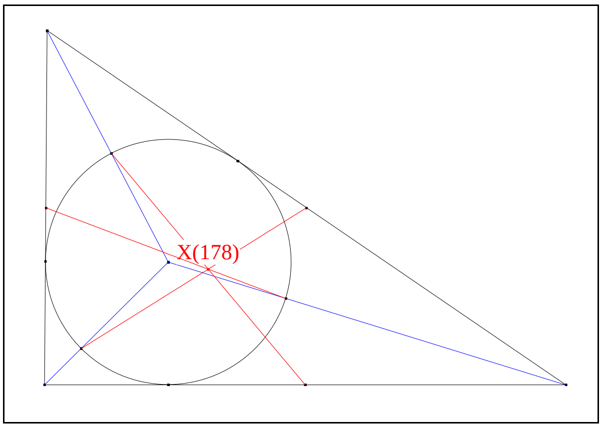
THE SECOND MID-ARC POINT (X_{178})

PREMIÈRES PREUVES SYNTHÉTIQUES

Jean-Louis AYME



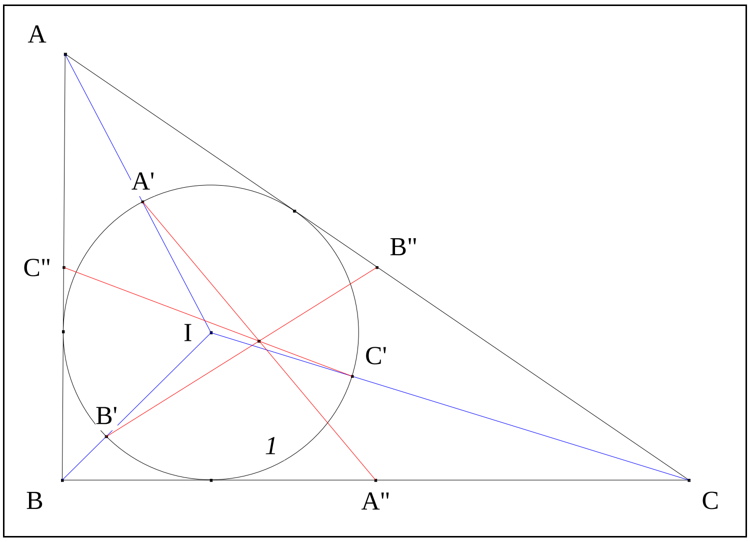
Résumé. Nous présentons deux preuves originales d'un résultat de Clark Kimberling datant de 1988, non résolu synthétiquement, et concernant "the second mid-arc point of a triangle". La seconde preuve s'appuie sur un prolongement de la première.
Un nouveau centre, non répertorié chez ETC est présenté.
Les figures sont toutes en position générale, toutes les notations se reproduisent figure après figure et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

I. LE RÉSULTAT DE CLARK KIMBERLING

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
A', B', C' les points d'intersection resp. de [IA], [IB], [IC] avec *1*
et A", B", C" les milieux resp. de [BC], [CA], [AB].

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes[1].

Note historique : ce résultat a été proposé comme problème à résoudre en 1988 par l'américain Clark Kimberling dans la revue néerlandaise *Nieuw Archikef voor Wiskunde* avec la remarque suivante :

readers may find a "pure"geometric proof of the concurrence.

Rappelons que la solution de Kimberling est basée sur l'emploi des coordonnées trilinéaires.

Ce résultat a été par la suite proposé un certain nombre de fois dans différents sites et revues. En 2008, il réapparaît dans le site *Mathlinks* sous la signature du vietnamien Danh Trung[2] connu sous le pseudonyme de "Mr. Danh". En réponse, l'allemand Darij Grinberg précisait :

If you've got a synthetic proof of this, please post it
- *it appears for the fifth or so time on this forum without a solution...*

Une solution vectorielle a été alors donnée par Trung.

---

[1] Kimberling C., Problem 804, *Nieuw Archikef voor Wiskunde* 6 (1988) 170.
[2] Trung D., incenter and midpoints, *Mathlinks* du 27/09/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=228361.

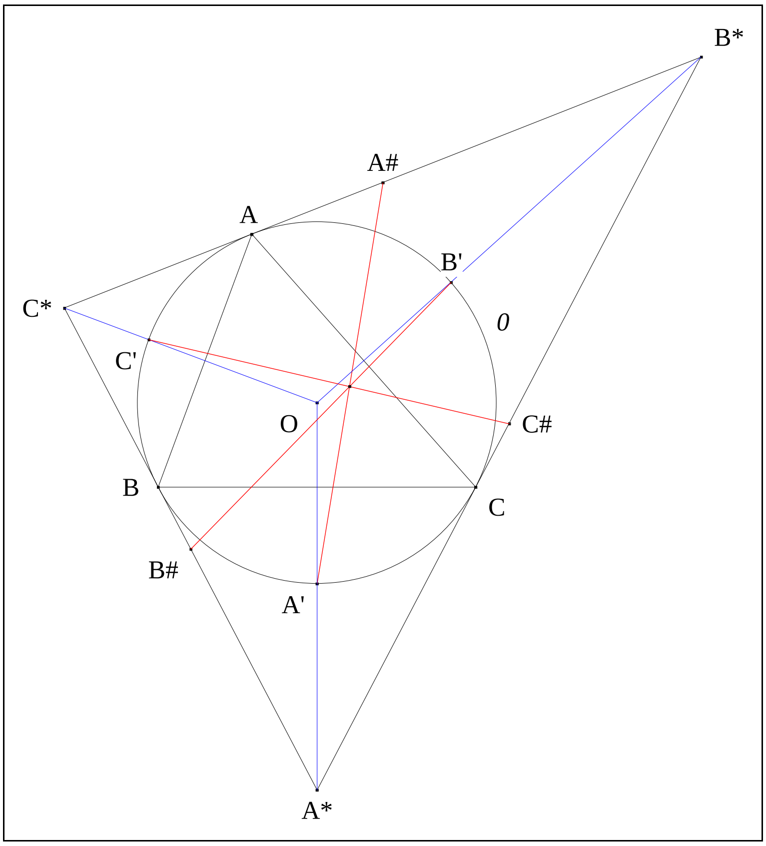
D'après mes sources, aucune solution de nature synthétique n'a été trouvée à ce jour.

Commentaire : pour rendre plus claire cette situation, l'auteur se permet de reformuler ce résultat avec ses propres notations en partant du triangle de contact.

II. REFORMULATION DU RÉSULTAT

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A*B*C*	le triangle tangentiel de ABC,
	A', B', C'	les points d'intersection resp. de [OA*], [OB*], [OC*] avec *0*
et	A#, B#, C#	les milieux resp. de [B*C*], [C*A*], [A*B*].

Donné : (A#A'), (B#B') et (C#C') sont concourantes[3].

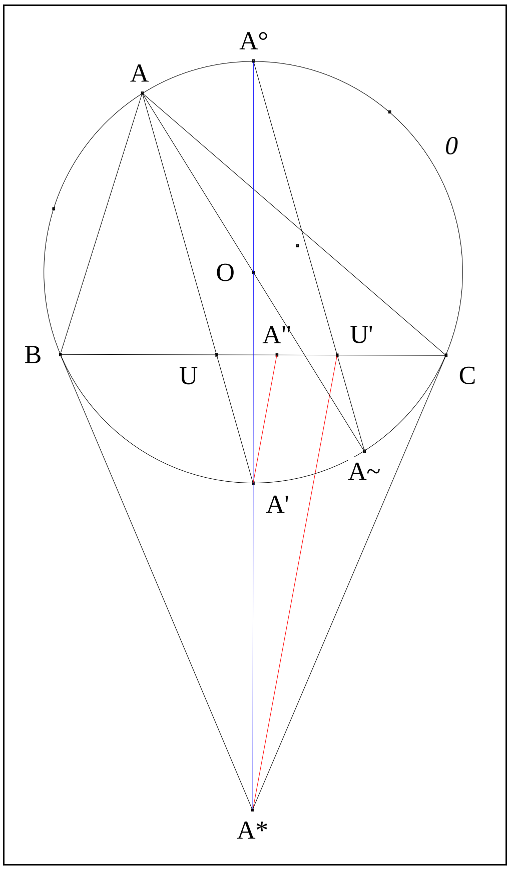
[3] Ayme J.-L., Concurrent lines, *Mathlinks* du 29/08/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=223391.

III. LA PREMIÈRE PREUVE

1. Deux parallèles

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

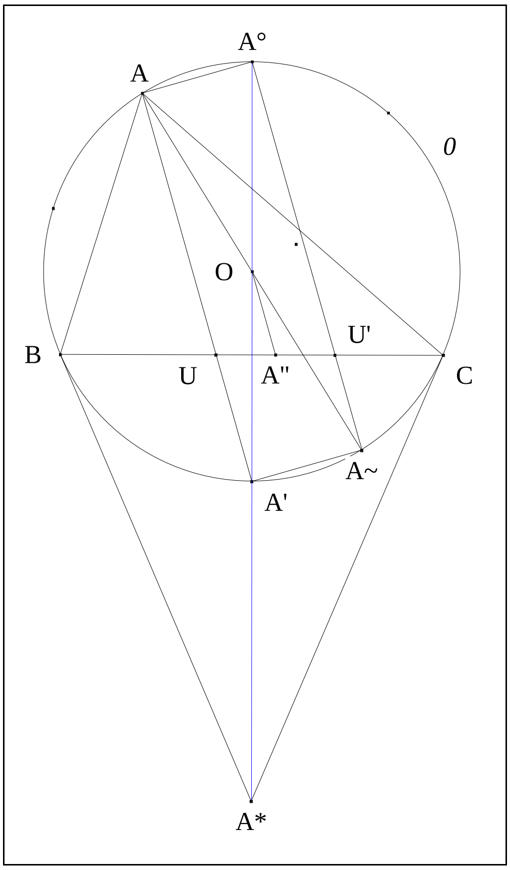
	U	le point d'intersection de (AA') et (BC),
	A~	l'antipôle de A relativement à *0*,
	A°	l'antipôle de A' relativement à *0*,
	U'	le point d'intersection de (A°A~) et (BC),
et	A"	le milieu de [UU'].

Donné : (A*U') est parallèle à (A'A")[4].

VISUALISATION

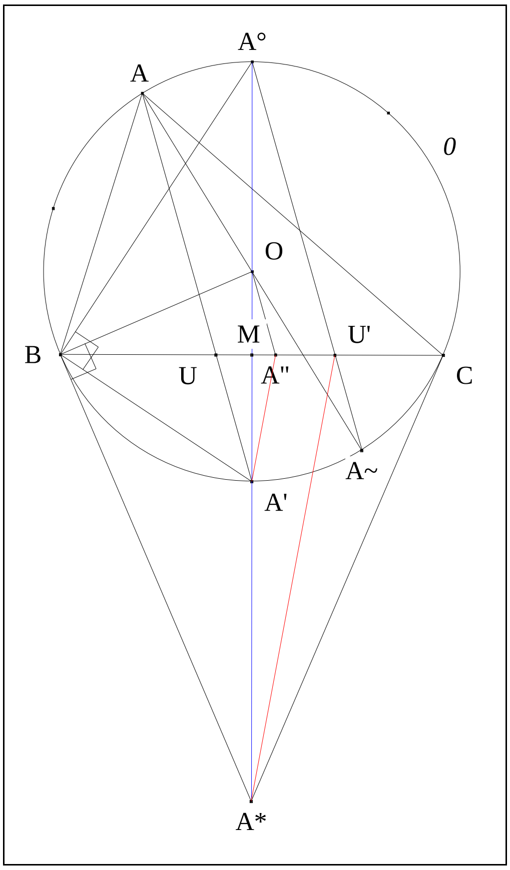
---

4 Ayme J.-L., Two parallels, *Mathlinks* du 10/02/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=256988.



- Le quadrilatère AA'A~A° ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ; en conséquence, (A°A~) // (AA') .

- D'après l'axiome de passage IIIb, (OA"), (A°A~) et (AA') sont parallèles entre elles.



- Notons M le milieu de [M].

- **Scolies :** **(1)** (OA*) ⊥ (BC)
  (2) le quadrilatère OBA*C est convexe
  (3) le quadrilatère BA'CA° est convexe.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  le triangle BA*O est B-rectangle ; en conséquence, MO . MA* = BM².

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  le triangle BA'A° est B-rectangle ; en conséquence, BM² = MA' . MA°.

- Par transitivité de la relation =, MO . MA* = MA' . MA° ;

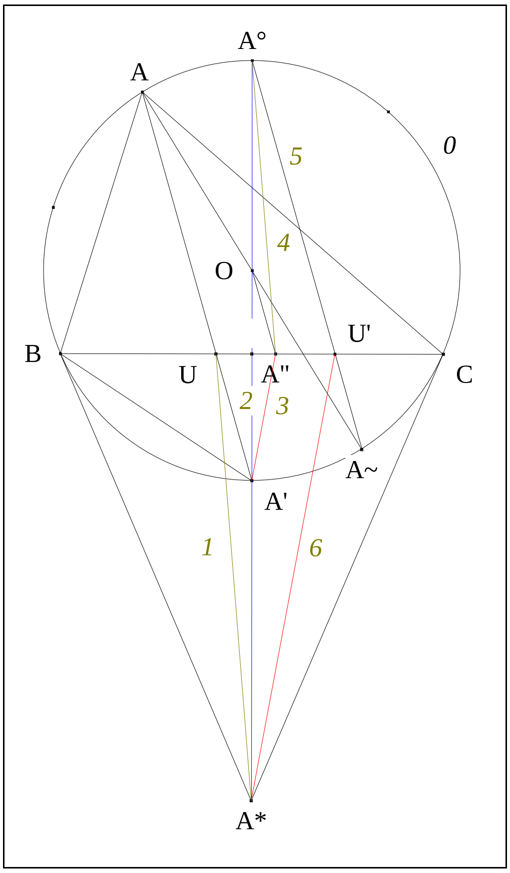
  ou encore, MA* / MA' = MA° / MO .

- D'après le théorème de Thalès, MA°/ MO = MU' / MA" ;
  par transitivité de la relation =, MA* / MA' = MU' / MA". [5]

- **Conclusion :** d'après Thalès, (A*U') est parallèle à (A'A").

