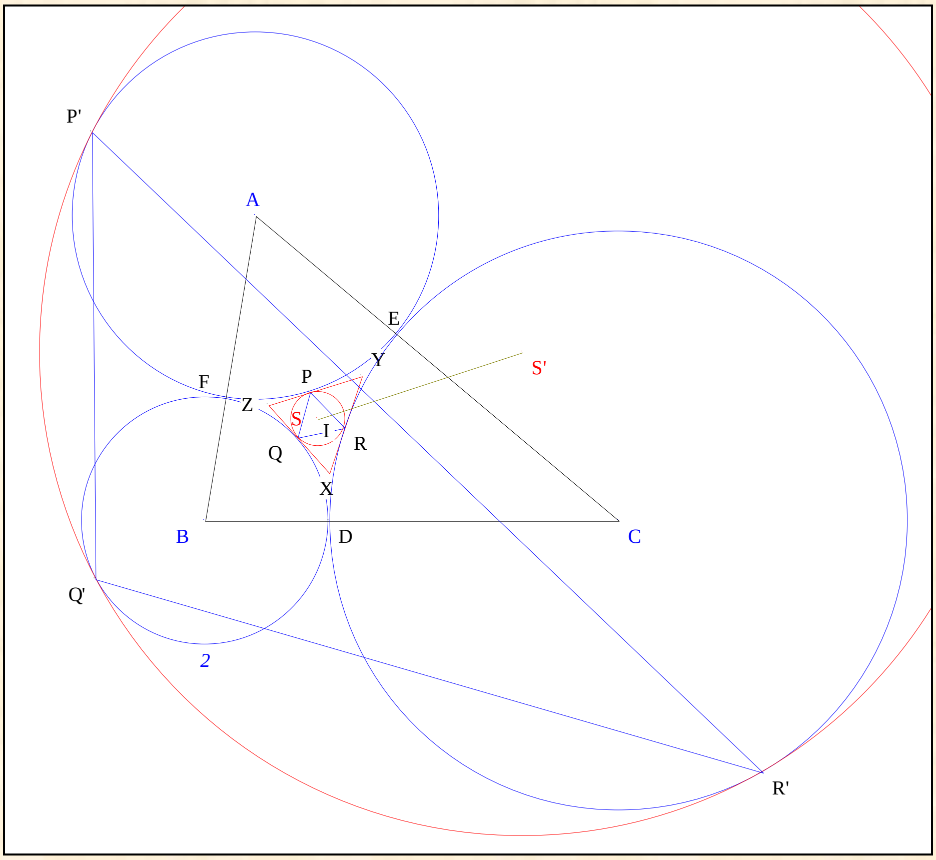
LA FIGURE DE SODDY

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Étant donnés trois cercles extérieurement tangents, nous étudions la construction des deux cercles de Soddy qui sont tangents à ces trois cercles et présentons la ponctuelle de Soddy du point de vue synthétique.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. Given three circles externally tangent to each other, we investigate the construction of the two so called Soddy circles, that are tangent to the given three circles and present synthetically the Soddy line.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

1 St-Denis, Île de la Réunion (France), le 25/08/2011.

Sommaire

A. UNE HISTORIQUE DU PROBLÈME

1. Apollonius de Pergé

 [2]

Le géomètre par excellence [3]

Apollonius est né vers 262 av. J. C. à Pergé[4] en Pamphylie[5], sous le règne de Ptolémée Evergète Ier et vécut à Alexandrie sous le règne de Ptolémée Philopator, puis à Pergame. Le philosophe Proclus[6] le dépeint sous des traits peu favorables et le mathématicien Pappus d'Alexandrie comme un homme vain, jaloux du mérite des autres, et saisissant volontiers l'occasion de les déprimer. Durant son long séjour en Égypte à Alexandrie, il publie son traité *De tactionibus* i.e. *Contacts* (επαφαι) qui a été perdu puis restauré par François Viète en 1603, dans lequel il généralise deux des propositions d'Euclide

Construire :
un cercle tangent à trois côtés d'un triangle donné[7]
un cercle passant par trois points non alignés[8]

Cette généralisation qu'il résout

étant donné trois éléments,
chacun pouvant être soit un point, une droite ou un cercle,
construire
un cercle passant par chacun des points et tangent aux droites et cercles données.

est aujourd'hui connue sous le "problème d'Apollonius" qui recouvre aussi le cas particulier suivant

Construire un cercle tangent à trois cercles donnés

Apollonius meurt à Alexandrie en 190 av. J.-C.

2. Pappus d'Alexandrie

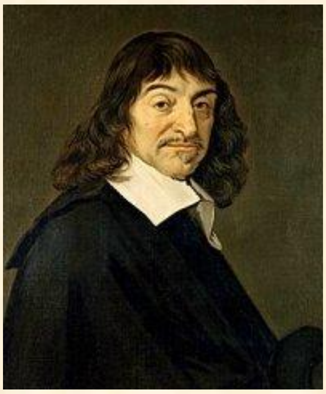
L'un des plus excellents géomètres de l'Antiquité [9]

---

2 The MacTutor Hystory of Mathematics Archive ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
3 D'après Géminus qui vécut vers 100 av. J.-C..
4 Aujourd'hui, Aksu en Turquie.
5 Aujourd'hui, elle porte le nom de Murtina ou Murtana et se situe en Antalya (Turquie).
6 412-485.
7 Euclide, proposition **4**, Livre **IV** des Éléments.
8 Euclide, proposition **5**, Livre **IV** des Éléments.
9 Descartes R..

Pappus naît à Alexandrie (Égypte) vers 290 quelques cinq siècles après Apollonius.
Si les écrits nous suggèrent qu'il a été un précepteur, nous ne savons rien vraiment de sa vie. D'après les écrits de Proclus, nous savons qu'il dirigeait une école à Alexandrie.
Vers 340, il rassemble et commente dans son œuvre[10] majeure *Synagoge* dont huit volumes nous sont seulement parvenus, le reste ayant été perdu, les découvertes des mathématiciens les plus célèbres. C'est dans le livre VII des *Collections* inspiré par Theodosius, Autolycus, Aristarchus, Euclide, Apollonius, Aristote et Ératosthène que Pappus évoque succinctement le "problème d'Apollonius.
Ayant apparemment vécu toute sa vie à Alexandrie, il y décède vers 350.

3. René du Perron Descartes



Le petit philosophe [11]

René du Perron Descartes est né le 31 mars 1596 à La Haye (actuellement Descartes depuis 1966) en Touraine, une région de France.
Issu d'un milieu aisé, il perd sa mère quelques mois après sa naissance et est élevé par sa grand-mère en l'absence de son père la moitié de l'année. A Pâques 1607, il entre quelques mois après son ouverture au collège des Jésuites de La Flèche qu'à fondé Henri IV en Anjou et qu'il quittera en 1615 après avoir rencontré Mersenne. Parallèlement à la philosophie d'Aristote, il étudie les mathématiques dans le livre de Clavius. De santé très fragile, il obtient aux relations de son père avec le directeur du College, la permission de ses professeurs de rejoindre les cours à 11h, une tradition qu'il gardera jusqu'à sa mort.
Après un séjour à Paris, il étudie à l'université de Poitiers qu'il quitte en 1616 pour entrer à l'École militaire du prince de Nassau alors à Breda; ce n'est qu'en 1618 qu'il entame des études de mathématiques sous la direction Isaac Beeckman, un scientifique hollandais. Après son séjour en Hollande, il voyage à travers l'Europe, puis rejoint en 1619 l'armée bavaroise.
C'est dans la nuit du 10 au 11 novembre 1619, dans la maison de son ami Faulhaber, à Neubourg, un petit village des environs d'Ulm que Descartes, alors âgé de 23 ans, entrevoit "les fondements d'une science admirable" dans laquelle il introduit une nouvelle méthode, la "méthode des coordonnées" dite aussi "application de l'algèbre à la géométrie" qui lui permettra de montrer que les coniques pouvaient être représentées par des équations du second degré.
En 1621, il renonce à l'armée, reprends ses voyages et arrive en France en 1623, à Paris où il entre en contact avec l'Académie du père Marin Mersenne. Il quitte la France, va en Italie, puis retourne en France en 1625 et décide définitivement de s'y établir en Hollande en 1628 où il se liera avec l'une de ses servantes, Hélène Jans et de leur union, naîtra une fille Frantzinje (Francine) qui décèdera d'une scarlatine à l'âge de cinq ans.
Pressé par ses amis de publier ses idées, il écrit le *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* auquel il ajoute trois appendices à savoir *La Dioptrique*, *Les Météores* et *La Géométrie* le tout étant publié en 1637 à Leiden. C'est le dernier appendice qui sera le plus important de son oeuvre et dans lequel il fonde les bases de la Géométrie des coordonnées sur laquelle travaillait aussi Pierre de Fermat et avec lequel il aura un ton méprisant et des arguments parfois malhonnêtes.
En 1643, René Descartes[12] envoie une lettre à la princesse Élisabeth de Bohême, dans lequel il donne une solution au cas particulier du "problème d'Apollonius" qui devient alors "le théorème de Descartes"[13].

[10] *Collection mathématique* υναγωγ΄η ou *Synagoge*.
[11] Surnom donné par son père car il ne cessait de poser des questions.
[12] Descartes R., Oeuvres **IV** (Correspondance 1643-1647) (Paris : Leopold Serf 1901) 45-50.
[13] En anglais, Descartes Circle Theorem.

Deux solutions :

un petit cercle tangent extérieurement aux trois cercles deux à deux tangents
et
un grand cercle tangent intérieurement à ces trois cercles.

La princesse lui répondit qu'il lui faudrait trois mois pour venir à bout du calcul.
En 1649, la reine Christine de Suède le persuade de venir à Stockholm. Acceptant finalement son invitation, il se voit contraint de changer son rythme de vie en se levant non plus à 11h mais à 5h du matin. Avec le froid nordique du petit matin, sa santé se détériore lentement...
Il décède d'une pneumonie, le 11 février 1650 à Stockholm dans le glacial palais royal de Suède. Sa dépouille sera transférée en France et inhumée à l'église Saint-Etienne-du-Mont en 1667.

4. Le Nobel, Frederick Soddy

Si, en 1826 le suisse Jacob Steiner et en 1842 l'anglais Philip Beecroft[14] de Hyde (Cheshire), redécouvre "the Descartes circle formula", Frederick Soddy, prix Nobel de chimie en 1921, la redécouvre à son tour durant sa retraite de l'université d'Oxford se retire sur son lieu de naissance sur la côte du Sussex et se passionne pour la géométrie des cercles à son tour en 1936 en proposant une solution liant les rayons des cercles sous la forme d'un poème intitulé "The Kiss Precise" [15] dont le deuxième paragraphe

The Kiss Precise

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb,
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
*The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.*

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
*The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.*

exprime une relation métrique.
Dans une lettre adressée à Harold Scott McDonald Coexter[16] en 1951, Frederick Soddy avoue que ce poème a été "un tour de force".

---

[14] Beecroft P., Properties of circles in mutual contact, *The Lady's and Gentleman's Diary* (1843) 91-96.
[15] Soddy, F., The Kiss Precise, *Nature* **137** (June 20, 1936) 1021.
[16] Coxeter H. S. M. (1907-2003).

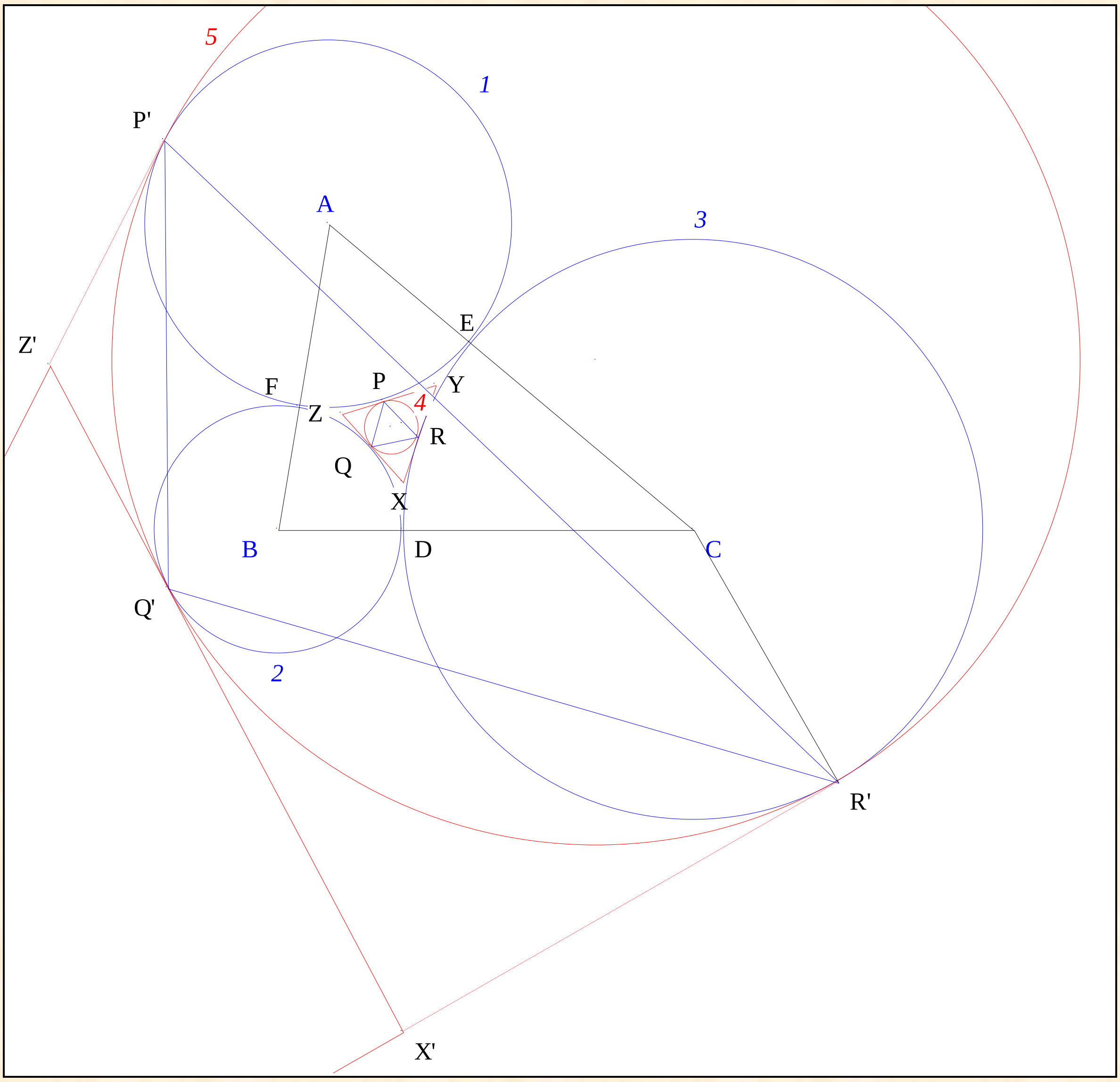
Ce poème influencera des géomètres qui parleront des cercles internes et externes de Soddy du "The Four Coins Problem" i.e. du "problème des trois pièces de monnaie" :

étant donné trois pièces de tailles différentes
disposées de telle façon que
chacune est tangente aux deux autres,
trouver la pièce qui est tangente aux trois pièces.

B. LA FIGURE DE SODDY

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle,
DEF le triangle de contact de ABC,

	1, *2*, *3*	les cercles de centre A, B, C passant resp. par F, D, E,
	4	le cercle tangent extérieurement à *1*, *2*, *3*,
	S	le centre de *4*,
	P, Q, R	les points de contact de *4* resp. avec *1*, *2*, *3*
	Tp, *Tq*, *Tr*	les tangentes à *1*, *2*, *3* resp. en P, Q, R,
	X, Y, Z	les points d'intersection resp. de *Tq* et *Tr*, de *Tr* et *Tp*, de *Tp* et *Tq*,
	5	le cercle tangent intérieurement à *1*, *2*, *3*,
	S'	le centre de *5*,
	P', Q', R'	les points de contact de *5* resp. avec *1*, *2*, *3*
	Tp, *Tq*, *Tr*	les tangentes à *1*, *2*, *3* resp. en P', Q', R',
et	X', Y', Z'	les points d'intersection resp. de *Tq'* et *Tr'*, de *Tr'* et *Tp'*, de *Tp'* et *Tq'*.

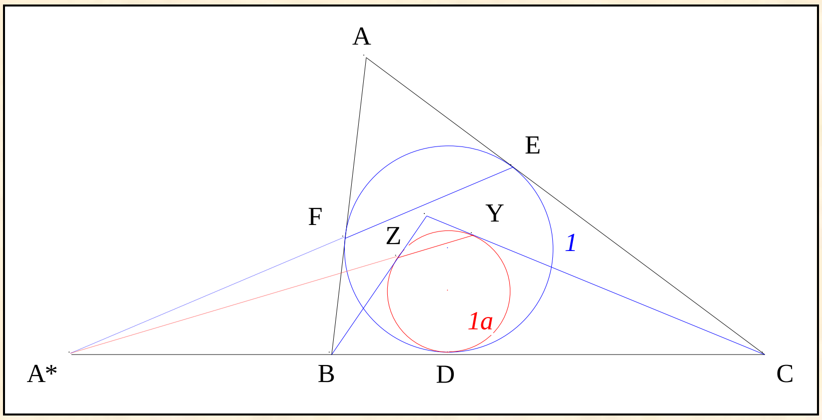
Définitions :	**(1)**	*1*, *2*, *3*	sont resp. les A, B, C-cercles de Soddy de ABC
	(2)	*4*	est le cercle interne de Soddy de ABC
	(3)	S	est le point interne de Soddy de ABC
	(4)	PQR	est le triangle interne de Soddy de ABC
	(5)	XYZ	est le triangle tangentiel interne de Soddy de ABC
	(6)	*5*	est le cercle externe de Soddy de ABC
	(7)	S'	est le point externe de Soddy de ABC
	(8)	P'Q'R'	est le triangle externe de Soddy de ABC
	(9)	X'Y'Z'	est le triangle tangentiel externe de Soddy de ABC.

