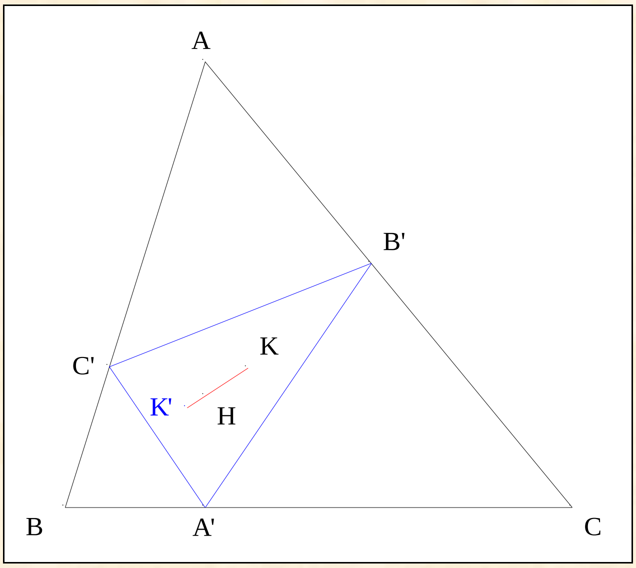
LES DROITES

DE

ZASLAVSKY ET DE van AUBEL

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente les droites d'Alexey A. Zaslavsky et de Hendricus Hubertus van Aubel qui apparaît comme un cas particulier de la première. Un changement de point de vue permet d'obtenir synthétiquement la droite centrale de H. H. van Aubel. Un appendice concernant le lemme catalytique de Khoa Lu Nguyen suivi d'une annexe termine l'article.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils s'adressent tout particulièrement au professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) qui a relu et corrigé cet article.

Abstract. Article presents the lines of Alexey A. Zaslavsky and Hendricus Hubertus van Aubel, which appears as a case of the first. A change of view allows to get the central line of H. H. van Aubel. An appendix on the catalytic lemma of Khoa Lu Nguyen followed an annex ends this article.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Acknowledgements. They go particularly to the Professor Ercole Suppa of Teramo (Italy) who read and corrected this article.

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 06/11/2011 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. LA DROITE

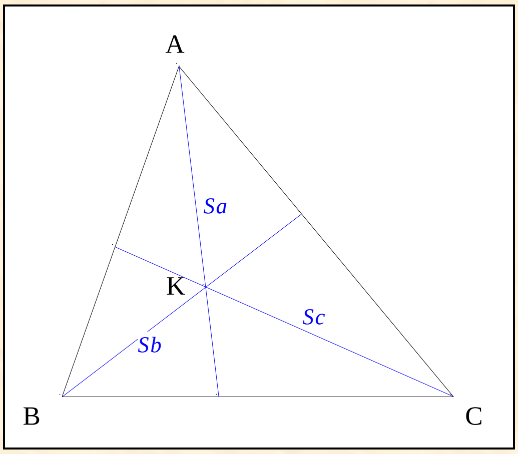
DE

ALEXEY ZASLAVSKY

1. Le point de Lemoine

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle
et *S*a, *S*b, *S*c les A, B, C-symédianes de ABC.

Donné : *S*a, *S*b et *S*c sont concourantes [2].

Scolie : le point de concours de *S*a, *S*b et *S*c, noté K, est répertorié sous X_6 chez ETC.
Suite à l'initiative de Joseph Neuberg en 1884, K est "le point de Lemoine de ABC".

Note historique : c'est au congrès de Lyon en 1873 qu'Émile Lemoine, dans un papier intitulé "Sur un point remarquable du triangle", a présenté ce résultat sans démonstration.
Nathan Altshiller Court dans son livre [3] dit que Lemoine

may be said to have laid the foundation...
of the modern geometry of the triangle as a whole.

Quant à Ross Honsberger, il ajoute que le point symédian peut être considéré comme

a crown jewel of modern geometry [4].

D'après l'historien anglais John Sturgeon Mackay [5], le point K s'est dégagé progressivement à partir de ses nombreuses propriétés.

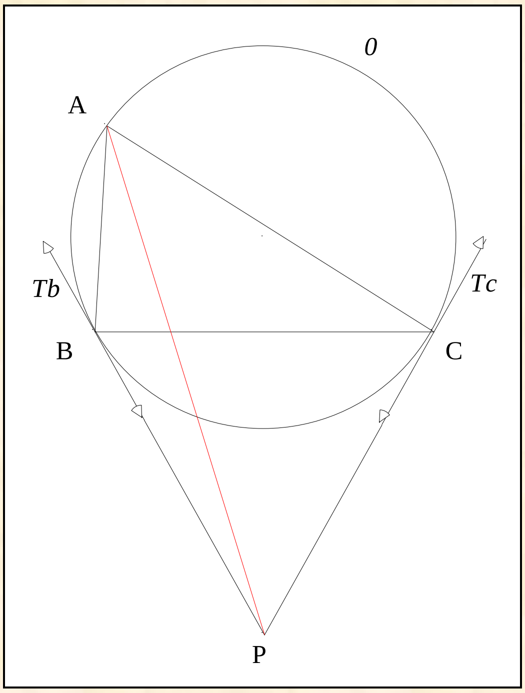
---

2 Lemoine E. (1840-1912), Sur un point remarquable du triangle, Congrès de Lyon de L'AFAS (1873)
3 Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1923) 304
4 Honsberger R., *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America (1995) 53
5 Mackay J. S., Early History of the Symmedian Point, *Proceedings of Edinburgh Math. Society* **XI** (1892-93) 92

2. La figure de Chasles

VISION

Figure :



Traits :		ABC	un triangle,
		0	le cercle circonscrit à ABC,
		Tb, *Tc*	les tangentes à *0* resp. en B, C
	et	P	le point d'intersection de *Tb* et *Tc*.

Donné : (AP) est la symétrique de la A-médiane par rapport à la A-bissectrice intérieure de ABC.

Note historique : ce résultat apparaît comme une retombée du théorème suivant de Michel Chasles découvert en 1816 et republié dans les *Annales* de Gergonne[6] et de Liouville [7] avec la démonstration de son auteur :

le centre N' *d'un cercle obtenu par projection conique d'un cercle* AMB *d'une sphère est*
la projection conique du sommet N *du cône circonscrit à la sphère , suivant le cercle* AMB.

Rappelons que ce résultat avait été communiqué à Hachette, et inséré dans ses *Éléments de Géométrie à trois dimensions*, partie algébrique, à la page 270.

Nous retrouvons ce résultat chez Maurice d'Ocagne [8].

---

6 *Annales* de Gergonne **19** (1828-1829) 157 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

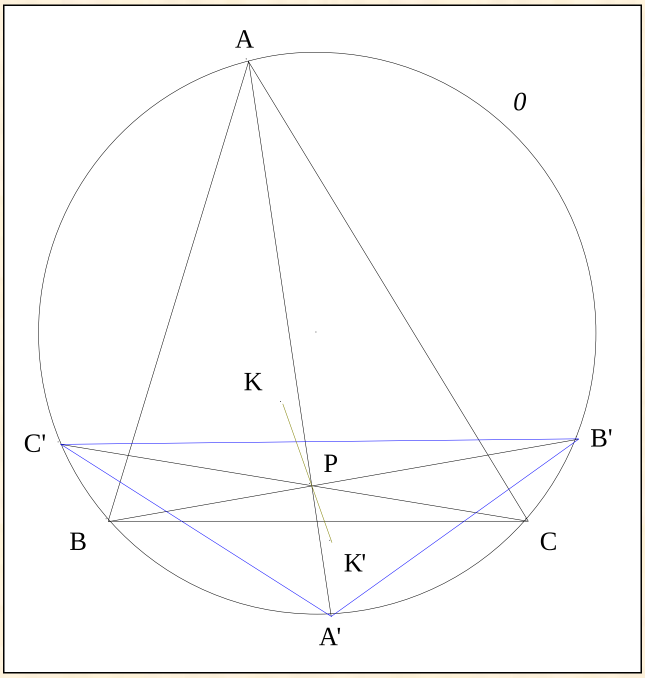
7 *Annales* de Liouville **7** (1842) 272.

8 d'Ocagne M., Sur un élément du triangle rectiligne ; symédiane, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3-ème série **II** (1883) 464, exercice **5** ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=1 ;
Symmedian, *Art of Problem Solving* (14/07/2008) ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=214829.

3. La conjecture d'Alexey A. Zaslavsky

VISION

Figure :

