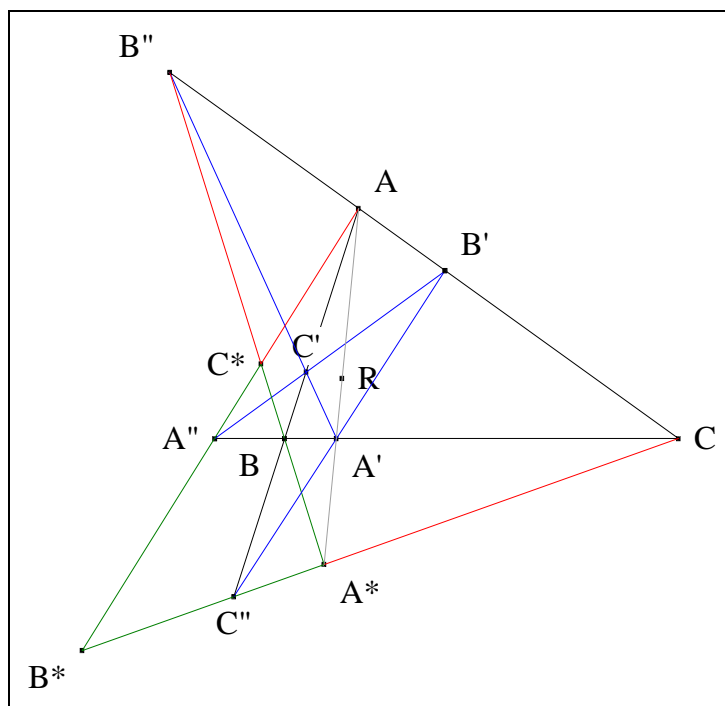
3. Le triangle R-anticévien⁵

VISION

Figure :

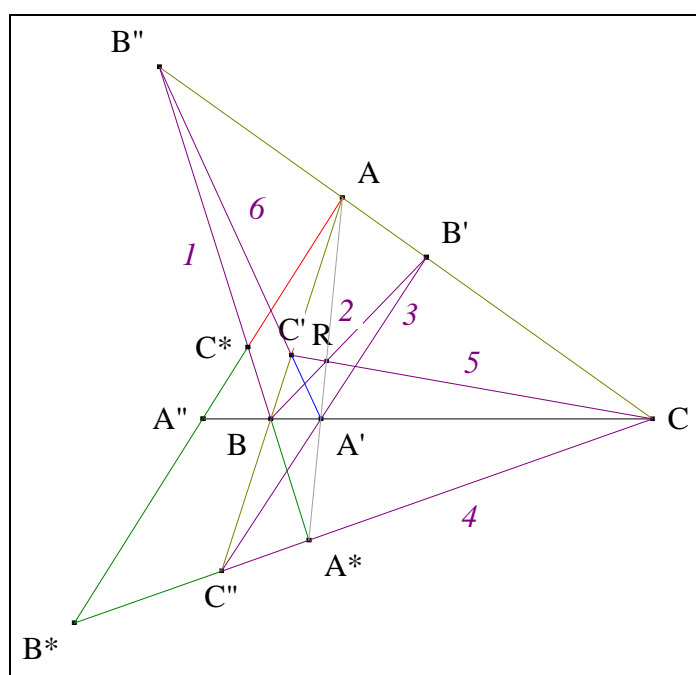
⁵

Lemoine E., *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Blois (1884).



- Traits :**
- | | |
|---------------|--|
| ABC | un triangle, |
| R | un point, |
| A'B'C' | le triangle R-cévien de ABC, |
| A'', B'', C'' | les points d'intersection resp. de (B'C') et (BC), de (C'A') et (CA), de (A'B') et (AB), |
| et A*, B*, C* | les points d'intersection resp. de (BB'') et (CC''), de (CC'') et (AA''), de (AA'') et (BB''). |
- Donné :** A, R, A' et A* sont alignés.

VISUALISATION



- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 4)

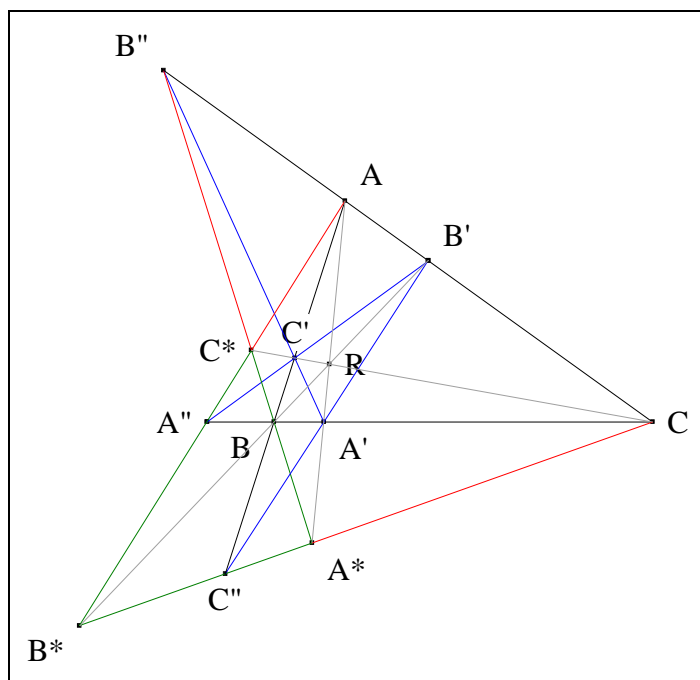
(A^*RA') est la pappusienne associée à l'hexagone de Pappus $B''BB'C''CC'B''$; par hypothèse,

A, R et A' sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, A, R, A' et A* sont alignés.

Note historique : ce résultat a été approché par J. J. A. Mathieu⁶ en 1865.

- Scolies :**
- (1) d'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère", la quaterne (A, A', P, A^*) est harmonique.
 - (2) Deux autres alignements



- Mutatis mutandis, nous montrerions que les points B, R, B' et B* sont alignés
les points C, R, C' et C* sont alignés.