C. LE CERCLE INTERNE DE SODDY

1. IMO ShortList 1995, G3

VISION

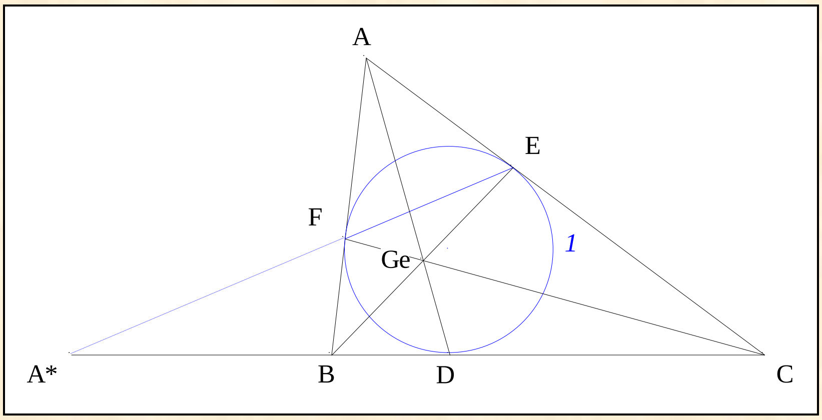
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	1a	un cercle tangent intérieurement à *1* en D,
	Y, Z	les points de contact des tangentes menées resp. à partir de B, C avec *1*
et	A*	le point d'intersection de (EF) et (BC).

Donné : (YZ) passe par A*.[17]

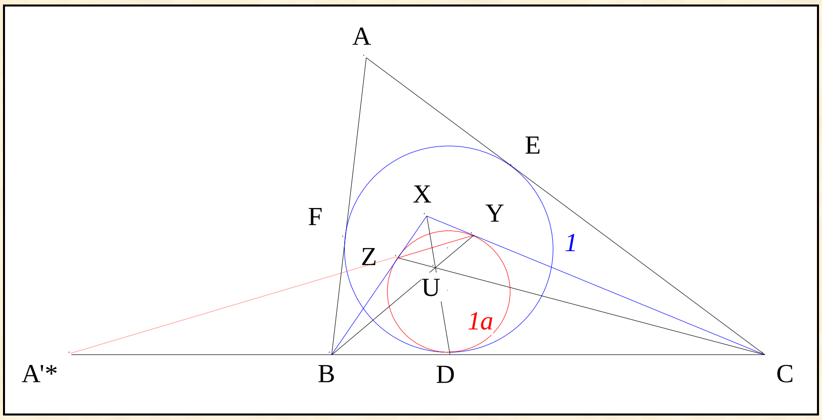
VISUALISATION



- D'après "Le point de Gergonne" (Cf. Annexe **1**) appliqué à ABC, (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.

- Notons Ge ce point de concours.

- D'après Pappus [18] "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe **2**) appliqué au quadrilatère AFGeE, la quaterne (B, C, D, A*) est harmonique.



- Notons X le point d'intersection de (BZ) et (CY).

- D'après "Le point de Gergonne" (Cf . Annexe **1**) appliqué au triangle XBC, (XD), (BY) et (CY) sont concourantes.

- Notons U ce point de concours
  et A'* le point d'intersection de (YZ) et (BC).

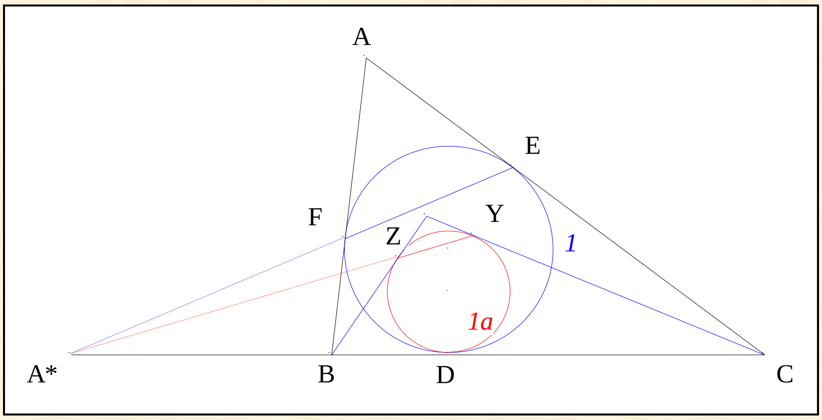
- D'après Pappus [19] "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe **2**) appliqué au quadrilatère XZUY, la quaterne (B, C, D, A'*) est harmonique
  en conséquence, A'* et A* sont confondus.

---

17 IMO Shortlist 1995, **G3** ;
E, F, Z, Y are concyclic, *Mathlinks* du 30/05/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1141272
Problème **5**, 36-ième IMO Canada (1996) ;
Toshio Seimiya, *Crux Mathematicorum* vol. **24**, **2** (1998) 72-73 ;
Mathematical reflections **3** (2007).

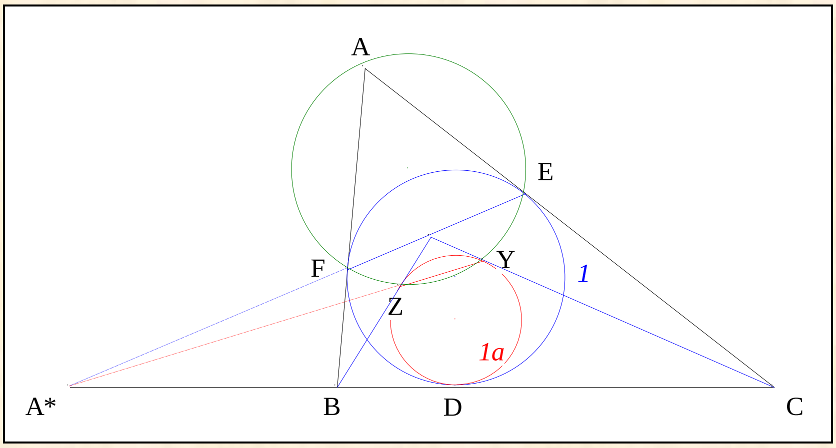
18 Pappus, *Collections*, Livre **VII**, proposition 131.

19 Pappus, *Collections*, Livre **VII**, proposition 131.



- **Conclusion :** (YZ) passe par A*.

Scolies : **(1)** quatre points cocycliques



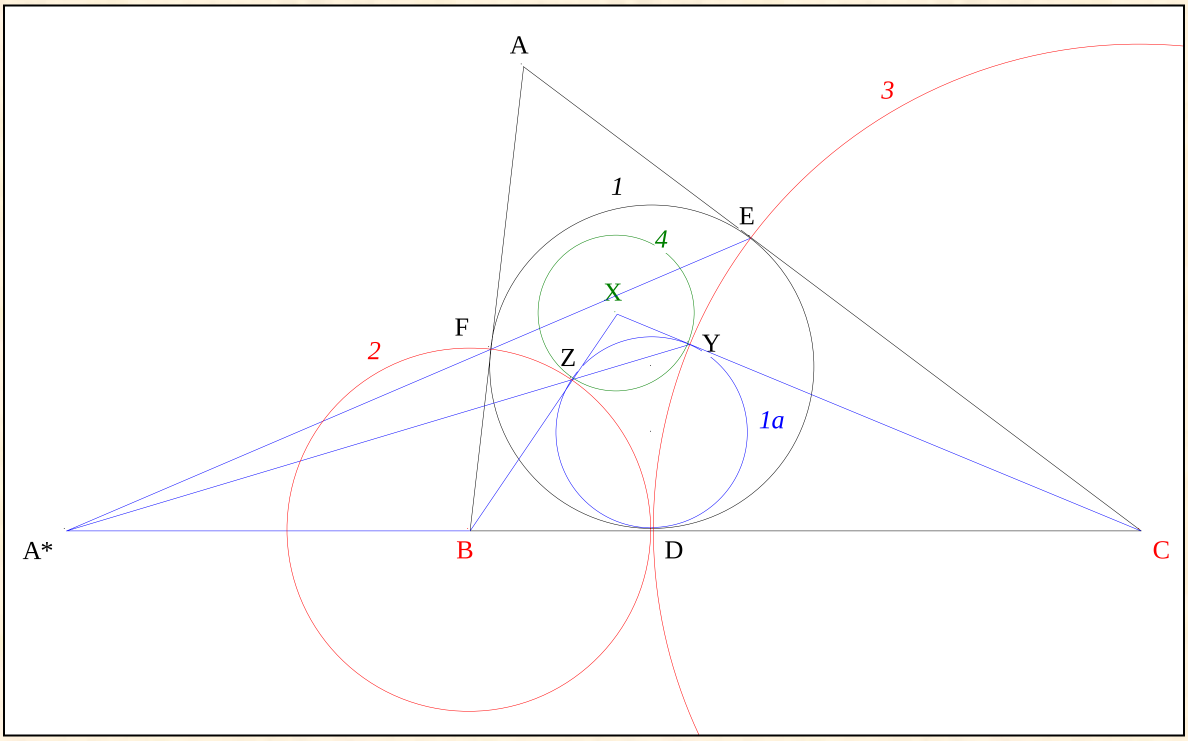
- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes"[20], E, F, Y et Z sont cocycliques.

Note historique : ce résultat a été démontré métriquement par Toshio Seimiya[21] de Kawasaki (Japon) en utilisant le théorème de Ménélaüs.
Rappelons que ce problème **5** de la partie Géométrie a été proposé par le Canada au jury de la 36^{e} I.M.O. de 1995 (Toronto, Ontario, Canada) qui ne l'a pas retenu.
Cependant, il a été retenu comme problème **3** dans IMO Shortlist de 1995.

(2) Un cercle tangents aux B, C-cercles de Soddy

[20] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

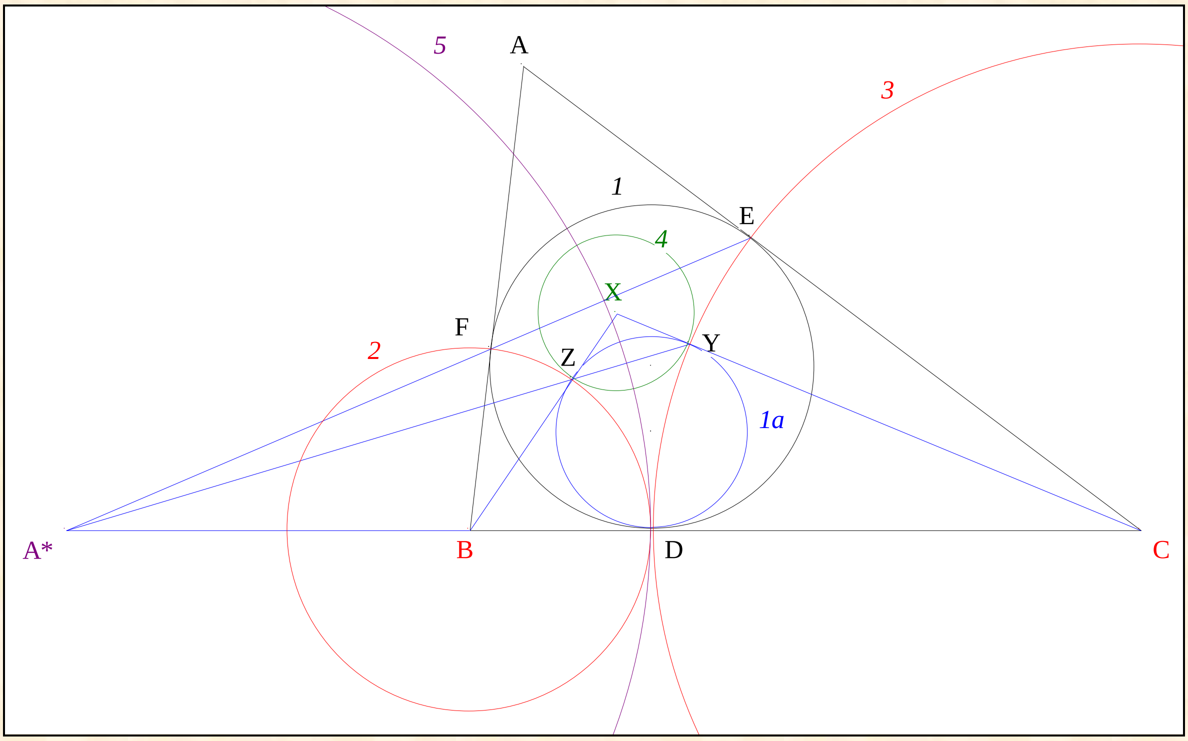
[21] Problème **5**, *Crux Mathematicorum* vol. **22**, **7** (1996) 300.
Toshio Seimiya, *Crux Mathematicorum* vol. **24**, **2** (1998) 72-73.



- Notons X le point d'intersection de (BZ) et (CY),
  2, 3 les B, C-cercles de Soddy de ABC
  et *4* le cercle de centre X passant par Y et Z.

- **Conclusion :** *4* est tangent à *2* et *3* resp. en Z, Y.

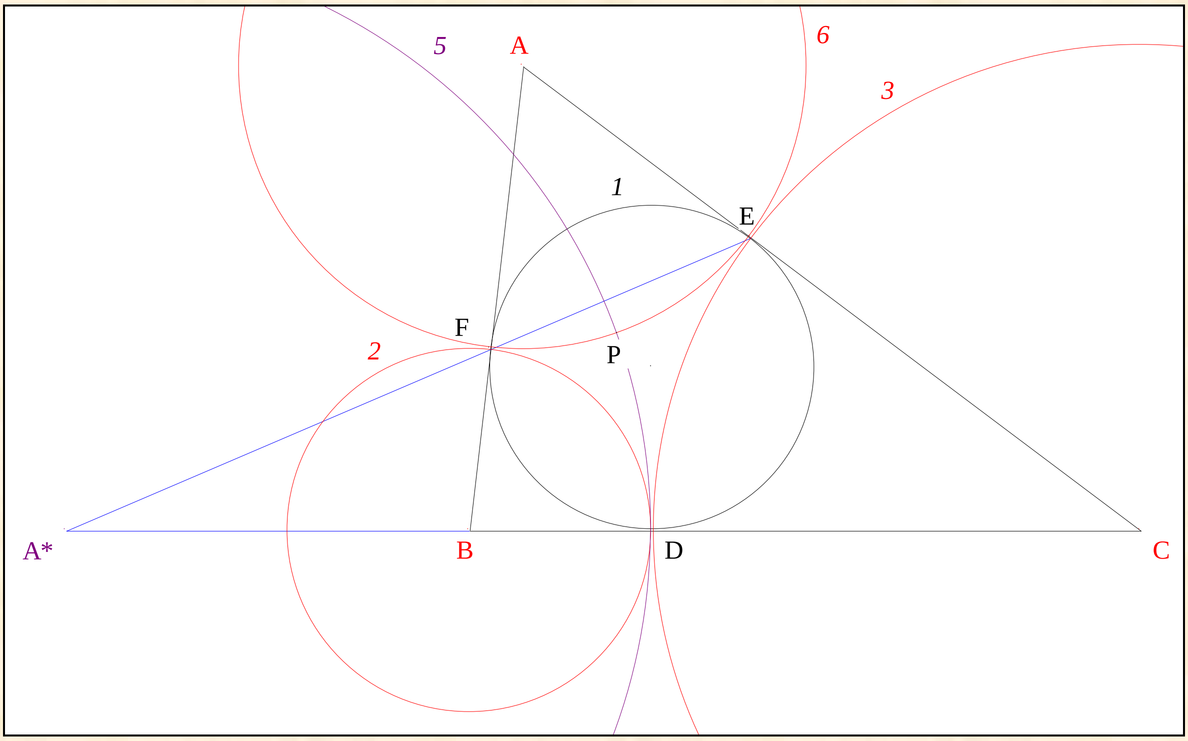
(3) Un cercle orthogonal à *4*



- Notons *5* le cercle de centre A* passant par D.

- **Conclusion :** d'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe **3**),
5 étant orthogonal à *1a* et ayant son centre A* sur la corde commune [ZY] de *1a* et *4*,
5 est orthogonal à *4*.

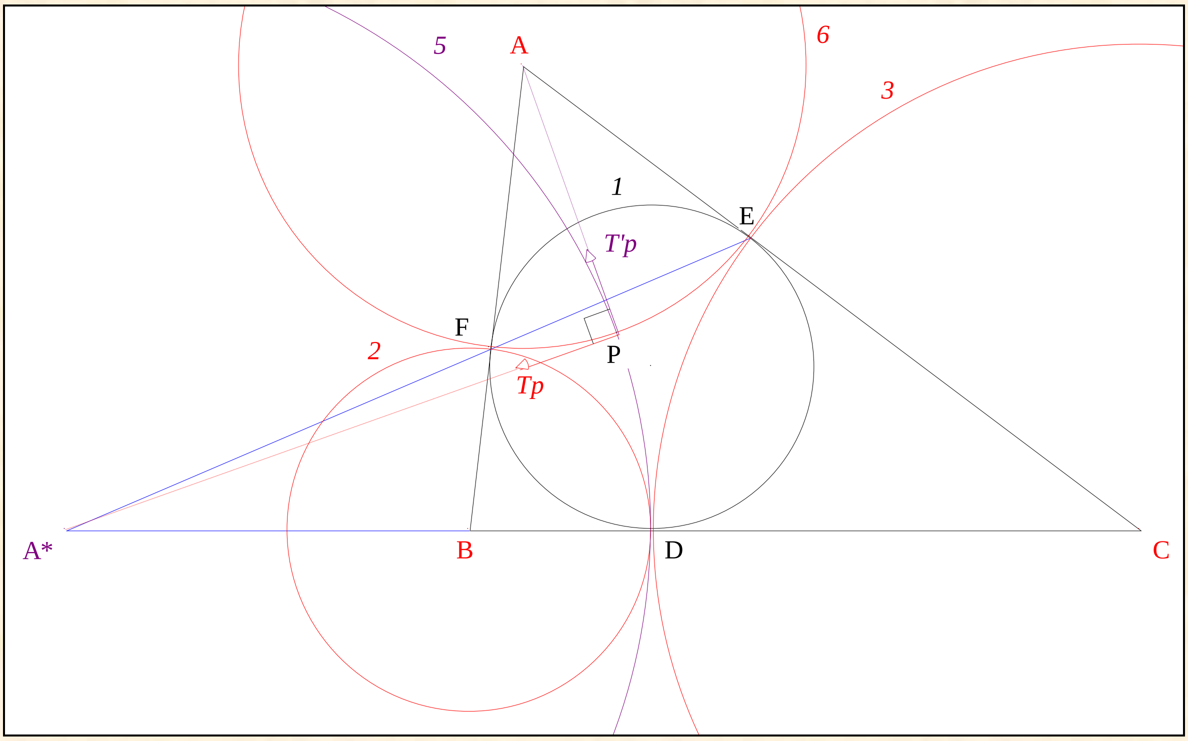
(4) Le A-cercle de Soddy



- Notons *6* le A-cercle de Soddy
  et P le point d'intersection de *5* et *6*, intérieur à ABC.

- **Conclusion :** d'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe **3**),
5 étant orthogonal à *1* et ayant son centre A* sur la corde commune [EF] de *1* et *6*,
5 est orthogonal à *6*.

(5) Deux tangentes



- Notons P le point d'intersection de *5* et *6*, intérieur à ABC
  et *Tp*, *T'p* les tangentes resp. à *6*, *5* en P.

- **Conclusion :** *5* et *6* étant orthogonaux, *Tp* passe par A* et *T'p* passe par A.

2. Commentaire

Ce problème **3** de la Shortlist de 1995, est pour l'auteur un germe et pour Darij Grinberg

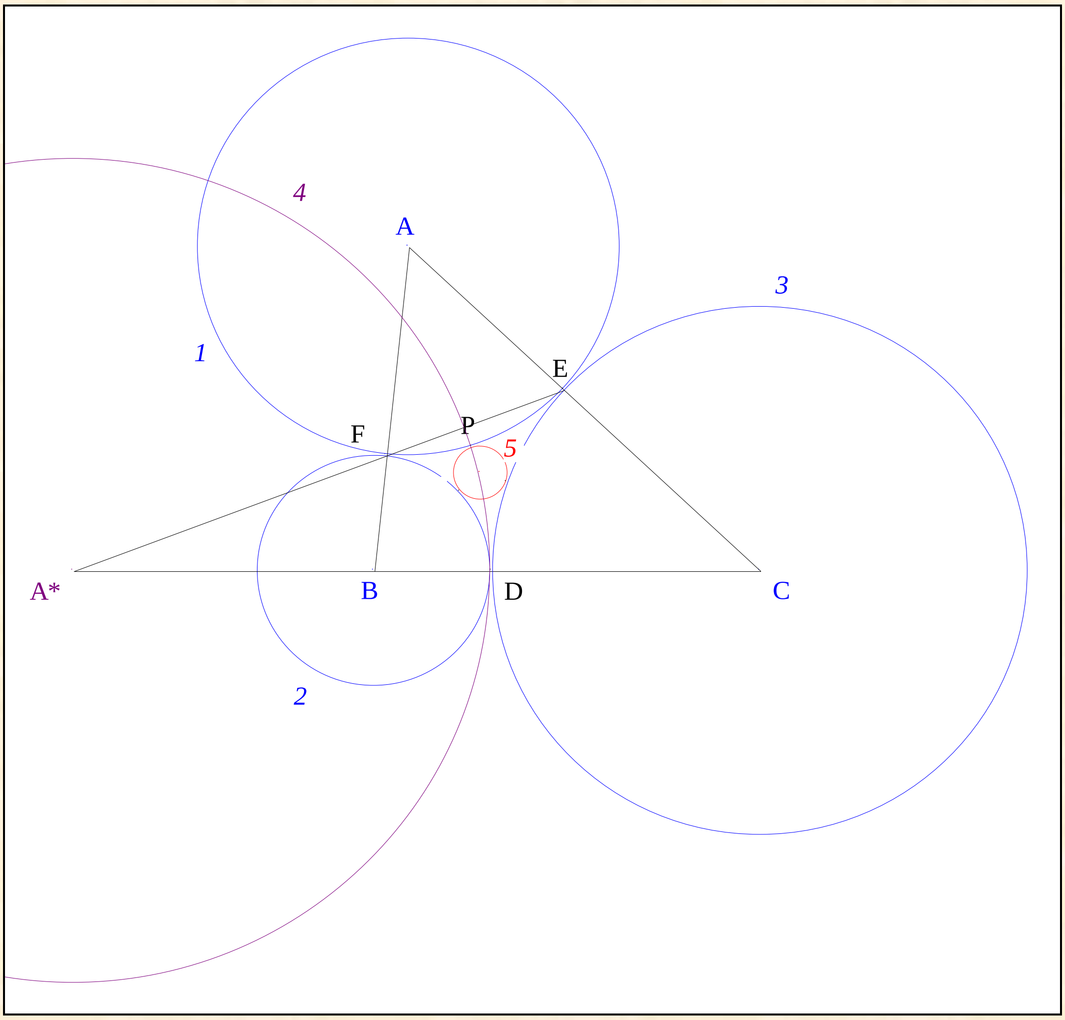
a gate[22] *to a certain theory ; it makes lots of results* "*transparent*".

3. Le cercle interne de Soddy

VISION

Figure :

[22] Une porte.



Traits :	ABC	un triangle,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	A*	le point d'intersection de (EF) et (BC),
	1, 2, 3	les A, B, C-cercles de Soddy,
	4	le cercle de centre A* passant par D,
	5	le cercle interne de Soddy de ABC
et	P	le point d'intersection de *4* et *1*, intérieur à ABC.

Donné : P est le point de contact de *1* et *5.* [23]

VISUALISATION

- D'après **A. 1.** IMO Shortlist 1995, G**3**, scolie **5**, **(1)** *4* est orthogonal à *1* en P
  (2) A* est sur la tangente à *1* en P.

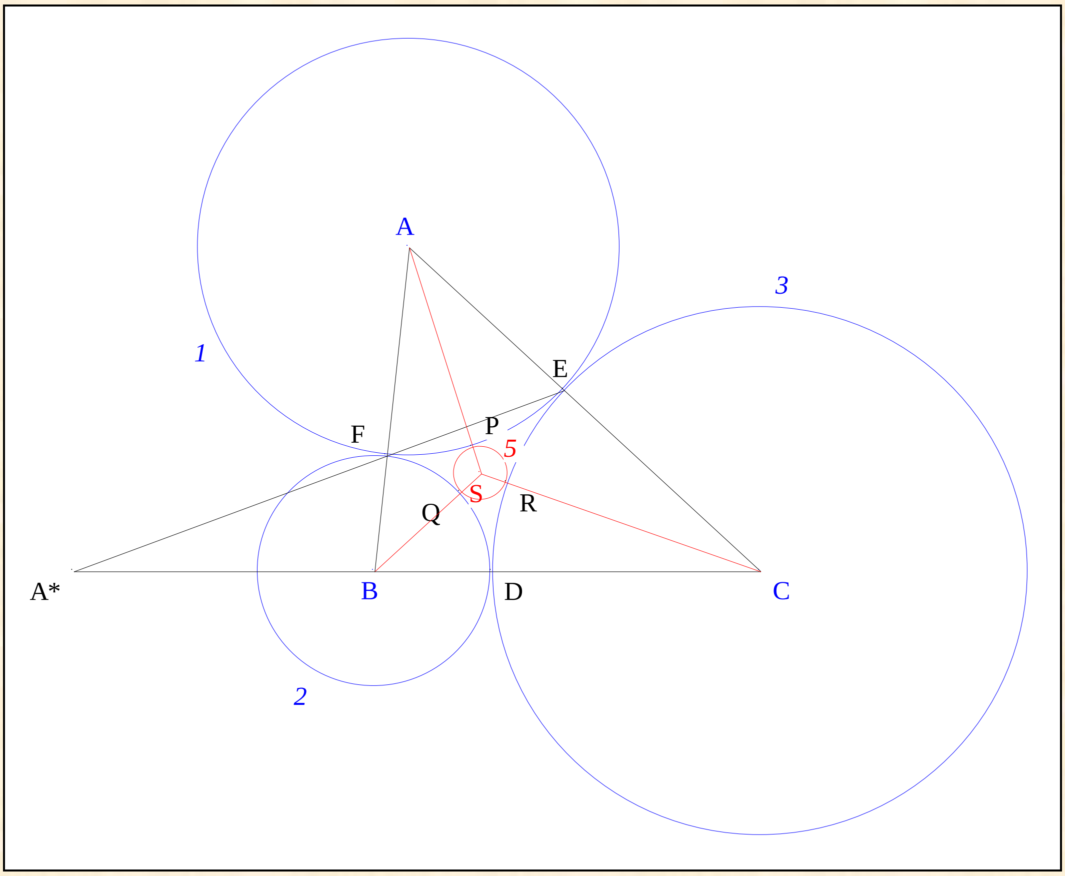
- D'après **A. 1.** IMO Shortlist 1995, G**3**, scolie **3**, *4* est orthogonal à *5* ;
  par hypothèse, *5* est tangent à *1.*

- **Conclusion :** d'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe **3**),
  5 est tangent à *1* en P.

[23] Steiner J., *Journal de Crelle* **1**, (1826) 274.

Scolies : **(1)** ce résultat permet de construire les trois points de contact du cercle interne de Soddy.

(2) Centre du cercle interne de Soddy



- Notons Q, R les point de contact de *5* resp . *2, 3*
  et S le centre de *5*.

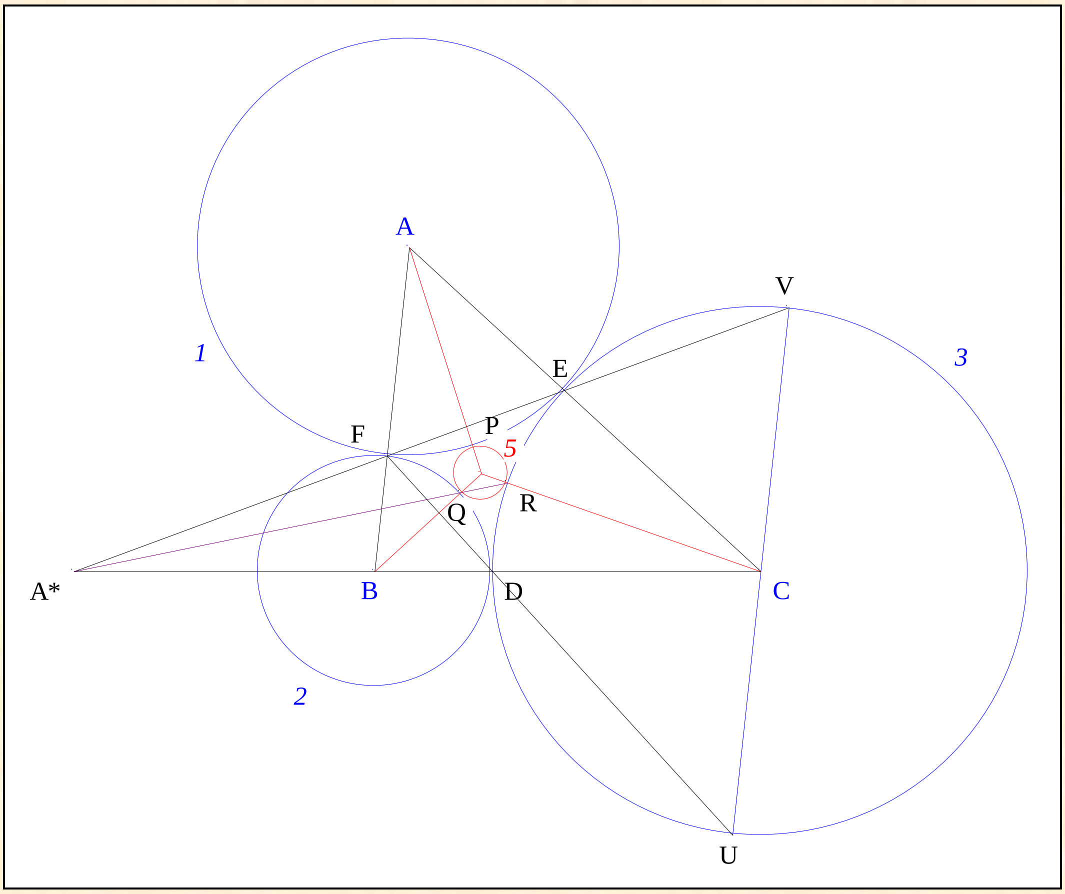
- D'après **A. 1.** IMO Shortlist 1995, G**3**, scolie 5, (AP), (BQ), (CR) concourent en S.

- **Conclusion :** S est le centre de perspective des triangles ABC et PQR.

(3) S est répertorié sous X_{176} chez E.T.C.[24]

(4) Axe de perspective de ABC et PQR

[24] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



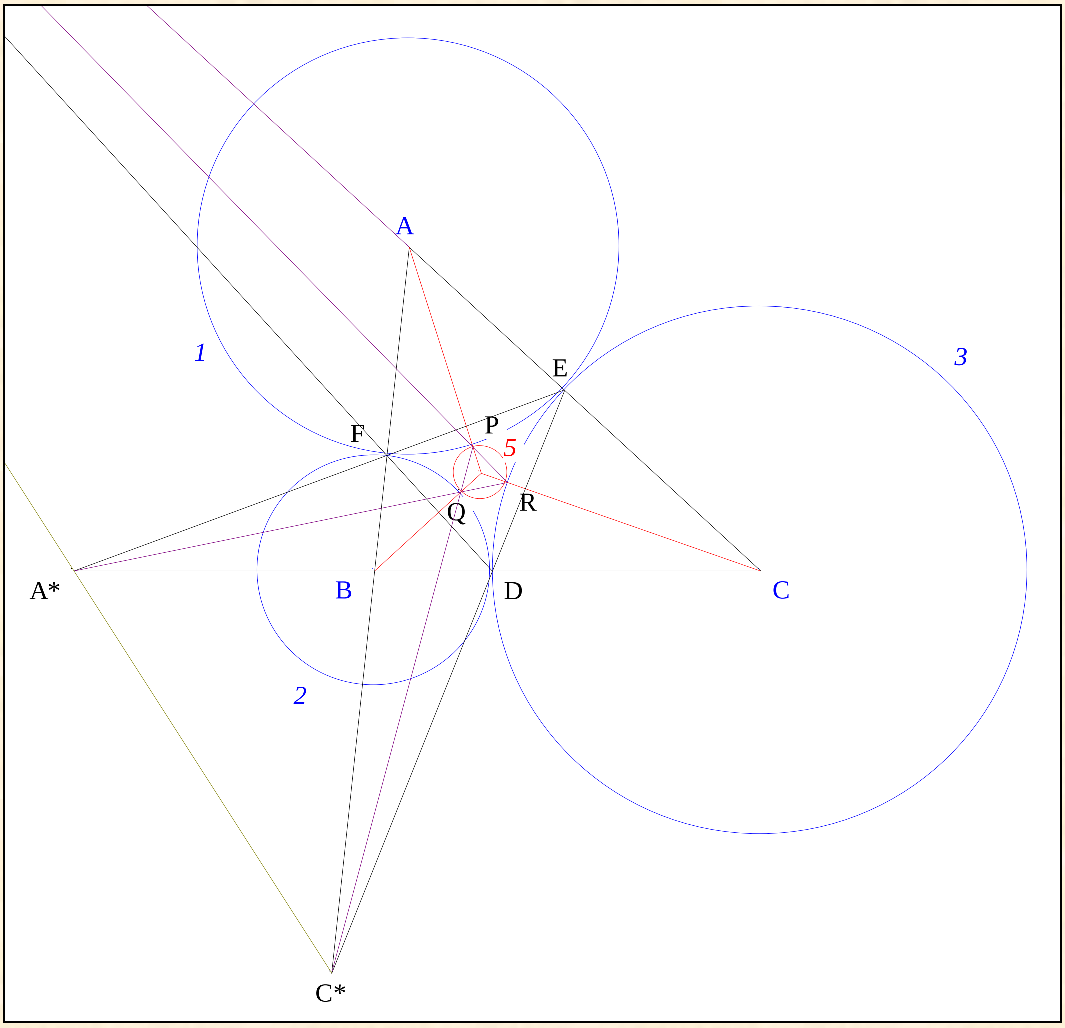
- Notons U, V les seconds points d'intersection de (FD), (FE) avec *3*.

