

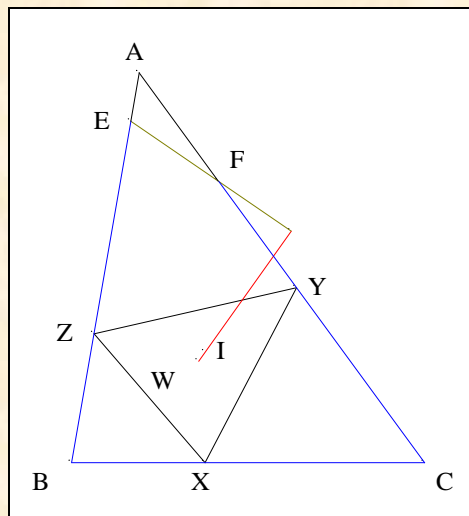
# DEUX SEGMENTS ÉGAUX

## SUR

### DEUX CÔTÉS D'UN TRIANGLE <sup>1</sup>

†

Jean - Louis AYME



#### Résumé.

L'auteur présente l'étude d'une situation concernant deux segments égaux portés par deux côtés d'un triangle comme peut le préciser la figure d'en-tête. La résolution d'une dizaine de problèmes rencontrés au fil de ses lectures, lui a permis de les relier de telle façon qu'un problème apparemment difficile peut se réduire en une simple application d'un résultat précédent. L'étude se termine par trois variantes. L'enchaînement choisi peut permettre au lecteur alerte et attentif une suite à cet article. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

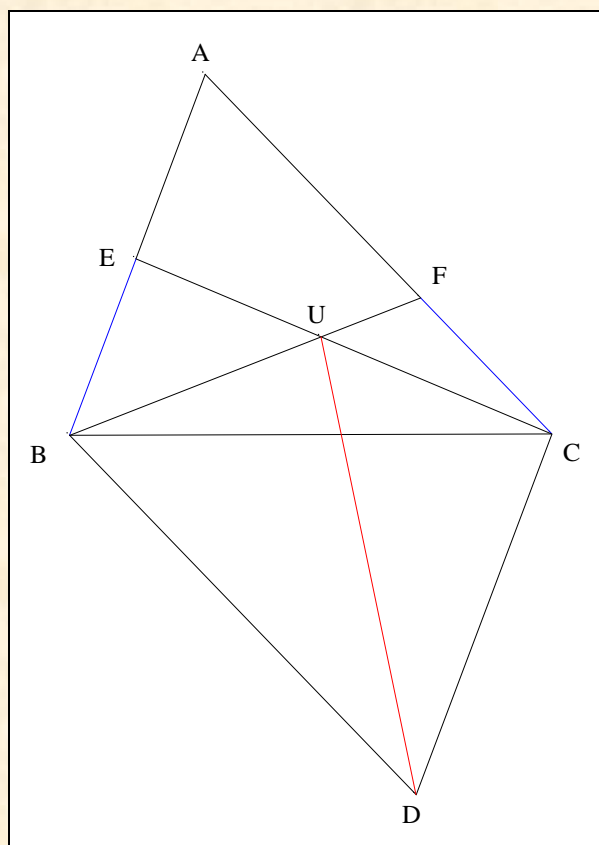
Sommaire	
A. Étude	2
1. Une bissectrice intérieure d'un triangle (I)	
2. Une bissectrice intérieure d'un triangle (II)	
3. Un triangle isocèle	
4. Une parallèle à (AI)	
5. Trois milieux alignés	
6. Deux perpendiculaires	
7. La généralisation de Virgil Nicula	
8. Deux segments égaux au demi-périmètre d'un triangle	
9. Une perpendiculaire à (OI)	
10. Deux segments égaux au rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle	
B. Variantes	26
1. Une perpendiculaire à la droite d'Euler du triangle de contact une courte biographie de Charles-Ange Laisant	
2. Le segment [OI]	
3. Trois perpendiculaires à (OI)	
C. Annexe	32
1. Le théorème du pivot	
2. Bissectrices intérieures d'un parallélogramme	
3. La tangente au sommet	
4. Isogonale et perpendiculaire	
D. Le symbole de l'égalité	34

## A. ÉTUDE

### 1. Une bissectrice intérieure d'un triangle (I)

#### VISION

Figure :



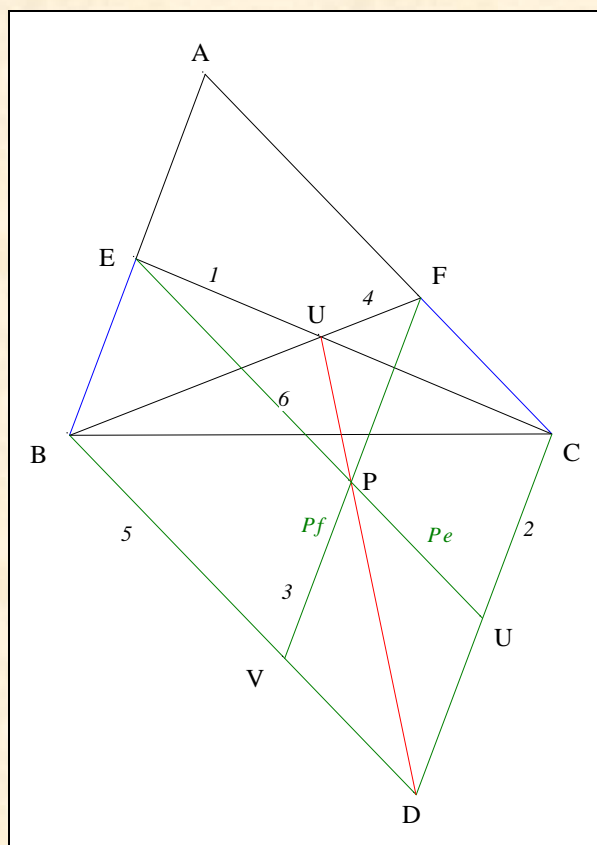
**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $E, F$  deux points resp. de  $[BA[$ ,  $[CA[$  tels que  $BE = CF$   
 $U$  le point d'intersection de  $(BF)$  et  $(CE)$ ,  
 et  $D$  le point tel que le quadrilatère  $ABDC$  soit un parallélogramme.

**Donné :**  $(DU)$  est la  $D$ -bissectrice intérieure du triangle  $DBC$ .<sup>2</sup>

### VISUALISATION

<sup>2</sup>

Bundeswettbewerb Mathematik (2003) premier tour, problème 3.



- Notons  $Pe$  la parallèle à (AC) passant par E,  
 $Pf$  la parallèle à (AB) passant par F,  
 $U$  le point d'intersection de  $Pe$  et (CD),  
 $V$  le point d'intersection de  $Pf$  et (BD),  
 et  $P$  le point d'intersection de  $Pe$  et  $Pf$ .
- D'après Pappus "Deux points à l'infini" <sup>3</sup>,  
 (DPU) est la pappusienne de l'hexagone dégénéré comme indiqué sur la figure ci-dessus.
- **Scolie :** le quadrilatère DUPV est un losange.
- **Conclusion :** (DQ) est la D-bissectrice intérieure du triangle DBC ou du quadrilatère ABDC.

**Note historique :** ce problème a été repusé en 2004 aux épreuves de sélection de l'équipe française aux olympiades <sup>4</sup>.

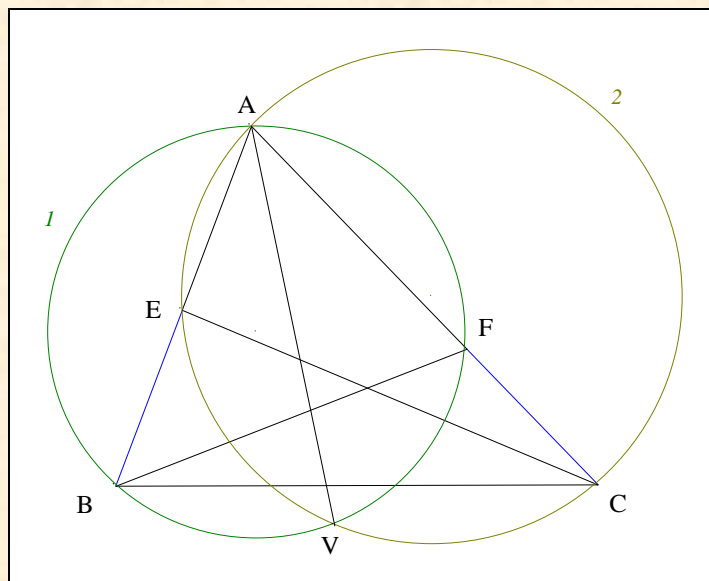
- Scolies :**
- (1) (DQ) est la D-bissectrice intérieure du quadrilatère ABDC.
  - (2) Lorsque E et F se déplacent conformément aux hypothèses,  
 U se déplace sur la D-bissectrice intérieure de DBC qui est une droite fixe. <sup>5</sup>
  - (3) Deux autres segments égaux

<sup>3</sup> Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 2-5 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.

<sup>4</sup> French TST (2004) problem 2.

<sup>5</sup> Davood Vakili.



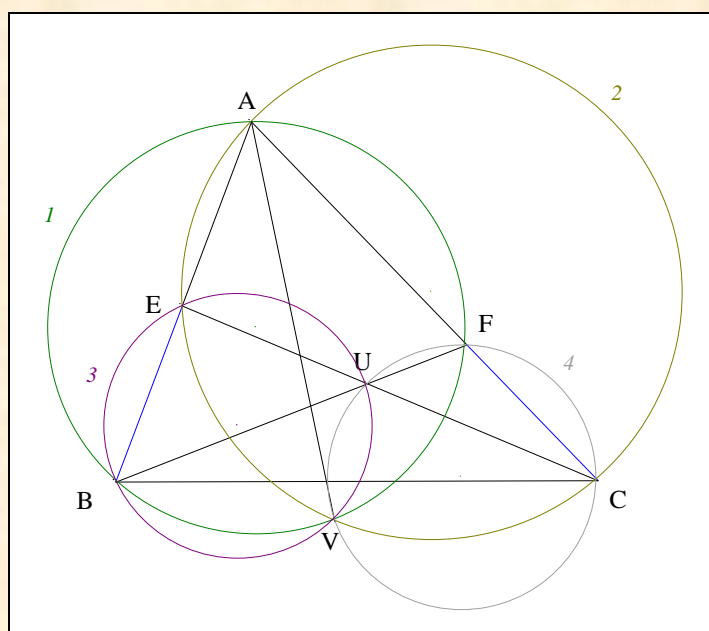


**Traits :**

ABC	un triangle,
E, F	deux points resp. de $[BA[$ , $[CA[$ tels que $BE = CF$
1, 2	les cercles circonscrits resp. des triangles ABF, BCE
V	le second point d'intersection de 1 et 2.