- (3) $A^*B^*C^*$ est "le triangle R-anticévien de ABC"

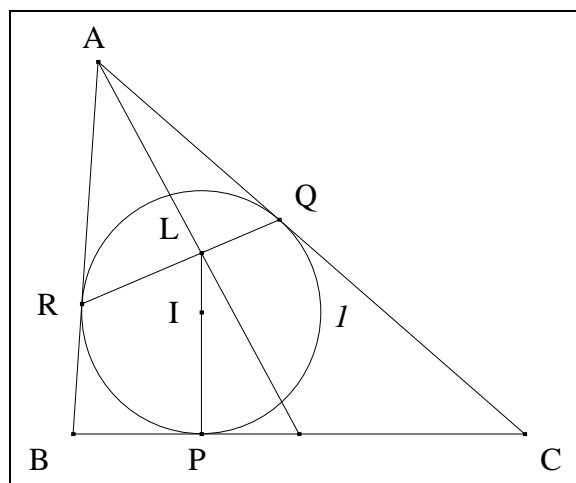
IV. QUATRE EXEMPLES

1. Le cross-cevian point de G et Ge

VISION

Figure :

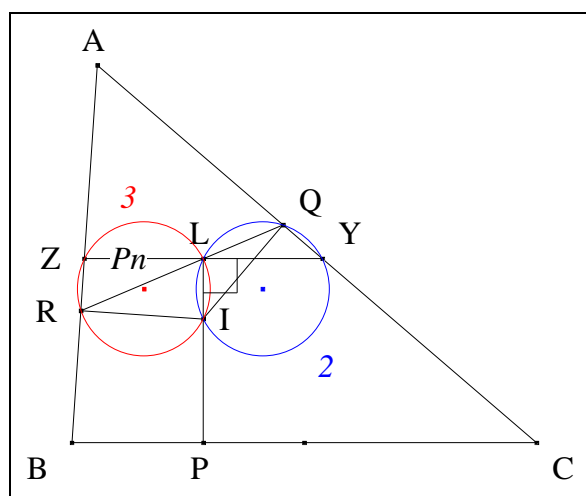
⁶ Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 399.



Traits : ABC un triangle,
 I le cercle inscrit dans ABC,
 I le centre de I ,
P, Q, R les points de contact de I resp. avec (BC), (CA), (AB),
et L le point d'intersection de (QR) et (PI).

Donné : (AL) est la A-médiane de ABC.⁷

VISUALISATION



- Notons P_n la perpendiculaire à (PI) en L
et Y, Z les points d'intersection de P_n resp. avec (CA), (AB).
- Par hypothèses, $(IQ) \perp (CA)$ et $(IR) \perp (AB)$;
d'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", I, Y, Q et L sont cocycliques
I, L, Z et R sont cocycliques.
- Notons 2 le cercle de diamètre [IY]
et 3 le cercle de diamètre [IZ].
- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe 5) appliqué à 2 et 3,
le triangle IQR étant I-isocèle, le triangle IYZ est I-isocèle.

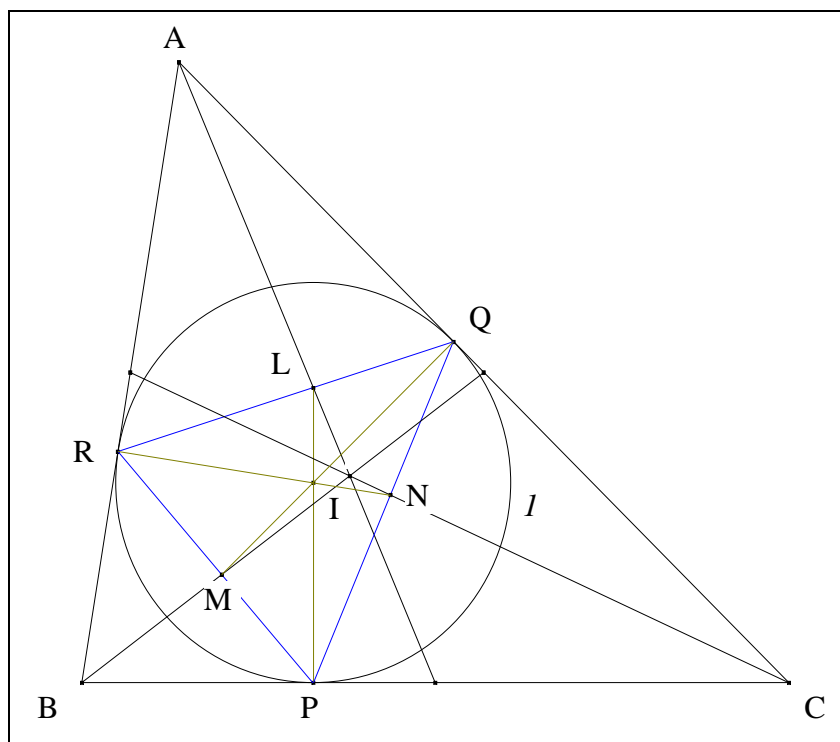
⁷

Papelier G., Pôles et Polaires dans le cercle, *Exercices de Géométrie Moderne*, Paris (1927), Gabay Reprint (1996), n° 39, p. 26.

- La I-hauteur (IL) de IYZ étant aussi médiane, L est le milieu de $[YZ]$.
- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" appliqué au trapèze BCYZ, (AL) est la A-médiane de ABC.

Commentaire : ce résultat a été repropoé par Igor Federovitch Sharygin⁸.

Scolies : (1) vision triangulaire

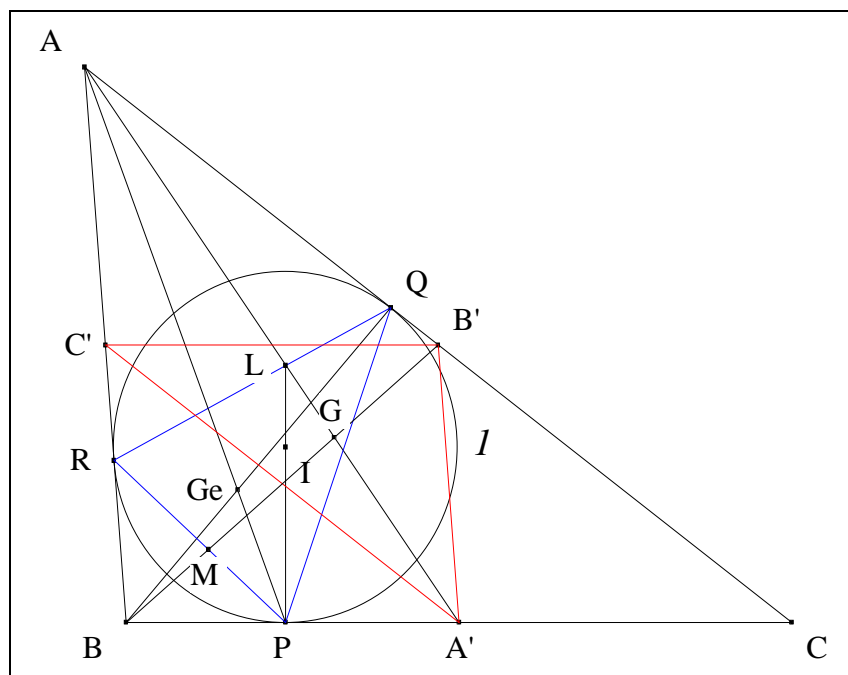


- Notons M, N les points d'intersection resp. de (RP) et (QI) , de (PQ) et (RI) .
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (BM) est la B-médiane de ABC
 (CN) est la C-médiane de ABC.

