LORSQUE

LA DROITE DE SCHROETER

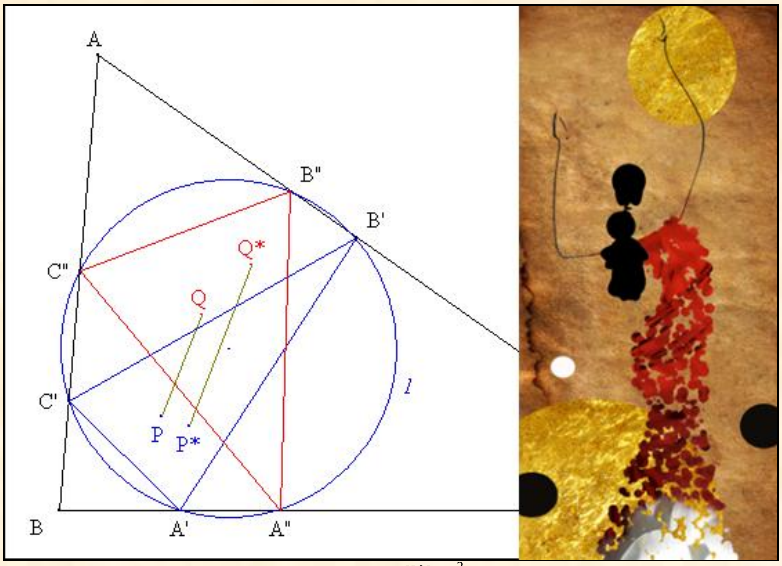
EST PARALLÈLE À

LA DROITE DE BARROW

PREMIÈRE PREUVE SYNTHÉTIQUE

À mon ami,
le professeur Francisco Bellot Rosado

Jean-Louis AYME [1]



Deux parallèles [2]

Résumé. L'auteur présente un problème de la Géométrie du Triangle dont la solution fait appel à des résultats provenant de plusieurs articles.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a problem of the geometry of Triangle, whose solution uses results from several articles.

---

1 Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/10/2011.
2 Image : Danièle Chich, graphiste
Monica Ayme, bailaora Flamenco.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Avertissement. Deux chemins, l'un offrant des taillis les plus rebelles et l'autre des futaies les plus belles, ont permis à l'auteur de vivre la conjonction des deux aspects de son immobile voyage et d'inventer au sens traditionnel de ce terme, un parallélisme… Ravi par son aventure aussi bien extérieure qu'intérieure, l'auteur désire la partager avec les amoureux de cette ancestrale discipline qu'est la Géométrie.
Ses propos à ce sujet n'engagent que lui-même.

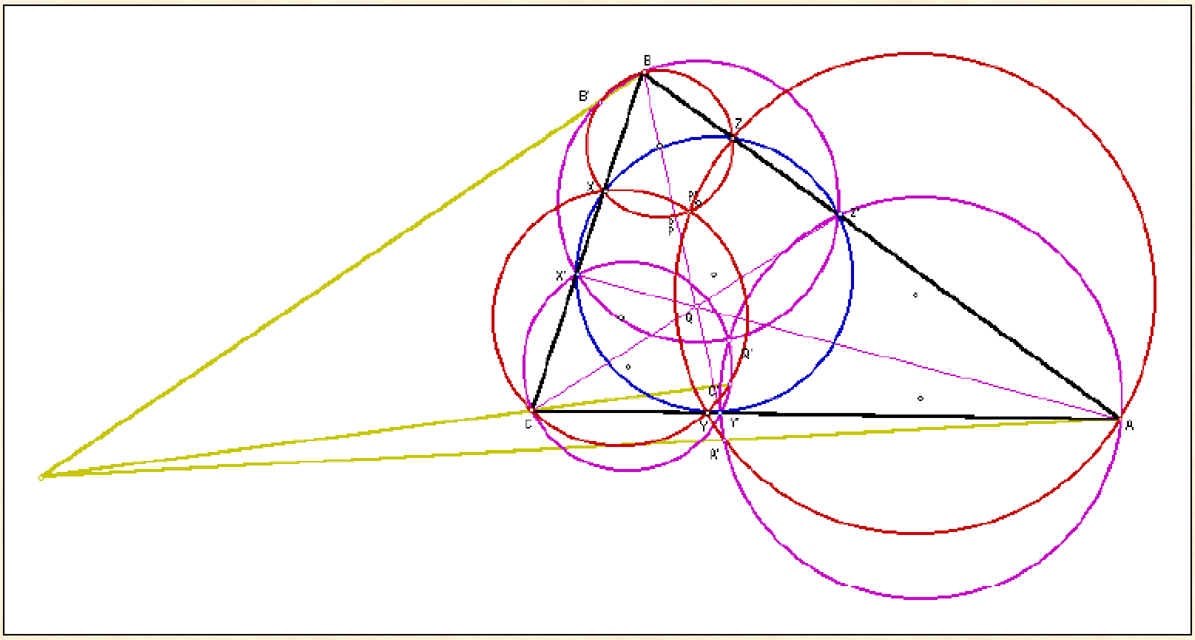
Sommaire

A. PRÉSENTATION

1. A propos de cet article

Suite à un échange de courriels privés, le professeur Francisco Bellot Rosado avait repéré sur un site une demande d'aide mal formulée, accompagnée d'une figure, provenant du Pérou. En demandant sans grand succès quelques éclaircissement à l'auteur de cette demande, le professeur s'est adressé à son ami, le professeur Francisco Garcia Capitan. Tous deux arrivèrent à dépasser le cadre de cette demande relatif en fait au théorème de Terquem et à retrouver les deux premières questions sur quatre d'un problème qui avait été donné en exercice par le professeur Paul Yui de l'université de Floride.
Le professeur Francisco Garcia Capitan ayant trouvé une solution basée sur les coordonnées barycentriques, le professeur Francisco Bellot Rosado ayant "vraiment envie de voir une autre solution" m'a proposé leurs deux questions à résoudre.
Ayant au préalable travaillé sur les prémisses du problème, l'auteur a répondu favorablement à leurs attentes en répondant aux quatre questions dans cet article.

2. Archive du problème et de ses quatre questions



Theorem

Given a point P, let P' be its Miquel associate and Q its cyclocevian conjugate, with Miquel associate Q'.

(a) P' and Q' are isogonal conjugates.

(b) The lines PQ and $P'Q'$ are parallel.

(c) The "second intersections" of the pairs of circles AYZ, $AY'Z'$; BZX, $BZ'X'$; and CXY, $CX'Y'$ form a triangle $A'B'C'$ perspective with ABC.

(e) The "Miquel perspector" in (c) is the intersection of the trilinear polars of P and Q with respect to triangle ABC.