Scolie : deux autres parallèles

[5] Ayme J.-L., prove or disprove, *Mathlinks* du 11/02/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=257219.

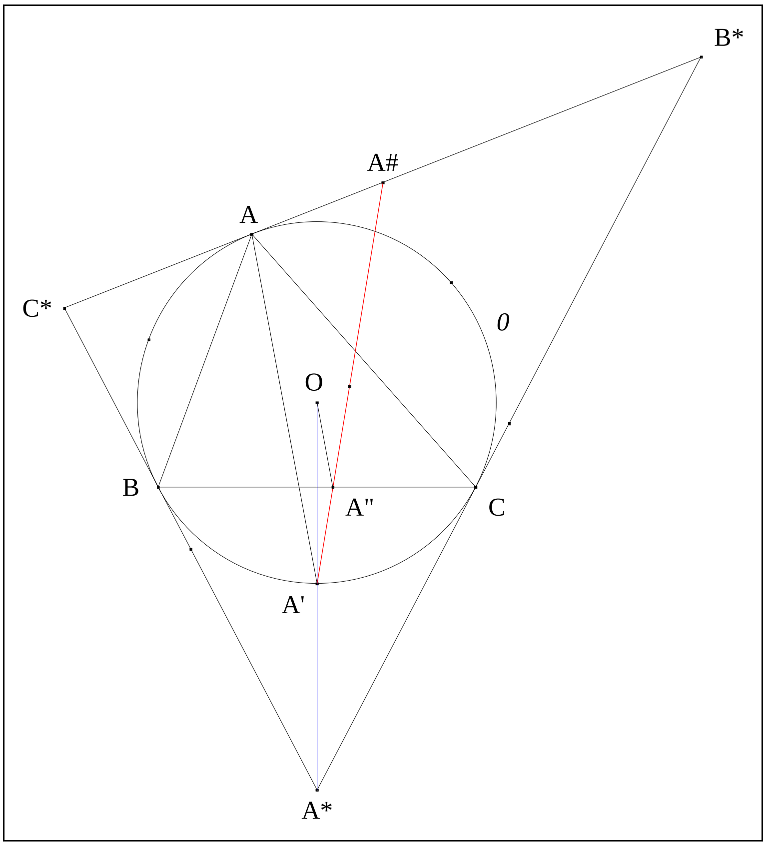


- **Conclusion :** d'après "Le petit théorème de Pappus" (Cf. Annexe 1) appliqué à l'hexagone sectoriel A*UA'A"A°U'A*, (A*U) // (A°U').

2. Trois points alignés

VISION

Figure :



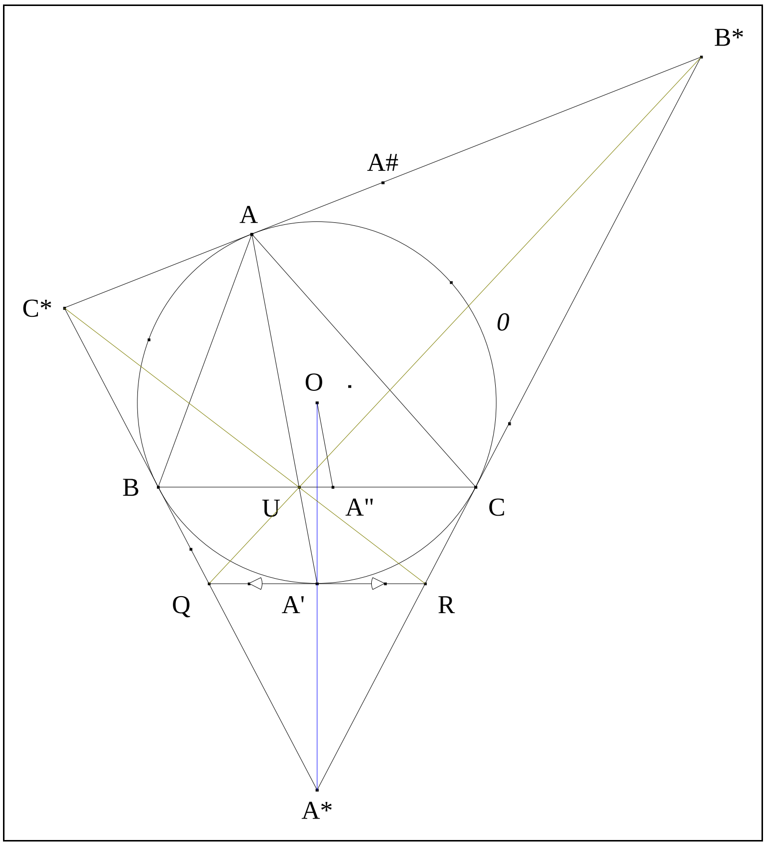
Traits : les hypothèses et notations précédentes sont les mêmes que précédemment.

Donné : A', A" et A# sont alignés[6].

VISUALISATION

---

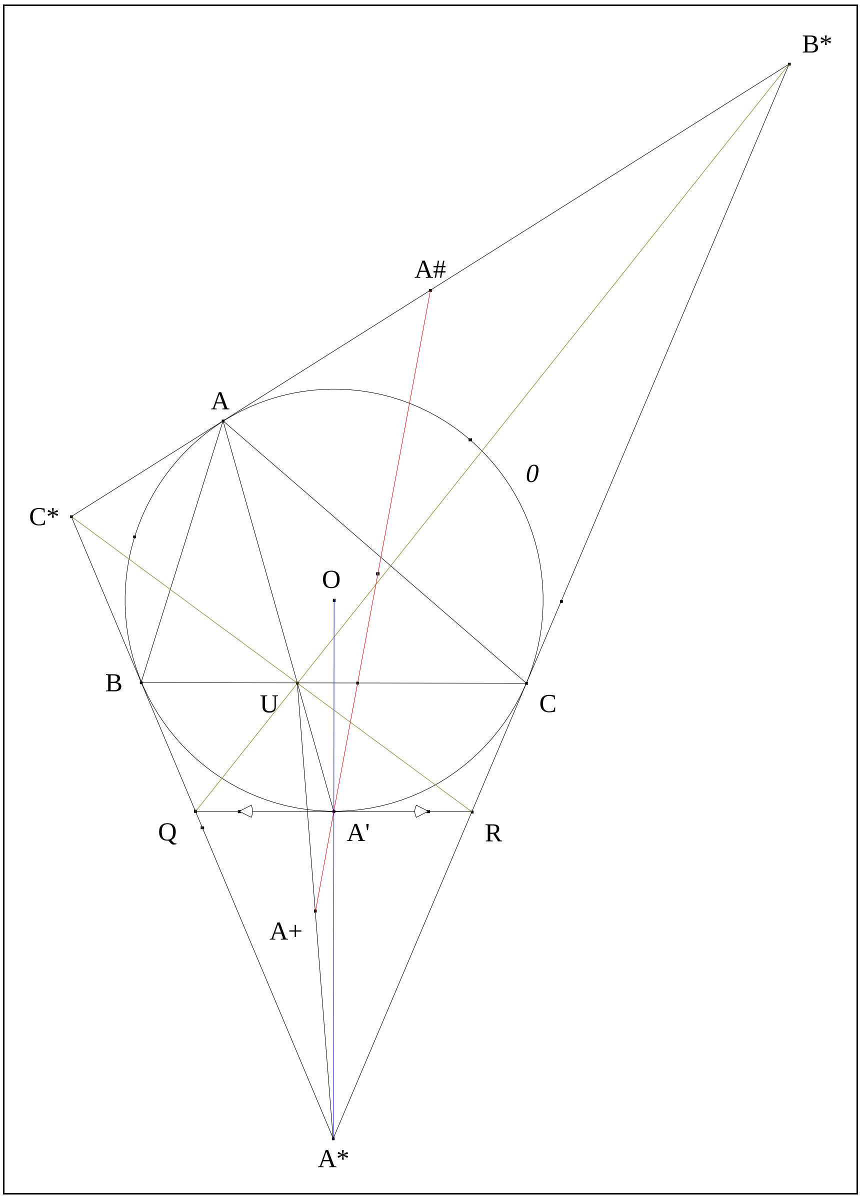
6 Ayme J.-L., Three collinear points,
Mathlinks du 27/04/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=202216.
Hyacinthos # 16324 du 27/04/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/16324.



- Notons U le point d'intersection de (AA') et (BC),
  Ta' la tangente à *0* en A'
  et Q, R les points d'intersection resp. de Ta' avec (C*A*), (A*B*).

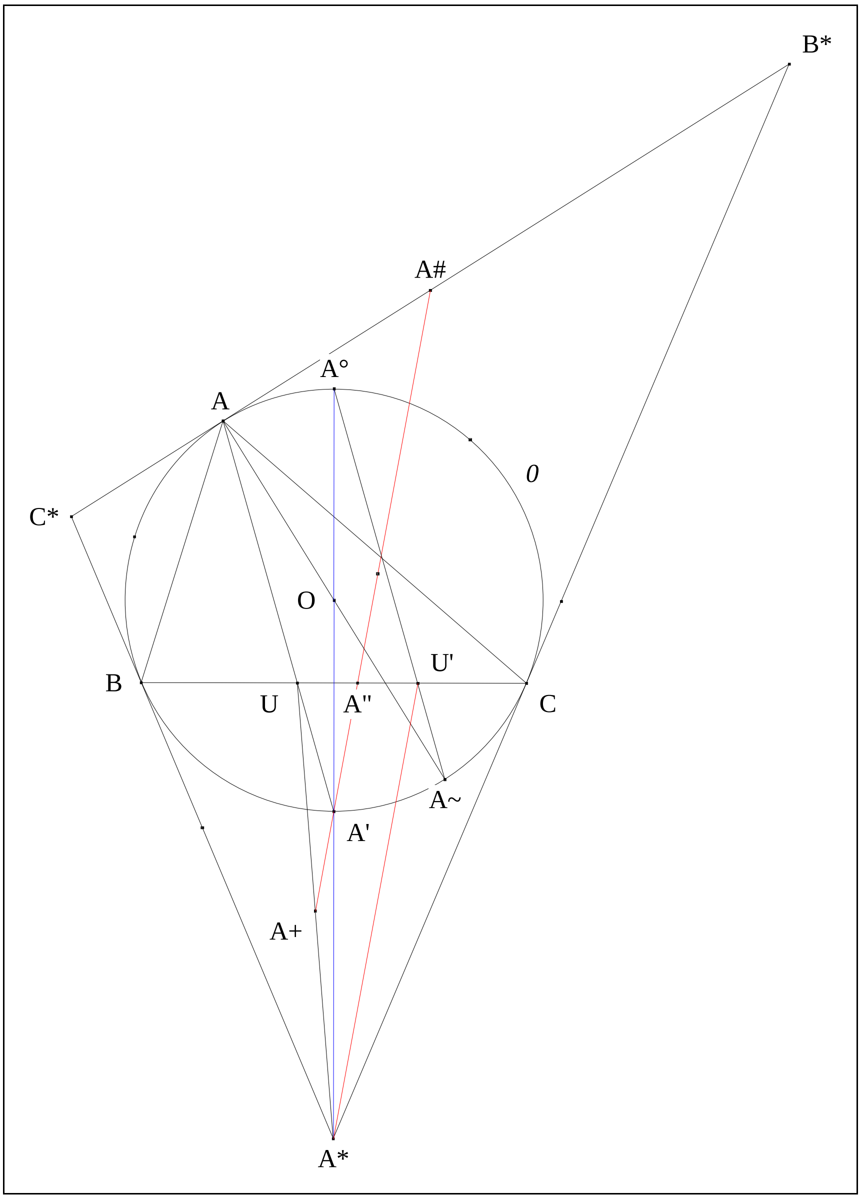
- **Scolie :** A' est le milieu de [QR].

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de Newton" (Cf. Annexe 2), (B*Q) et (C*R) se coupent en U.



- Notons A+ le milieu de [A*U].

- **Conclusion partielle :** d'après "La droite de Gauss" (Cf. Annexe 3) appliqué au quadrilatère A*RUQ, A+, A' et A# sont alignés.



- D'après "Le théorème de la droite des milieux" appliqué au triangle UA*U', (A+A") // (A*U') ;
  d'après III. 1. Deux parallèles, (A*U') // (A'A") ;
  par transitivité de la relation //, (A+A") // (A'A") ;
  d'après le postulat d'Euclide, (A+A") = (A'A") ;
  en conséquence, A+, A" et A' sont alignés.

- Nous savons que A+, A' et A# sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, A', A" et A# sont alignés.