(2) Une autre nature de I

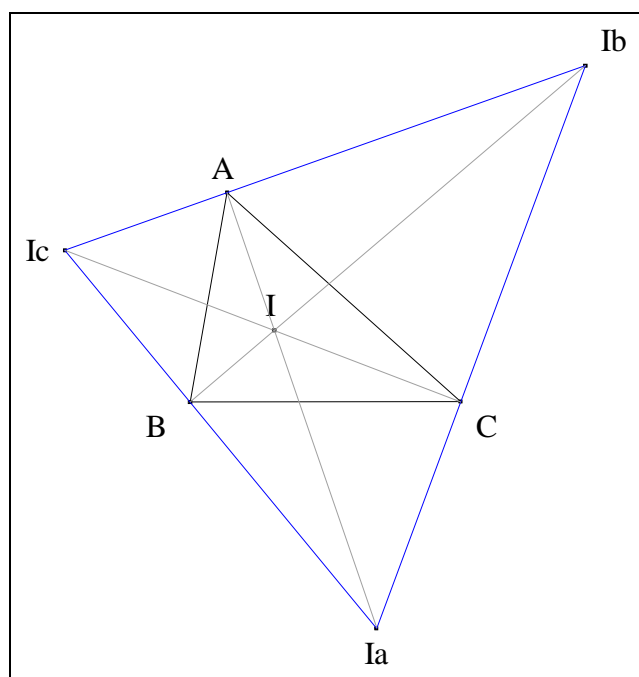
⁸

Sharygin, problème II 178, *Problemas de Geometria*, Mir, Moscou (1986) 104.



- Notons $A'B'C'$ le triangle médian de ABC ,
 G le point médian de ABC
 et Ge le point de Gergonne de ABC .
- Nous savons que $A'B'C'$ est le triangle G -cévien de ABC
 PQR est le triangle Ge -cévien de ABC .
- **Conclusion :** d'après II. The cross-cevian point of P and Q ,
 I est le cross-cevian point de G et Ge relativement à ABC .

(3) Le triangle I -anticévien de ABC



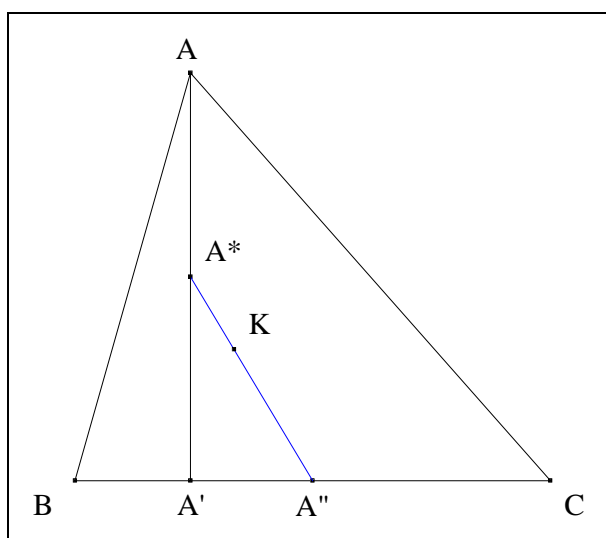
- Notons $IaIbIc$ le triangle excentral de ABC .

- D'après L'Huilier, A, I, I_a sont alignés
 B, I, I_b sont alignés
 C, I, I_c sont alignés.
- **Conclusion :** $I_a I_b I_c$ est le triangle I-anticévien de ABC.

2. Le cross-cevian point de G et H

VISION

Figure :

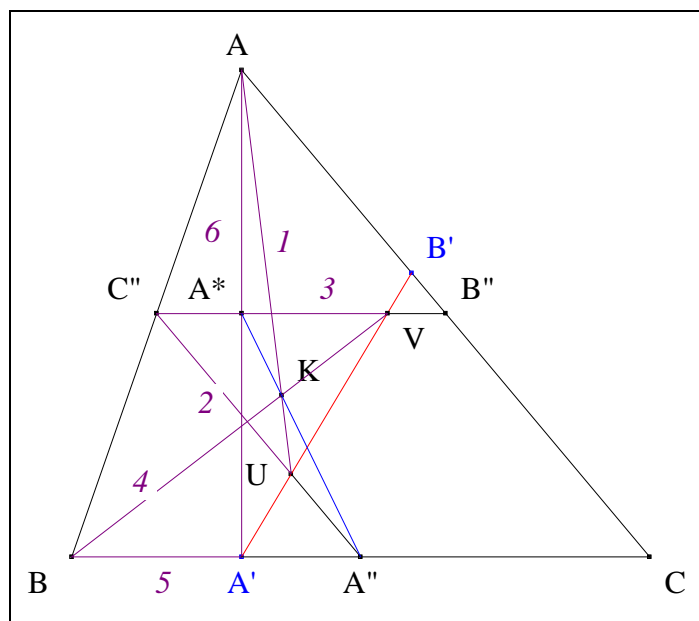


Traits : ABC un triangle,
 A' le pied de la A-hauteur de ABC,
 A^* le milieu de $[AA']$,
 A'' le milieu de $[BC]$
 et K le point de Lemoine de ABC.

Donné : $(A''A^*)$ passe par K.⁹

VISUALISATION

⁹ Schloemilch O. (1823-1901) 1862.



