SYMÉTRIQUES D'UNE DROITE

PAR RAPPORT

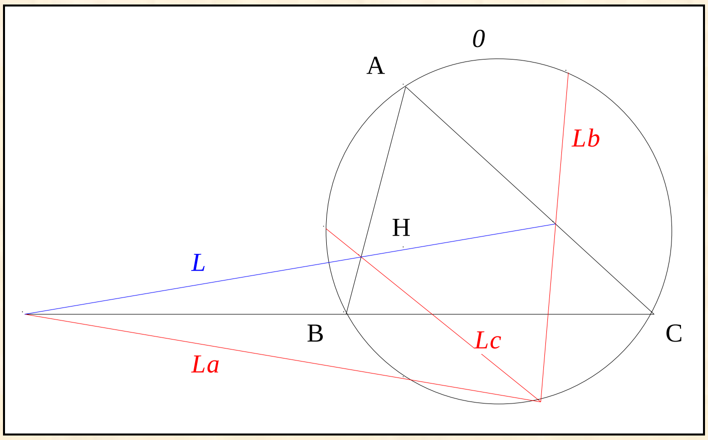
AUX CÔTES D'UN TRIANGLE

A THEMA IN PROCESS

†

Le rythme est au temps
ce que
la symétrie au sens ancien est à l'espace. [1]

Jean-Louis AYME [2]



Résumé. L'auteur présente *A Thema in Process* concernant "les symétriques d'une droite par rapport aux côtés d'un triangle". Des preuves originales sont présentées en ce qui concerne les droites d'Euler et de Steiner, du théorème Collings (1987) déjà relaté par Lalesco vers 1916, d'un résultat de Pohoata ainsi que du point de symétrie de Parry et des cercles y passant. Le thème se termine par une direction relative à un triangle inscrit.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents *A Thema in Process* concerning "the symmetric of a line with respect to the sides of a triangle". Original proofs are presented in relation to the Euler and Steiner's lines, Collings-Lalesco's theorem (1987) already recounted by Lalesco in 1916, Pohoata-Lalesco's result as well as the Parry's reflection point and circles passing. The thema ends with a direction relative to an inscribed triangle.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

---

[1] Pour Vitruve, architecte romain du Ie av. J.-C., la symétrie consistait en "la répétition de formes semblables" par un accord de mesure commune i.e. une comodulation. Le sens ancien se perdit à la fin du XVIIe au profit du sens moderne.

[2] Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 20/06/2014

Sommaire

POINT DE VUE

Mieux vaut une once de pratique
où la main devient le regard de l'âme et de l'esprit,
qu'une tonne de théorie.

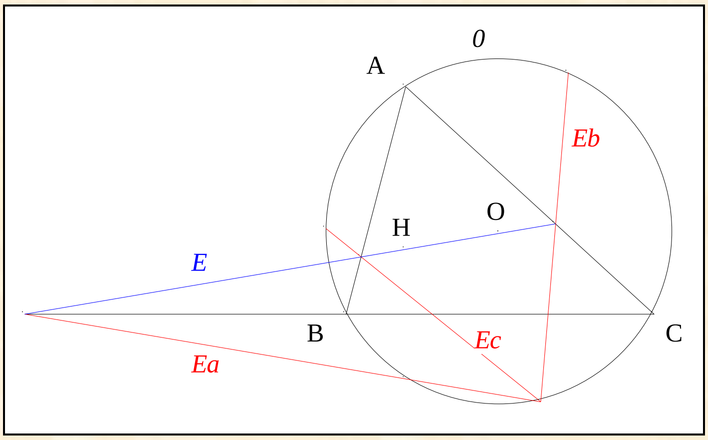
L'auteur propose un article "in process" i.e. en construction, partie par partie.
Au rythme de cette démarche qui s'insère dans le temps, correspond une symétrie i.e. une comodulation dans l'espace publié.
De là, l'auteur espère qu'une harmonie peut naître entre ces deux pôles, et s'exprimer dans un langage muet pour ne parler qu'au regard et non plus aux yeux.

A. UNE DROITE RELATIVE À UN TRIANGLE

I. LA DROITE D'EULER

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O, H	le centre de *0*, l'orthocentre de ABC,
	E	la droite d'Euler de ABC
et	*Ea*, *Eb*, *Ec*	les symétriques de *E* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

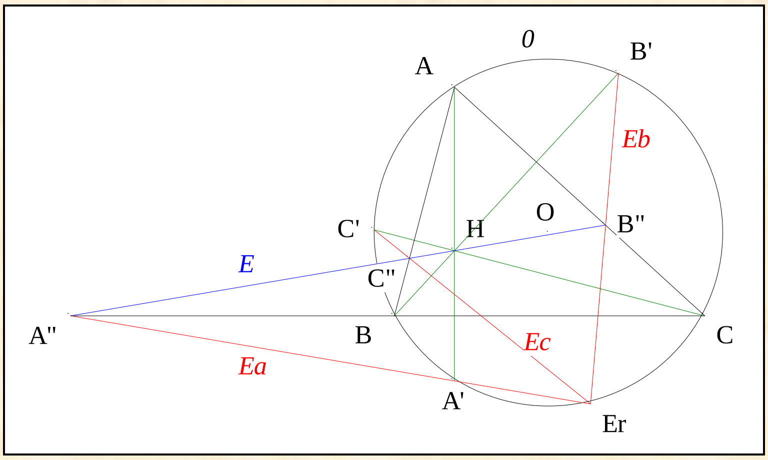
Donné : *Ea*, *Eb* et *Ec* concourent sur *0*. [3]

Commentaire : *E* a une double contrainte : passer par O et H.

VISUALISATION

- **Scolie :** par définition, *E* est la droite (OH).

[3] Steiner J.



- Notons A', B', C' les seconds points d'intersection de (HA), (HB), (HC) avec *0*
  et A", B", C" les points d'intersection de *E* resp. avec (BC), (CA), (AB).

- D'après "L'équivalence de Clawson-Ayme" [4]
  appliqué à la transversale *E* et à H, (A'A"), (B'B"), (C'C") concourent sur *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" [5],
  A' est le symétrique de H par rapport à (BC).

- **Conclusion partielle :** (A'A") et *Ea* sont confondus.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B") et *Eb* sont confondus
  (C'C") et *Ec* sont confondus.

- **Conclusion :** *Ea*, *Eb* et *Ec* concourent sur *0*.

Scolies : **(1)** ce point de concours est, en français, "l'antipoint d'Euler de ABC"
et en anglais "the Euler reflection point of ABC"

(2) Il est répertorié sous X_{110} chez ETC [6]

Énoncé traditionnel :

les symétriques de la droite d'Euler
par rapport
aux côtés d'un triangle,
concourent sur
le cercle circonscrit de ce triangle
à l'antipoint d'Euler.

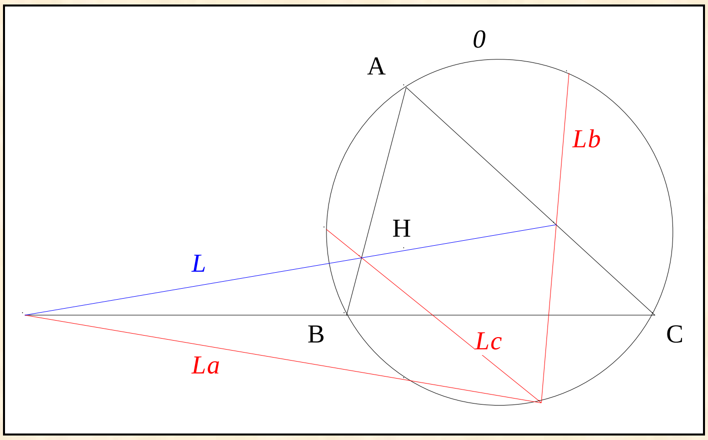
---

4 Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. **3**, p.8-12 ; http://perso.orange.fe/jl.ayme
5 Carnot L. N. M., n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques*, (1801) 101
6 Kimberling c., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

II. UNE DROITE DE STEINER

VISION

Figure :

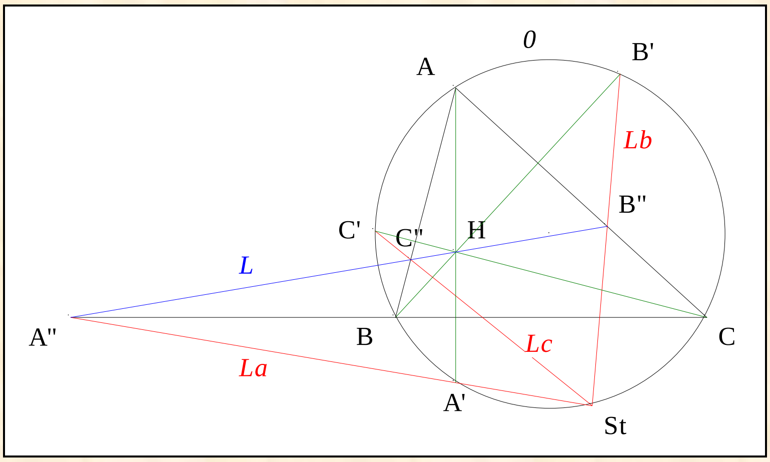


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
H l'orthocentre de ABC,
L une ménélienne
et *La*, *Lb*, *Lc* les symétriques de *L* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : *L* passe par H *si, et seulement si*, *La*, *Lb* et *Lc* concourent sur *0*.[7]

Commentaire : relâchement d'une contrainte : *L* passe uniquement par H.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



[7] Steiner J.
Lalesco T., La Géométrie du Triangle (1937), red. Jacques Gabay Reprint (1987) 12-18 p. 99
Collings S. N., Reflections on a triangle, part **1**, *Math. Gazette*, **57** (1973) 291–293
Grinberg D., Anti-Steiner points with respect to a triangle ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/
Pohoata C., On the Parry Reflection Point (Theorem **2**), *Forum Geometricorum* vol. **8** (2008) 43-48 ;
http://forumgeom.fau.edu/FG2008volume8/FG200806.pdf

- **Hypothèse :** *L* passe par H.

- Notons A', B', C' les seconds points d'intersection de (HA), (HB), (HC) avec *0*
  et A", B", C" les points d'intersection de *L* resp. avec (BC), (CA), (AB).

- D'après "L'équivalence de Clawson-Ayme" [8]
  appliqué à la transversale *L* et à H, (A'A"), (B'B"), (C'C") concourent sur *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" [9],
  A' est le symétrique de H par rapport à (BC).

- **Conclusion partielle :** (A'A") et *La* sont confondus.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B") et *Lb* sont confondus
  (C'C") et *Lc* sont confondus.

- **Conclusion :** *La*, *Lb* et *Lc* concourent sur *0*.

- Notons St ce point de concours.

Scolies : **(1)** les symétriques de St par rapport à (BC), (CA), AB) étant sur *L*,
L est "la droite de Steiner de pôle St". [10]

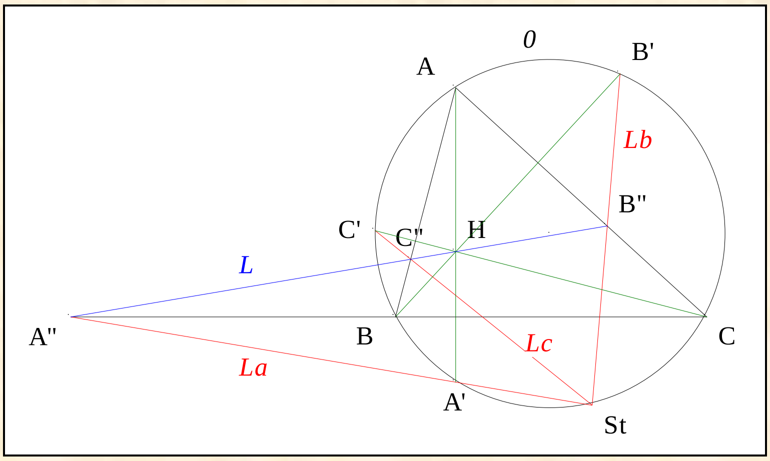
(2) En français, St est "l'antipoint de Steiner de ABC"
en anglais "the anti Steiner point of ABC".

Énoncé traditionnel :

les symétriques d'une droite de Steiner
par rapport
aux côtés d'un triangle,
concourent sur
le cercle circonscrit de ce triangle
à l'antipoint de Steiner.

VISUALISATION SUFFISANTE

[8] Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. **3**, p.8-12 ; http://perso.orange.fe/jl.ayme
[9] Carnot L. N. M., n° **142**, *De la correlation des figures géométriques*, (1801) 101
[10] Ayme J.-L., La droite de Simson de pôle Fe relativement au triangle de contact, G.G.G. vol. **7**, p.7-12 ; http://perso.orange.fe/jl.ayme



- **Hypothèse :** *La*, *Lb* et *Lc* concourent sur *0*.

- Notons A', B', C' les seconds points d'intersection de (HA), (HB), (HC) avec *0*
  et A", B", C" les points d'intersection de *L* resp. avec (BC), (CA), (AB).

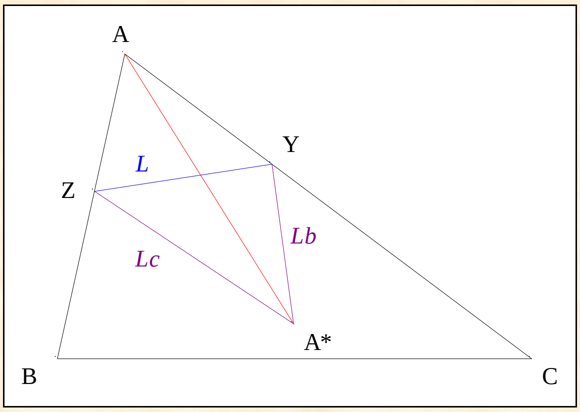
- **Conclusion :** d'après "L'équivalence de Clawson-Ayme" [11]
  appliqué à la transversale *L* et aux (A'A"), (B'B"), (C'C") concourent sur *0*,
  L passe par H.

III. UNE MÉNÉLIENNE

1. Un lemme

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
L une ménélienne,
Y, Z les point d'intersection de *L* resp. avec (AC), (AB),
Lb, *Lc* les symétriques de *L* resp. par rapport à (AC), (AB)
et A* le point d'intersection de *Lb* et *Lc*.

Donné : (A*A) est la A*-bissectrice intérieure du triangle A*YZ. [12]

---

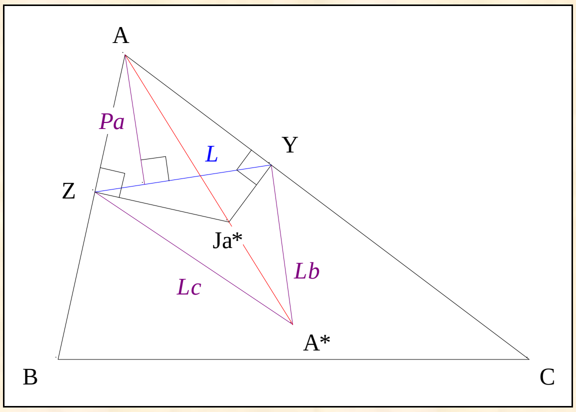
11 Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. **3**, p.8-12 ; http://perso.orange.fe/jl.ayme

Commentaire : ce lemme et ses conséquences permettent de présenter une preuve aérée du théorème de Stanley Norman Collings – Trajan Lalesco.

VISUALISATION

- Par définition, A est le A*-excentre de A*YZ.
- **Conclusion :** (A*A) est la A*-bissectrice intérieure de A*YZ.

