THE MIDCIRCLE THEOREM

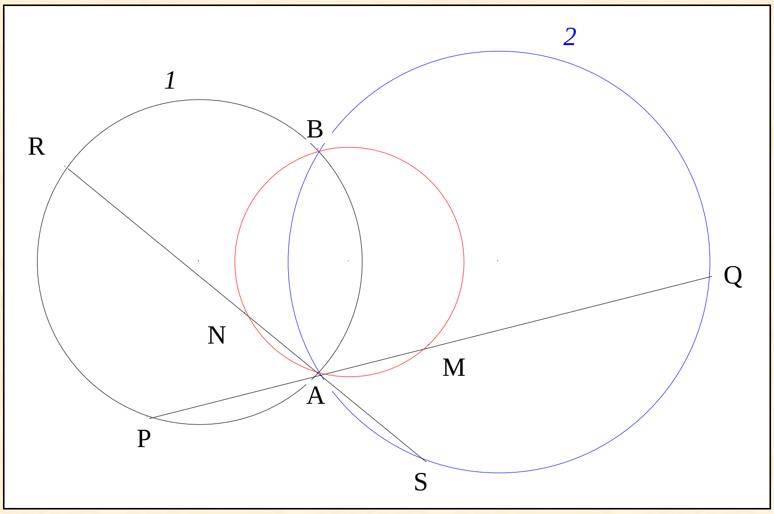
OU

LES CERCLES

DES MILIEUX ET DES RAPPORTS CONSTANTS

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente "le cercle des milieux" ainsi qu'une généralisation "le cercle des rapports constants". Le texte est accompagné d'exemples référencés.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The article presents "the midcircle" and a generalization "the constant reports circle". The text is accompanied by referenced examples.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/10/2013

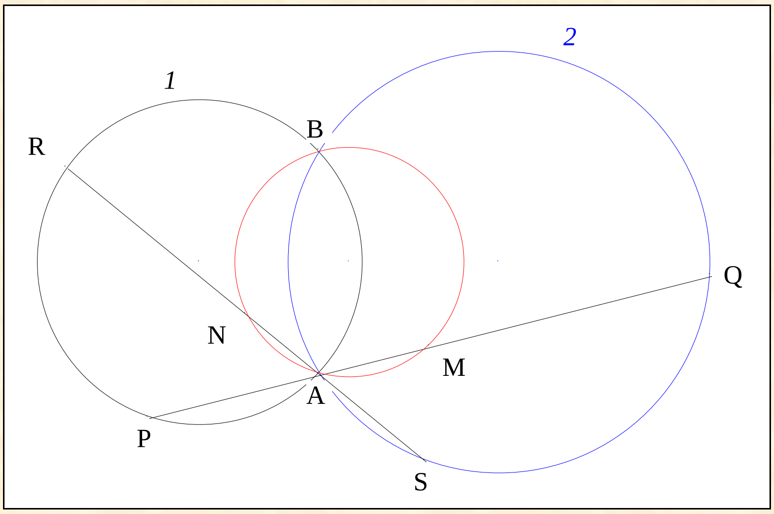
Sommaire

I. LE CERCLE DES MILIEUX

A. PRÉSENTATION

VISION

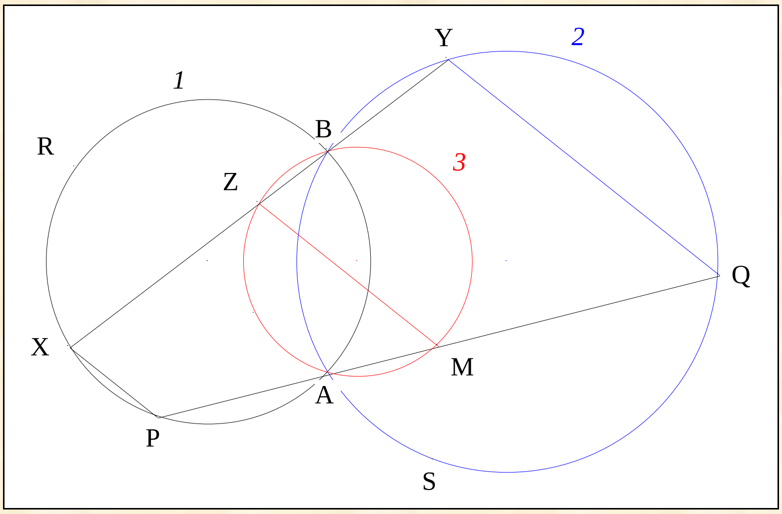
Figure :



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
P, R deux points de *1*,
Q, S les seconds points d'intersection resp. de (AP), (AR) avec *2*
et M, N les milieux resp. de [PQ], [RS].

Donné : M, N, A et B sont cocycliques.

VISUALISATION



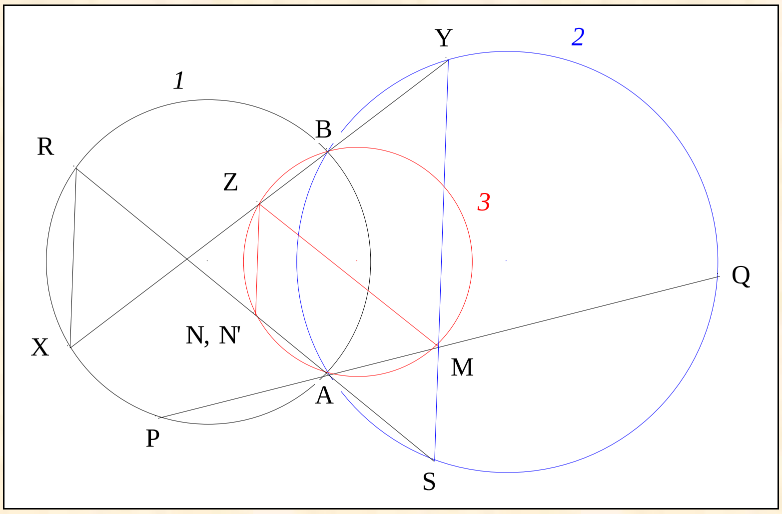
- Notons *3* le cercle passant par A, B, M,
  X un point de *1*

et Y, Z les seconds points d'intersection de (BX) resp. avec *2*, *3*.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (PAQ) et (XBY), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PX) // (QY).

- Les cercles *2* et *3*, les points de base A et B, les moniennes (QAM) et (YBZ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (QY) // (MZ) ;
  par transitivité de la relation //, (PX) // (MZ).

- D'après "La droite des milieux d'un trapèze" appliqué au trapèze PQYX, Z est le milieu de [XY].



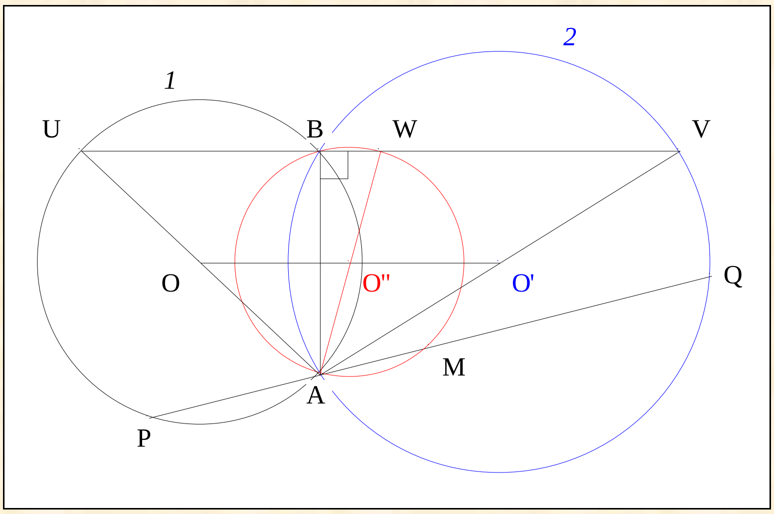
- Notons N' le second point d'intersection de (AR) avec *3*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que N' est le milieu de [RS] ;
  en conséquence, N et N' sont confondus.

- **Conclusion :** M, N, A et B sont cocycliques.

Scolies : **(1)** *3* est "le cercle des milieux des moniennes de *1* et *2* "

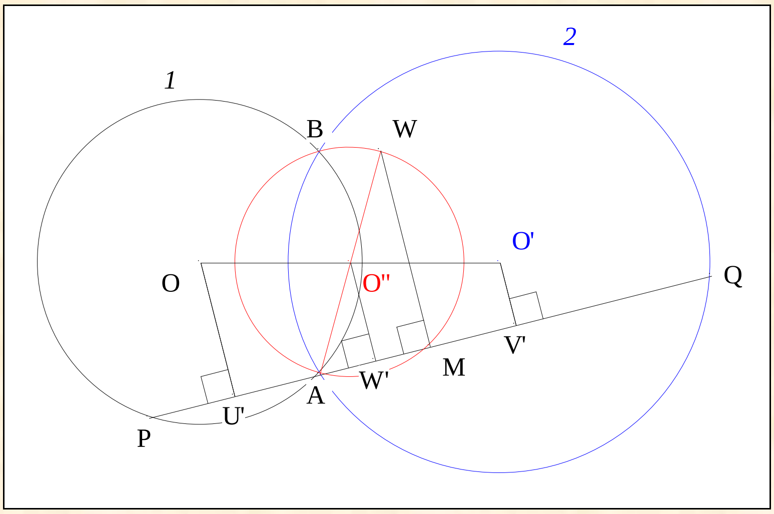
(2) Position du centre de *3*



- Notons O, O', O" les centres resp. de *1*, *2*, *3*
  et U, V, W les antipôles de A resp. à *1*, *2*, *3*.

- *1*, *2* et *3* étant coaxiaux, O, O' et O" sont alignés.

- D'après "Une monienne diamétralement brisée" **(Cf.),**
  (1) U, B, V et W sont alignés
  (2) le triangle BAW est B-rectangle
  (3) O" est le milieu de [AW].