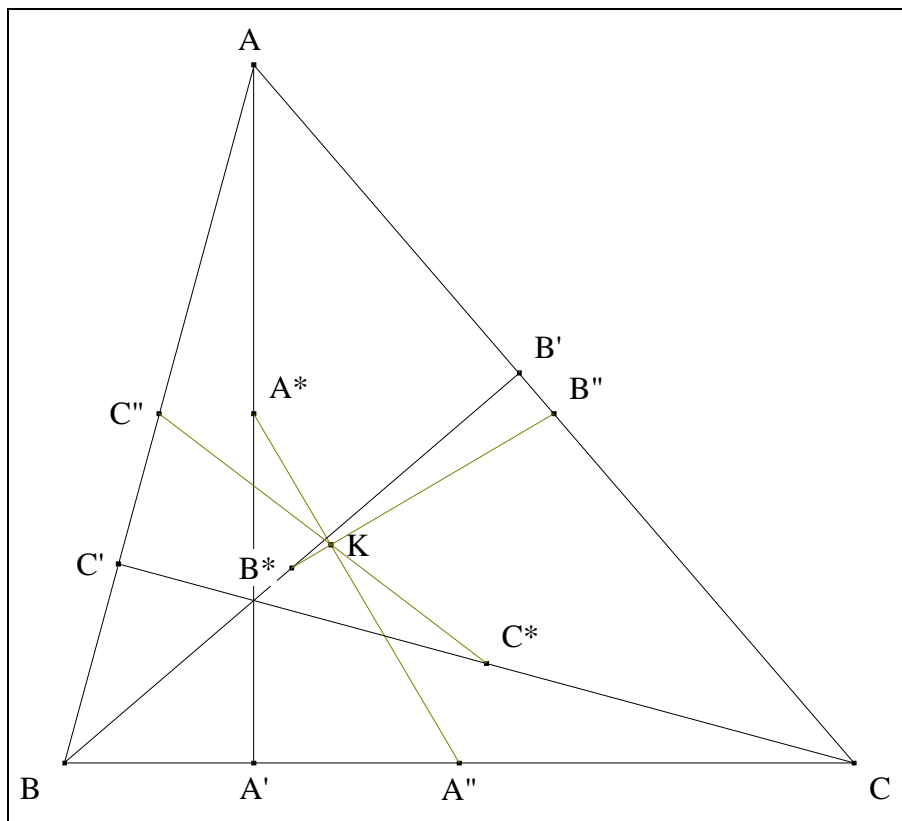
- Notons B'', C'' les milieux resp. de $[CA], [AB]$,
 A', B' les pieds resp. des A, B-hauteurs de ABC
 et U, V les points d'intersection de $(A''B'')$ et $(A'B')$, de $(B''C'')$ et $(A'B')$.
- D'après Ayme "Another unlikely concurrence"¹⁰, (AU) passe par K
 (BV) passe par K.
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 4),
 $(KA''A^*)$ est la pascale de l'hexagone sectoriel AUC''VBA'A.
- **Conclusion :** $(A''A^*)$ passe par K.

Scolies :

- (1) $(A''A^*)$ est la A-droite de Schwatt
- (2) Vision triangulaire

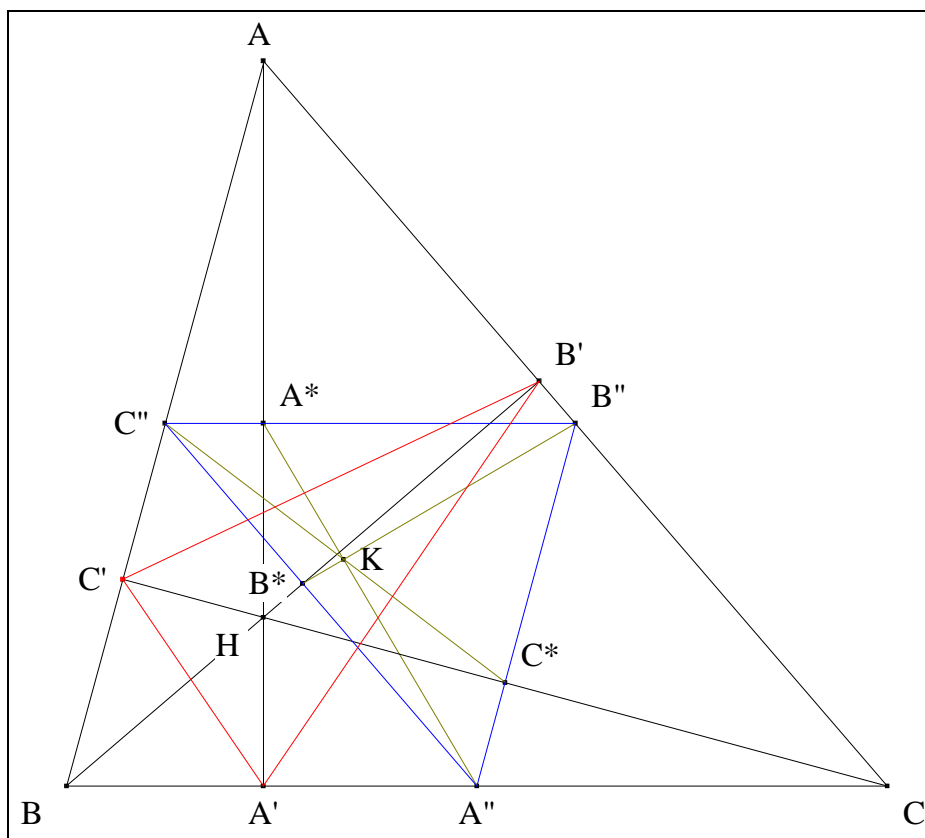
¹⁰

Ayme J.-L., Another unlikely concurrence, G.G.G. vol. 1 (2007).



- Notons B^*, C^*, A^* les milieux resp. de $[BB'], [CC']$.
- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que $(B''B^*)$ passe par K
 $(C''C^*)$ passe par K.

(3) Une autre nature de K



- Notons G le point médian de ABC
et H l'orthocentre de ABC .
- Nous savons que $A''B''C''$ est le triangle G -cévien de ABC
 $A'B'C'$ est le triangle H -cévien de ABC .
- **Conclusion :** d'après II. The cross-cevian point of P and Q ,
 K est le cross-cevian point de G et H relativement à ABC .

Énoncé traditionnel : la droite qui joint le milieu d'un côté au milieu de la hauteur correspondante d'un triangle passe par le point de Lemoine de ce triangle.

Note historique : dans les *Nouvelles Annales* de 1887, Ernesto Césaro¹¹ attribue ce résultat à Oscar Scoemilch qui serait tombé par hasard sur cette situation. Ce résultat a été republié en 1873 ou 1874 comme l'indique Maurice d'Ocagne et Émile Vigarié¹² dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires* de 1886. Émile Lemoine¹³ proposera à nouveau ce résultat dans les *Nouvelles Annales* de 1884. Enfin, Isaac Joachim Schwatt¹⁴ publiera un article concernant cette situation dans l'*Educational Times* de 1897.