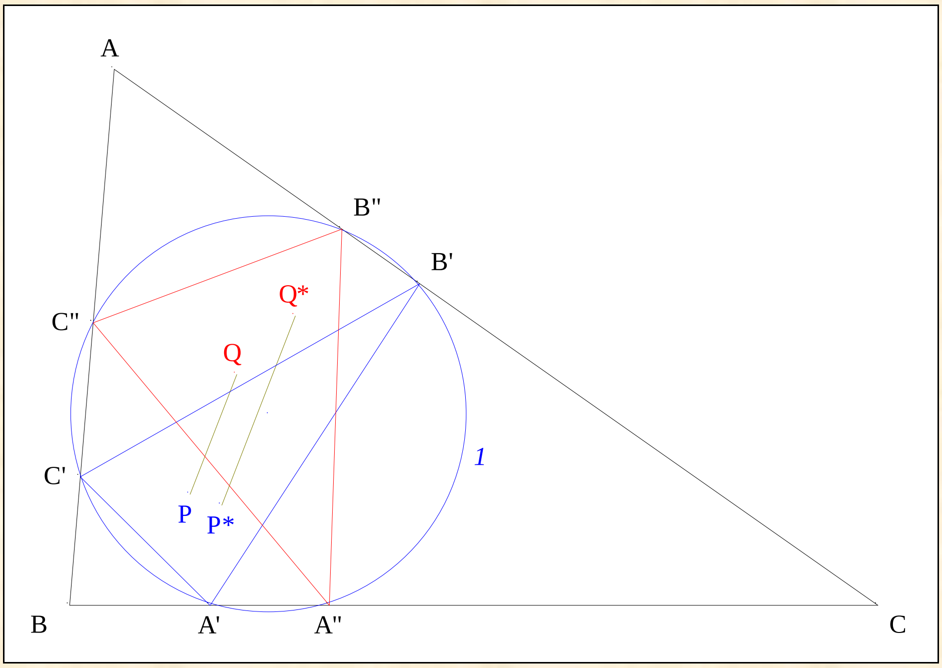
[3]

[3] Yiu P., Introduction to the Geometry of the Triangle, Summer 2001, Department of mathematics Florida Atlantic University, Chapter **5** : Circles I, **5.6.4.** Cyclocevian conjugate, p. 71 ; http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

3. Le résultat reformulé par l'auteur

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	P*	le point de Miquel associé à A'B'C' relativement à ABC,
	1	le cercle circonscrit à A'B'C',
	A", B", C"	les second points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	Q	le conjugué cyclocévien de P associé à *1* relativement à ABC
et	Q*	le point de Miquel associé au triangle A"B"C" relativement à ABC.

Donné : (P*Q*) est parallèle à (PQ).

B. DE LA DROITE DE SCHROETER

À

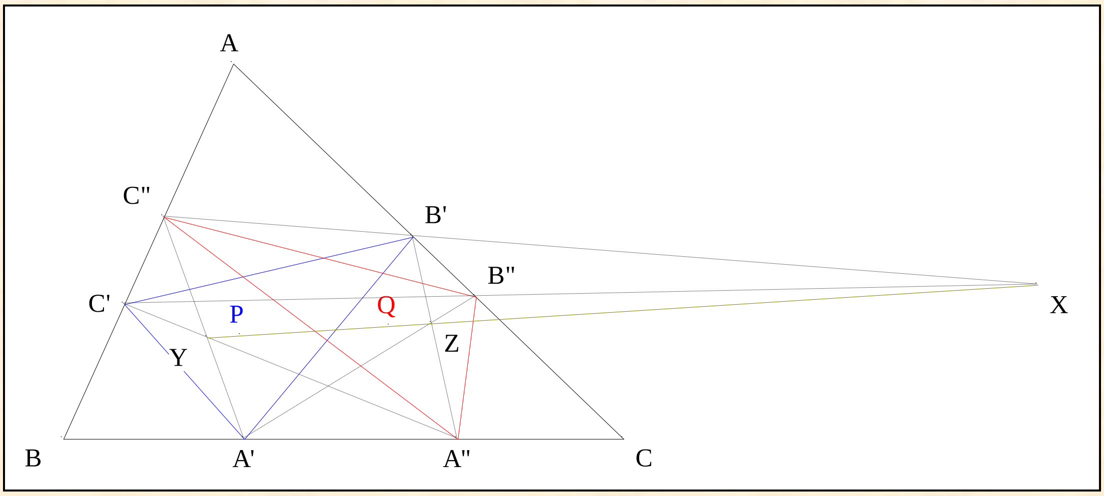
LA DROITE DE TERQUEM

On peut dans chaque cas,
se laisser guider par l'esprit du problème
dont le discernement mène promptement au but.

1. La droite de Schroeter

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P, Q	deux points,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	A"B"C"	le triangle Q-cévien de ABC
et	X, Y, Z	les points d'intersection resp. de (B'C") et (B"C'), (C'A") et (C"A'), (A'B") et (A"B').

Donné : P, Q, X, Y et Z sont alignés.

Terminologie : **(1)** X, Y et Z sont resp. "les A, B, C-points de Schroeter de ABC"

(2) (PQXYZ) est "la droite de Schroeter de ABC".

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peur être vue sur le site de l'auteur [4].

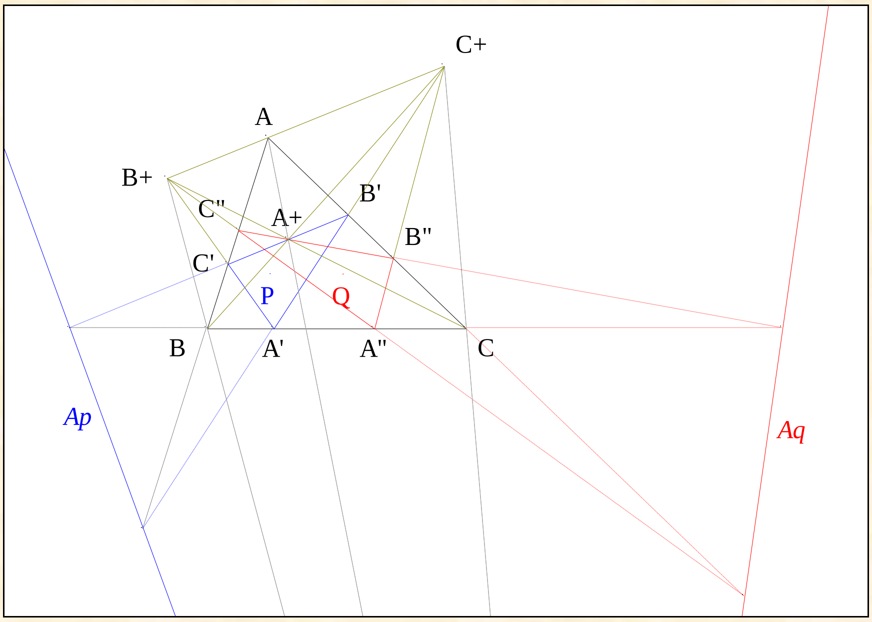
[4] Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 2-4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Note historique : cette situation qui généralise celle d'Heinrich Eduard Schroeter a été proposée comme exercice par Georges Papelier [5] en 1927 et reproposé en troisième position dans la liste de Darij Grinberg [6] de 2003.