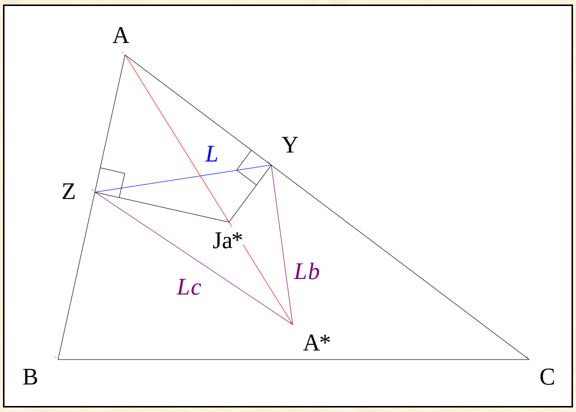
Scolies : **(1)** l'isogonale *Pa*



- Notons Ja* le centre de A*YZ
  et *Pa* la perpendiculaire à (YZ) issue de A.
- D'après Simon L'Huilier, Ja* est sur (AA*).
- Nous avons : (AY) ⊥ (Ja*Y) et (AZ) ⊥ (Ja*Z).
- **Conclusion :** par définition, *Pa* est la A-isogonale de (AA*) relativement au triangle AYZ ou ABC.

(2) Une évaluation angulaire

[12] Ayme J.-L., A bissector again, AoPS du 11/06/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=593163



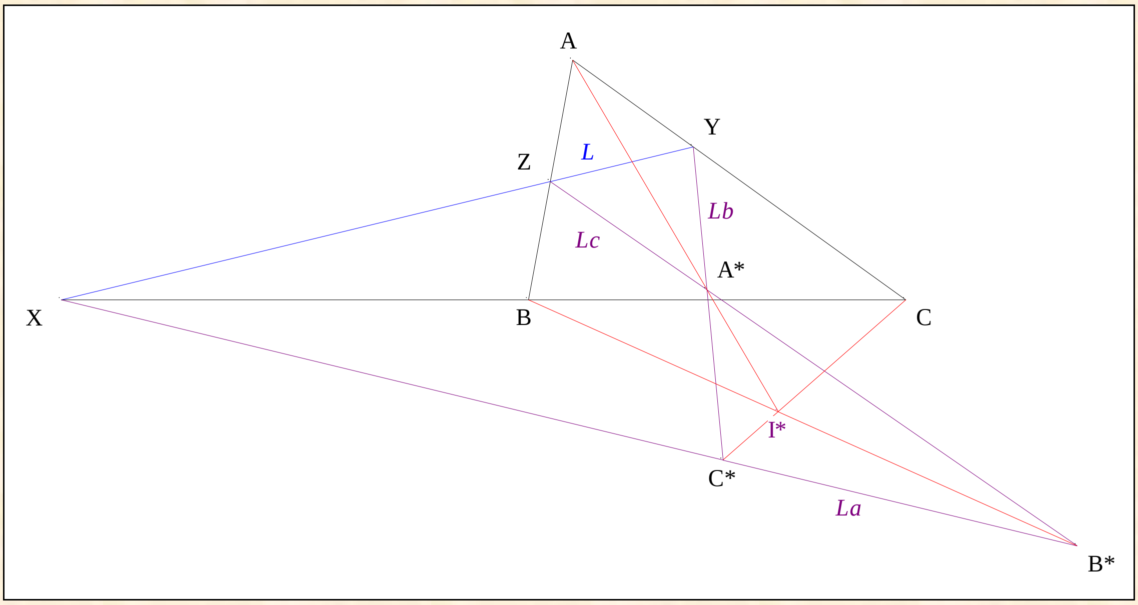
- Par une autre écriture, <BAC = <ZAY

- Le quadrilatère AYA*Z étant cyclique, <ZAY + <YJa*Z = Π

- Par culture géométrique, <YJa*Z = Π/2 + ½ <YA*Z

- **Conclusion :** par substitution et simplification, <YA*Z = Π – 2 <BAC.

(3) Vision triangulaire



- Notons Z les point d'intersection de *L* avec (BC),
  La la symétrique de *L* par rapport à (BC),
  B*, C* les points d'intersection de *Lc* et *La*, *La* et *Lb*,
  et I* le centre du triangle A*B*C*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que

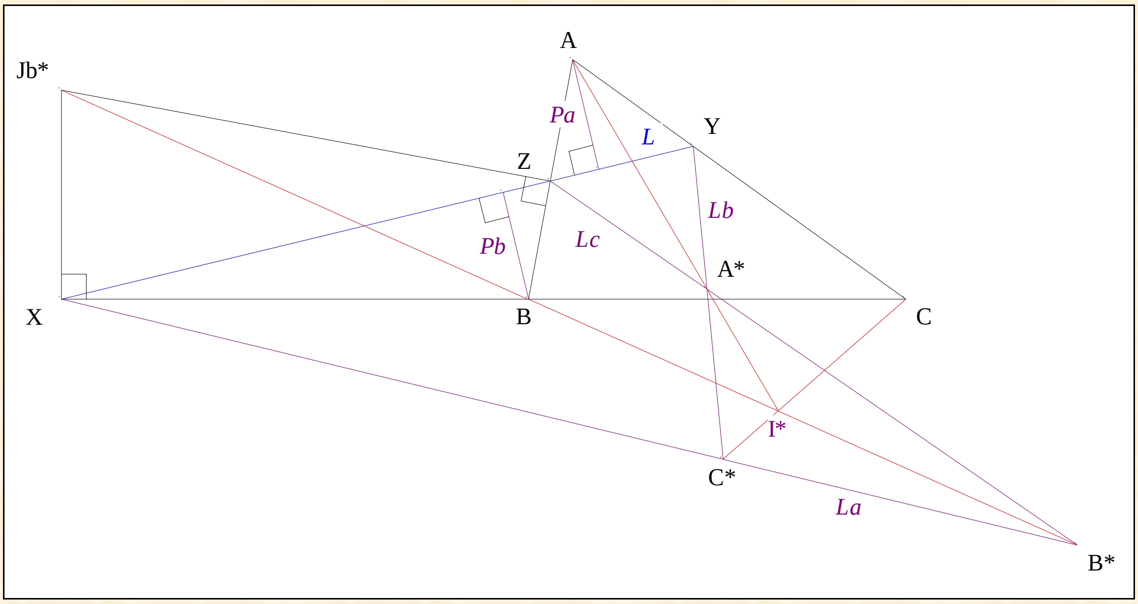
  * (A*A) est la A*-bissectrice intérieure de A*YZ ou de A*B*C*

  * (B*B) est la B*-bissectrice intérieure de B*ZX ou de A*B*C*

  * (C*C) est la C*-bissectrice intérieure de C*XY ou de A*B*C*.

- **Conclusion :** (A*A), (B*B), (C*C) concourent en I*.

(4) Les isogonales *Pb* et *Pc*



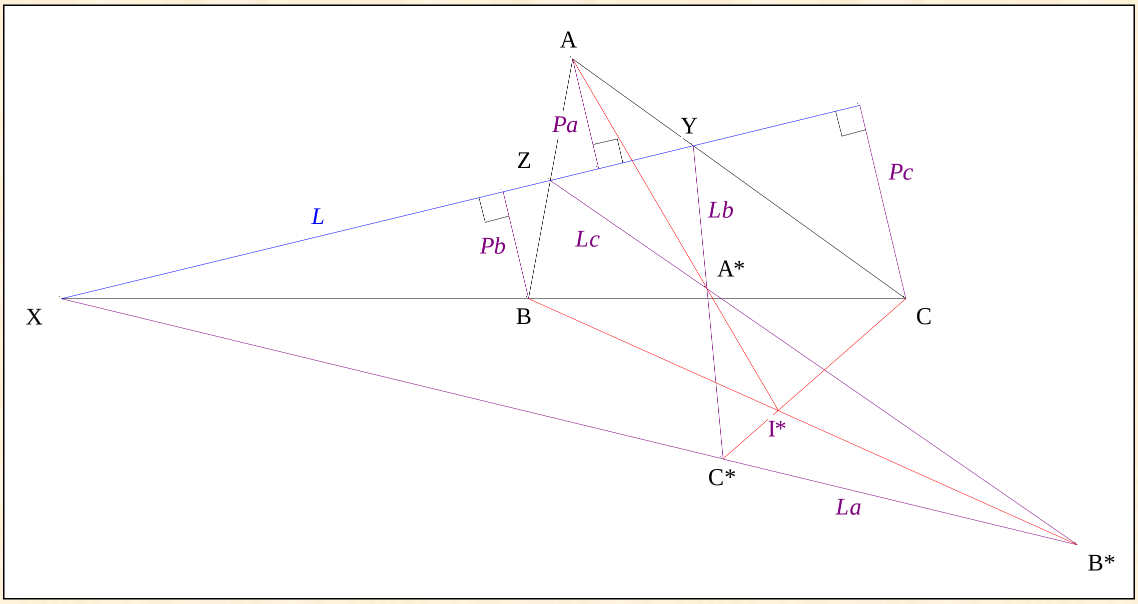
- B est le centre du triangle B*ZX.

- Notons Jb* le B*-excentre de B*ZX
  et *Pb* la perpendiculaire à (ZX) issue de B.

- D'après Simon L'Huilier, Jb* est sur (BB*).

- Nous avons : (BZ) ⊥ (Jb*Z) et (BX) ⊥ (Jb*X).

- **Conclusion :** par définition, *Pb* est la B-isogonale de (BB*) relativement au triangle BZX ou ABC.



- Notons *Pc* la perpendiculaire à (XY) issue de C.

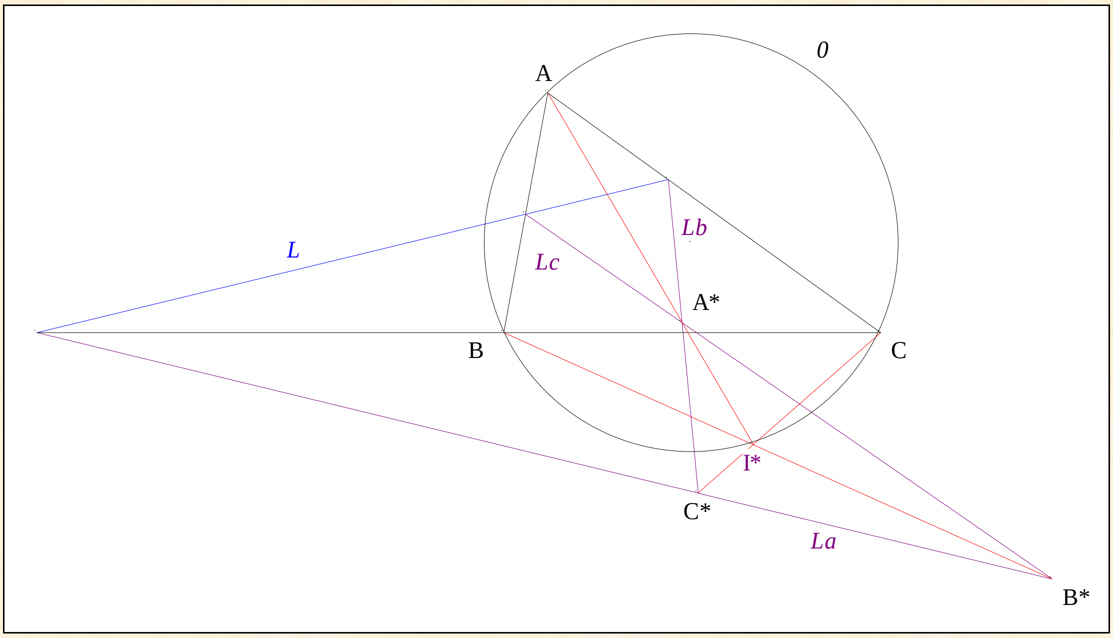
- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que *Pc* est la C-isogonale de (CC*) relativement au triangle CXY ou ABC.

(5) *Pa*, *Pb* et *Pc* sont parallèles entre elles.

2. Le théorème de Collings-Lalesco

VISION

Figure :



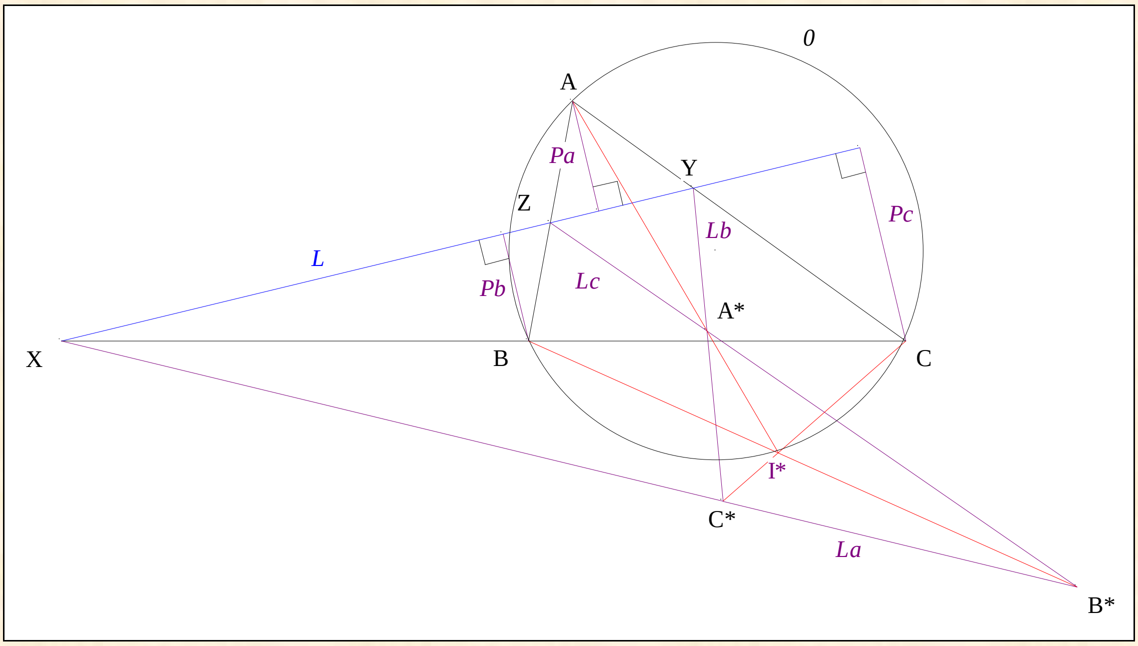
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	L	une ménélienne,
	La, *Lb*, *Lc*	les symétriques de *L* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
	A*, B*, C*	les points d'intersection de *Lb* et *Lc*, *Lc* et *La*, *La* et *Lb*,
et	I*	le centre du triangle A*B*C*.

Donné : I* est sur *0*.[13]

Commentaire : il n'y a plus de contrainte sur *L*.
Nous assistons à la naissance d'un triangle qui était caché dans le point de concours.
Que représentait ce point de concours…

[13] Lalesco T., La Géométrie du Triangle (1937), red. Jacques Gabay Reprint (1987) 12-18 p. 99
Hatzipolakis A., Message *Hyacinthos* # **16731** du 02/09/2008 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/topics/16730
The incenter lies on circumcircle [Iran Second round 95], AoPS du 25/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=379391
Pohoata C., On the relections of a line wrt the sidelines of a triangle, AoPS du 29/07/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=421236
I think this is a very famous problem but I can't find it ; on the search. Related to IMO problem **6** (2012?), AoPS du 20/12/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=567900

VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les point d'intersection de *L* resp. avec (BC), (AC), (AB)
  et *Pa*, *Pb*, *Pc* les perpendiculaires à (YZ), (ZX), (XY) issues resp. de A, B, C.

