LIII OLIMPIADA MATHEMÁTICA ESPAŇOLA

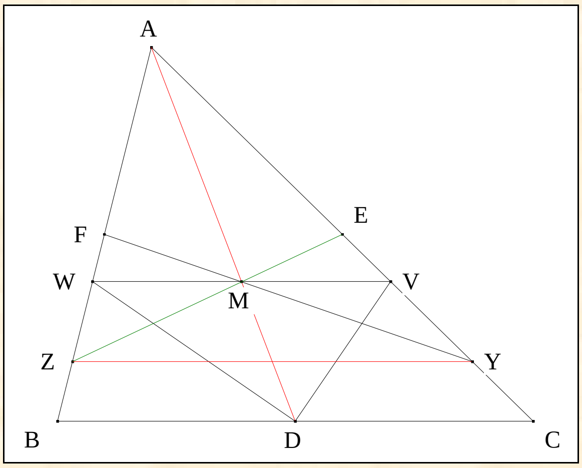
ALCALA DE HENARES, ESPAŇA

Concurso Final Nacional - Segunda sessión

PROBLEMA 6

Sábado 24 de Marzo de 2017

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. le problème **6** de la **LIII** OME de 2017 est résolu synthétiquement par l'auteur.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. the problem **6** of the **LIII** OME of 2017 is solved synthetically by the author.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Resumen. el problema **6** de la **LIII** OME de 2017 se resuelve sintéticamente por el autor.
Las figuras están en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

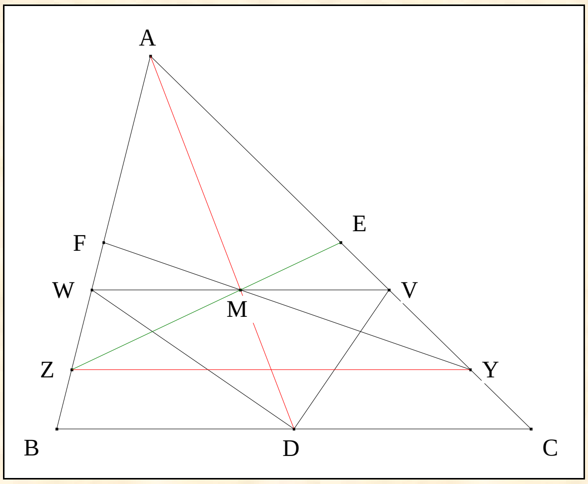
[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 04/03/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
Site : http//jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Sommaire

A. LE PROBLÈME 6

VISION

Figure :

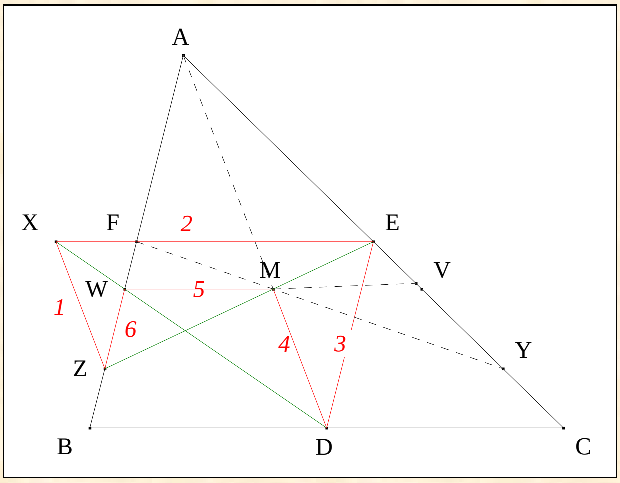


Traits : ABC un triangle,
D le milieu de [BC],
V, W les pieds des D-bissectrices intérieures resp. aux triangles DAC, DAB,
M le point d'intersection de (VW) et (AD),
E, F les milieux resp. de [AC], [AB]
et Y, Z les points d'intersection de (FM) et (AC), (EM) et (AB).