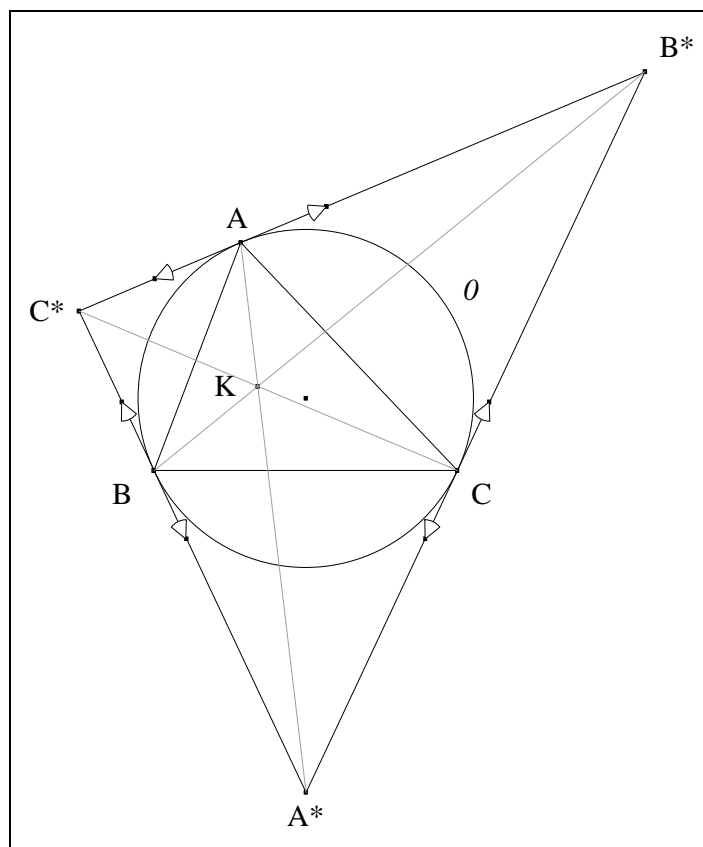
(4) Le triangle K -anticévien de ABC

¹¹ Césaro E., *Nouvelles Annales* (1887) 223.

¹² Ocagne (d') M., Vigarié E., Note sur la symédiane, *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1886) 180.

¹³ Lemoine E., *Nouvelles Annales* (1884) 27.

¹⁴ Schwatt I. J., *Educational Times* 67 (1897).



- Notons $A^*B^*C^*$ le triangle tangential de ABC.
- D'après Chasles¹⁵, $(AA^*), (BB^*), (CC^*)$ sont resp. les A, B, C-symédiannes de ABC.
- D'après Lemoine¹⁶, $(AA^*), (BB^*), (CC^*)$ sont concourantes en K.
- **Conclusion :** $A^*B^*C^*$ est le triangle K-anticévien de ABC.

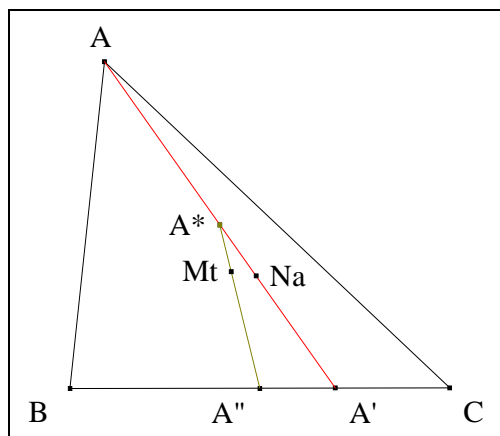
3. Le cross-cevian point de G et Na

VISION

Figure :

¹⁵ Chasles M., (1816).

¹⁶ Lemoine E., Sur un point remarquable du triangle, congrès de Lyon (1873).



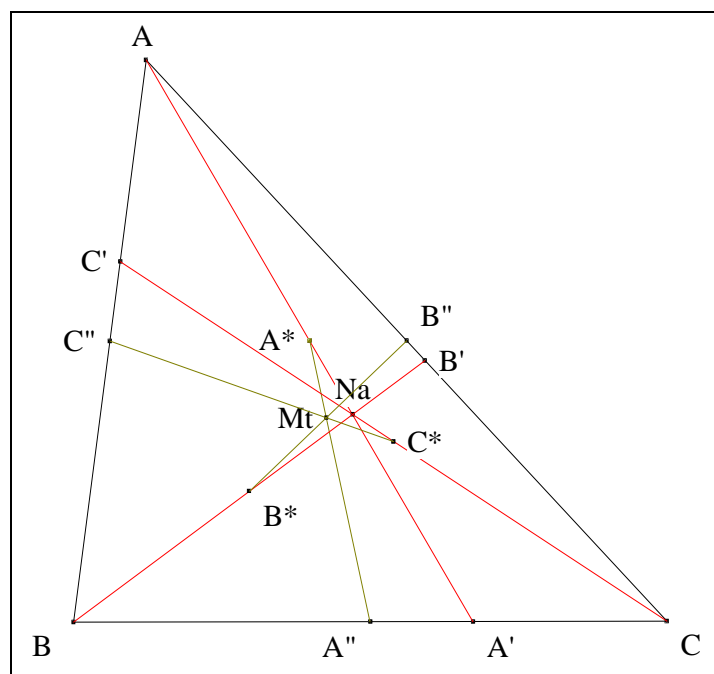
Traits : ABC un triangle,
Na le point de Nagel de ABC,
A' le pied de la A-nageliennne de ABC,
A* le milieu de $[AA']$,
A'' le milieu de $[BC]$
et Mt le Mittenpunkt de ABC.

Donné : $(A''A^*)$ passe par Mt.