- D'après **A. III. 1.**

  * scolie **1**, *Pa*, *Pb*, *Pc* sont les A, B, C-isogonales de (AA*), (BB*), (CC*) de ABC

  * scolie **3**, (A*A), (B*B), (C*C) concourent en I*

  * Scolie **5**, *Pa*, *Pb* et *Pc* sont parallèles entre elles.

- D'après "Le théorème de Beltrami" (Cf **D**. Annexe **1**), (A*A), (B*B) et (C*C) concourent sur *0*.

- **Conclusion :** I* est sur *0*.

Note historique : ce résultat se trouve dans le livre de Trajan Lalesco [14] datant avant 1916.

3. Une courte biographie de Trajan Lalesco

[14] Lalesco T., La Géométrie du Triangle (1937), red. Jacques Gabay Reprint (1987) 12-18 p. 99

Trajan Lalesco est né le 12 juillet 1882 à Bucarest (Roumanie).
Élève du lycée Carol **I** de Craiova, puis de ceux de Roman et d'Iasi, il entre à l'université d'Iasi et termine ses études à celle de Bucarest en 1903.
En 1908, il obtient son Ph. D. en mathématiques à l'université de Paris en 1908 sous la direction d'Émile Picard.
C'est son livre intitulé *La Géométrie du Triangle* datant de 1916 qui le fait connaître des géomètres lors de sa première édition en 1937, suivie d'une seconde en 1952.

Professeur à l'université de Bucarest, puis à l'École Polytechnique de Timisoara, il dirige en 1921 l'École Polytechnique de Bucarest.

Il décède le 15 juin 1929 à Bucarest à l'âge de 47 ans.

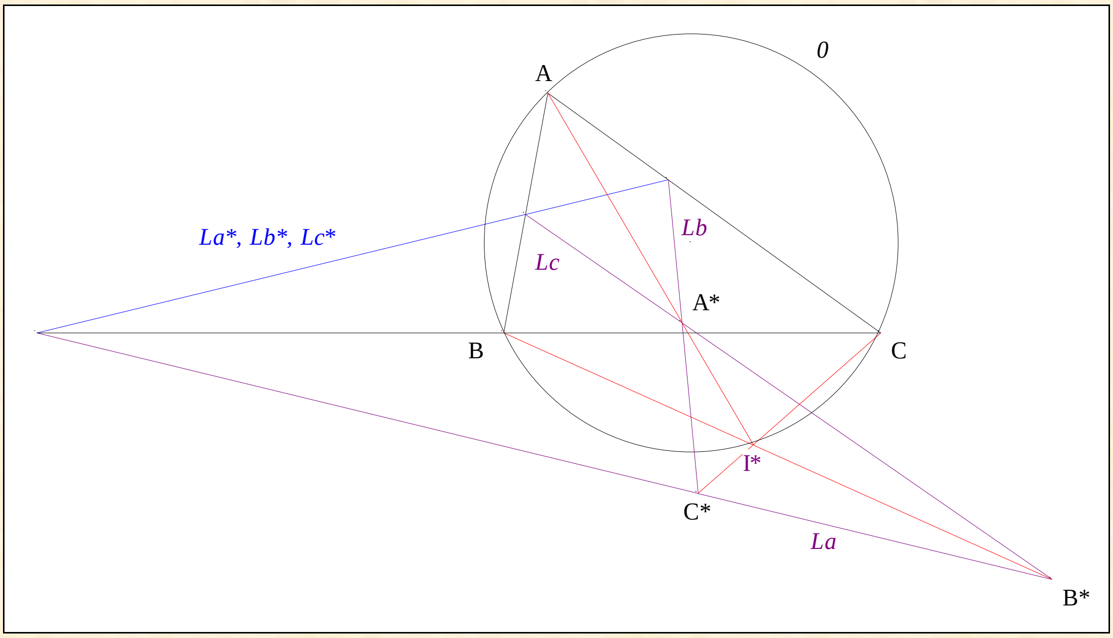
Une rue à Timisoara, un concours de mathématiques pour étudiants de premier cycle porte son nom.
Une statue en son honneur, sculptée en 1930 par Cornel Medrea, a été érigée située en face de la faculté de génie mécanique de Timişoara.

En 1987, l'anglais Stanley Norman Collings redécouvre le résultat de Trajan Lalesco, celui-ci n'ayant donné aucun renseignement sur son origine… La recherche historique des origines n'est donc pas terminée…

4. Une réciproque

VISION

Figure :



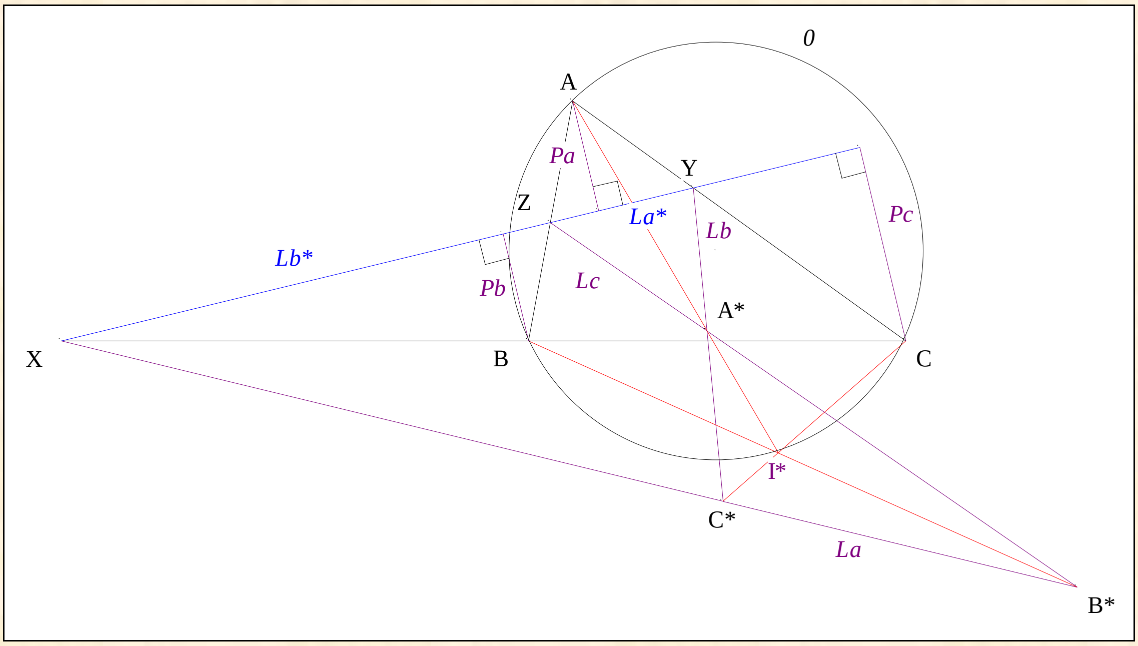
Traits :	A*B*C*	un triangle,
	I*	le centre du triangle A*B*C,
	0	un cercle passant par I*,
	A, B, C	les seconds points d'intersection de (A*I*), (B*I*), (C*I*)
et	*La*, Lb*, Lc**	les symétriques de (B*C*), (C*A*), (A*B*) par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : *La**, *Lb** et *Lc** sont confondus. [15]

Commentaire : la réciproque d'un théorème est souvent occultée. Elle permet pourtant de résoudre de nombreux problèmes.

VISUALISATION

[15] Reverse of a known theorem of geometry, AoPS du 06/06/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=592615
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22387



- Notons X, Y, Z les point d'intersection de (B*C*) et (BC), (C*A*) et (CA), (A*B*) et (AB),
  et *Pa*, *Pb*, *Pc* les perpendiculaire à (YZ), (ZX), (XY) issues de A, B, C.

- **Scolies :** *La** = (YZ) , *Lb** = (ZX) , *Lc** = (XY).

- En s'inspirant de la démarche présentée en **A. III. 1.**,
  nous montrerions que *Pa* est la A-isogonale de (AA*) relativement à ABC
  Pb est la B-isogonale de (BB*) relativement à ABC
  Pc est la B-isogonale de (BB*) relativement à ABC.

- D'après **A. III. 1.** Scolie **2,** (A*A), (B*B) et (C*C) concourent en I* i.e sur *0*.

- D'après "Le théorème de Beltrami" (Cf. **D.** Annexe **1**), *Pa*, *Pb* et *Pc* sont parallèles entre elles.

- Nous avons : *Pa* // *Pb*
  par construction, (YZ) ⊥ *Pa* , *Pb* ⊥ (ZX)
  la relation // étant compatible avec la relation ⊥ , (YZ) // (ZX)
  d'après le postulat d'Euclide, (YZ) = (ZX)
  en conséquence, X, Y et Z sont alignés.

- **Conclusion :** *La**, *Lb** et *Lc** sont confondus.

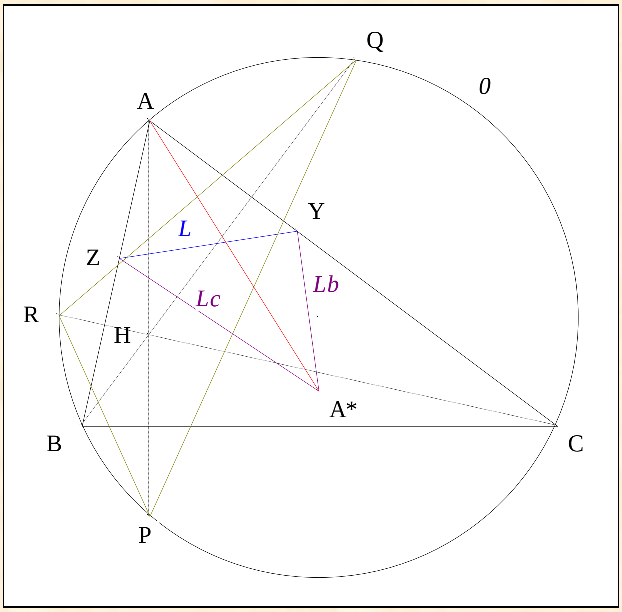
B. LE TRIANGLE A*B*C* OU DE LALESCO

Commentaire : marquons une pause pour s'intéresser au triangle A*B*C*.

1. Le triangle circumorthique

VISION

Figure :



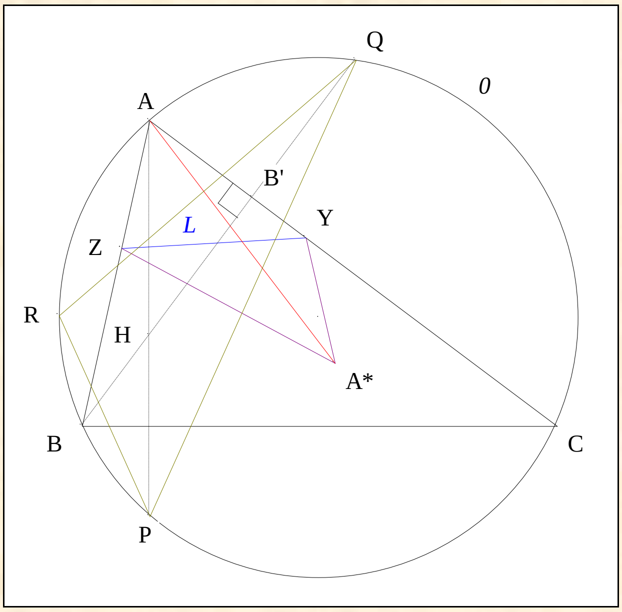
Traits :

	ABC	un triangle,
	L	une ménélienne,
	Y, Z	les point d'intersection de *L* resp. avec (AC), (AB),
	Lb, *Lc*	les symétriques de *L* resp. par rapport à (AC), (AB),
	A*	le point d'intersection de *Lb* et *Lc*,
	0	le cercle circonscrit à ABC
	H	l'orthocentre de ABC
et	PQR	le triangle circumorthique de ABC.

Donné : <QPR = <YA*Z.

Commentaire : H est le centre des triangles orthique et circumorthique.

VISUALISATION



- Notons H l'orthocentre de ABC
  et B' le pied de la B-hauteur de ABC.

- Une chasse angulaire :

  * H étant le centre de PQR, <QPR = 2 <QPA

  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <QPA = <QBA

  * par une autre écriture, <QBA = <B'BA

  * d'après "Le théorème 180", <B'BA = Π – (Π /2 + <BAB')

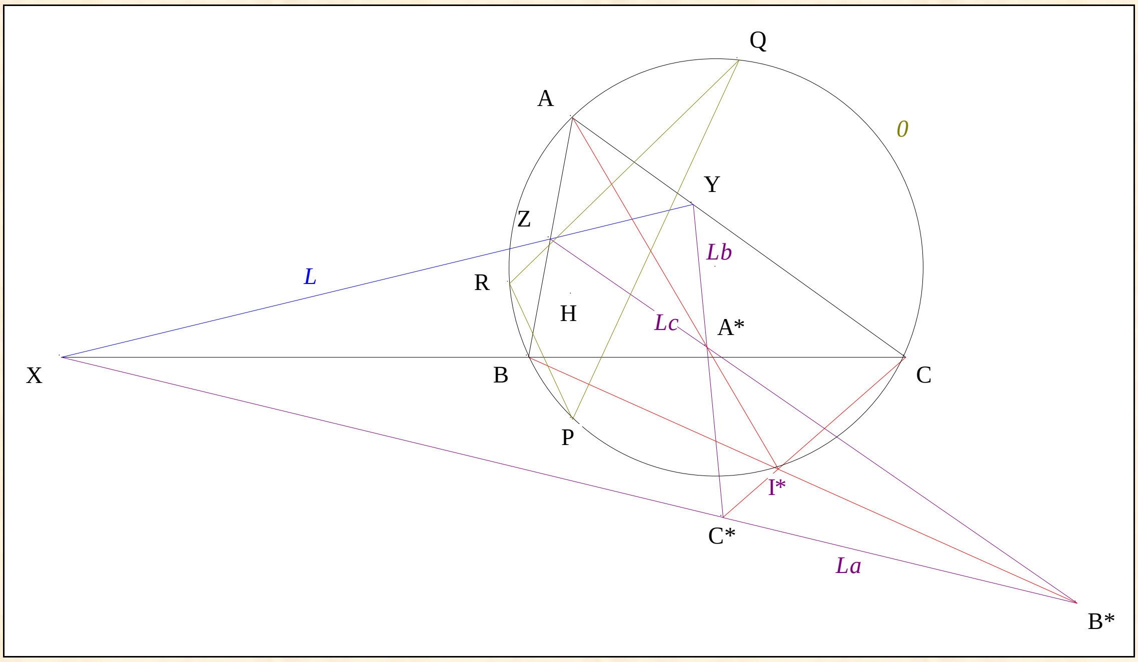
  * par transitivité de la relation =
    et par simplification, <QPR = Π – 2 <BAB'

  * par une autre écriture, <BAB' = <BAC

  * par substitution, <QPR = Π – 2 <BAC.

- **Conclusion :** d'après **A. III. 1.** Scolie **2**, <QPR = <YA*Z.

Scolie : deux triangles semblables



- Les notations sont les mêmes que précédemment.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <QPR = <C*A*B*
  <RQP = <A*B*C*
  <PRQ = <B*C*A*.

- **Conclusion :** A*B*C* est semblable à PQR.