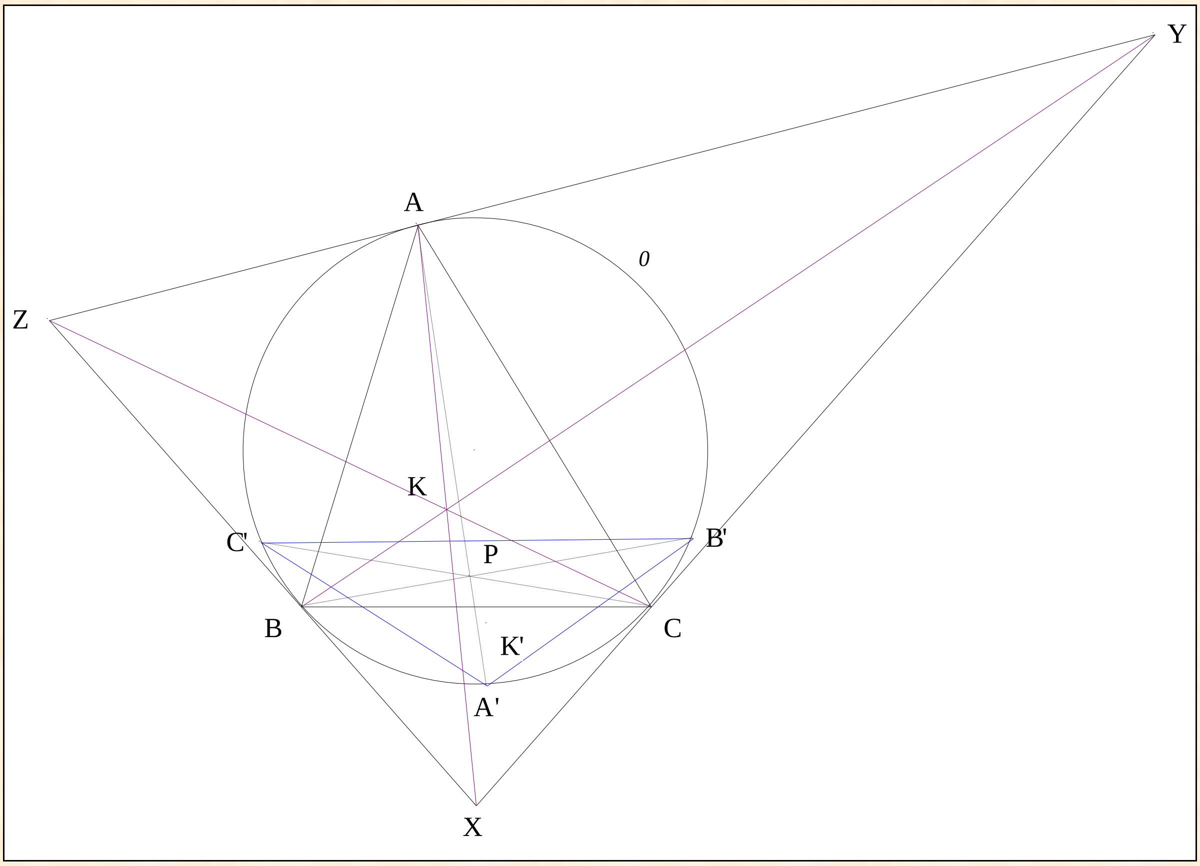


Traits :	ABC	un triangle,
	K	le point de Lemoine de ABC,
	0	le cercle circonscrit de ABC,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-circumcévien de ABC
et	K'	le point de Lemoine de A'B'C'.

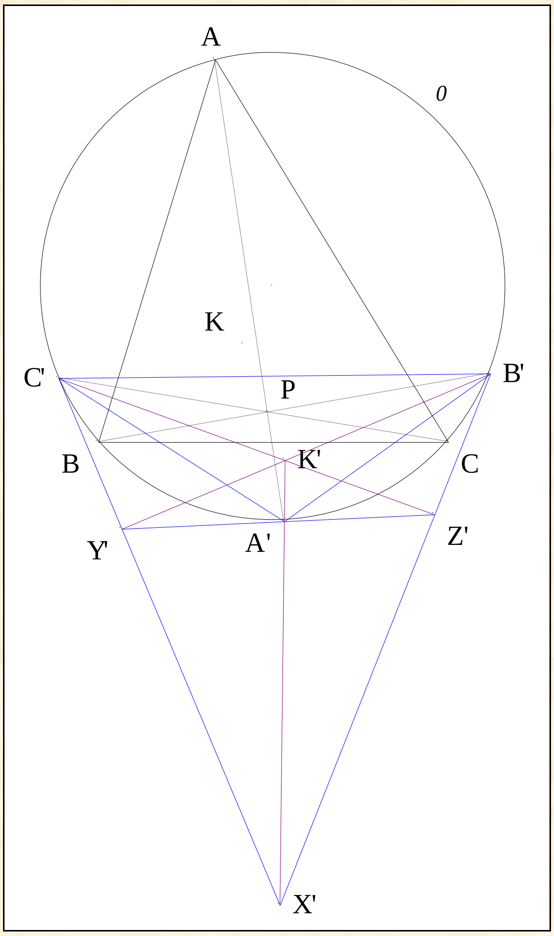
Donné : P, K et K' sont alignés. [9]

VISUALISATION

[9] Zaslavsky A. A., two Lemuan's points, Message *Hyacinthos* # **9856** du 04/06/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

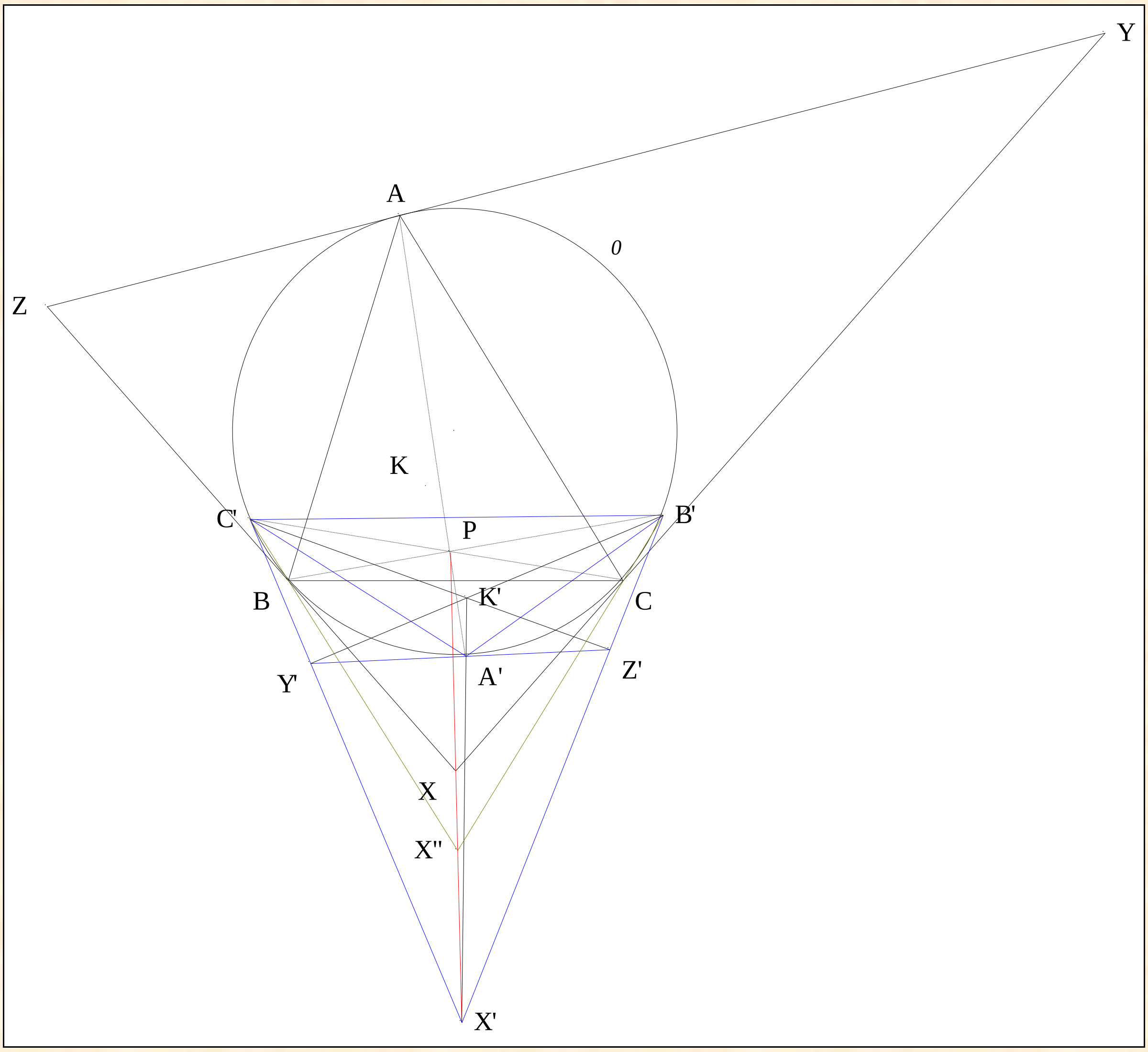


- Notons XYZ le triangle tangentiel de ABC.
- D'après **A. 2.** La figure de Chasles, (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes en K.



* Notons X'Y'Z' le triangle tangentiel de A'B'C'.

* D'après **A. 2.** La figure de Chasles, (A'X'), (B'Y') et (C'Z') sont concourantes en K'.