**Donné :** (AV) est la A-bissectrice intérieure de ABC.<sup>7</sup>

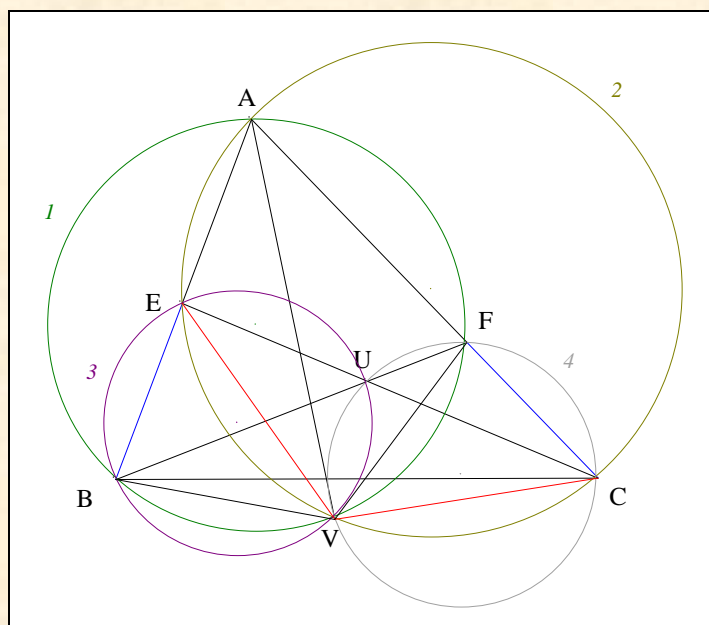
### VISUALISATION



- Notons U le second point d'intersection de 1 et 2,  
et 3, 4 les cercles circonscrits aux triangles BEU, CFU.
- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1)  
appliqué au triangle ACE avec F sur (AC), U sur (CE) et B sur (EA), 1, 2, 3 et 4 passent par V.

<sup>7</sup>

11-ème O.M. de St-Petersburg (1999), Round de sélection, problème 2.



- D'après "Le théorème du quadrilatère cyclique" appliqué
 

(1)	à AFVB,	$\angle VFC = \angle VBA$
(2)	à AEVC,	$\angle FCV = \angle BEV$ .
- D'après "Le théorème a.c.a."<sup>8</sup>,  
en conséquence, les triangles VEB et VCF sont égaux ;  
le triangle VCE est V-isocèle.
- **Scolie :** V est le milieu de l'arc EC de 2 ne contenant pas A.
- **Conclusion :** (AV) est la A-bissectrice intérieure de ABC.

### 3. Un triangle isocèle

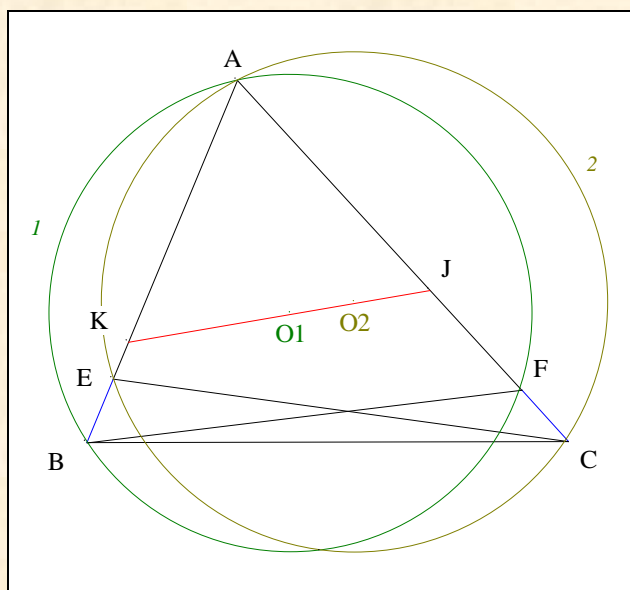
#### VISION

Figure :

<sup>8</sup>

i.e. angle-côté-angle.

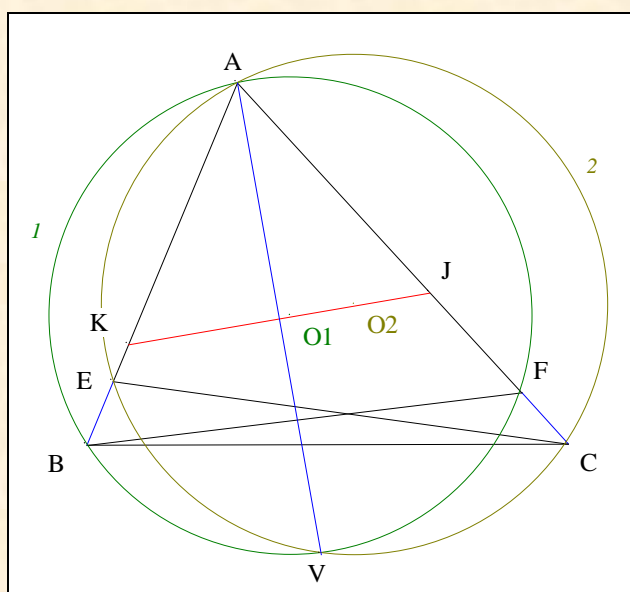




<b>Traits :</b>	ABC	un triangle,
	E, F	deux points resp. de [BA[, [CF[ tels que $BE = CF$
	$I, 2$	les cercles circonscrits des triangles ABF, BCE
	$O_1, O_2$	les centres resp. de $I, 2$
et	J, K	les points d'intersection de (XY) resp. avec (AC), (AB).

**Donné :** le triangle AJK est A-isocèle.<sup>9</sup>

### VISUALISATION



- Notons  $V$  le second point d'intersection de  $I$  et  $2$ .
- D'après A. 2. Une bissectrice intérieure d'un triangle (**II**), (AV) est la A-bissectrice intérieure de ABC  
ou encore (AV) est la A-bissectrice intérieure de AJK.
- Nous savons que (AV)  $\perp$  (XY) ou encore (AV)  $\perp$  (JK) ;

<sup>9</sup> Baltic Way (2005) problème 11.



en conséquence,

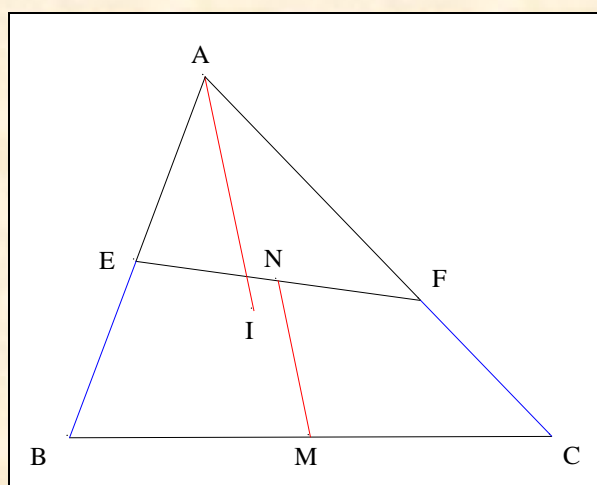
$(AV)$  est la A-hauteur de  $AJK$ .

- **Conclusion :**  $(AF)$  étant à la fois la A-bissectrice et hauteur de  $AJK$ , le triangle  $AJK$  est A-isocèle.

#### 4. Une parallèle à $(AI)$

#### VISION

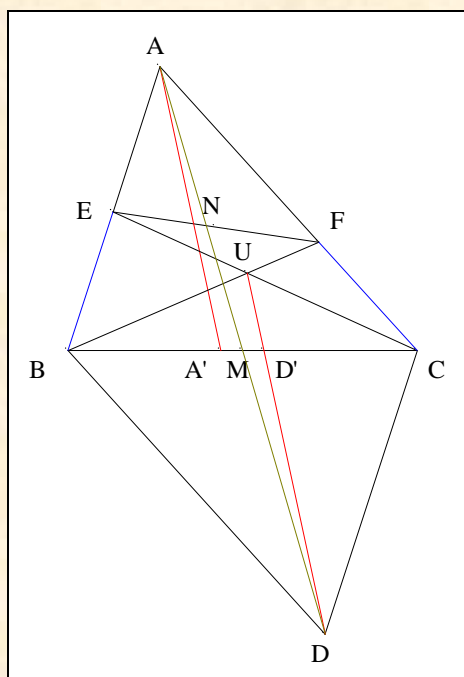
Figure :



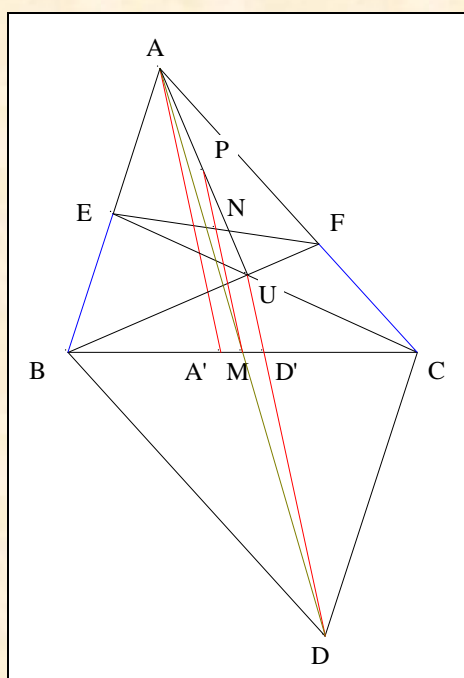
**Traits :** ABC un triangle,  
 E, F deux points resp. de  $[BA]$ ,  $[CA]$  tels que  $BE = CF$ ,  
 M, N les milieux resp. de  $[BC]$ ,  $[EF]$   
 et I le centre de ABC.

**Donné :**  $(MN)$  est parallèle à  $(AI)$ .

#### VISUALISATION



- Notons  $D$  le point tel que le quadrilatère  $ABDC$  soit un parallélogramme,  
 $U, D'$  le point d'intersection resp. de  $(BF)$  et  $(CE)$ , de  $(DU)$  et  $(BC)$ ,  
 $A'$  le pied de la  $A$ -bissectrice de  $ABC$   
 et  $M$  le milieu de  $[BC]$ .
- D'après A. 1. Une bissectrice intérieure d'un triangle,  $(DD'U)$  est la  $D$ -bissectrice intérieure de  $ABDC$ .
- D'après "Bissectrices intérieures d'un parallélogramme" (Cf. Annexe 2),  $(DD'U) \parallel (AA')$ .
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupant en leur milieu,  $M$  est le milieu de  $[AD]$  ;  
 d'après l'axiome de passage IIIb  
 appliqué à la bande de frontière  $(AA')$  et  $(DD')$ ,  $M$  est le milieu de  $[A'D']$ .



- Notons  $P$  le milieu de  $[AU]$ .

- D'après "La ponctuelle de Gauss" <sup>10</sup> appliqué au quadrilatère complet AEUF, M, N et P sont alignés.

M, N et P sont alignés.

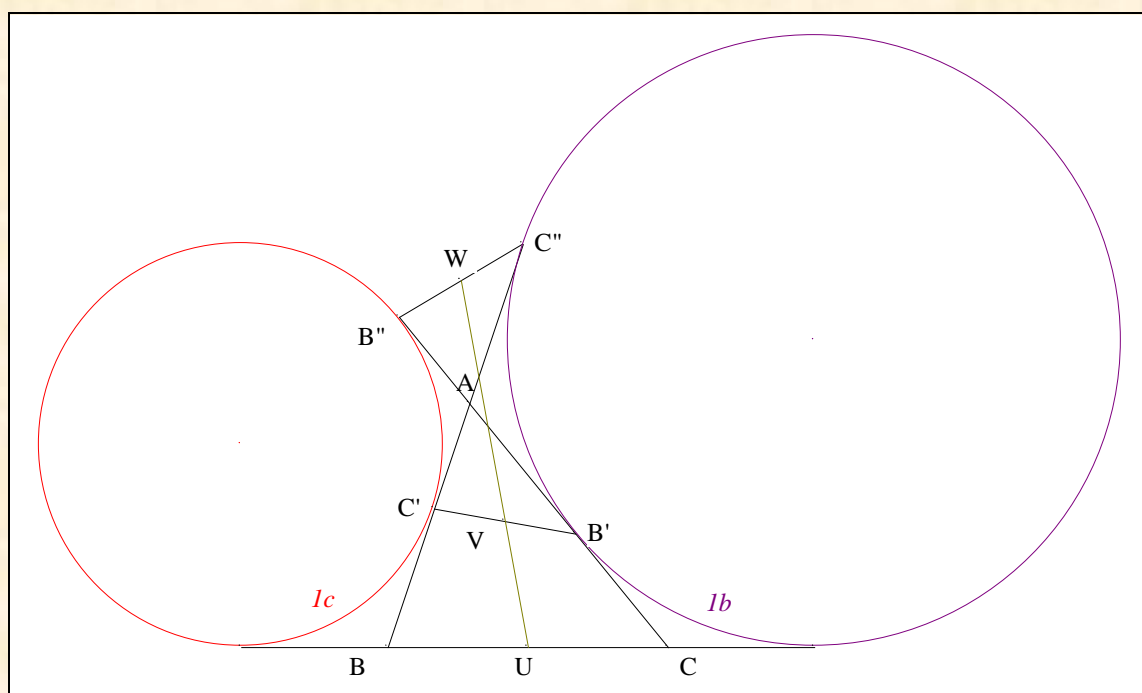
- **Conclusion :** d'après "L'axe médian d'un trapèze" appliqué au trapèze AA'D'U, (MN) est parallèle à (AI).

**Scolie :** (MN) passe par le point de Spieker de ABC et aussi par le centre du cercle d'Euler du triangle IBC où I est le centre de ABC.

## 5. Trois milieux alignés

### VISION

Figure :



**Traits :**

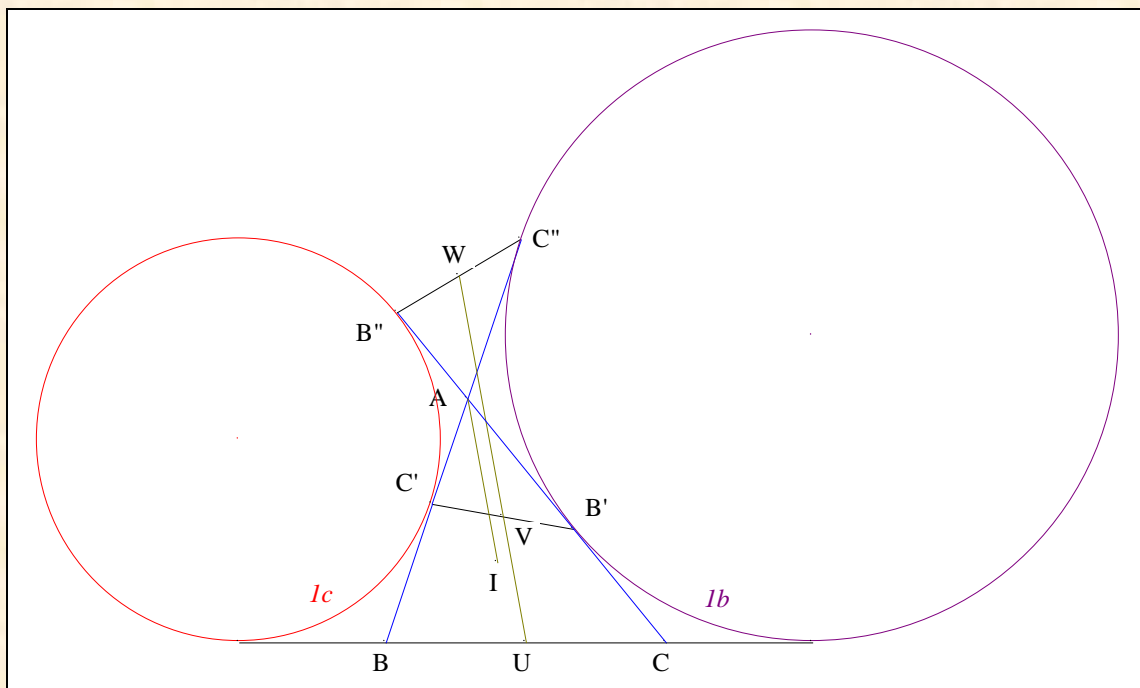
ABC	un triangle,
U	le milieu de [BC],
$I_b, I_c$	les B, C-exercles de ABC,
$B', C''$	les points de contact de $I_b$ resp. avec (CA), (AB),
$B'', C'$	les points de contact de $I_c$ resp. avec (CA), (AB),
V	le milieu de $[B'C']$
et W	le milieu de $[B''C'']$ .

**Donné :** U, V et W sont alignés.

### VISUALISATION

<sup>10</sup> Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. 4 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.

**Commentaire :** dans cette situation les segments égaux sont implicitement donnés.  
 Par culture géométrique, nous savons que  $BC' = CB'$  et  $BC'' = CB''$ .<sup>11</sup>



• Notons  $I$  le centre de  $ABC$ .

• D'après A. 4. Une parallèle à  $(AI)$ , appliqué

- |     |                            |                      |                         |
|-----|----------------------------|----------------------|-------------------------|
| (1) | au quadrilatère $BCB'C'$   | avec $BC' = CB'$ ,   | $(UV) \parallel (AI)$   |
| (2) | au quadrilatère $BCB''C''$ | avec $BC'' = CB''$ , | $(AI) \parallel (UW)$ ; |

par transitivité de la relation  $\parallel$ ,  
 d'après le postulat d'Euclide,

$(UV) \parallel (UW)$  ;  
 $(UV) = (UW)$ .

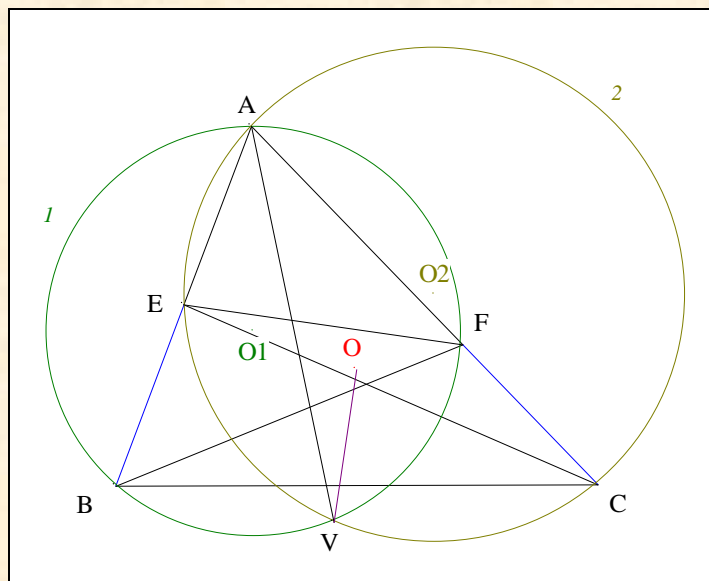
• **Conclusion :**  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont alignés.

## 6. Deux perpendiculaires

### VISION

**Figure :**

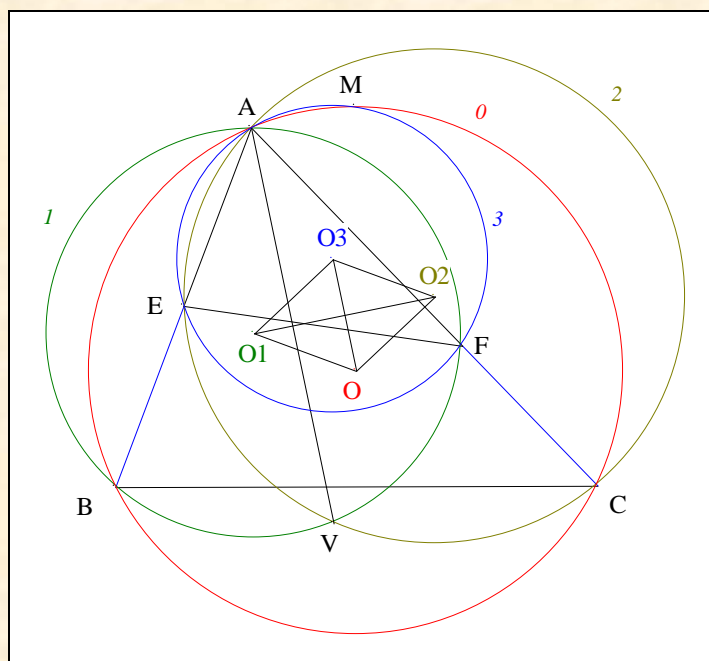
<sup>11</sup> Ayme J.-L., Le résultat de Larrosa Canestro, G.G.G. vol.5 p. 5-7 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.



<b>Traits :</b>	ABC	un triangle,
	$O$	le cercle circonscrit à ABC,
	$O$	le centre de $O$ ,
	E, F	deux points resp. de [BA], [CA] tels que $BE = CF$ ,
	$I, 2$	les cercles circonscrits resp. des triangles ABF, ACE,
	$O1, O2$	les centres resp. de $I, 2$
et	V	le second point d'intersection de $I$ et $2$ .

**Donné :**  $(OV)$  est perpendiculaire à  $(EF)$ .<sup>12</sup>

### VISUALISATION



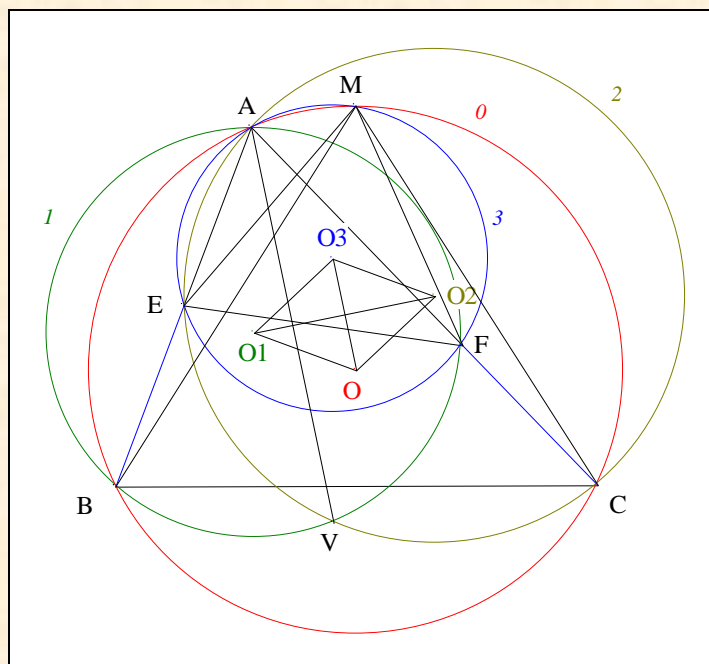
- Notons  $3$  le cercle circonscrit au triangle AEF,  
 $O3$  le centre de  $3$

<sup>12</sup>

Ayme J.-L., Two perpendicular lines, *Mathlinks* du 21/07/2010 ;  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=358079>.

et  $M$  le second point d'intersection de  $0$  et  $3$ .

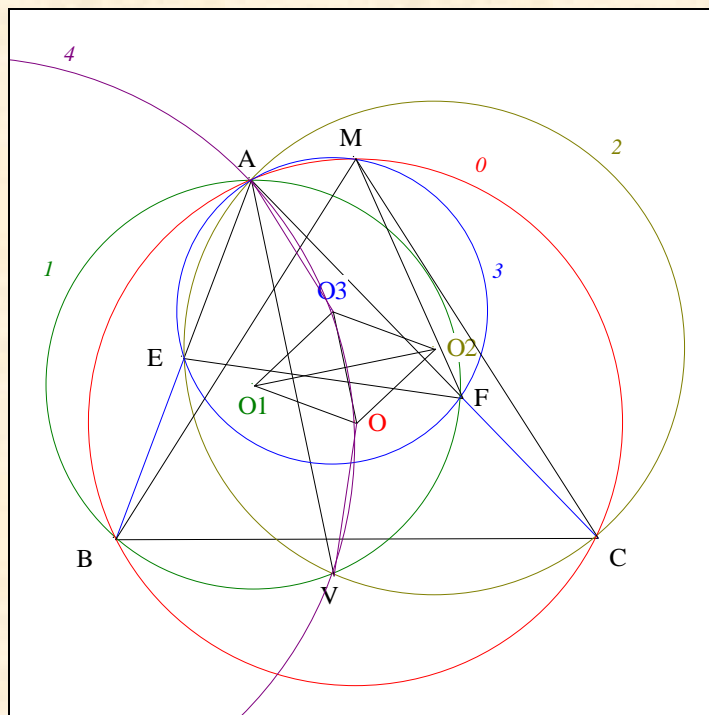
- Nous avons :  $(OO1) \perp (AEB)$  et  $(AEB) \perp (O2O3)$  ;  
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,  $(OO1) \parallel (O2O3)$ .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que  $(OO2) \parallel (O1O3)$ .
- Le quadrilatère  $OO2O3O1$  ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme.



- D'après "Le théorème a.c.a."<sup>13</sup>, les triangles MEB et MFC sont égaux ;  
en conséquence,  $MA = MC$  et  $ME = MF$ .
- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 3) appliqué au triangle M-isocèle MBC,  
M est le premier A-perpoint de ABC ;  
en conséquence,  $(AM)$  est la A-bissectrice extérieure de ABC.
- Nous avons
  - (1)  $(AV) \perp (AM)$  ;
  - (2)  $(AV) \perp (O1O2)$  et  $(AM) \perp (OO3)$  ;
 la relation  $\perp$  étant compatible avec la relation  $\parallel$ ,  $(O1O2) \perp (OO3)$ .
- Le parallélogramme  $OO2O3O1$  ayant ses diagonales perpendiculaires, est un losange.

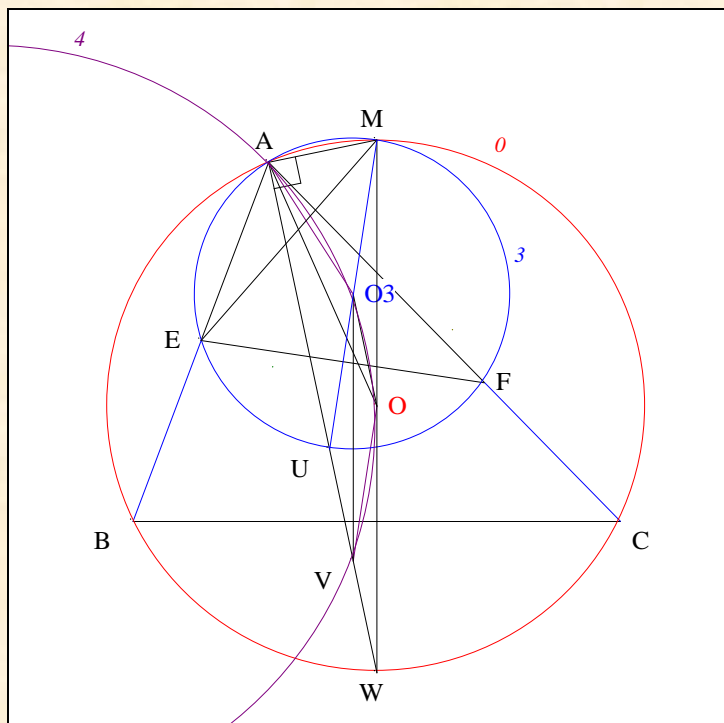
<sup>13</sup>

Angle-côté-côté.



- $(O_1O_2)$  étant la médiatrice commune de  $[AV]$  et  $[OO_3]$ ,  
le quadrilatère  $AO_3OV$  est un trapèze isocèle de base  $(OO_3)$  et  $(AV)$  ;  
en conséquences,
  - (1)  $OA = VO_3$  ( $= OW$ ).
  - (2)  $A, O_3, O$  et  $V$  sont cocycliques.

- Notons  $4$  ce cercle.



- Notons  $U, W$  les seconds points d'intersection resp. de  $(MO_3), (AV)$  resp. avec  $3, 0$ .
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle",  $M, O$  et  $W$  sont alignés.

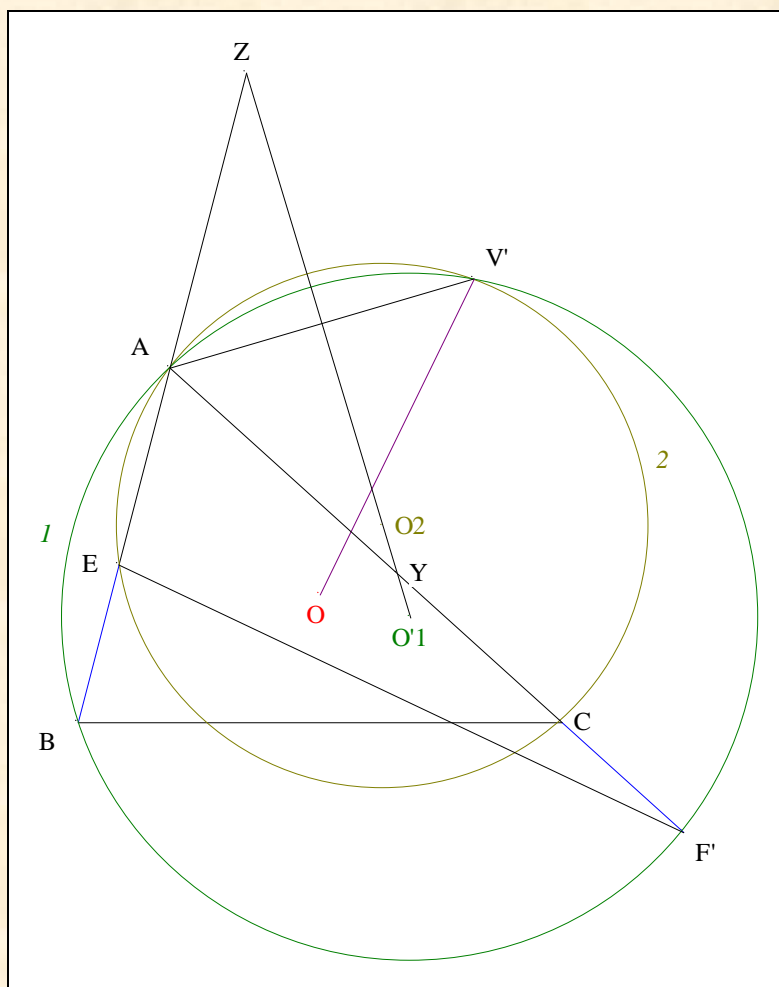


- Le triangle MEF étant M-isocèle, M, O3 et U sont alignés.
- Une chasse angulaire à  $\pi$  près :  
 le triangle OAW étant O-isocèle,  $\angle OWA = \angle WAO$  ;  
 AO3OV étant un trapèze isocèle,  $\angle WAO = \angle O3VA$  ;  
 par transitivité de la relation  $\parallel$ ,  $\angle OWA = \angle O3VA$  ;  
 en conséquence,  $(VO3) \parallel (OW)$ .
- Le quadrilatère WO3VW ayant deux côtés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;  
 en conséquence,  $OO3 = WV$ .
- D'après "Le théorème de la droite des milieux" appliqué au triangle MUW,  $UV = OO3$ .
- Le quadrilatère OO3UV ayant deux côtés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;  
 en conséquence,  $(OV) \parallel (UO3M)$  ;  
 le triangle MEF étant M-isocèle,  $(UO3) \perp (EF)$  ;  
 d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,  $(OV) \perp (EF)$ .
- **Conclusion** : (OV) est perpendiculaire à (EF).

## 7. La généralisation de Virgil Nicula

### VISION

Figure :



<b>Traits :</b>	ABC	un triangle,
	$O$	le cercle circonscrit à ABC,
	$O$	le centre de $O$ ,
	E, F	deux points resp. de $[BA]$ , $[CA]$ tels que $BE = CF$ ,
	$F'$	le symétrique de F par rapport à C,
	$I', 2$	les cercles circonscrits resp. des triangles $ABF'$ , $ACE$ ,
	$O'1, O2$	les centres resp. de $I', 2$
	$V'$	le second point d'intersection de $I'$ et $2$ ,
et	J, K	les points d'intersection de $(O'1O2)$ resp. avec $(AC)$ , $(AB)$ .

<b>Donnés :</b>	(1)	$(OV')$ est la A-bissectrice estérieure de ABC
	(2)	AJK est A-socèle
	(3)	$(OV')$ est perpendiculaire à $(EF')$ . <sup>14</sup>

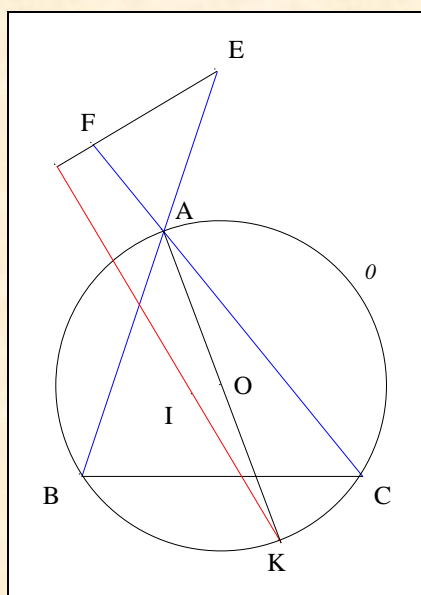
**Commentaire :** la visualisation se calque sur les précédentes.

## 8. Deux segments égaux au demi périmètre d'un triangle

### VISION

<sup>14</sup> Nicula V., Two perpendicular lines, *Mathlinks* du 21/07/2010 ;  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=358079>.

Figure :



**Traits :** ABC un triangle,  
 $O$  le cercle circonscrit à ABC,  
 $O$  le centre de  $O$ ,  
 $I$  le centre de ABC,  
 $K$  l'antipôle de A relativement à  $O$ ,  
 $E$  le point de contact du B-excercle de ABC avec (AB)  
 et  $F$  le point de contact du C-excercle de ABC avec (CA).

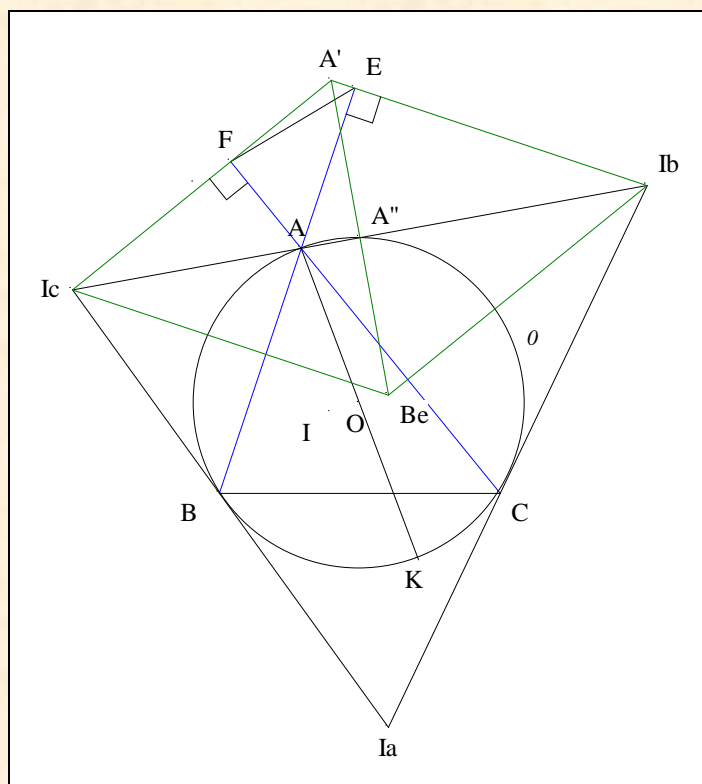
**Donné :** (KI) est perpendiculaire à (EF).<sup>15</sup>

### VISUALISATION

**Commentaire :** dans cette situation les segments égaux sont implicitement donnés.  
 Par culture géométrique, nous savons que  $BE = CF$ .<sup>16</sup>

<sup>15</sup> Sharygin I., Problème II 137, *Problemas de geometria*, Editions Mir (1986).

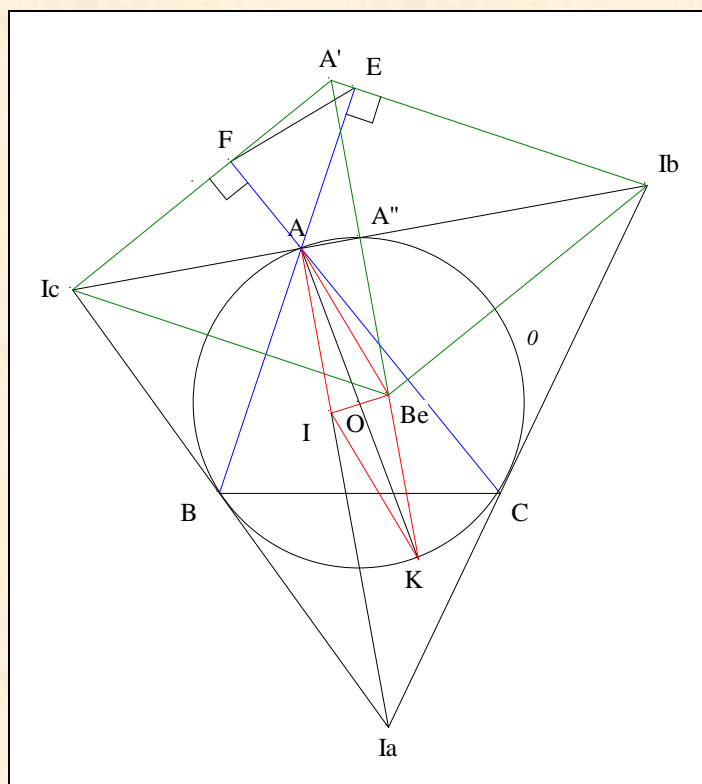
<sup>16</sup> Ayme J.-L., Le résultat de Larrosa Canestro, G.G.G. vol.5 p. 5-7 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.



- Notons  $I_a I_b I_c$  le triangle excentral de ABC,  
 $A'$  le point d'intersection de  $(I_b E)$  et  $(I_c F)$ ,  
 $Be$  le point de Bevan<sup>17</sup> de ABC  
 et  $A''$  le milieu de  $[I_b I_c]$ .
- D'après "Le théorème de la médiatrice",  $(Be I_b) \perp (AC)$  ,  $(Be I_c) \perp (AB)$  ,  $Be I_b = Be I_c$  ;  
 par hypothèses,  $(AC) \perp (A' I_c)$  ,  $(AB) \perp (A' I_b)$  ;  
 d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,  $(Be I_b) \parallel (A' I_c)$  ,  $(Be I_c) \parallel (A' I_b)$  ;  
 en conséquence, le quadrilatère  $A' I_c Be I_b$  est un losange.

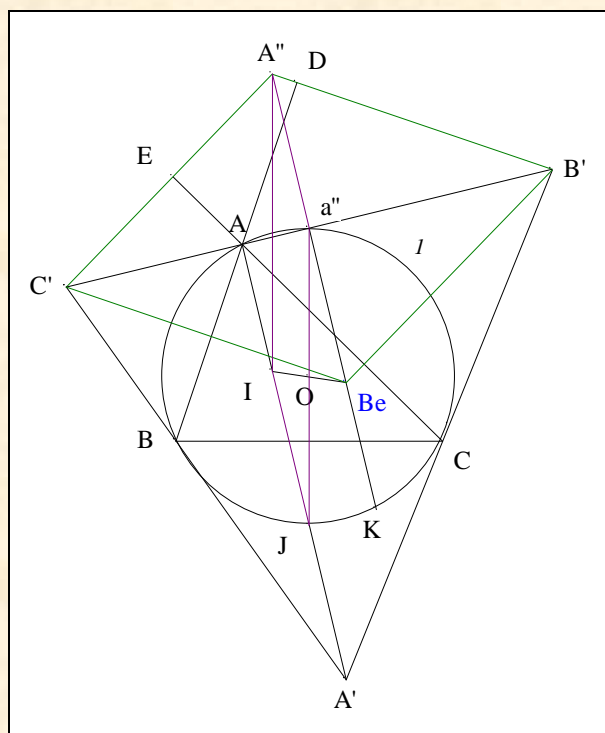
<sup>17</sup>

i.e. le centre du cercle circonscrit à  $I_a I_b I_c$ .

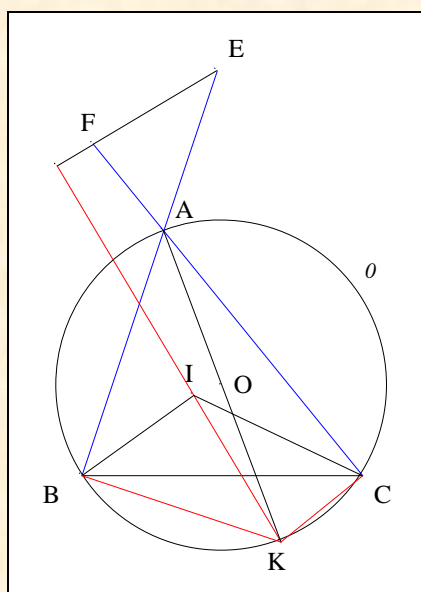


- **Scolies :**
  - (1)  $O$  est le cercle d'Euler de  $I_a I_b I_c$
  - (2)  $(I_b I_c)$  est la médiatrice de  $[A'Be]$
  - (3)  $Be$  est le centre du cercle circonscrit à  $I_a I_b I_c$ .
- D'après Thalès "Triangle inscritible dans un demi cercle",  $(A''A''Be)$  passe par  $K$ .
- D'après "Le théorème de Mention",  $I$  est l'orthocentre de  $I_a I_b I_c$  ;  
d'après Feuerbach "Le centre N",  $O$  est le milieu  $[IBe]$ .
- Le quadrilatère  $AIKBe$  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme.





- Notons  $J$  le second point d'intersection de  $(AI)$  avec  $I$   
et  $R$  le rayon du cercle circonscrit.
  - Le quadrilatère  $A''IJa''$  ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;  
en conséquence,  $A''I = a''J$ .
  - **Conclusion :**  $A''I = R$ .
- (2) Une autre nature de  $K$



- D'après Lemoine "Triangles orthologiques" <sup>18</sup>,  
 $K$  est un orthopôle du triangle  $IBC$  relativement au triangle  $AED$ .

<sup>18</sup>

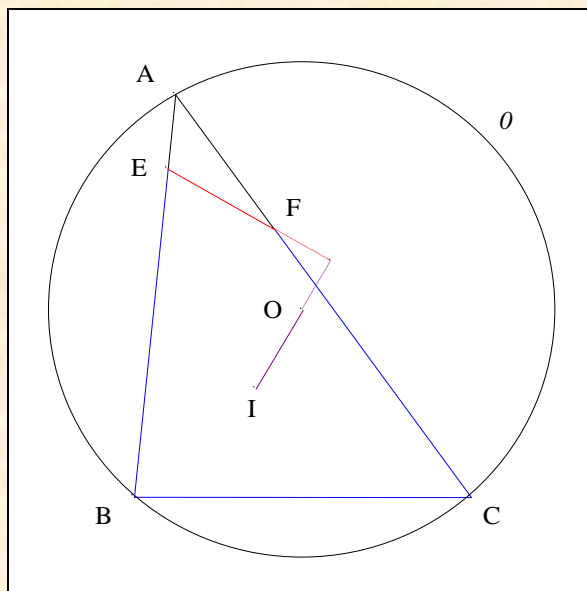
Ayme J.-L., A propos de deux triangles orthologiques, G.G.G. vol.6 p. 2-6 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.



### 9. Une perpendiculaire à (OI)

#### VISION

Figure :



**Traits :**      ABC    un triangle tel que [BC] en soit le plus petit côté,  
                    $\mathcal{O}$     le cercle circonscrit à ABC,  
                   O    le centre de  $\mathcal{O}$ ,  
                   I    le centre de ABC,  
                   E    le point de [BA] tel que BE = BC  
                   et    F    le point de [CA] tel que CF = BC.

**Donné :**      (OI) est perpendiculaire à (EF).<sup>19</sup>

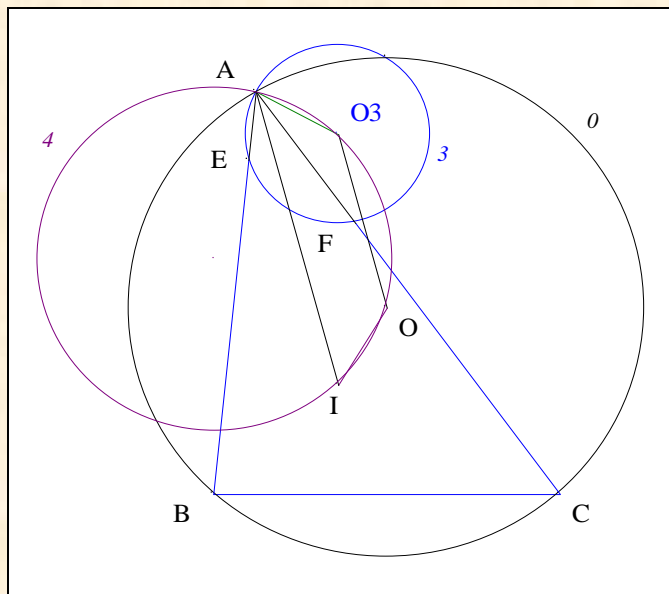
#### VISUALISATION

<sup>19</sup> TS Lituanie (1999), *Mathlinks* du 29/12/2009 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=321293> ;  
 am = ab = bn, *Mathlinks* du 18/02/2010 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=332588> ;  
 Almoust IMO, *Mathlinks* du 07/07/2009 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=281652>.



- Notons  $2$  ce cercle.
- **Scolie :** ici, le point  $I$  correspond au point  $V$  de la situation A. 6. Deux perpendiculaires.
- **Conclusion :** d'après A. 6. Deux perpendiculaires,  $(OI)$  est perpendiculaire à  $(EF)$ .

**Scolie :** deux résultats particuliers



- Notons  $3$  le cercle circonscrit au triangle AEF,  
 $O3$  le centre de  $3$ ,  
 et  $4$  le cercle passant par A,  $O3$ , O.
- **Conclusion :** d'après A. 6. Deux perpendiculaires, \*  $AO3OI$  est un trapèze isocèle <sup>22</sup>  
 \*  $4$  passe par I. <sup>23</sup>

**Remerciements :** ils vont tout particulièrement aux Roumains Mihai Miculita et à Petrisor Neagoe qui se sont intéressés à cette difficile situation.

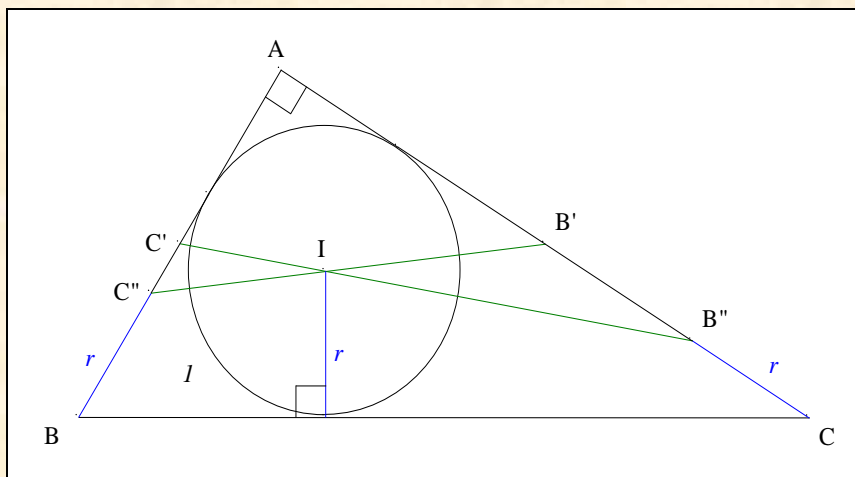
## 10. Deux segments égaux au rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle

### VISION

**Figure :**

<sup>22</sup> Turkey National Olympiad 2002-D2-P2, Equal to distance between the incenter and the circumcenter, *Mathlinks* du 05/03/2011 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=395162>.

<sup>23</sup> Ayme J.-L., Four points on a circle, *Mathlinks* du 26/07/2010 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=358741>.



**Traits :**

- ABC un triangle A-rectangle,
- $I$  le cercle inscrit dans ABC,
- $I$  le centre de  $I$ ,
- $r$  le rayon de  $I$ ,
- $C''$  le point de  $[BA[$  tel que  $BC'' = r$ ,
- $B''$  le point de  $[CA[$  tel que  $CB'' = r$

et  $B', C'$  les milieux resp. de  $[CA]$ ,  $[AB]$ .

**Donné :**  $(B'C'')$  et  $(C'B'')$  se coupent en  $I$ .

**Commentaire :** pour plus d'apprentissage et d'approfondissement, le lecteur peut se référer à l'article *Cercle inscrit dans un triangle rectangle*.<sup>24</sup>

## B. VARIANTES

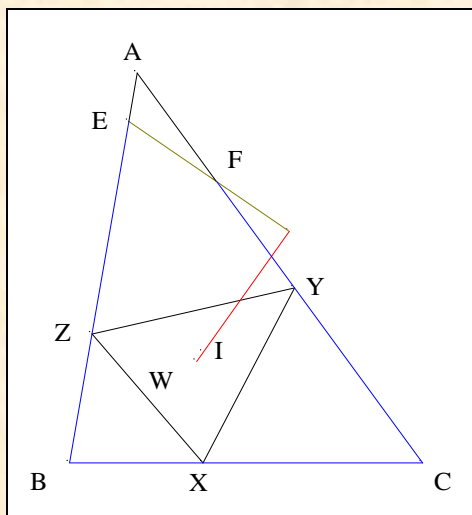
### 1. Une perpendiculaire à la droite d'Euler du triangle de contact

#### VISION

**Figure :**

<sup>24</sup>

Ayme J.-L., Cercle inscrit dans un triangle rectangle, G.G.G. vol.2 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>.