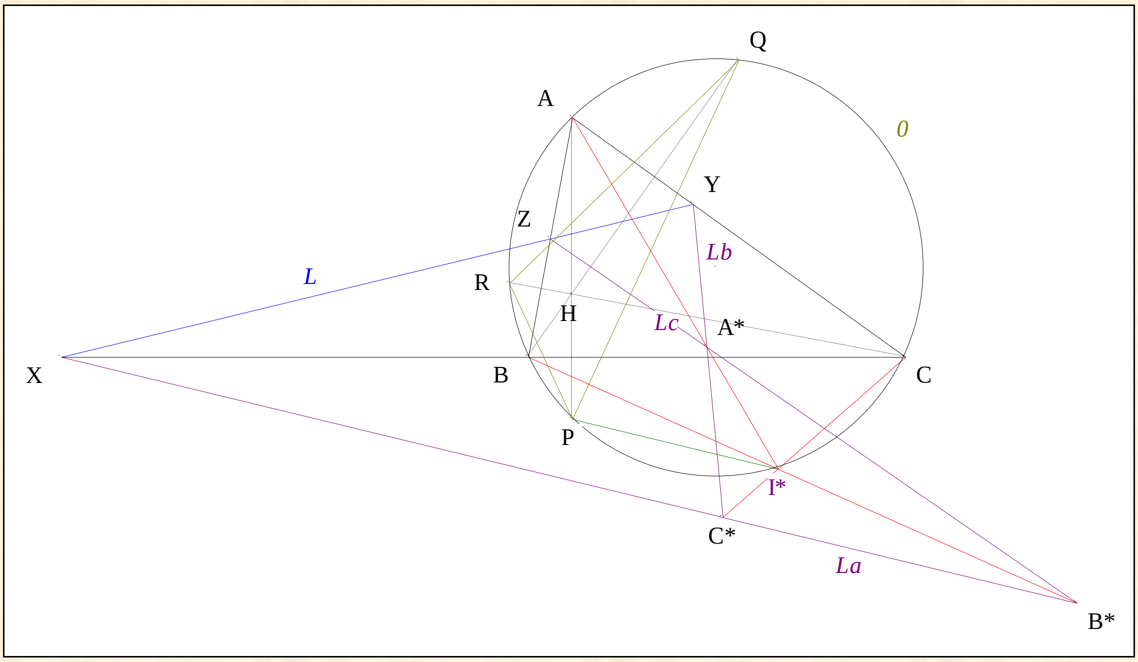
Scolie : A*B*C* est "Le triangle de Lalesco de ABC". [16]

2. Deux parallèles

VISION

Figure :

[16] Pour le surprenant résultat que Cosmin Pohoata a trouvé.



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (PI*) est parallèle à (B*C*).[17]

Commentaire : H et I* se correspondent en considérant les triangles semblables PQR et A*B*C*.

VISUALISATION

- Une chasse angulaire :

  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BI*P = <BQP

  * par une autre écriture, <BQP = <HQP

  * H étant le centre de PQR
  I* étant le centre de A*B*C*
  PQR et A*B*C* étant semblables, <HQP = <I*B*A*

  * I* étant le centre de A*B*C*, <I*B*A* = <I*B*C*

  * par transitivité de la relation = <BI*P = <I*B*C

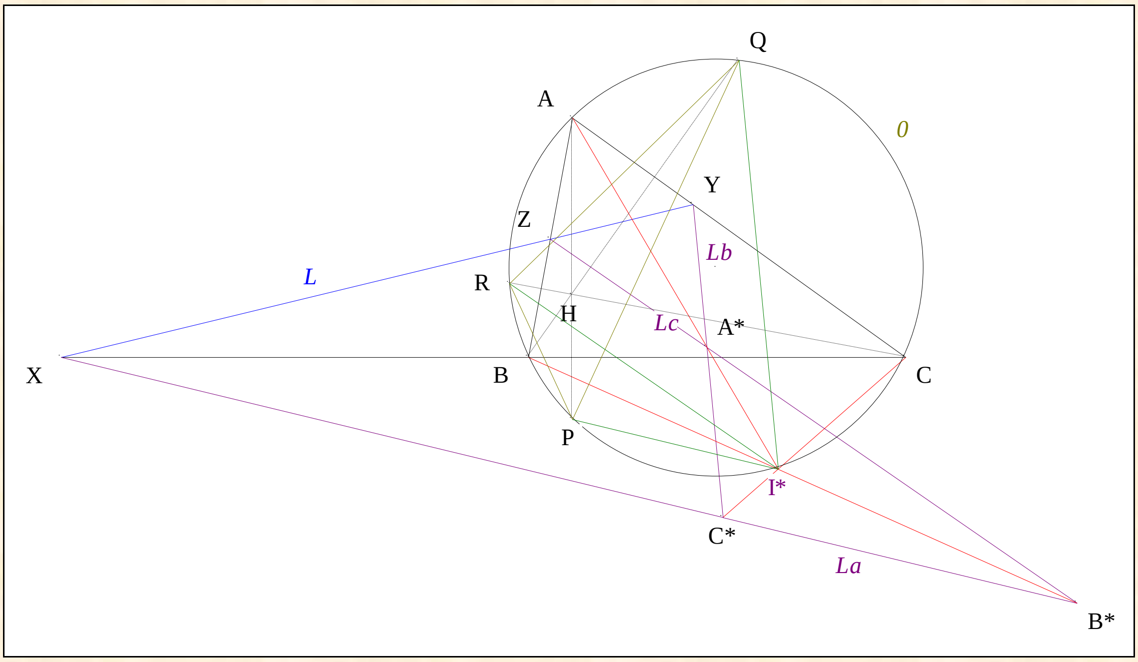
  * par une autre écriture, <I*B*C* = <BB*C*

  * par transitivité de la relation = <BI*P = <BB*C*.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème angles correspondants", (PI*) est parallèle à (B*C*).

[17] Ayme J.-L., A conjecture on OIM 2011 Problem **6**, AoPS du 21/07/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=419395

Scolie : autres parallèles

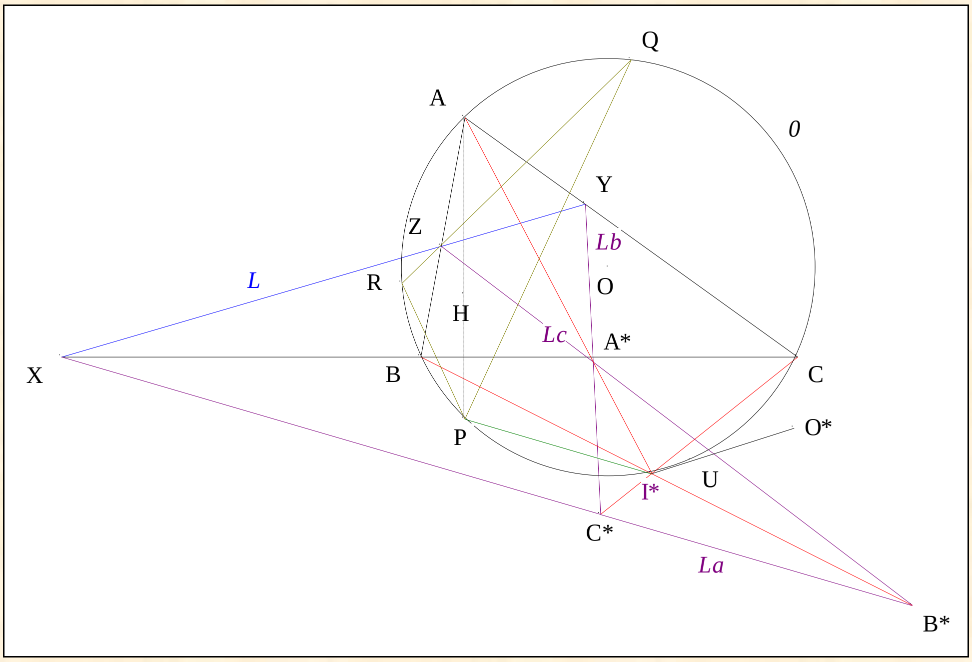


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (QI*) est parallèle à (C*A*)
(RI*) est parallèle à (A*B*).

3. La redécouverte de Cosmin Pohoata

VISION

Figure :



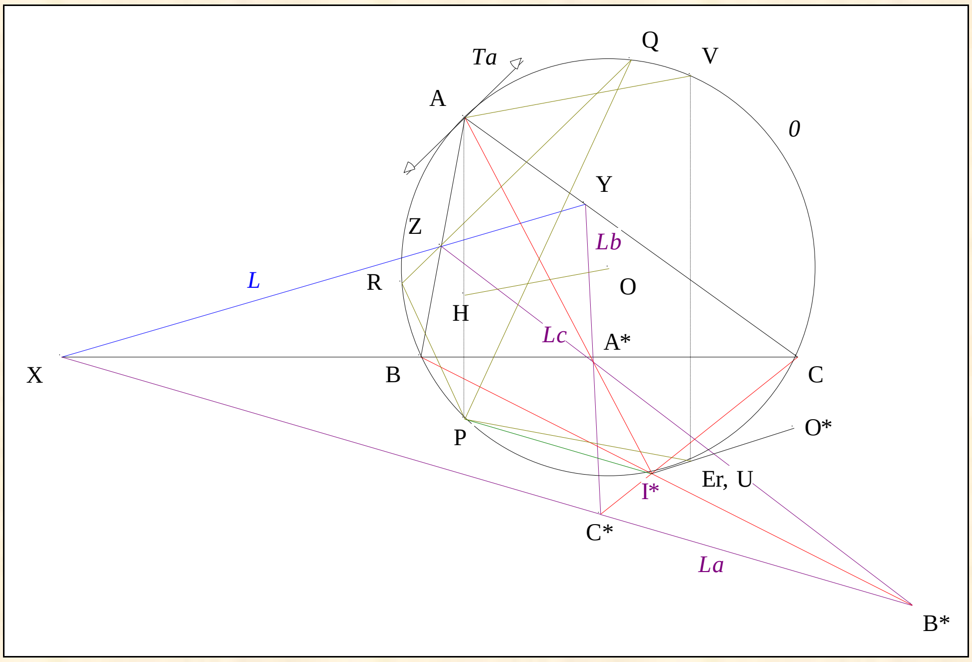
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

	O	le centre de *0*,
	O*	le centre du cercle circonscrit à A*B*C*
et	U	le second point d'intersection de (I*O*) avec *0*.

Donné : U est l'antipoint d'Euler de ABC. [18]

Commentaire :

VISUALISATION



- Notons Er l'antipoint d'Euler de ABC,
  V le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) issue de Er
  et *Ta* la tangente à *0* en A.

- D'après Heinen "Direction d'une droite de Simson" (Cf. **D.** Annexe **2**), (AV) // (OH).

- **Scolie :** *Ta* // (QR).

- Une chasse angulaire :

  * PQR et A*B*C* étant semblables, <(OH), (QR) = <(O*I*), (B*C*)
  * par parallélisme, <(OH), (QR) = <(AV), *Ta*
    <(O*I*), (B*C*) = <(O*I*), (PI*)
  * en conséquence, AV = PU
  * le quadrilatère cyclique APUV étant un trapèze, (UV) ⊥ (BC)
  * il s'en suit que U et Er sont confondus.

---

[18] Pohoata C., On the relections of a line wrt the sidelines of a triangle, AoPS du 29/07/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=421236

- **Conclusion :** U est l'antipoint d'Euler de ABC.

Note historique : ce résultat sans référence se trouve dans le livre de Trajan Lalesco [19] datant avant 1916.

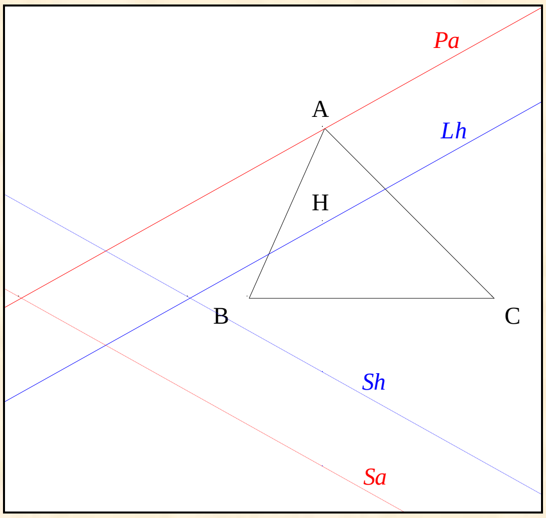
C. UNE DIRECTION RELATIVE À UN TRIANGLE

Commentaire : la droite *L* est remplacée par sa direction…

1. Une droite de Steiner parallèle à une cévienne

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
Lh une H-ménélienne de ABC,
Pa la A-cévienne de ABC parallèle à *Lh*
et *Sa*, *Sh* les symétriques resp. de *Pa*, *Lh* par rapport à (BC).

Donné : *Sa* est parallèle à *Sh*.

Commentaire : la preuve est laissée aux bons soins du lecteur.

Énoncé traditionnel :

---

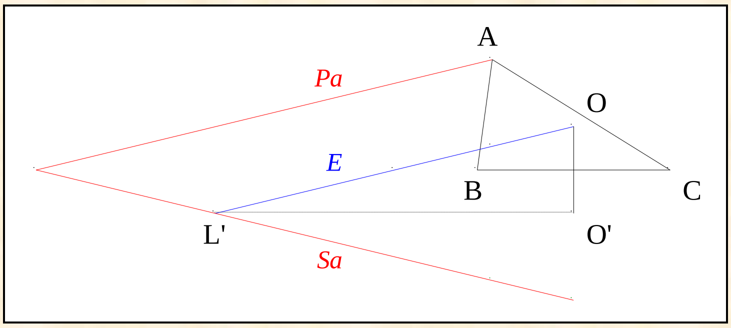
[19] Lalesco T., La Géométrie du Triangle (1937), red. Jacques Gabay Reprint (1987) 12-9 p. 94 et 12-18 p. 99

les symétriques de deux droites parallèles
par rapport à une droite
sont parallèles.

2. Cas où *Lh* est la droite d'Euler

VISION

Figure :

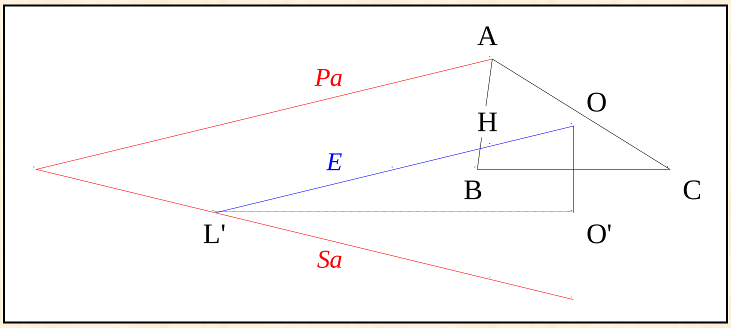


Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
E la droite d'Euler de ABC,
Pa la A-cévienne de ABC parallèle à *E*,
Sa la symétrique de *Pa* par rapport à (BC),
L' le point d'intersection de *Sa* et *E*,
et O' le symétrique de O par rapport à (BC).