- Notons U', V', W' les pieds des perpendiculaires issues resp. de O, O', O" sur (PQ).

- Nous avons : (OU'), (O"W'), (WM) et (O'V') sont parallèles entre elles.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliquée au triangle AMW, W' est le milieu de [AM].

- **Conclusion :** d'après "La droite des milieux d'un trapèze" appliqué au trapèze U'V'O'O, O" est le milieu de [OO'].

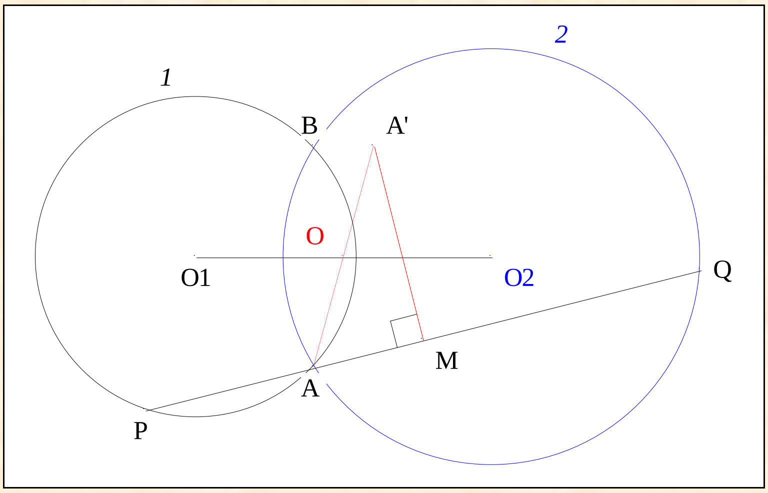
(3) Le résultat reste valide au cas de tangence.

B. EXEMPLES

1. Deux perpendiculaires

VISION

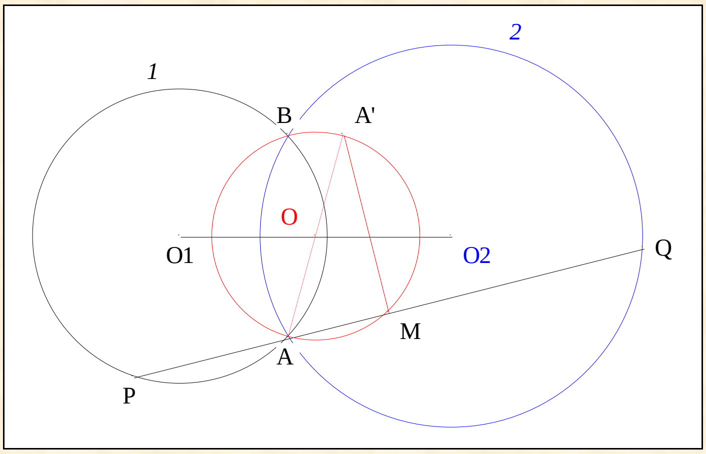
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O1, O2	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	P	un point de *1*,
	Q	le second point d'intersection de (AP) avec *2*,
	M, O	les milieux resp. de [PQ], [O1O2]
et	A'	le symétrique de A par rapport à O.

Donné : (A'M) est perpendiculaire à (PQ). [2]

VISUALISATION



- Notons *3* le cercle des milieux de *1* et *2* ; il a pour centre O et passe par A, B, M.

---

2 Two circles and perpendicular segments, *Mathlinks* du 22/04/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=145164

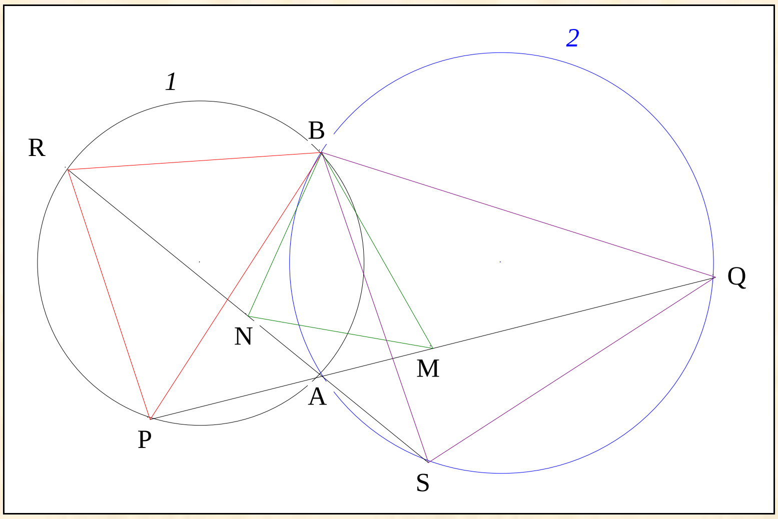
- **Scolie :** A' est sur *1*.

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle,
appliqué au triangle AA'M, (A'M) est perpendiculaire à (PQ).

2. Trois triangles semblables

VISION

Figure :

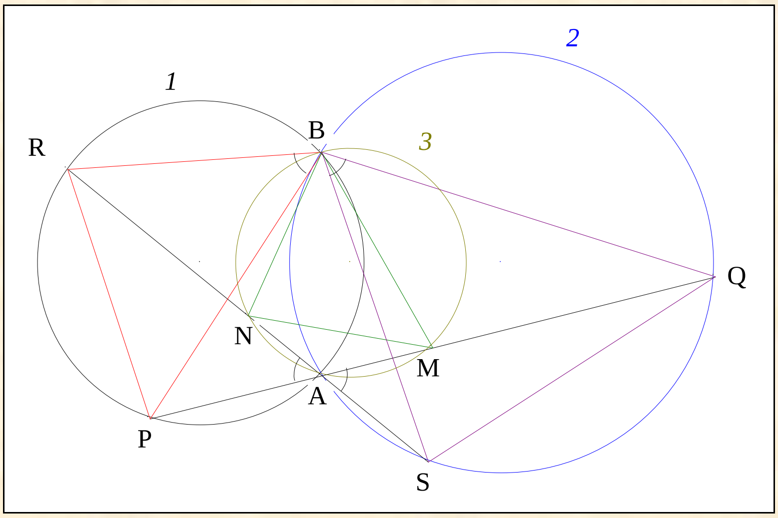


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
P, R deux points de *1*,
Q, S les seconds points d'intersection resp. de (AP), (AR) avec *2*
et M, N les milieux resp. de [PQ], [RS].

Donné : les triangles BPR, BMN et BQS sont semblables.[3]

VISUALISATION

[3] German Mathematical Competition BWM (2005) **2nd** round, Problem **3** ;
Similar triangles ACD, AEF, AMN, AoPS du 01/09/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=320347



- D'après **I. A.** Le cercle des milieux, A, B, M et N sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

- Une chasse angulaire à **Π** près :

  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <RBP = <RAP
  * d'après "Le théorème des angles opposés", <RAP = <SAQ
  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <SAQ = <SBQ
  * le quadrilatère BNAM étant cyclique, <RAP = <NBM.
  * en conséquence, <RBP = <NBM = <SBQ.

- **Conclusion partielle :** les angles correspondants au sommet B de BPR, BMN et BQS sont égaux.

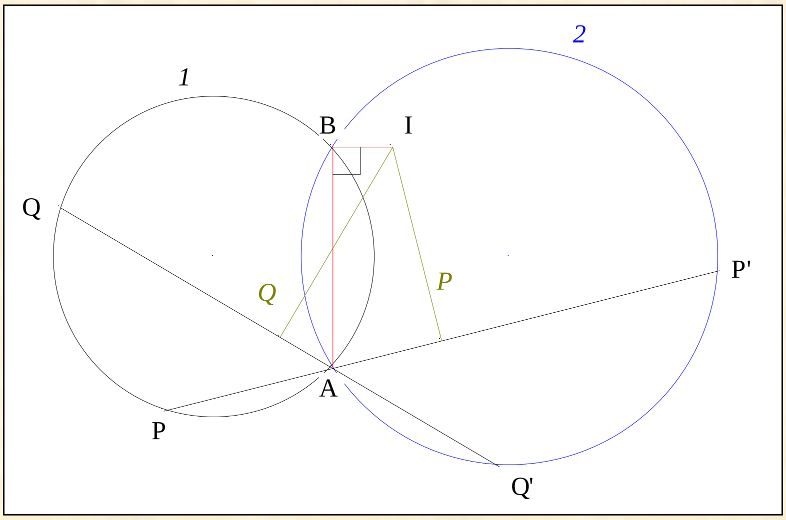
- Mutatis mutandis, les angles correspondants aux sommets P, M et Q de BPR, BMN et BQS sont égaux.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème 180", BPR, BMN et BQS sont semblables.

3. Deux perpendiculaires

VISION

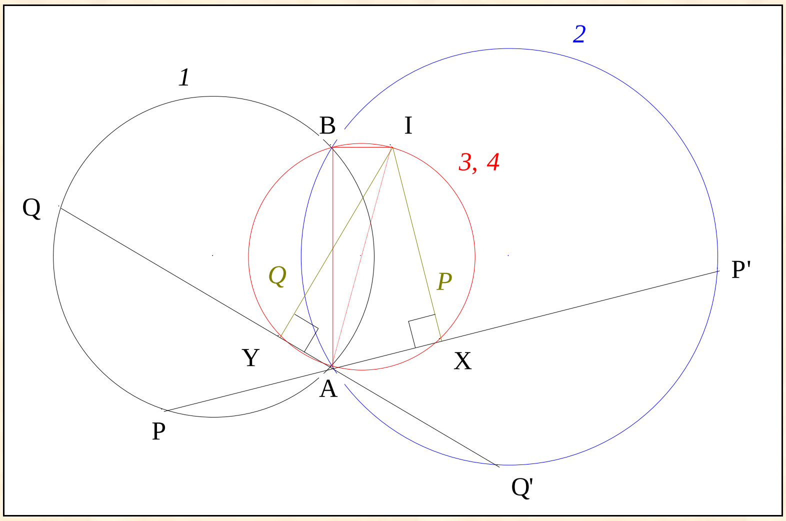
Figure :



Traits : *1, 2* deux cercles sécants,
O1, O2 les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
P, Q deux points de *1*,
P', Q' les seconds points d'intersection de (PA), (QA) avec *2*,
P, *Q* les médiatrices resp. de [PP'], [QQ']
et I le point d'intersection de *P* et *P'*.