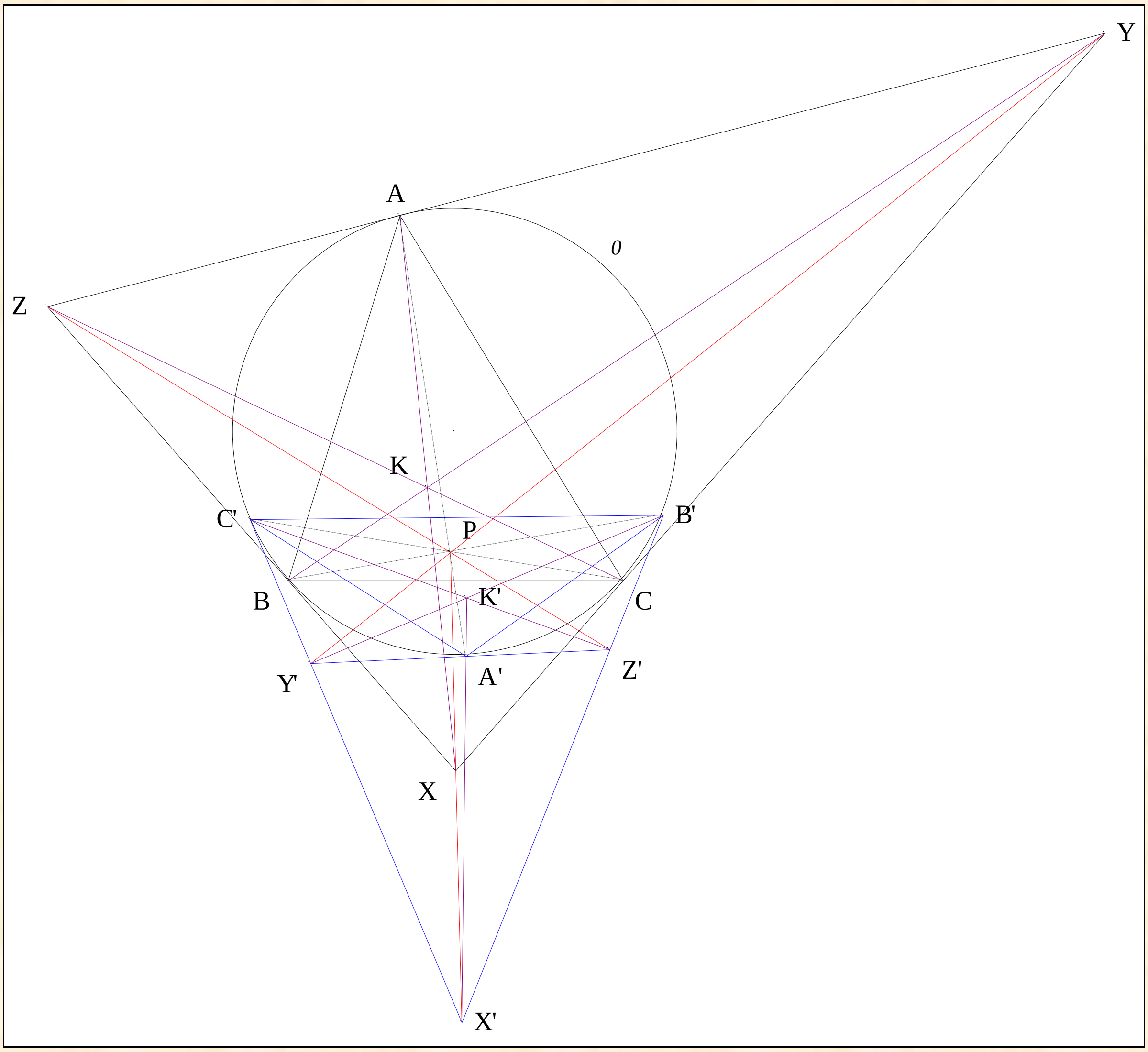


- Notons X" le point d'intersection de (BC') et (CB'),
  Tb', *Tc'* les droites resp. (X'Z'), (X'Y').
  et *Tb*, *Tc* les droites resp. (XZ), (XY).

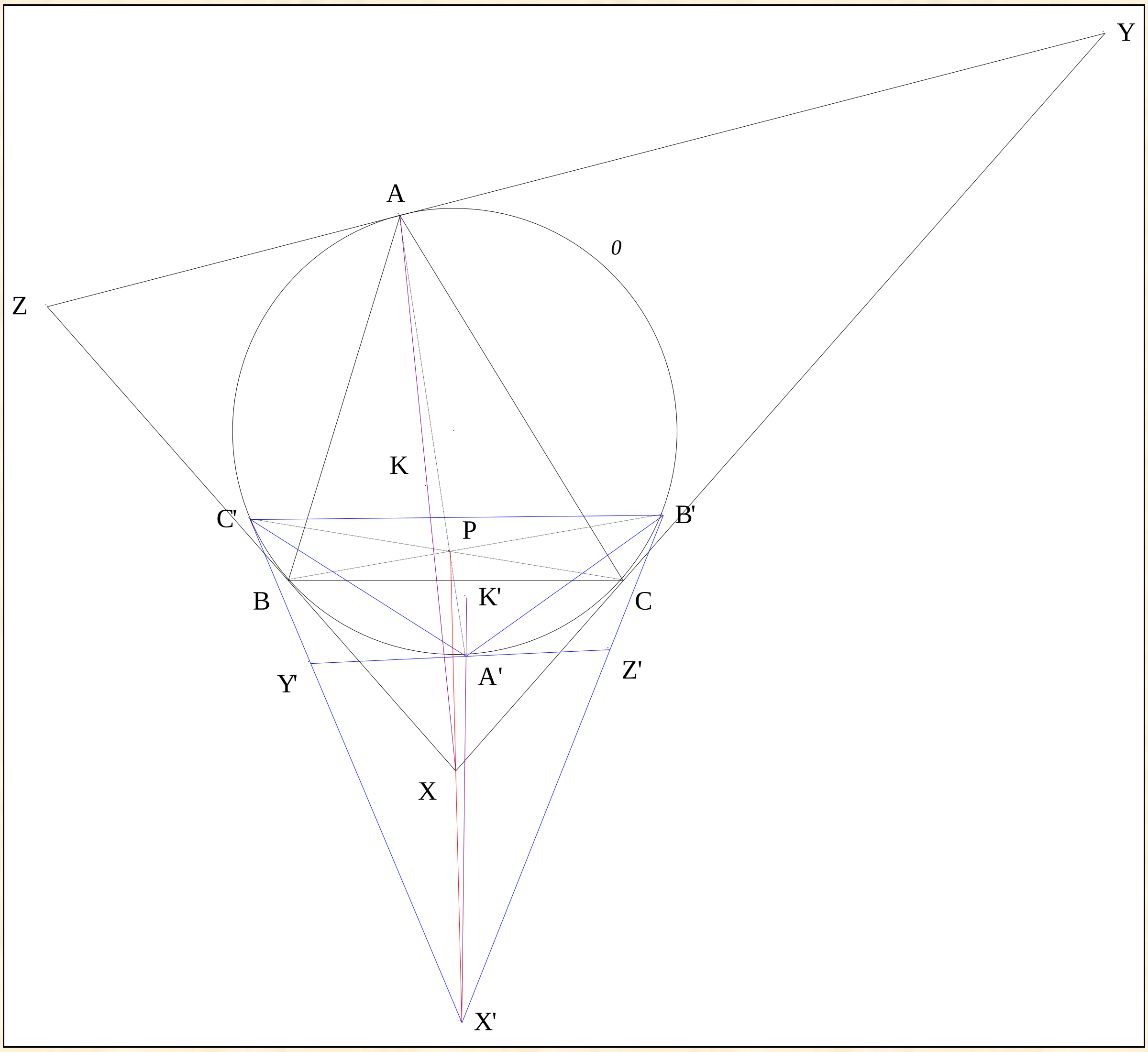
- D'après "Tétragramma mysticum" (Cf. Annexe **1**)
  (X'X"P) est la pascale de l'hexagone dégénéré *Tc'* BB' *Tb'* CC'.

- D'après "Tétragramma mysticum" (Cf. Annexe **1**)
  (XPX") est la pascale de l'hexagone dégénéré *Tb* B'C *Tc* C'B.

- D'après l'axiome d'incidence Ia, X', X" et P sont alignés.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que Y', Y'' et P sont alignés
  Z', Z'' et P sont alignés.

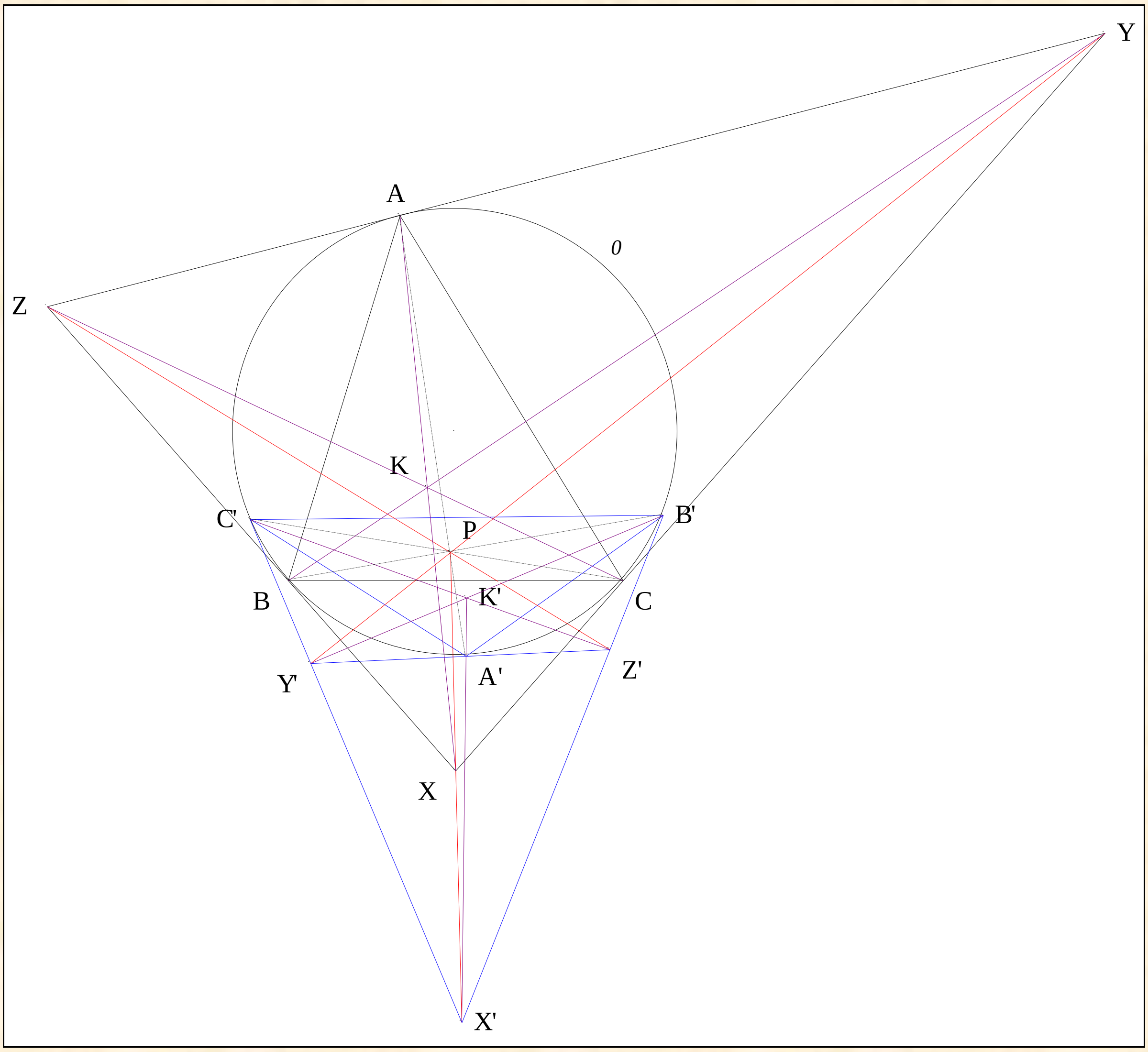


- **Scolies :** **(1)** XYZ et X'Y'Z' sont perspectifs de centre P

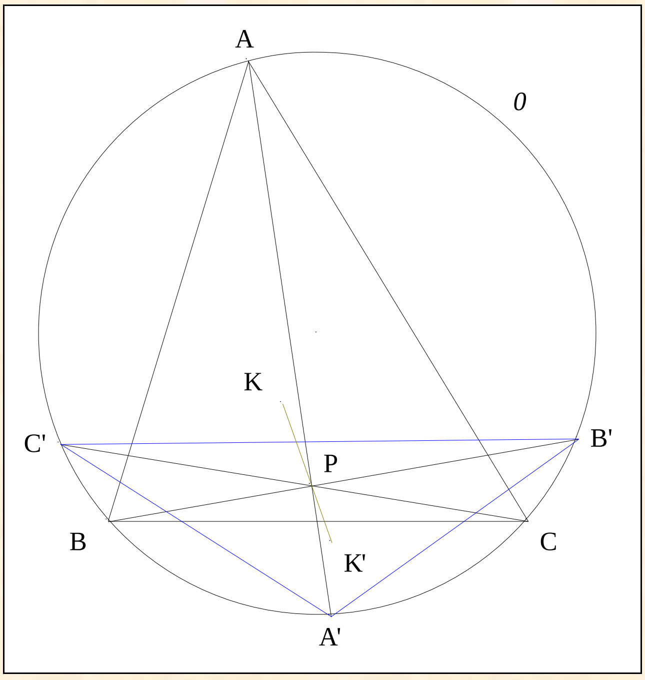
  (2) A est le point d'intersection de (XK) et (YZ)

  (3) A' est le point d'intersection de (AP) et (Y'Z')

  (4) (X'A') passe par K'.