VISUALISATION

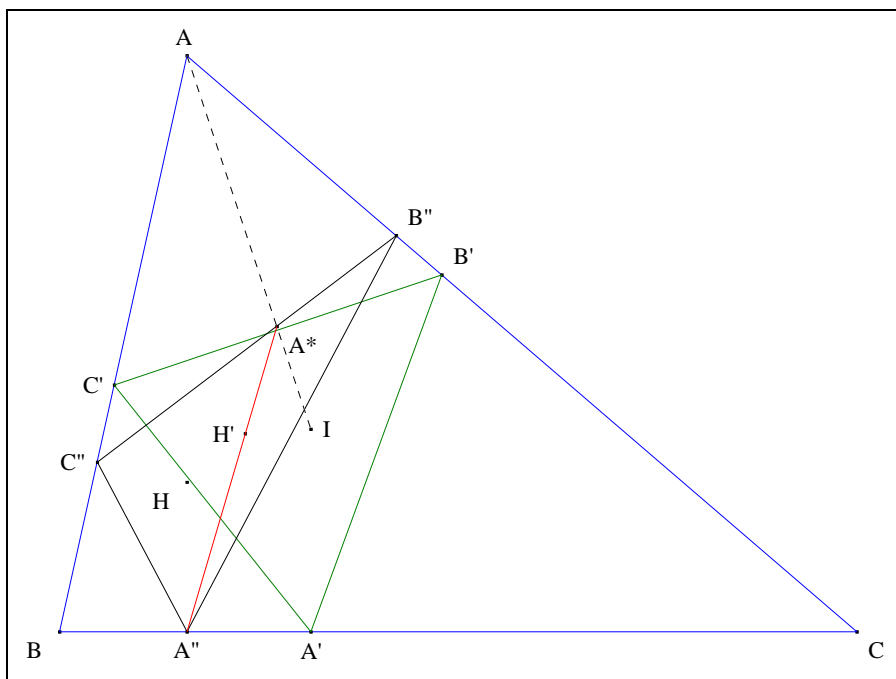
- **Conclusion :** d'après "Le deuxième théorème de von Nagel", $(A''A^*)$ passe par Mt.

Scolies : (1) vision triangulaire



- Notons
et B', C' les pieds resp. des B, C-nageliennes de ABC,
B*, C* les milieux resp. de $[BB']$, $[CC']$.

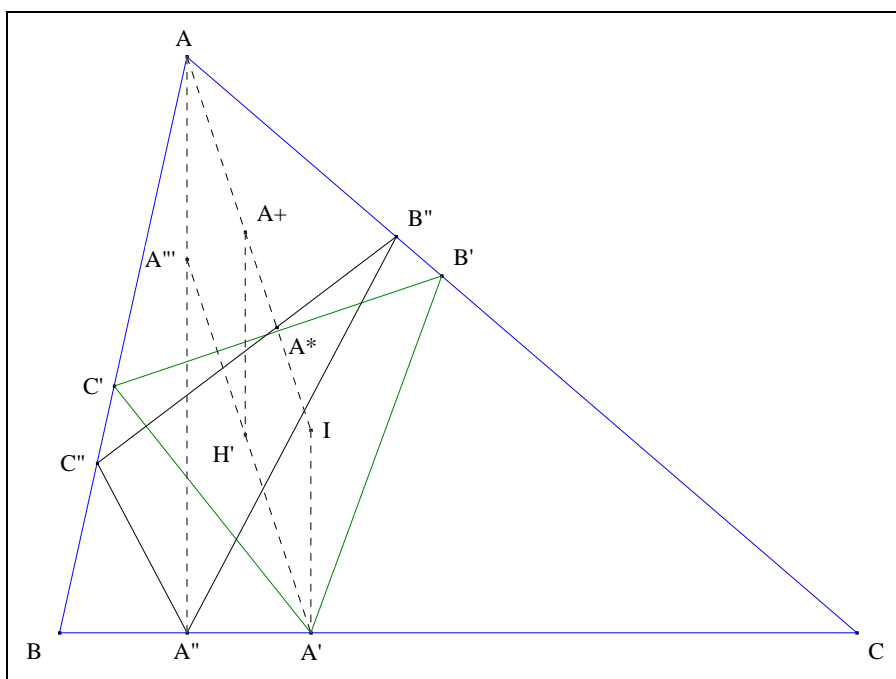
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que $(B''B^*)$ passe par Mt



Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC,
 A'B'C' le triangle de contact de ABC,
 H l'orthocentre de ABC,
 A''B''C'' le triangle orthique de ABC,
 A* le point d'intersection de (AI) et (B''C''),
 et H' l'orthocentre de A'B'C'.

Donné : (A''A*) passe par H'.¹⁷

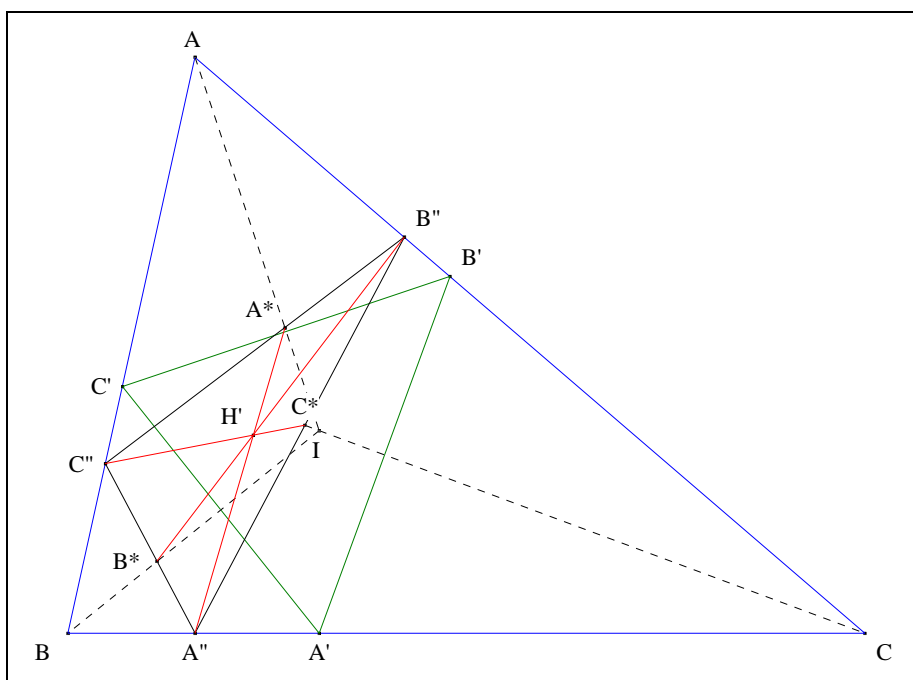
VISUALISATION



¹⁷

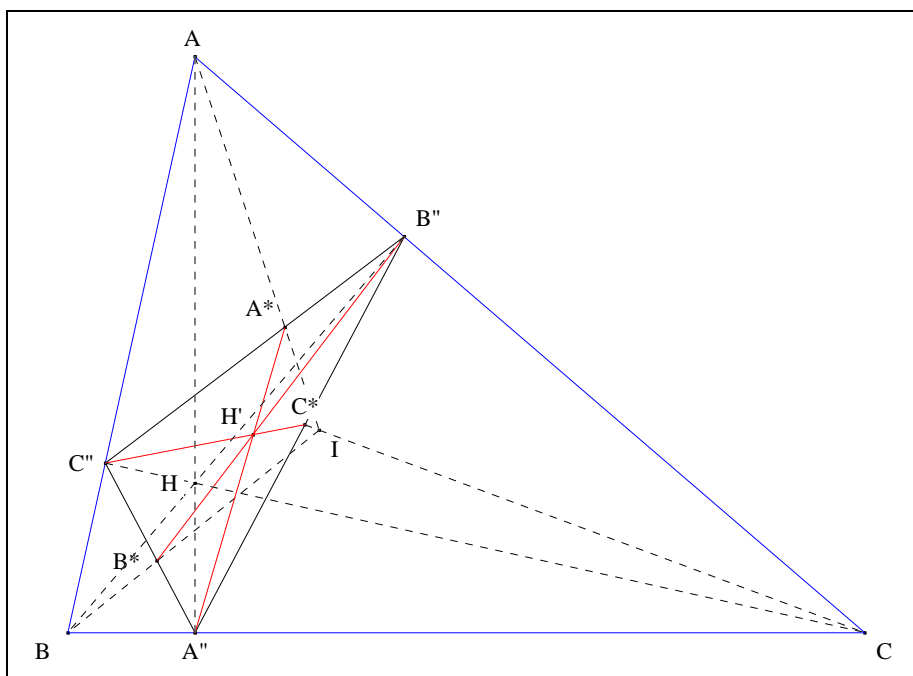
Ayme J.-L., Orthocenter of the contact triangle, *Mathlinks* du 16/02/2009 ;
<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=258646>.

Scolies : (1) vision triangulaire



- Notons B^* le point d'intersection de (BI) et $(C''A'')$
et C^* le point d'intersection de (CI) et $(A''B'')$.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que $(B''B^*)$ passe par H'
 $(C''C^*)$ passe par H' .

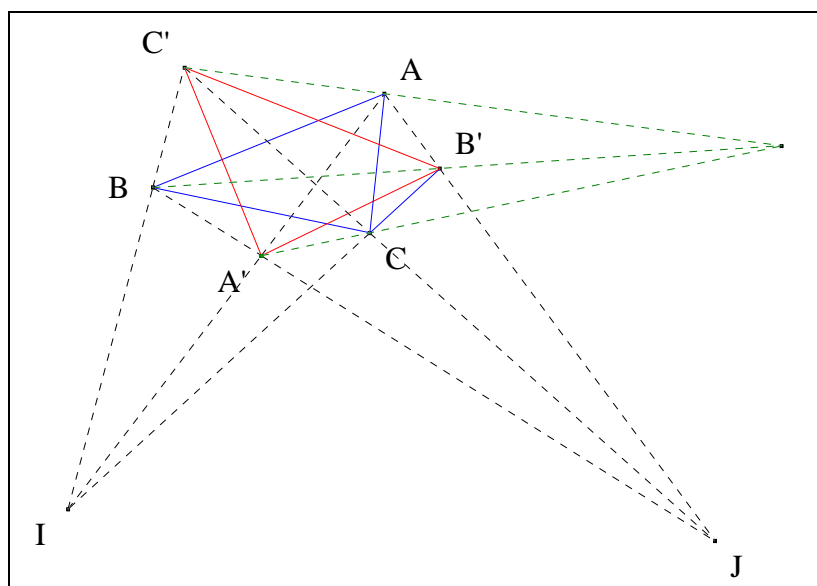
(2) Une autre nature de H'



- **Conclusion :** d'après II. The cross-cevian point of P and Q,
 H' est le cross-cevian point de H et I relativement à ABC.

ANNEXE

1. Le théorème de la double perspective



Traits : $ABC, A'B'C'$ deux triangles tels que ABC et $A'C'B'$ soient en perspective de centre I
 ABC et $B'A'C'$ soient en perspective de centre J.

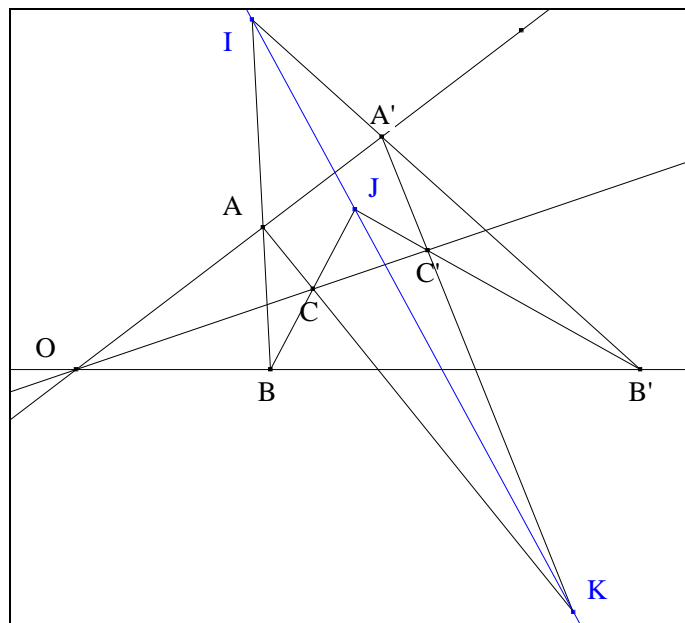
Donné : ABC et $C'B'A'$ sont en perspective.

Scolie : formulation d'une règle

	$A \ B \ C$			
	$A' \ C' \ B'$			en perspective
et	$A \ B \ C$		d'où	$A \ B \ C$
	$B' \ A' \ C'$			$C' \ B' \ A'$
				en perspective.

2. Le théorème des deux triangles¹⁸

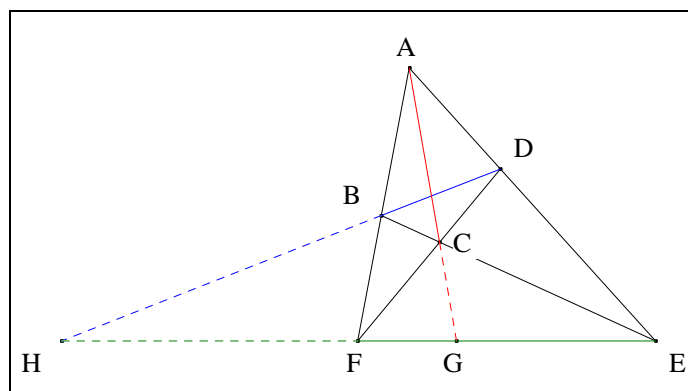
¹⁸ Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.



Traits : ABC un triangle,
 A'B'C' un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
 O le point de concours de (AA') et (BB'),
 I le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'),
 J le point d'intersection des droites (BC) et (B'C')
 et K le point d'intersection des droites (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* les points I, J et K sont alignés.

3. "Diagonales d'un quadrilatère" de Pappus¹⁹

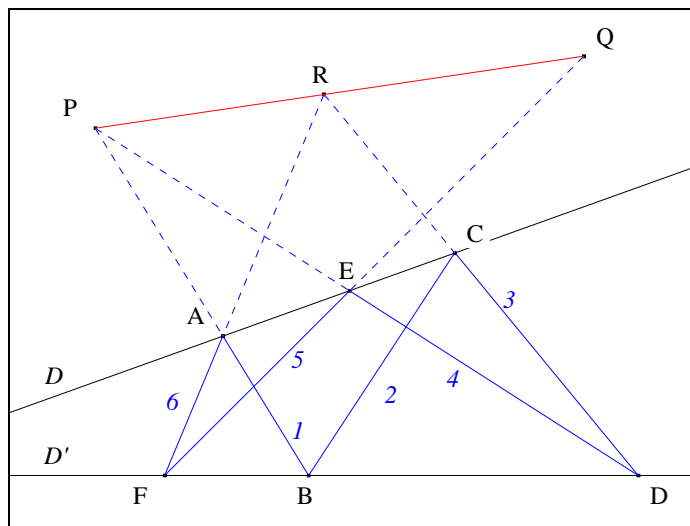


Traits : ABCD un quadrilatère,
 E, F les points d'intersection de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
 G, H le point d'intersection de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

4. "La proposition 139" de Pappus²⁰

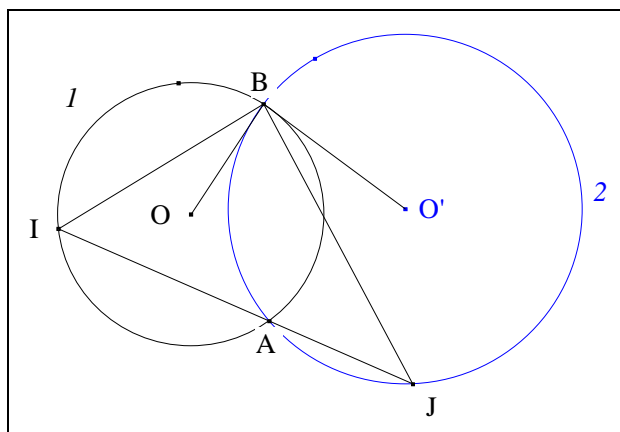
¹⁹ Pappus, *Collections*, Livre 7, proposition 131.
²⁰ Pappus, *Collections*, Livre VII.



Traits : D, D' deux droites,
 et $ABCDEF$ un hexagone de Pappus
 P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE) , de (BC) et (EF) , de (CD) et (FA) .

Donné : E est sur (AC) si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.

5. Un triangle de Möbius²¹



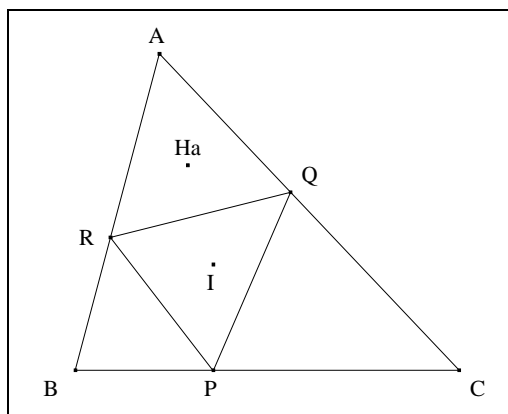
Traits : $1, 2$ deux cercles sécants,
 O, O' les centres resp. de $1, 2$,
 et A, B les points d'intersection de 1 et 2 ,
 (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne si, et seulement si, $\angle IBJ = \angle OBO'$.

6. Orthocentre d'un triangle I-annexe

²¹

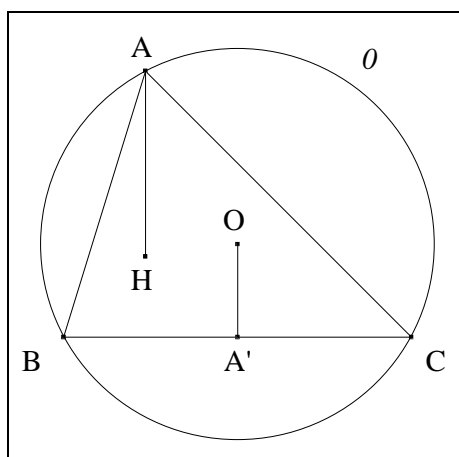
Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.



Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC,
 PQR le triangle de contact de ABC
 et Ha le symétrique de I par rapport à (QR).

Donné : Ha est l'orthocentre du triangle I-annexe ARQ.

7. Une relation²²



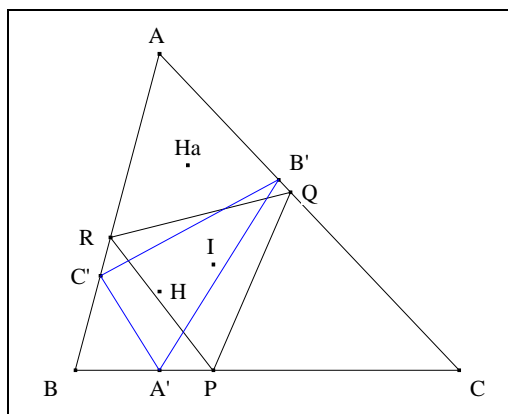
Traits : ABC un triangle,
 H l'orthocentre de ABC
 θ le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de θ
 et A' le milieu de [BC],

Donné : $AH = 2.OA'$.

8. Centre d'un triangle H-annexe

²²

Carnot L., *Géométrie de position* (1803).



Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC ,
 PQR le triangle de contact de ABC ,
 Ha le symétrique de I par rapport à (QR) ,
 H l'orthocentre de ABC
 et $A'B'C'$ le triangle orthique de ABC

Donné : Ha est le centre du triangle H -annexe $AC'B'$.