Donné : (IA) est perpendiculaire à (IB). [4]

VISUALISATION



- Notons X, Y les milieux resp. de [PP'], [QQ']
  et *3* le cercle des milieux de *1* et *2* ; il passe par A, B, X et Y.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", A, X, Y et I sont cocycliques.
- Notons *4* ce cercle de diamètre [AI].
- *3* et *4* ayant les points A, X et Y en commun, sont identiques. .
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle"

---

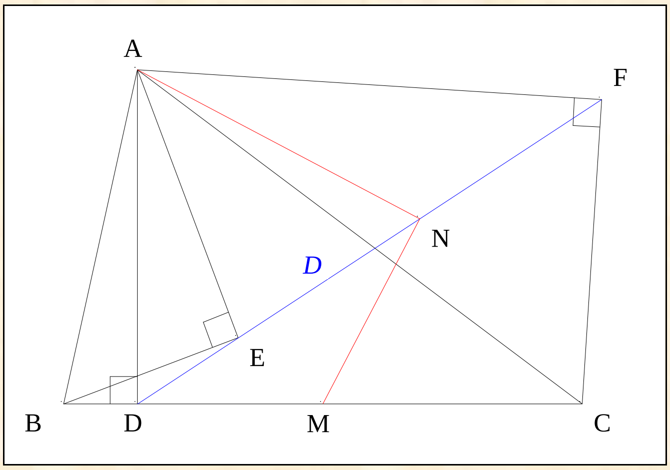
4 Two circles, AoPS du 17/02/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=332316

appliqué au triangle ABI, (IA) est perpendiculaire à (IB).

4. APMO 1998

VISION

Figure :

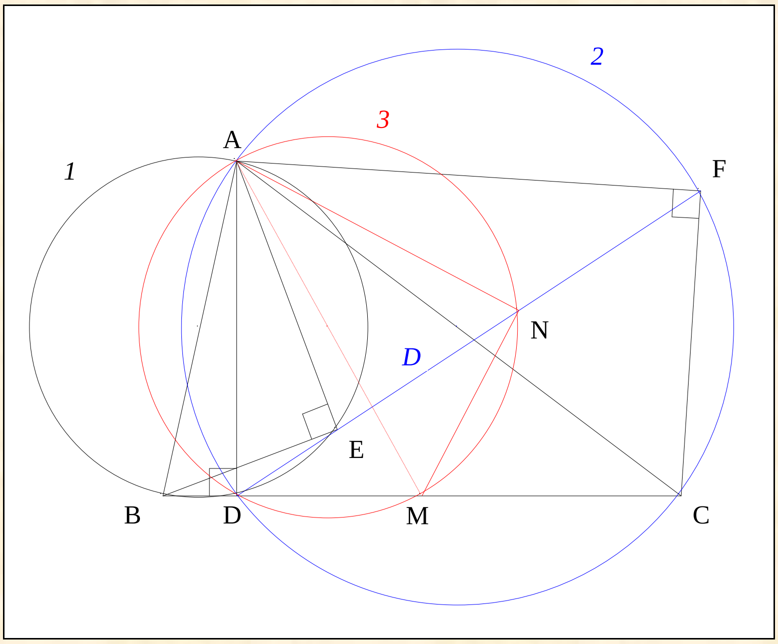


Traits :	ABC	un triangle,
	D	le pied de la A-hauteur de ABC,
	D	une droite passant par D,
	E	le point de *D* tel que (AE) soit perpendiculaire à (BE),
	F	le point de *D* tel que (AF) soit perpendiculaire à (CF)
et	M, N	les milieux resp. de [BC], [EF].

Donné : (AN) est perpendiculaire à (MN). [5]

VISUALISATION

[5] Perpendicular, AoPS du 17/03/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=79680



- Notons *1* le cercle de diamètre [AB] ; il passe par D et E ;
  2 le cercle de diamètre [AC] ; il passe par D et F ;
  et *3* le cercle des milieux de *1* et *2* ; il passe par A, D, M et N.

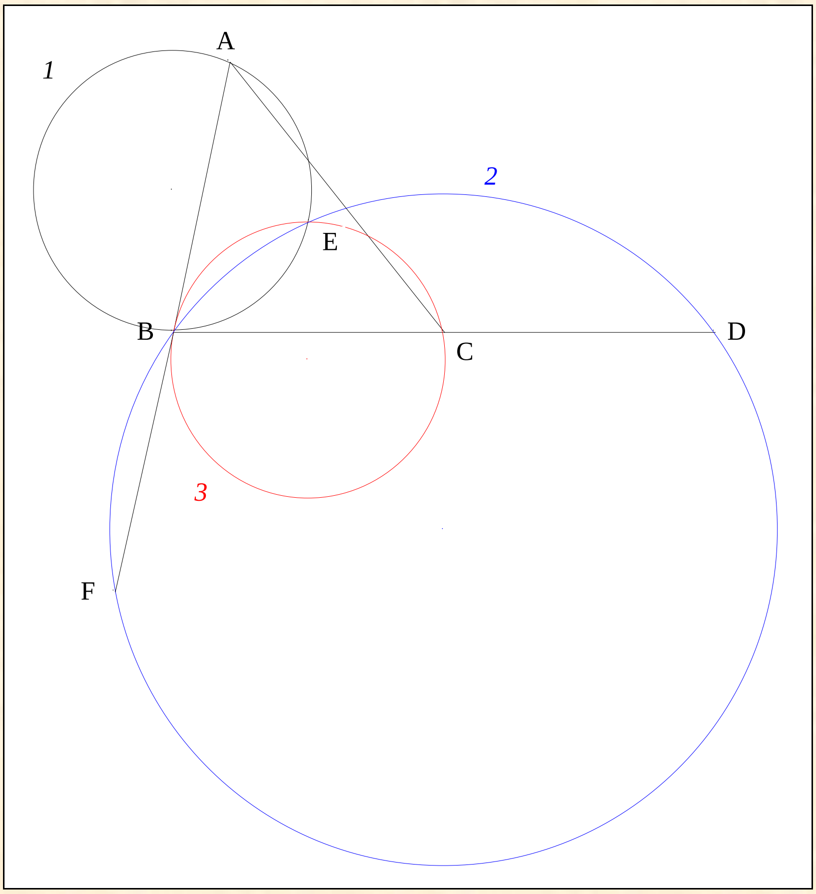
- **Scolie :** *3* a pout diamètre [AM].

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle" appliqué au triangle AMN, (AN) est perpendiculaire à (MN).

5. Senior 2013, Italy

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle passant par A et tangent à (BC) en B,
	3	le cercle passant par C et tangent à (AB) en B,
	E	le second point d'intersection de *1* et *3*,
	D	le symétrique de B par rapport à C,
	2	le cercle passant par B, E, D
et	F	le second point d'intersection de (AB) avec *2*.

Donné : B est le milieu de [AF]. [6]

VISUALISATION

- **Scolies :**
  (1) *3* est le cercle des milieux de *1* et *2*

  (2) *3* est tangent à (AB) en B

  (3) (AF) est une A-monienne de *1* et *2*.

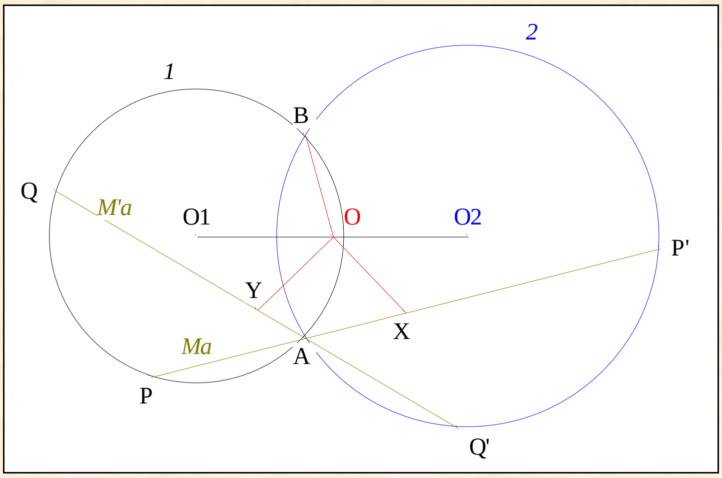
- **Conclusion :** B est le milieu de [AF].

[6] Intersecting circles, AopS du 18/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3223504

6. Trois segments égaux

VISION

Figure :

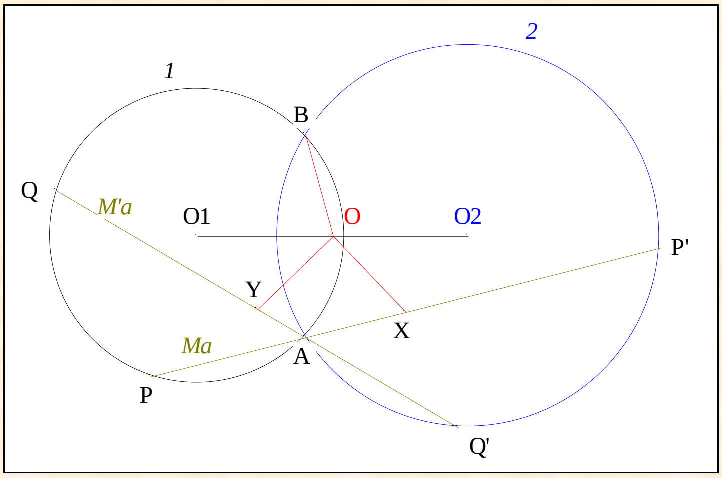


Traits :	*1, 2*	deux cercles sécants,
	O1, O2	les centres resp. de *1, 2,*
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2,*
	Ma	une A-monienne de *1* et *2,*
	P, Q	les points d'intersection de *Ma* resp. avec *1, 2,*
	M'a	une A-monienne de *1* et *2,*
	P', Q'	les points d'intersection de *Ma* resp. avec *1, 2,*
et	X, Y, O	les milieux resp. de [PP'], [QQ'], [O1O2]

Donné : OB = OX = OY. [7]

Commentaire : le lecteur pourra faire un lien avec le problème **3**.