- … et circulairement avec B, C.



- **Conclusion :** d'après "Le lemme catalytique de Khao Lu Nguyen" (Cf. Appendice **1**), P, K et K' sont alignés.

Note historique : la preuve présentée s'inspire de celle de Darij Grinberg [10].

B. LA DROITE

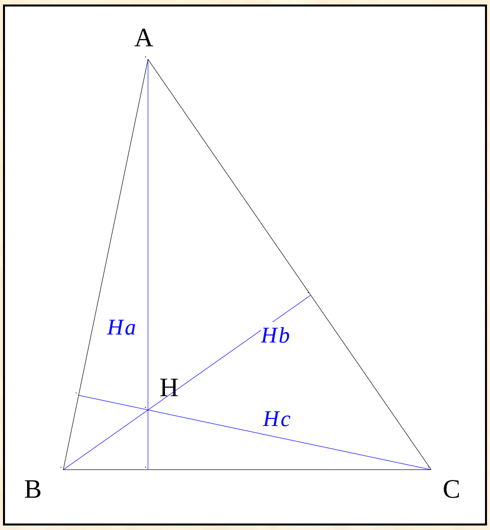
DE

HENDRICUS HUBERTUS van AUBEL

1. L'orthocentre

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle
et *Ha*, *Hb*, *Hc* les A, B, C-hauteurs de ABC.

Donné : *Ha*, *Hb* et *Hc* sont concourantes [11].

Scolie : ce point de concours, noté et répertorié sous X_4 chez ETC [12], est "l'orthocentre de ABC".

Commentaire : H est la première lettre de "Höhenschnittpunkt" qui, en allemand, signifie "point de concours des hauteurs".

---

10 Grinberg D., two Lemuan's points, Message *Hyacinthos* # **9923** du 20/06/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

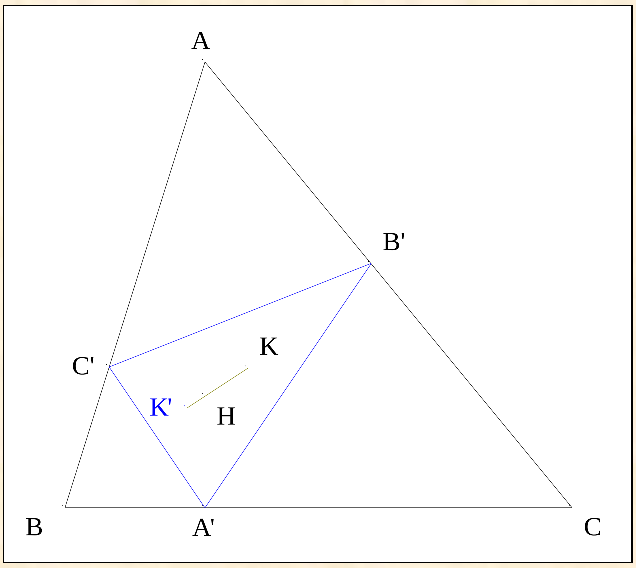
11 Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.), *Scolies*, lemme **5**
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas **5**

12 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

2. La droite de H. H. van Aubel

VISION

Figure :

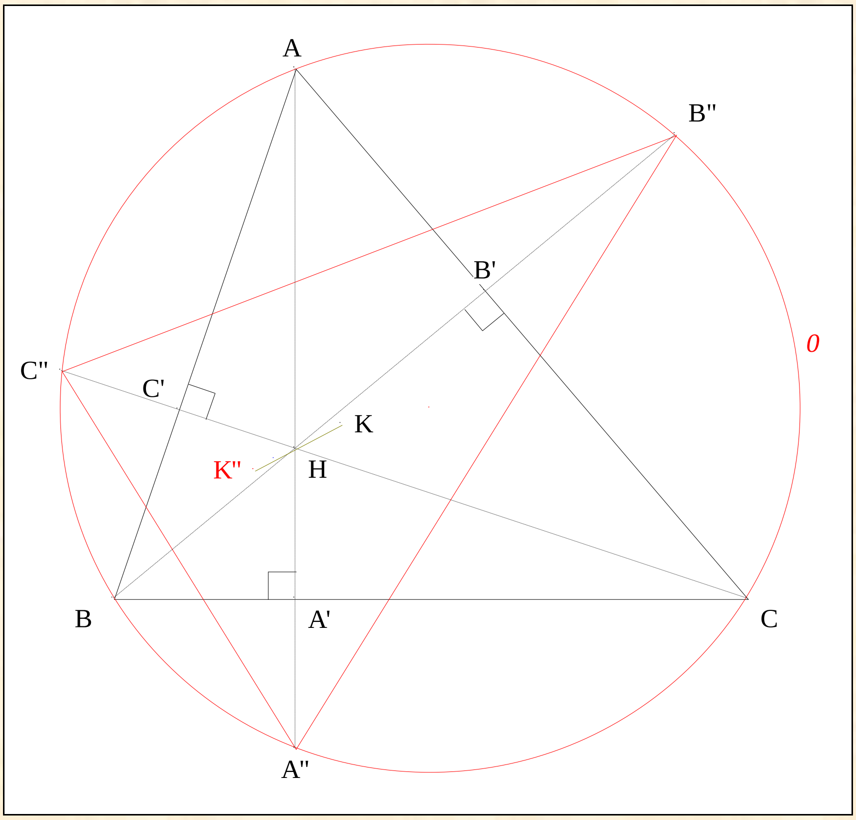


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
K le point de Lemoine de ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC
et K' le point de Lemoine de A'B'C'.

Donné : K, K' et H sont alignés. [13]

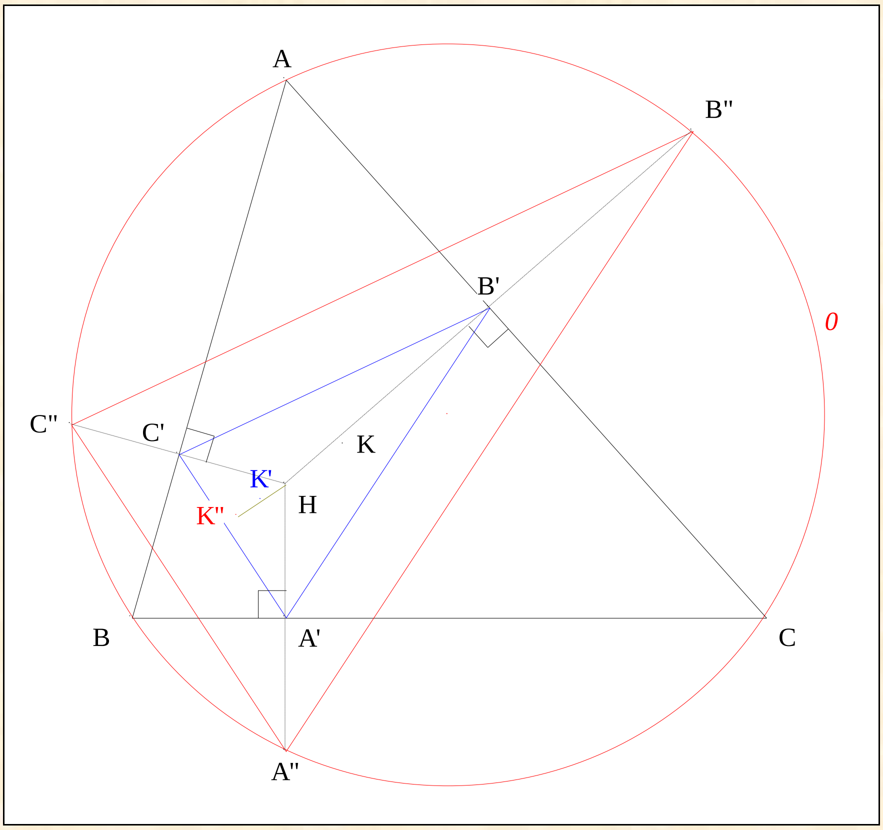
VISUALISATION

[13] van Aubel H. H.
Symmedian, *Mathlinks* du 26/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=440762



- Notons 0 le cercle circonscrit de ABC,
  A"B"C" le triangle H-circumcévien de ABC
  et K" le point de Lemoine de A"B"C".

- D'après **A. 3.** La conjecture d'Alexey Zaslavsky, H, K et K" sont alignés.



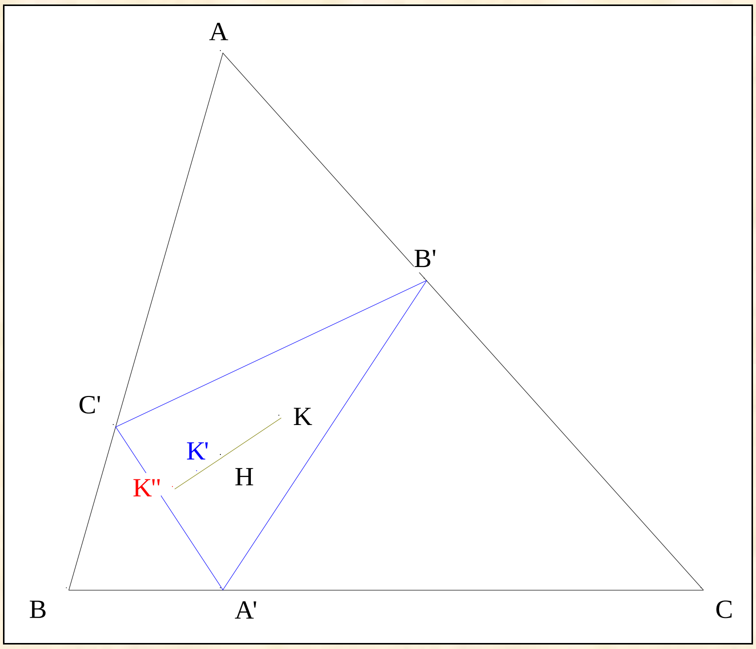
- D'après "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe **2**), A' est le milieu de [HA"]
  B' est le milieu de [HB"]
  C' est le milieu de [HC"].

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliquée

(1)	au triangle HA"B",	(A'B') // (A"B")
(2)	au triangle HB"C",	(B'C') // (B"C")
(3)	au triangle HC"A",	(C'A') // (C"A") ;

en conséquence, A"B"C" est homothétique à A'B'C'.

- A"B"C" et A'B'C' étant homothétiques de centre H, H, K' et K" sont alignés.



- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, K, K' et H sont alignés.

Scolie : K' est répertorié sous X_{53} chez ETC [14].

Énoncé traditionnel :

les points de Lemoine d'un triangle ABC *et de son triangle orthique*
sont alignés avec
l'orthocentre de ABC.

Commentaire : cette visualisation s'inspire de celle de Darij Grinberg [15].

Note historique : ce résultat a été attribué à Hendricus Hubertus van Aubel par John Casey [16].

---

14 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

15 Grinberg D., two Lemuan's points, Message *Hyacinthos* # **9923** du 20/06/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

16 Casey J., *A Sequel to the first six books of the Elements of Euclid*, Dublin, 5th ed. Dublin, Hodges, Figgis & Co. (1888) exercise **77** p. 241 ; 6th ed. (1892) 289

Nous observons qu'une coquille s'était glissée dans le prénom de van Aubel ainsi que dans la traduction du résultat de H. H. van Aubel par John Casey.

DUBLIN UNIVERSITY PRESS SERIES.

A SEQUEL TO THE FIRST SIX BOOKS

OF THE

ELEMENTS OF EUCLID,

CONTAINING

AN EASY INTRODUCTION TO MODERN GEOMETRY,

With Numerous Examples,

BY

JOHN CASEY, LL.D., F.R.S.,

Fellow of the Royal University of Ireland;
Member of the Council of the Royal Irish Academy;
Member of the Mathematical Societies of London and France;
Corresponding Member of the Royal Society of Sciences of Liege; and
Professor of the Higher Mathematics and Mathematical Physics
in the Catholic University of Ireland.

FIFTH EDITION, REVISED AND ENLARGED.

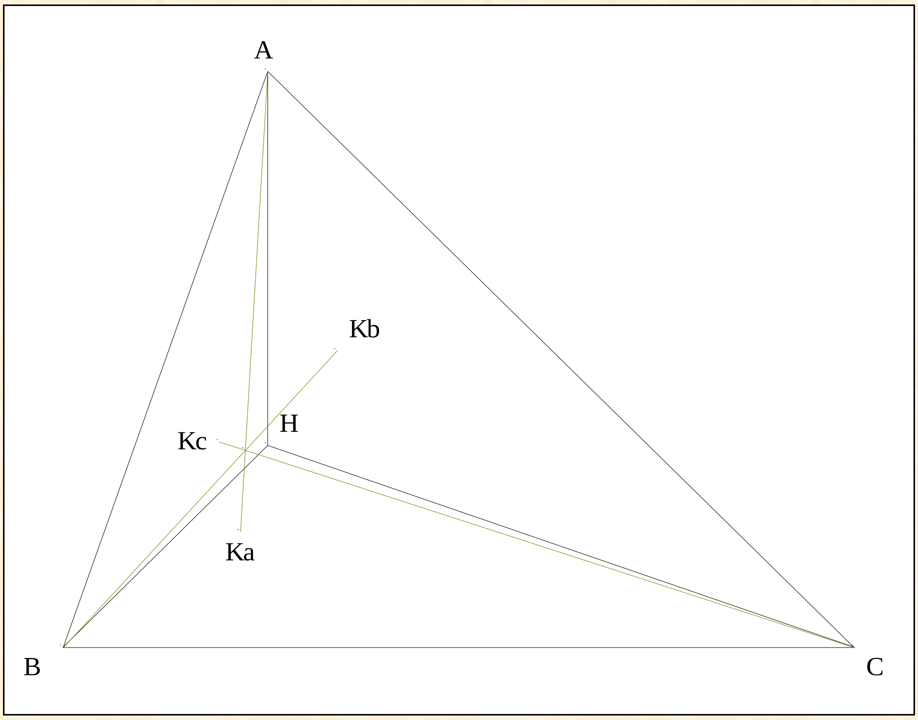
DUBLIN: HODGES, FIGGIS, & CO., GRAFTON-ST.
LONDON: LONGMANS, GREEN, & CO.
1888.

77. The orthocentre of a triangle, its symmedian point, and the orthocentre of its pedal triangle, are collinear. (E. VAN AUBEL.)

3. Trois droites de van Aubel concourantes

VISION

Figure :

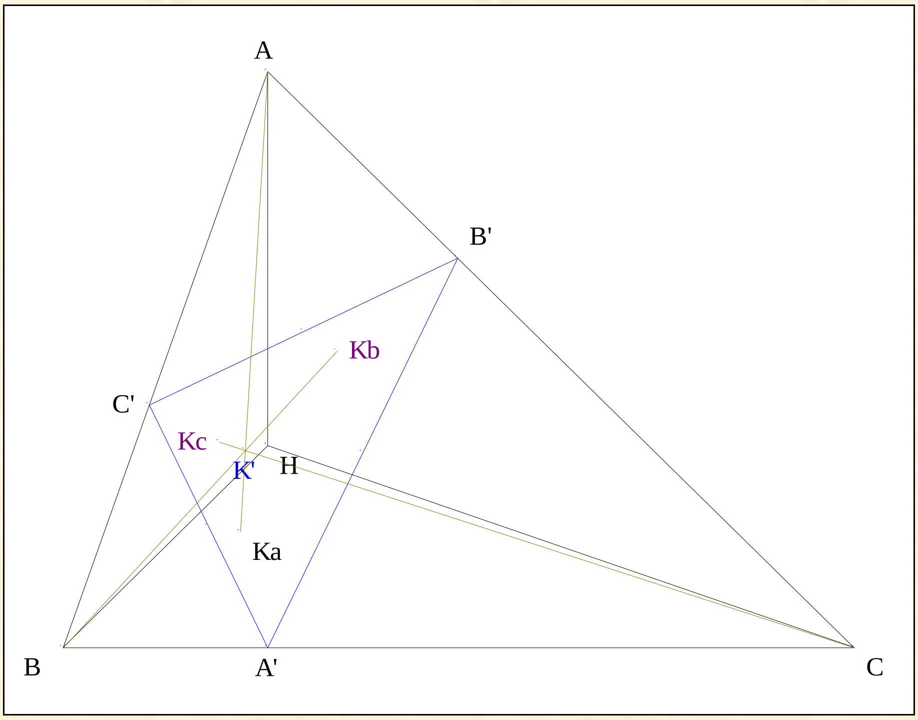


Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	Ka, Kb, Kc	les points de Lemoine resp. des triangles HBC, HCA, HAB

Donné : (AKa), (BKb) et (CKc) sont concourantes. [17]

VISUALISATION

[17] Grinberg D., Euler Line, Message *Hyacinthos* # **7599** et # **7601** du 17/08/2003 ;



- Notons A'B'C' le triangle orthique de ABC
  et K' le point de Lemoine de A'B'C'.

- **Scolies :** **(1)** A'B'C' est le triangle orthique des triangles HBC, HCA, HAB

  (2) A est l'orthocentre de HBC
  B est l'orthocentre de HCA
  C est l'orthocentre de HAB.

- D'après **B. 2.** La droite de H. H. van Aubel, appliqué à

  (1) HBC et A'B'C', Ka, K' et A sont alignés

  (2) HCA et A'B'C', Kb, K' et B sont alignés

  (3) HAB et A'B'C', Kc, K' et C sont alignés.

- **Conclusion :** (AKa), (BKb) et (CKc) sont concourantes en K'.

4. Une courte biographie de H. H. van Aubel

Hendricus Hubertus van Aubel est né le 20 novembre 1830, à Maastricht (Pays-Bas).
Professeur de mathématiques à l'Athénée d'Anvers, il a proposé et résolu de nombreuses questions dans la *Nouvelle correspondance mathématique* et dans la revue belge *Mathesis*.
Son fils Edmund Marie Lambert van Aubel (1864-1941) que John Casey a confondu avec Hendricus H. van Aubel, a été professeur à l'université de Gand en tant que physique-chimie.
Eisso J. Atzema de l'université du Maine (Orono, États-Unis) précise

I seem to recall that very early on in his career (in fact, as a student),
Edmund also published one or two papers on geometry.

Rappelons que l'orthographe incorrecte de "Von" Aubel arrive souvent dans la littérature mathématique et que Stéphane Hessel Pot (Woerden, province d'Utrecht, Pays-Bas) a donné la photo de H. H. van Aubel.[18]

[18] Klingens D., http://www.pandd.demon.nl/

Il décède à Anvers (Belgique), le 3 février 1906.

C. LA DROITE CENTRALE

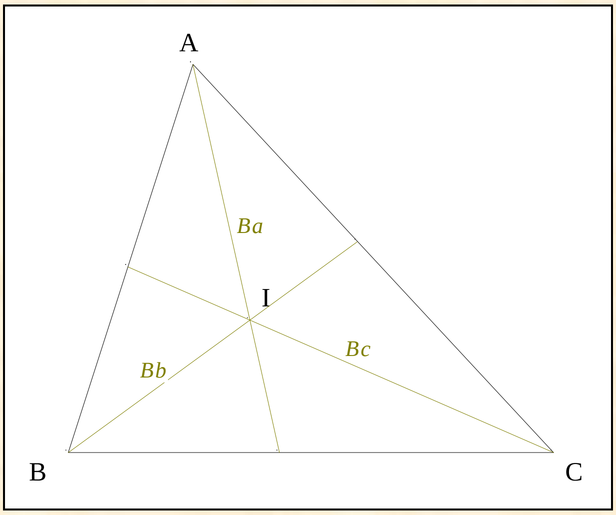
DE

HENDRICUS HUBERTUS van AUBEL

1. Le centre d'un triangle

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle

et *Ba*, *Bb*, *Bc* les A, B, C-bissectrices intérieures de ABC.

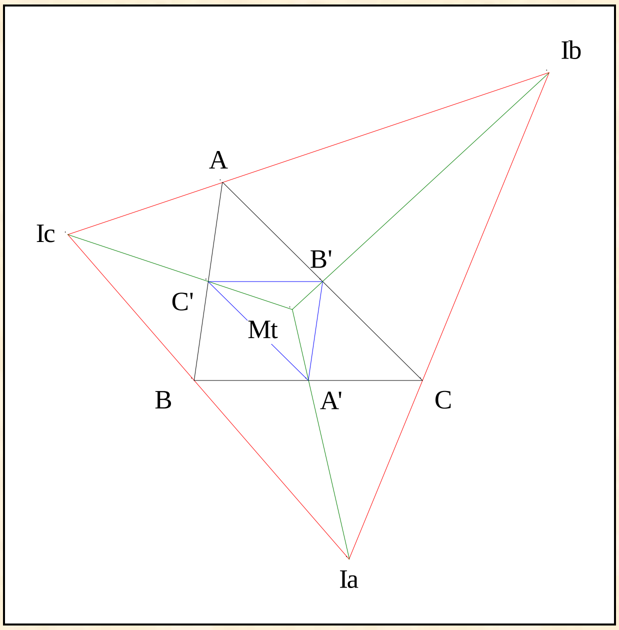
Donné : *Ba*, *Bb* et *Bc* sont concourantes.[19]

Scolie : ce point de concours, noté I et répertorié sous X_1 chez ETC [20], est "le centre de ABC".

2. Le Mittenpunckt

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et IaIbIc le triangle excentral de ABC.

Donné : IaIbIc et A'B'C' sont en perspective. [21]

Scolies : **(1)** le centre de cette perspective, noté Mt, est appelé "le Mittenpunkt de ABC" et est répertorié sous X_9 chez ETC

(2) (IaA'), (IbB'), (IcC') sont concourantes en Mt

(3) Mt est le point de Lemoine de IaIbIc (Cf. Annexe **3**)

Note historique : nous trouvons une preuve de l'existence de ce point dans l'un des six articles publiés

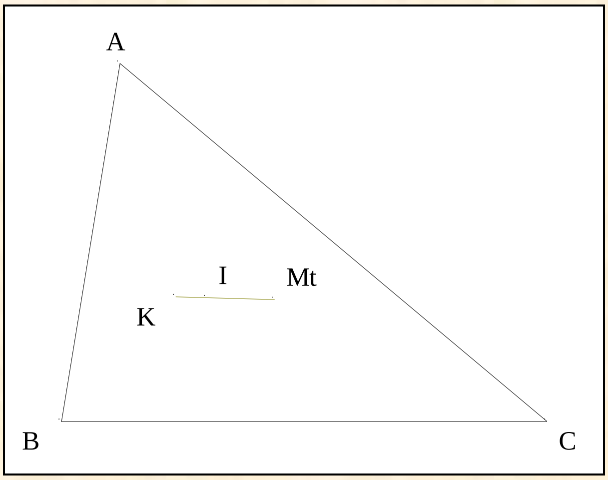
[19] Pythagore de Samos (VI-Ve siècle av. J.-C.)
[20] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
[21] Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836)

par von Nagel. Ce résultat, sera redécouvert par Karl Feuerbach et démontré synthétiquement par Joseph Neuberg [22].

3. La droite centrale de H. H. van Aubel

VISION

Figure :

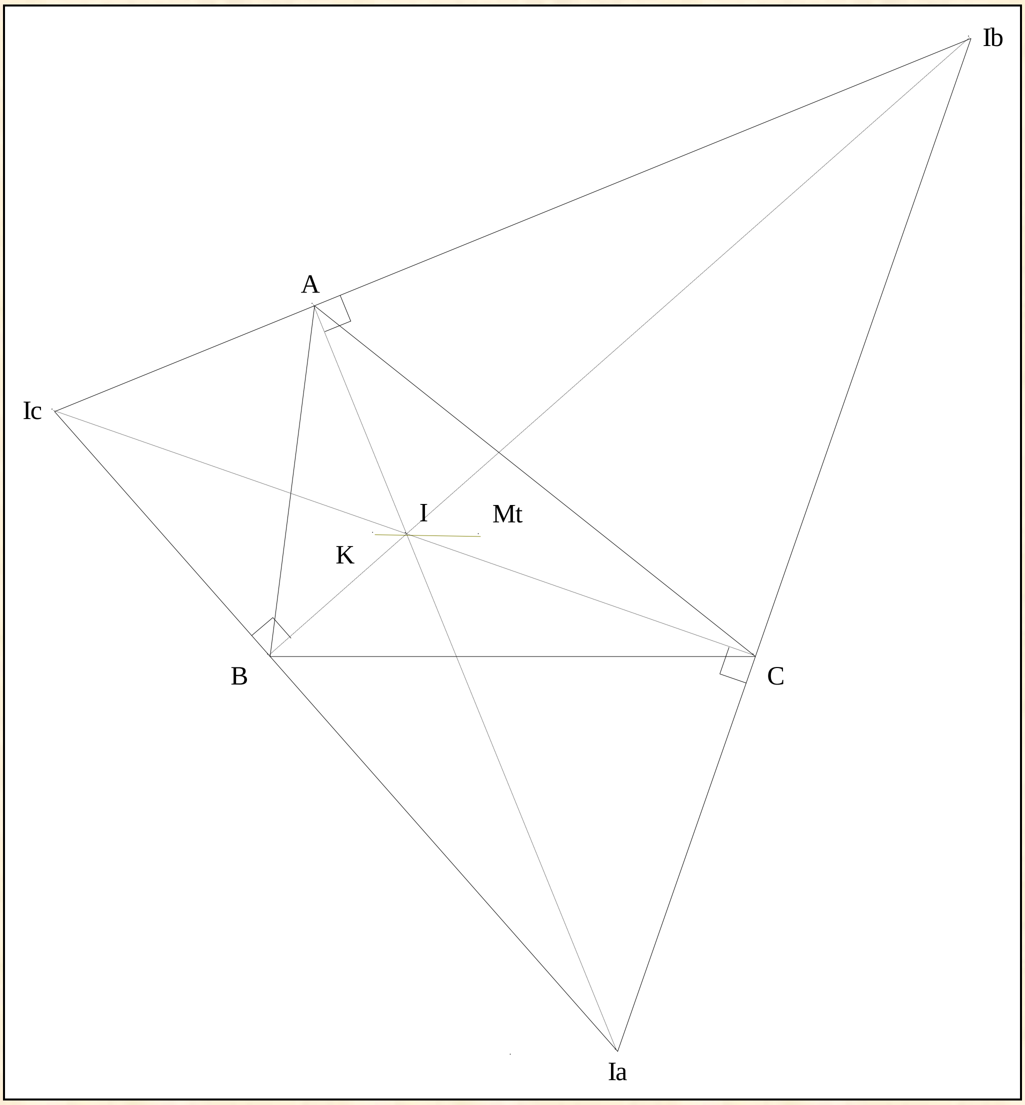


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
K le point de Lemoine de ABC
et Mt le Mittenpunckt de ABC.

Donné : Mt, K et I sont alignés. [23]

VISUALISATION

[22] Neuberg J., *Nouvelle correspondance* **1** (1874)
[23] van Aubel H.



- Notons IaIbIc le triangle excentral de ABC.

- **Scolies :** **(1)** ABC est le triangle orthique de IaIbIc
  (2) I est l'orthocentre de IaIbIc
  (3) Mt est le point de Lemoine de IaIbIc (Cf. Annexe **3**).

- **Conclusion :** d'après **B. 2.** La droite de H. H. van Aubel, Mt, K et I sont alignés.

Énoncé traditionnel :

le point de Lemoine et le Mittenpunckt d'un triangle ABC
sont alignés avec
le centre de ABC.

Scolies : **(1)** I, K et Mt sont resp. répertorié sous X_1, X_6 et X_9 chez ETC [24]

(2) (IKMt) est une "droite centrale du triangle" car elle passe par trois centres de ce triangle.