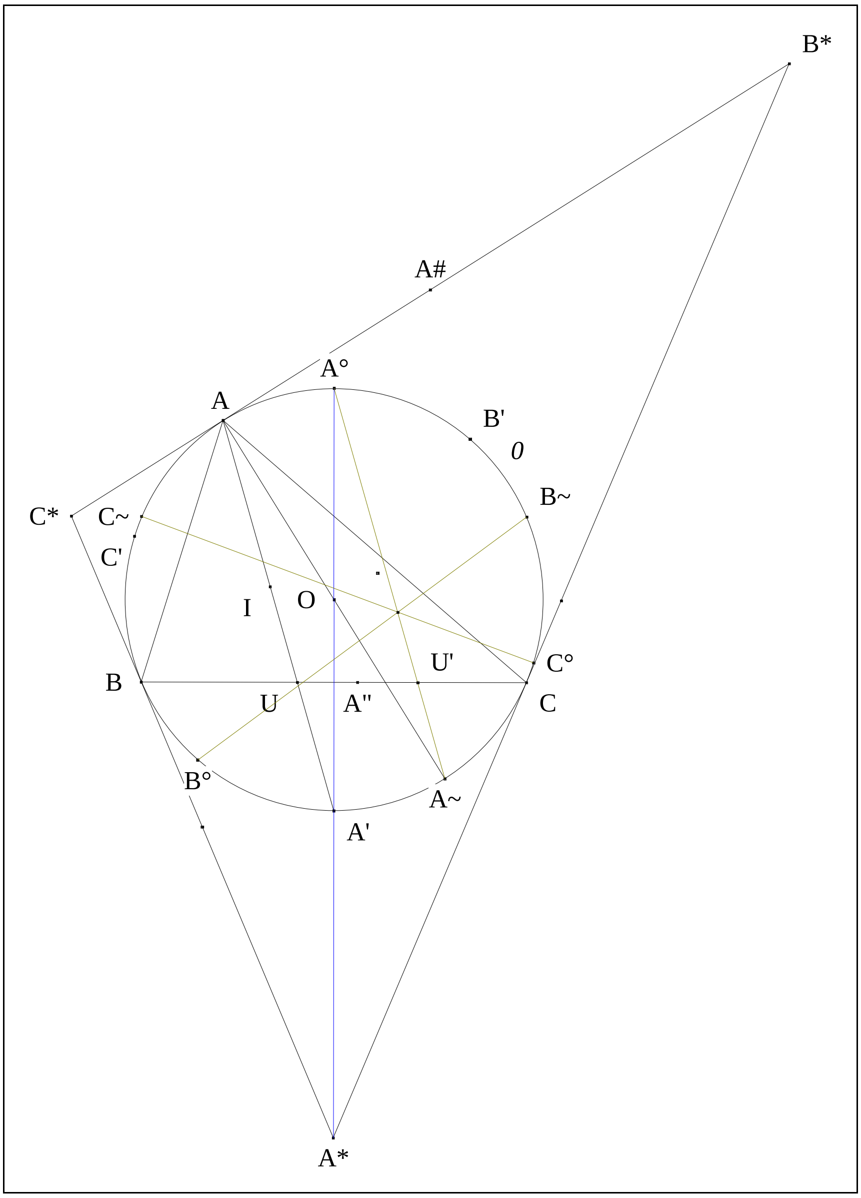
Note historique : une réponse à ce résultat a été donné par Vladimir Zajic du Brookhaven National Laboratory (États-unis), plus connu sous le pseudonyme "Yetti"[7]. Sa preuve qui se recoupe avec la précédente au sujet de l'emploi du théorème de Newton, met en oeuvre une transformation affine.

[7] Yetti, Three collinear points, *Mathlinks* du 30/04/2008.

3. Trois droites concourantes

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

B°, C° les antipôles resp. de B', C' par rapport à O,

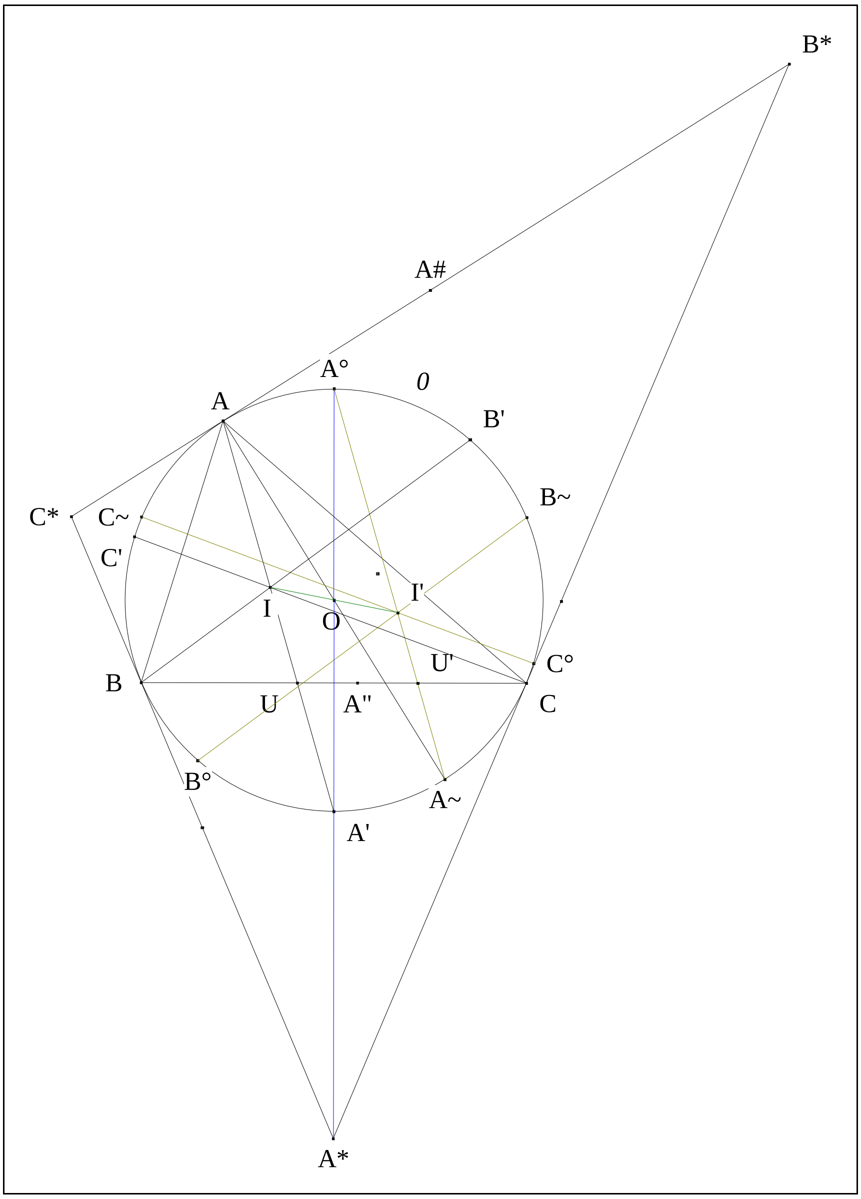
B~, C~ les antipôles resp. de B, C par rapport à O

et I le centre de ABC.

Donné : (A~A°), (B~B°) et (C~C°) sont concourantes[8].

VISUALISATION

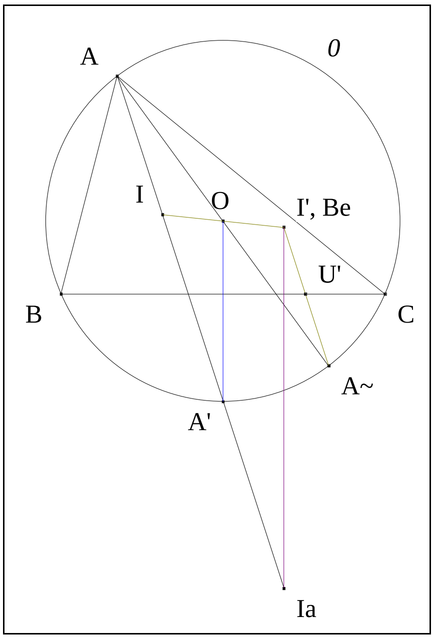
[8] Ayme J.-L., Three concurrent lines, *Mathlinks* du 10/02/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=256994.



- (AA'), (BB') et (CC') étant resp. les A, B, C-bissectrices intérieures de ABC, concourent en I.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B°B~) // (BB')
  (C°C~) // (CC').
- **Conclusion :** par symétrie de centre O, (A~A°), (B~B°) et (C~C°) sont concourantes.
- Notons I' ce point de concours.

Note historique : ce point de concours est connu sous le nom de "second point de Clawson".

Scolies : **(1)** nature géométrique de ce point



- Notons Ia le centre du A-excercle de ABC.
- Nous savons que A' est le milieu de [IIa].
- Nous avons : (BC) ⊥ (OA') ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle IIaI', (OA') // (I'Ia).
- D'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BC) ⊥ (I'Ia).
- Notons Ib, Ic les centres resp. des B, C-excercles de ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CA) ⊥ (I'Ib)
  (AB) ⊥ (I'Ic).
- **Conclusion :** I' est le centre du cercle circonscrit du triangle excentral de ABC.

  (2) I' est le symétrique de I par rapport à O.

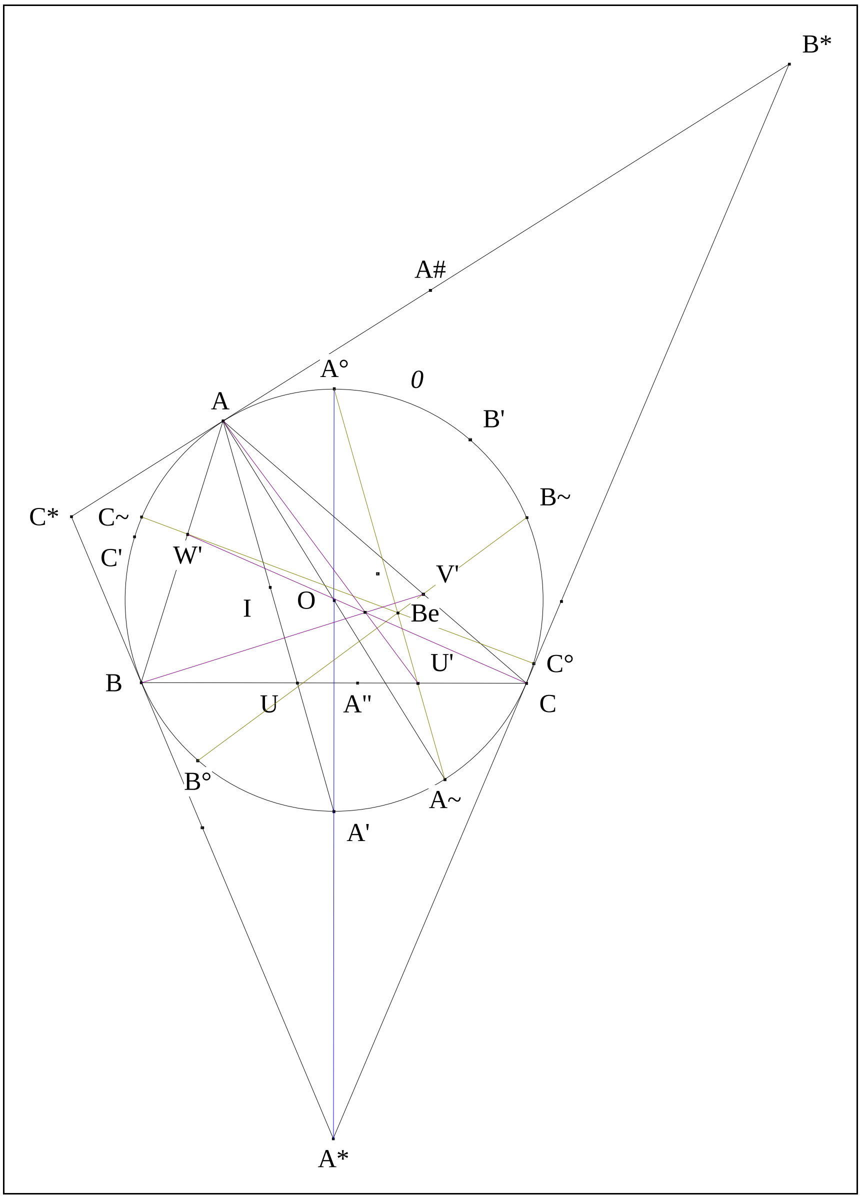
  (3) I' est le point de Bevan, noté Be et répertorié sous X_{40} chez ETC[9].

4. Trois autres droites concourantes

VISION

Figure :

[9] Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

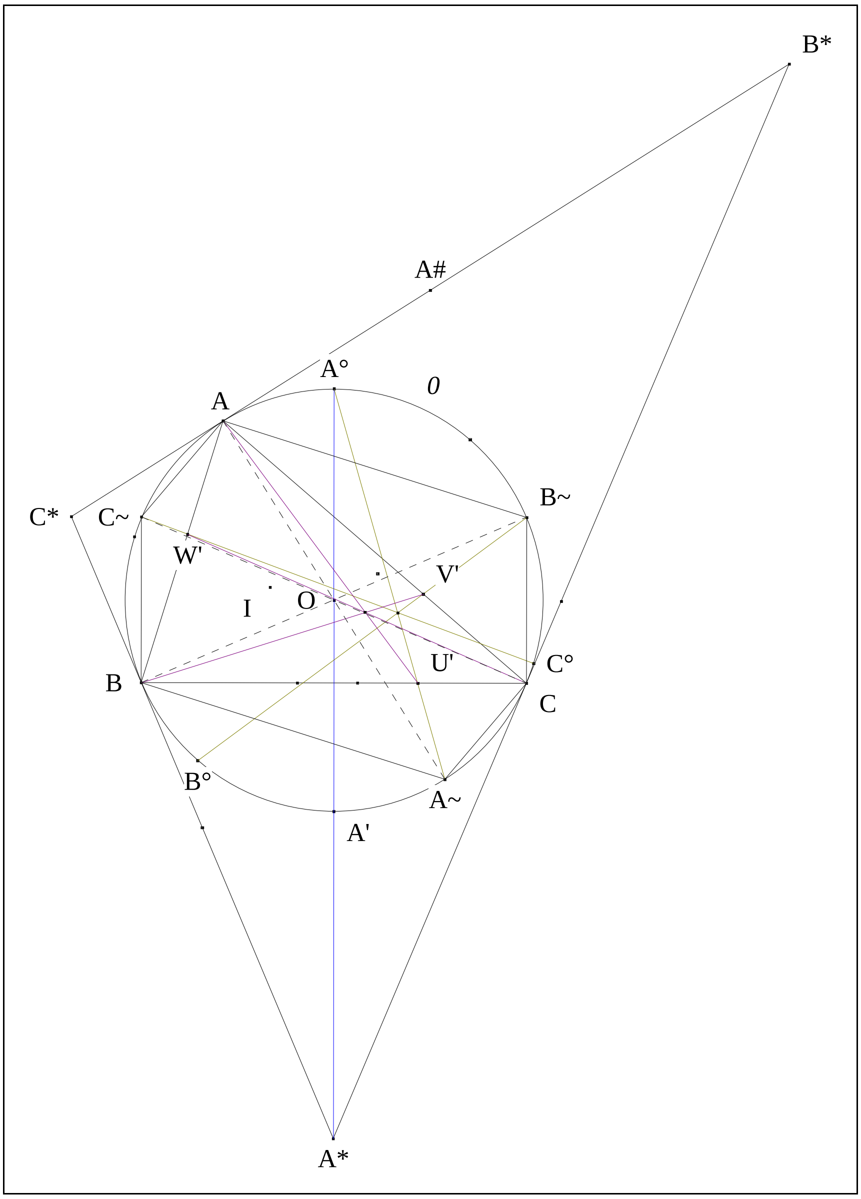


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

V', W' deux points définis comme U'.