VISUALISATION



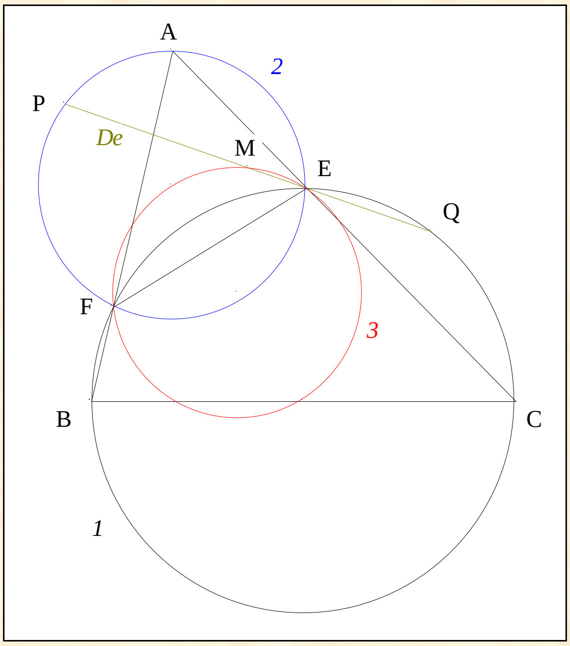
[7] Geometry, AoPS du 23/08/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=550645

- Notons *3* le cercle des milieux de *1* et *2* ; il passe par A, B, X, Y et a pour centre O.
- **Conclusion :** OB = OX = OY.

7. Avec le cercle d'Euler

VISION

Figure :

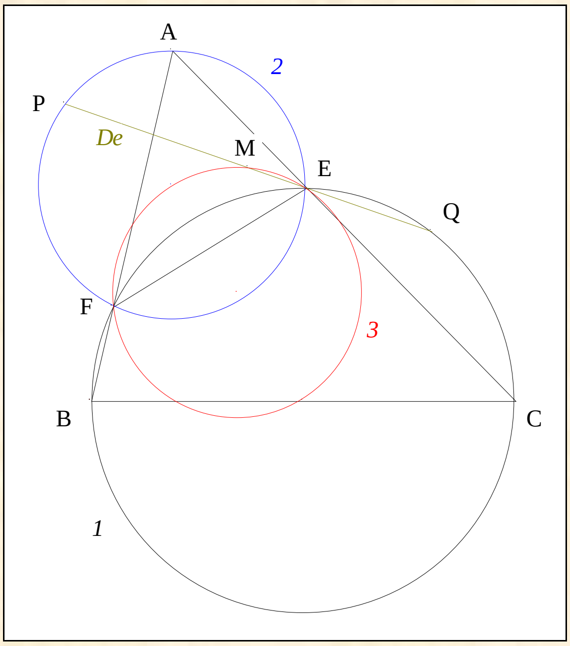


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle de diamètre [BC],
E, F les points d'intersection de *1* resp. avec (AC), (AB),
2 le cercle passant par A, E, F,
De une ménélienne passant par E,
D le symétrique de B par rapport à C,
P, Q les points d'intersection de *De* avec *2*,
M le milieu de [PQ]
et *3* le cercle d'Euler de ABC.

Donné : *3* passe par M. [8]

VISUALISATION

[8] Beauty problem about nine-point circle, AoPS du 23/08/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=550652



- Notons A'B'C' le triangle médian de ABC.

- **Scolies :** **(1)** *3* passe par A', B', C'

  (2) *3* est le cercles des milieux de *1* et *2*

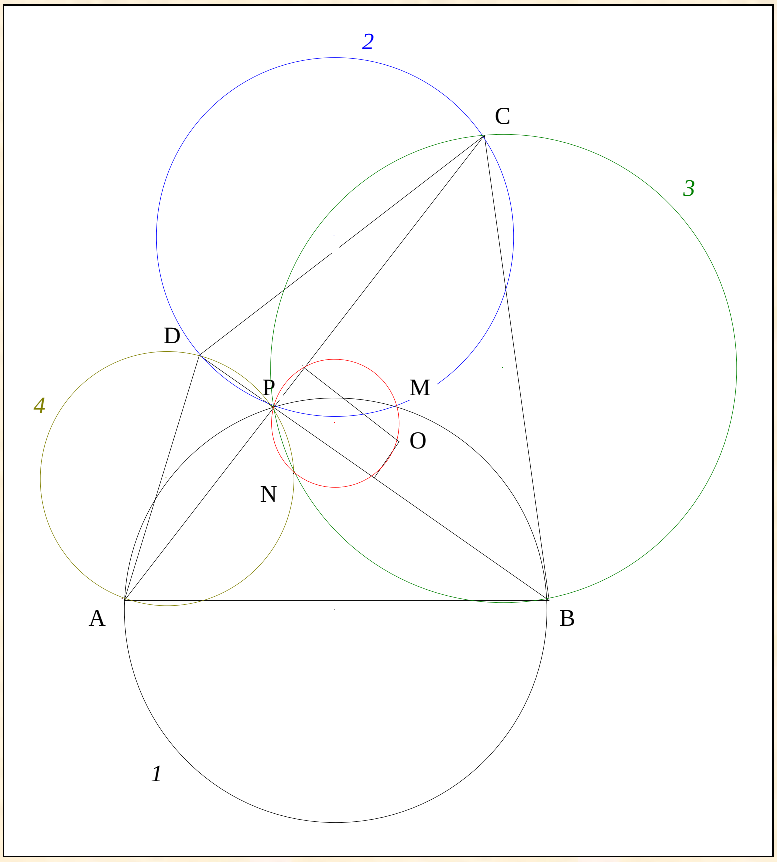
  (3) *De* i.e. (PQ) est une E-monienne de *1* et *2*.

- **Conclusion :** *3* passe par M.

8. Ukraine journal

VISION

Figure :



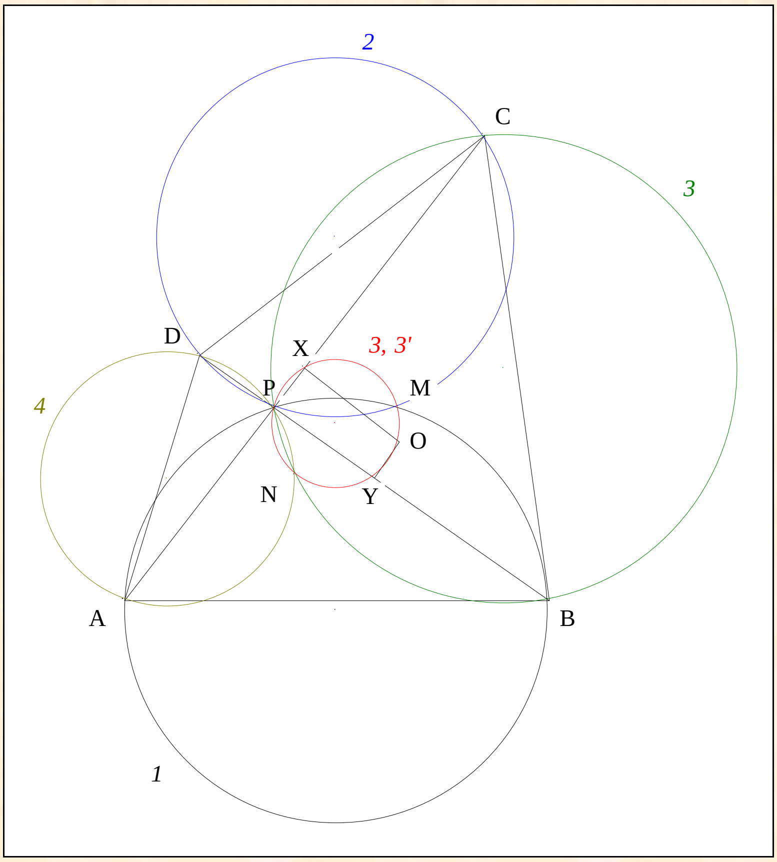
Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
1, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles PAB, PCD,
M le second point d'intersection de *1* et *2*,
3, *4* les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PDA,
N le second point d'intersection de *3* et *4*,
et O le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [BD].

Donné : M, O, P et N sont cocycliques. [9]

Commentaire : le lecteur pourra faire un lien avec le problème **I**.

VISUALISATION

[9] Concyclicity in quadrilateral, AoPS du 10/07/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=214291



- Notons X, Y les milieux resp. de [AC], [BD]
  3 le cercle des milieux de *1* et *2*,
  3′ le cercle des milieux de *3* et *4*,
  et *3″* le cercle de diamètre [OP].

- **Scolies :** **(1)** *3* passe par P, M, X et Y

  (2) *3′* passe par P, N, X et Y ; en conséquence, *3* et *3′* sont confondus ;

  (3) *3″* passe par O, P, X et Y ; en conséquence, *3* et *3″* sont confondus.