- *5* étant tangent à *2* et *3*, Q est le centre externe d'homothétie de *5* et *2*
  R est le centre externe d'homothétie de *5* et *3*.

- D'après "Le théorème de Boutin"[25], (UCV) // (BF) ;
  en conséquence, A* est le centre externe d'homothétie de *2* et *3*.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de d'Alembert" (Cf. Annexe **4**),
  appliqué à *5*, *2* et *3*, Q, R et A* sont alignés.

[25] Ayme J.-L., A propos du théorème de Boutin, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

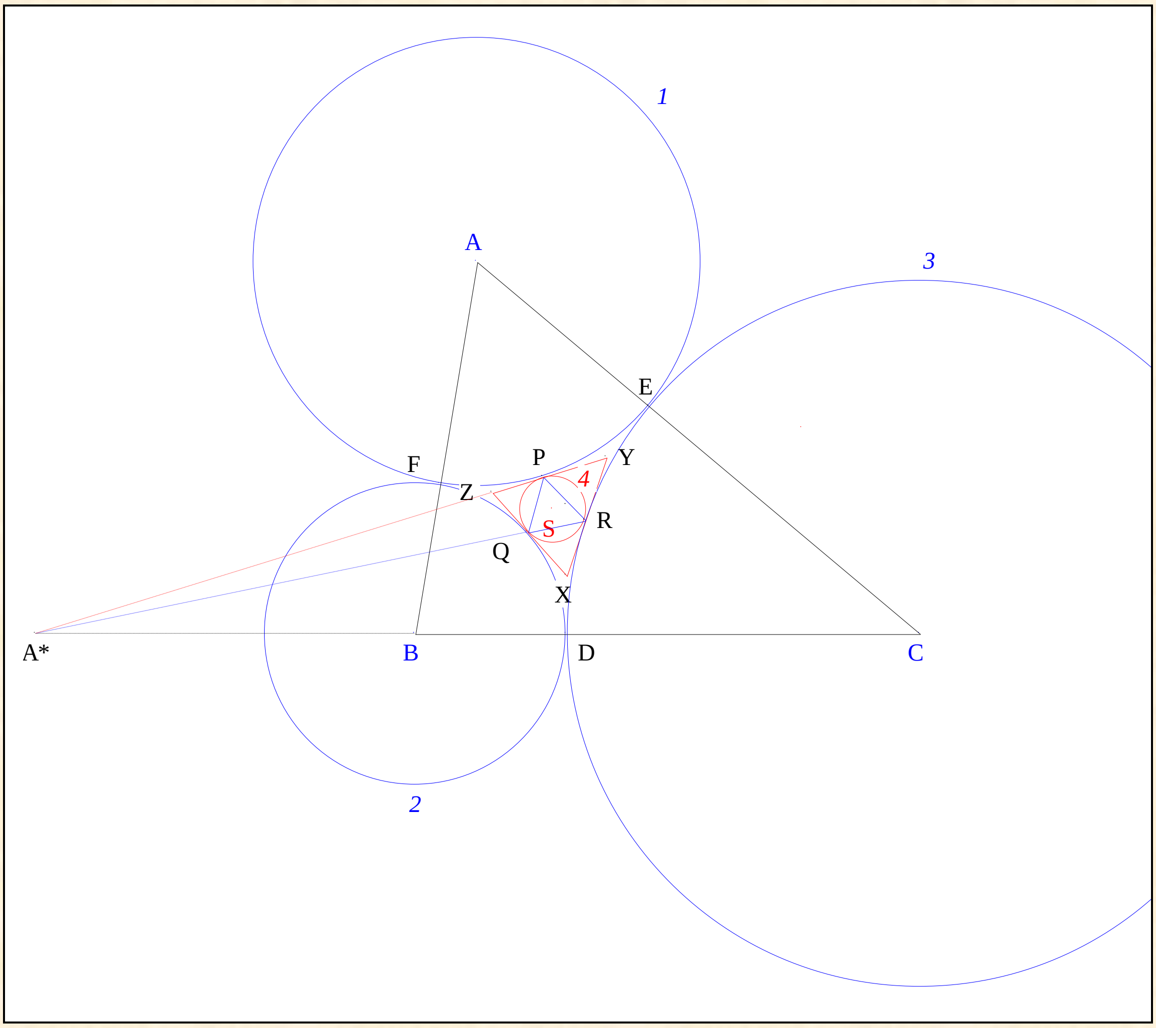


- Notons B*, C* les point d'intersection resp. de (FD) et (CA), (DE) et (AB).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que R, P et B* sont alignés
  P, Q et C* sont alignés.

- **Conclusion :** (A*B*C*) est l'axe de perspective (ou de Gergonne) de ABC et PQR.

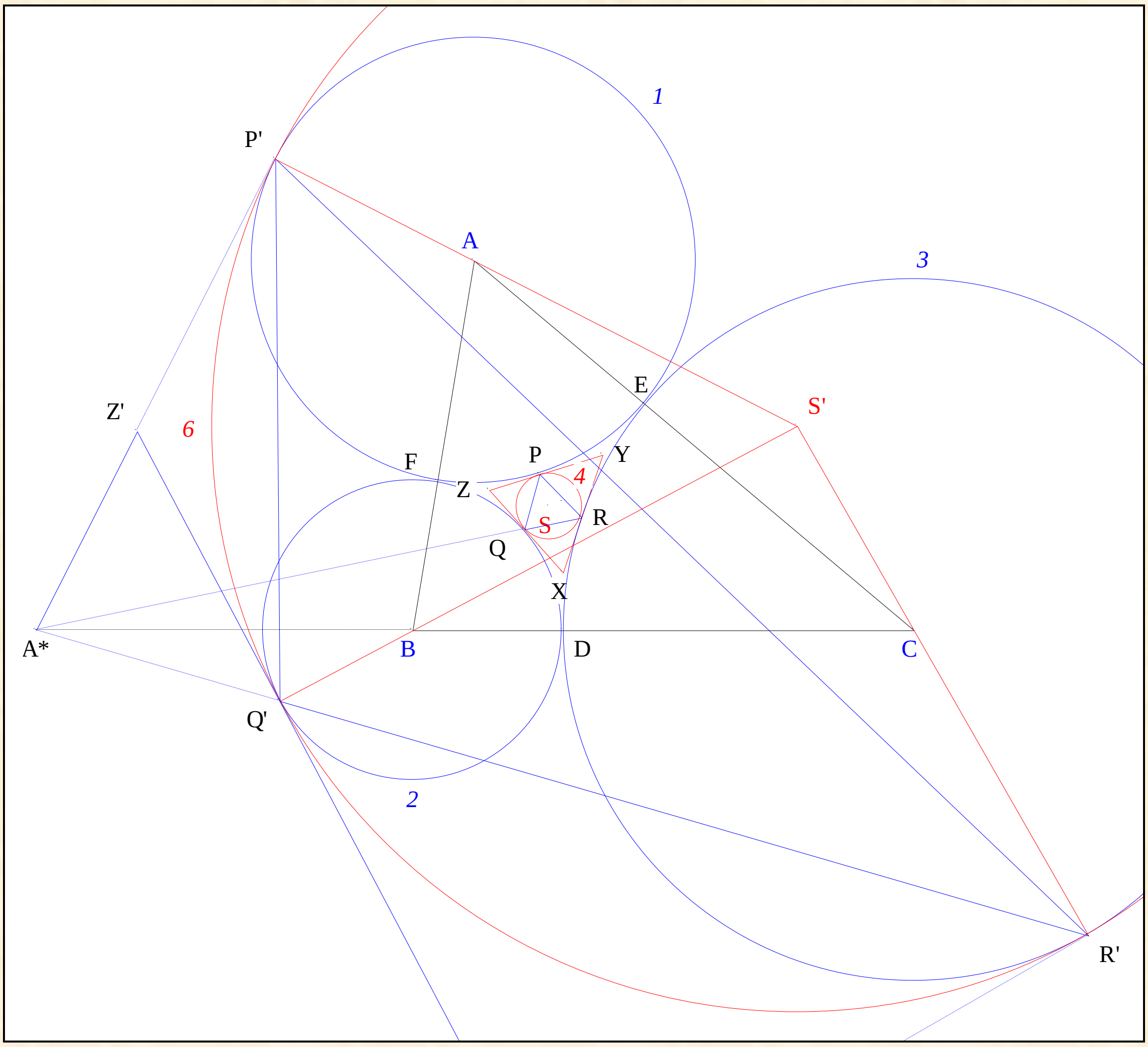
(4) Avec le triangle XYZ



- Notons *Tp*, *Tq*, *Tr* les tangentes à *1*, *2*, *3* resp. en P, Q, R
  et X, Y, Z les points d'intersection resp. de *Tq* et *Tr*, de *Tr* et *Tp*, de *Tp* et *Tq*.

- **Conclusion :** d'après **A. 1**. IMO Shortlist 1995, G3, scolie **5,**
  (A*B*C*) est l'axe de perspective (ou de Gergonne) de ABC et XYZ.

(5) Le cercle externe de Soddy



- Notons *6* le cercle externe de Soddy de ABC
  S' le centre de *6*
  P', Q', R' les point de contact de *6* resp. avec *1*, *2*, *3*.
  Tp, *Tq*, *Tr* les tangentes à *1*, *2*, *3* resp. en P', Q', R',
  et X', Y', Z' les points d'intersection resp. de *Tq'* et *Tr'*, de *Tr'* et *Tp'*, de *Tp'* et *Tq'*.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

  * S' est le centre de perspective des triangle ABC et P'Q'R'.

  * (A*B*C*) est l'axe de perspective de ABC, P'Q'R' et X'Y'Z'.

  (6) S' est répertorié sous X_{175} chez E.T.C.[26]

4. Synthèse et notations

- (A*B*C*) est l'axe de perspective de ABC, DEF, PQR, XYZ, P'Q'R' et X'Y'Z'.

- Notons Ge le c.p.[27] de ABC et DEF,
  S le c.p. de ABC et PQR,

26 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
27 Abréviation pour "centre de perspective".

	Ol	le c.p.	de ABC et XYZ,
	S'	le c.p.	de ABC et P'Q'R',
	Ol'	le c.p.	de ABC et X'Y'Z',
	L	le c.p.	de DEF et PQR,
	M	le c.p.	de DEF et XYZ,
	N	le c.p.	de DEF et P'Q'R',
	T	le c.p.	de DEF et X'Y'Z',
	Ri	le c.p.	de PQR et XYZ,
	U	le c.p.	de PQR et P'Q'R',
	Gr	le c.p.	de PQR et X'Y'Z',
	Gr'	le c.p.	de XYZ et P'Q'R',
	V	le c.p.	de XYZ et X'Y'Z'
et	Ri'	le c.p.	de P'Q'R' et X'Y'Z'.

Les notations seront expliquées par la suite.

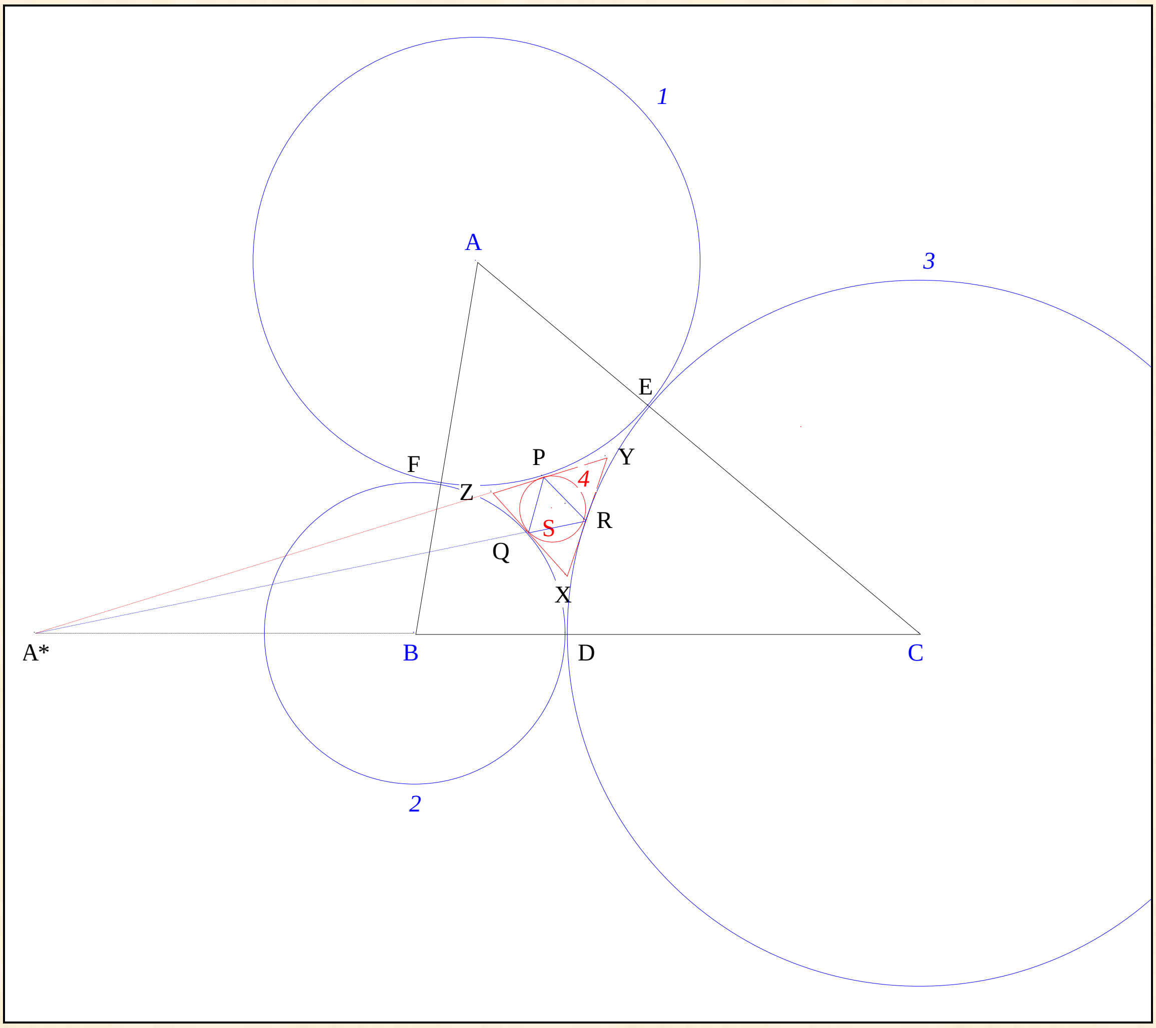
5. Une courte biographie de Sir Frederick Soddy

Frederick Soddy est né le 2 septembre 1877 à Eastbourne (Sussex, Angleterre).
Fils de Benjamin Soddy, un marchant de Londres, il est élève du College de Eastbourne, puis étudiant à l'université College de Galles à Aberystwyth.
Après deux années de recherche en chimie à Oxford, il va au Canada où il travaillera à l'université McGill à Montréal sous la direction du professeur Rutherford. De retour en Angleterre, il rejoint l'équipe de Sir William Ramsay à l'university College de Londres.
En 1908, il épouse Winifred Beilby. Élu Fellow de la Royal Society en 1810, il formule trois ans plus tard, le concept d'isotopes, puis est promu en 1814, professeur de chimie à l'université d'Aberdeen avant de rejoindre Oxford en 1919 où il y restera jusqu'en 1936, date du décès de sa femme. Le Prix Nobel de chimie lui est attribué en 1921 pour sa découverte des isotopes.
Homme de principe, souvent obstiné dans ses points de vue, il a toujours eu un contact chaleureux avec ses étudiants et compliqué avec ses collègues.
Il décède à Brighton, le 22 septembre 1956.

D. LA PONCTUELLE DE SODDY

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notation sont les mêmes que précédemment.

Donné : Ge, S, Ol, S', Ol', L, M, N, T, Ri, U, Gr, Gr', V et Ri' sont alignés.[28]

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Casey "Trois triangles coarguésiens" (Cf. Annexe **5**)
  appliqué aux triangles perspectifs ABC, PQR, XYZ, P'Q'R' et X'Y'Z'
  admettant la même arguésienne (A*B*C*),
  Ge, S, Ol, S', Ol', L, M, N, T, Ri, U, Gr, Gr', V et Ri' sont alignés.

---

[28] Oldknow A., The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle, *American Mathematical Monthly* vol. **103**, **4** (1996) 319-329 ;
On the line through Incentre and Gergonne Point, *Mathlinks* du 31/03/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=399665 ;
Difficult geometry [Soddy and Gergonne lines of a triangle], *Mathlinks* du 08/07/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=13907

- Notons *S* cette ponctuelle.

Commentaire : Rappelons que le concept de ponctuelle i.e. d'une suite de points alignés, a été introduit par le géomètre italien Luigi Cremona[29] et qu'une ponctuelle donne naissance à une droite. En pratique, les géomètres confondent ponctuelle et droite.

Scolies : **(1)** *S* est le ponctuelle de Soddy de ABC.

(2) Nom des centres de perspective cités relativement à ABC

- Notons *G* la droite de Gergonne (A*B*C*).

- Terminologie :

*	A*	est le A-point de Nobbs	de ABC
*	Ge	est le point de Gergonne	de ABC et DEF
*	S	est le point interne de Soddy	de ABC et PQR
*	Ol	est le point interne d'Oldknow	de ABC et XYZ
*	S'	est le point externe de Soddy	de ABC et P'Q'R'
*	Ol'	est le point externe d'Oldknow	de ABC et X'Y'Z'
*	Ri	est le point interne de Rigby	de PQR et XYZ
*	Gr	est le point interne de Griffith	de PQR et X'Y'Z'
*	Gr'	est le point externe de Griffith	de XYZ et P'Q'R'
*	Ri'	est le point externe de Rigby	de P'Q'R' et X'Y'Z'
*	Fl	est le point de Fletcher[30], intersection	de *G* et *S*.

Note historique :

un géomètre anonyme a démontré vers 1966 l'alignement de Ge, S et S'.
Dans son article de 1996, Adrian Oldknow utilise les coordonnées trilinéaires et attribue plusieurs de ses investigations à l'utilisation du logiciel de Géométrie *Sketchpad*.
A la page 326 de son article, Adrian Oldknow s'attribue deux points et donne à des points connus ou peu connus de nouveaux noms tels que les points de Fletcher, de Nobbs, de Griffiths, de Rigby et remercie à la fin de son papier, le professeur H. S. M. Coxeter, le Docteur T. J. Fletcher, le professeur H. B. Griffiths (qu'il ne faut pas confondre avec John Griffiths) et le Docteur John Rigby.
Dans un autre article[31] qui ressemble beaucoup au précédent, il écrit à la page 272 :

> We know have the small matter of the 10 points O, O', K, K', M, M', D', E', F' and T.
> If they haven't already been claimed I would like to offer T as the Fletcher point,
> D', E', F' as the Nobbs points,
> M, M' as the Griffiths points
> and K, K' as the inner and outer Rigby points.
> Which leaves O and O'-modesty forbids- or does it ?

En 2001, le professeur David Eppstein[32] de l'Université de Californie à Irvine, fondateur et auteur du site Web *The Geometry Junkyard* redécouvre les deux points d'Adrian Oldknow bien qu'il cite l'article de celui-ci en référence ; il note M' le point interne d'Oldknow et M le point externe d'Oldknow.
Clark Kimberling continuant dans cette direction, note Ep_1 le point M' en le référenciant sous X_{481} et Ep_2 le point M en le référenciant sous X_{482}, les appelle premier et second point d'Eppstein ignorant ainsi Oldknow et son article.

---

29 Cremona L., (Pavie 1830-Rome 1903).
30 Il est répertorié sous X(1323) chez ETC.
31 Oldknow A., Computer Aided research into Triangle Geometry, *Mathematical Gazette* (1995 ou 1996) 263-273.
32 Eppstein D., Tangent spheres and triangle centers, *American Mathematical Monthly* **108** (January 2001) 63-66.

En 2007, dans la revue électronique *Forum Geometricorum*, Nikolaos Dergiades[33] propose un article concernant les cercles de Soddy avec une approche basée sur les coordonnées trilinéaires dans lequel il traite les points d'Eppstein tout en ignorant Oldknow et son article.

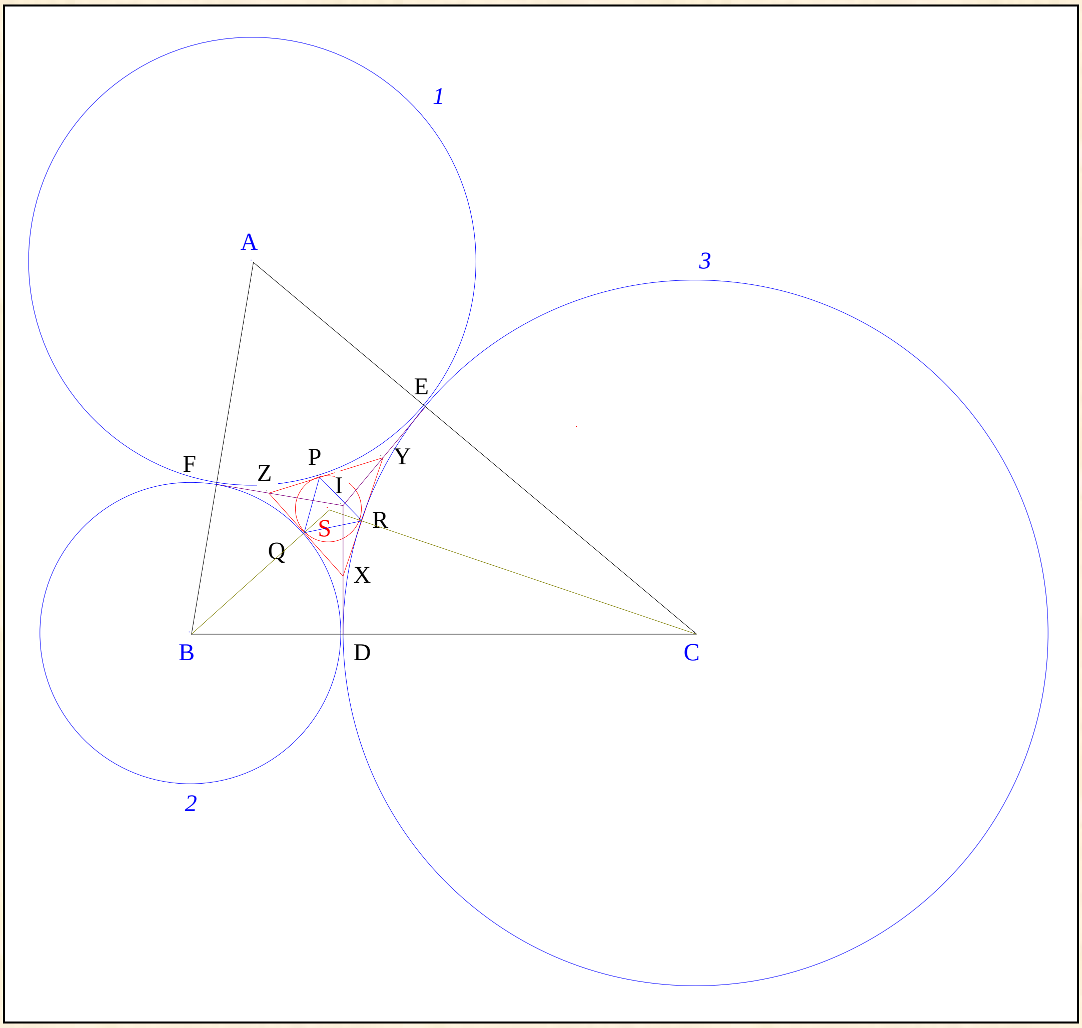
E. NATURE GÉOMÉTRIQUE

I. LES POINTS M, T, U, V

1. Le point M, c.p. de DEF et XYZ

VISION

Figure :



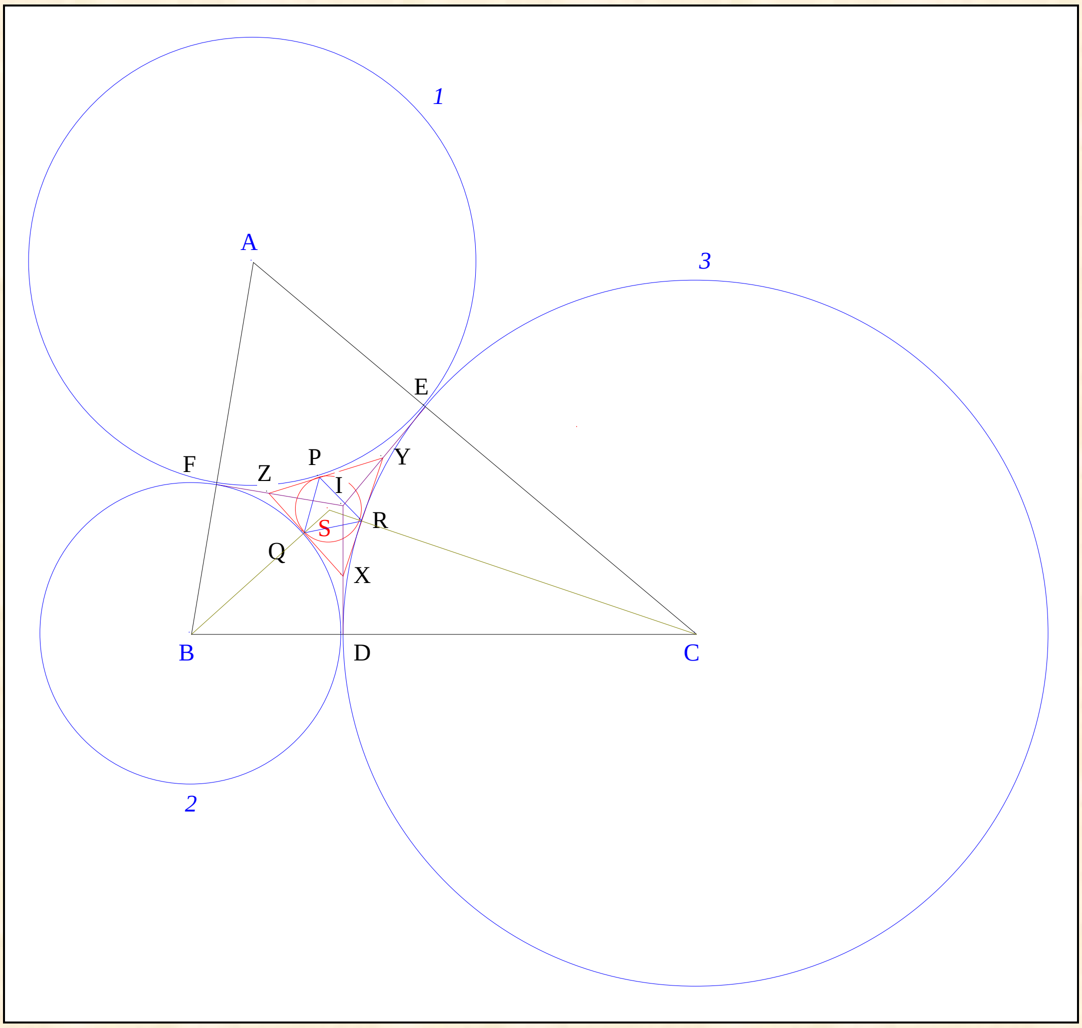
Traits : ABC un triangle,

[33] Dergiedes N., The Soddy Circles, *Forum Geometricorum* vol. **7** (2007) 191-197.

	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	1, 2, 3	les A, B, C-cercles de Soddy,
	4	le cercle interne de Soddy,
	S	le point interne de Soddy,
	PQR	le triangle interne de Soddy
et	XYZ	le triangle tangentiel interne de Soddy.

Donné : (DX), (EY) et (FZ) sont concourantes en I.

VISUALISATION



- D'après **D.** La ponctuelle de Soddy, (DX), (EY) et (FZ) sont concourantes en M.
- Considérons la "figure de Soddy" (Cf. **B.**) appliquée au triangle SBC.
- X étant le centre de SBC, (DX) ⊥ (BC) ;
  en conséquence, (DX) passe par I.
- Mutatis mutandis, (EY) passe par I
  (FZ) passe par I.
- **Conclusion :** (DX), (EY) et (FZ) sont concourantes en I.

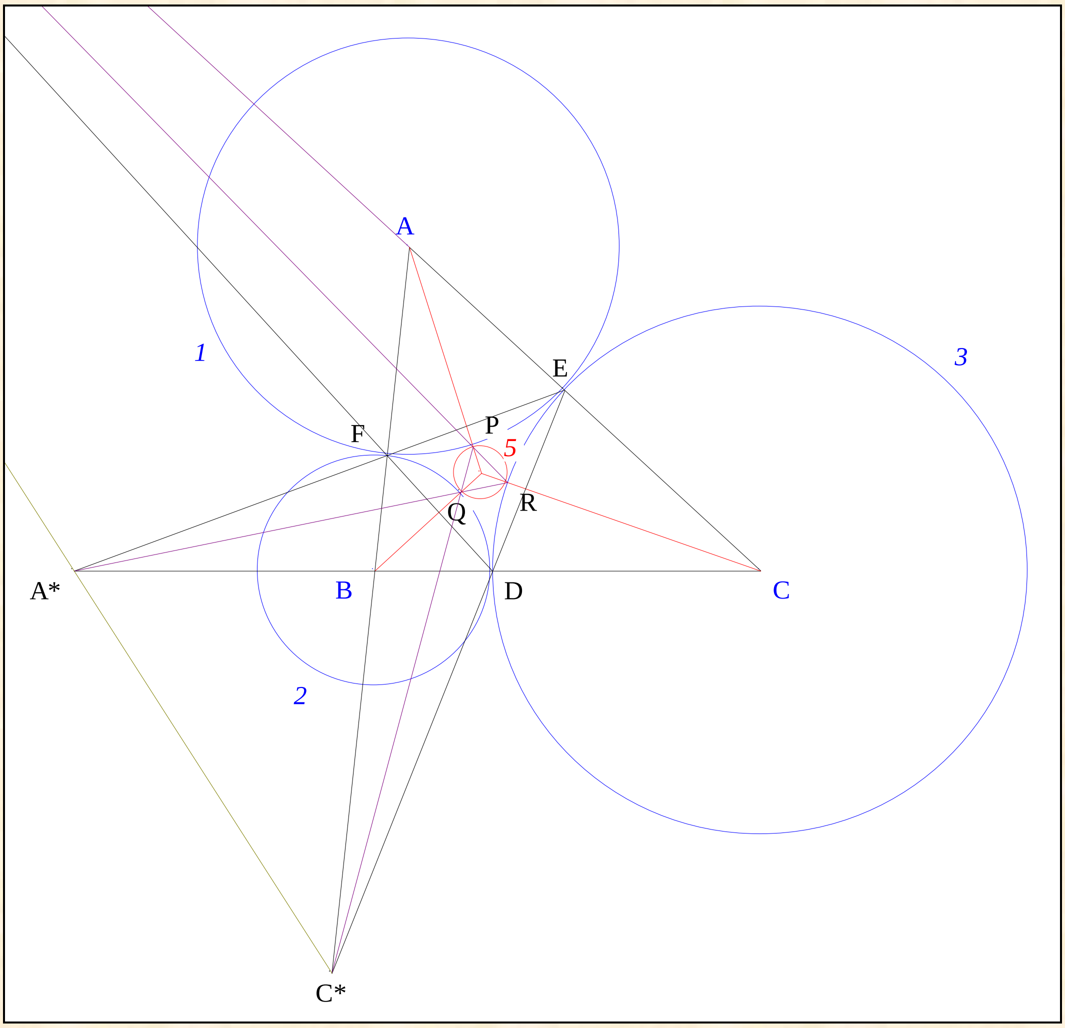
Énoncé traditionnel :

le centre du cercle inscrit d'un triangle
est sur
la droite de Soddy de ce triangle.

Scolies : **(1)** le point M est le centre I de ABC.

(2) (DX), (EY) et (FZ) sont resp. tangentes à *1*, *2*, *3* resp. en D, E, F.

(3) Une perpendiculaire à la droite de Soddy [34]



- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Sondat" [35] appliqué à ABC et DEF, (GeI) ⊥ (A*B*C*).

Énoncé traditionnel :

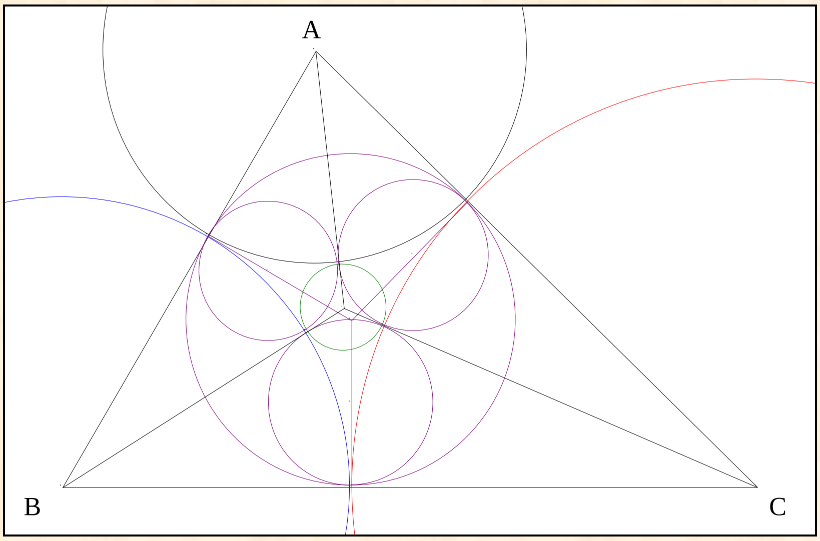
la droite de Soddy d'un triangle
est perpendiculaire à
la droite de Gergonne de ce triangle.

---

[34] Oldknow A., (1996)

[35] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
About the incenter, Romanian ROM TST 2004, problem **11**, from *Kvant Magazine*, *Mathlinks* du 02/05/2004 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=5485

(4) L'observation de Philipp Beecroft



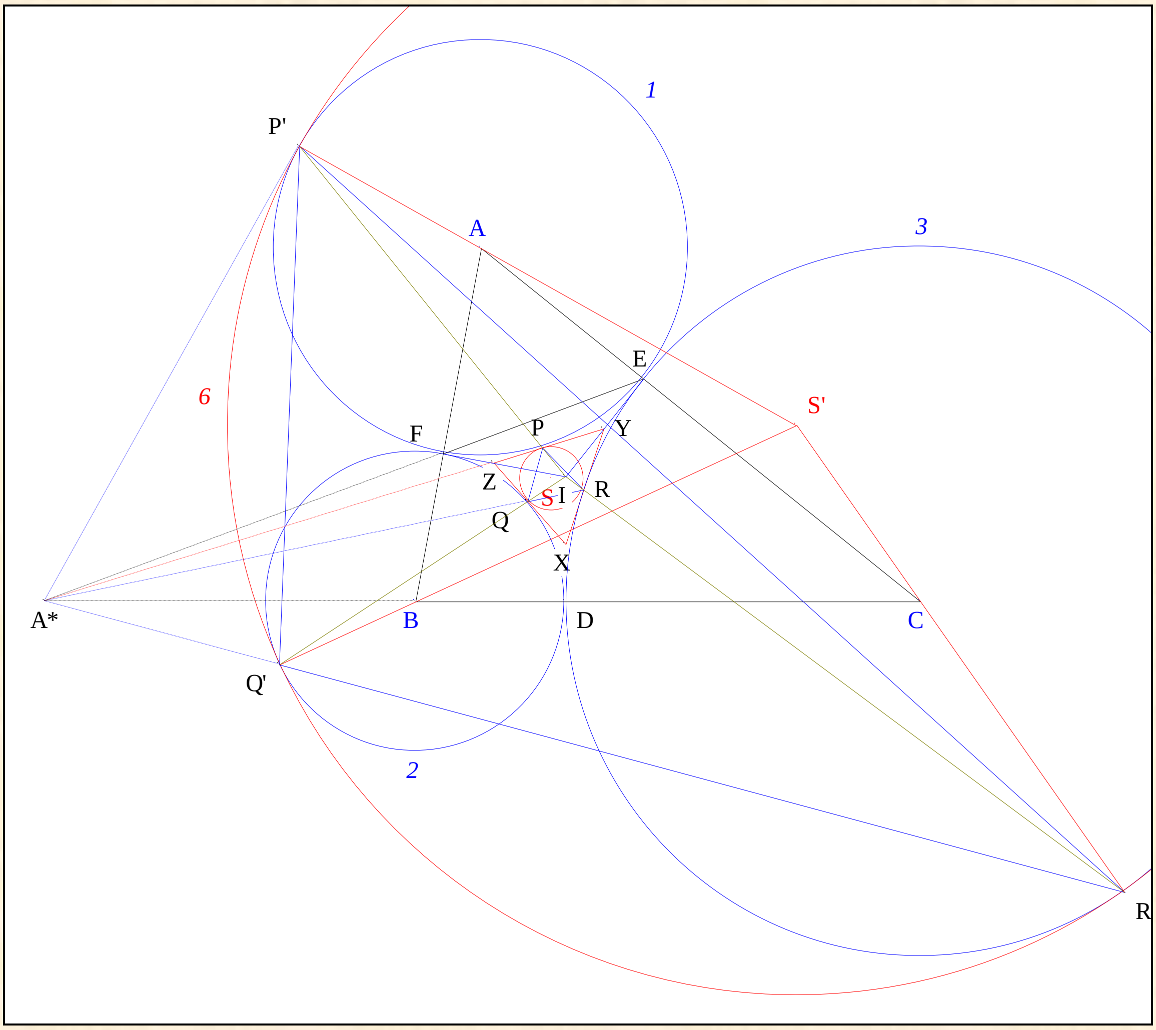
en 1843, l'amateur-géomètre Philip Beecroft observe que le cercle inscrit et les 3 cercles de Soddy d'un triangle déterminent un autre ensemble de quatre cercles qui nous fait penser aux cercles de Lucas.
Revisitant cette figure, Jean-Pierre Ehrmann[36] présente un article sur ce sujet dans la revue électronique *Forum Geometricorum* en 2006.

2. Le point U, c.p. de PQR et P'Q'R'

VISION

Figure :

[36] Ehrmann J.-P., Some geometric constructions, *Forum Geometricorum* **6** (2006) 327–334 ; http://forumgeom.fau.edu/



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	1, *2*, *3*	les A, B, C-cercles de Soddy,
	4	le cercle interne de Soddy,
	S	le point interne de Soddy,
	PQR	le triangle interne de Soddy,
	6	le cercle externe de Soddy,
	S'	le point externe de Soddy
et	P'Q'R'	le triangle externe de Soddy.

Donné : (PP'), (QQ') et (RR') sont concourantes en I.

VISUALISATION

- (PP') est la polaire de A* relativement à *1*.
- (EF) passe par A*.
- D'après **E. 1.** Nature du point M, scolie **2**, les tangentes à *1* resp. en E, F passent par I.
- Par définition, I est le pôle de (EF) relativement à *1*.
- D'après de La Hire "Pôles et polaires" (Cf. Annexe **6**), I est sur (PP').

- Mutatis mutandis, nous montrerions que I est sur (QQ')
  I est sur (RR').

- **Conclusion :** (PP'), (QQ') et (RR') sont concourantes en I.

Scolies : **(1)** le point U est le centre I de ABC.

(2) Un quaterne harmonique

- le quadrilatère cyclique P'FPE est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (A* ; P', P, E, I) est harmonique.

- D'après **G. 1.** Perpendiculaire à une gergonnienne, (AGe) ⊥ (A*I).[37]

- Par perpendicularité, le pinceau (A ; S', S, I, Ge) est harmonique.

- **Conclusion :** le quaterne (S', S, I, Ge) est harmonique.

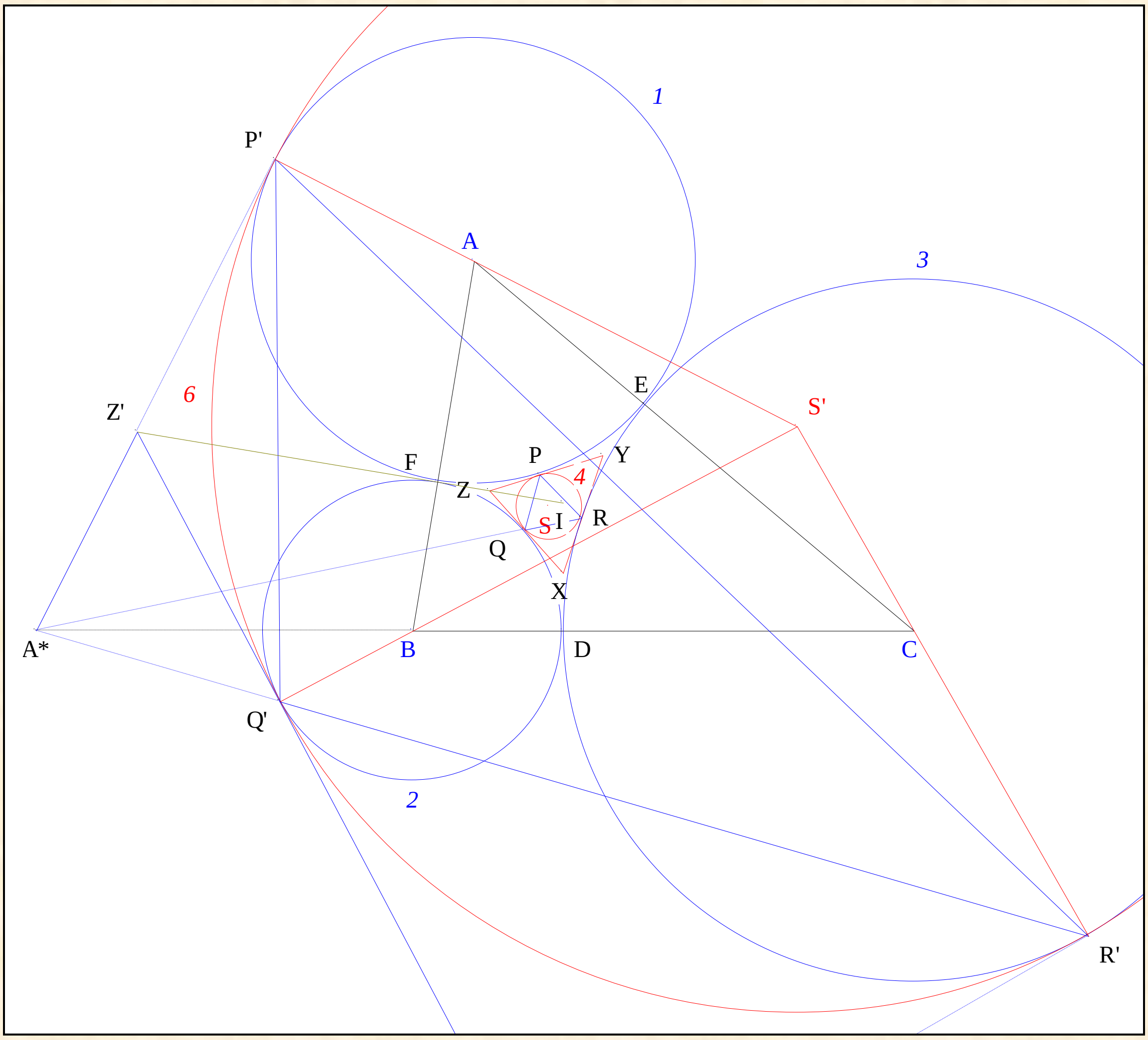
Note historique : ce résultat a été donné par Albert Vandeghen en 1964 et signalé à nouveau en 1996 par Adrian Oldknow.
Selon une lettre d'Oene Bottema adressée à Harold Scott McDonald Coxeter, celui-ci relate que la hollandais G. R. Veldkamp de Bilt a observé que le centre externe de d'homothétie des cercles de Soddy est le point de Gergonne.

3. Le point T, c.p. de DEF et X'Y'Z'

VISION

Figure :

[37] Ayme J.-L., Two perpendicular lines, *Mathlinks* du 13/08/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=424246



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	1, 2, 3	les A, B, C-cercles de Soddy,
	4	le cercle interne de Soddy,
	S	le point interne de Soddy,
	PQR	le triangle interne de Soddy,
	6	le cercle externe de Soddy,
	S'	le point externe de Soddy
et	P'Q'R'	le triangle externe de Soddy.

Donné : (DX'), (EY') et (FZ') sont concourantes en I.

VISUALISATION

- D'après **A.** La ponctuelle de Soddy, (DX'), (EY') et (FZ') sont concourantes en T.
- Considérons la "figure de Soddy" (Cf. **B.**) appliquée au triangle S'AB.
- Z' étant le S'-excentre de S'AB, (FZ') ⊥ (AB) ;
  en conséquence, (FZ') passe par I.
- Mutatis mutandis, (DX') passe par I

(EY') passe par I.

- **Conclusion :** (DX'), (EY') et (FZ') sont concourantes en I.

Scolies : **(1)** le point M est le centre I de ABC

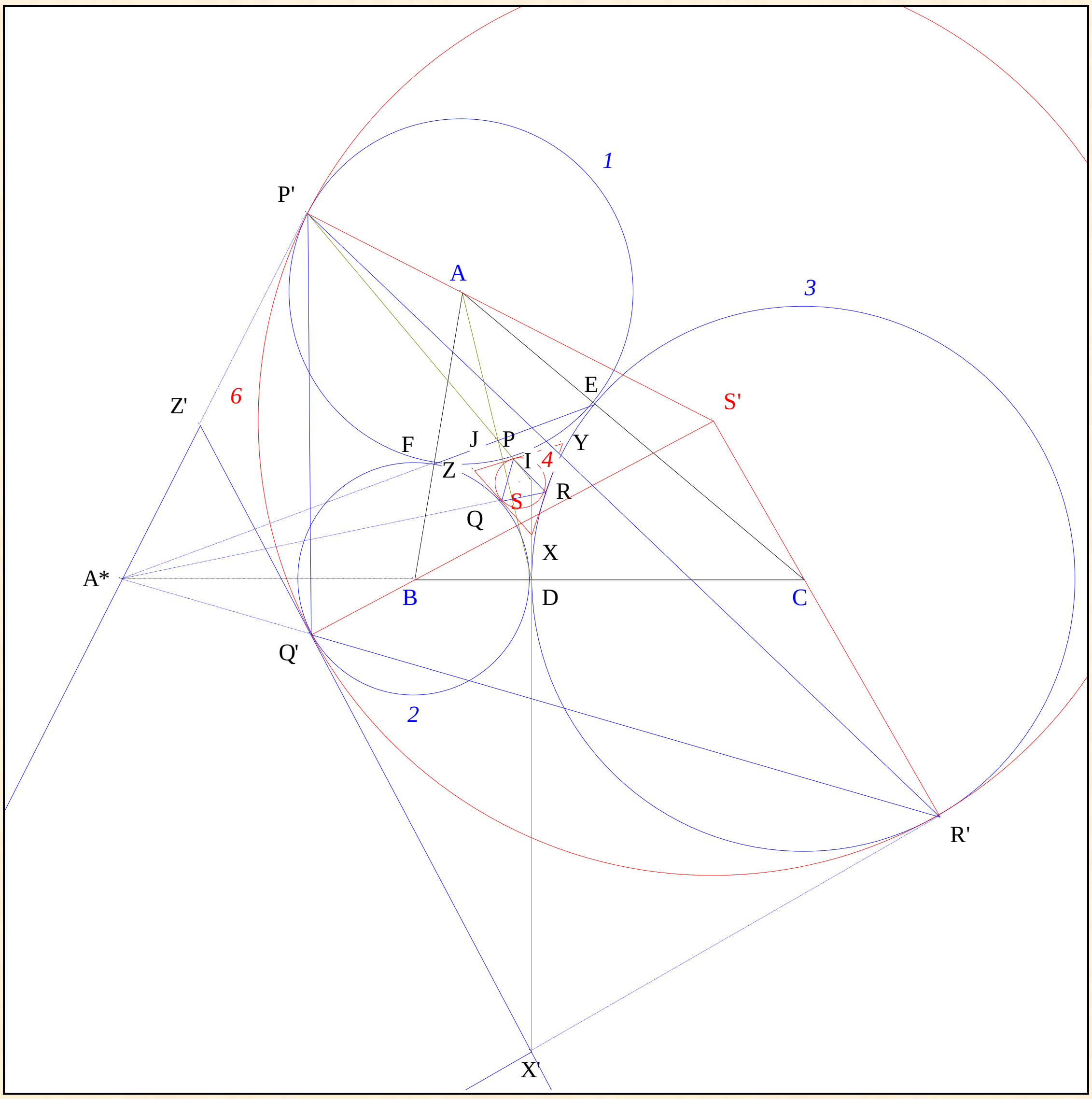
(2) D'après **E. 1.** Nature du point M, V, c.p. de XYZ et X'Y'Z', est le centre I de ABC.

II. LES POINTS L, N

1. Le point L, c.p. de DEF et PQR

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	1, 2, 3	les A, B, C-cercles de Soddy,
	4	le cercle interne de Soddy,
	S	le point interne de Soddy,
	PQR	le triangle interne de Soddy,
	6	le cercle externe de Soddy,
	S'	le point externe de Soddy
	P'Q'R'	le triangle externe de Soddy.
et	X'Y'Z'	le triangle tangentiel externe de Soddy de ABC.

Donné : (DP), (EQ) et (FR) sont concourantes en Ol. [38]

VISUALISATION

- D'après **A.** La ponctuelle de Soddy, (DP), (EQ) et (FR) sont concourantes en L.
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe **8**) appliqué aux triangles AEF et XQR admettant (A*B*C*) pour arguésienne, (AX), (EQ) et (FR) sont concourantes en L.
- **Conclusion partielle :** (AX) passe par L.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BY) passe par L
(CZ) passe par L.
- D'après **C. 4.** Synthèse et notation, (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes en Ol ; en conséquence, L et Ol sont confondus.
- **Conclusion :** (DP), (EQ) et (FR) sont concourantes en Ol.

Scolie : le point N, c.p. de DEF et P'Q'R'

- Mutatis mutandis, nous montrerions que N et Ol' sont confondus.
- **Conclusion :** (DP'), (EQ') et (FR') sont concourantes en Ol'.

2. Exercice

- Notons J le point d'intersection de (PP'I) et (EF).
- Montrer que A, J et D sont alignés.

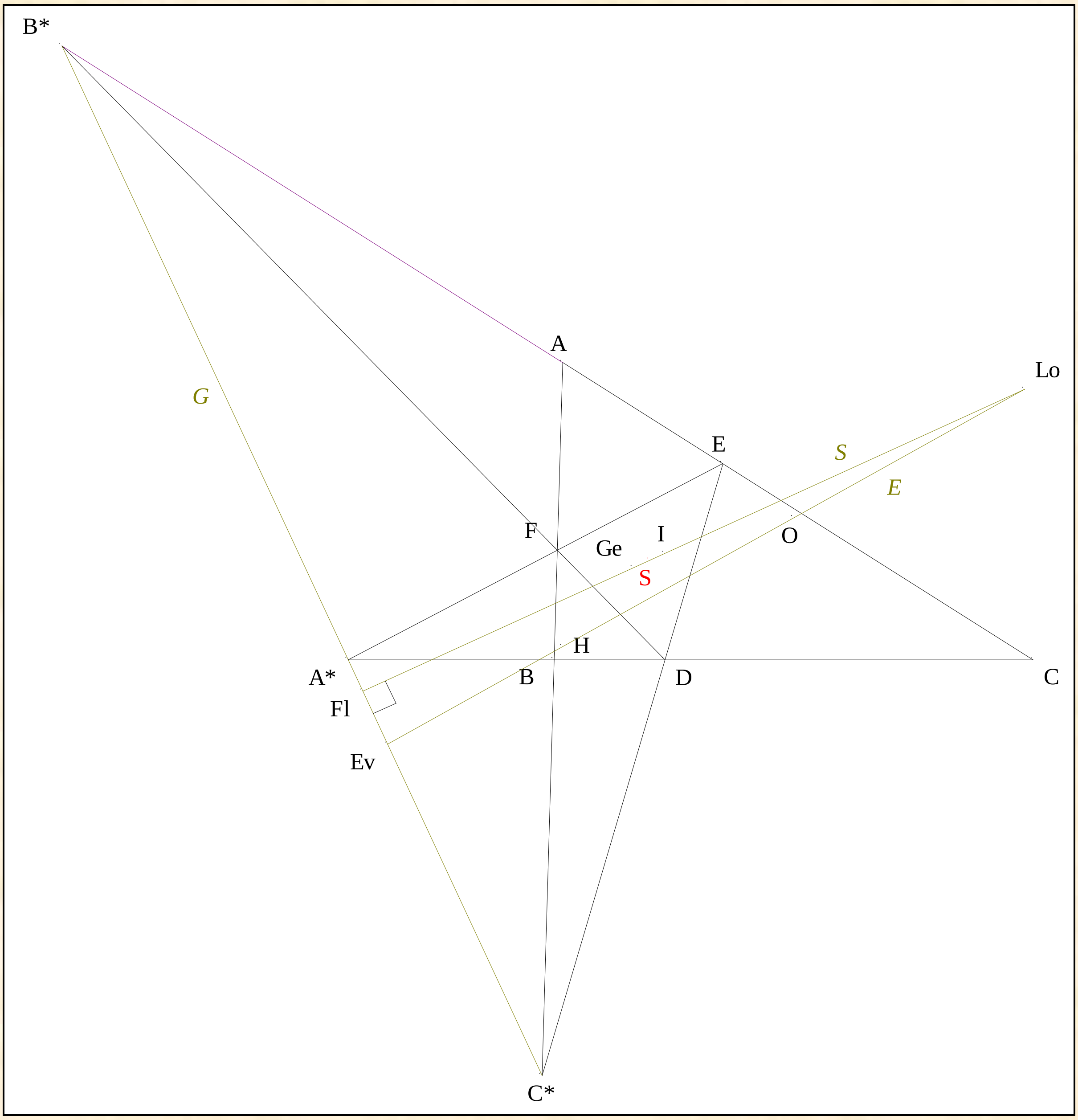
[38] Ayme J.-L., A point on the Soddy line, *Mathlinks* du 20/08/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=425681

F. AUTRES POINTS

SUR

LA PONCTUELLE DE SODDY

1. Le point central de de Longchamps



Note historique : Adrian Oldknow [39] a introduit en 1996,
le triangle EGS déterminé par les droites d'Euler *E*, de Gergonne *G* et de Soddy *S*.
Le point de de Longchamps, noté Lo, est le point d'intersection de *S* et *E*. [40]
Dans le même article, Adrian Oldknow a introduit le point d'Evans Ev, intersection de *E* et *G*, ainsi que le point de Fletcher Fl, intersection de *G* et *S* ; il rappelle que EGS

---

[39] Oldknow A., The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle, *American Mathematical Monthly* vol. **103**, **4** (1996) 319-329.

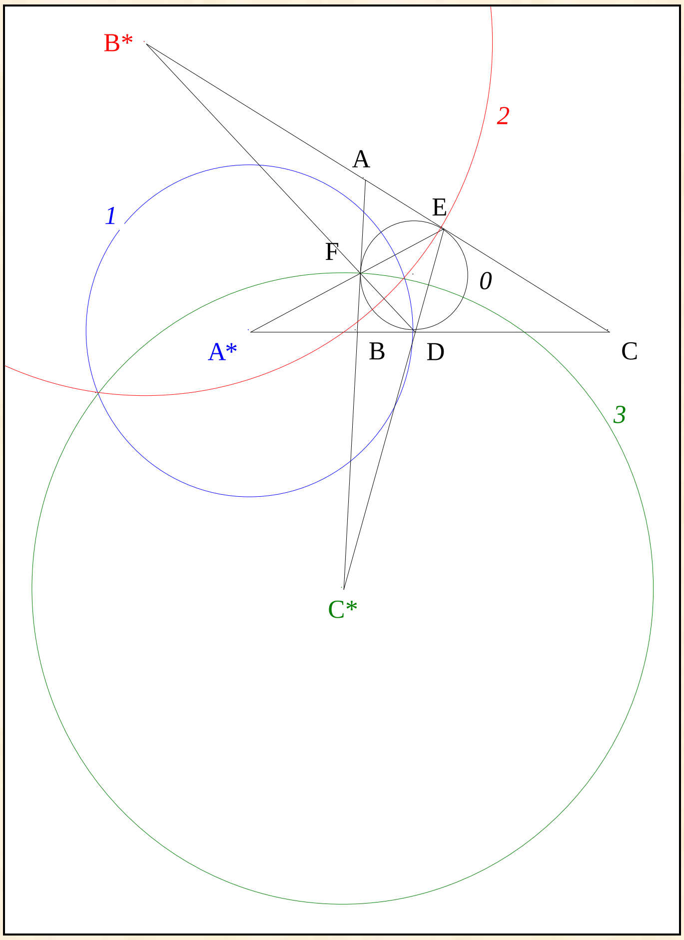
[40] Ayme J.-L., La droite d'Hermes-Soddy ou l'alignement des points Ge-I-L, G.G.G. vol. **6** ; http//perso.orange.fr/jl.ayme

est Fl-rectangle et remercie le Docteur T. J. Fletcher…
Pour terminer, rappelons que ce triangle a fasciné certains géomètres.

2. Les points remarquables de van Lamoen

VISION

Figure :



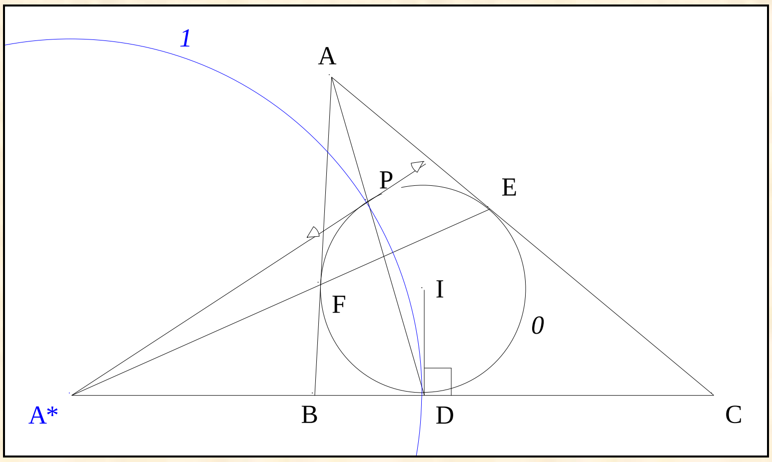
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle inscrit de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	A*, B*, C*	les A, B, C-points de Nobbs de ABC
et	*1*, *2*, *3*	les cercles de centre resp. A*, B*, C* passant resp. par D, E, F.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.[41]

VISUALISATION

---

41 van Lamoen F.

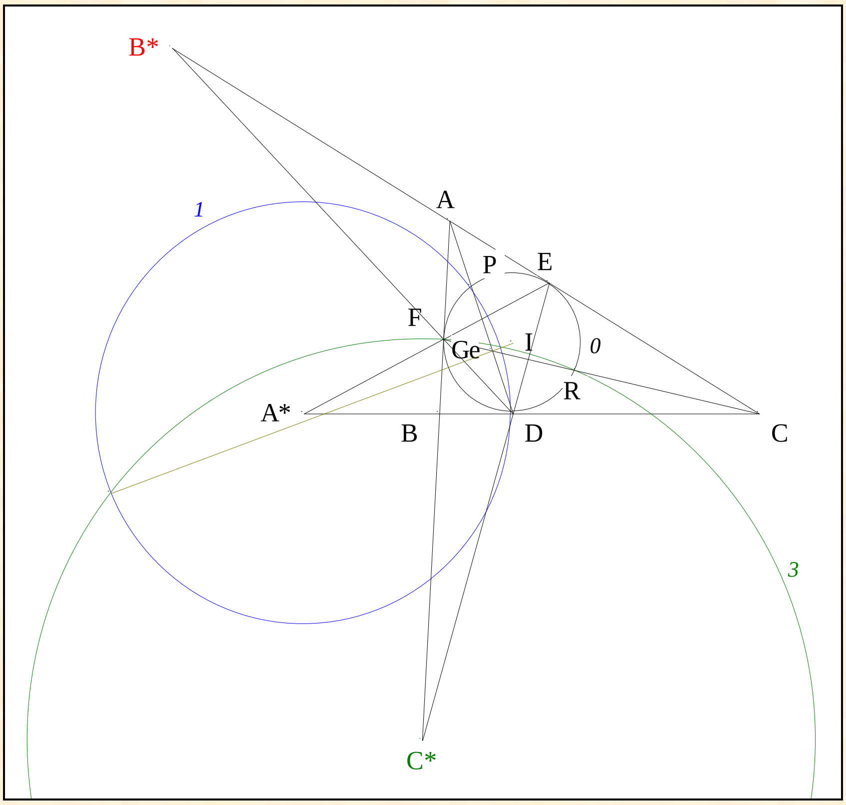


- Notons I le centre de *0*
  et P le second point d'intersection de la A-gergonienne (AD) avec *0*.

- D'après **G. 1.** Deux droites perpendiculaires, scolie, (A*P) est tangente à *0* en P.

- Nous avons : A*D = A*P ;
  en conséquence, *1* passe par P.

- Par définition, *0* et *1* sont orthogonaux.



- Notons R le second point d'intersection de la C-gergonienne (CF) avec *0*
  et Ge le point de Gergonne de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** *3* passe par R
  (2) *0* et *3* sont orthogonaux.

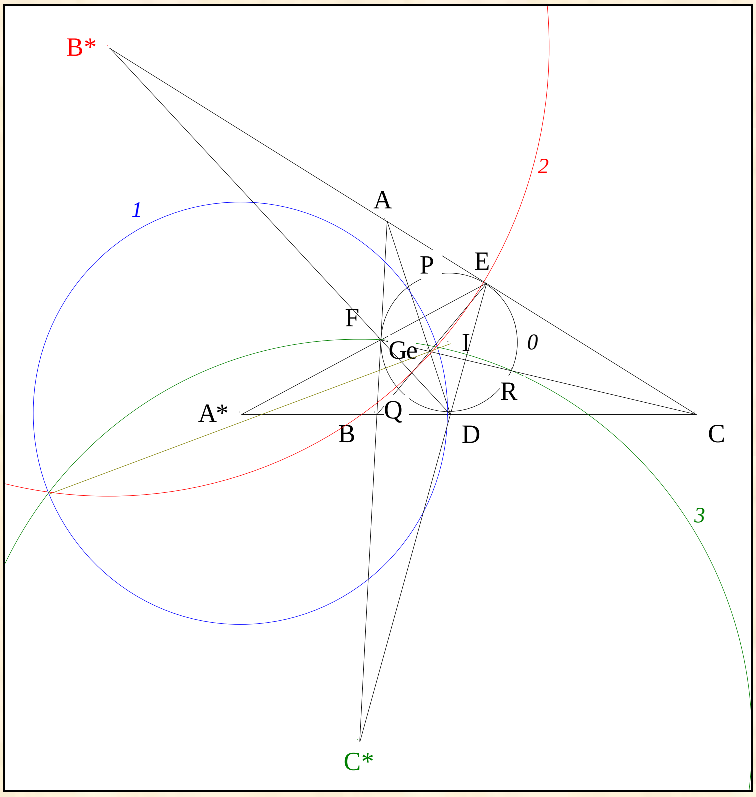
- **Scolie :** Ge étant le point d'intersection des cordes [DP] et [FR],

Ge est un point intérieur à *0*, *1* et *3* ;
en conséquence, *0*, *1* et *3* sont sécants deux à deux.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [42]
  appliqué à *0*, *1* et *3*, Ge est sur la corde commune de *1* et *3*.

- D'après Gaultier "Axe radical de deux de cercles sécants" (Cf. Annexe **3**)
  appliqué à *1* et *3*, I est sur la "corde" commune de *1* et *3*.

- **Conclusion partielle :** (GeI) i.e. la droite de Soddy est l'axe radical de *1* et *3*.



- Notons Q le second point d'intersection de la B-gergonienne (BE) avec *0*.

- **Conclusion partielle :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  (GeI) i.e. la droite de Soddy est l'axe radical de *1* et *2*.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

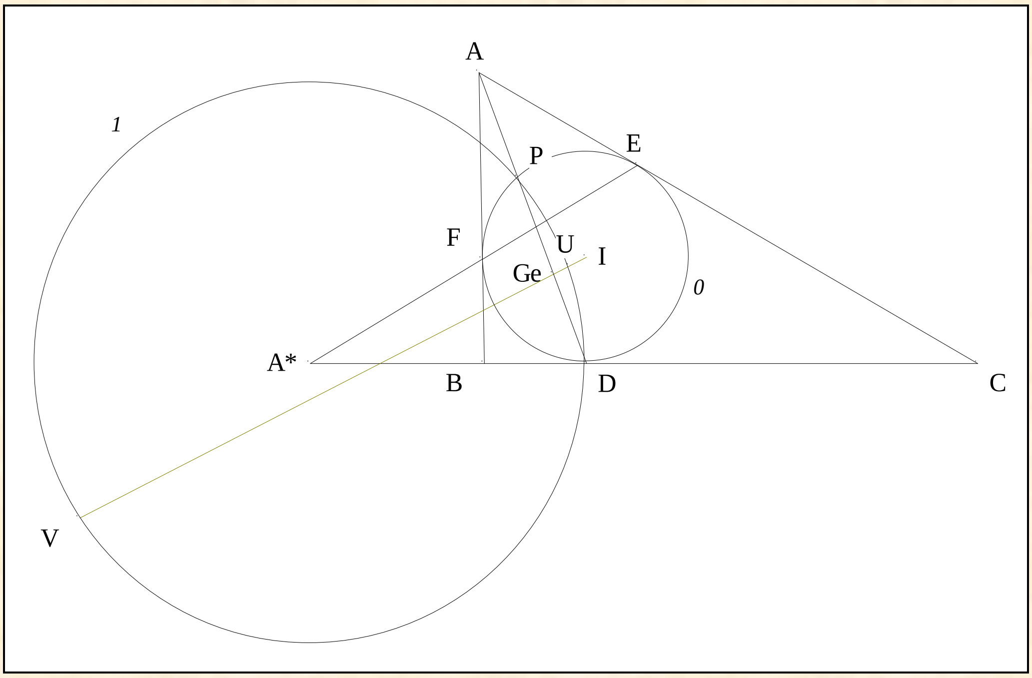
- Notons U, V les deux points de base.

Note historique : Floor van Lamoen a communiqué ce résultat dans une correspondance privée à Éric Danneels. Celui-ci[43] a montré par le calcul que les deux points d'intersection sont sur la droite de Soddy.

Scolies : **(1)** un quaterne harmonique

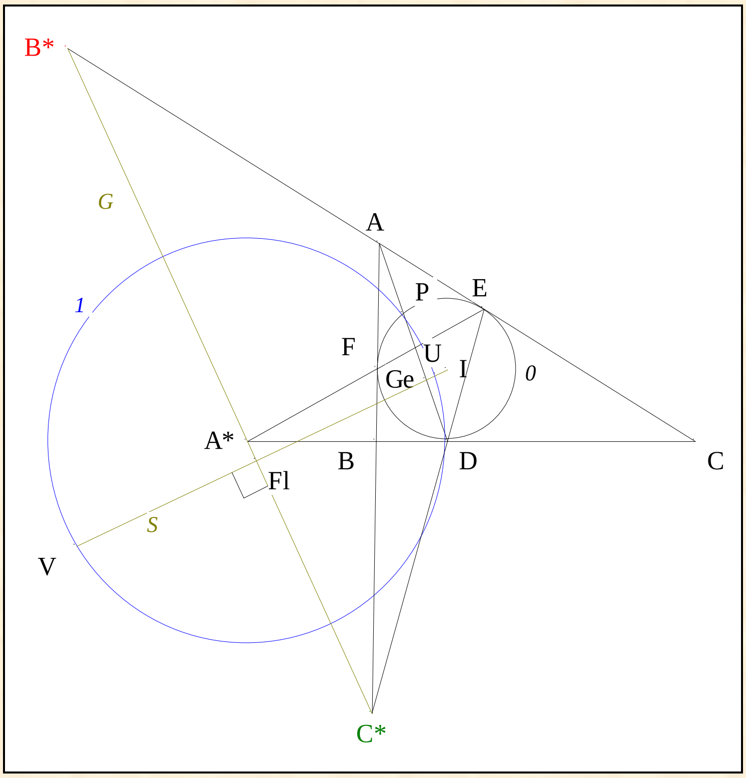
---

42 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
43 Danneels E., Two new points on the Soddy Line, Message *Hyacinthos* # **11948** du 28/12/2005 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- **Conclusion :** d'après **H. 6.** Un quaterne harmonique, le quaterne (I, Ge, U, V) est harmonique.

(2) Avec le point de Fletcher



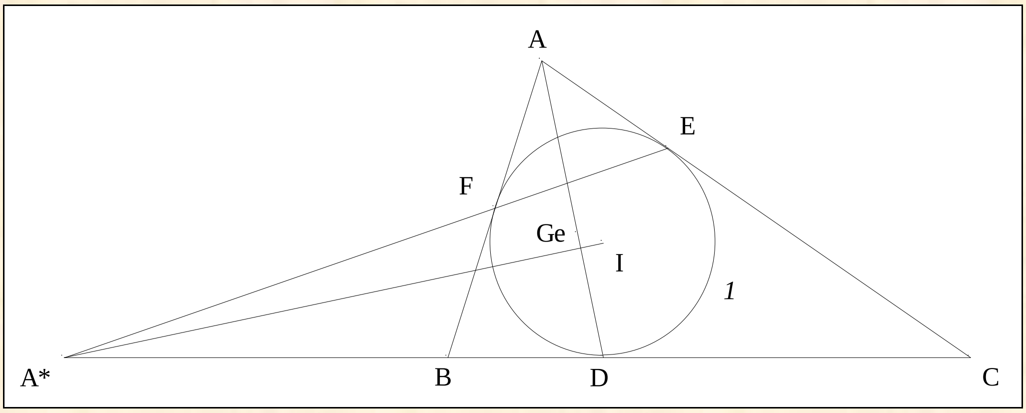
- **Conclusion :** *G* et *S* étant perpendiculaire, le point de Fletcher Fl est le milieu de [UV].

G. APPENDICE

1. Perpendiculaire à une gergonnienne

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
A* le point d'intersection de (EF) et (BC),
et Ge le point de Gergonne de ABC.

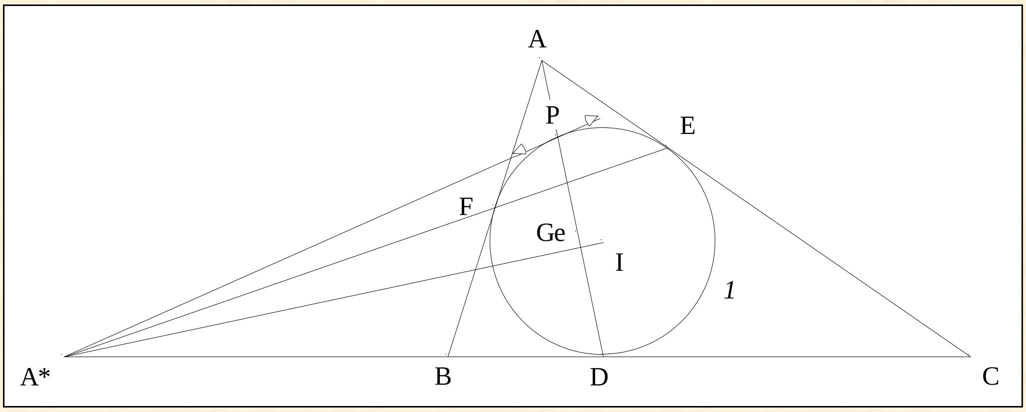
Donné : (AGe) est perpendiculaire à (A*I).[44]

VISUALISATION

- **Scolie :** A, Ge et D sont alignés.
- A* est sur la polaire de A relativement à *1*.
- A* étant sur la tangente (BC) à *1* en D, A*est le pôle de (AD) relativement à *1* ;
  en conséquence, (A*I) $\perp$ (AD).
- **Conclusion :** (AGe) est perpendiculaire à (A*I).

Scolie : une tangente

[44] Ayme J.-L., Two perpendicular lines, *Mathlinks* du 13/08/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=424246

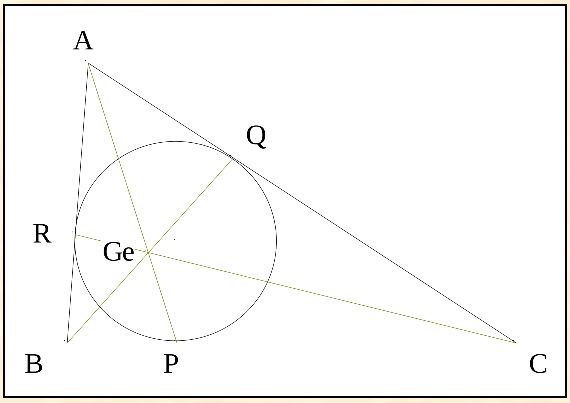


- Notons P le second point d'intersection de (AD) avec *1*.

- **Conclusion :** (A*P) est tangente à *1* en P.

H. ANNEXE

1. Le point de Gergonne [45]



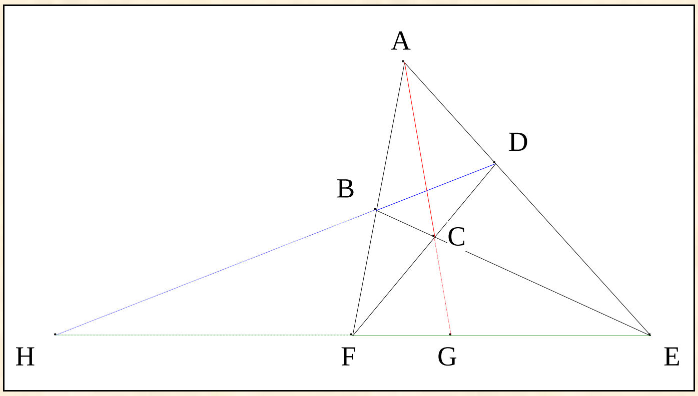
Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC
et P, Q, R les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB).

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Scolie : ce point de concours est "le point de Gergonne de ABC" ;
il est noté Ge et répertorié sous X_7 chez ETC.

2. Diagonales d'un quadrilatère [46]

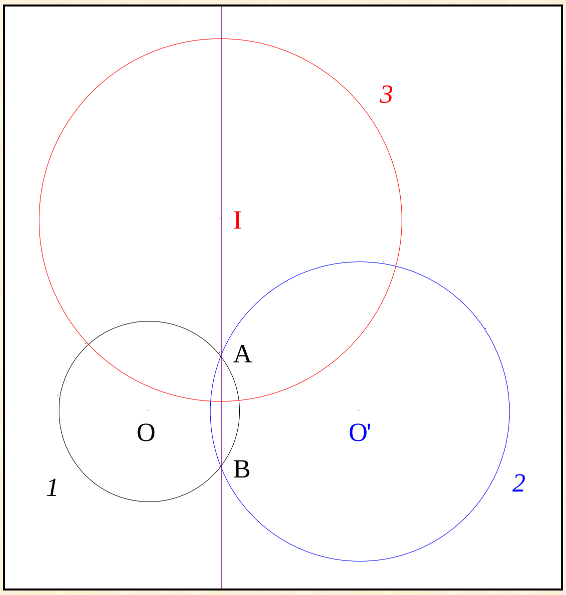
[45] Gergonne, *Annales de Gergonne* **IX** (1818-19).
[46] Pappus, *Collections*, Livre **7**, proposition **131**.



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
et G, H le point d'intersection resp. de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

3. Axe radical de deux cercles sécants [47]

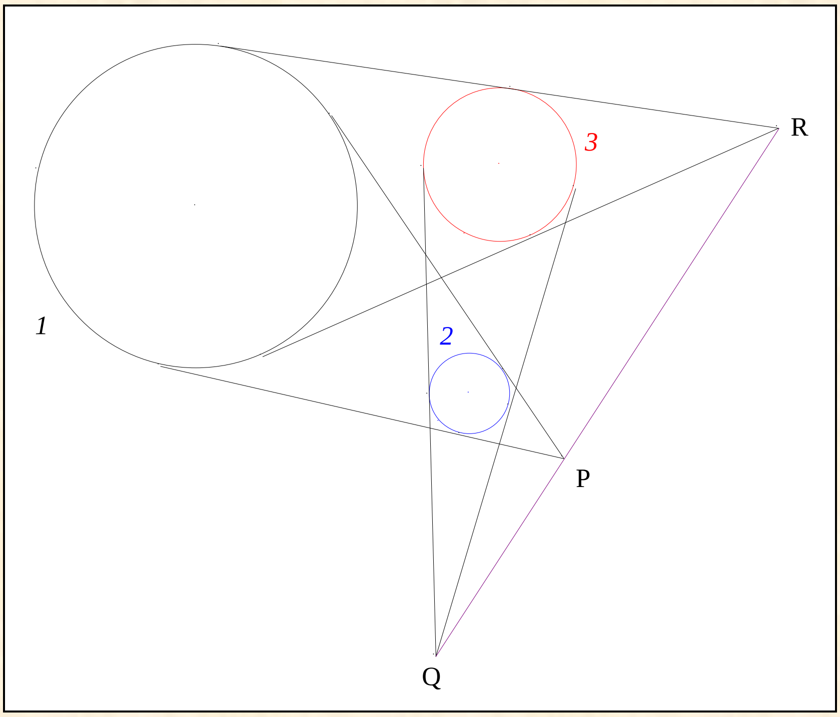


Traits : *1, 2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1, 2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
3 un cercle orthogonal à *2*
et I le centre de *3*.

Donné : I est sur (AB) *si, et seulement si,* *3* est orthogonal à *2.*

4. Le théorème de d'Alembert

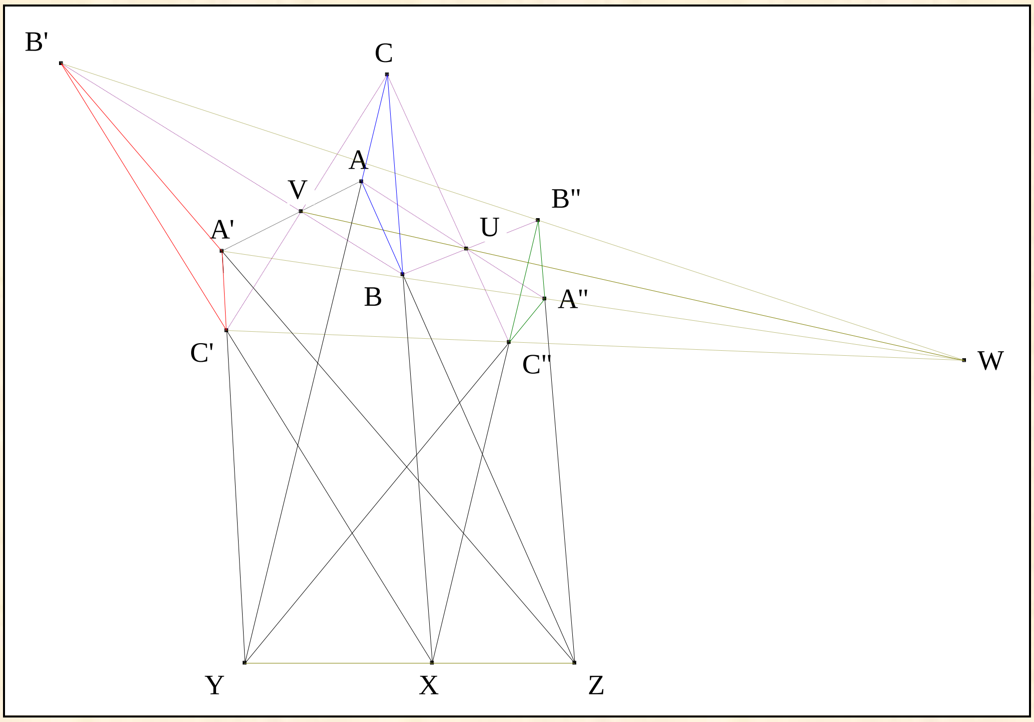
[47] Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, *Cahier* **16** (1813) 124-214.



Traits : *1, 2, 3* trois cercles deux à deux extérieurs
et P, Q, R les points d'intersections des tangentes communes extérieures de *1* et *2*, de *2* et *3*, de *3* et *1*.

Donné : P, Q et R sont alignés.

5. Trois triangles coarguésiens [48]



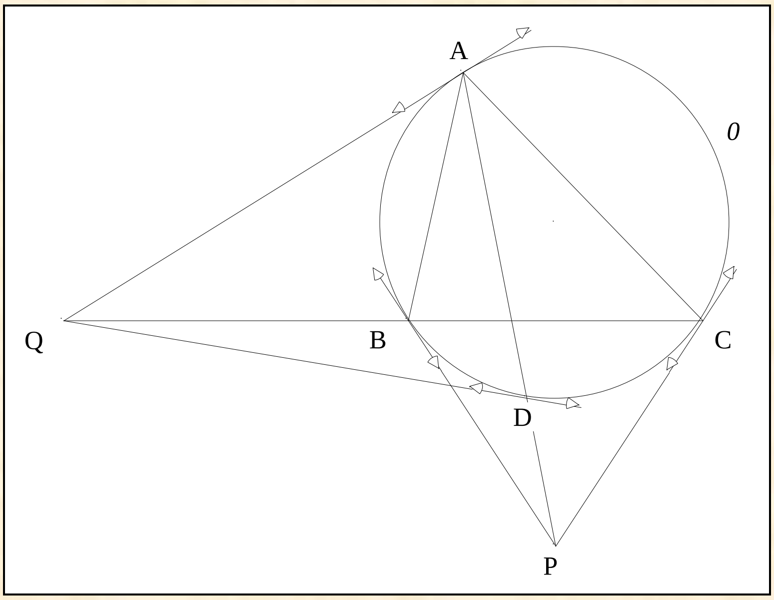
Traits : ABC, A'B'C', A"B"C" trois triangles deux à deux en perspective,

[48] Casey J., A sequel to Euclid, propositions **13** (1881) 77.

	U, V, W	les centres de perspective de ABC et A"B"C", de ABC et A'B'C', de A'B'C' et A"B"C",
et	X, Y, Z	les points de concours de (BC), (B'C'), (B"C"), de (CA), (C'A'), (C"A"), de (AB), (A'B'), (A"B").

Donné : *si*, X, Y et Z sont alignés *alors*, U, V et W sont alignés.

6. Pôles et polaires



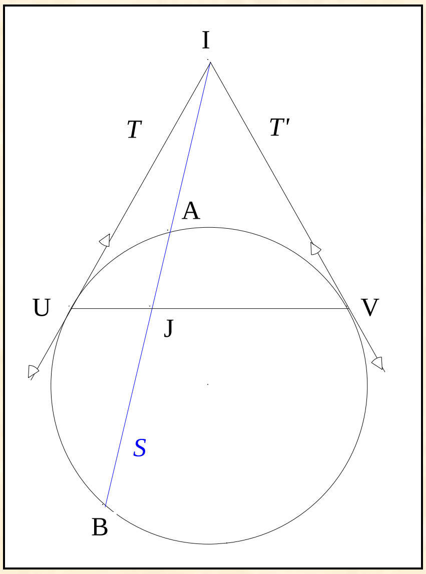
Traits :

	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	P	le point d'intersection des tangentes à *0* resp. en B, C,
	D	le second point d'intersection de (AP) avec *0*
et	Q	le point d'intersection des tangentes à *0* resp. en A, D.

Donné : Q est sur (BC).

7. Un quaterne harmonique [49]

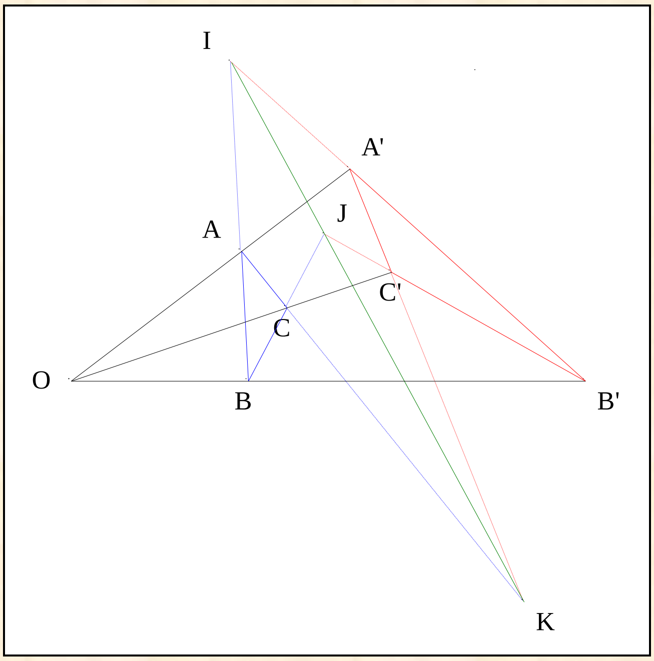
[49] Apollonius, *Collections*, Livre **III**, proposition **37**.



Traits : *0* un cercle,
I un point extérieur à *0*,
T, *T'* deux droites passant par I et tangentes à *0*,
U, V les points de contact resp . de *T*, *T'* avec *0*,
S une droite passant par P,
A, B les deux points d'intersection de *S* avec *0*
et J le point d'intersection de *S* avec [UV].

Donné : le quaterne (A, B, I, J) est harmonique.

8. Le théorème des deux triangles [50]



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
O ce point de concours,
I, J, K les points d'intersection de (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A').

[50] Bosse A., *Perspective et de la Coupe des pierres* (1648).

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si*, I, J et K sont alignés.