2. Deux arguésiennes

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points,
A'B'C', A"B"C" les triangles resp. P, Q-céviens de ABC,
A+B+C+ le triangle latéral de A'B'C' et A"B"C",
et *Ap*, *Aq* les arguésiennes resp. de A'B'C' et ABC, A"B"C" et ABC,

Donné : (AA+), (BB+), (CC+), *Ap* et *Aq* sont concourantes [7].

Terminologie : *Ap*, *Aq* sont les polaires trilinéaires resp. de P, Q relativement à ABC.

Commentaire : les preuves synthétiques de ce résultat ainsi que de l'alignement A, B+ et C+ peuvent être vue sur le site de l'auteur [8].
Ce résultat est un début de réponse à la question **d** du problème de Paul Yiu.

---

[5] Papelier G., Rapport anharmonique, *Exercices de Géométrie Moderne*, Paris (1927), réédition J. Gabay (1996), n° **78**, p. 62

[6] Grinberg D., Some projective properties of cevian triangles, Message *Hyacinthos* # **8743** du 28/11/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

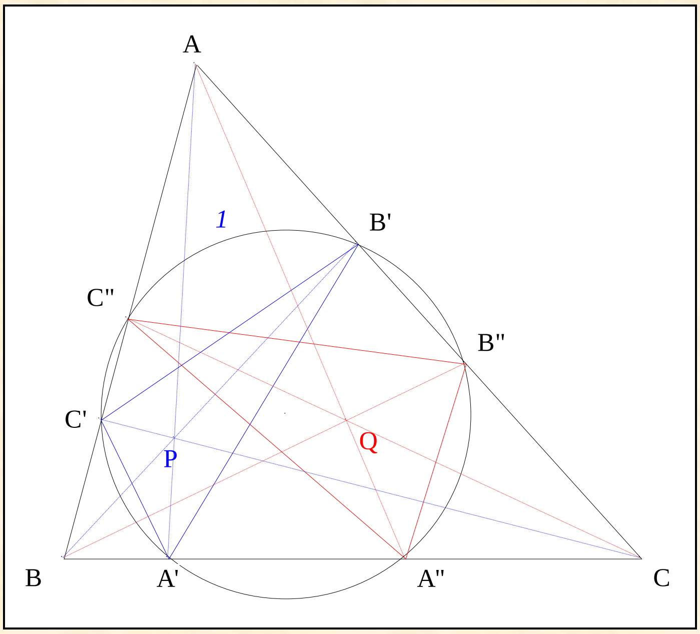
[7] Ayme J.-L., Four triangles, Message *Hyacinthos* du 30/05/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[8] Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 21-23, 7-8 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

3. Le théorème de Ferriot-Terquem

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
1 le cercle circonscrit à A'B'C',
A", B", C" les second points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et Q le point d'intersection de (BB") et (CC").

Donné : A"B"C" est le triangle Q-cévien de ABC. [9]

Terminologie : **(1)** *1* est "le cercle P-cévien de ABC"

(2) Suite à Giacome Candido de Pise [10],
P et Q sont "les points de Ferriot-Terquem de ABC relativement à *1* ".

(3) Q est "le conjugué cyclocévien de P de ABC relativement à *1* ".

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peur être vue sur le site de l'auteur [11].

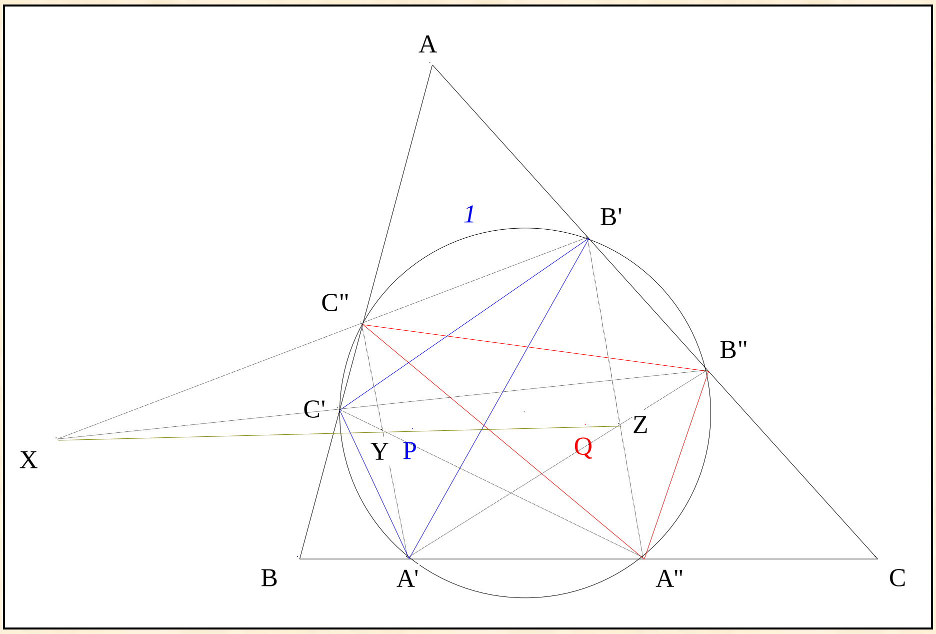
---

[9] Terquem O., *Nouvelles Annales* **1** (1842) 403
[10] Candido G. (1871-1941), *Nouvelles Annales* (1900) 251
[11] Ayme J.-L., A new point on the Euler line, G.G.G. vol. **5**, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

4. La droite de Ferriot-Terquem

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
X, Y, Z les points d'intersection resp. de (B'C") et (B"C'), (C'A") et (C"A'), (A'B") et (A"B').

Donné : P, Q, X, Y et Z sont alignés.

Terminologie :

(1) X, Y et Z sont resp. "les A, B, C-points de Terquem de ABC"

(2) (PQXYZ) est "la droite de Ferriot-Terquem de ABC".

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat
est une particularisation de **B. 1.** La droite de Schroeter.
Notons que ces points auront un rôle crucial dans la preuve de la question **b** du problème de Paul Yiu.

C. DU CERCLE DE SCHMIDT

À

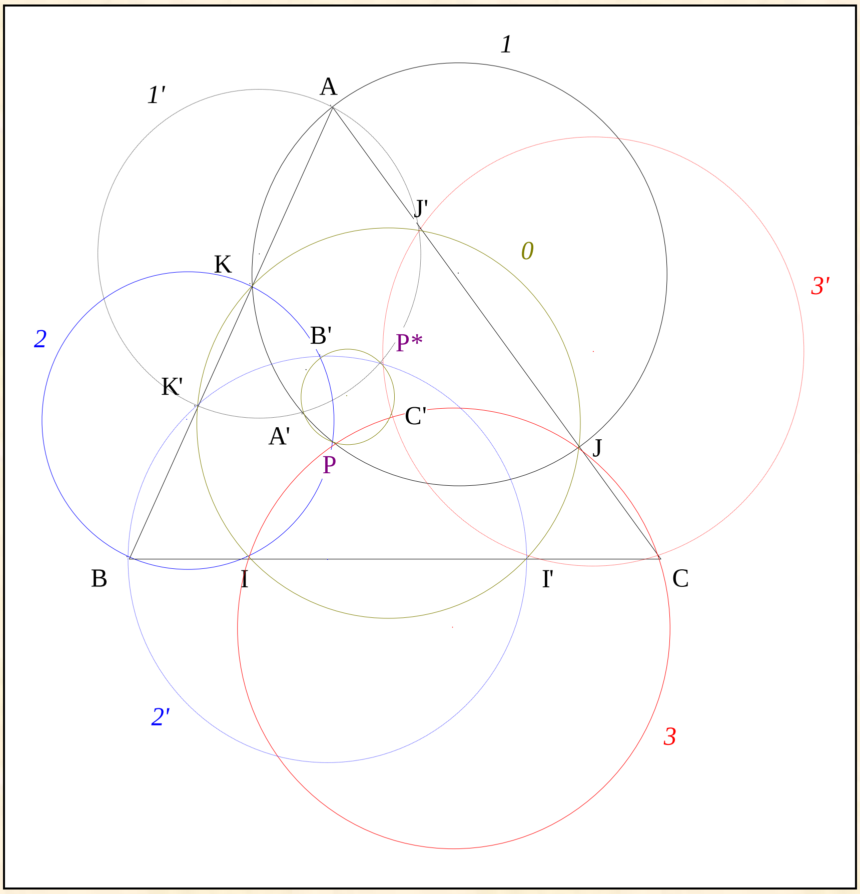
LA DROITE DE BARROW

On peut dans chaque cas,
se laisser guider par l'âme du problème
dont l'intuition mène facilement au but.

1. Le cercle d'Eckart Schmidt

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I, J, K	trois points resp. de (BC), (CA), (AB),
	1, *2*, *3*	les trois cercles circonscrits resp. aux triangles AJK, BKI, CIJ,
	P	le point de Miquel de ABC relativement à *1*, *2*, *3*,
	0	le cercle circonscrit au triangle IJK,
	I', J', K'	les seconds points d'intersection de *0* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	1', *2*', *3*'	trois cercles circonscrits resp. aux triangles AJ'K', BK'I', CI'J',

	P*	le point de Miquel de ABC relativement à *1*', *2*', *3*'
et	A', B', C'	les seconds points d'intersection resp. de *1* et *1*', *2* et *2*', *3* et *3*'.

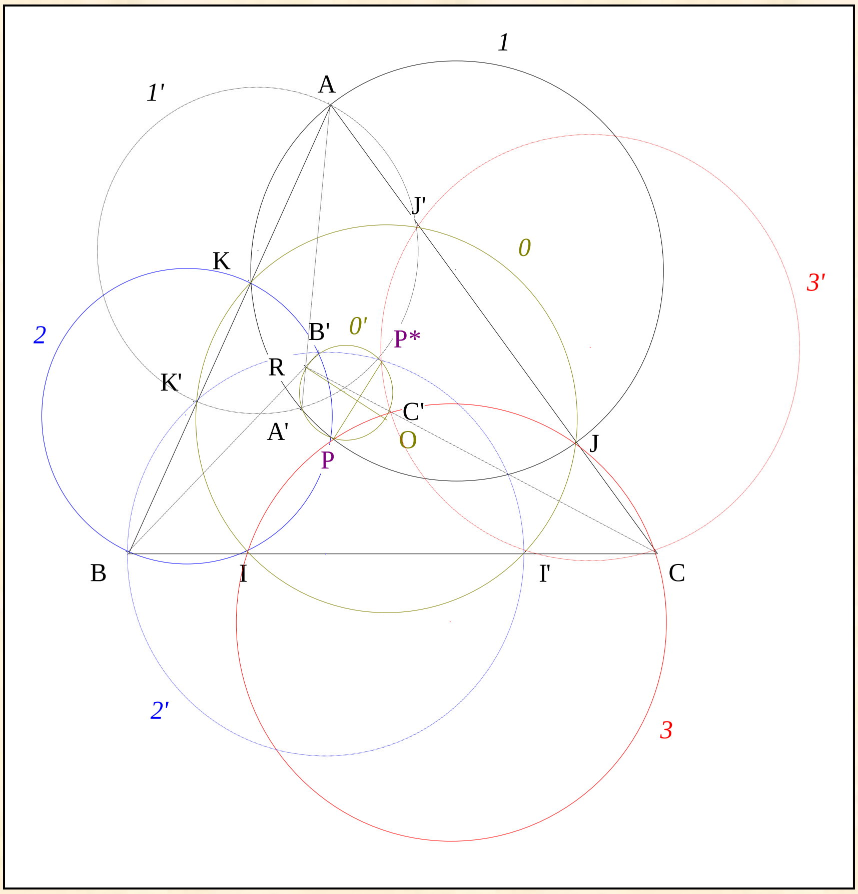
Donné : A', B', C', P et P* sont cocycliques . [12]

Terminologie : ce cercle est "le cercle de Schmidt de ABC relativement à P ".

Commentaire : les preuves synthétiques de ce résultat et **des résultats suivants** peuvent être vues sur le site de l'auteur [13].

Note historique : Eckart Schmidt a prouvé analytiquement ce résultat.

Scolies :



- Notons *0'* le cercle passant par A', B', C', P, P*,
  O le centre de *0*
  et R le point d'intersection de (BB') et (CC').

- **Conclusions :** **(1)** O est sur *0'*

  (2) Les triangle ABC et A'B'C' sont perspectifs de centre R [14]

[12] Schmidt E., Circumcenters of Residual Triangles, *Forum Geométricorum* Vol. **3** (2003) 207-214 ; http://forumgeom.fau.edu/
[13] Ayme J.-L., L'équivalence de David Barrow, G.G.G. vol. **13**, p. 8-15 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[14] C'est la question **c** du problème de Paul Yiu

(3) R est sur *0'*

(4) (OR) est une droite diamétrale de *0'*

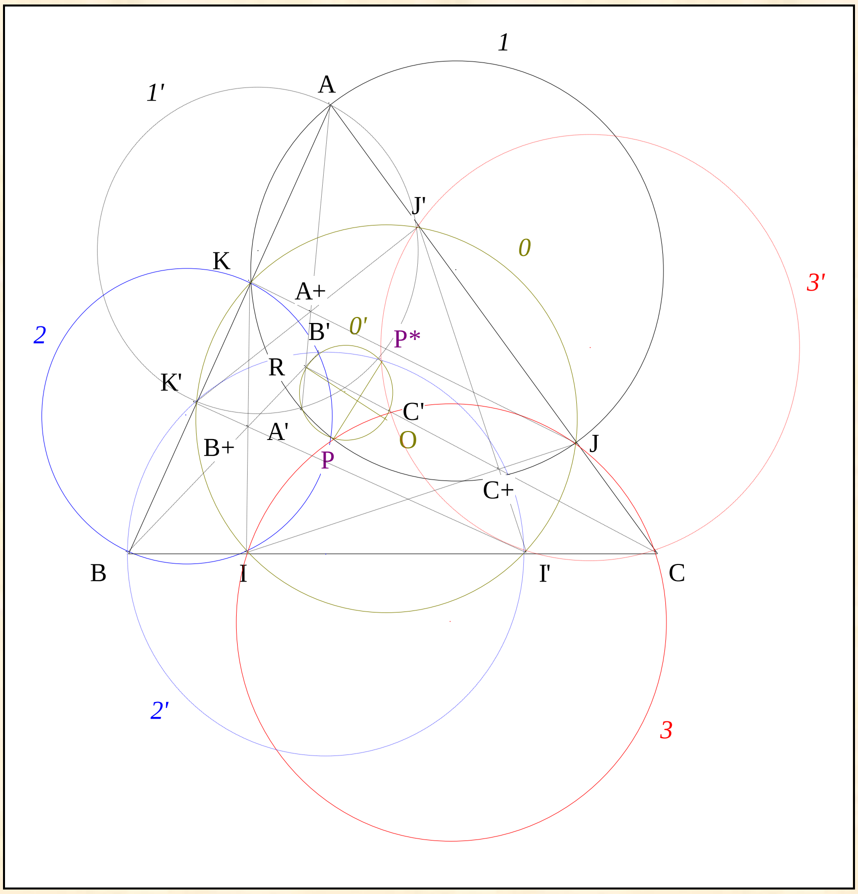
(5) (OR) est la médiatrice de [PP*] ou encore (OR) ⊥ (PP*).

Commentaire : notons que ce résultat participera à la preuve de la question **b** du problème de Paul Yiu.

2. Avec le triangle latéral

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A+B+C+ le triangle latéral de IJK et I'J'K'.

Donné : A+B+C+ et ABC sont perspectif de centre R.

VISUALISATION

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [15]

[15] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

appliqué aux cercles *0*, *1* et *1'*, les cordes [JK], [ARA'] et [J'K'] sont concourantes en A+ ;
en conséquence, A+ est sur [ARA'].

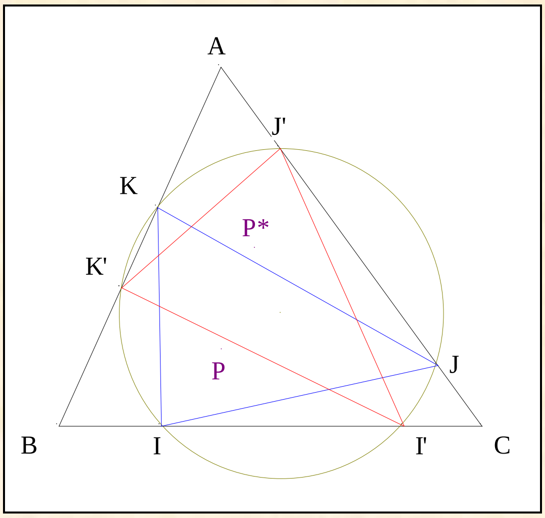
- Mutatis mutandis, nous montrerions que B+ est sur [BRB']
  C+ est sur [CRC'].

- **Conclusion :** A+B+C+ et ABC sont perspectif de centre R.

3. La droite de Barrow

VISION DOUBLE

Figure :



Traits : ABC un triangle,
IJK, I'J'K' deux triangles inscrits dans ABC,
P le point de Miquel de ABC relativement à IJK
et P* le point de Miquel de ABC relativement à I'J'K'.

Donné : I, J, K, I', J' et K' sont cocycliques
si, et seulement si,
P et P* sont deux points isogonaux de ABC. [16]

Terminologie : (PP*) est "la droite de Barrow de ABC relativement à P".

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [17].
C'est la généralisation de la question **a** du problème de Paul Yiu.

[16] Barrow D. F., A theorem about isogonal conjugates, *American Mathematical Monthly*, vol. **20**, **8** (1913) 251-252 ;
[17] Ayme J.-L., L'équivalence de David Barrow, G.G.G. vol. **13**, p. 8-15 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

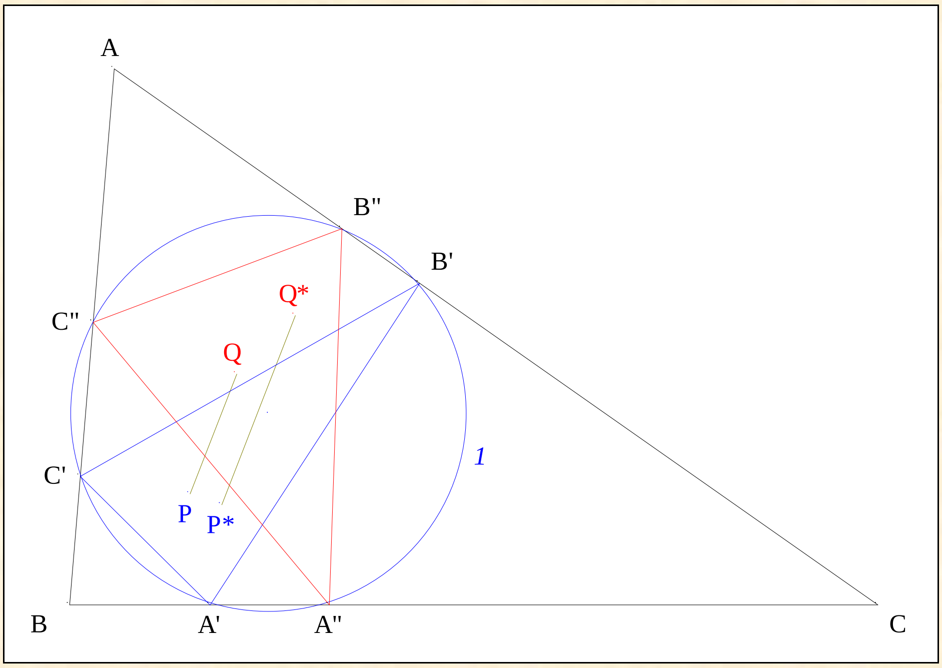
D. LA PREUVE

Il faut en tout cas,
se laisser guider par l'esprit et l'âme du problème
qui, par dépassement respectif, mènent inexorablement à un être gémétrique.

1. La preuve

VISION

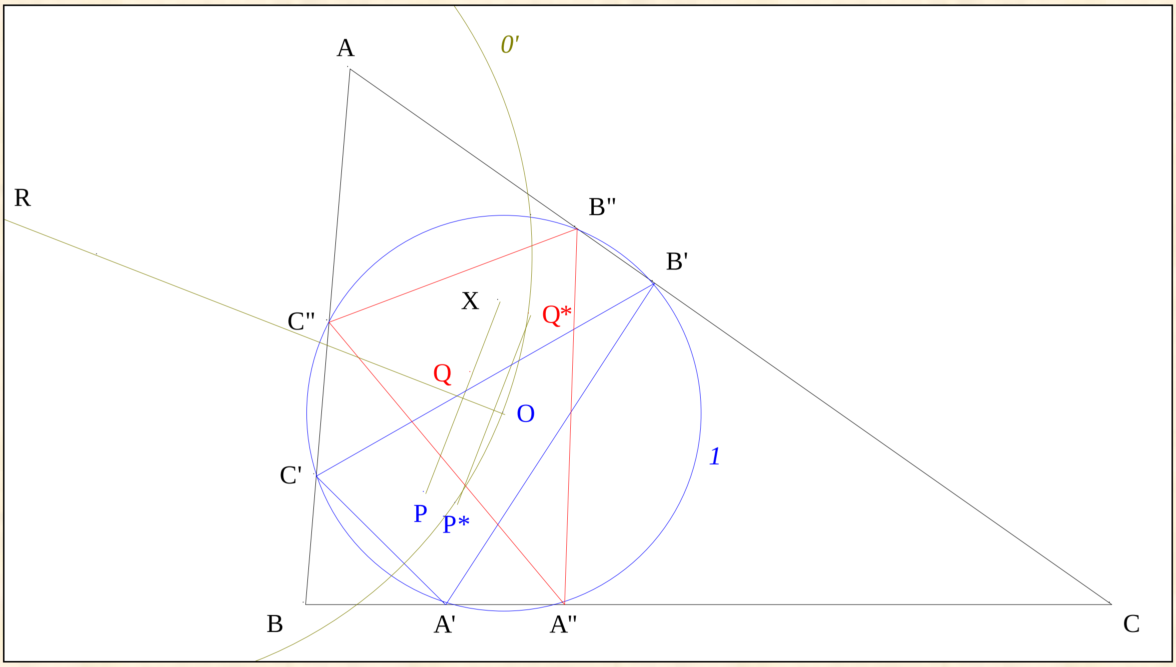
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	P*	le point de Miquel associé à A'B'C' relativement à ABC,
	0	le cercle circonscrit à A'B'C',
	A", B", C"	les second points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	Q	le conjugué cyclocévien de P associé à *1* relativement à ABC
et	Q*	le point de Miquel associé au triangle A"B"C" relativement à ABC.

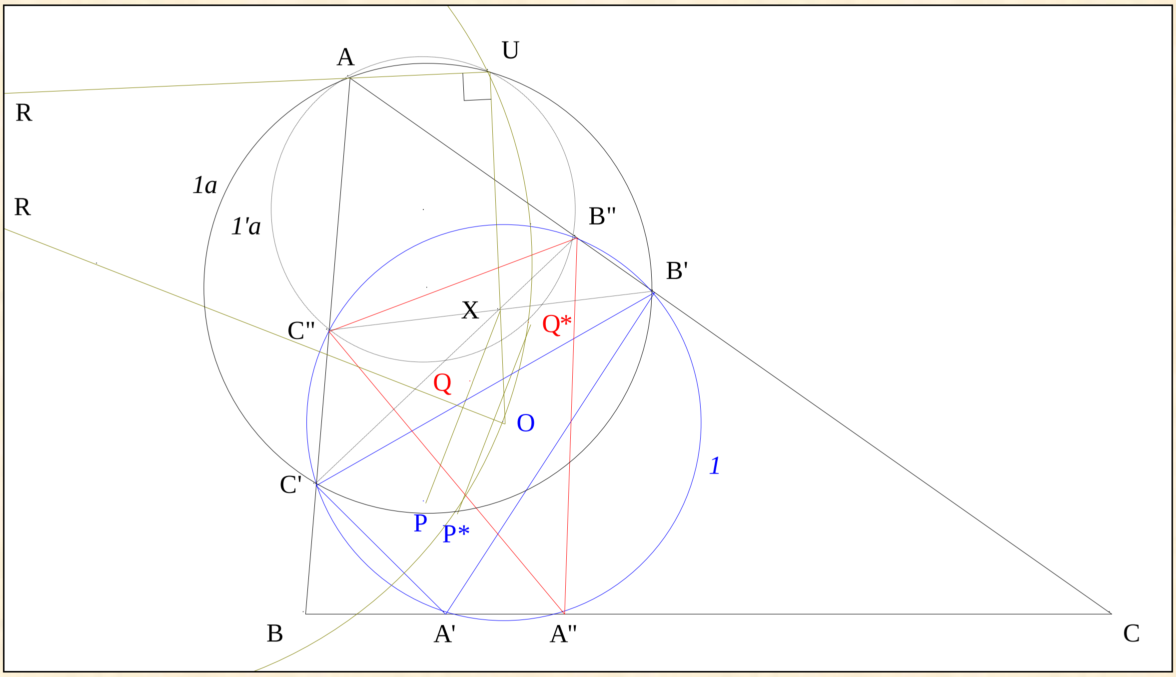
Donné : (PQ) est parallèle à (P*Q*).

VISUALISATION



- Notons O le centre de *1*,
  0' le cercle de Schmidt de ABC relativement à P ; il passe par P* et Q* ;
  et R l'antipôle de O relativement à *1*.

- **Conclusion partielle :** d'après **C. 1.** Scolie **5**, (OR) ⊥ (P*Q*).



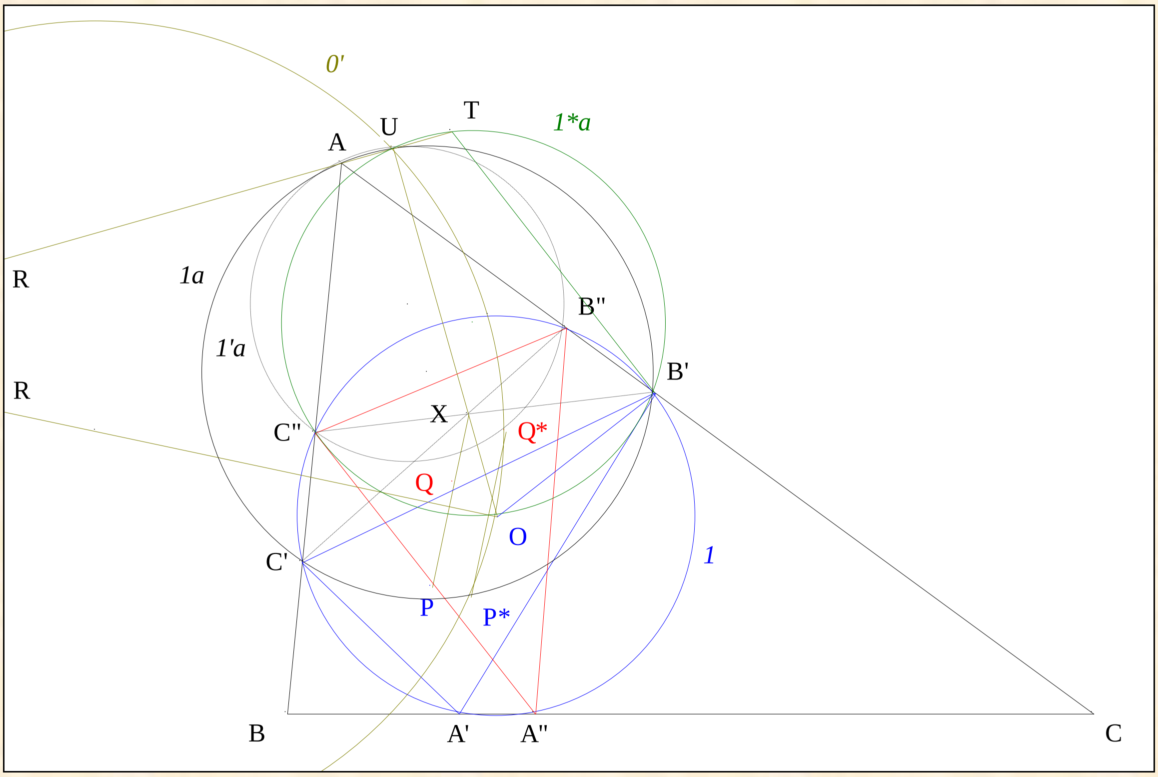
- Notons X le A-point de Terquem de ABC (Cf. p. 8).
  1a, *1'a* les cercles circonscrits resp. aux triangles AB'C', AB"C"
  et U le second point d'intersection de *1a* et *1'a*. [18]

- D'après **B. 4.** La droite de Ferriot-Terquem, P, Q et X sont alignés.

- D'après **C. 1.** Le cercle d'Eckart Schmidt, *0'* passe par U.

[18] Ce point U n'est d'autre que le point A' de la figure de la page 10.

- D'après **C. 1.** Scolie **2**, (AU) passe par R et (OU) ⊥ (AU).

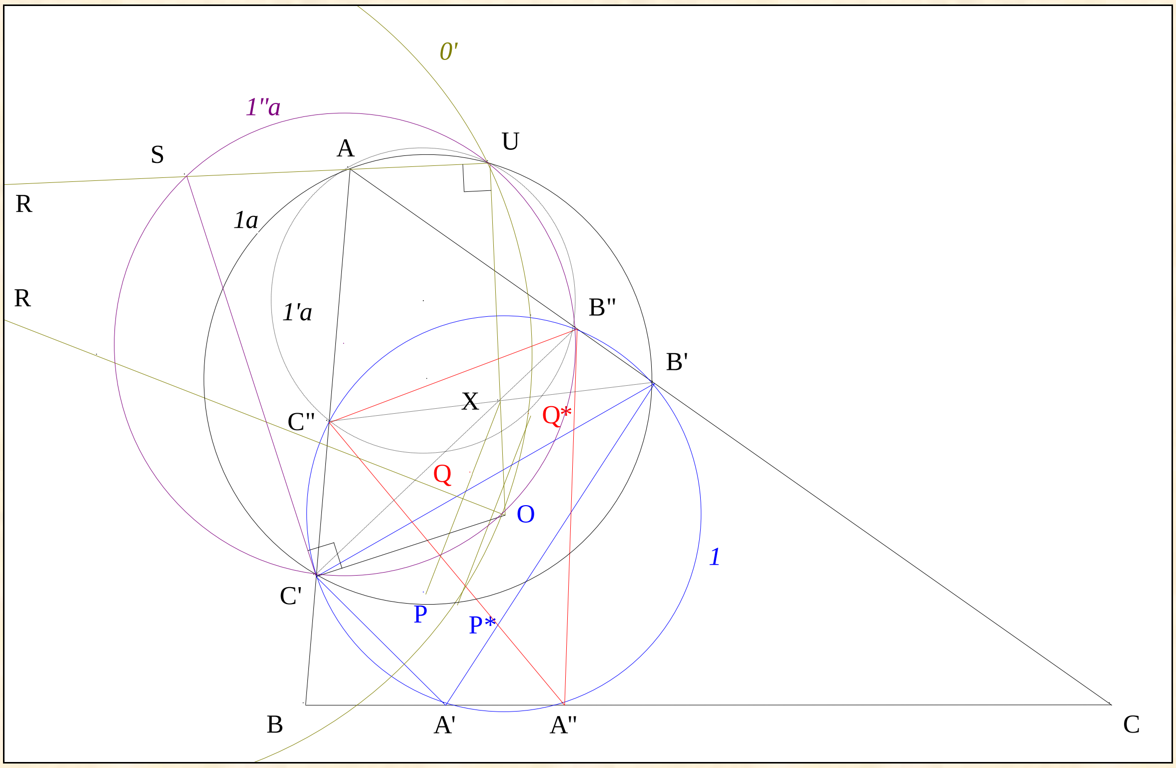


- Notons *1*a* le cercle circonscrit au triangles UOB'
  et T le second point d'intersection de (AU) avec *1*a*.

- **Scolies :** **(1)** *1*a* est le cercle de diamètre [OT]
  (2) (UB') est la tangente à *1* en B'.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" [19]
  appliqué au triangle ATB' avec U sur (AT), B' sur (TB') et B" sur (AB'), *1'a* , *1*a* et *1* sont concourants ;
  en conséquence, *1*a* passe par C".

[19] Ayme J.-L., Auguste Miquel, élève de l'institution Barbet à Paris en 1836, G.G.G. vol. **6**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

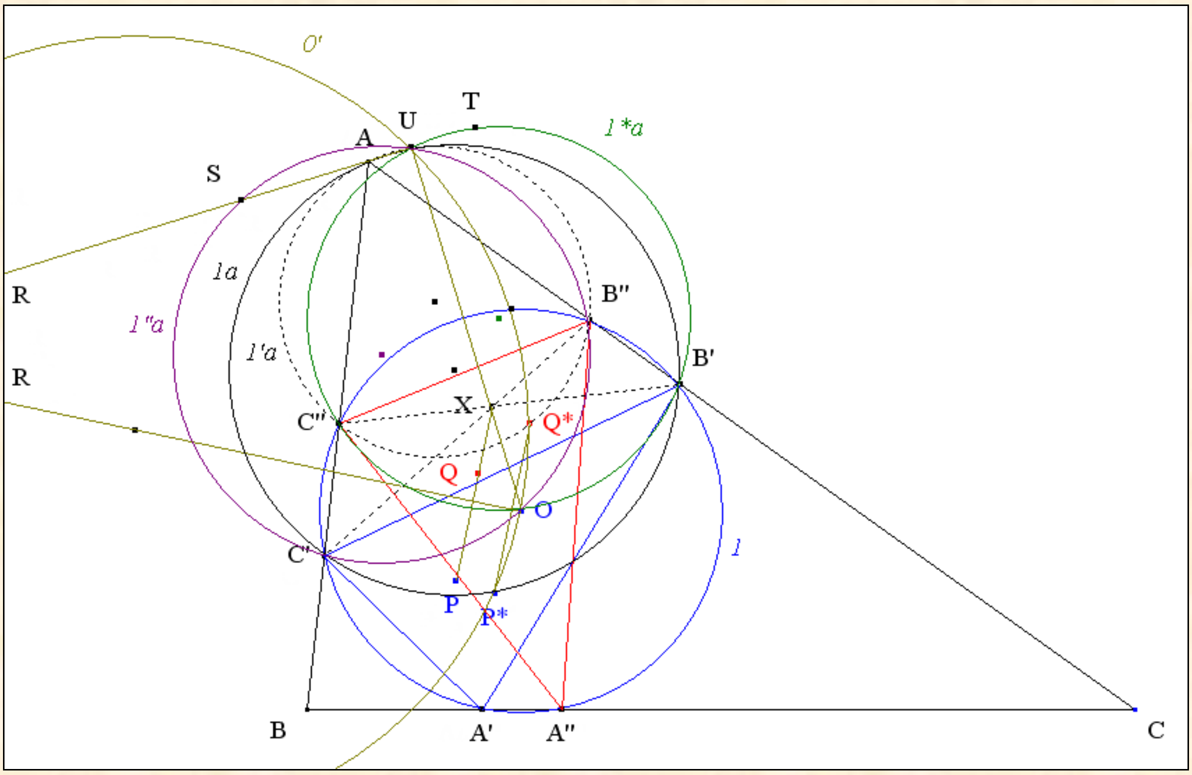


- Notons *1"a* le cercle circonscrit au triangles UOC'
  et S le second point d'intersection de (AU) avec *1"a*.

- **Scolies :** **(1)** *1"a* est le cercle de diamètre [OS]
  (2) (SC') est la tangente à *1* en C'.

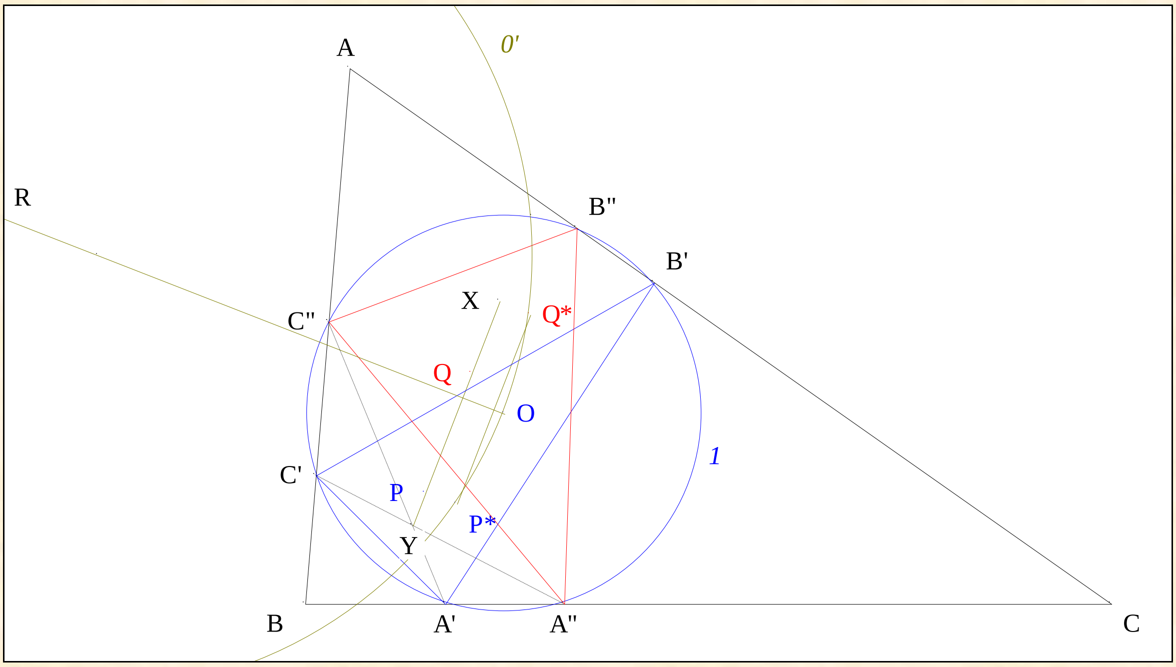
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" [20]
  appliqué au triangle ASC' avec U sur (AS), C' sur (SC') et C" sur (AC'), *1'a* , *1"a* et *1* sont concourants ;
  en conséquence, *1"a* passe par B".

[20] Ayme J.-L., Auguste Miquel, élève de l'institution Barbet à Paris en 1836, G.G.G. vol. **6**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [21]
  appliqué aux cercles *1"a* , *1*a* et *1*, les cordes [OU], [B'C"] et [B"C'] sont concourantes en X ;

- **Conclusion partielle :** X est sur l'axe radical de *0'* et *1*.



- Notons Y le B-point de Terquem de ABC (Cf. p. 8).

- D'après **B. 4.** La droite de Ferriot-Terquem, P, Q, X et Y sont alignés.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que Y est sur l'axe radical de *0'* et *1* ;

[21] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- (PQXY) étant l'axe radical de *0'* et *1*, (PQ) ⊥ (OR).
- Rappelons notre première conclusion partielle (Cf. p. 13) : (OR) ⊥ (P*Q*) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (PQ) // (P*Q*).

- **Conclusion :** (PQ) est parallèle à (P*Q*).

Commentaire : c'est la question **b** du problème de Paul Yiu.

2. Au sujet de la question d

le lecteur envisagera le triangle latéral A+B+C+ de A'B'C' et A"B"C"
et se réfèrera à **C. 1.** Scolie **2** (pour le point R) et **C. 2.** Avec le triangle latéral.