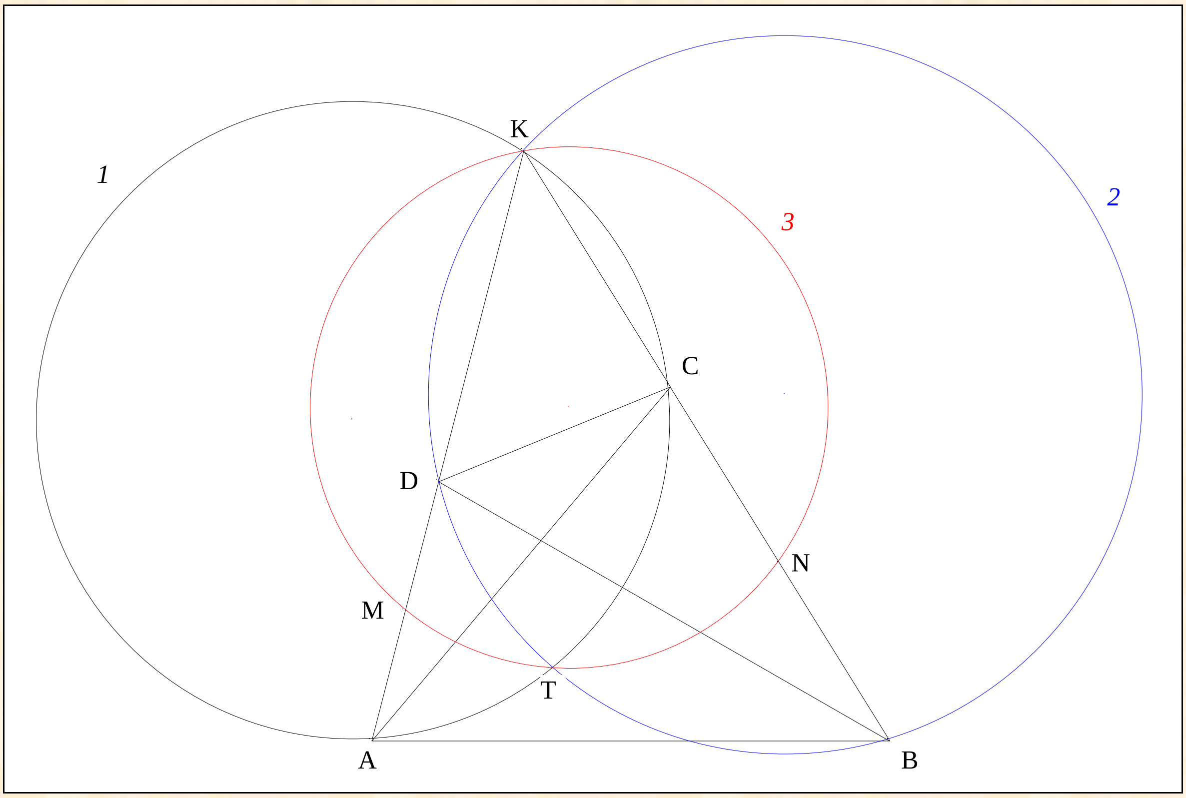
- **Conclusion partielle :** *3*, *3′* et *3″* sont confondus.

- **Conclusion :** M, O, P et N sont cocycliques.

9. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
K le point d'intersection de (AD) et (BC),
1, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles ACK, BDK,
T le second point d'intersection de *1* et *2*,
et M, N les milieux resp. de [AD], [BC].

Donné : T, N, K et M sont cocycliques. [10]

VISUALISATION

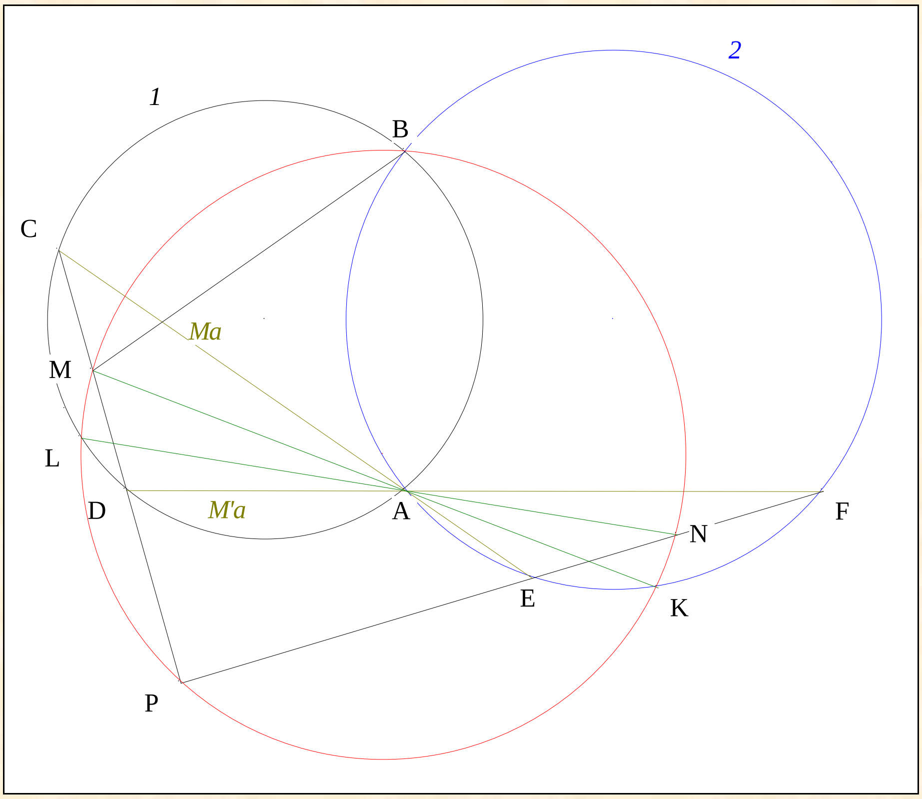
- Notons *3* le cercle des milieux de *1* et *2*.
- **Scolie :** *3* passe par K, T, M et N.
- **Conclusion :** T, N, K et M sont cocycliques.

[10] An inscribed quadrilateral, AoPS du 16/06/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=484210

10. Six points cocycliques

VISION

Figure :

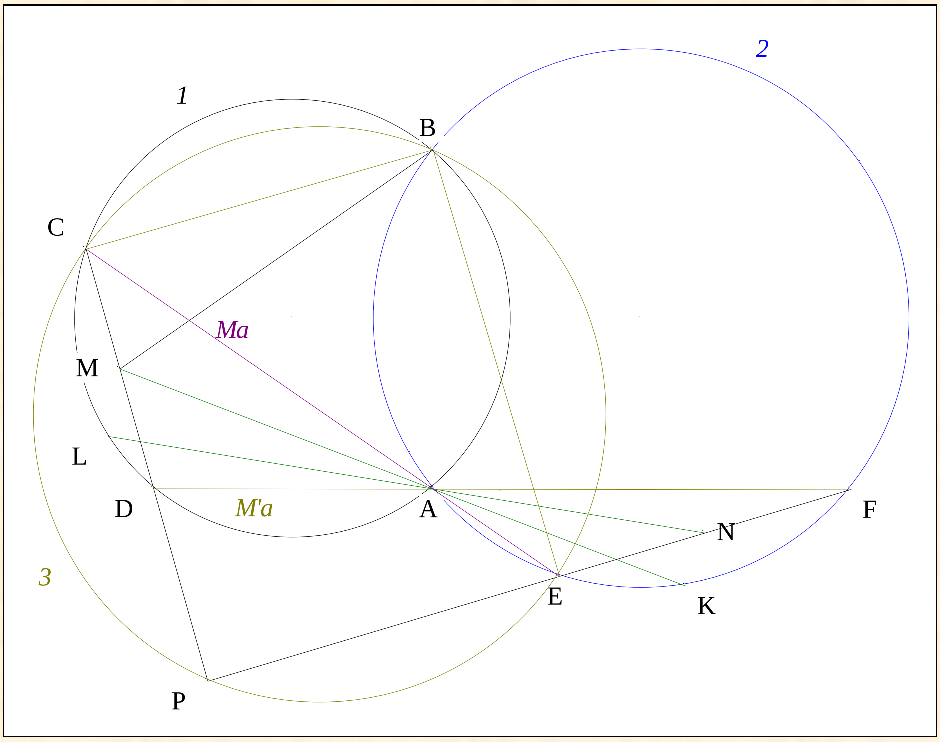


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
Ma une A-monienne de *1* et *2*,
C, E les points d'intersection de *Ma* resp. avec *1*, *2*,
M'a une A-monienne de *1* et *2*,
D, F les points d'intersection de *Ma* resp. avec *1*, *2*,
M, N les milieux resp. de [CD], [EF],
K le point d'intersection de (MA) avec*2*,
L le point d'intersection de (NA) avec*1*
et P le point d'intersection de (CD) et (EF).