Donné : YZ = AD. [2]

[2] Barroso R., *Trianguloscabri* ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
Two equal segments, AoPS du 05/04/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1422991_two_equal_segments

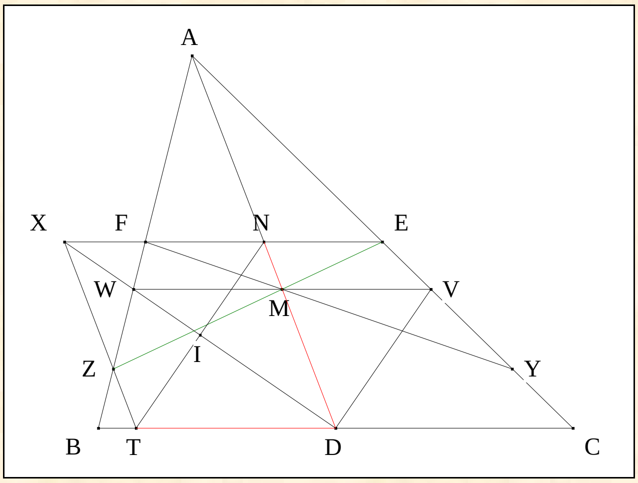
VISUALISATION



- Notons X le point d'intersection de (DW) et (EF).

- **Scolie :** (XE) // (BC) et (DE) // (AB).

- D'après Pappus d'Alexandrie "Le petit théorème" [3]
  appliqué à l'hexagone sectoriel ZXEDMWZ de frontières (DX) et (EZ), (ZX) // (DM).

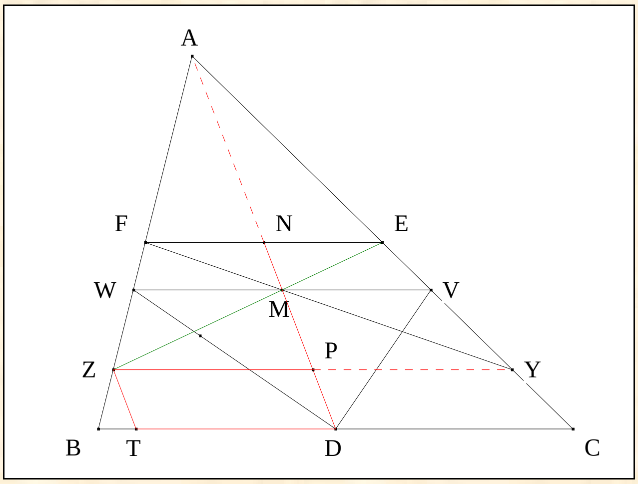


- Notons N, T les points d'intersection de (AD) et (EF), (XZ) et (BC),
  et I le point d'intersection de (TN) et (DX).

- Le quadrilatère DNXT étant un parallélogramme, I est le milieu de [TN].

- **Conclusion partielle :** le triangle DTN est D-isocèle.

[3] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **7**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons P le point d'intersection de (YZ) et (AD).

- D'après "Le trapèze complet" appliqué au quadrilatère EFZY, **(1)** (YZ) // (EF)

  (2) P est le milieu de [YZ].

- **Scolies :** **(1)** N est le milieu de [AD]

  (2) le quadrilatère PZTD est un parallélogramme.

- Une chasse de longueur :

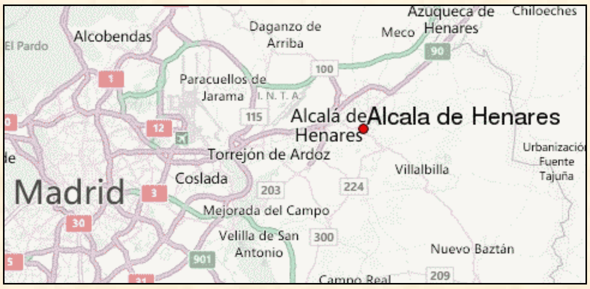
  * nous avons : PZ = DT et DT = DN

  * par transitivité de =, PZ = DN.

- **Conclusion :** par duplication, YZ = AD.

B. ARCHIVES

1. Présentation

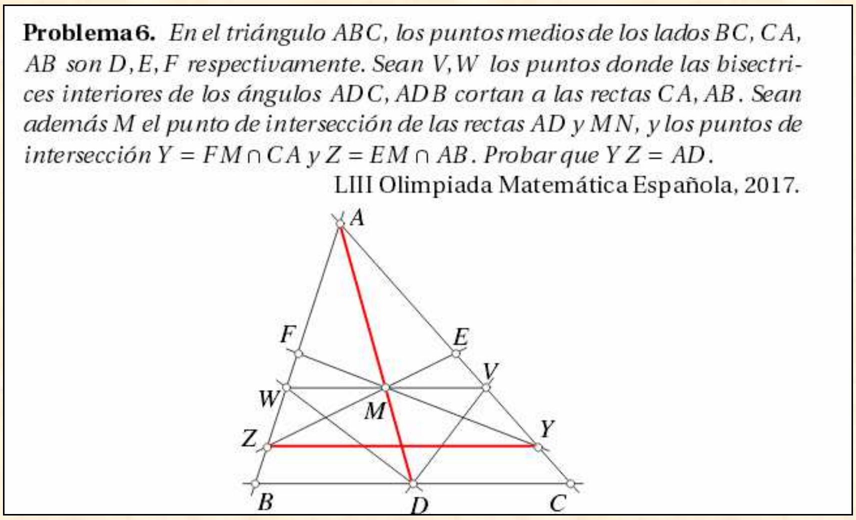


Alcalá de Henares figure au patrimoine mondial de l'UNESCO depuis 1998. Cette ville est célèbre pour son université datant de 1499 et aussi pour avoir été le lieu de naissance à Miguel de Cervantes Saavedra (29/08/1547 – 23/04/1616) auteur du célèbre roman *L'ingénieux Hidalgo Don Quichotte de la Manche*, publié en 1605.

Rappelons que Cervantes mena d'abord une vie aventureuse de soldat, ensuite fut capturé avec son frère, Rodrigo en 1575 lors de son retour en Espagne par les barbaresques au large des Saintes-Maries-de-la-mer, et, enfin, libéré par rachat des frères Trinitaires en 1580.

2. Le problème 6


[4]



Problema 6. *En el triángulo ABC, los puntos medios de los lados BC, CA, AB son D, E, F respectivamente. Sean V, W los puntos donde las bisectrices interiores de los ángulos ADC, ADB cortan a las rectas CA, AB. Sean además M el punto de intersección de las rectas AD y MN, y los puntos de intersección $Y = FM \cap CA$ y $Z = EM \cap AB$. Probar que $YZ = AD$.*

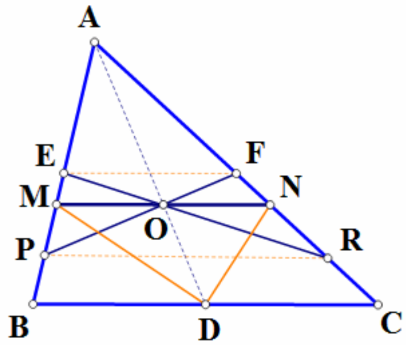
LIII Olimpiada Matemática Española, 2017.

[4] https://congresosalcala.fgua.es/ome2017

3. La solution officielle

Solución. Aplicando el teorema la bisectriz a los triángulos ADB y ADC se obtiene

$$\frac{MB}{AM} = \frac{BD}{AD} \quad \text{y} \quad \frac{NC}{AN} = \frac{DC}{AD}$$



Como $BD = DC$, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ y entonces MN es paralelo a BC, de donde $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$. De aquí, junto con $\frac{MB}{AM} = \frac{BD}{AD}$, resulta

$$\frac{BD+AD}{AD} = 1 + \frac{BD}{AD} = 1 + \frac{MB}{AM} = \frac{MB+AM}{AM} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} \qquad (1)$$

Como EF es la paralela media de ABC, EF y BC son paralelas, $BD = EF$ y $BC = 2 \cdot EF$. Sustituyendo esto en (1) obtenemos

$$\frac{BD+AD}{AD} = \frac{BC}{MN} \Leftrightarrow \frac{BD+AD}{AD} = \frac{2 \cdot EF}{MN} \Leftrightarrow \frac{2}{MN} = \frac{BD+AD}{AD \cdot EF}$$

que lo podemos escribir como

$$\frac{2}{MN} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{EF} \qquad (2)$$

Como MN y EF son paralelas a BC, son paraleleas entre sí, y entonces

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AF}{AN} \qquad (3)$$

Aplicando dos veces el Teorema de Menelao al triángulo AMN, una con la transversal ER y otra con la transversal PF, se obtiene

$$\frac{AR}{NR} = \frac{AE}{EM} \cdot \frac{MO}{ON} \quad \text{y} \quad \frac{AP}{MP} = \frac{AF}{FN} \cdot \frac{MO}{ON},$$

así que teniendo en cuenta (3) obtenemos $\frac{AP}{MP} = \frac{AR}{NR}$ lo cual es equivalente a que PR es paralelo a MN. Pero MN es paralelo a EF y el cuadrilátero $EPRF$ es un trapecio. Ya que MN es paralela a las bases por el punto de intersección de las diagonales, MN es la media armónica de las bases del trapecio, es decir

$$\frac{1}{PR} + \frac{1}{EF} = \frac{2}{MN} \quad \text{y por (2),} \quad \frac{1}{PR} = \frac{1}{AD}$$

de donde se concluye que $PR = AD$.