[24] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Commentaire : le talentueux géomètre russo-allemand Darij Grinberg précise

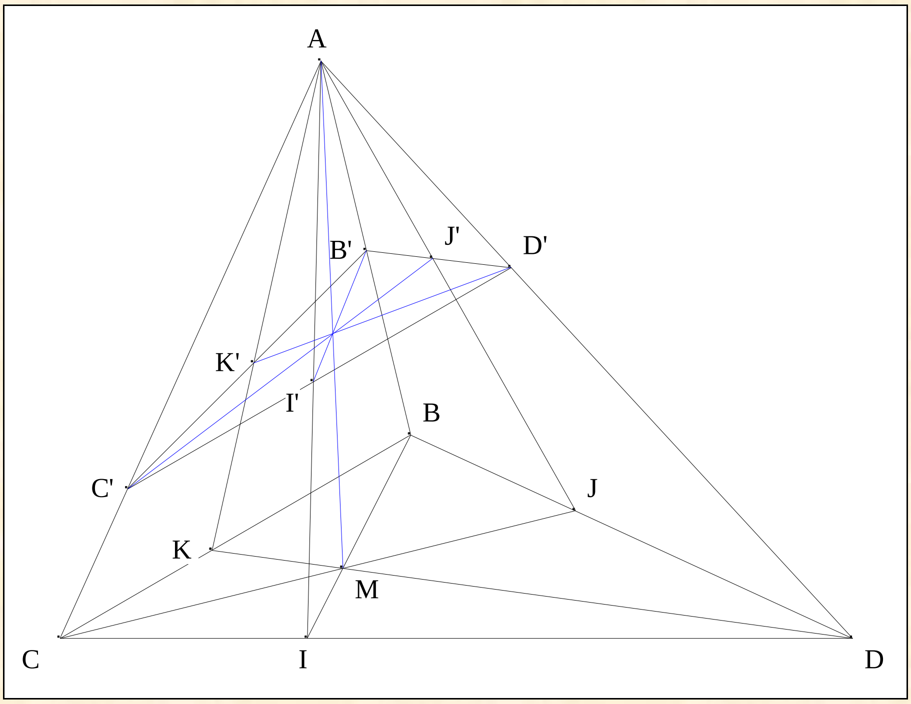
This fact is rather trivial if you use trilinear coordinates,
but I have not seen any synthetic proof before.

D. APPENDICE

1. Le lemme catalytique de Khoa Lu Nguyen

VISION

Figure :

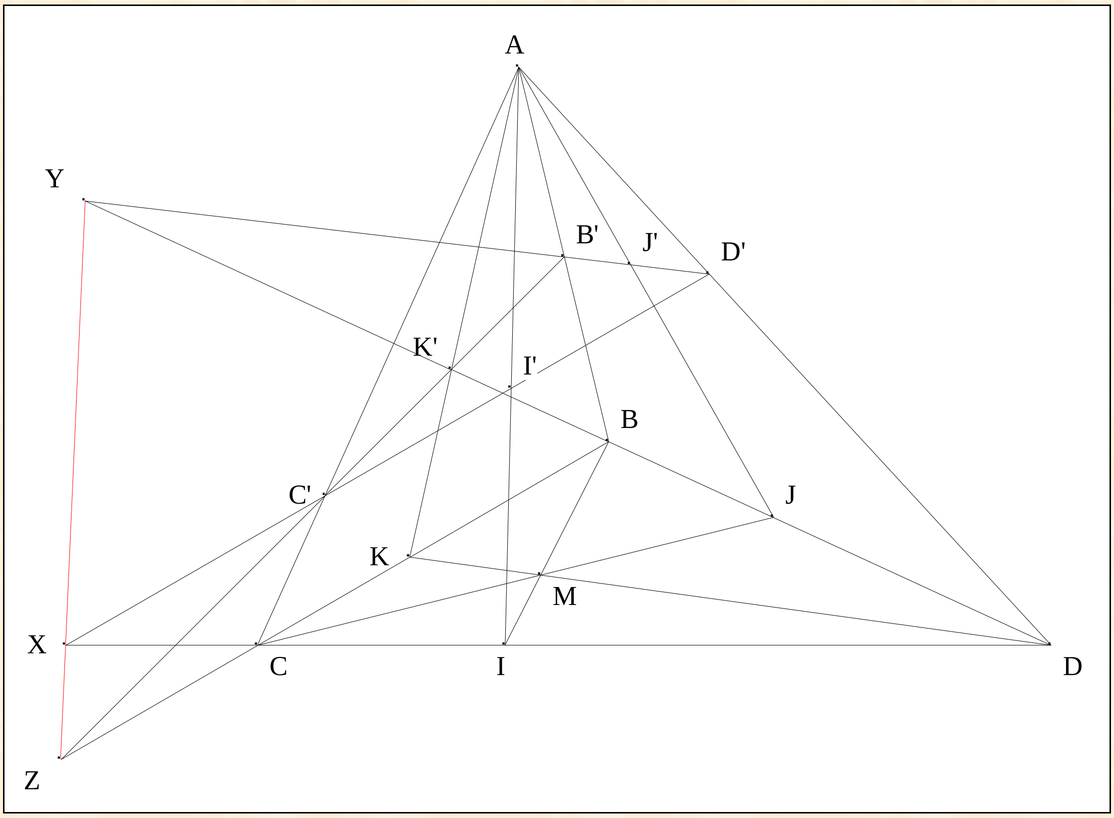


Traits : A un point,
BCD, B'C'D' deux triangles en perspective de centre A,
M un point,
IJK le triangle M-cévien de BCD
et I', J', K' les points d'intersection de (AI) et (C'D'), de (AJ) et (D'B'), de (AK) et (B'C').

Donné : (B'I'), (C'J'), (D'K') et (AM) sont concourantes. [25]

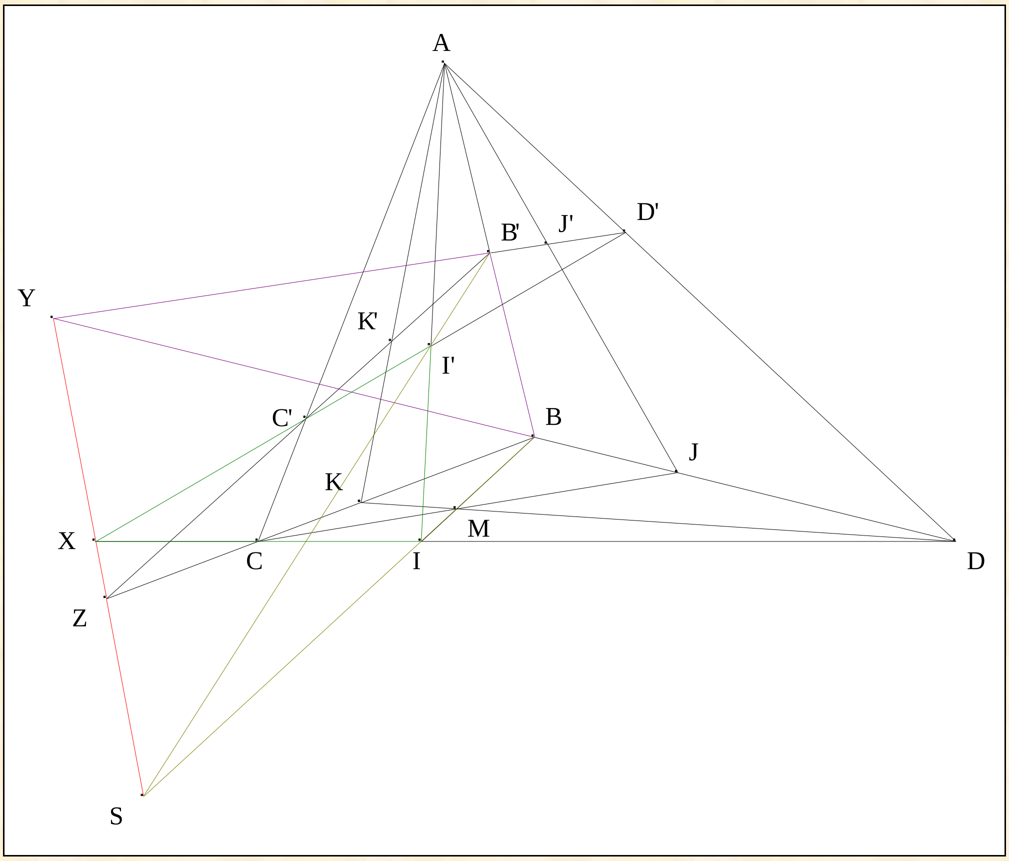
VISUALISATION

[25] Nguyen K. L., Ceva ? [a projective theorem about triangles], *Mathlinks* du 08/04/2004 ;
http://mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5117



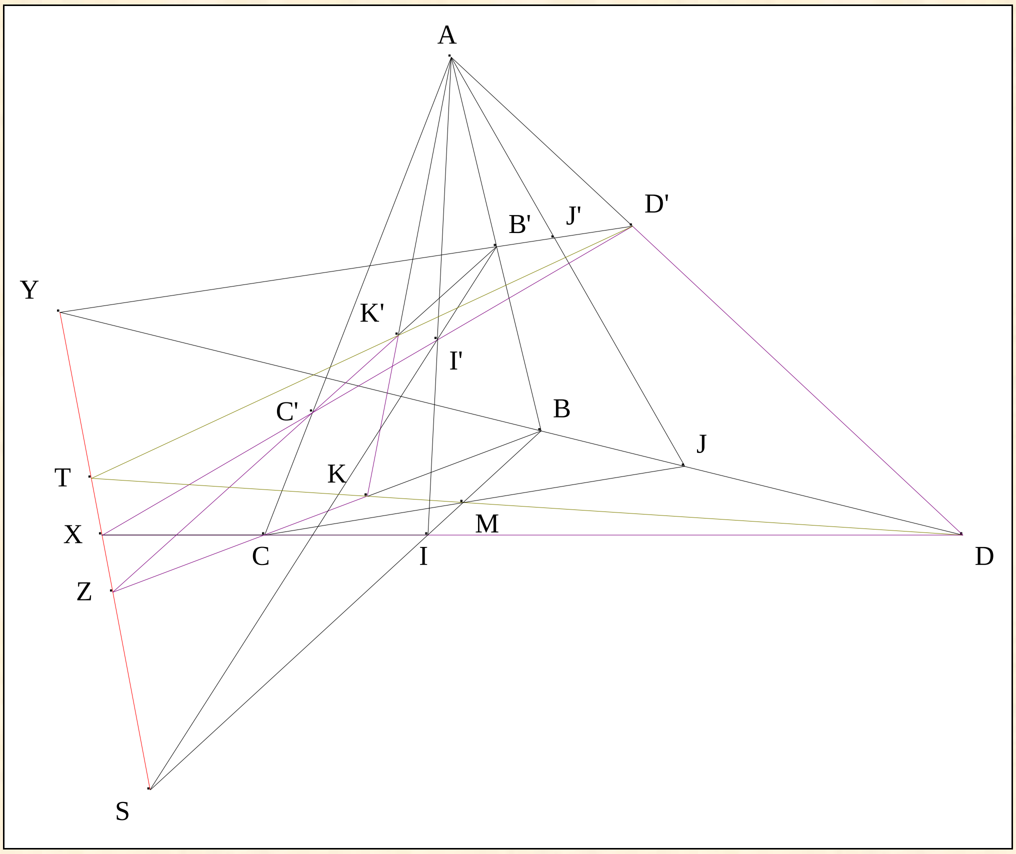
- Notons X, Y, Z les points d'intersection resp. de (CD) et (C'D'), de (DB) et (D'B'), de (BC) et (B'C').