Donné : P, B, M, N, K et L sont cocycliques. [11]

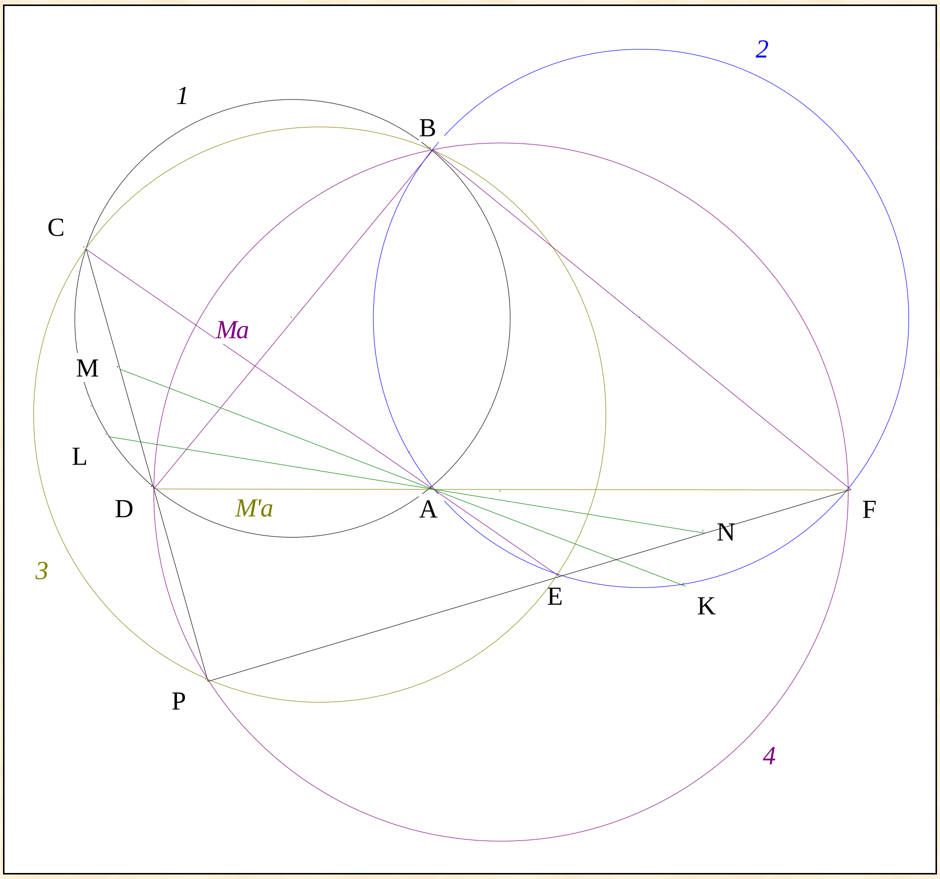
VISUALISATION

[11] 6 concyclic points, AoPS du 03/03/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=467528



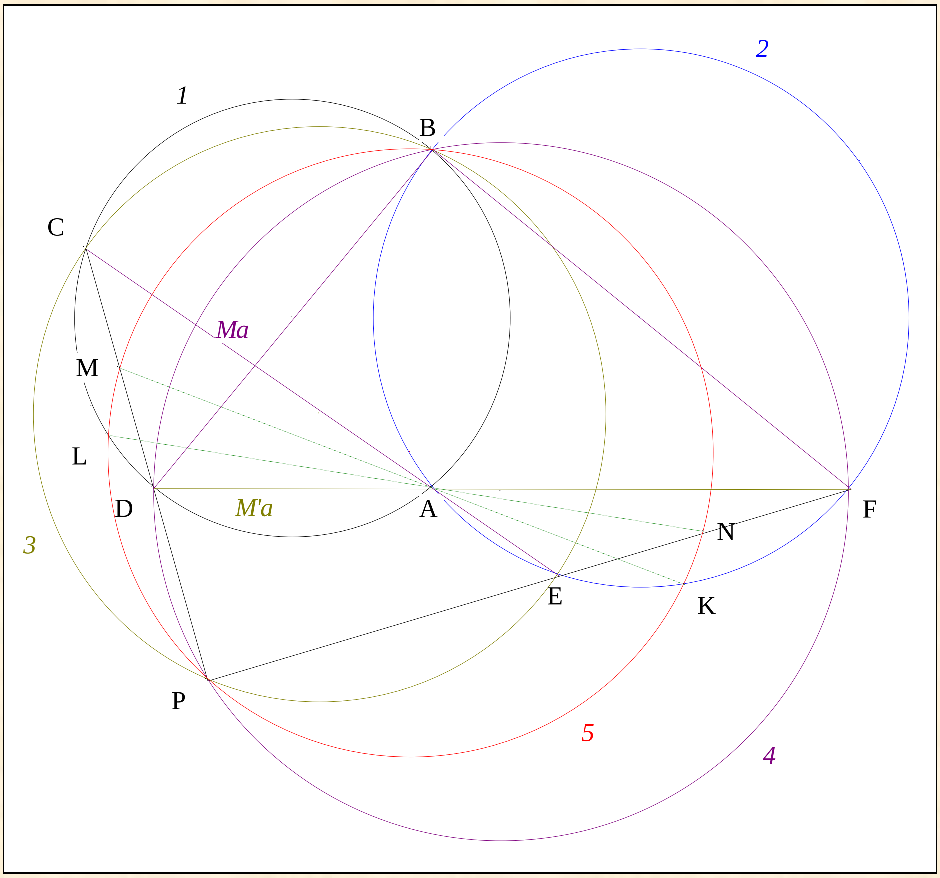
- D'après **III. 1.** Moniennes droite et brisée
  appliqué à la monienne (DAF) et à la monienne brisée (CBE), P, B, C et E sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

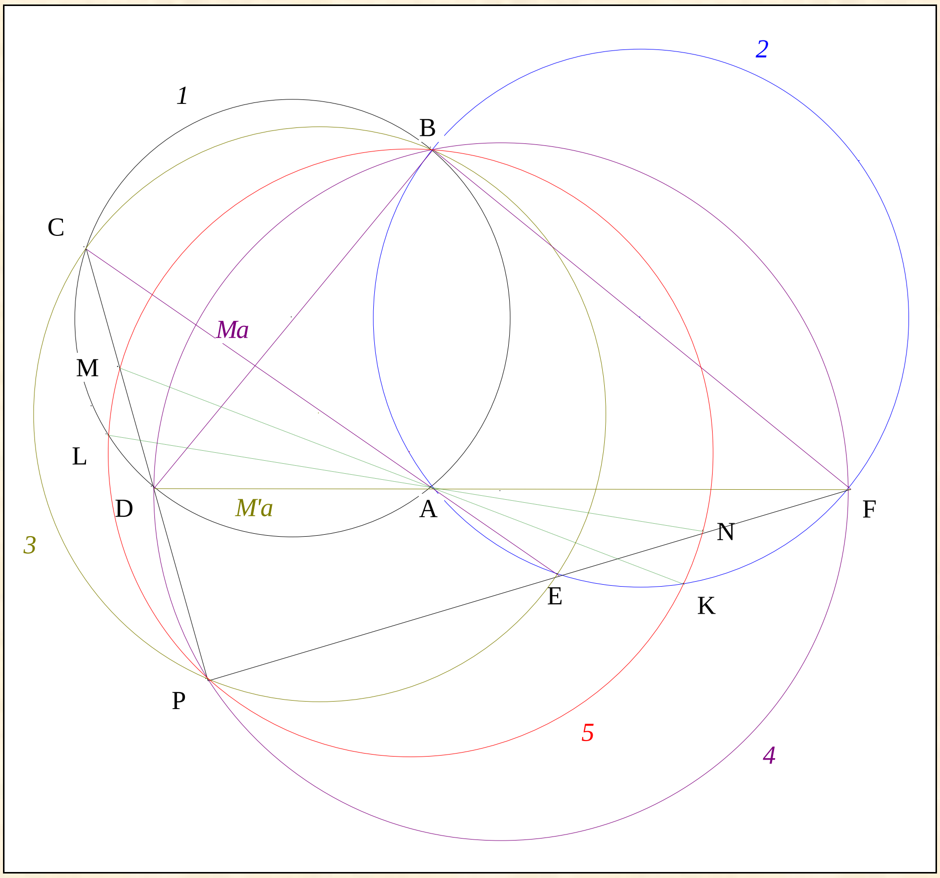


- D'après **III. 1.** Moniennes droite et brisée appliqué à la monienne (CAE) et à la monienne brisée (DBF), P, B, D et F sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.



- Notons 5 le cercle des milieux de *3* et *4* ; il passe par P, B, M et N.
- **Conclusion partielle :** P, B, M et N sont cocycliques.



- D'après **III. 2.** Le théorème du pivot
  appliqué au triangle MDA avec P sur (MD), F sur (DA) et de pivot B, 5 passe par K.

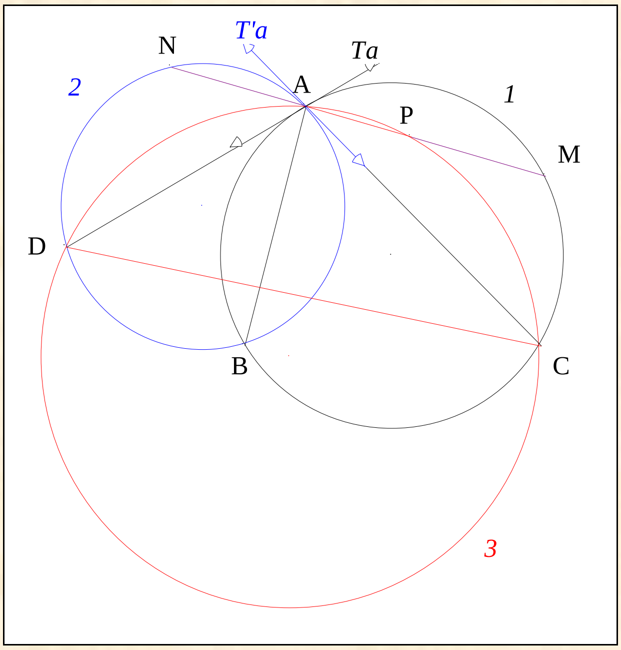
- Mutatis mutandis, nous montrerions que 5 passe par L.

- **Conclusion :** P, B, M, N, K et L sont cocycliques.