Donné : (AU'), (BV') et (CW') sont concourantes.

VISUALISATION



- **Scolie :** (A~A°) est la A~-bissectrice intérieure du triangle A~CB.

- D'après le théorème de la bissectrice, A~B / A~C = U'B / U'C.

- Mutatis mutandis, B~C / B~A = V'C / V'A ;
  C~A / C~B = W'A / W'B.

- **Scolie :** (AA~), (BB~), (CC~) sont concourantes en O.

- D'après "Diagonales d'un hexagone convexe et cyclique" (Cf. Annexe 4) appliqué à AC~BA~CB~A,

  (A~B / A~C) . (B~C / B~A) . (C~A / C~B) = 1 ;

  il s'en suit que (U'B / U'C) . (V'C / V'A) . (W'A / W'B) = 1.

- **Conclusion :** d'après le théorème de Céva appliqué au triangle ABC,
  (AU'), (BV'), (CW') sont concourantes.

Scolies : **(1)** ce point de concours est répertorié sous X_{63} chez ETC.

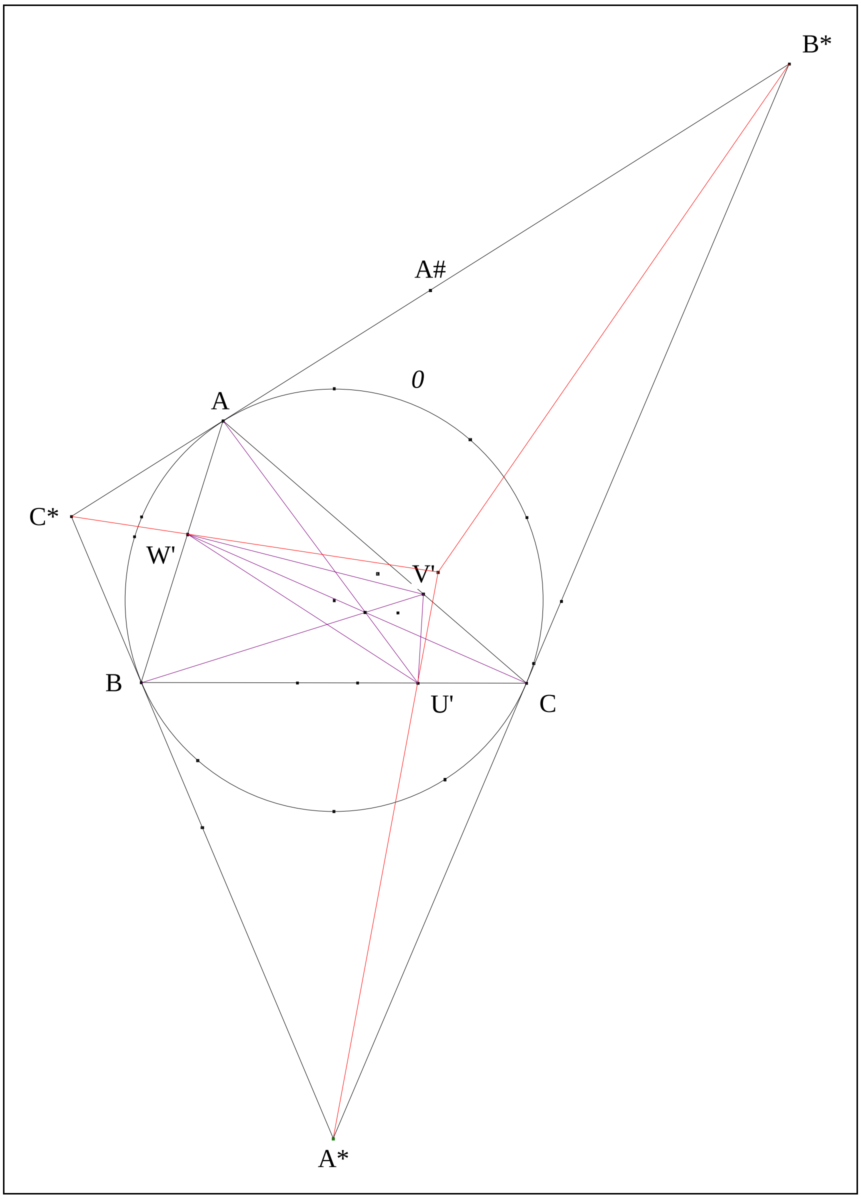
(2) X_{63} est l'isogonal du point de Clawson (X_{19}) relativement à ABC.

(3) U'V'W' est un triangle cévien de ABC.

5. Un nouveau centre

VISION

Figure :



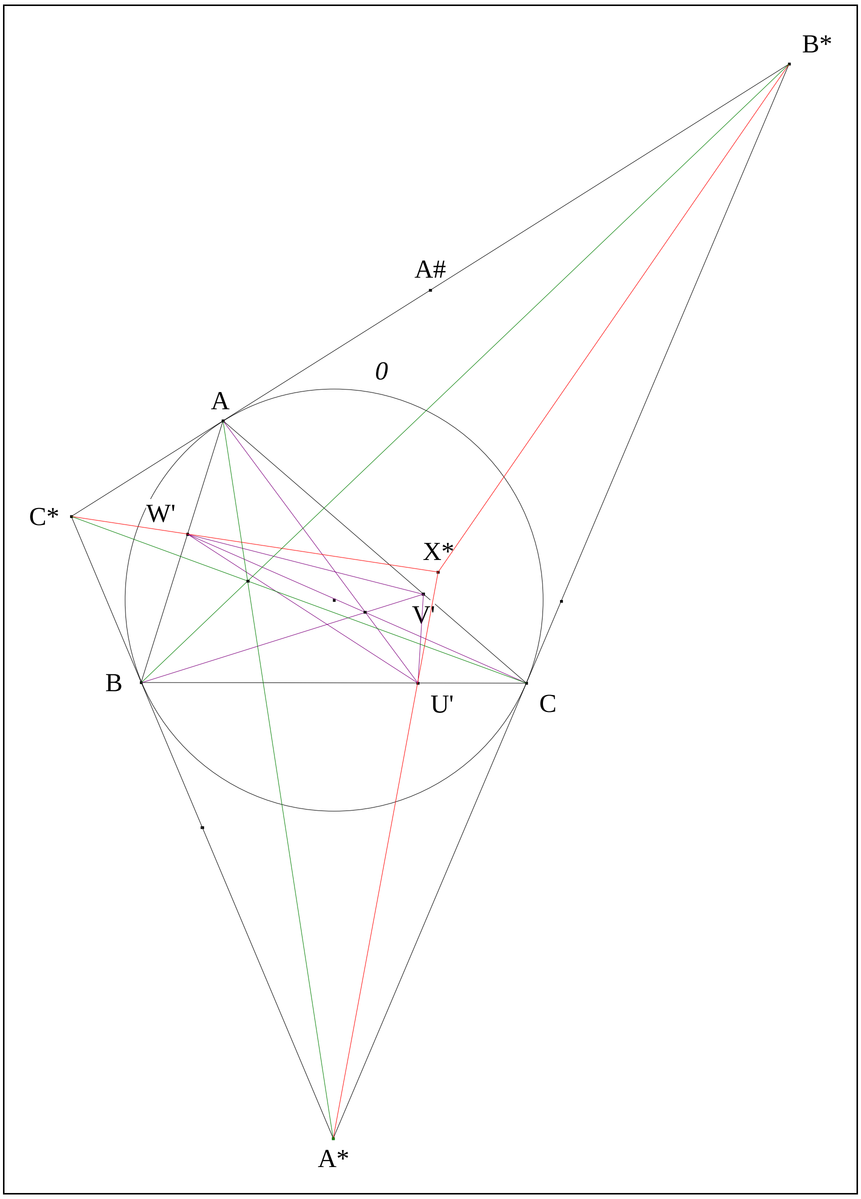
Traits : les hypothèses et notations précédentes sont les mêmes que précédemment.

Donné : (A*U'), (B*V') et (C*W') sont concourantes[10].

---

10 Ayme J.-L., Three new concurrent lines, *Mathlinks* du 10/02/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=256995.

VISUALISATION



- **Scolie :** *0* est le cercle inscrit de A*B*C*.
- D'après "Le point de Gergonne" (Cf. Annexe 5), A*B*C* est en perspective avec ABC.
- Nous avons : A*B*C* est en perspective avec ABC
  et ABC est en perspective avec U'V'W'
- D'après "The cevian nests theorem"[11], A*B*C* est en perspective avec U'V'W'.
- **Conclusion :** (A*U'), (B*V'), (C*W') sont concourantes.
- Notons : X* ce point de concours.

Ayme J.-L., Three concurrent lines, Message *Hyacinthos* # 17207 du 11/02/2009 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/17207.

11 Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. 3, p. 1-7 ;
http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/Docs/The%20cevian%20nests%20theorem.pdf.

Scolie : X* est un nouveau centre

Note historique : l'existence de X* a été confirmé le 11 Février 2009 par l'espagnol Francisco Javier Garcia Capitan qui tout en précisant ses coordonnées trilinéaires, signalait que ce nouveau centre n'est pas répertorié chez ETC.
Le même jour, l'auteur précisait que

This problem has a relation with a difficult one.
I think it is now solved.
I must now write a little article on it. [12]

Ce même jour, Chris van Tienhoven[13] livrait son sentiment

It's always thrilling when three lines (constructed in the same way) coincide

et donnait les lignes centrales passant par X* suivantes :

{1, 159, 1486, 3220},
{3, 960, 997, 1158, 3185, 3435},
{6, 1245, 1973, 2354},
{20, 1610, 1633},
{25, 65, 1452},
{31, 56, 154, 221, 603, 1042, 1106, 1191, 1201, 1399, 1406, 1407, 1457, 1473, 2390},
{40, 197},
{55, 976, 1854 ,2292 ,3145},
{63, 1619},
{64, 71, 198, 220, 2155, 3197},
{73, 2187},
{100, 1265},
{161, 2099},
{222, 1660},
{859, 1780},
{958, 1503},
{1012, 2217},
{1398, 1456},
{1498, 3428},
{1593, 2182},
{2176, 2178, 2305}.

Le lendemain, Peter J. C. Moses[14] secondait van Tienhoven et ajoutait que X* est le point X_{188} du triangle antimédian de A*B*C* et aussi le point X_{65} du triangle excentral de A*B*C*, ces deux résultats étant obtenus à l'aide du logiciel *Mathematica*.

Dans un message privé du 12/02/2009, "amontes1949" affirmait que X* est le

Perspector del triángulo tangencial
y
el triángulo ceviano del conjugado isogonal del punto de Clawson.

Une généralisation du résultat de l'auteur a été présentée par l'espagnol Angel

---

[12] Ayme J.-L., Three concurrent lines, message *Hyacinthos* #17209 du 11/02/2009 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/17209 .
[13] Tienhoven (van) C., Three concurrent lines, message *Hyacinthos* #17214 du 11/02/2009.
[14] Moses P. J. C., Three concurrent lines, message *Hyacinthos* #17215 du 12/02/2009.

Montesdeoca[15] sur le site de Ricardo Barroso[16] de Séville (Espagne)

Commentaires : en disant que X* est le point X_{188} du triangle antimédian de A*B*C*, le problème de Kimberling n'est toujours pas résolu car X_{188} est i.e. "the second mid-arc point" du triangle antimédian de A*B*C*.
Par contre, en disant que X* et le point X_{65} i.e l'orthocentre du triangle de contact du triangle excentral de A*B*C*, nous avons une idée de la nature géométrique de X*.

Une courte note concernant Francisco Javier Garcia Capitan

Francisco Javier est un professeur confirmé et plein d'enthousiasme qui enseigne les mathématiques au lycée Alvarez Cubero de Priego de Cordoba, une ville moyenne situé au sud de Cordoba (Espagne). Sa passion pour la Géométrie l'a poussé à utiliser les nouvelles technologies comme les logiciels de calcul *Mathematica*, de dessin *Cabri* pour investir, avec l'aide des coordonnées barycentriques[17], le Triangle. Pour mieux faire partager son plaisir "géométrique", il a créé son propre site de Géométrie[18] qui mérite d'être visité.

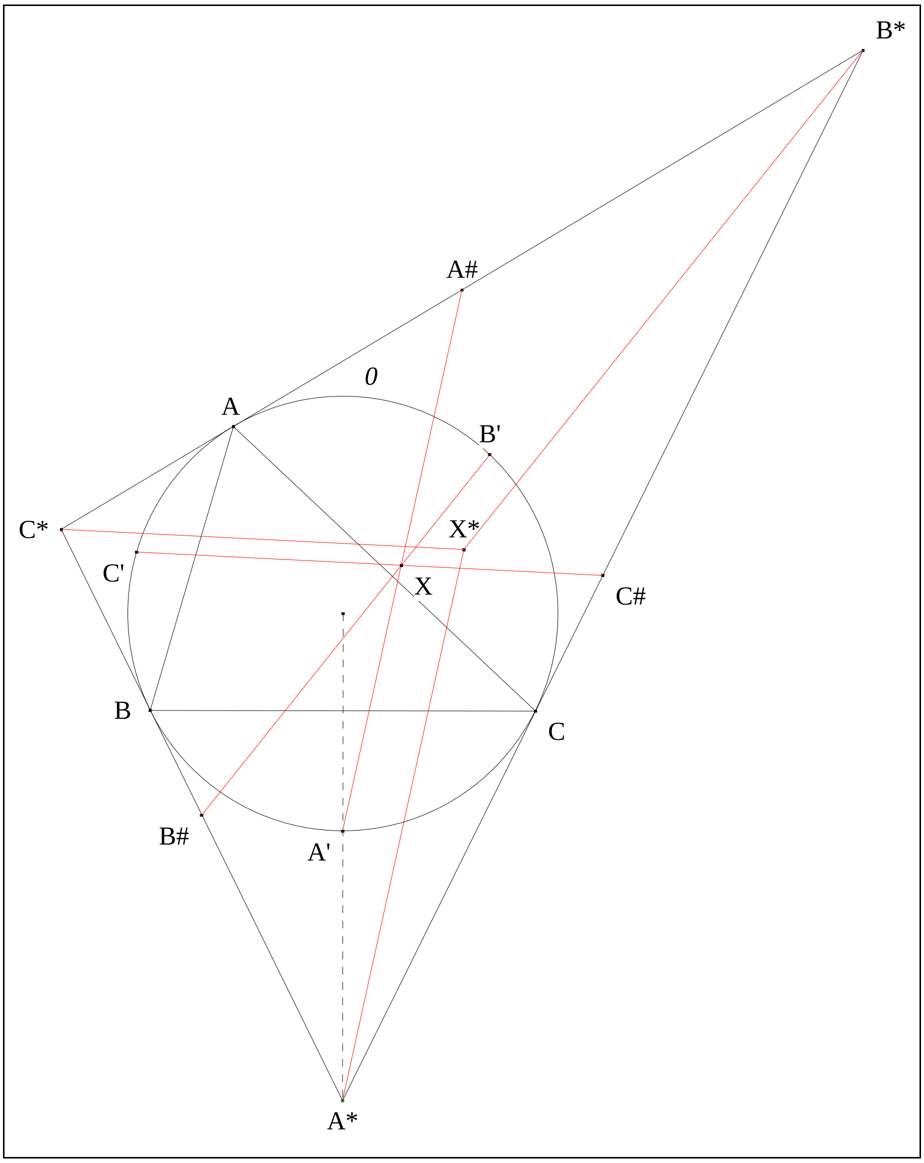
6. Le résultat reformulé

VISION

Figure :

---

15 Montesdeoca A., Una generalizacion sobre un mensaje del Grupo Hyacinthos y una cubica asociada.
16 http://personal. us.es/rbarroso/ trianguloscabri/
17 http://garciacapitan.auna.com/baricentricas.
18 http://garciacapitan.auna.com/.