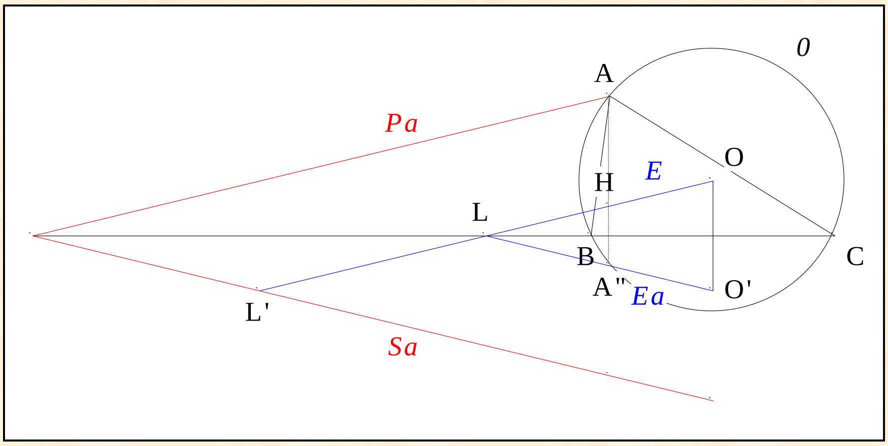
Donné : *Sa* est la symétrique de *E* par rapport à (L'O').

Commentaire : recherche de l'axe de symétrie entre *E* et *Sa*.

VISUALISATION



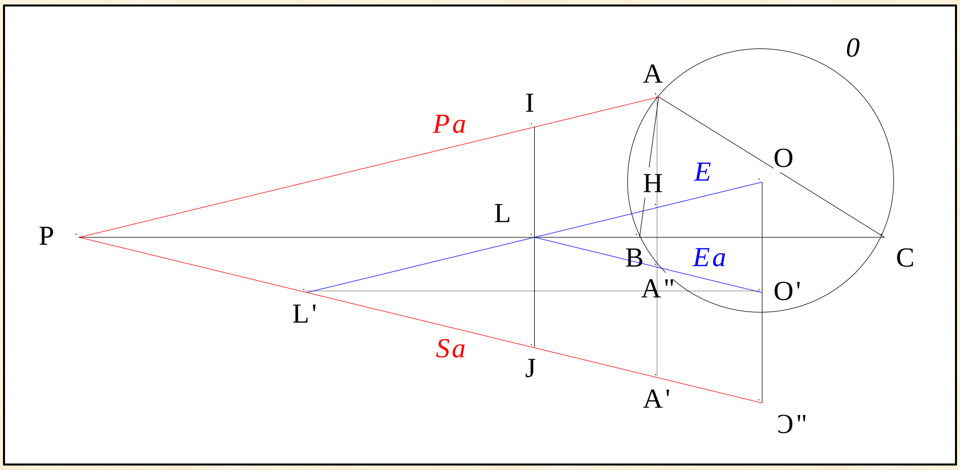
- Notons H l'orthocentre de ABC,
- **Scolie :** par définition, *E* est la droite (OH).



- Notons L les points d'intersection de *E* et (BC),
  0 le cercle circonscrit à ABC,
  A" le A-point circumorthique de ABC
  et *Ea* la symétrique de *E* par rapport à (BC).

- D'après Carnot "Symétique de H par rapport à un côté" [20], A" est le symétrique de H par rapport à (BC) ;
  en conséquence, *Ea* = (LA"O').

- **Conclusion partielle :** d'après **C. 1**, *Ea* // *Sa*.



- Notons P le point d'intersection de *Pa* avec (BC),
  A' le symétrique de A par rapport à (BC)
  et O" le point d'intersection de (OO') et *Sa*.

- Par définition de *Sa*, P est sur *Sa*.

- Notons I, J les points d'intersection de la parallèle à (AH) passant par L avec *Pa*, *Sa*,

- Par construction, O'O" = LJ ;
  par définition d'une symétrie axiale, LJ = LI ;
  le quadrilatère AILH étant un parallélogramme, IL = AH ;
  d'après Carnot "Une relation" (Cf. **D.** Annexe **3**), AH = OO' ;
  par transitivité de la relation =, O'O" = OO' ;
  en conséquence, O' est le milieu de [OO"].

- (L'O') est la L'-médiatrice du triangle L'-isocèle L'O"O,

---

[20] Carnot L. N. M., n° **142**, *De la correlation des figures géométriques*, (1801) 101

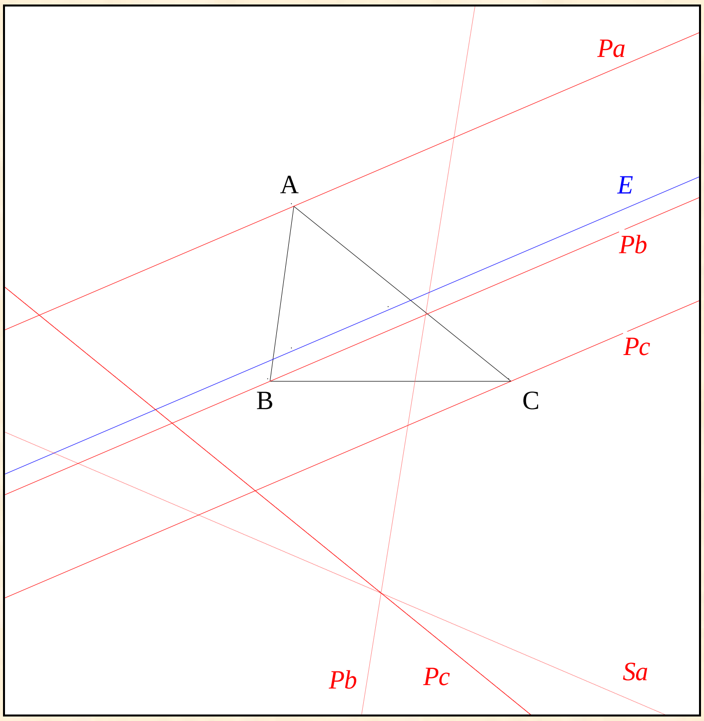
- **Conclusion :** par définition d'une symétrie axiale,
  Sa = (L'O'') est la symétrique de *E* = (L'O) par rapport à (L'O').

Scolie : (L'O') // (LC).

3. Le point de symétrie de Parry

VISION

Figure :



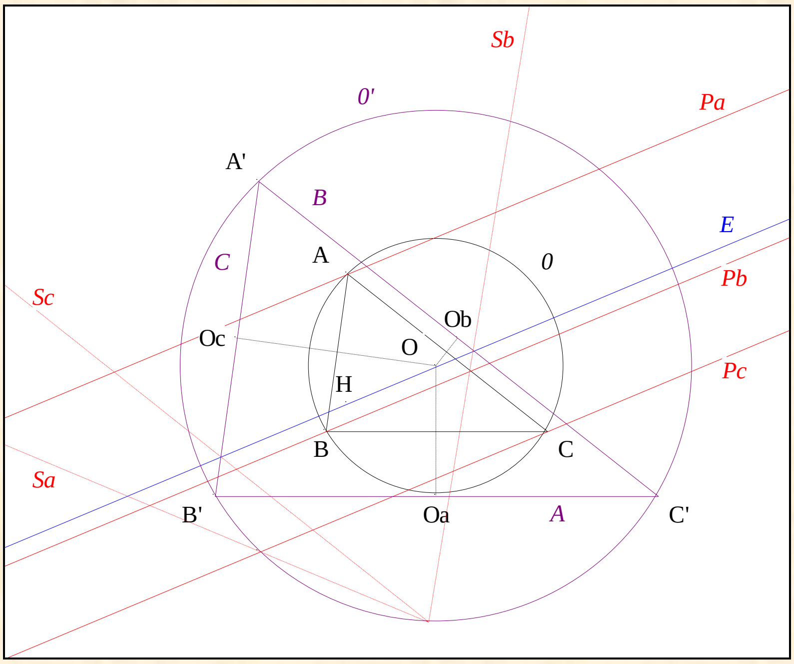
Traits : ABC un triangle,
E la droite d'Euler de ABC,
Pa, *Pb*, *Pc* trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C
et *Sa*, *Sb*, *Sc* les symétriques de *Pa*, *Pb*, *Pc* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : *Pa*, *Pb* et *Pc* sont parallèles à *E* *si, et seulement si,* *Sa*, *Sb* et *Sc* sont concourantes. [21]

Commentaire : les sommets du triangle sont mis en œuvre.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

[21] Parry C. P., Problème **10637**, *American Mathematical Monthly* vol.**105**, **1** (1998) 68
Solution with complex : Young R.L., *Amer. Math. Monthly*, **106** (1999) 779–780
Pohoata C., On the Parry Reflection Point (Theorem **1**), *Forum Geometricorum* vol. **8** (2008) 43-48 ;
http://forumgeom.fau.edu/FG2008volume8/FG200806.pdf



- **Hypothèse :** *Pa*, *Pb* et *Pc* sont parallèles à *E*.

- Notons H l'orthocentre de ABC,
  0 le cercle circonscrit à ABC,
  O le centre de *0*,
  Oa, Ob, Oc les symétriques de O par rapport à (BC), (CA), (AB),
  A, *B*, *C* les parallèles à (BC), (CA), (AB) passant resp. par Oa, Ob, Oc,
  A', B', C' les points d'intersection resp. de *B* et *C*, *C* et *A*, *A* et *B*,
  et *0'* le cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

- **Scolie :** *E* est la droite (OH).

- Le triangle A'B'C' étant homothétiques à ABC (centre O, rapport 2), *E* est leur commune droite d'Euler.

- D'après **C. 2**, *Sa*, *Sb* et *Sc* sont les symétriques de *E* resp. par rapport à *A*, *B*, *C*.

- **Conclusion :** d'après **A. II.** Une droite de Steiner, *Sa*, *Sb* et *Sc* concourent sur *0'*.

VISUALISATION SUFFISANTE

- **Hypothèse :** *Sa*, *Sb* et *Sc* sont concourantes

- Raisonnons par l'absurde en affirmant que l'une au moins des droites *Pa*, *Pb* et *Pc* n'est pas parallèle à *E* ;
  par exemple, *Pa* n'est pas parallèle à *Pb*, mais *Pb* et *Pc* le sont à *E*.

- Notons *P'a* la A-cévienne parallèle à *E* (elle est distincte de *Pa*)
  et *S'a* la symétrique de *Pa* par rapport à (BC).

- D'après la visualisation nécessaire, *S'a*, *Sb* et *Sc* concourent sur *0'* ;
  par hypothèse, *Sa*, *Sb* et *Sc* concourent sur *0'* ;
  en conséquence, *Sa* et *S'a* sont confondues ;
  par symétrie axiale par rapport à (BC), *Pa* et *P'a* sont confondues, ce qui est contradictoire.

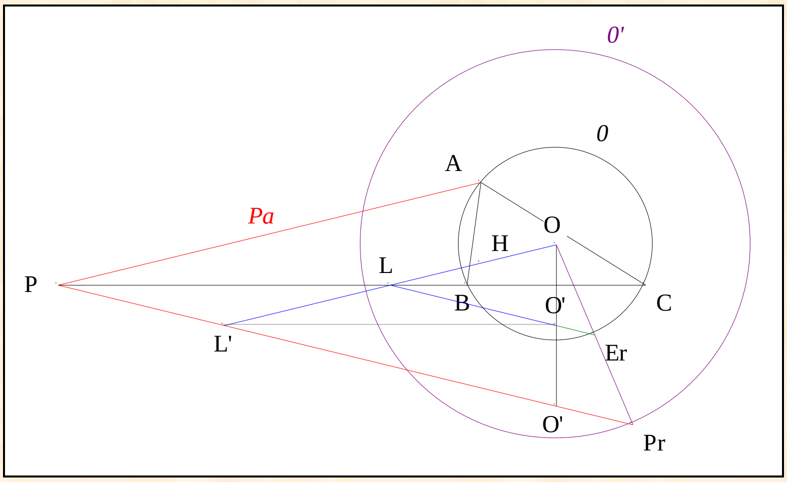
- **Conclusion :** *Pa*, *Pb* et *Pc* sont parallèles à *E*.

Scolies : **(1)** ce point de concours noté Pr est

- en français "le point de symétrie de Parry de ABC"
- en anglais "the Parry reflection point of ABC"

et est répertorié sous X_{399} chez ETC [22].

(2) Position de Pr



- Notons Er l'antipoint d'Euler de ABC.
- **Conclusion :** Pr est le symétrique de O par rapport à Er.

Note historique : Pr a été étudié par le géomètre anglais Cyril Frederick Parry dans les années 1990.

4. Une courte note sur Cyril Frederick Parry

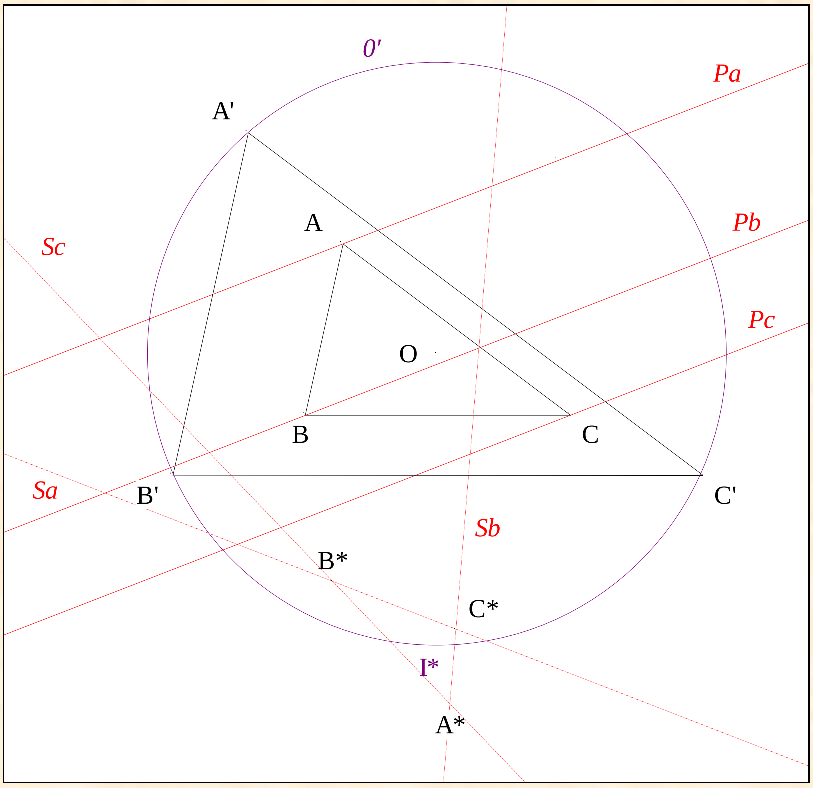
Vivien Harrison, la plus jeune des filles de Cyril Parry a annoncé le décès de son père au groupe *Hyacinthos* ; après un voyage en Égypte pour réaliser le rêve de sa vie i.e. celui de voir les pyramides, il décède le dimanche 13 février 2005 après une pneumonie suivie d'une crise cardiaque.

5. Une généralisation du théorème de Collings-Lalesco

VISION

Figure :

[22] Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle homothétique de ABC (centre O, rapport 2),
0' le cercle circonscrit à A'B'C',
Pa, *Pb*, *Pc* trois droites parallèles entre elles passant resp. par A, B, C,
Sa, *Sb*, *Sc* les symétriques de *Pa*, *Pb*, *Pc* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
A*, B*, C* les points d'intersection de *Sb* et *Sc*, *Sc* et *Sa*, *Sa* et *Sb*,
et I* le centre du triangle A*B*C*.

Donné : I* est sur *0'*. [23]

Commentaire : la démarche est similaire qu'en **A. III**.

[23] Finding locus, Sharygin Olympiad 2010 Final round, AoPS du 02/07/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=541836
Pohoata C., *Hyacinthos*, message #**16732** ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/16732

D. CERCLES

PASSANT PAR

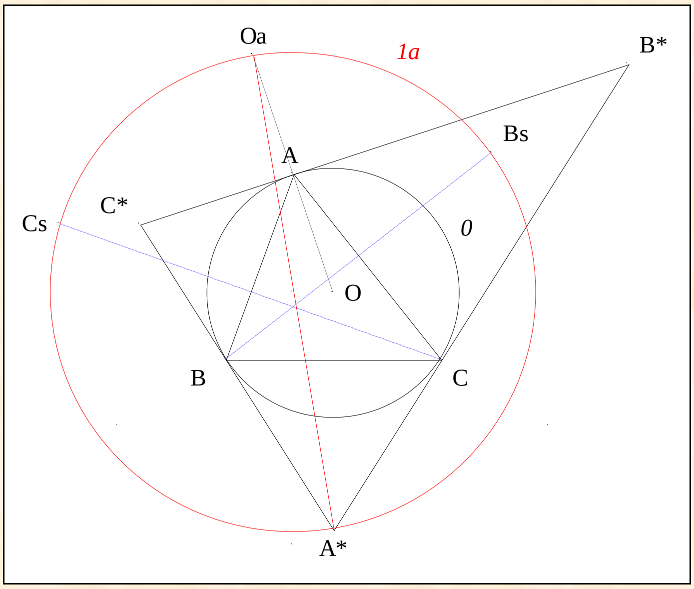
LE POINT DE SYMÉTRE DE PARRY

Commentaire : marquons une pause pour s'intéresser au point de symétrie de Cyril Frederick Parry.

1. Un premier résultat de Jean-Pierre Ehrmann

VISION

Figure :



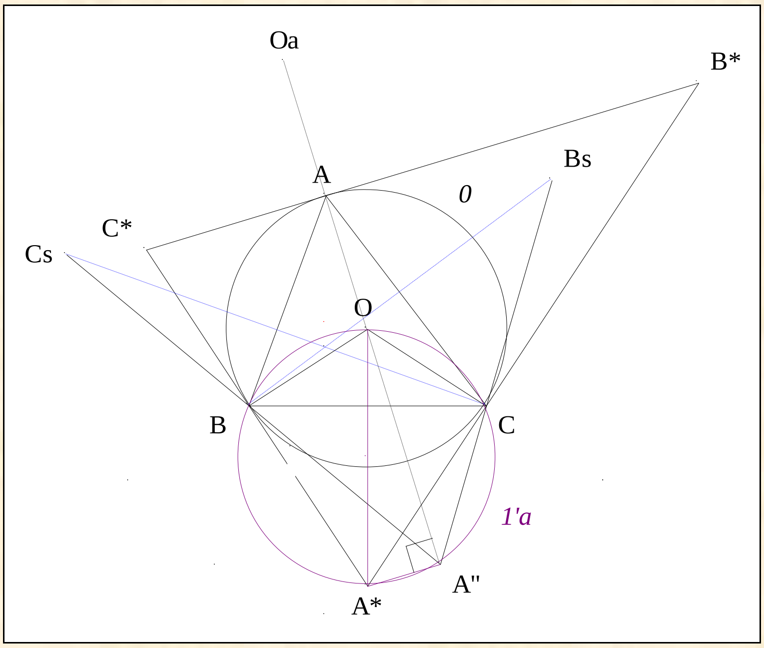
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
A*B*C* le triangle tangentiel de ABC,
Oa le symétrique de O par rapport à A,
Bs, Cs les symétriques de B, C resp. par rapport à (CA), (AB)
et *1a* le cercle de diamètre [A*Oa].

Donné : *1a* passe par Bs et Cs.[24]

Commentaire : les triangles symétrique et tangentiel de ABC sont mis en œuvre.

VISUALISATION

[24] Ehrmann J.-P., Similar Pedal and Cevian Triangles, *Forum Geometricorum* **3** (2003) 101-104 ;
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200310index.html
Pohoata C., *Hyacinthos*, message #**15825**, November 18, 2007 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/info

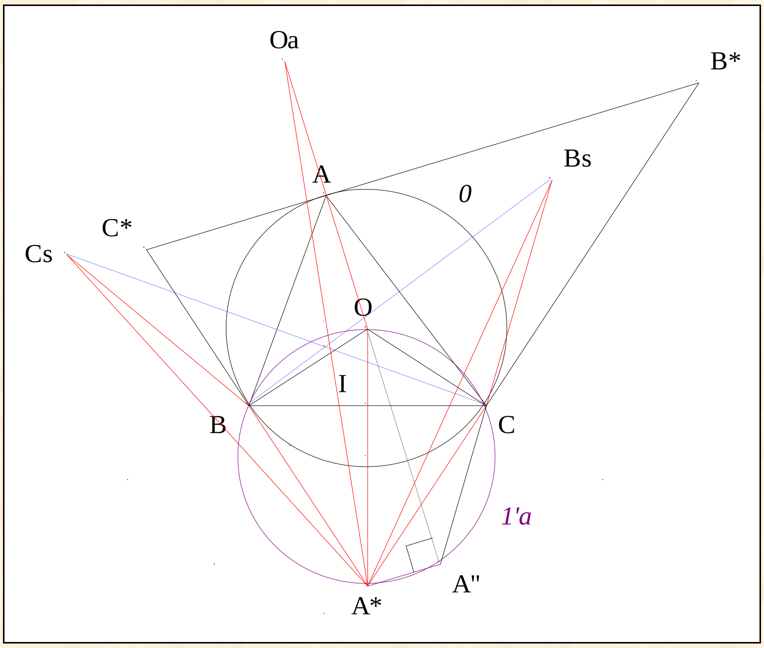


- Notons A" le point d'intersection de (BCs) et (CBs),
  et *1'a* le A-cercle de Kosnita ; il passe par B, C et O.

- D'après Eugène Catalan [25], **(1)** O et A" sont sur *1'a*
  (2) A" est sur (AO)
  (3) *1'* a pour diamètre [OA*].

- Par hypothèse, Oa est sur (AO) ;
  d'après l'axiome d'incidence **Ia**, Oa, A, O et A" sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (OaA") ⊥ (A"A*).



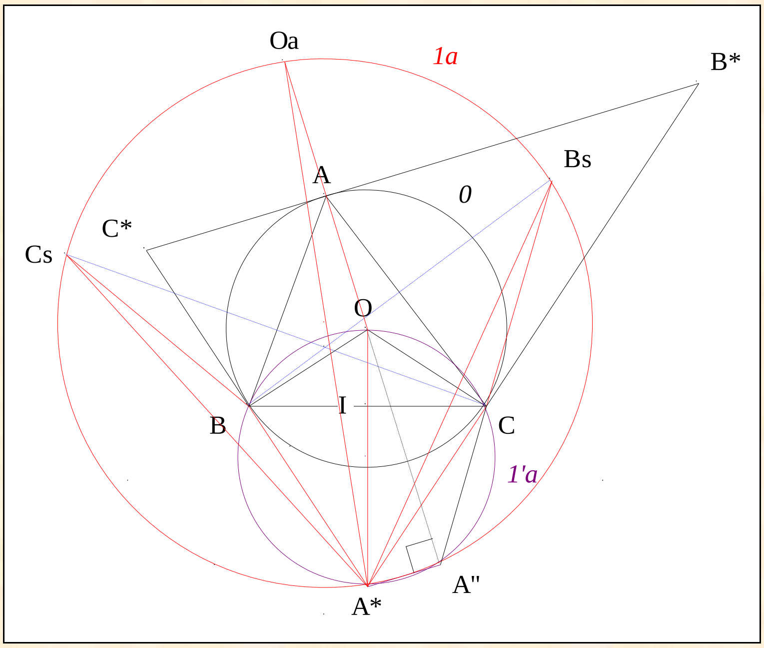
- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", <A*BA" = <A*CA" = <A*OA" ;
  en conséquence, leur supplémentaires sont égaux i.e. <CsBA* = <BsCA* = <OaOA*.

[25] Catalan E., Quelques théorèmes de géométrie élémentaire, *Journal de Mathématiques* **III** (1883) 61-62

- Notons I le point d'intersection de (OA*) et (BC).

- D'après Euclide "Tangentes égales" appliqué à *0*, A*B = A*C ;
  par hypothèse, BCs = BC = CBs.

- D'après "Le théorème c.a.c." [26], les triangles A*BCs et A*CBs sont égaux.



- Un chasse de rapports : $\frac{OOa}{OA*} = \frac{2.OA}{OA*}$;

  ou encore, $\frac{2.OA}{OA*} = \frac{2.OC}{OA*}$;

  les triangles A*OC et A*BI étant semblables, $\frac{2.OC}{OA*} = \frac{2.BI}{BA*}$;

  nous avons, $\frac{2.BI}{BA*} = \frac{BCs}{BA*}$;

  par transitivité de la relation = $\frac{OOa}{OA*} = \frac{BCs}{BA*}$.

- **Conclusion partielle :** les triangles A*BCs et A*OOa étant semblables**,**
  <A*CsA" = <A*OaA" = <A*BsA" sont égaux.

- D'après "le théorème de l'arc capable", A*, A", Bs, Oa et Cs sont cocycliques.

- **Conclusion :** *1a* passe par Bs et Cs.

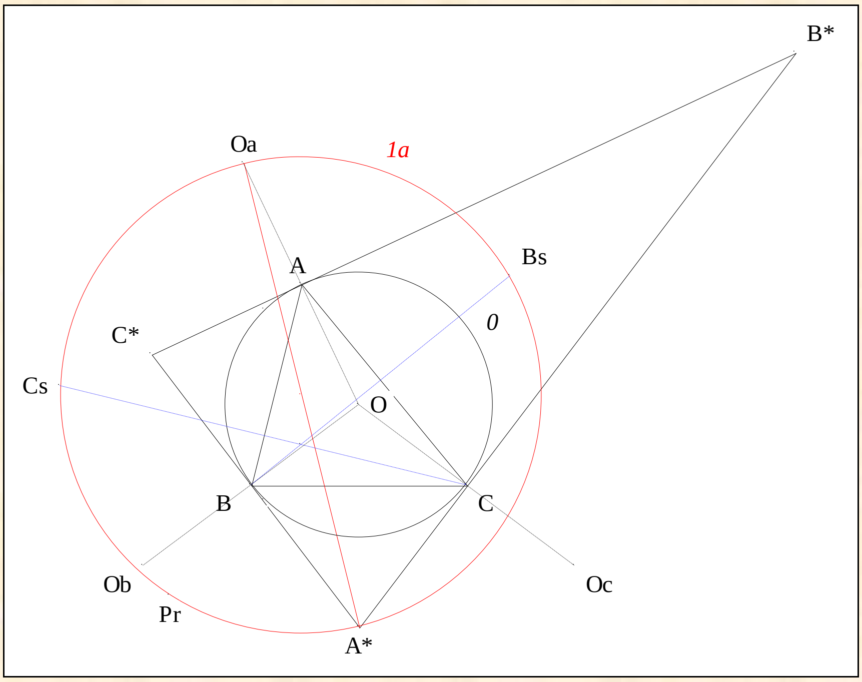
Note historique : la preuve de Jean-Pierre Ehrmann a recours aux coordonnées trilinéaires.

[26] c.a.c. signifie côté-angle-côté

2. Le second résultat de Jean-Pierre Ehrmann

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

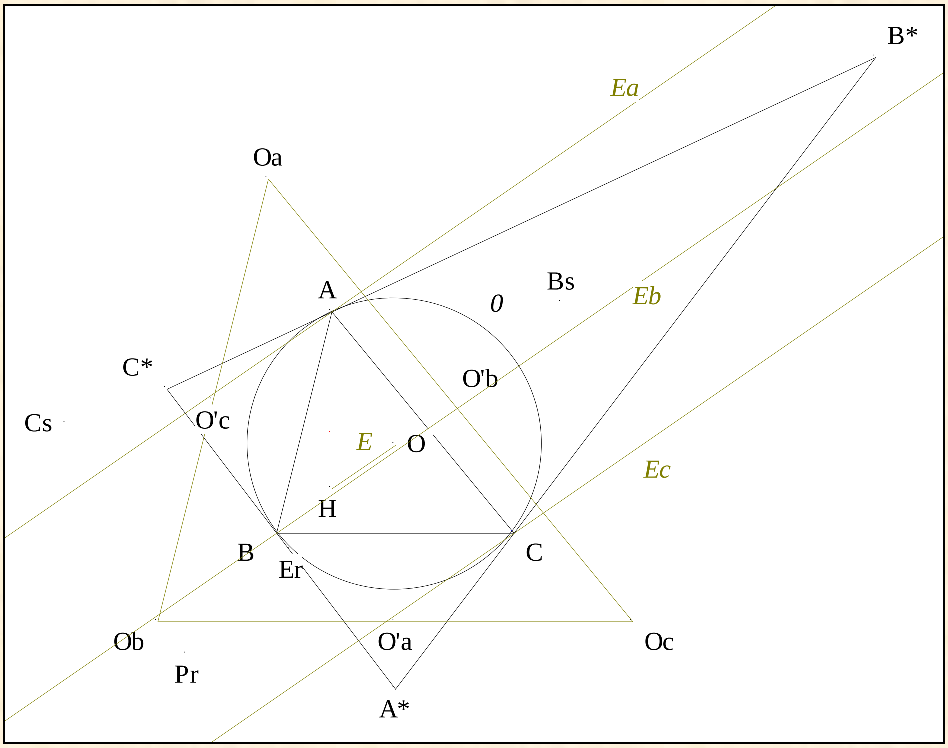
	Ob, Oc	les symétriques de O resp. par rapport à B, C,
	1a	le cercle de diamètre [A*Oa] ; il passe par Bs et Cs ;
et	Pr	le point de symétrie de Parry de ABC.

Donné : Pr est sur *1a*.[27]

Commentaire : le point de symétrie de Parry sera sur plusieurs cercles.

VISUALISATION

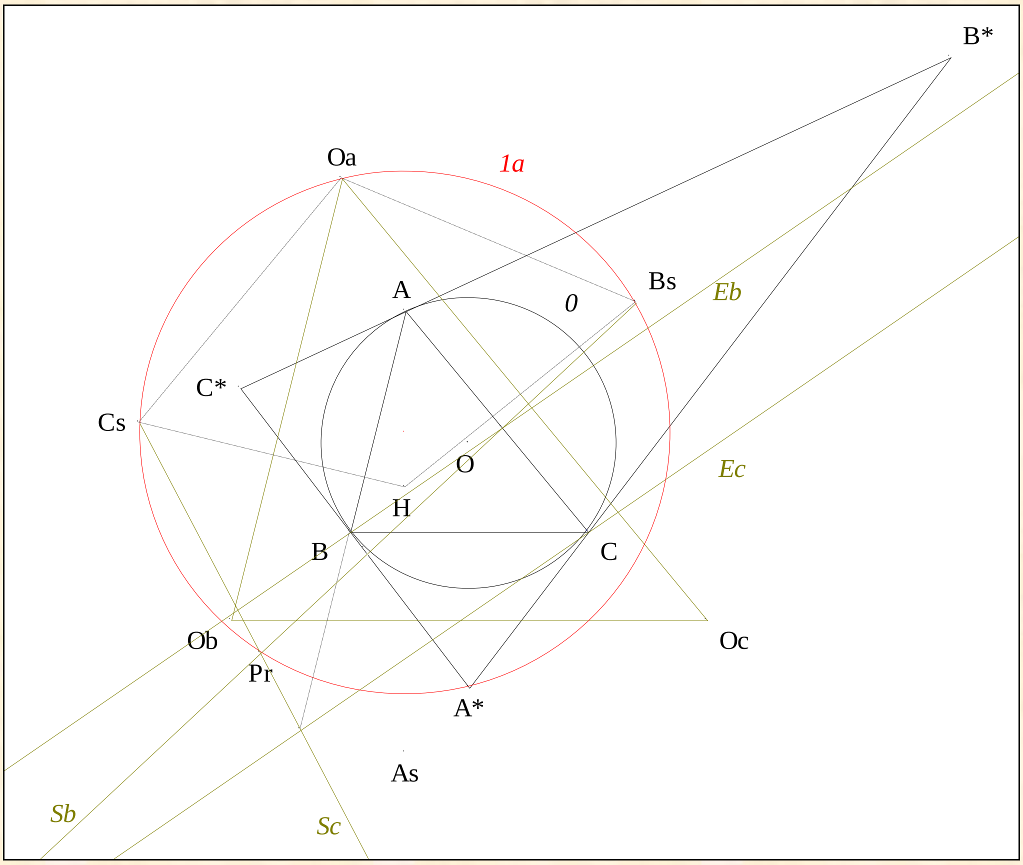
[27] Ehrmann J.-P., Similar Pedal and Cevian Triangles, *Forum Geometricorum* **3** (2003) 101-104 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200310index.html



- Notons O'a, O'b, O'c les symétriques de Oa, Ob, Oc par rapport à (BC), (CA), (AB)
  H l'orthocentre de ABC
  E la droite d'Euler de ABC i.e. (OH),
  et *Ea*, *Eb*, *Ec* trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C et parallèles à *E*.

- **Scolies :** O'a est sur (ObOc) , O'b est sur (OcOa) , O'c est sur (OaOb).

Commentaire : nous retrouvons la situation présentée en **C. 3.** Le point de symétrie de Cyril Parry i.e. que Pr est sur le cercle circonscrit au triangle OaObOc.



- Notons *Sb*, *Sc* les symétriques de *Eb*, *Ec* resp. par rapport à (CA), (AB).

- **Scolies :** **(1)** *Sb* passe par Bs , *Sc* passe par Cs

  (2) *Sb* et *Eb* se coupent sur (AC) ; *Sc* et *Ec* se coupent sur (AB)

  (3) Pr est le point d'intersection de *Sb* et *Sc*.

- Une chasse angulaire à **Π** près :

  * d'après Chasles, <*Sc*, *Sb* = <Sc, (AB) + <(AB), (AC) + <(AC), *Sb*

  * par intersection, <Sc, (AB) = <(AB), *Ec* ; <(AC), *Sb* = <*Eb*, (AC)

  * par substitution, <*Sc*, *Sb* = <(AB), *Ec* + <(AB), (AC) + <*Eb*, (AC)

  * *Eb* et *Ec* étant parallèles, <*Sc*, *Sb* = 2.<(AB), (AC)

  * par parallélisme, 2.<(AB), (AC) = 2. <(OaOb), (OaOc)

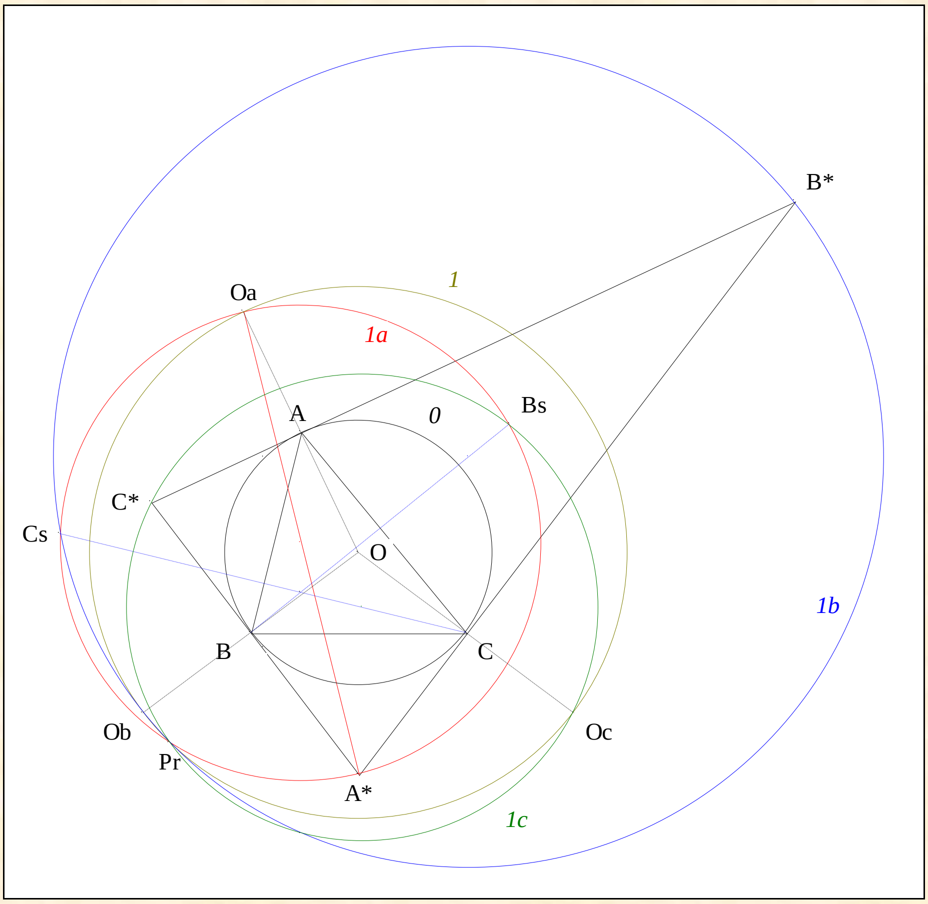
  * par symétrie, 2. <(OaOb), (OaOc) = <(OaCs), (OaBs)

  * par transitivité de =, <*Sc*, *Sb* = <(OaCs), (OaBs).

- **Conclusion :** Pr est sur *1a*.

Note historique : la preuve de Jean-Pierre Ehrmann a recours aux coordonnées trilinéaires.

Scolies : **(1)** vision triangulaire

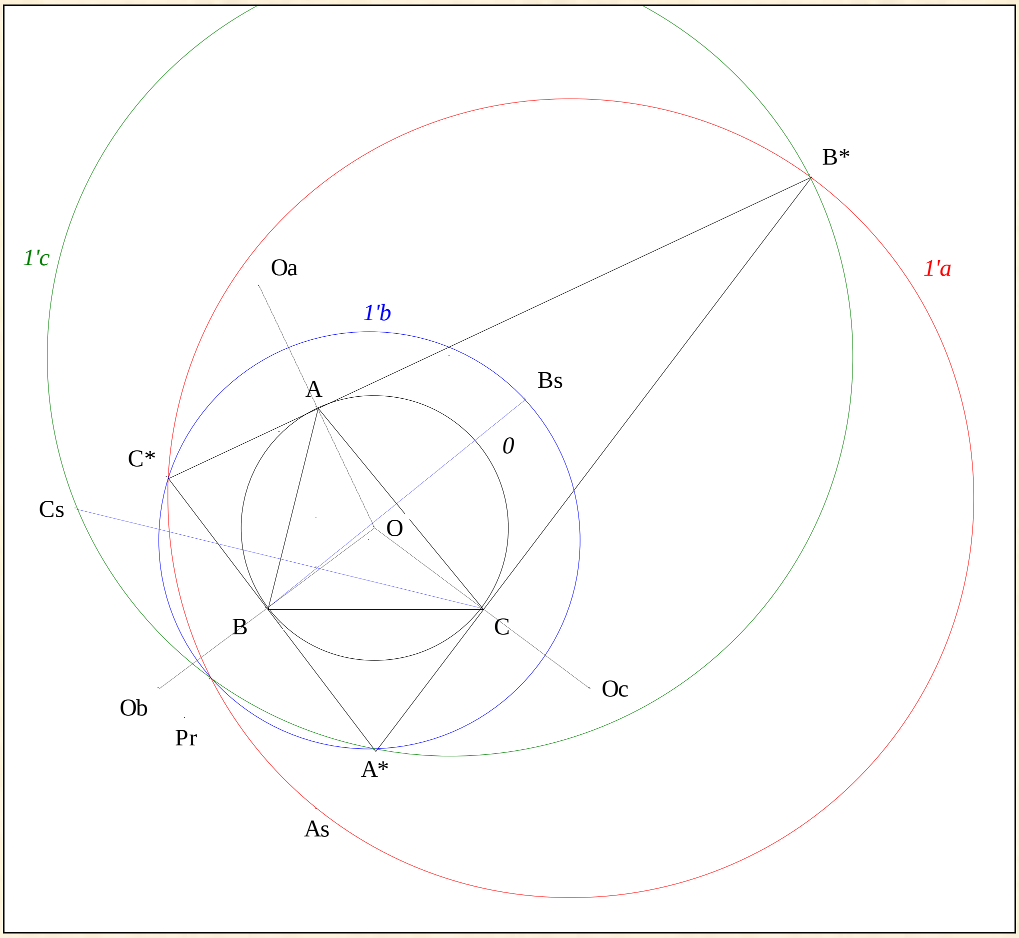


- Notons *1b* le cercle de diamètre [B*Ob] ; il passe par Cs et As ;
  1b le cercle de diamètre [C*Oc] ; il passe par As et Bs ;
  et *1* le cercle circonscrit à OaObOc.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que Pr est sur *1b*
  Pr est sur *1c*.

- **Conclusion :** *1*, *1a*, *1b* et *1c* passent par Pr.

(2) Trois autres cercles concourants



- Notons *1'a* le cercle passant par B*, C*, As
  1'b le cercle passant par C*, A*, Bs
  et *1'c* le cercle passant par A*, B*, Cs.

- Rappelons que *1a* le cercle passant par Bs, Cs, A*
  1b le cercle passant par Cs, As, B*
  et *1c* le cercle passant par As, Bs, C* sont concourants en Pr.

- **Conclusion :** d'après La technique d'accentuation" [28], *1'a*, *1'b* et *1'c* sont concourants. [29]

28 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**, p. 12-13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

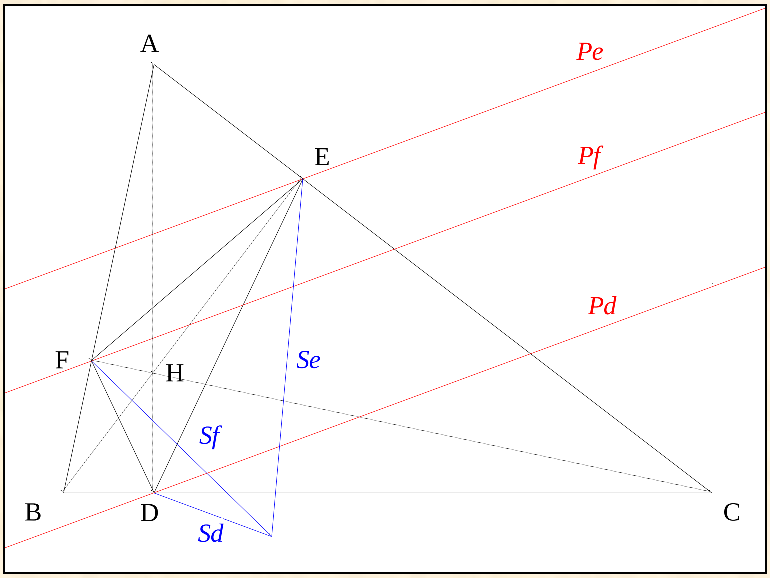
29 Pohoata C., On the Parry Reflection Point (Theorem **4**), *Forum Geometricorum* vol. **8** (2008) 43-48 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2008volume8/FG200806.pdf
Pohoata C., *Hyacinthos*, message #**15825**, November 18, 2007 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/info

E. UNE DIRECTION RELATIVE À UN TRIANGLE INSCRIT

I. LE TRIANGLE ORTHIQUE

VISION

Figure :



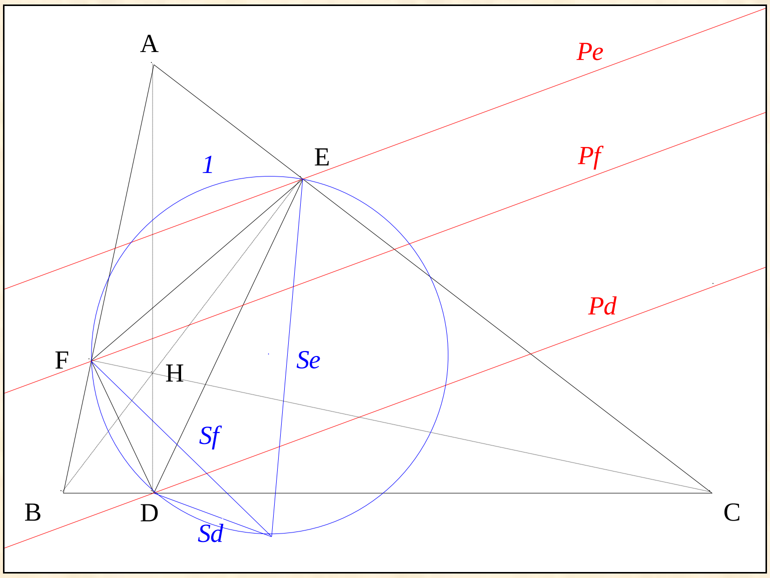
Traits : ABC un triangle,
DEF le triangle orthique de ABC,
Pd, *Pe*, *Pf* trois droites parallèles entre elles passant resp. par D, E, F
et *Sd*, *Se*, *Sf* les symétriques de *Pd*, *Pe*, *Pf* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : *Sa*, *Sb* et *Sc* sont concourantes. [30]

Commentaire : un triangle inscrit comme l'orthique.

VISUALISATION

[30] *Hyacinthos*, messages # **10563**, **10566** du 01/10/2004 ;



- Notons 1 le cercle d'Euler de ABC ; il passe par D, E et F.

- H étant le centre de DEF,
  (1) *Sd* est la D-isogonale de *Pd*
  (2) *Se* est la E-isogonale de *Pe*
  (3) *Sf* est la F-isogonale de *Pf*.

- D'après "Le théorème de Beltrami" [31], *Pd*, *Pe*, *Pf* étant parallèles entre elles, *Sa*, *Sb* et *Sc* sont concourantes sur *1*.

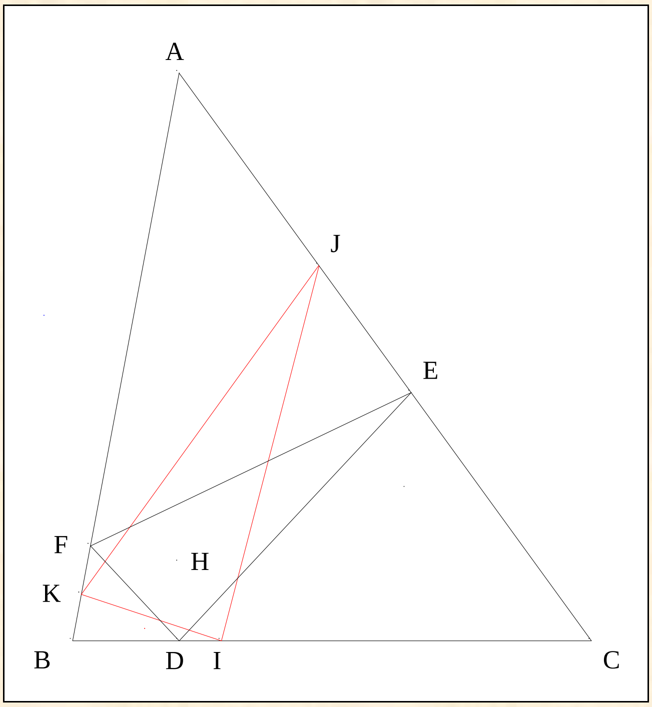
II. LE TRIANGLE INSCRIT EST DIRECTEMENT SEMBLABLE AU TRIANGLE ORTHIQUE

1. Construction d'un tel triangle

VISION

Figure :

[31] Beltrami E., *Archives* de Grünert **43**, p. 48

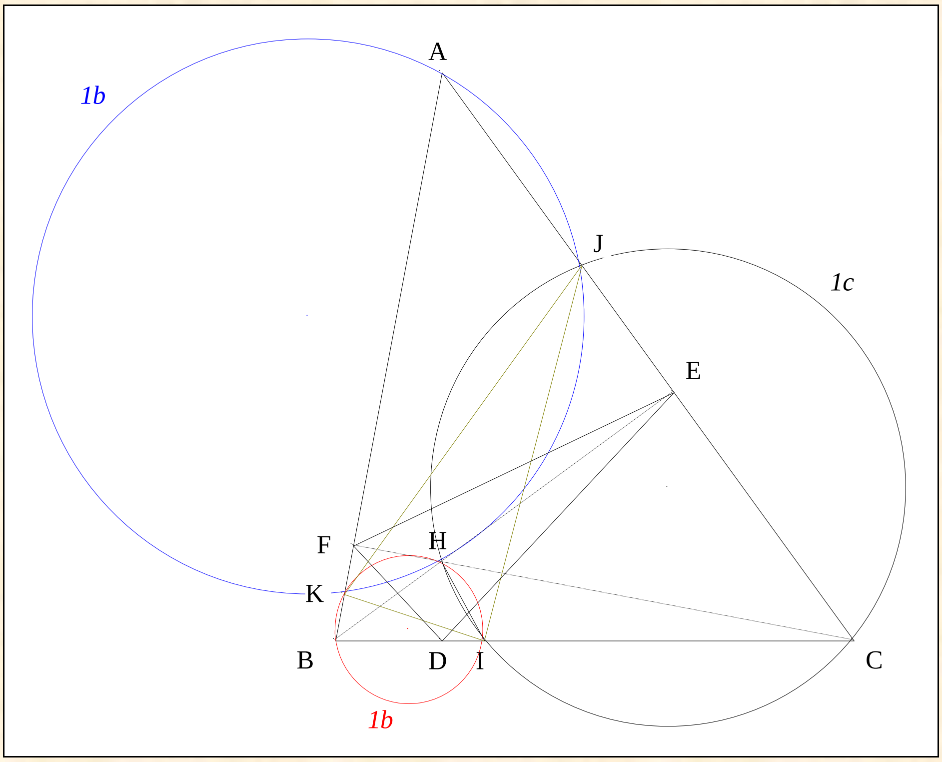


Traits :	ABC	un triangle,
	DEF	le triangle orthique de ABC
et	IJK	un triangle inscrit à ABC directement semblable à DEF.

Donné : construire IJK.

Commentaire : un résultat d'Auguste Miquel permet de le construire.

VISUALISATION



Construction

- Notons H l'orthocentre de ABC,
  I un point de (BC),
  1c le cercle passant par C, H, I,
  J le second point d'intersection de *1c* avec (CA)
  1a le cercle passant par A, H, J,
  K le second point d'intersection de *1a* avec (AB)
  et *1b* le cercle passant par B, H, K.

- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" [32], *1b* passe par I.

Les triangles IJL et DEF

- Une chasse angulaire :

  * par culture géométrique, <EDF = Π – 2.<BAC
  * par la relation de Chasles, <JIK = <JIH + <HIK
  * par le théorème de l'angle inscrit, <JIH = <JCH
    par une autre écriture, <JCH = <ACF
    par complémentarité, <ACF = Π/2 - <BAC
    par transitivité de la relation =, <JIH = Π/2 - <BAC
  * mutatis mutandis, <HIK = Π/2 - <BAC
  * par substitution et réduction, <JIK = Π – 2.<BAC
  * en conséquence, <EDF = <JIK.

[32] Ayme J.-L., Auguste Miquel…, G.G.G. vol. **13**, p. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <FED = <KJI
  <DFE = <IKJ.

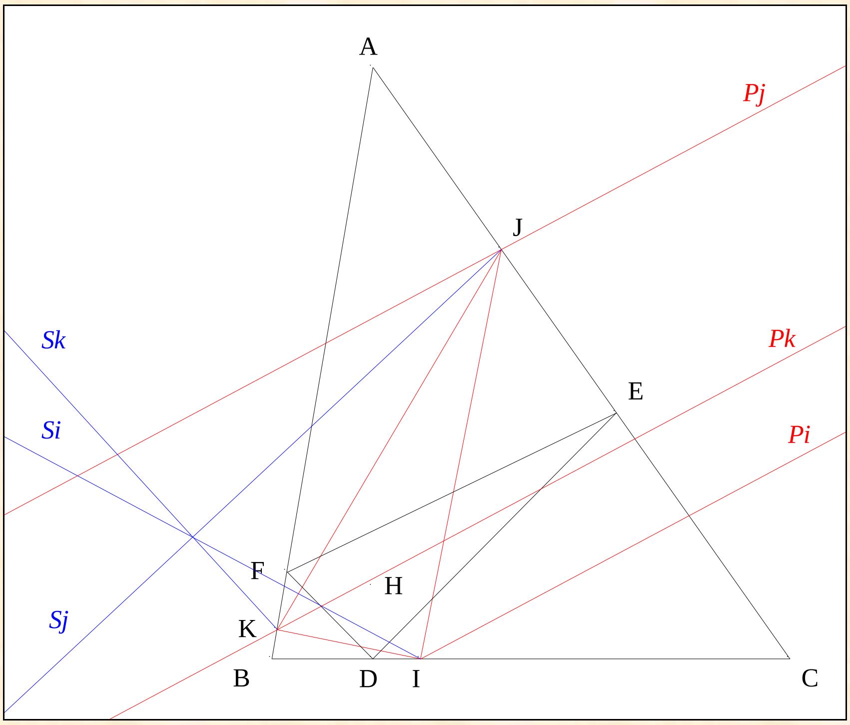
- **Conclusion :** IJK est directement semblable à DEF.

Scolie : H est le centre commun de DEF et JKL.

2. Une équivalence

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	DEF	le triangle orthique de ABC,
	IJK	un triangle inscrit à ABC,
	Pi, *Pj*, *Pk*	trois droites parallèles entre elles, passant resp. par I, J, K
et	*Si*, *Sj*, *Sk*	les symétriques de *Pi*, *Pj*, *Pk* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

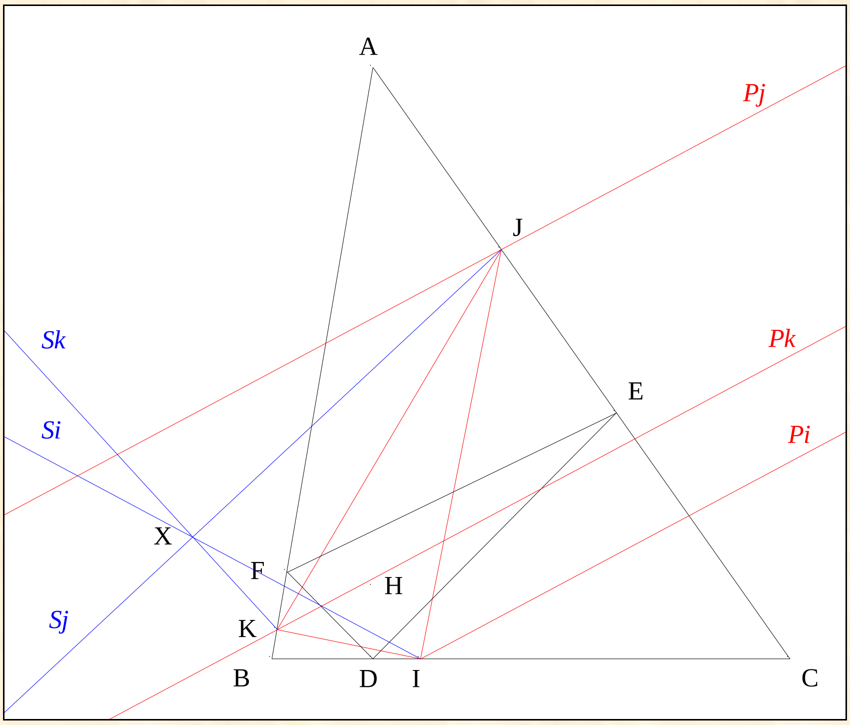
Donné : *Sa*, *Sb* et *Sc* sont concourantes *si, et seulement si,* IJK est directement semblable à ABC. [33]

Commentaire : un triangle inscrit répondant à une condition, est mis en œuvre.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

---

33 Some remarks on NPC concurrence, *Hyacinthos*, messages # **10562**, **10563**, **10566** du 01/10/2004 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/info

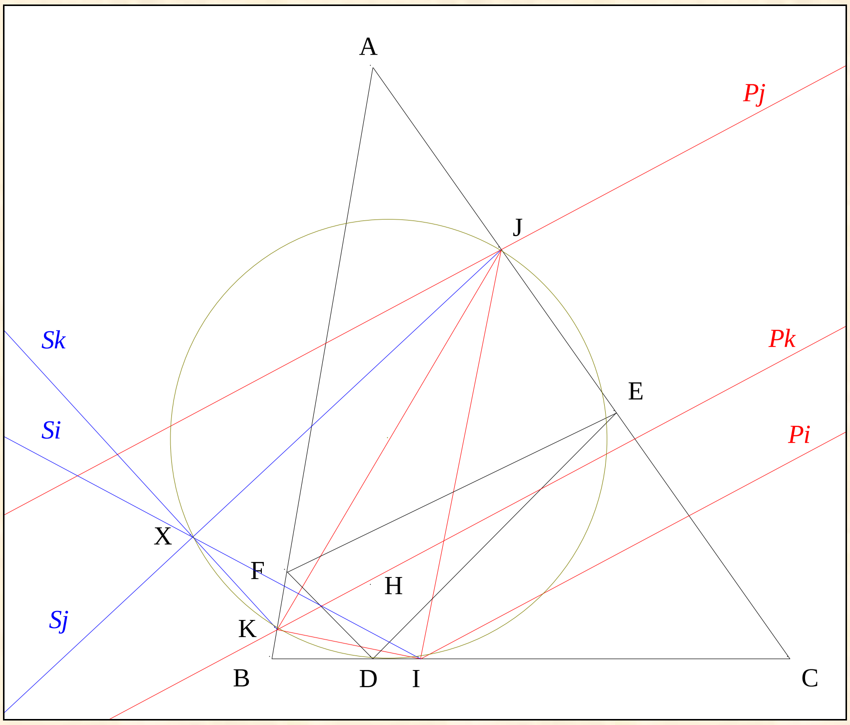


- **Hypothèse :** *Pa*, *Pb* et *Pc* sont concourantes.

- Notons X ce point de concours.

- Une chasse angulaire à **Π** près :

*	d'après la relation de Chasles,	<*Sj*, *Sk* = <*Sj*,(AC) + <(AC),(AB) + <(AB),*Sk*
*	par symétrie,	= <(AC),*Pj* + <(AC),(AB) + <*Pk*,(AB)
*	*Pj* et *Pk* étant parallèles,	= <(AC),(AB) + <(AC),(AB)
*	par addition,	= 2. <(AC), (AB)
*	par culture géométrique,	<*Sj*, *Sk* = <(DF), (DE)
*	ou encore,	<JXK = <FDE.



- Considérons une autre la direction.

- Notons Y le nouveau point de concours.

- Mutatis mutandis, nous montrerons que <FDE = <JYK
  par transitivité de la relation =, <JXK = <JYK.

- **Conclusion partielle :** J, K, X et Y sont cocycliques.

- Mutatis mutandis, nous montrerons que K, I, X et Y sont cocycliques
  I, J, X et Y sont cocycliques ;

  en conséquence, I, J, K, X et Y sont cocycliques.

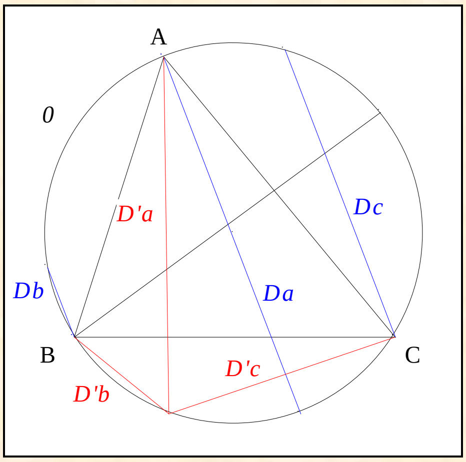
- **Conclusion :** IJK est directement semblable à ABC

VISUALISATION SUFFISANTE

Elle est laissée aux bons soins du lecteur.

F. ANNEXE

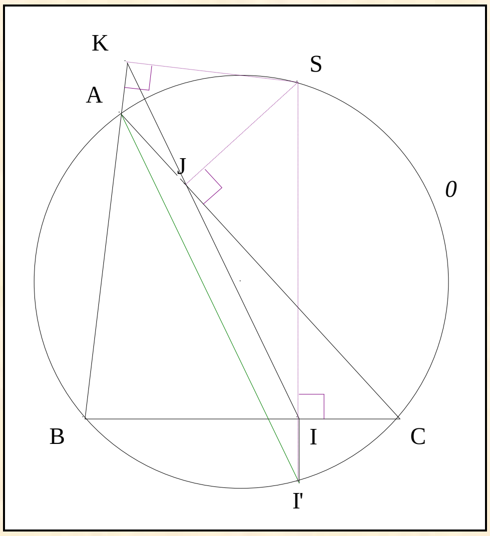
1. Le théorème de Beltrami [34]



Traits:	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	*D*a, *D*b, *D*c	trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C,
et	*D*'a, *D*'b, *D*'c	les isogonales resp. de *D*a, *D*b, *D*c relativement à ABC.

Donné : *D*a, *D*b, *D*c sont parallèles *si, et seulement si*, *D*'a, *D*'b, *D*'c sont concourantes sur *0*.

2. Direction d'une droite de Simson [35]



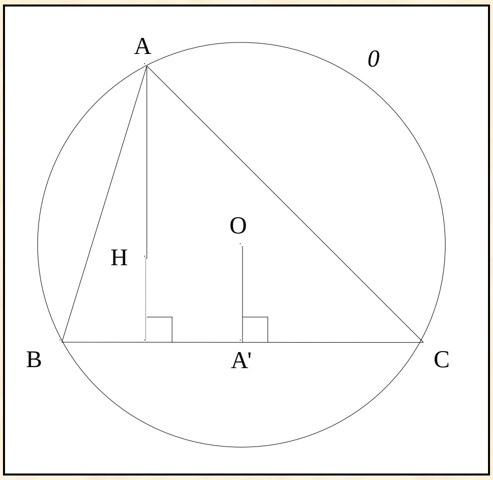
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	S	un point de *0*,
	I, J, K	les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB)
et	I'	le second point d'intersection de (SI) avec *0*.

Donné : (AI') et (IJK) sont parallèles.

---

[34] Beltrami E., *Archives* de Grünert 43, p. 48
[35] Heinen F., *Journal de Crelle* **3** (1828) 285-287

3. Une relation de Carnot [36]



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et A' le milieu de [BC],

Donné : AH = 2.OA'.

[36] Carnot L., *Géométrie de position* (1803)