11. Deux segments égaux

VISION

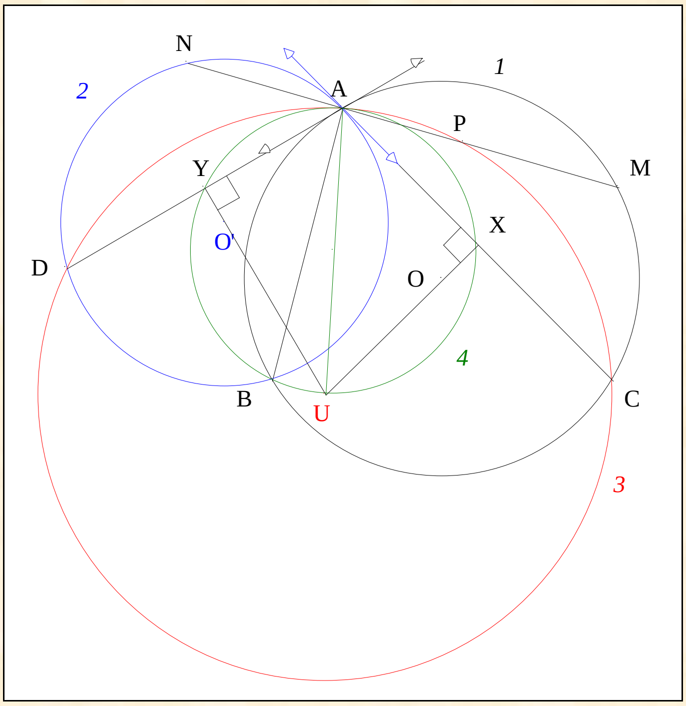
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	Ta	la tangente à *1* en A,
	D	le second point d'intersection de *Ta* avec *2*,
	T'a	la tangente à *2* en A,
	C	le second point d'intersection de *Ta* avec *2*,
	3	le cercle passant par D, A, C
	*M*a	une A-monienne de *1* et *2* ne coupant pas [CD]
et	M, N, P	les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*, *3*.

Donné : AN = PM.

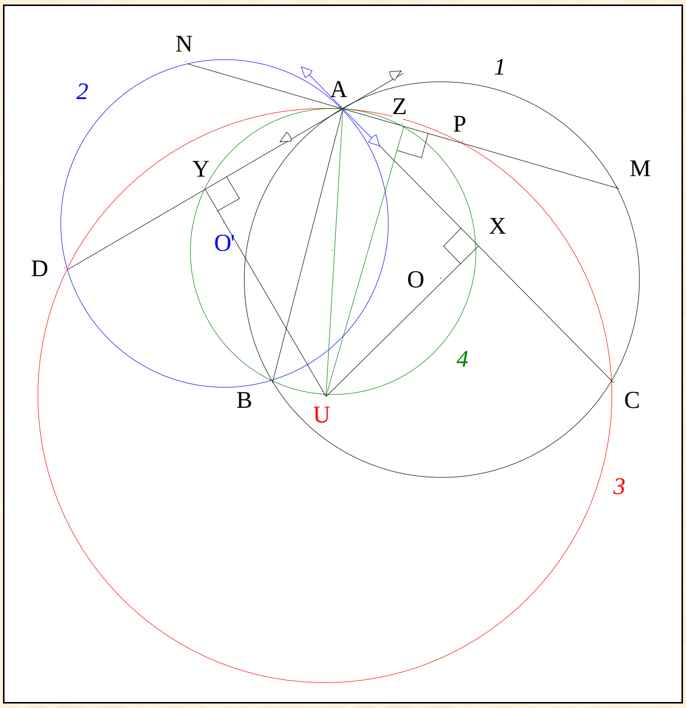
VISUALISATION



- Notons X, Y les milieux resp. de [AC], [AD],
  Mx, *My* les médiatrices resp. de [AC], [AD],
  U le centre de *3*
  et *4* le cercle des milieux de *1* et *2*.

- **Scolies :** **(1)** *3* passe par A, B, X, Y et U

  (2) A et U sont deux points diamétraux de *4*.



- Notons Z le second point d'intersection de (AP) avec *4*.

- D'après Thalès "Triangles inscriptible dans un demi cercle", (UZ) ⊥ (AP) ;
  relativement à *3*, Z est le milieu de [AP] ;
  relativement à *4*, Z est le milieu de [MN].

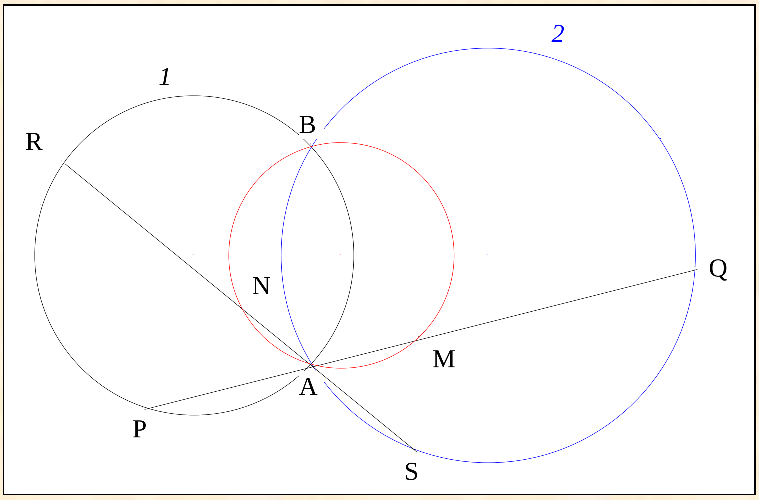
- **Conclusion :** AN = PM.

II. LE CERCLE DES RAPPORTS CONSTANTS

A. PRÉSENTATION

VISION

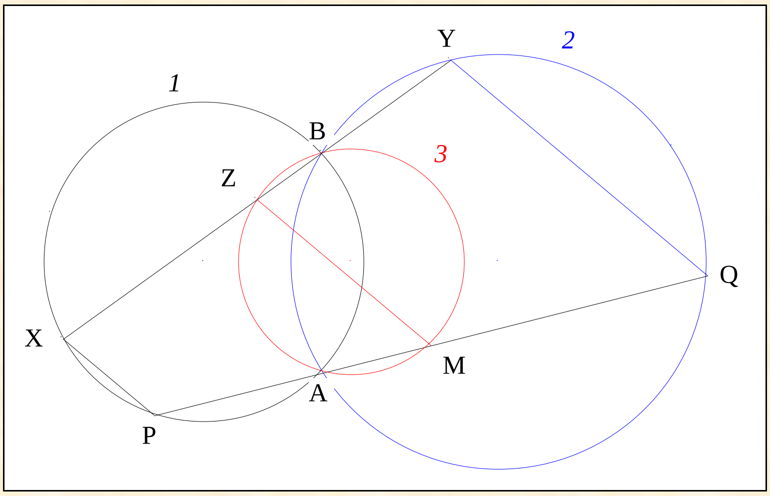
Figure :



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
P, R deux points de *1*,
Q, S les seconds points d'intersection de (AP) avec *2*, de (AR) avec *2*
et M, N deux points resp. de [PQ], [RS] tels que $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{NR}{NS}$.

Donné : M, N, A et B sont cocycliques.

VISUALISATION



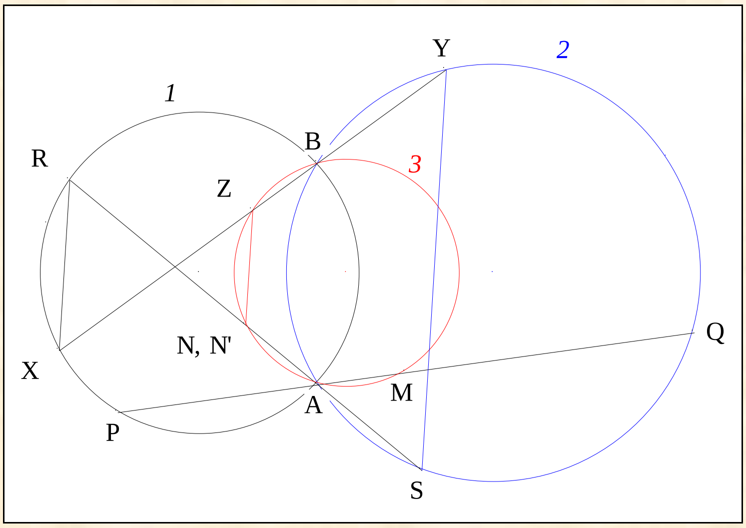
- Notons *3* le cercle passant par A, B, M,
  X un point de *1*

et Y, Z les seconds points d'intersection de (BX) resp. avec *2*, *3*.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (PAQ) et (XBY), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PX) // (QY).

- Les cercles *2* et *3*, les points de base A et B, les moniennes (QAM) et (YBZ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (QY) // (MZ) ;
  par transitivité de la relation //, (PX) // (MZ).

- D'après Thalès "Rapports" appliqué au trapèze PQYX, $\frac{MP}{MQ} = \frac{ZX}{ZY}$.



- Notons N' le second point d'intersection de (AR) avec *3*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que $\frac{ZX}{ZY} = \frac{N'R}{N'S}$;

  par transitivité de la relation =, $\frac{NR}{NS} = \frac{N'R}{N'S}$;

  il s'en suit que N et N' sont confondus.

- **Conclusion :** M, N, A et B sont cocycliques.

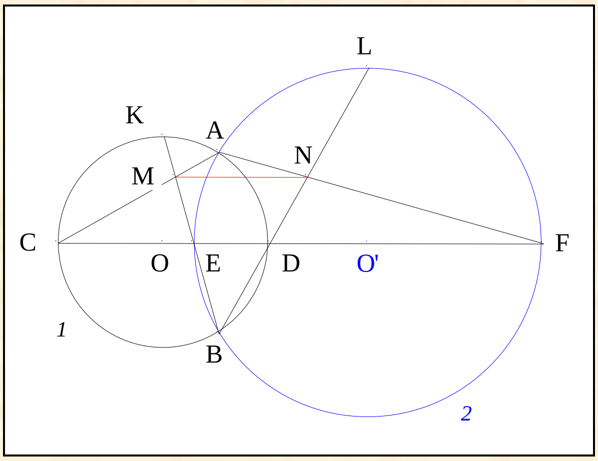
Scolie : *3* est "le cercle des rapports constants de *1* et *2* "

B. EXEMPLE

1. Deux parallèles

VISION

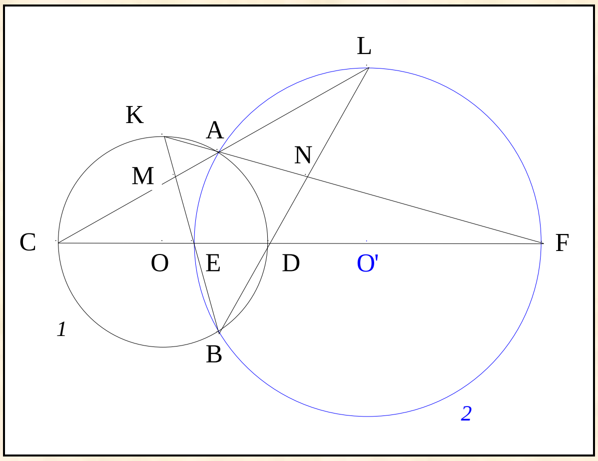
Figure :



Traits : *1, 2* deux cercles orthogonaux,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les deux points d'intersection de *1* et *2*,
C, D les points d'intersection de (OO') avec *1*,
E, F les points d'intersection de (OO') avec *2* comme indiqués sur la figure,
K, L les seconds points d'intersection de (BE), (BD) resp. avec *1*, *2*
et M, N les points d'intersection resp. de (BK) et (AC), (BL) et (AF).