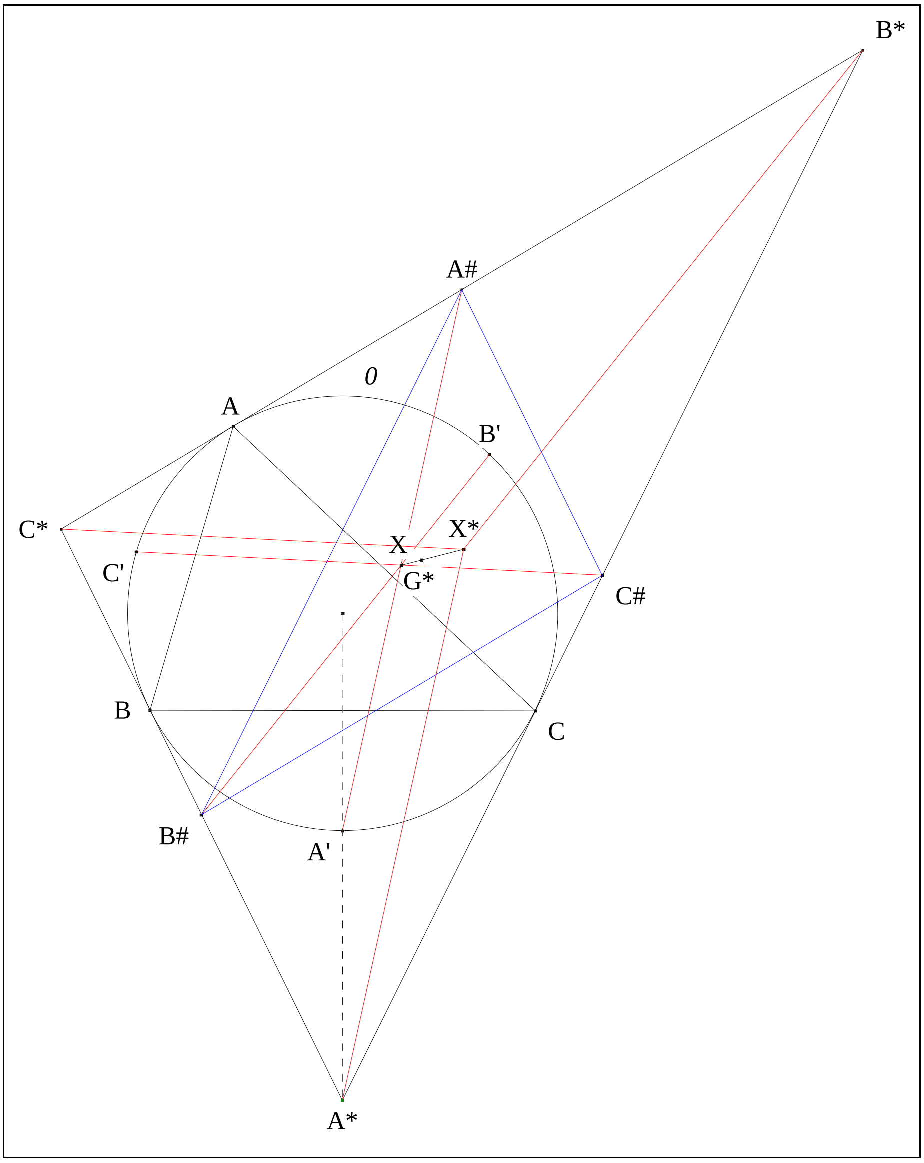


Traits : les hypothèses et notations précédentes sont les mêmes que précédemment.

Donné : (A#A'), (B#B') et (C#C') sont concourantes[19].

VISUALISATION

[19] Ayme J.-L., Concurrent lines, *Mathlinks* du 29/08/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=223391.



- Notons G* le point médian de ABC.

- **Scolies :** **(1)** A#B#C# est le triangle médian de A*B*C*
  (2) A#B#C# est homothétique à A*B*C* dans le rapport 1/2
  (3) A#B#C# est comédian[20] à A*B*C*
  (4) (A*X), (B*X), (C*X) sont concourantes et resp. parallèles à (A#A'), (B#B'), (C#C').

- **Conclusion :** par homothétie, (A#A'), (B#B'), (C#C') sont concourantes.

- Notons X ce point de concours.

Scolies : **(1)** X i.e. "the second mid-arc point of A*B*C*", est répertorié sous X_{178} chez ETC[21]

(2) X est le complément de X* relativement à A*B*C*

(3) Avec l'aide d'un logiciel de calcul, Clark Kimberling précise qu'il est

---

[20] Partage le même point médian i.e. G*.

[21] Kimberling Clark, Triangle Centers and Central Triangles, *Congressus Numerantium,* 129 (1988) 96.

le point d'intersection de {2, 188} et de {8, 236},
sachant que

2	correspond au point médian de A*B*C*
188	au "second mid-arc point" du triangle antimédian de A*B*C*
8	au point de Nagel de A*B*C*
236	au "X2-ceva conjugate de X188" relativement à A*B*C*

le complément de 188 relativement à A*B*C*

Le crosspoint de 2 et 508 relativement à A*B*C*
sachant que

508 est le "6th isosceler point" de A*B*C*.

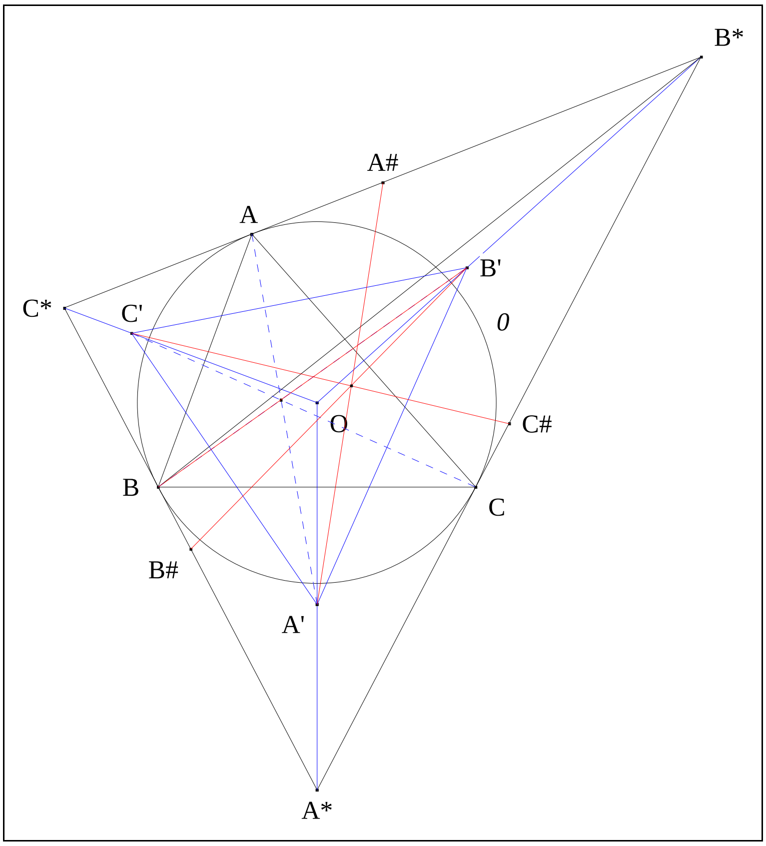
Commentaire : nous nous apercevons que ces indications ne concourent pas à la résolution du problème de Clark Kimberling.

Attention : le concept de "mid-arc points" d'un triangle ABC a été défini pour la première fois par Roger Arthur Jonhson[22] en 1929 comme étant les points milieux des arcs du cercle circonscrit à ABC déterminés par les sommets A, B et C. Rappelons que ces points jouent un rôle dans le cercle et le triangle de Fuhrmann.
Clark Kimberling[23] en 1988 et 1994, G. R. Veldkamp[24] en 1987 ont défini le "mid-arc point" comme étant un centre de perspective.

Note historique : le résultat de Clark Kimberling a été généralisé en 2006 par Éric Danneels[25] de la façon suivante :

---

22 Johnson R. A., *Modern Geometry : An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*, Boston MA : Houghton Mifflin (1929) 228-229.
23 Kimberling C., Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle, *Mathematics Magazine* 67 (1994) 163-187.
24 Kimberling C. and Veldkamp G. R., Problem 1160 and solution, *Crux mathematicorum* (1987) 298-299.
25 Danneels E., Triangles with Vertices on the Angle Bisectors, *Forum Geometricorum* vol. 6 (2006) 247-253 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200629index.html.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
A*B*C* le triangle tangentiel de ABC,
A', B', C' trois points situés resp. sur (OA*), (OB*), (OC*)
et A#, B#, C# les milieux resp. de [B*C*], [C*A*], [A*B*].

Donné : (A#A'), (B#B') et (C#C') sont concourantes.

Énoncé : A'B'C' étant un triangle dont les sommets sont sur les bissectrices intérieurs d'un triangle A*B*C*,
A'B'C' est en perspective avec le triangle de contact ABC de A*B*C*
si, et seulement si,
A'B'C' est en perspective avec le triangle médian A#B#C# de A*B*C*.

Commentaire : la preuve de Danneels est de nature barycentrique.

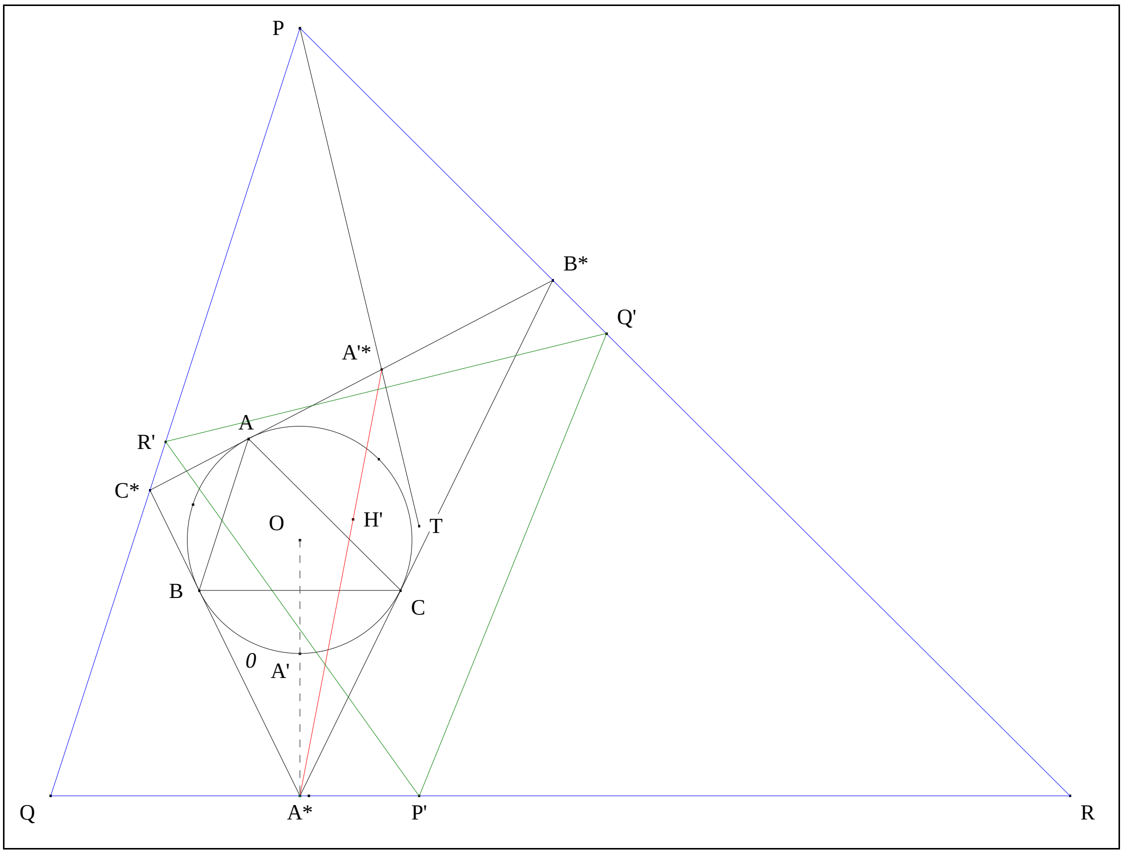
IV. NATURE GÉOMÉTRIQUE DE X_{178}

1. Commentaire : la précision géométrique concernant le point X* obtenue à l'aide de *Mathematica* par Peter J. C. Moses, nous conduit à considérer le triangle excentral de A*B*C*.

2. Le triangle excentral de A*B*C*

VISION

Figure :



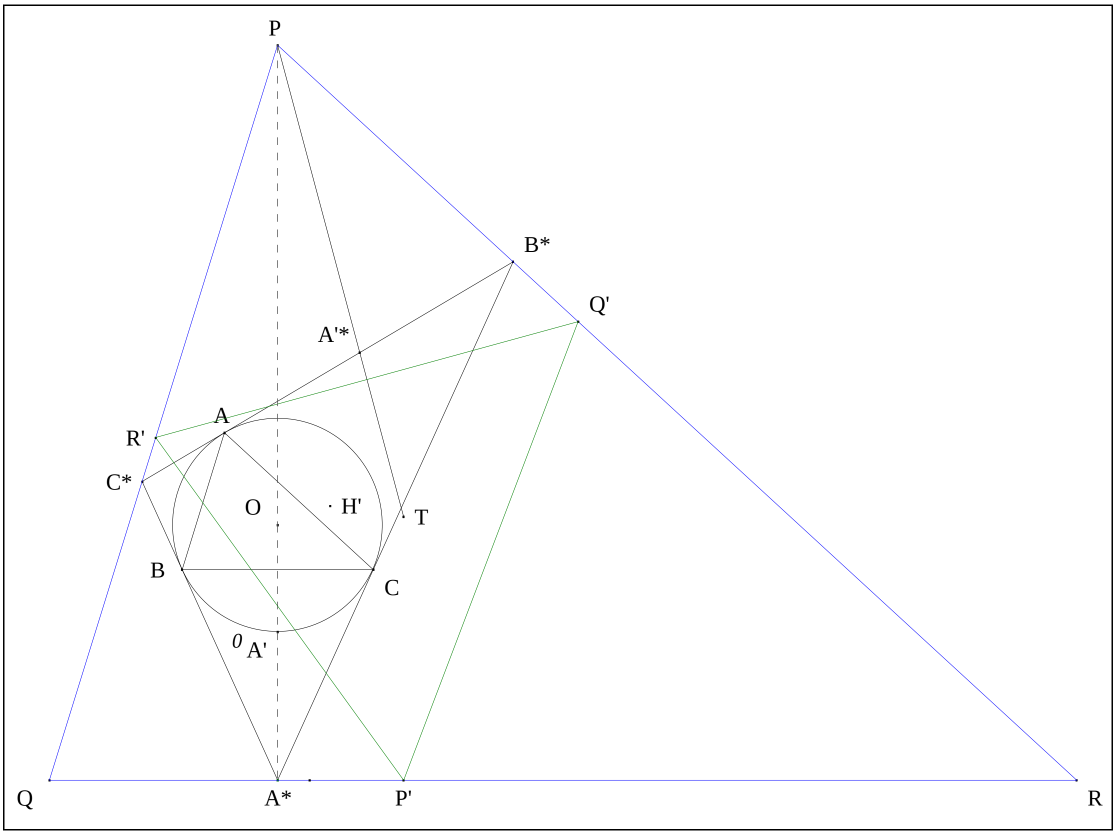
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

PQR le triangle excentral de A*B*C*,
T le centre de PQR,
P'Q'R' le triangle de contact de A*B*C*,
H' l'orthocentre de P'Q'R'
et A'* le point d'intersection de (PT) et (B*C*).

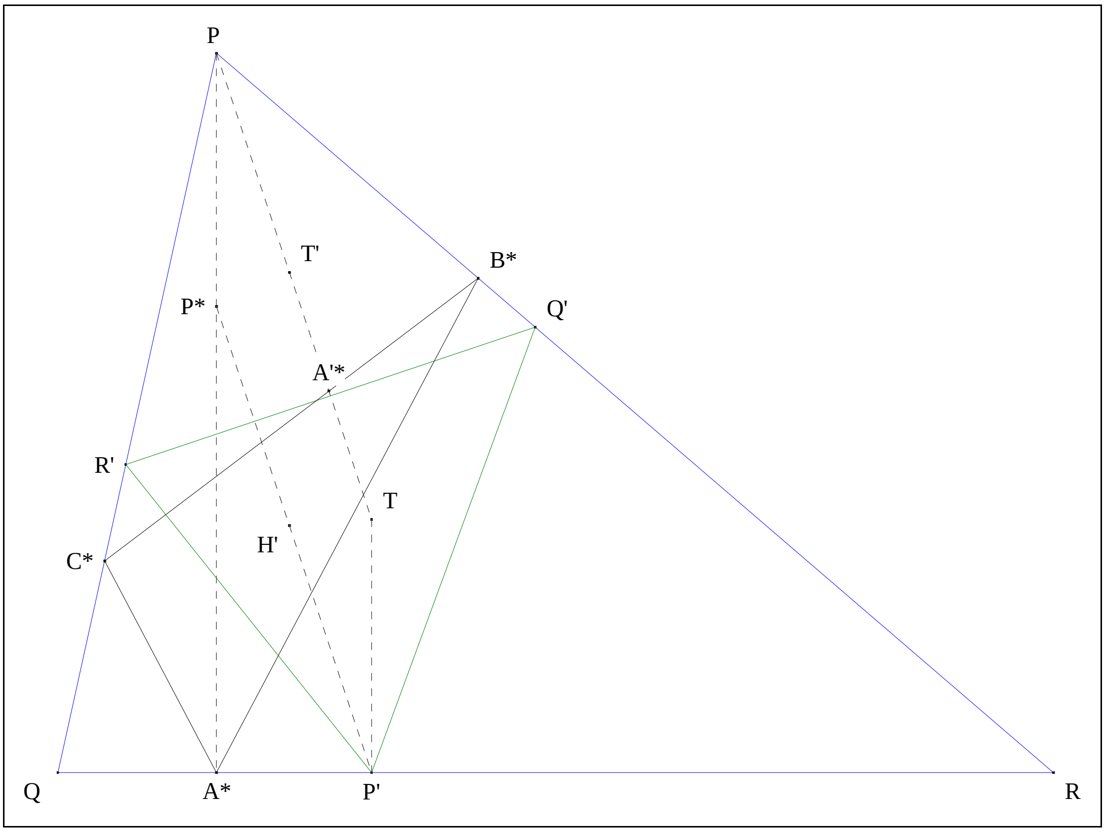
Donné : A*, H' et A'* sont alignés[26].

VISUALISATION

[26] Ayme J.-L., Orthocenter of the contact triangle, *Mathlinks* du 16/02/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=258646.

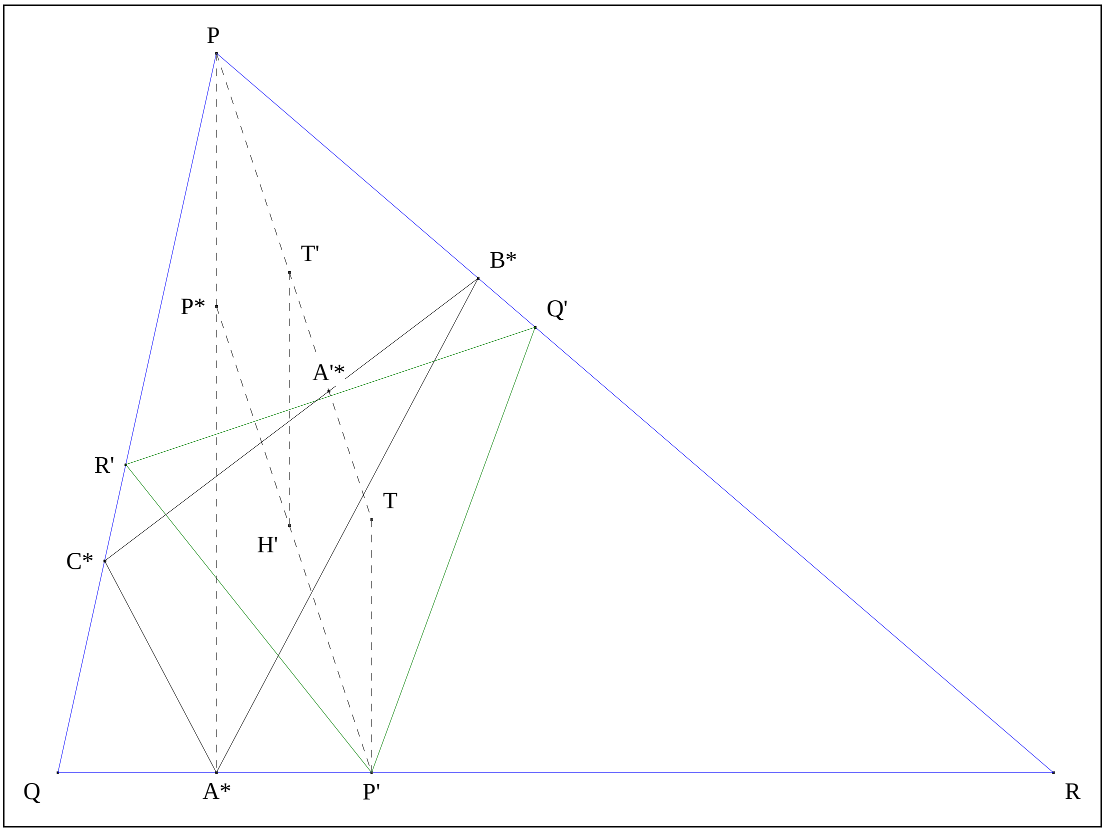


- **Scolie :** (POA'A*) est la P-hauteur de PQR.

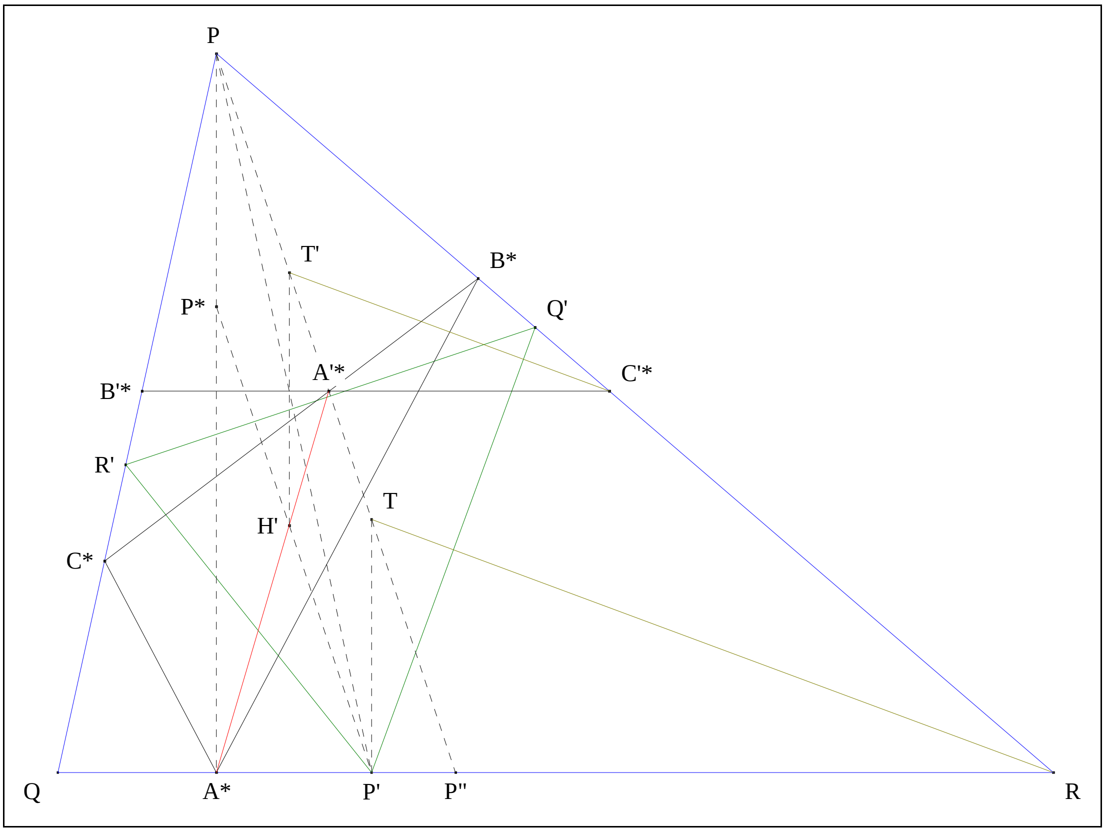


- Notons P* le point d'intersection de (P'H') et (PA*).

- **Scolies :** **(1)** le quadrilatère PP*P'T est un parallélogramme
  (2) T est le centre du cercle circonscrit à P'Q'R'.



- Notons T' le symétrique de T par rapport à (Q'R').
- D'après "Orthocentre d'un triangle I-annexe" (Cf. Annexe 6), T' est l'orthocentre du triangle PR'Q'.
- D'après Carnot "Une relation" (Cf. Annexe 7), P'H' = TT'.
- Le quadrilatère P'TT'H' étant un parallélogramme, (H'T') // (P'T).
- **Scolies :** (P*P), (H'T') et (P'T) sont parallèles entre elles.
- **Conclusion partielle :** $\dfrac{\overline{H'P'}}{\overline{H'P^*}} = \dfrac{\overline{T'T}}{\overline{T'P}}$.



- Notons B'*, C'* les symétriques resp. de B*, C* par rapport à (PT).

- (B*C*) et (QR) étant antiparallèles par rapport à (PQ) et (PR), (B'*A'*C'*) // (QR).

- D'après "Centre d'un triangle H-annexe" (Cf. Annexe 8), T' est le centre de AB*C* ;
  en conséquence, par symétrie d'axe (PT), T' est le centre du triangle PB'*C'*.

- Les triangles PQR et PB'*C'* étant homothétiques, (C'*T') // (RT).

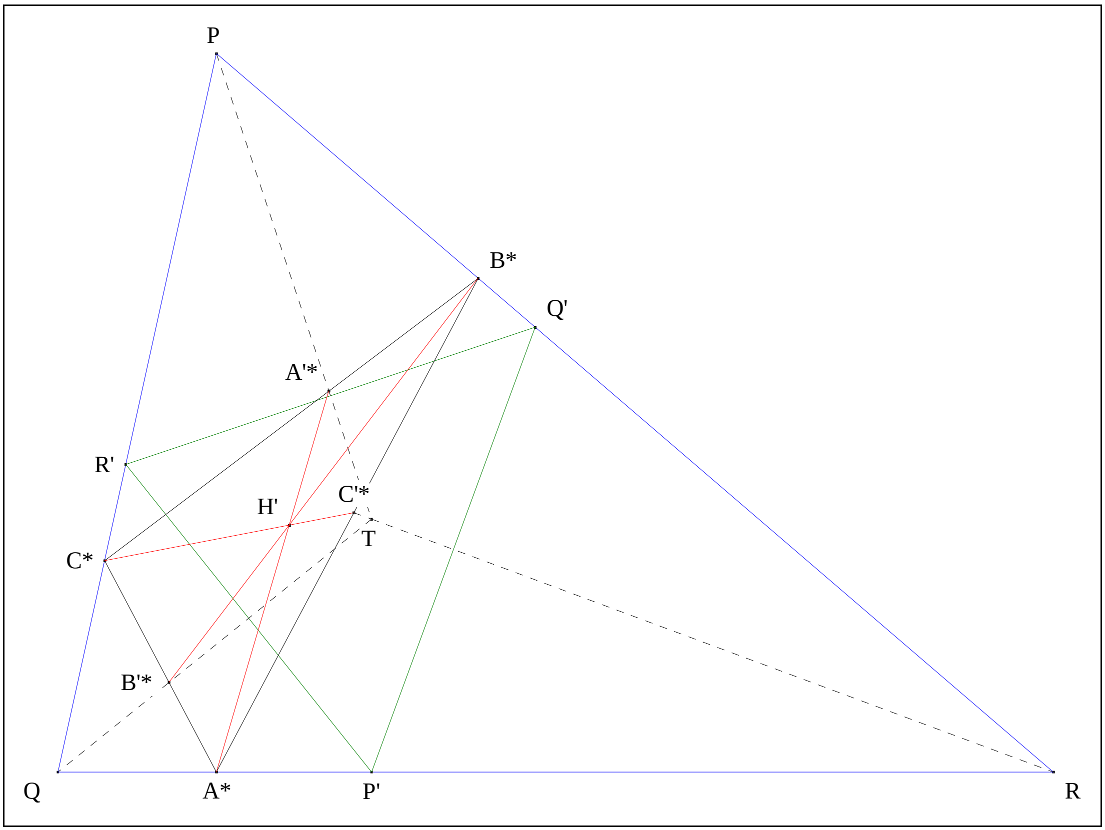
- D'après le théorème de Thalès, $\frac{\overline{T'T}}{\overline{T'P}} = \frac{\overline{C'^*R}}{\overline{C'^*P}}$;

  $\frac{\overline{C'^*R}}{\overline{C'^*P}} = \frac{\overline{A'^*P''}}{\overline{A'^*P}}$;

  par transitivité de la relation //, $\frac{\overline{H'P'}}{\overline{H'P^*}} = \frac{\overline{A'^*P''}}{\overline{A'^*P}}$.

- **Conclusion :** A*, H' et A'* sont alignés.

Scolies : **(1)** trois droites concourantes

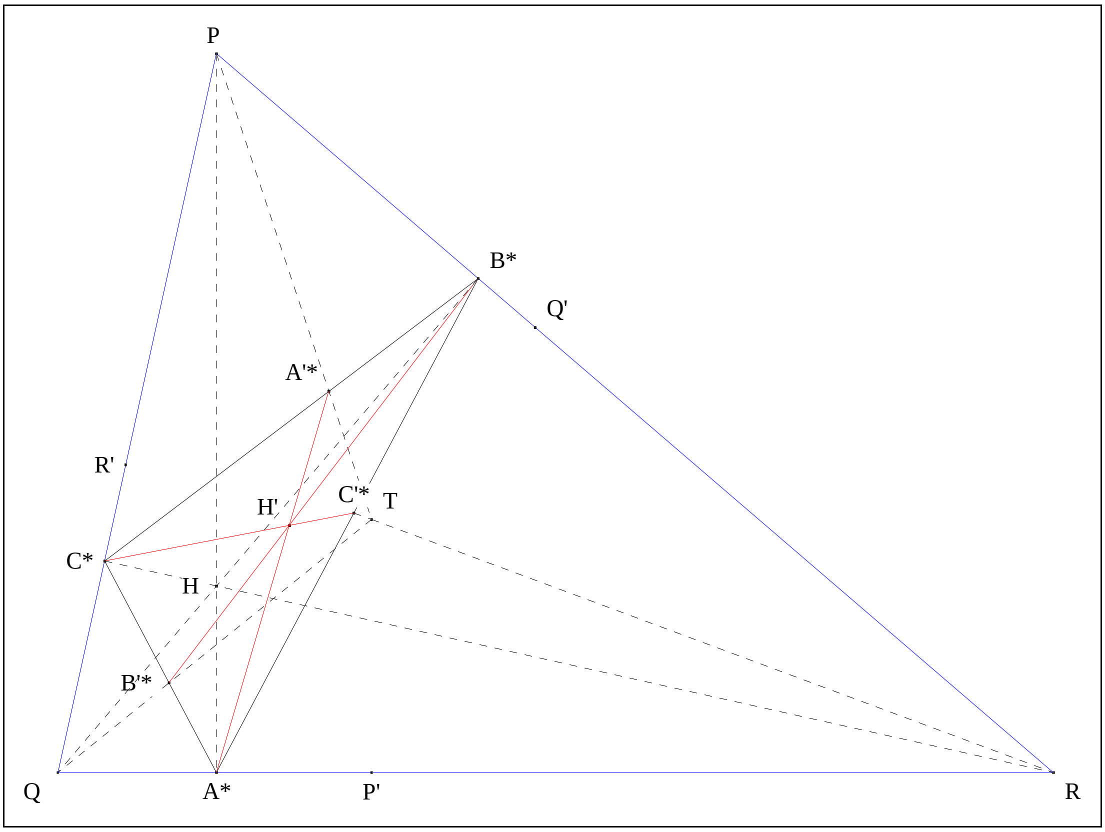


- Notons B'* le point d'intersection de (QT) et (C*A*)
  et C'* le point d'intersection de (RT) et (A*B*).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que B*, H' et B'* sont alignés
  C*, H' et C'* sont alignés.

- **Conclusion :** (A*A'*), (B*B'*) et (C*C'*) sont concourantes en H'.

(2) Un cross-cevian point



- Notons H l'orthocentre de PQR.

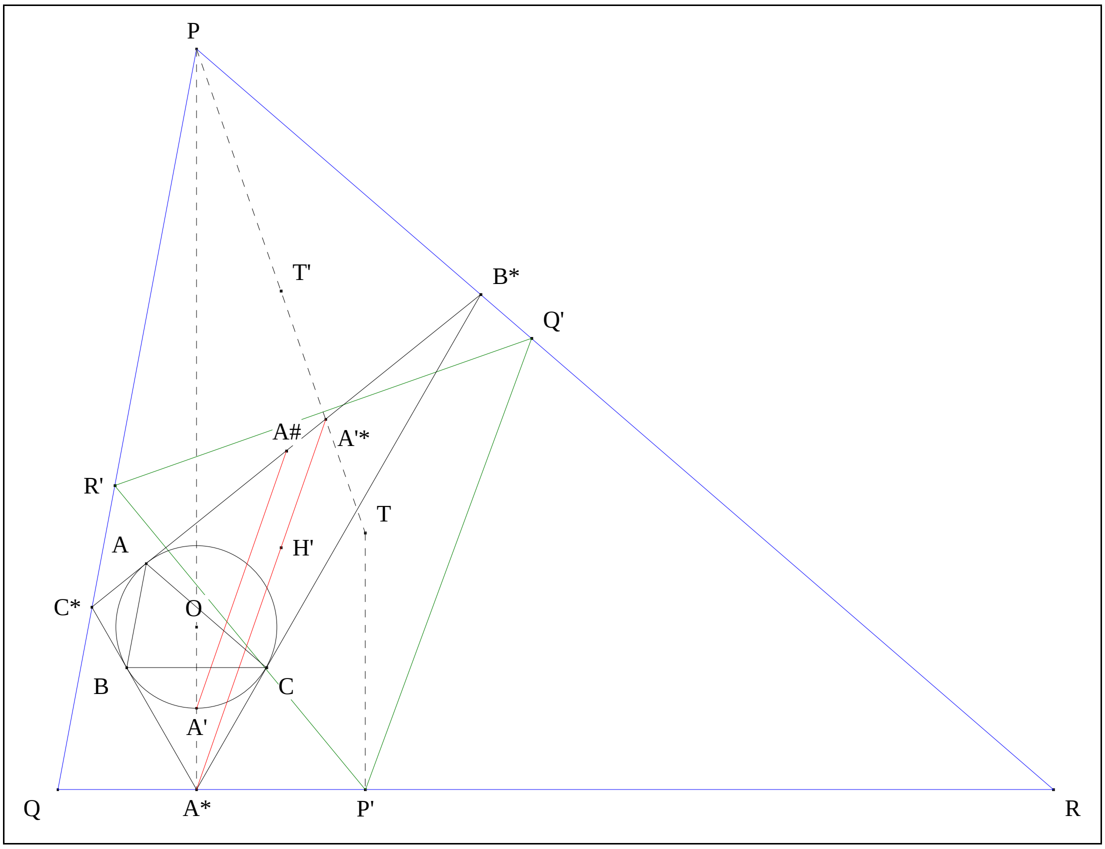
- **Conclusion :** par définition[27], H' est le cross-cevian point de H et T relativement à PQR ;
  pour ETC, H est le H'-Ceva conjugate of T
  T est le H'-Ceva conjugate of H.

3. Deux parallèles

VISION

Figure :

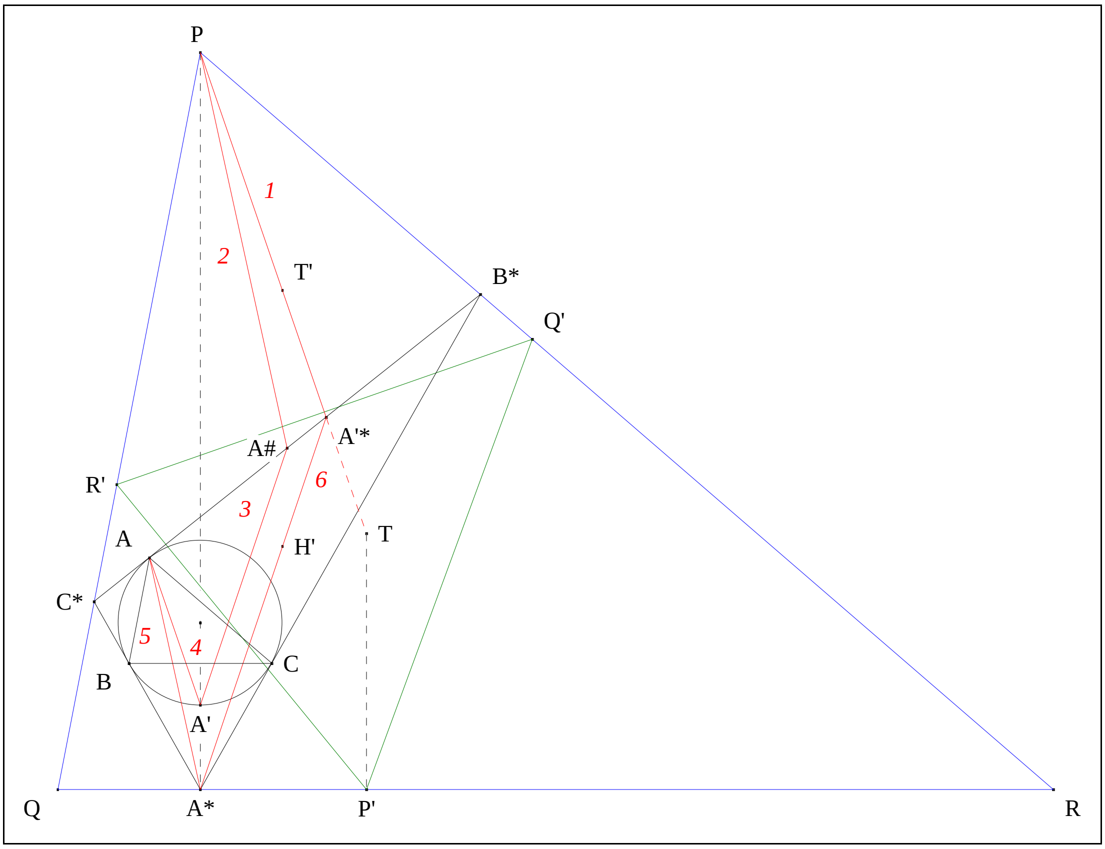
[27] Ayme J.-L., The cross-cevian point, G.G.G. vol. 3 p. 2-8 ;
http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/Docs/The%20cross-cevian%20point.pdf.



Traits : les hypothèses et notations précédentes sont les mêmes que précédemment.

Donné : **(**A*HA'*) est parallèle à (A'A#).

VISUALISATION



- Les triangles ABC et PR'Q' étant homothétiques, (AA*) // (PA'*T).

- (B*C*) et (QR) étant antiparallèles par rapport à (PQ) et (PR), (PA#) est la P-symédiane de PQR.

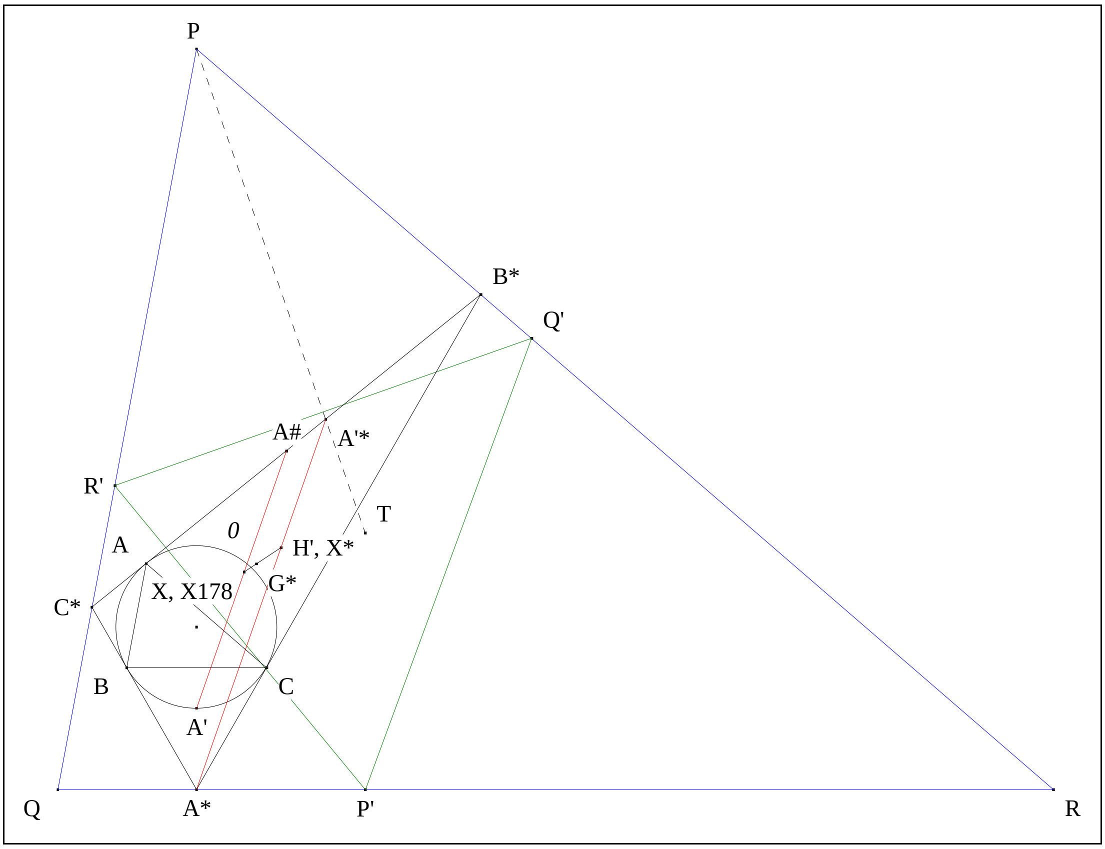
- Par construction, (AA*) ets la A-symédiane de ABC.

- Les triangles ABC et PR'Q' étant homothétiques, (AA*) // (PA#).

- **Conclusion :** d'après "Le petit théorème de Pappus" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à l'hexagone sectoriel A'*PA#A'AA*A'*, (A*H'A'*) // (A'A#).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B*H'B'*) // (B'B#)
  (C*H'C'*) // (C'C#).

4. Le point X_{178}



- X* et H' étant confondus,
  X* est l'orthocentre du triangle de contact du triangle excentral du triangle tangentiel de ABC.

- **Scolie :** (A'A#), (B'B#) et (B'B#) sont concourantes en X.

- **Conclusion :** X i.e. X_{178} est le complément de X* relativement à A*B*C*

  ou encore

  X_{178} est le complément de l'orthocentre
  du triangle de contact du triangle excentral du triangle tangentiel de ABC.

V. LA SECONDE PREUVE

1. Commentaire : les natures géométriques de X_{178} (X) et de X* (H'), nous permet d'envisager une seconde preuve synthétique.

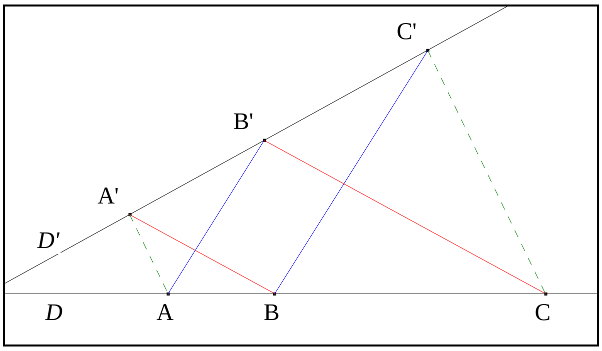
2. Le schéma de démonstration

- Les hypothèses et notations précédentes sont les mêmes que précédemment.
- (A*A'*), (B*B'*) et (C*C'*) sont concourantes en H'. (p. 24-28)
- (A*A'*), (B*B'*), (C*C'*) sont resp. parallèles à (A'A#), (B'B#), (B'B#). (p. 29-31)

- A*B*C* et A#B#C# sont homothétiques.
- **Conclusion :** (A'A#), (B'B#) et (B'B#) sont concourantes.
- Notons X ce point de concours
- **Scolie :** X est le complément de H' relativement à A*B*C*.

VI. ANNEXE

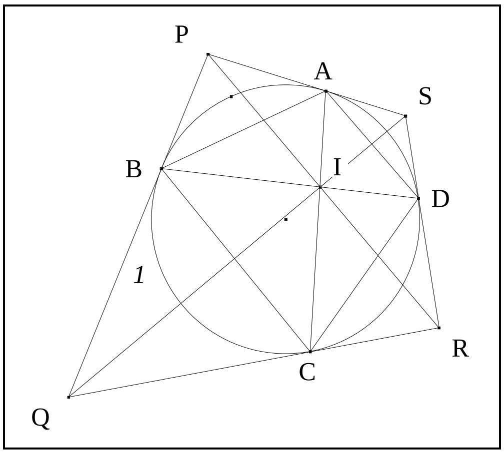
1. Le petit théorème de Pappus[28]



Traits : *D*, *D'* deux droites,
A, B, C trois points pris dans cet ordre sur *D*,
B' un point
et A', C' deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

2. Le théorème de Newton[29]



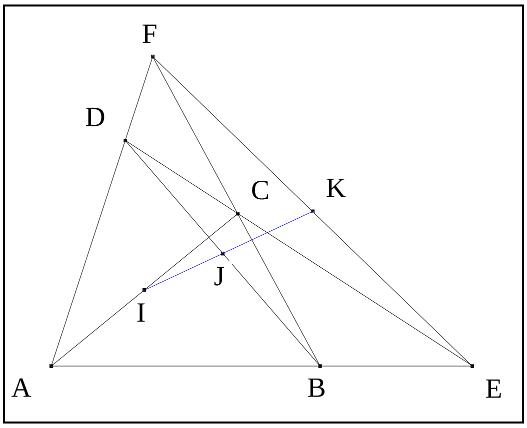
Traits : *1* un cercle,
ABCD un quadrilatère inscrit dans *1*

[28] Pappus, *Collections* Livre VII.
[29] Newton I., *Principes* 1686, corollaire II du lemme XXIV; il est aussi appelé théorème faible de Brianchon.

et PQRS le quadrilatère tangentiel de ABCD.

Donné : les diagonales [PR], [SQ], [AC] et [BD] sont concourantes.

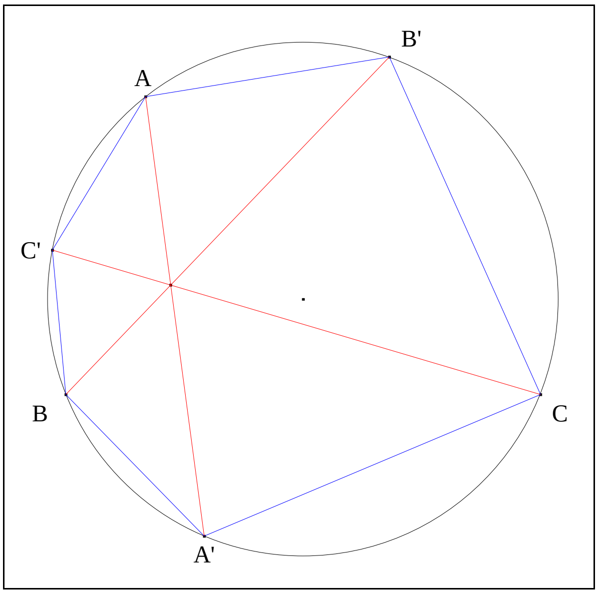
3. La ponctuelle de Gauss[30]



Traits : ABCD un quadrilatère,
E un point de (AB),
F le point d'intersection de (AD) et (BC)
et I, J, K les milieux resp. de [AC], [BD], [EF].

Donné : C, D et E sont alignés *si, et seulement si*, I, J et K sont alignés.

4. Diagonales d'un hexagone convexe et cyclique[31]



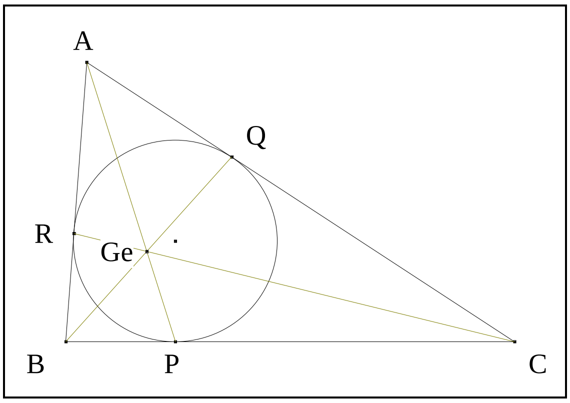
Traits : AC'BA'CB'A un hexagone convexe et cyclique.

Donné : (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes *si, et seulement si*, AC' . BA' . CB' = BC' . CA' . AB'.

5. Le point de Gergonne[32]

---

30 Gauss K. F., *Monatscorrespond.* 22 (1810) 115.
31 Sharygin I. F., *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986), II. 49 p. 76.

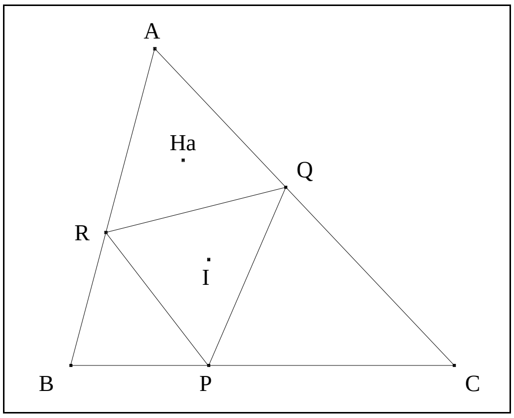


Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC
et	P, Q, R	les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB).

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Scolie : ce point de concours est "le point de Gergonne" de ABC ;
il est noté Ge et répertorié sous X_7 chez ETC.

6. Orthocentre d'un triangle I-annexe

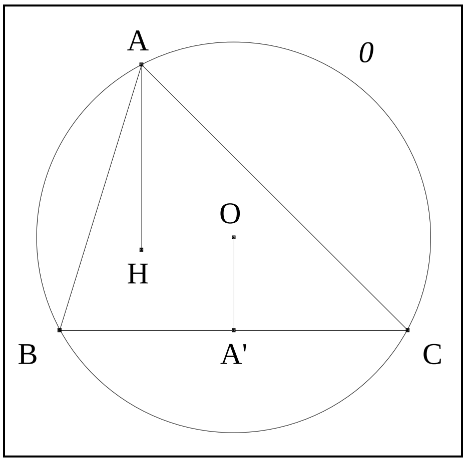


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	PQR	le triangle de contact de ABC
et	Ha	le symétrique de I par rapport à (QR).

Donné : Ha est l'orthocentre du triangle I-annexe ARQ.

7. Une relation[33]

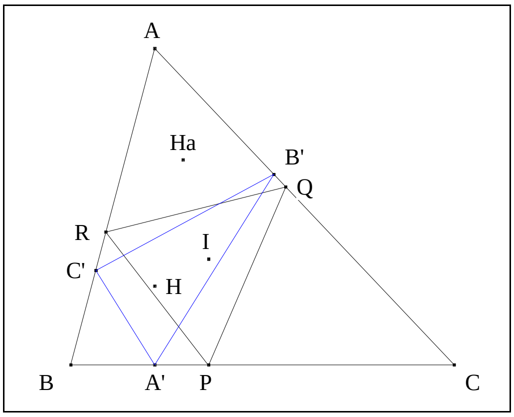
[32] Gergonne, *Annales de Gergonne* IX (1818-19).
[33] Carnot L., *Géométrie de position* (1803).



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et A' le milieu de [BC],

Donné : AH = 2.OA'.

8. Centre d'un triangle H-annexe



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
PQR le triangle de contact de ABC,
Ha le symétrique de I par rapport à (QR),
H l'orthocentre de ABC
et A'B'C' le triangle orthique de ABC

Donné : Ha est le centre du triangle H-annexe AC'B'.

VII. ARCHIVE

Le papier de Clark Kimberling

Proposal: Let A', B', C' be the first points of intersection of the angle bisectors of a triangle ABC with its incircle. Let A", B", C" be the midpoints of the sides of ABC. Prove that the lines A'A", B'B", C'C" concur in a point.

Proof: Write $x = \cos(A/2)$, $y = \cos(B/2)$, $z = \cos(C/2)$, so that a trilinear-coordinate equation for the incircle, according to Carr (p. 641) is

$$x\sqrt{\alpha} + y\sqrt{\beta} + z\sqrt{\gamma} = 0 .$$

Intersecting this with the bisector $\beta = \gamma$ gives
$A' = (y + z)^2 : x^2 : x^2$.

We shall show that the point of concurrence is
$P = (y + z)/a : (z + x)/b : (x + y)/c$. To show that P lies on A'A", we need only establish that

$$\begin{vmatrix} \frac{y+z}{a} & \frac{z+x}{b} & \frac{x+y}{c} \\ 0 & c & b \\ \left(\frac{y+z}{x}\right)^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

This last equation follows from

$$c - b + (c \cos A + a \cos C) - (b \cos A + a \cos B) = 0 ,$$

so that $(c - b)(1 + \cos A) = a(\cos B - \cos C)$,

and $\dfrac{c - b}{a} = \dfrac{y^2 - z^2}{x^2}$.

Similarly, P is proved to lie on lines B'B" and C'C".

Remark: Readers may find a "pure" geometric proof of the concurrence. It is hoped that the trilinears for P will nevertheless be printed in the solution. One reason for this request is that the only practical way to see that P is not one of the "named triangle centers" is to compare its trilinears with those of the familiar centers.