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **4**),
  (XYZ) est l'axe de BCD et B'C'D' en perspective de centre A.



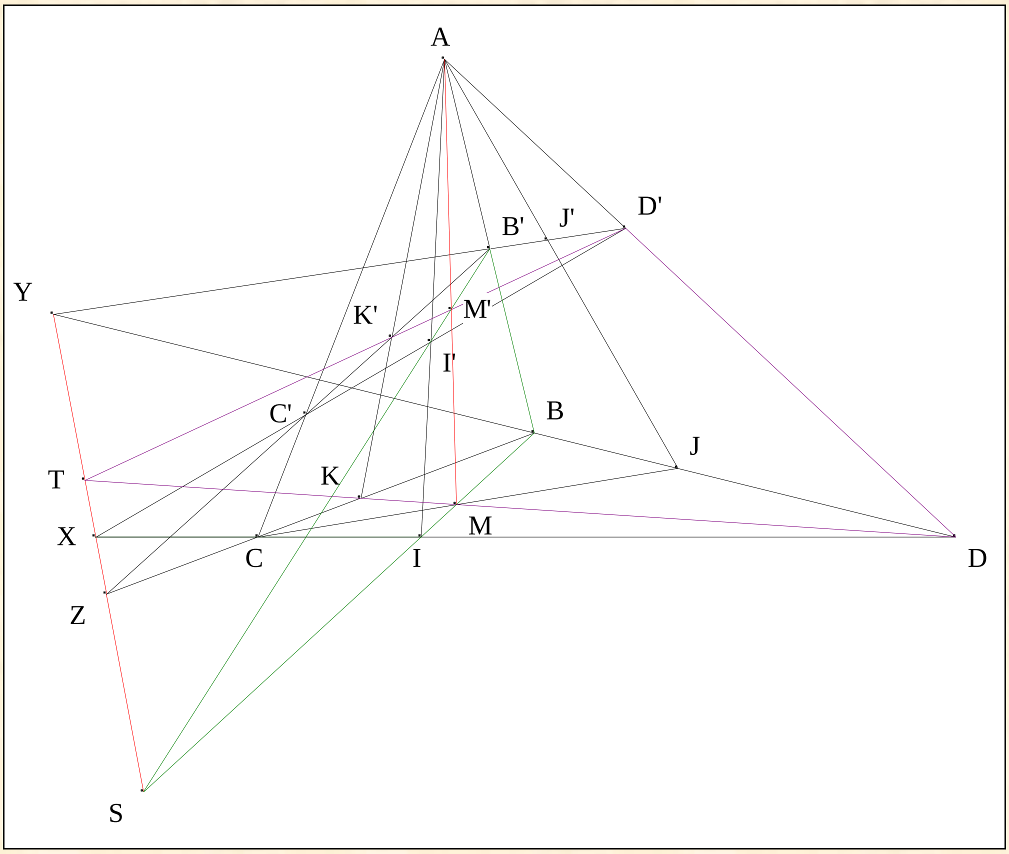
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **4**),
  (AD'D) étant l'axe des triangles BB'Y et II'X, BB'Y et II'X sont en perspective ;
  en conséquence, (BI), (B'I') et (YX) sont concourantes.

- Notons S ce point de concours.



- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **4**),
  (AC'C) étant l'axe des triangles DD'X et KK'Z, DD'X et KK'Z sont en perspective ;
  en conséquence, (DK), (D'K') et (XZ) sont concourantes.

- Notons T ce point de concours.



- Notons M' le point d'intersection de (D'K'T) et (B'I'S).

- Par définition, les triangles DD'T et BB'S sont en perspective de centre Y.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **4**)
  (AM'M) est l'axe de perspective de DD'T et BB'S.

- **Conclusion partielle :** (D'K'), (B'I') et (AM'M) sont concourantes.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'I'), (C'J') et (AM'M) sont concourantes.

- **Conclusion :** (B'I'), (C'J'), (D'K') et (AM) sont concourantes.

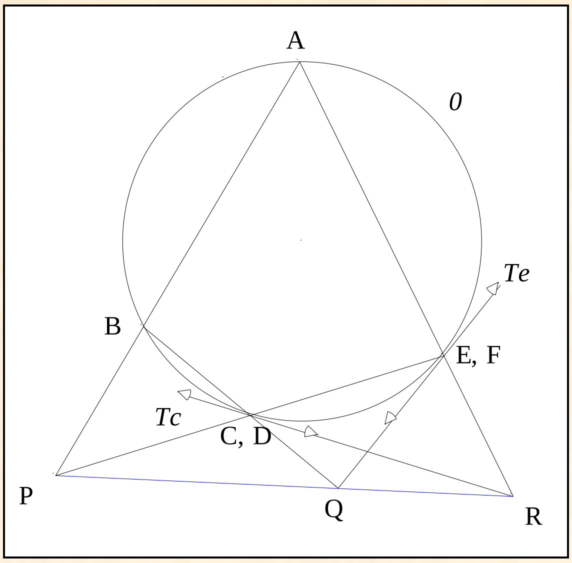
Note historique : nous venons de présenter la preuve élémentaire de Darij Grinberg qui, dans son message *Hyacinthos*, en donne aussi une preuve projective.

2. Une très courte biographie de Khoa Lu Nguyen

Khoa Lu Nguyen dit *Treegoner* a été étudiant au Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, États-Unis). Il enseigne actuellement les mathématiques à Sam Houston High School à Houston (Texas, États-Unis).

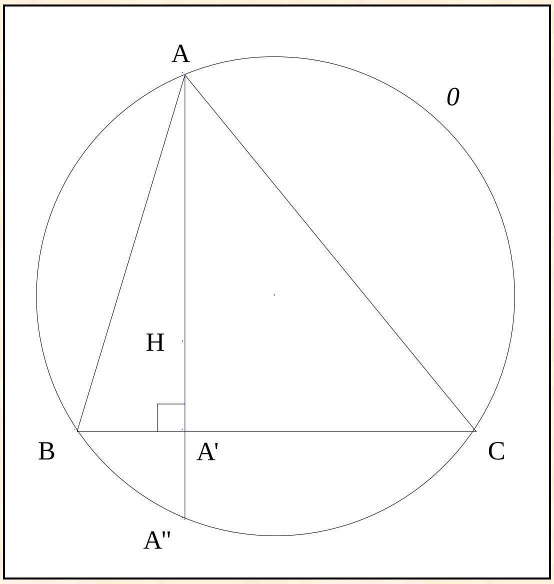
E. ANNEXE

1. Tetragramma mysticum [26]



Traits :	*0*	un cercle,	
	ABCEA	un quadrilatère tels que A, C, E soient sur *0*,	
	Tc, *Te*	les tangentes à *0* resp. en C, E	
et	P, Q, R	les points d'intersection resp. de (AB) et (CE), (BC) et *Te*, *Tc* et (EA).	
Donné :	B est sur *0*	*si, et seulement si,*	P, Q et R sont alignés.

2. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté [27]



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre du triangle,
	A'	le pied de la A-hauteur de ABC,

[26] MacLaurin C.
[27] Carnot, n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101

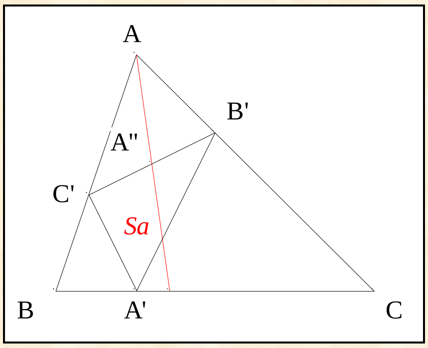
	0	le cercle circonscrit à ABC
et	A"	le pied de la A-circumhauteur de ABC.

Donné : A' est le milieu de [HA"].

3. Le milieu d'un côté du triangle orthique

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	A"	le milieu de [B'C']
et	*Sa*	la A-symédiane de ABC.

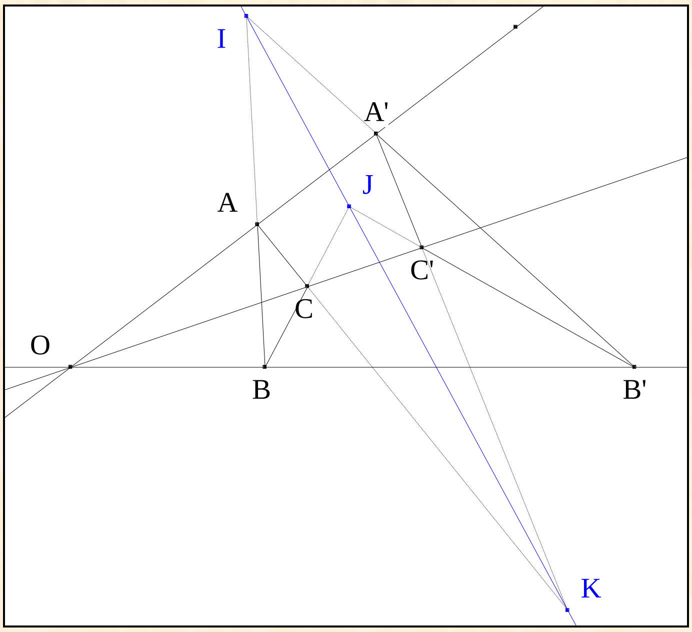
Donné : A" est sur *Sa*. [28]

Scolie : (AA") passe par le point de Lemoine de ABC.

4. Le théorème des deux triangles [29]

[28] Ayme J.-L., Trois alignements remarquables par le théorème de Sondat, G.G.G. vol. **9**, p. 41-42 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[29] Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
O le point de concours de (AA') et (BB'),
I le point d'intersection de (AB) et (A'B'),
J le point d'intersection de (BC) et (B'C')
et K le point d'intersection de (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.