Donné : (MN) est parallèle à (CF) [12].

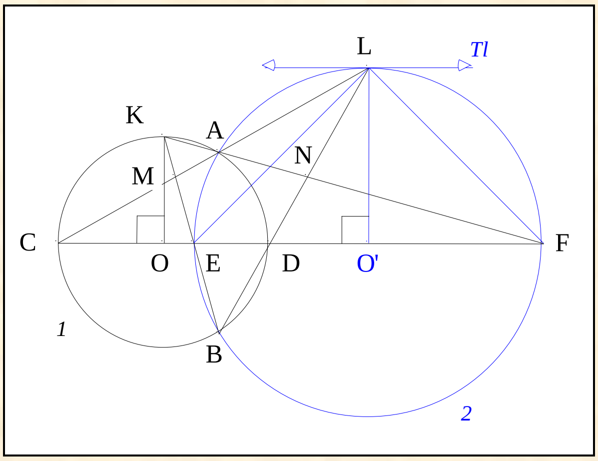
VISUALISATION



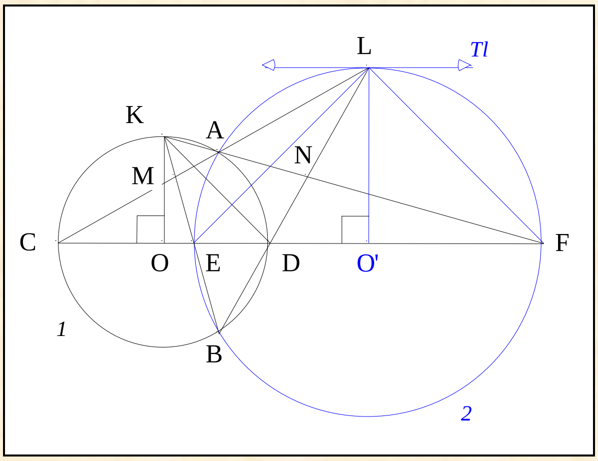
- **Scolie :** (BC) ⊥ (BDL).

[12] Vornicu V., Again geometry involving two circles that intersect, *Mathlinks* du 24/04/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=85167.

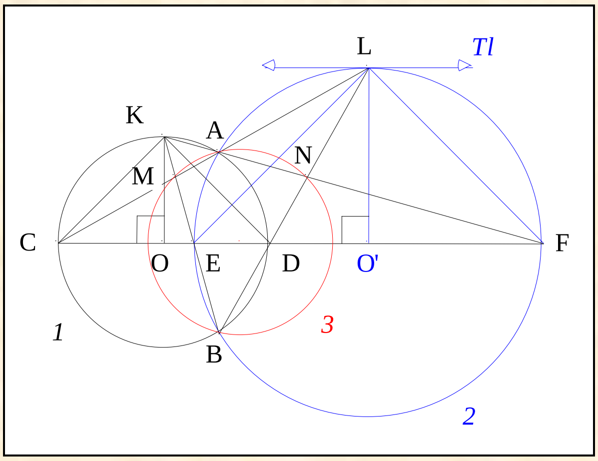
- D'après **III. 3.** Un triangle de Möbius, (AC) passe par L.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AF) passe par K.



- Notons *Tl* la tangente à *2* en L.
- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (CAL) et (DBL), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (CD) // *Tl* ou encore (EF) // *Tl*.
- **Scolie :** le triangle LEF étant L-isocèle.
- (LO') étant la F-médiane de LEF, (LO') est aussi la F-hauteur de LEF.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (KO) est aussi la K-hauteur de KCD.



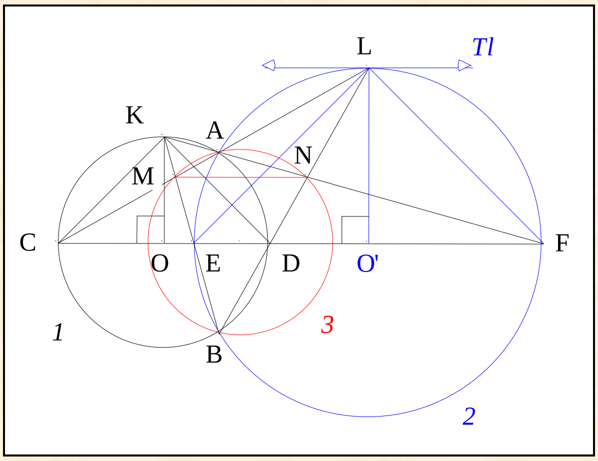
- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (KAF) et (DBL), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (KD) // (FL).
- D'après Thalès "Rapports" (avec mesure algébrique) NL/ND = NF/NK = LF/DK.
- Les triangles OEK et O'FL étant homothétiques, LF/DK = O'L/OK.
- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation =, NL/ND = O'L/OK.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que MK/ME =OK/O'L ou encore O'L/OK = ME/MK.
  par transitivité de la relation =, NL/ND = ME/MK.

- **Conclusion partielle :** d'après **II. A.** Le cercle des rapports constants, A, B, M et N sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

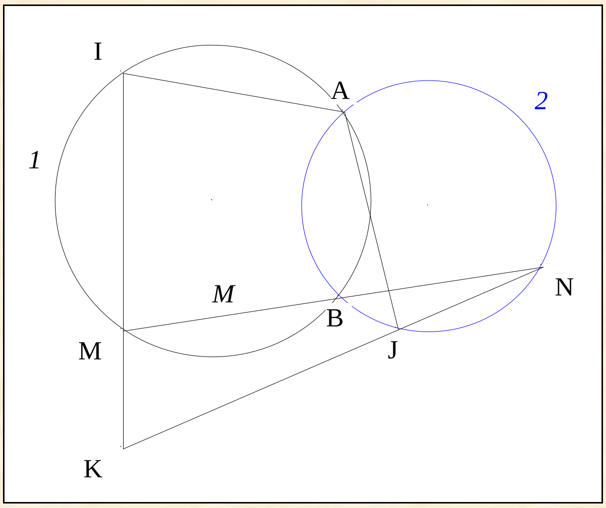


- Les cercles *3* et *1*, le spoints de base A et B, les moniennes (MAC) et (NBD), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (MN) // (CD).

- **Conclusion :** (MN) est parallèle à (CF).

III. ANNEXE

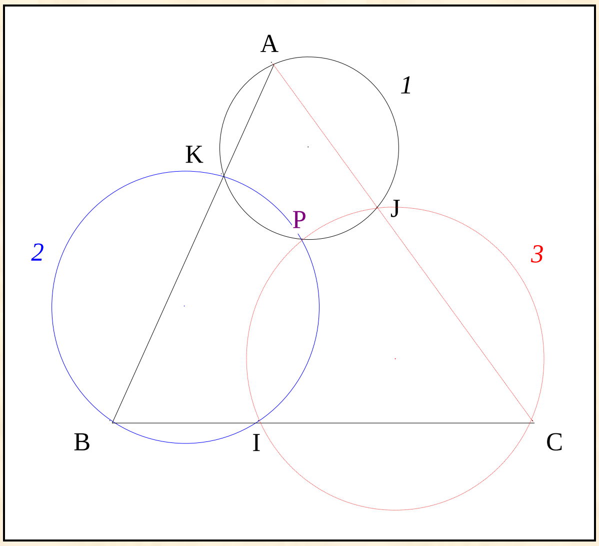
1. Moniennes droite et brisée [13]



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I, J	deux points resp. de *1*, *2* tels que (IAJ) soit une monienne brisée en A,
	M	une monienne passant par B,
	M, N	les points d'intersection de *M* resp. avec *1*, *2*
et	K	le point d'intersection de (IM) et (JN).

Donné : I, A, J et K sont cocycliques.

2. Le théorème du pivot [14]



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles deux à deux sécants,

---

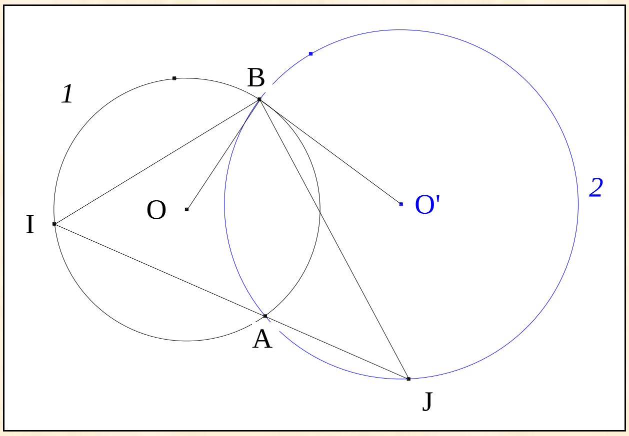
[13] Ayme J.-L., Une tangente ou le théorème de Reim dans tous ses états ; Appendice, G. G. G. vol. **7** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

[14] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G. G. G. vol. **13**, p. 4-9 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des deux points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des deux points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

3. Un triangle de Möbius [15]



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
et	(IBJ)	une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

[15] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius