LES DROITES

DE

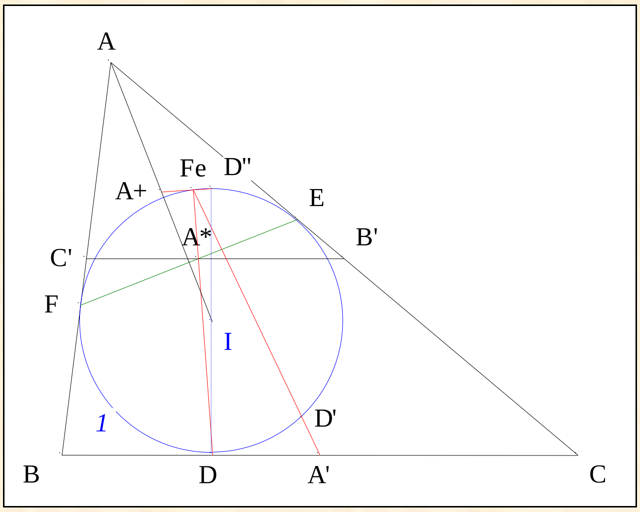
HAMILTON, CASEY, MANNHEIM ET FONTENÉ

UNE FRESQUE HISTORIQUE

†

Tout cela, je vous l'ai dit en figure.
L'heure vient
où je ne vous parlerai plus en figures...[1]

Jean-Louis AYME [2]



Résumé. L'auteur présente les droites d'Hamilton, Mannheim et de Fontené passant par le point de Feuerbach. Une fresque historique accompagne la droite d'Hamilton dont la preuve "élémentaire" de Gérono est "synthétisée" par l'auteur.
Des commentaires, des notes historiques, des archives et un lexique (français-anglais) accompagnent l'article.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents the lines of Hamilton, Mannheim and Fontene through the Feuerbach point. A historical epic accompanies the Hamilton's whose proof of Gerono is improved by the author.

---

[1] Bible, St. Jean **16**, 25
[2] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/05/2013

Comments, historical notes, archives and a glossary (French-English) comes with the article.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

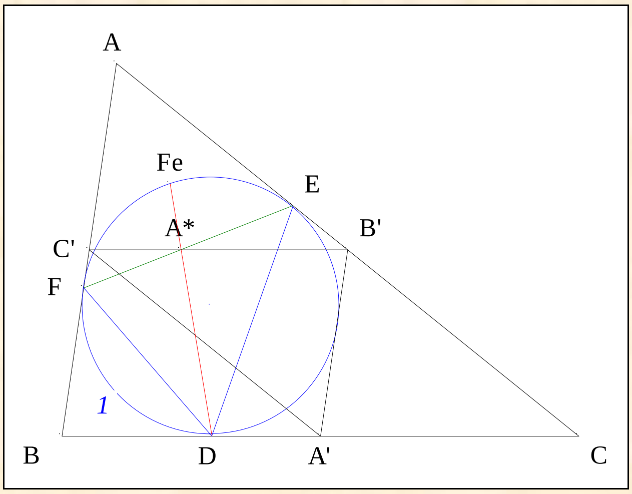
Sommaire

A. LA DROITE DE HAMILTON

1. Présentation

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	A*	le point d'intersection de (B'C') et (EF),
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC.

Donné : D, A* et Fe sont alignés. [3]

Note historique : ce résultat obtenu analytiquement par W. R. Hamilton lui a permis à d'en déduire une preuve du théorème de Feuerbach.

Scolie : (DA*) est "la A-droite d'Hamilton de ABC".

[3] Salmon G., A treatise on conic sections (1848) 302,
University of Michigab Historical Math Collection ; http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?page=browse&c=umhistmath

2. Une courte biographie de William Rowan Hamilton

[4]

William Rowan Hamilton est né le 4 août 1805 à Dublin (Irlande).
Fils d'Archibald Hamilton et de Sarah Hutton, le jeune William connait à 5 ans le latin, le grec et l'hébreu grâce à son oncle le Révérend James Hamilton.
Dans sa douzième année, il rencontre l'américain Zerah Colburn, un calculateur prodige qui éveillera son goût pour les mathématiques.
Tout commence l'année suivante lorsqu'il étudie l'algèbre d'Alexis Claude Clairaut. Deux années après, il découvre les œuvres d'Isaac Newton et de Pierre Simon Laplace. En 1822, il décèle même une erreur dans la Mécanique céleste de Laplace ce qui retient toute l'attention de l'astronome irlandais John Brinkley.
A l'âge de 18 ans, Hamilton entre au Trinity College.
En août 1824, il rencontre à Summerhill, Catherine Disney et tombe éperdument amoureux. La même année, il présente à l'Académie royale d'Irlande son premier papier sur les caustiques.
En février 1825, la mère de Catherine l'informe que sa fille épousera le riche ecclésiastique Barlow. Effondré, il tombe malade et envisage même de se suicider. Durant cette période d'angoisse, il se tourne vers la poésie.
En 1827, âgé de 22 ans, il devient titulaire de la chaire d'astronomie à l'Académie royale de Dublin et épouse Helen Maria Bayly.
En 1834, il a un fils nommé William Edwin. L'année suivante, il est anobli et a un second fils, Archibald Henry, puis une fille Helen Eliza Amelia.
Après les absences répétées de sa femme, Hamilton devient dépressif et commence à avoir des problèmes avec l'alcool.
En 1845, Thomas Disney visite Hamilton en compagnie de Catherine. Hamilton est bouleversé.
Catherine commence à lui écrire en 1848. La correspondance se poursuit pendant six semaines… Catherine se sentant tellement coupable avoue tout à son mari. Hamilton écrit alors à Barlow et l'informe qu'il n'entendrait plus jamais parler de lui. Cependant, Catherine rongée par le remords lui écrit encore et tente même de se suicider. Elle passe le reste de sa vie auprès sa mère et durant tout ce temps Hamilton persiste à lui écrire.
Hamilton décède d'une sévère crise de goutte le 2 septembre 1865 à Dublin, après avoir reçu la nouvelle qu'il était le premier membre étranger à être élu à la National Academy of Sciences des États-Unis d'Amérique.

3. Archives

[4] O'ConnorJ.J. and E F Robertson E.F., The MacTutor History of Mathematics archive ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hamilton.html

Ex. 1. If two conics U, V touch their common tangents A, B, C, D in the points a, b, c, d; a', b', c', d'; a conic S through the points a, b, c, and touching D at d', will have for its second chord of intersection with V, the line joining the intersections of A with bc, B with ca, C with ab.

Let V meet ab in α, β, then, by this article, since ab passes through an intersection of diagonals of $ABCD$ (Ex. 2, Art. 263), a, b ; α, β belong to a system in involution, of which the points where ab meets C and D are conjugate points. But (Art. 345) the common chords of S and V meet ab in points belonging to this same system in involution, determined by the points a, b ; α, β, in which S and V meet the line ab. If then one of the common chords be D, the other must pass through the intersection of C with ab.

Ex. 2. If in a triangle there be inscribed an ellipse touching the sides at their middle points a, b, c, and also a circle touching at the points a', b', c', and if the fourth common tangent D to the ellipse and circle touch the circle at d', then the circle described through the middle points touches the inscribed circle at d'. By Ex. 1, a conic described through a, b, c, will touch the circle at d', if it also pass through the points where the circle is met by the line joining the intersections of A, bc ; B, ca ; C, ab. But this line is in this case the line at infinity. The touching conic is therefore a circle. Sir W. R. Hamilton has thus deduced Feuerbach's theorem (p. 127) as a particular case of Ex. 1.

The point d' and the line D can be constructed without drawing the ellipse. For since the diagonals of an inscribed, and of the corresponding circumscribing quadrilateral meet in a point, the lines ab, cd ; $a'b'$, $c'd'$, and the lines joining AD, BC ; AC, BD all intersect in the same point. If then α, β, γ be the vertices of the triangle formed by the intersections of bc, $b'c'$; ca, $c'a'$; ab, $a'b'$; the lines joining $a'\alpha$, $b'\beta$, $c'\gamma$ meet in d'. In other words, the triangle $\alpha\beta\gamma$ is homologous with abc, $a'b'c'$, the centres of homology being the points d, d'. In like manner, the triangle $\alpha\beta\gamma$ is also homologous with ABC, the axis of homology being the line D.[5]

[5] Salmon G., *A treatise on conic sections* (1848) 302
University of Michigab Historical Math Collection ; http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?page=browse&c=umhistmath

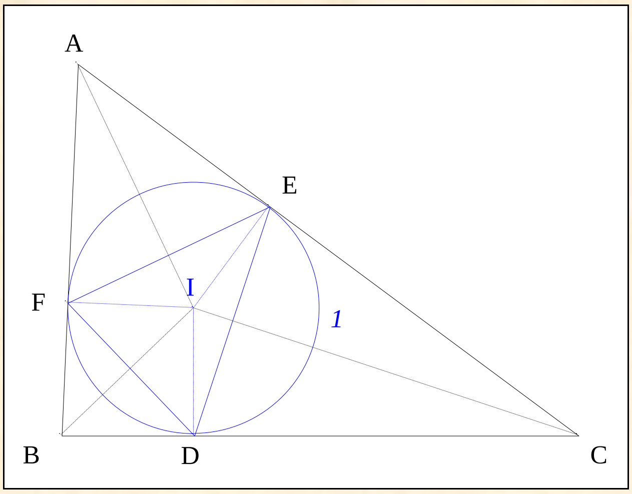
B. UNE FRESQUE HISTORIQUE

Commentaire : elle permet au lecteur de suivre au fil des siècles, l'émergence nominale des principaux résultats qui seront liés silencieusement par l'auteur dans un avers [6] évident dont l'étrange revers pourrait étonner des géomètres.

1. VIe siècle a. J.-C. : l'École pythagorienne

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le point de concours des A, B, C-bissectrices intérieures de ABC,
DEF le triangle I-pédal de ABC
et *1* le cercle circonscrit à DEF.

Donné : *1* est tangent à [BC], [CA], [AB] resp. en D, E, F.

Scolie : I est le centre de *1*.

Terminologie : **(1)** *1* est "le cercle inscrit à ABC"

(2) I est "le centre de ABC" et est répertorié sous X_1 chez ETC [7]

(3) DEF est "le triangle de contact de ABC".

Note historique : selon le géomètre américain Nathan Altshiller-Court [8],

---

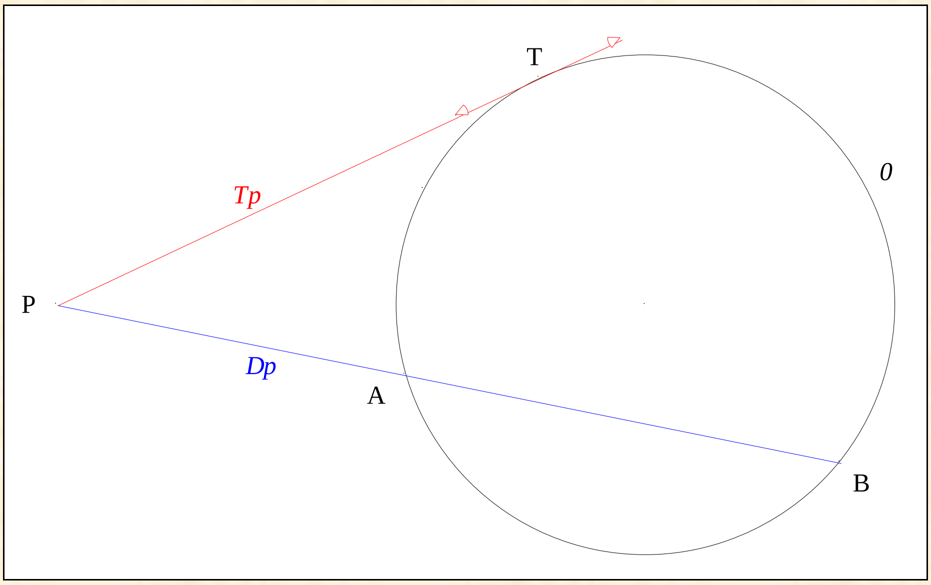
6 Figure, côté face en numismatique
7 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
8 Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936)

le centre d'un triangle défini comme point de concours des bissectrices intérieures, était connu de l'École pythagorienne i.e. 600 ans environ avant J.-C..

2. IIIe siècle a. J.-C. : Euclide d'Alexandrie

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,
P un point extérieur à *0*,
Dp une sécante à *0*,
A, B les points d'intersection de *Dp* avec *0*,
Tp une tangente à *0* issue de P
et T le point de contact de *Tp* avec *0*.

Donné : $PT^2 = PA.PB$. [9]

Note historique : ce résultat sera redécouvert par Jakob Steiner [10] en 1826 en définissant la puissance d'un point par rapport à un cercle.

3. IIe siècle a. J.-C. : Archimède de Syracuse

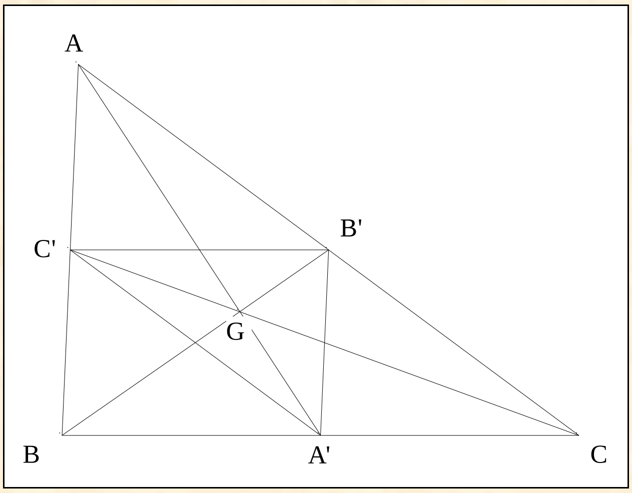
VISION

Figure :

---

[9] Euclide d'Alexandrie (vers 325 – vers 265 av J.-C.), Éléments, Livre **III**, propositions **35-37**

[10] Steiner J. (1796-1863), Einige geometrische Betrachrungen (1826) ; http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABN3237.0001.001?view=toc



Traits : ABC un triangle
et A', B', C' les milieux resp. de [BC], [CA], [AB].

Donnés : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.[11]

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté G et répertorié sous X_2 chez ETC, est "le point médian de ABC"

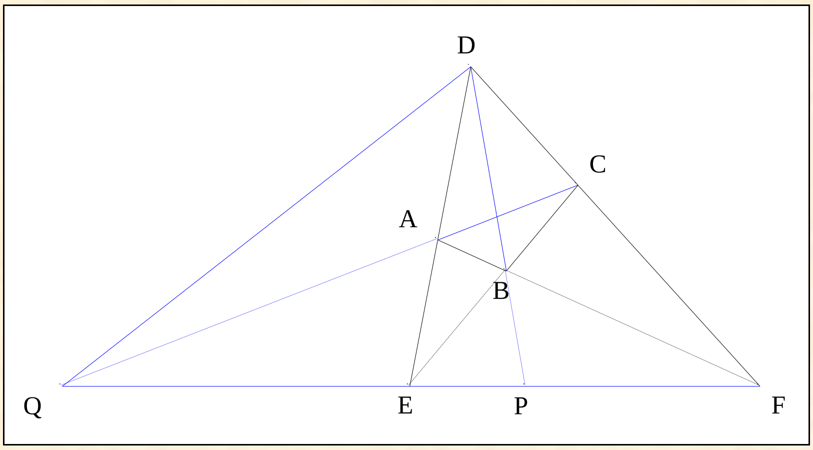
(2) A'B'C' est "le triangle médian de ABC" ou encore "G-cévien de ABC".

3. Vers 340 : Pappus d'Alexandrie

* La proposition **131** du Livre **VII** *

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), (AB) et (CD),

[11] Archimède (vers 287 av., *Sobre el equilibrio de los platos*, Livre **I**, proposition **13**

et P, Q les points d'intersection de (EF) resp. avec (BD), (AC).

Donné : le quaterne (E, F, P, Q) est harmonique.[12]

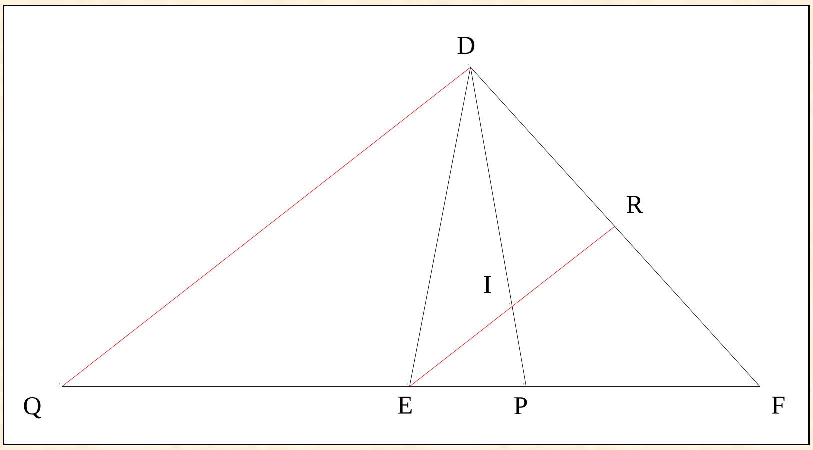
Énoncé traditionnel :

chacune des trois diagonales d'un quadrilatère complet
est divisée harmoniquement par
les deux autres.

* La proposition **132** du Livre **VII** *

VISION

Figure :



Traits : (E, F, P, Q) un quaterne harmonique,
D un point,
R le point d'intersection de la parallèle à (DQ) passant par E avec (DF)
et I le point d'intersection de (DP) et (ER).

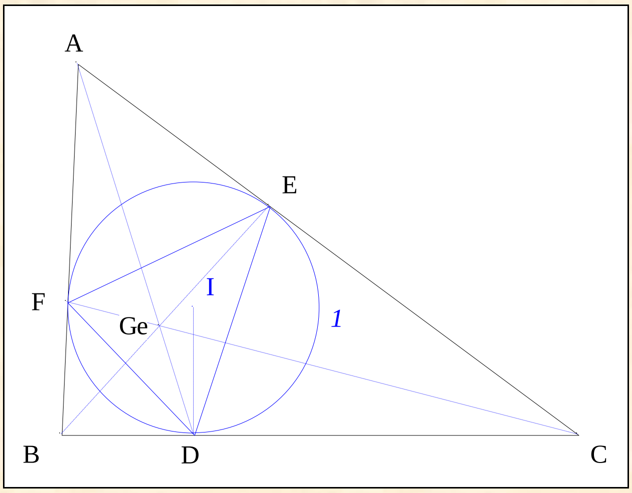
Donné : I est le milieu de [ER].[13]

4. Année 1678 : **Jean de Ceva**

VISION

Figure :

[12] Pappus, *Collections* **υναγωγ΄η** ou *Synagoge*, Livre **7**, proposition **131**
[13] Pappus, *Collections*, Livre **7**, proposition **132**



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*
et DEF le triangle de contact de ABC.

Donné : (AD), (BE) et (CF) sont concourantes. [14]

Note historique : dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Michel Chasles signale que ce point de concours a été signalé en 1678 par Jean de Céva.
Ce résultat a été redécouvert par Joseph Diaz Gergonne et présenté en 1818 dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*.

Terminologie : ce point de concours, noté Ge et répertorié sous X_7 chez ETC [15],
est "le point de Gergonne de ABC".

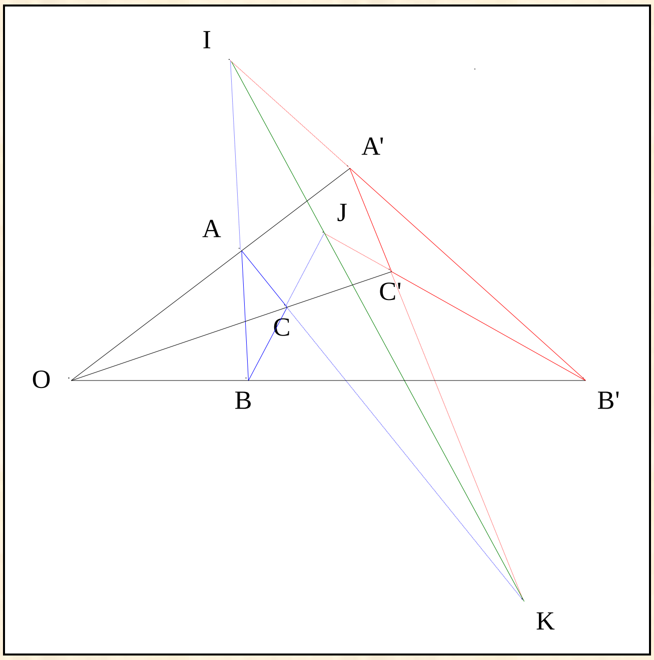
Scolie : I est un PC-point [16]

5. Année 1648 : **Le sieur Girard Desargues Lyonnois** [17]

VISION

Figure :

[14] Jean de Ceva, De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio de (in-4e, Milan,1678), tome **II**
[15] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
[16] i.e. pédal-cévien
[17] Alias S.G.D.L. comme il signait lui-même ses écrits.



Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
	O	ce point de concours
et	I, J, K	les points d'intersection de (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés. [18]

Énoncé traditionnel [19]**:**

si, deux triangles ont leurs sommets placés deux à deux sur trois droites concourantes,
alors, leurs côtés se rencontreront deux à deux en trois points alignés,

et réciproquement.

Note historique : ces deux résultats se trouvent pour la première fois énoncés dans un petit traité intitulé *Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement, ou en devis avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer aucun point qui soit hors du champs de l'ouvrage* de Girard Desargues ; ce livre constituait le premier ouvrage (1636) de ce géomètre et aurait été perdu si le graveur Abraham Bosse ne l'eût reproduit, en 1647, à la suite de son *Traité de perspective*, rédigé d'après les principes et la méthode de Desargues.

6. Année 1686 : Isaac Newton

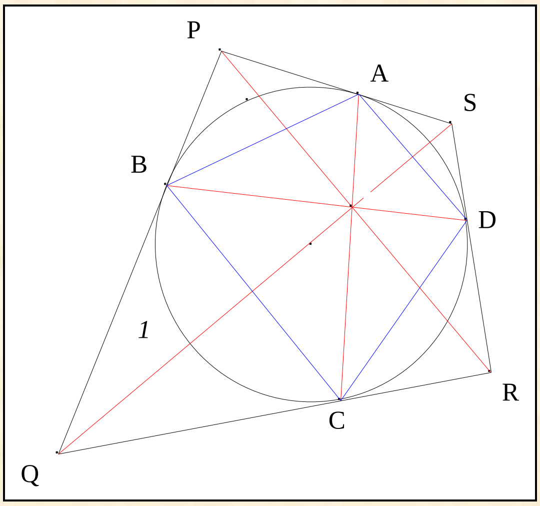
* Le quadrilatère circumscriptible *

VISION

---

[18] Bosse A., *Perspective et de la Coupe des pierres* (1648).
[19] Pour deux triangles en position générale.

Figure :



Traits : *1* un cercle,
ABCD un quadrilatère inscrit dans *1*
et PQRS le quadrilatère tangentiel de ABCD.

Donné : (PR), (SQ), (AC) et (BD) sont concourantes.[20]

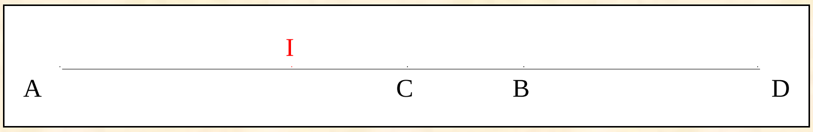
Terminologie : ce résultat est aussi connu sous le nom de "théorème faible de Brianchon".

Note historique : une preuve métrique ingénieuse a été proposée par Léon Anne [21].

* La relation de Newton *

VISION

Figure :



Traits : (A, B, C, D) un quaterne harmonique
et I le milieu de [CD].

Donné : $IA^2 = IC.ID$.

7. Année 1804 : **Euler-Bevan**

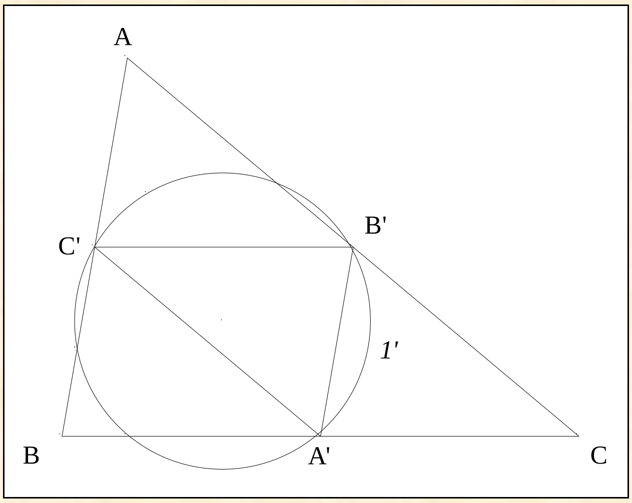
---

[20] Newton I., *Principes* (1686), corollaire **II** du lemme **XXIV**
Ayme J.-L., La ponctuelle de Newton, G.G.G. vol. **8**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[21] F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed. (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 573

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et *1'* le cercle circonscrit à ABC.

Définition : *1'* est le cercle d'Euler-Bevan de ABC. [22]

Note historique : d'après les recherches de l'historien anglais James Sturgeon MacKay, ce cercle n'apparaît nulle part dans l'œuvre d'Euler.
Il a été découvert par l'ingénieur civil Benjamin Bevan [23].

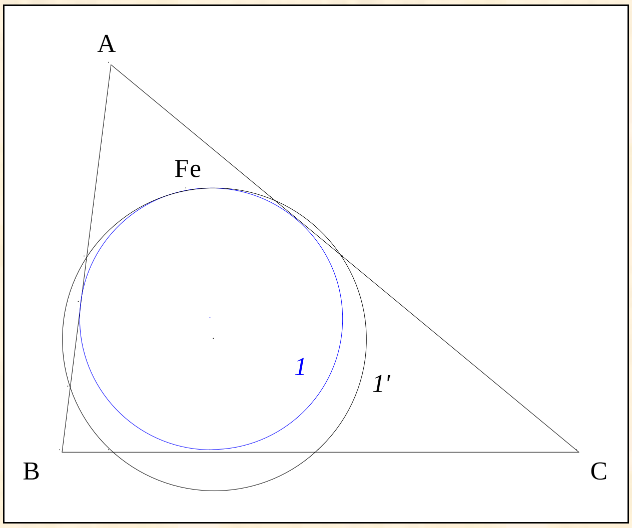
Terminologie : sous l'impulsion d'Henri Brocard, ce cercle est "le cercle d'Euler de ABC".

8. Année 1822 : Karl Feuerbach

VISION

Figure :

[22] Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn **I** (1804) 18
Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler…, G.G.G. vol. **2**, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[23] Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn **I** (1804) 18



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC
et *1'* le cercle d'Euler de ABC

Donné : *1'* est tangent à *1*. [24]

Note historique : en 1822, Karl Feuerbach publie à Nuremberg (Allemagne), un petit livre de 62 pages au titre long et diffus dans lequel il présente et démontre analytiquement

le plus beau théorème de géométrie élémentaire découvert depuis le temps d'Euclide

selon l'historien Julian L. Coolidge [25].
Signalons que Jules Alexandes Mention sera le premier a en donner une preuve géométrique en 1850.

Terminologie : le point de tangence de *1* et *1'* est "le point de Feuerbach de ABC", noté Fe, et répertorié sous X_{11} chez ETC [26].

9. Année 1864 : Heinrich Schroeter

VISION

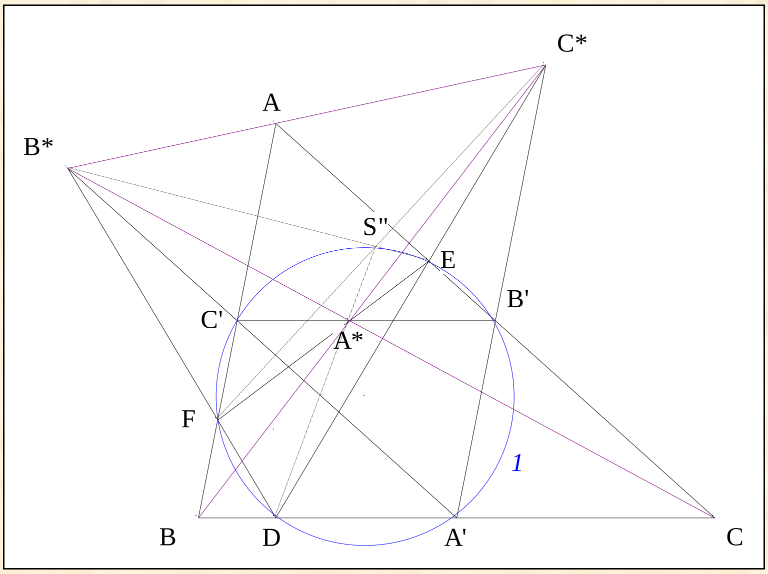
Figure :

---

[24] Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822) 38
Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
Revistaoim (Espagne) **26** (2006) ; http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

[25] Coolidge J. L., The Heroic Age of Geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society* **35**, 1229

[26] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle d'Euler de ABC,
DEF le triangle orthique de ABC,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et A*, B*, C* le point d'intersection resp.
de (B'C') et (EF), (C'A') et (FD), (A'B') et (DE).

Donnés : **(1)** les triangles A*B*C* et ABC sont perspectifs [27]

(2) B*, C* et A sont alignés
C*, A* et B sont alignés
A*, B* et C sont alignés [28]

(3) les triangles A*B*C* et DEF sont perspectifs [29]

Terminologie : **(1)** A*B*C* est le triangle latéral de A'B'C' et DEF

(2) le centre de perspective de A*B*C* et DEF est "le second point de Schroeter de ABC" noté S".

(3) S" est sur *1*. [30]

Note historique : Heinrich Schroeter considère les triangles médian et orthique.
Une généralisation a été proposée en 2003 par Darij Grinberg [31] aux cas de deux triangles céviens.
Une autre généralisation remarquable a été proposée par l'auteur. [32]

---

27 proposition **2** de H. Schroeter
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 7-8 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

28 proposition **3** de H. Schroeter
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 8-10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

29 proposition **5** de H. Schroeter
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 11-13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

30 proposition **6** de H. Schroeter
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

31 Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message *Hyacinthos* # **8743** du 28/11/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

32 Ayme J.-L., Ayme's perspector, G.G.G. vol. **12**, p. 2-4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Archive :

710. Soient a, b, c les milieux des côtés d'un triangle ABC;

a_1, b_1, c_1 les pieds des hauteurs;

α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 les points d'intersection (bc_1, cb_1), (ca_1, ac_1), (ab_1, ba_1), (bc, b_1c_1), (ca, c_1a_1), (ab, a_1b_1);

M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC;

H le point d'intersection des hauteurs;

O le centre du cercle des neuf points.

(443)

Cette notation admise, on aura les propriétés suivantes :

1° Les points α, β, γ sont sur la droite HM.

2° Les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sont parallèles entre elles, et perpendiculaires à la droite HM.

3° Les quatre points α, β_1, γ_1, A sont en ligne droite. Il en est de même des quatre points β, γ_1, α_1, B, et des quatre points γ, α_1, β_1, C.

4° α_1, β_1, γ_1 sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle des neuf points (O).

5° Les droites $a\alpha_1$, $b\beta_1$, $c\gamma_1$ passent par un même point P, et pareillement les droites $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ passent par un même point P_1.

6° Les deux points P, P_1 appartiennent à la circonférence des neuf points (O).

7° Les points d'intersection $(AB, \alpha_1\beta_1)$, $(BC, \beta_1\gamma_1)$, $(CA, \gamma_1\alpha_1)$ sont sur une même droite qui passe par P, P_1.

La démonstration de ces différentes propriétés est proposée par M. Schrœter, professeur à l'Université de Breslau.

[33]

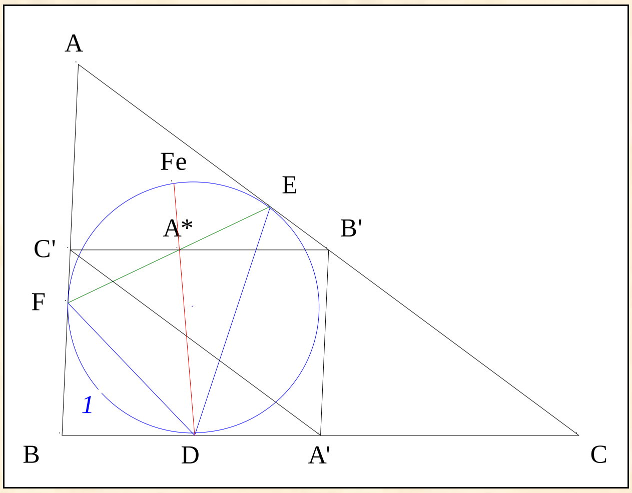
10. Année 1865 : Camille Gérono

VISION

Figure :

---

[33] Schroeter H. E., Question **710**, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 2-ème série **3** (1864) 442-443 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
Lacauchie L., Solution de la Question **710**, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 2-ème série **4** (1865) 178-182 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	A*	le point d'intersection de (B'C') et (EF),
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC.

Donné : D, A* et Fe sont alignés. [34]

Commentaire : la question **710** d'Heinrich Schroeter étant posée en 1864 dans les *Nouvelles Annales*, et la note de Camille Gérono étant publié l'année suivante dans la même revue, l'auteur suggère que la "question" a été la source de la "note".

Note historique : la construction géométrique de Christophe Camille Gérono, cofondateur en 1842 avec Olry Terquem des *Nouvelles Annales de Mathématiques, journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale*, permet de déterminer en 1865 la position de Fe en n'employant que la règle.
Au passage, il redécouvre le résultat de William Rowan Hamilton datant de 1860 qui lui permettait d'en déduire une preuve géométrique du théorème de Feuerbach.
Cette preuve est relatée analytiquement par le Révérend Georges Salmon [35] en 1865.

Archive :

Parmi les nombreuses et intéressantes questions résolues dans le *Traité des Sections coniques* de M. Salmon, on trouve plusieurs démonstrations analytiques de la proposition relative au contact du cercle passant par les milieux des côtés d'un triangle et des cercles inscrit et exinscrits (*) ; l'une de ces démonstrations (p. 299), qui est due à M. Hamilton, a conduit à un moyen très-simple de construire les points de tangence des cercles mentionnés.

---

34 Gérono C., Note sur la détermination des points de contact du cercle qui passe par les milieux des trois côtés d'un triangle, et des cercles tangents à ces côtés, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Sér. **2**, **4** (1865) 220-224 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

35 Salmon G., *Sections coniques* (1865) 299, 532

(*) Cette proposition a été démontrée de bien des manières différentes. Voir les *Nouvelles Annales* (t. I et IX, 1842 et 1850), et les recueils intitules :

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics (t. IV et V, 1861 et 1862);

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane (t. I, 1863).

Je nommerai a, b, c les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC ;

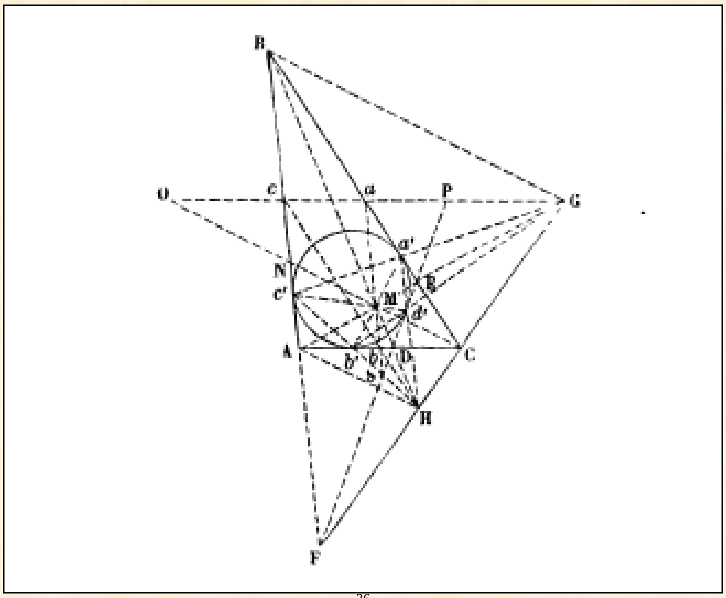
a', b', c' les points de contact de ces côtés et du cercle inscrit dans le triangle ;

M l'intersection des droites ab, $a'b'$;

D l'intersection des droites BM, AC ;

Dd' une droite menée du point D tangente en d' à la circonférence $(a'b'c')$ inscrite dans le triangle.

Je vais démontrer que la circonférence (abc), qui passe par les milieux des côtés du triangle ABC, touche au point d la circonférence inscrite $(a'b'c')$.

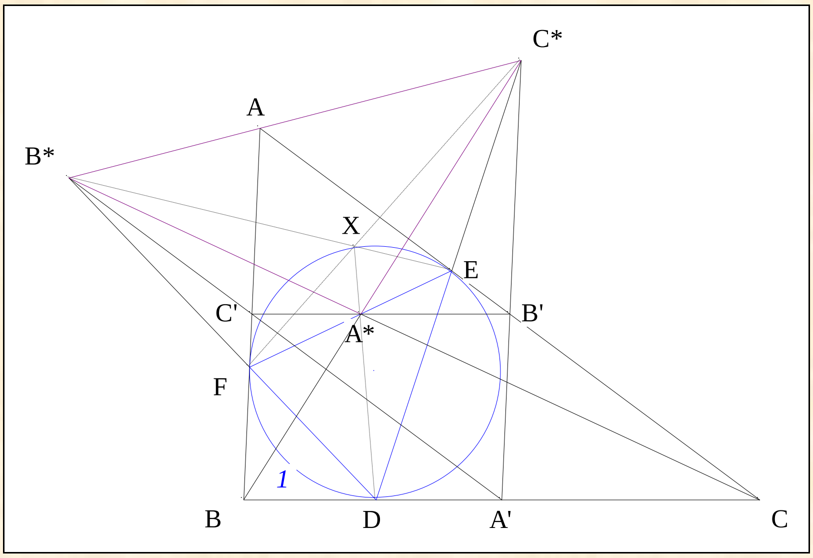


[36]

36 Gérono C., Note sur la détermination des points de contact du cercle qui passe par les milieux des trois côtés d'un triangle, et des cercles tangents à ces côtés.
Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, Sér. **2, 4** (1865) 220-224 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

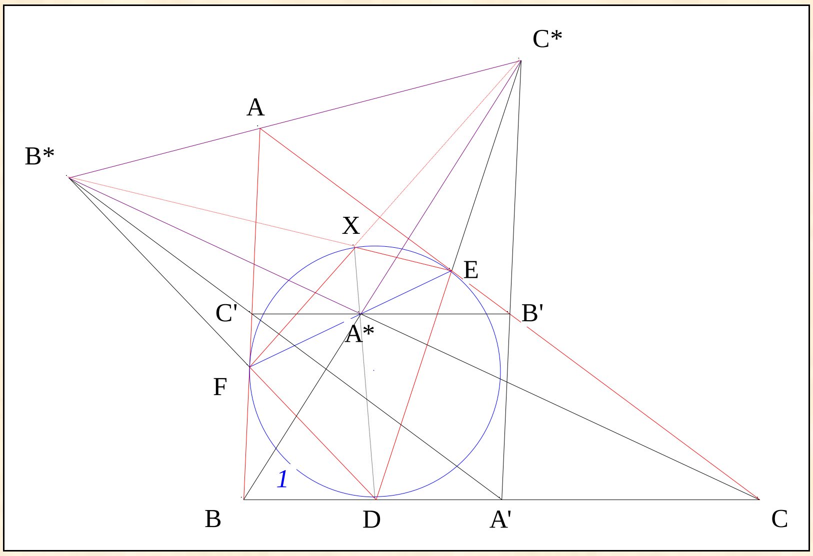
La preuve "élémentaire" **de Gérono** "synthétisée" **par l'auteur**

* Avec les résultats de Heinrich Schroeter *



- Notons B*, C* le point d'intersection resp. de (C'A') et (FD), (A'B') et (DE).
- Les triangles A*B*C* et ABC sont perspectifs [37].
- Alignement : B*, C* et A sont alignés
  C*, A* et B sont alignés
  A*, B* et C sont alignés [38].
- Les triangles A*B*C* et DEF sont perspectifs [39].

* Le centre de perspective de A*B*C* et DEF *



---

37 proposition **2** de H. Schroeter
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 7-8 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

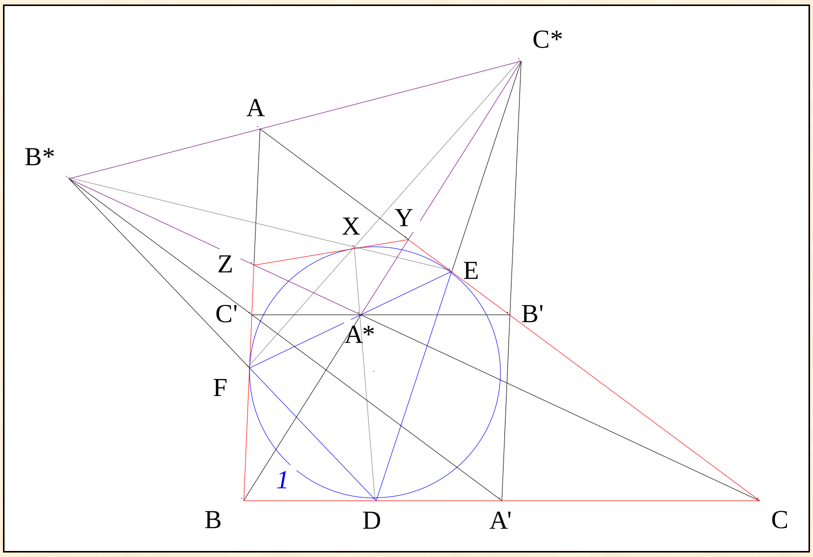
38 proposition **3** de H. Schroeter
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 8-10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

39 proposition **5** de H. Schroeter
Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 11-13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- Notons X ce centre de perspective.

- **Conclusion :** d'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" appliqué à l'hexagone dégénéré FFDEEXF, X est sur *1*.

* L'axe de perspective de de A*B*C* et ABC *

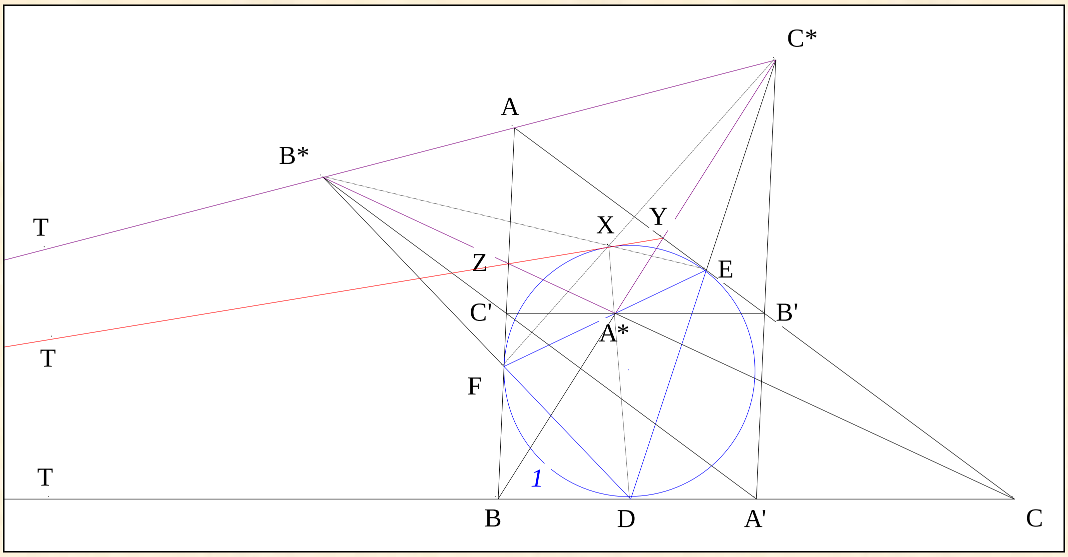


- Notons Y, Z les points d'intersection resp. de (A*C*) et (AC), (A*B*) et (AB).

- **Scolie :** (YZ) est L'axe de perspective de de A*B*C* et ABC.

- **Conclusion :** d'après Newton "Quadrilatère circonscriptible" [40] appliqué au quadrilatère BCYZ, (YZ) est tangente à *1* en X.

* "Concourance" sur l'axe de perspective de A*B*C* et ABC *



- Notons Y, Z, T les points d'intersection resp. de

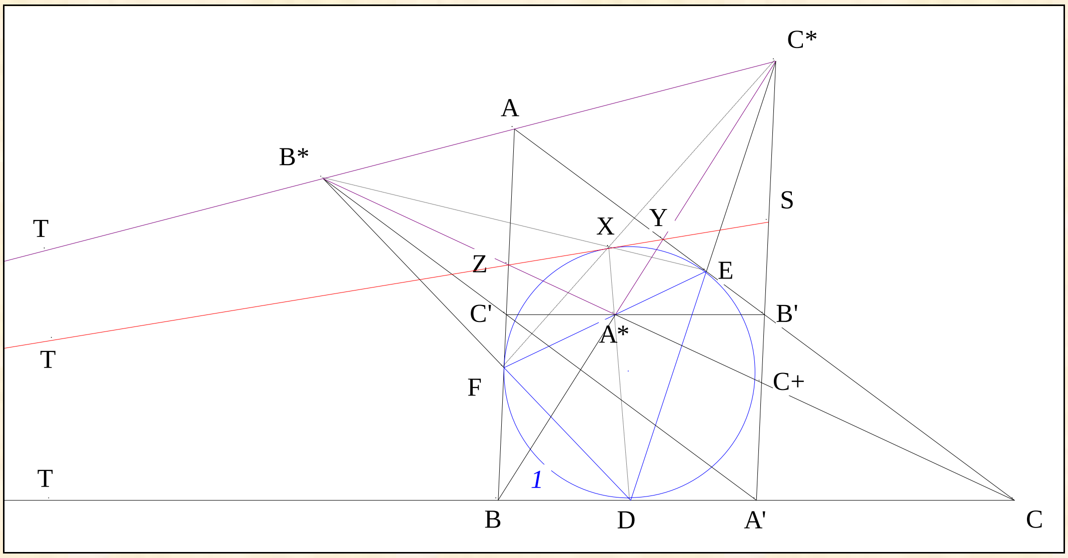
[40] Cf. p. 12

(A*C*) et (AC), (A*B*) et (AB), (B*C*) et (BC).

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [41]
  appliqué à A*B*C* et ABC, (YZT) est l'axe de perspective de A*B*C* et ABC.

- **Conclusion :** (B*C*), (BC) et (YZ) sont concourantes en T.

* Un milieu *



- Notons C+, S les points d'intersection de (A'B'C*) resp. avec (CA*), (YZ).

- Considérons le quadrilatère AYA*Z :

  * d'après **B. 3.** Pappus **131**, (A ; Y, Z, A*, T) est harmonique ;
    en conséquence, (A ; Y, B, A*, C*) est harmonique.

  * par changement d'origine en Z, (Z ; Y, B, A*, C*) est harmonique

  * par une autre écriture, (Z ; S, B, C+, C*) est harmonique

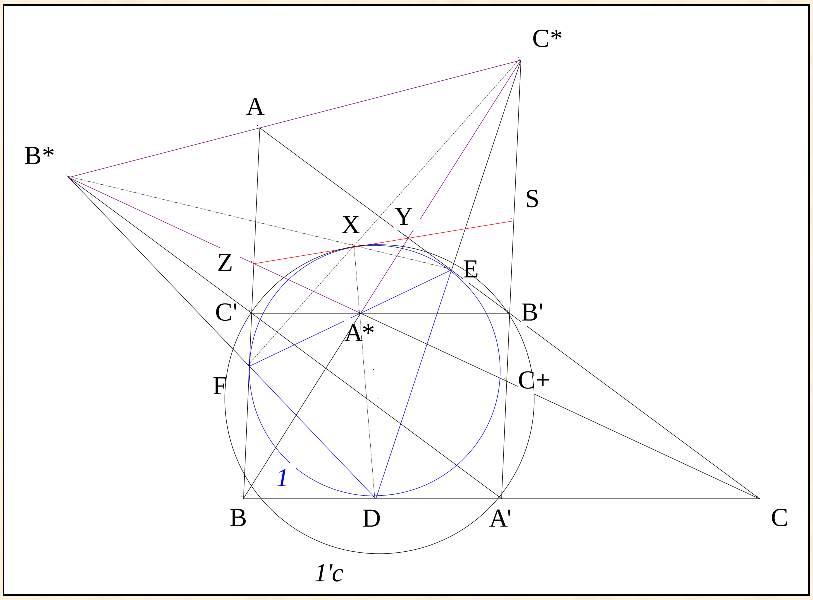
- Nous savons que (ZB) // (C+C*)

- **Conclusion :** d'après **B. 3.** Pappus **132**, S milieu de [C+C*] i.e. SC+ = SC*. [42]

* le cercle tangent à *1* en X *

[41] Cf. p. 10-11

[42] Ayme J.-L., Tangent at Fe, AoPS du 23/05/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=535439



- **Scolie :** le triangle ZXF est Z-isocèle.

- (ZF) étant parallèle à (SC*), le triangle SXC* est S-isocèle ;
  en conséquence, SC* = SX ;
  par transitivité de la relation =, SC+ = SX.

- **Scolie :** le triangle XC*C+ est X-rectangle.

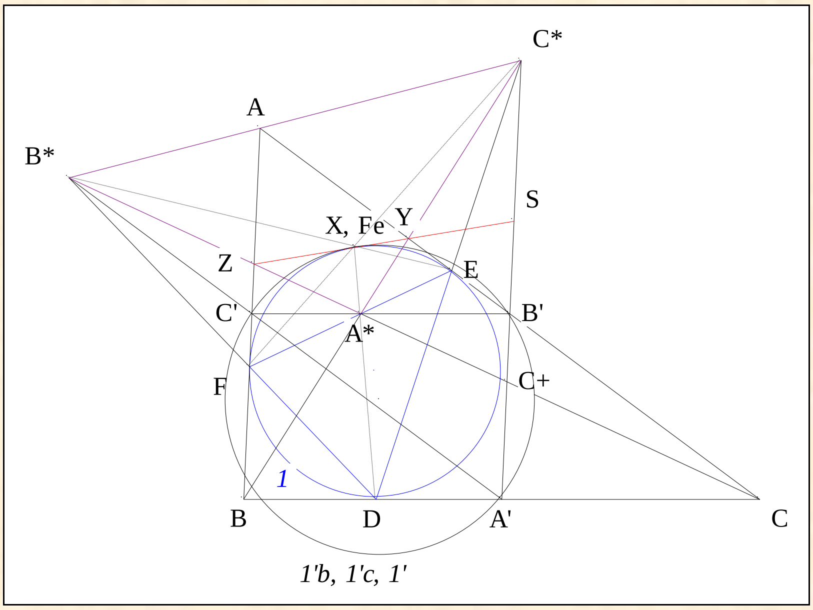
- Une chasse harmonique :

  * nous savons que (Y, B, A*, C*) est harmonique
  * en conséquence, (C ; Y, B, A*, C*) est harmonique
  * par une autre écriture, (C ; B', A', C+, C*) est harmonique
  * en conséquence, (B', A', C+, C*) est harmonique.

- D'après **B. 7.** Isaac Newton, $SC+^2 = SA'.SB'$ ou encore $SX^2 = SA'.SB'$.

- **Conclusion :** le cercle passant par A', B' et X est tangent à (SYZ) en X.

- Notons *1'c* ce cercle.



- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que le cercle passant par C', B' et X est tangent à (SYZ) en X.

- Notons *1'b* ce cercle.

- Les cercles *1'b* et *1'c* ayant deux points en communs A' et X dont X est double, sont confondus avec *1'* ;
  il s'en suit que X et Fe sont confondus.

- **Conclusion :** D, A* et Fe sont alignés.

Scolie : le triangle FeC*C+ est Fe-rectangle. [43]

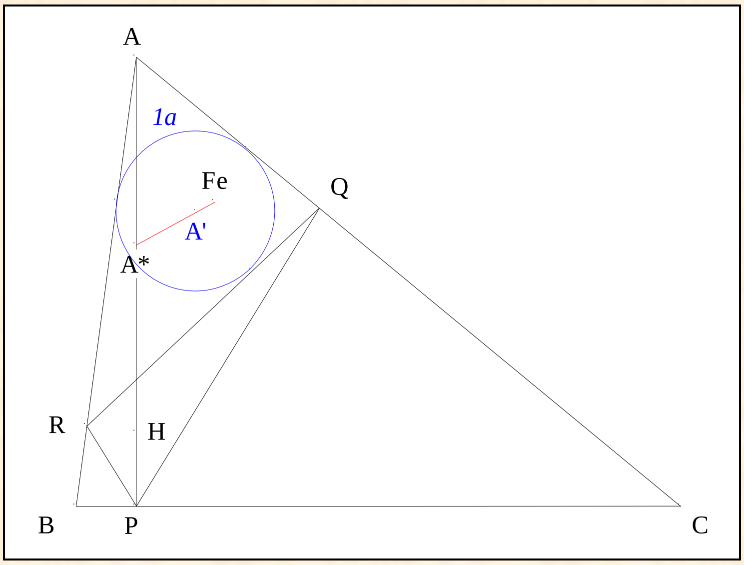
[43] Ayme J.-L., Playing with the Feuerbach point, AoPS du 25/05/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=535669

C. LA DROITE DE CASEY

1. Année 1886 : John Casey

VISION

Figure :

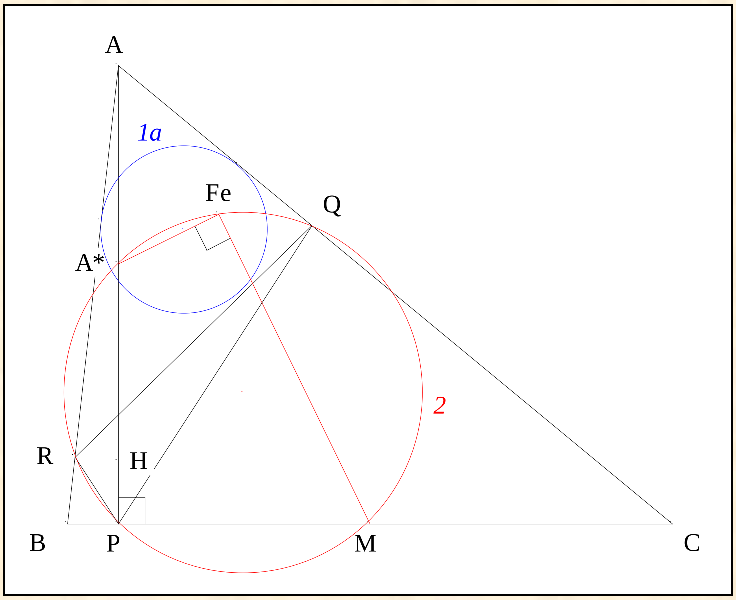


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A*	le milieu de [AH],
	PQR	le triangle orthique de ABC,
	Fe	le point de Feuerbach de ABC,
	1a	le cercle inscrit du triangle AQR
et	A'	le centre de *1a*.

Donné : A', A* et Fe sont alignés. [44]

VISUALISATION

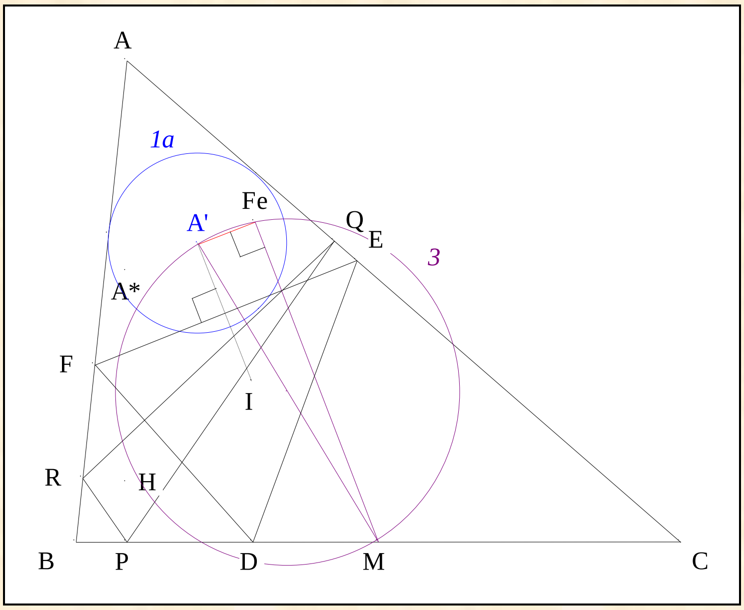
[44] Casey J., *Mathesis* (1886) 108



- **Scolie :** A* est le A-point d'Euler de ABC.

- Notons M le milieu de [BC]
  et *2* le cercle d'Euler de ABC.

- **Scolies :** **(1)** *2* a pour diamètre [A*M]
  (2) *2* passe par Fe
  (3) (FeA*) ⊥ (FeM).



- Notons I le centre de ABC
  et DEF le triangle de contact de ABC.

- **Scolies :** **(1)** A' est le symétrique de I par rapport à (EF) [45]
  (2) A' est l'orthocentre du triangle AEF. [46]

- Notons *3* le cercle de diamètre [A'M].

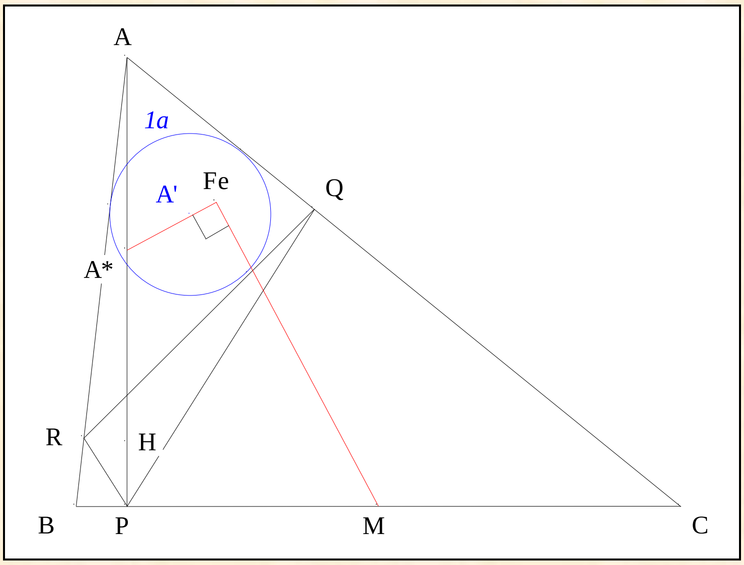
---

[45] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach-Ayme, G.G.G. vol. **5**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[46] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach-Ayme, G.G.G. vol. **5**, p. 3-4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- D'après "A partir du symétrique de (OI)" [47], *3* passe par Fe.

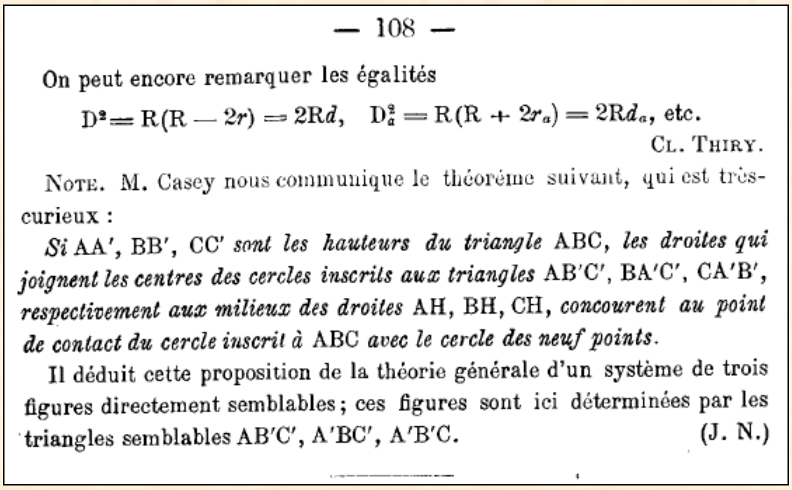
- **Scolie :** (FeM) ⊥ (FeA').



- D'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (FeA*) // (FeA') ;
  d'après l'axiome d'Euclide, (FeA*) = (FeA').

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, A', A* et Fe sont alignés.

2. Archive



— 108 —

On peut encore remarquer les égalités

$$D^2 = R(R - 2r) = 2Rd, \quad D_a^2 = R(R + 2r_a) = 2Rd_a, \text{ etc.}$$

Cl. Thiry.

Note. M. Casey nous communique le théorème suivant, qui est très-curieux :

Si AA', BB', CC' *sont les hauteurs du triangle* ABC, *les droites qui joignent les centres des cercles inscrits aux triangles* AB'C', BA'C', CA'B', *respectivement aux milieux des droites* AH, BH, CH, *concourent au point de contact du cercle inscrit à* ABC *avec le cercle des neuf points*.

Il déduit cette proposition de la théorie générale d'un système de trois figures directement semblables ; ces figures sont ici déterminées par les triangles semblables AB'C', A'BC', A'B'C. (J. N.)

Je remercie le professeur Ercole Suppa de m'avoir communiqué cette archive.

[47] Ayme J.-L., Cercles passant par Fe, G.G.G. vol. **13**, p. 57-58 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

3. Une courte biographie de John Casey


[48]

John Casey est né à Kilkenny (Irlande), le 12 mai 1820.
Après ses études, il enseigne dans diverses écoles avant de prendre la direction du Central Model School de Kilkenny. Durant ses moments de loisir, il se passionne pour les mathématiques, apprend le latin, le français et l'allemand. Il se fait connaître de géomètres comme le Dr. Salmon, et le professeur Townsend du Trinity College de Dublin en trouvant une solution du problème de Poncelet. En 1859, il entre au Trinity College où il obtient son B.A. en 1862. Durant les onze années suivantes, il professe à Kingstown School. En 1866, il devient membre de l'Académie royale irlandaise. En 1873, il devient professeur de mathématiques et de physique à l'université catholique de Dublin. Quelques années après, il refuse un poste de professeur au Trinity College. En 1874, il est élu membre de la London Mathematical Society.
De 1862 à 1868, il est l'un des éditeurs de la revue *Oxford, Cambridge, and Dublin Messenger of Mathematics*. Professeur dévoué et talentueux, homme pieux, membre du "Third Order of St-Francis", il a écrit de nombreux papiers dont certains seront publiés dans *Proceedings of the Royal Irish Academy*. En 1881, il publie le désormais classique *Sequel to Euclid*.
Il décède à Dublin, le 3 janvier 1891.

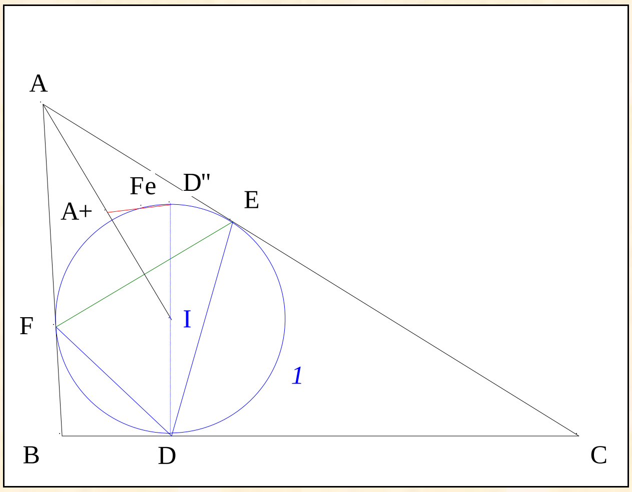
[48] The MacTutor History of Mathematics archive ;
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Casey.html

D. LA DROITE DE MANNHEIM

1. Année 1903 : **Amédée Mannheim** dit *Canon*

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
D" le symétrique de D par rapport à I,
A+ le milieu de [AI]
et Fe le point de Feuerbach de ABC.

Donné : A+, D" et Fe sont alignés. [49]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [50]

2. Une courte biographie du Colonel Amédée Mannheim [51]

---

[49] Canon, Démonstration de la construction trouvée par Hamilton pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit,
Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, Sér. **4, 3** (1903) 13-15 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[50] Ayme J.-L., Symétrique de (OI) par rapport au triangle de contact, G.G.G. vol. **4,** p. 16 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[51] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mannheim.html.

52

L'élégant Amédée

dit *Canon*

Victor Mayer Amédée Mannheim naît à Paris (France), le 17 juillet 1831.
Élève au lycée Charlemagne à Paris, classe de Catalan, puis admis 78-ème à l'entrés à l'École Polytechnique en 1848 à l'âge de 17 ans, il rejoint à sa sortie, l'École d'Application de Metz. Promu officier d'artillerie, il devient répétiteur en 1859, puis examinateur en 1863 et, enfin, en 1864 professeur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique, tout en continuant sa carrière militaire et en fondant la *Société Amicales des Anciens Élèves de l'École*. En 1872, il reçoit le prix *Poncelet* décerné par l'Académie des Sciences.
En 1890, il quitte l'armée avec le grade de colonel, mais continue d'enseigner jusqu'à l'âge de 70 ans.
Passionné de cinématique, il publie un traité intitulé *Géométrie cinématique* dans lequel il applique la transformation par polaire réciproque que Chasles avait initiée.
En fait, Amédée a toujours été un éternel étudiant. De 1979 à 1886, il n'a pu s'empêcher de rédiger pour *Nouvelles Annales*, toutes les solutions des problèmes d'admission à l'École polytechnique en signant "par un ancien élève de Mathématiques spéciales". Pour Charles-Ange Laisant, il se cachait aussi sous le pseudonyme de "Canon" en posant de nombreuses questions de mathématiques.
Nous retiendrons ce commentaire en anglais

Although virtually forgotten today, in his own time
he was considered to be one of the more important synthetic geometers
in the tradition of Michel Chasles

Il décède à Paris (France) le 11 décembre 1906.

3. Archive

[52] The MacTutor History of Mathematics archive ;
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hamilton.html

[K2c]

DÉMONSTRATION DE LA CONSTRUCTION TROUVÉE PAR HAMILTON POUR DÉTERMINER LE POINT OÙ LE CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE TOUCHE LE CERCLE INSCRIT (²);

PAR M. A. MANNHEIM.

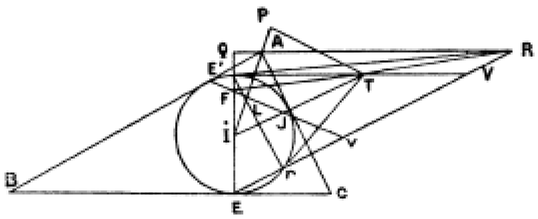
En 1899, la question 1544 posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* appela l'attention sur la détermination du point de contact du cercle des neuf points d'un triangle et du cercle inscrit à ce triangle. J'envoyai une première réponse, parue la même année

(¹) Pour la bibliographie des questions mentionnées, *voir* aussi : *Nouvelle correspondance mathématique :* F. PROTH, quest. 301, 1877, p. 399; E. LUCAS, 1878, p. 123 (généralisation).
Intermediaire des Mathématiciens : A. THORIN, quest. 334, 1894, p. 186; E. FAUQUEMBERGUE, 1895, p. 123; H. TARRY, 1895, p. 363; 1896, p. 276. — E.-B. ESCOTT, quest. 1264, 1898, p. 78; quest. 2546, 1903. p. 69; P.-F. TEILHET, 1904, p. 51. — G. DE ROCQUIGNY, quest. 2746, 1904, p. 68; quest. 2813, 1904, p. 190; quest. 2822, 1904, p. 214.

(²) *Voir :* GERONO, *Nouvelles Annales,* 1865; et CANON, *Nouvelles Annales,* 1903.

(227)

à la page 264, puis une autre qui, publiée en 1904, page 18 (¹), renferme la construction suivante, la plus simple, je crois, des constructions connues :



Sur le cercle de centre I, *inscrit au triangle* ABC, *on prend le point* E' *diamétralement opposé au point* E, *où ce cercle touche* BC; *la droite qui passe par* E' *et par le milieu* L *de* AI *coupe le cercle inscrit au point où celui-ci est touché par le cercle des neuf points du triangle* ABC.

[53]

---

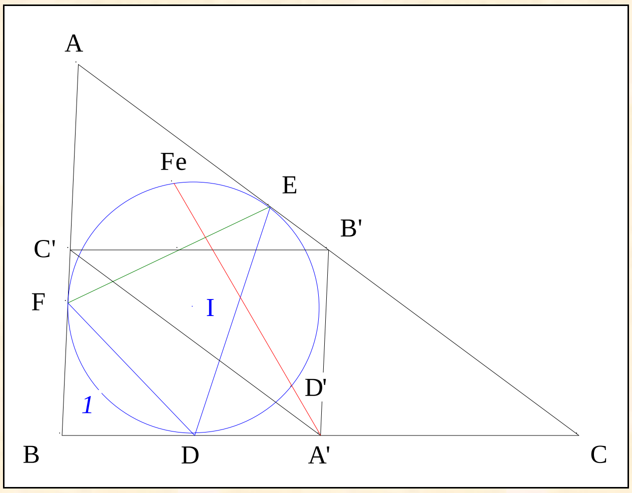
[53] Canon, Démonstration de la construction trouvée par Hamilton pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit,
Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, Sér. **4, 3** (1903) 13-15 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

E. LA DROITE DE FONTENÉ

1. Année 1907 : Georges Fontené

VISION

Figure :

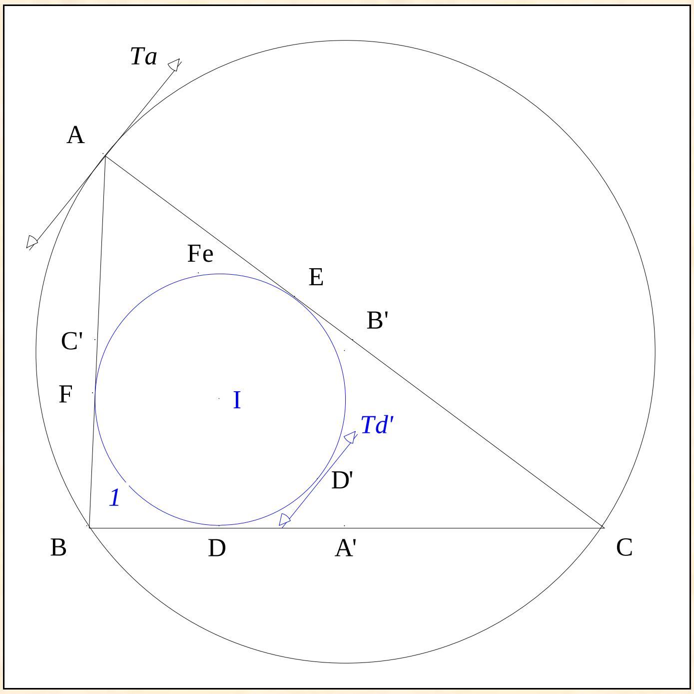


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
A'B'C' le triangle médian de ABC,
D' le symétrique de D par rapport à (AI),
et Fe le point de Feuerbach de ABC.

Donné : A', D' et Fe sont alignés. [54]

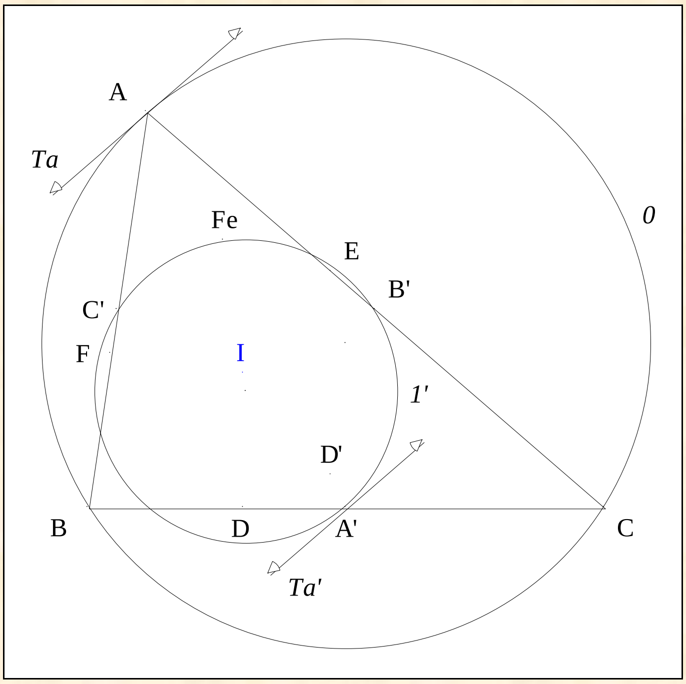
VISUALISATION

[54] Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales*, Séries **4**, t. 7 (avril 1907) 158-163 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.



- Notons *Td'* la tangente à *1* en D',
  0 le cercle circonscrit à ABC,
  et *Ta* la tangente à *0* en A.

- **Conclusion partielle :** *Td' // Ta.* [55]



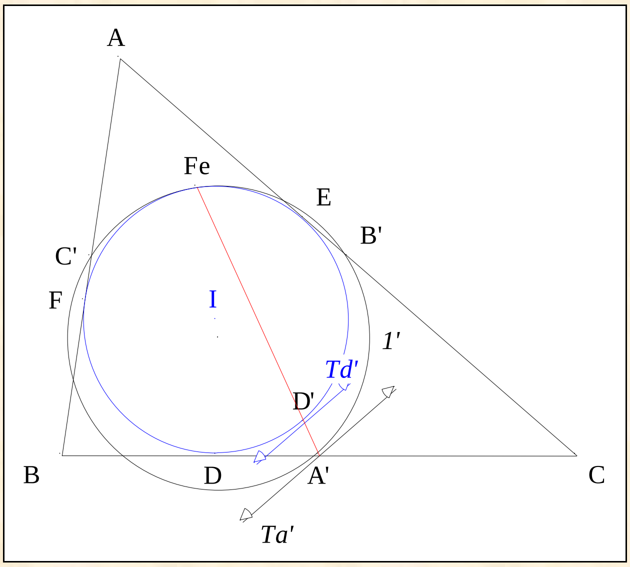
- Notons *1'* le cercle d'Euler-Bevan de ABC ; il passe par A' ;
  et *Ta'* la tangente à *1'* en A'.

- **Conclusion partielle :** *Ta // Ta'* . [56]

---

[55] Ayme J.-L., Symétriques de (OI) par rapport aux côtés des triangles de contact et médian, G.G.G. vol. **4**, p. 8-10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[56] Ayme J.-L., Symétriques de (OI) par rapport aux côtés des triangles de contact et médian, G.G.G. vol. **4**, p. 10-11 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Par transitivité de la relation //, *Td'* // *Ta'*.

- D'après **B. 8.** Karl Feuerbach [57], *1'* est tangent à *1* en Fe.

- **Conclusion :** les cercles *1'* et *1*, le point de base Fe, les parallèles *Ta'* et *Td'*, conduisent au théorème **8'** de Reim ;
  en conséquence, A', D' et Fe sont alignés.

Note historique : ce résultat faisait partie de la solution du deuxième problème [58] de la 13-ème O.I.M. qui s'est tenue à Budapest (Hongrie) en 1982.
Rappelons que pour les observateurs, ce problème a été considéré comme étant le plus difficile de ceux présentés aux O.I.M. de 1982.

Scolie : (A'D') est "la A-droite de Fontené de ABC".

2. Une courte biographie de Georges Fontené [59]

Georges Fontené est né le 23 septembre en 1848 à Rousies (Nord, France).
Cinquième fils de Louise Fontené née vers 1815, Fontené passe avec succès l'Agrégation de mathématiques en 1875, il enseigne successivement à Belfort, Douai, Rouen, et enfin à Paris au collège Rollin[60], actuellement lycée Jacques Decour. Inspecteur d'Académie en 1903, attaché à la rédaction des *Nouvelles annales de mathématiques* en 1909, Fontené prend sa retraite en 1918 avec le titre d'Inspecteur général honoraire.
Ceux qui l'ont connu en parlent comme d'un homme consciencieux, cordial, modeste et bon.
Il décède le 7 avril 1923 à Paris (France)

---

57 Cf. p. 14 ;
Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

58 Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales*, Séries 4, vol. 8, 1907.

59 Bricart R., Georges Fontené, *Nouvelles annales de mathématiques* **5**e série, tome **1** (1022) 361-363
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

60 Le collège Rollin est situé au 12 avenue Trudaine à Paris (France).

F. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A		**N**	
aligné	collinear	notons	name
annexe	annex	nécessaire	necessary
axiome	axiom	note historique	historic note
appendice	appendix		
a propos	by the way btw	**O**	
acutangle	acute angle	orthocentre	orthocenter
axiome	axiom	ou encore	otherwise
B		**P**	
bissectrice	bisector	parallèle	parallel
		parallèles entre elles	parallel to each other
C		parallélogramme	parallelogram
centre	incenter	pédal	pedal
centre du cercle circonscrit	circumcenter	perpendiculaire	perpendicular
cercle circonscrit	circumcircle	pied	foot
cévienne	cevian	point de vue	point of view
colinéaire	collinear	postulat	postulate
concourance	concurrence	point	point
coincide	coincide	pour tout	for any
confondu	coincident		
côté	side	**Q**	
par conséquence	consequently	quadrilatère	quadrilateral
commentaire	comment		
		R	
D		remerciements	thanks
d'après	according to	reconnaissance	acknowledgement
donc	therefore	respectivement	respectively
droite	line	rapport	ratio
d'où	hence	répertorier	to index
distinct de	different from		
		S	
E		semblable	similar
extérieur	external	sens	clockwise in this
		order	
F		segment	segment
figure	figure	Sommaire	summary
		symédiane	symmedian
H		suffisante	sufficient
hauteur	altitude	sommet (s)	vertex (vertice)
hypothèse	hypothesis		
		T	
I		trapèze	trapezium
intérieur	internal	tel que	such as
identique	identical	théorème	theorem
i.e.	namely	triangle	triangle
incidence	incidence	triangle de contact	contact triangle
		triangle rectangle	right-angle triangle
L			
lemme	lemma		
lisibilité	legibility		
M			
médiatrices	perpendicular		
bisector			
milieu	midpoint		