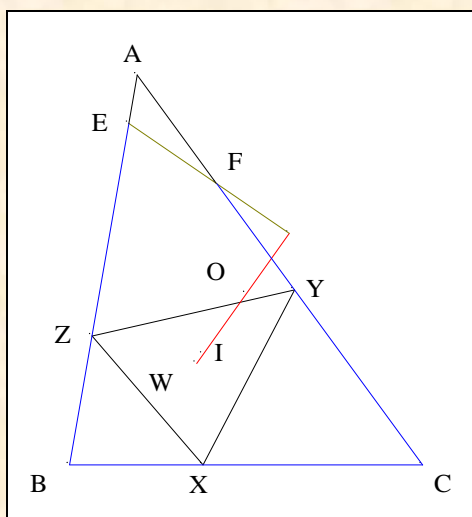


**Traits :** ABC un triangle tel que  $[BC]$  en soit le plus petit côté,  
 I le centre de ABC,  
 XYZ le triangle de contact de ABC,  
 W le point de Weil<sup>25</sup> de ABC,  
 E le point de  $[AB]$  tel que  $BE = BC$   
 et F le point de  $[AC]$  tel que  $CF = BC$ .

**Donné :**  $(EF)$  est perpendiculaire à  $(WI)$ .<sup>26</sup>

### VISUALISATION

**Commentaire :** dans cette situation nous avons trois segments égaux



- **Scolies :** (1)  $(WI)$  est la droite d'Euler de XYZ  
 (2) ABC est le triangle tangential de XYZ.
- Notons O le centre du cercle circonscrit de ABC.
- D'après "Le résultat de Gob"<sup>27</sup>, O est sur  $(WI)$ .

<sup>25</sup> i.e. le point médian de XYZ.

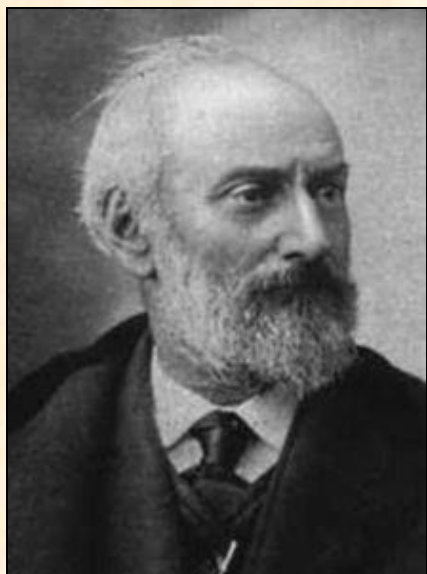
<sup>26</sup> Laisant Ch. A., AFAS Congrès de Limoges (1890).

<sup>27</sup> Ayme J.-L., Droite de Simson de pôle Fe relativement au triangle de contact, G.G.G. vol.6, p.12 ;

- **Conclusion :** d'après A. 9. Une perpendiculaire à (OI), (EF) est perpendiculaire à (WI).

**Note historique :** ce résultat de Charles-Ange Laisant a été repris par Joseph Neuberg<sup>28</sup> dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires*. Une solution en a été donnée dans la même revue en 1890 par l'historiographe Eugène Vigarié et Bernès qui généralise cette situation. Ce résultat a été reproposé en 1998 par Jiro Fukuta<sup>29</sup>, professeur à l'université Cifu (Japon), dans la revue *Mathematical Magazine* ; une solution en a été donnée en 1999 dans la même revue par Peter Y. Woo de l'université de Biola (Etats-Unis).

### Une courte note biographique de Charles-Ange Laisant



30

Charles-Ange Laisant est né à La Basse-Indre (Loire inférieure) le premier novembre 1841. Élève de l'École Polytechnique (promotion 1859), promu officier de génie à sa sortie, puis capitaine durant la guerre franco-allemande, il démissionne de l'armée en 1875. Il commence une carrière politique à Nantes comme député boulangistes du "groupe ouvrier" de Loire-Inférieure (1876-1885), dirige le *Petit Parisien* et soutient le 29 novembre 1877 son doctorat constitué de deux thèses.

Député de la Seine (1885-1893), ayant des démêlés politico judiciaires, il est acquitté et revient à l'enseignement des mathématiques à l'École Polytechnique en 1893. Avec Émile Lemoine, il fonde en 1894 l'*Intermédiaire des mathématiciens* qu'il continue avec Henri Fehr de Genève en 1899.

Auteur de nombreux articles dans les *Nouvelles Annales*, la *Nouvelle correspondance mathématique*, *Mathesis*, il traduit les *Équipollences* de Bellavitis et écrit en 1893 son *Recueil de problèmes mathématiques* en six volumes. Laisant est le premier à avoir considéré les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygone<sup>31</sup>. Il décède en 1920.

Rappelons que Charles-Ange Laisant est le neveu d'Ange Guépin (1805-1873), médecin et homme politique socialiste lié à Louis Blanc, Michelet, Henri Martin et Waldeck-Rousseau.

---

<http://perso.orange.fr/jl.ayme>.

<sup>28</sup> Neuberg J., *Journal de Mathématiques Élémentaires* p.304 ; solutions de Vigarié (1890) 92 et Bernès (1890) 139.

<sup>29</sup> Fukuta J., Problem 1573, *Math. Magazine*.

<sup>30</sup> Wikipedia, [http://fr.wikipedia.org/wiki/Charles-Ange\\_Laisant](http://fr.wikipedia.org/wiki/Charles-Ange_Laisant).

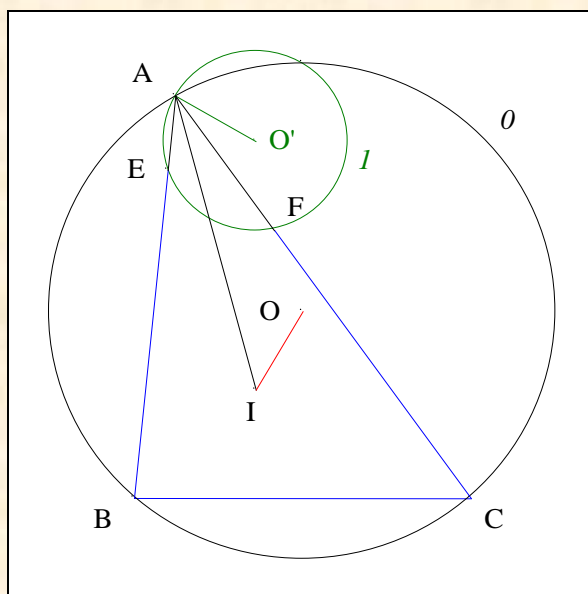
<sup>31</sup> Laisant C.-A., *Nouvelle correspondance* 1877 p. 368 et 400 question 290 et 302.



## 2. Le segment $[OI]$

### VISION

Figure :



**Traits :**

ABC	un triangle tel que $[BC]$ en soit le plus petit côté,	
$O$	le cercle circonscrit à ABC,	
O	le centre de $O$ ,	
I	le centre de ABC,	
E	le point de $[AB]$ tel que $BE = BC$ ,	
F	le point de $[AC]$ tel que $CF = BC$ ,	
$I$	le cercle circonscrit du triangle AEF	
et	O'	le centre de $I$ .

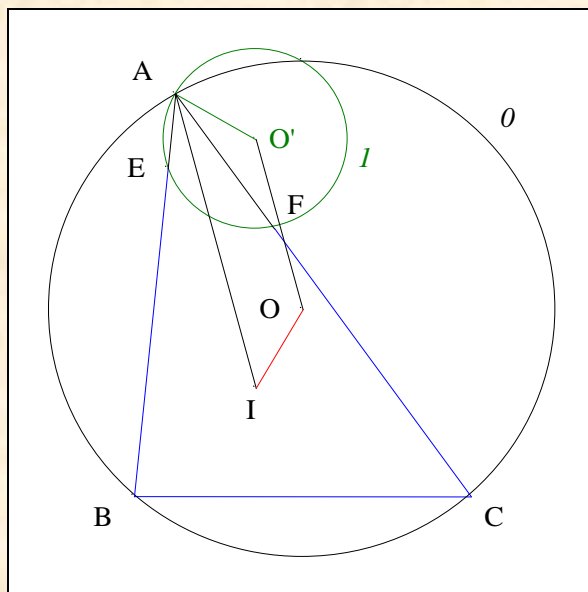
**Donné :**  $AO' = OI$ .<sup>32</sup>

### VISUALISATION

<sup>32</sup>

$JA = OI$ , Mathlinks du 28/07/2009 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=359290>.



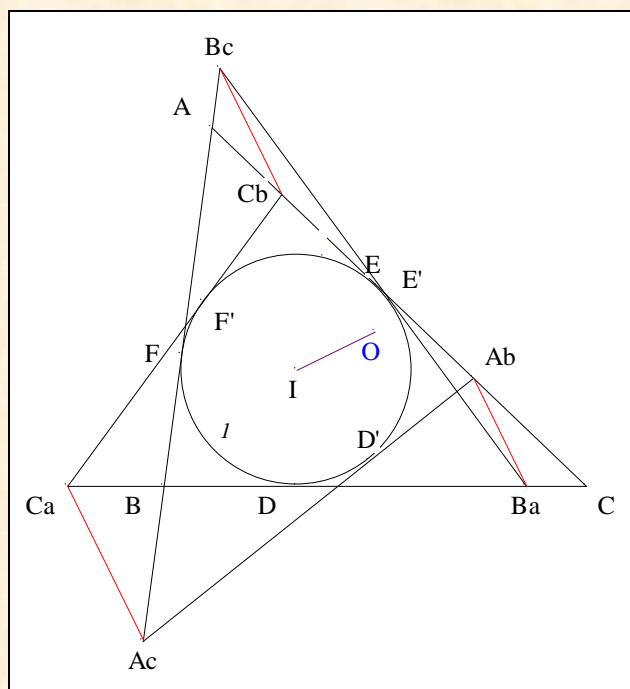


- D'après A. 9. Une perpendiculaire à (OI), le trapèze  $AO'OI$  est isocèle.
- **Conclusion :**  $AO' = OI$ .

### 3. Trois perpendiculaires à (OI)

#### VISION

Figure :



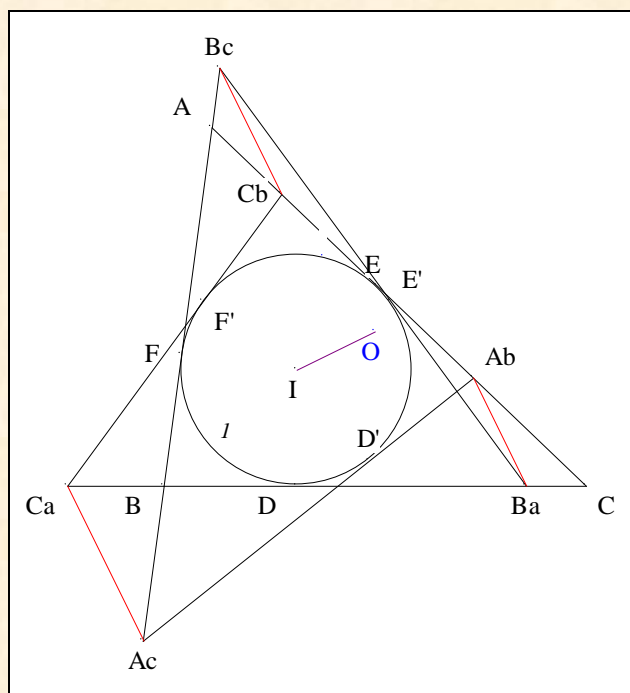
**Traits :**

ABC	un triangle,
O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
I	le cercle inscrit de ABC,

	I	le centre de $I$ ,
	D, E, F	les points de contact de $I$ resp. avec $[BC]$ , $[CA]$ , $[AB]$ ,
	D', E', F'	les symétriques resp. de P, Q, R par rapport aux A, B, C-bissectrices de ABC,
	Ab, Ac	les points d'intersection de la tangente à $I$ en D' resp. avec $(CA)$ , $(AB)$ ,
	Bc, Ba	les points d'intersection de la tangente à $I$ en E' resp. avec $(AB)$ , $(BC)$
et	Ca, Cb	les points d'intersection de la tangente à $I$ en F' resp. avec $(BC)$ , $(CA)$ .

**Donné :** (BcCb), (CaAc) et (AbBa) sont parallèles entre elles et perpendiculaires à (OI).<sup>33</sup>

### VISUALISATION



- Un calcul segmentaire :  
d'après Euclide "Deux tangentes égales",  
par symétrie d'axe (BI),  
d'après Euclide "Deux tangentes égales",  
par substitution,  
i.e.  

$$BC = BD + DC ;$$

$$BD = BF \text{ et } CD = CE ;$$

$$CE = BcE' ;$$

$$BcE' = BcF ;$$

$$BC = BF + BcF$$

$$BC = BBc.$$
- Mutatis mutandis, nous montrerions que  

$$BC = BBc = CCb$$

$$CA = CCa = AAc$$

$$AB = AAb = BBa.$$
- **Conclusion :** d'après A. 9. Une perpendiculaire à (OI),  

$$(1) \quad (BcCb) \perp (OI) \quad , \quad (CaAc) \perp (OI) \quad , \quad (AbBa) \perp (OI) ;$$

$$(2) \quad (BcCb), (CaAc) \text{ et } (AbBa) \text{ sont parallèles entre elles.}$$

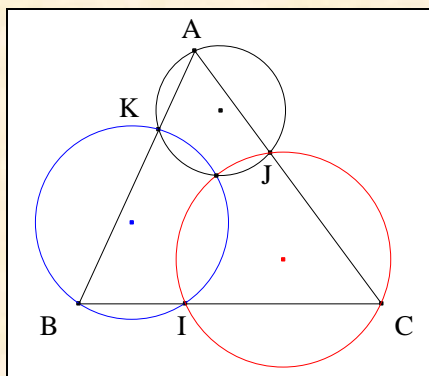
**Note historique :** c'est en répondant à un Message *Hyacinthos* de 2003 que Darij Grinberg<sup>34</sup> redécouvre sans le savoir le résultat de Charles-Angé Laisant.

<sup>33</sup> Laisant Ch. A., *AFAS*, Congrès de Limoges (1890).

<sup>34</sup> Grinberg D., Bicentric quadrilaterals (was: Problem 2 of XXIII IMO 1982), Message *Hyacinthos* # 7402 du 31/07/2003 ; <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>.

## C. ANNEXE

### 1. Le théorème du pivot <sup>35</sup>

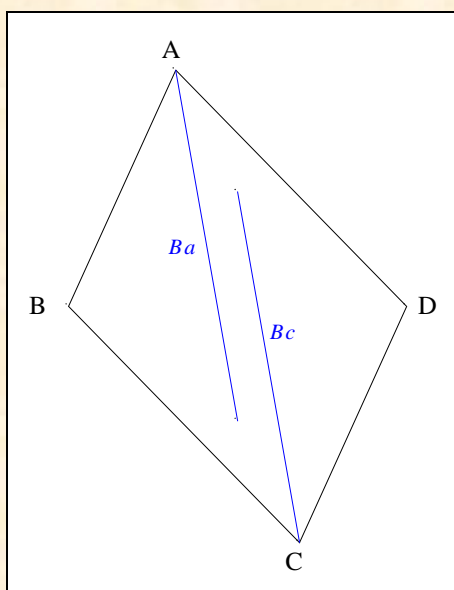


**Traits :** ABC un triangle,  
I un point de (BC),  
J un point de (CA)  
et K un point de (AB).

**Donné :** les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK et CJI sont concourants.

**Commentaire :** ce résultat reste vraie dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

### 2. Bisectrices intérieures d'un parallélogramme



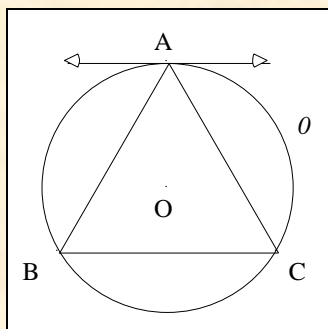
**Traits :** ABCD un parallélogramme,  
et Ba, Bc les A, C-bisectrices intérieures de ABCD.

<sup>35</sup>

Miquel A., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville 3 (1838) 485-487.

**Donné :**  $Ba$  est parallèles à  $Bc$ .

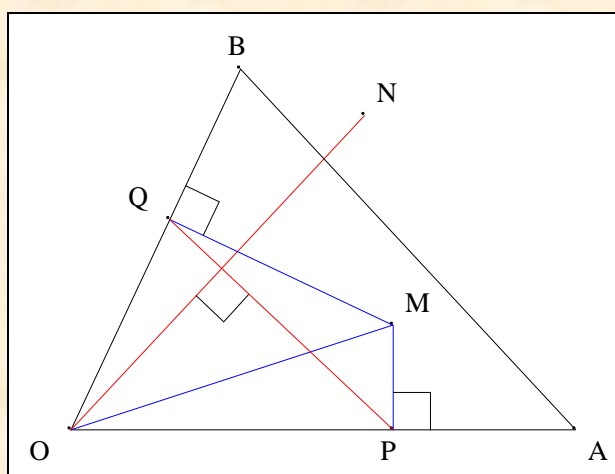
### 3. La tangente au sommet



**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $O$  le cercle circonscrit à  $ABC$ ,  
 $O$  le centre de  $O$   
 et  $Ta$  la tangente à  $O$  en  $A$ .

**Donné :**  $ABC$  est isocèle en  $A$  si, et seulement si,  $Ta$  est parallèle à la base  $(BC)$ .

### 4. Isogonale et perpendiculaire<sup>36</sup>



**Traits :**  $OAB$  un triangle,  
 $M$  un point,  
 $P, Q$  les pieds des perpendiculaires abaissées de  $M$  resp. sur  $(OA)$  et  $(OB)$ ,  
 et  $N$  un point.

**Donné :**  $(ON)$  est l'isogonale de  $(OM)$  par rapport à  $(OA)$  et  $(OB)$   
 si, et seulement si,  
 $(ON)$  est perpendiculaire à  $(PQ)$ .

<sup>36</sup> Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.

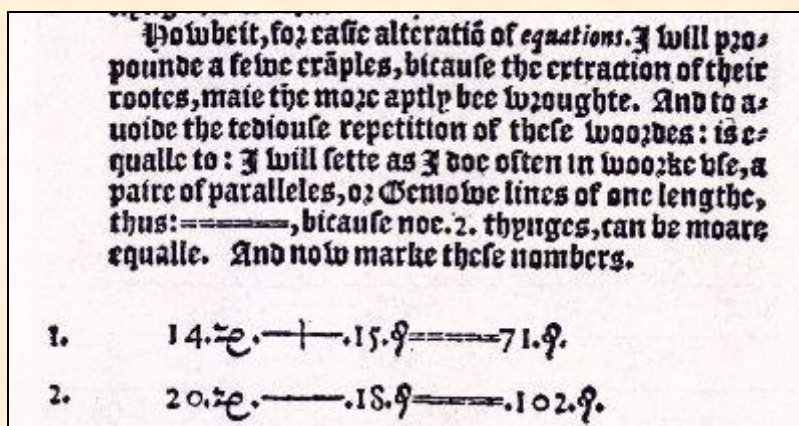
## D. LE SYMBOLE DE L'ÉGALITÉ



*J'userai de lignes jumelles d'une certaine longueur  
car rien n'est plus pareil que deux jumeaux.*

Robert Recorde<sup>37</sup>

Robert Recorde est né à Tenby (Pays de Gales, Grande-Bretagne) en 1510. Deuxième fils du Galois Thomas Recorde et Rose Jones de Machynlleth (Montgomeryshire), il entre vers 1525 à l'Université d'Oxford, obtient son B.A. en 1531 et y enseigne durant quelques années. Il entre ensuite à l'Université de Cambridge où il est en sort diplômé en 1545 et, enfin, s'installe à Londres pour y exercer la médecine. En 1549, il est nommé contrôleur des monnaies royales. Poursuivi pour diffamation par un ennemi politique, suite à une accumulation de dettes, il est retrouvé à la prison du King' Bench du Southwark où il écrit son testament le 28 juin 1558 léguant à ses quatre fils et à ses cinq filles les quelques argents qui lui reste. Il décède quelques semaines après.



Le symbole = de l'égalité avec des lignes plus allongées<sup>38</sup> apparaît pour la première fois dans l'histoire des mathématiques en 1557 dans le livre de Robert Recorde intitulé *The Whetstone of Witte*. Ce symbole n'a pas eu de succès immédiat. Certains utilisèrent deux lignes verticales juxtaposées || comme symbole, d'autres deux lettres<sup>39</sup> *ae* (ou *oe*) venant du mot "aequalis" i.e. égal, largement utilisées au XVII-ème siècle.<sup>40</sup>

<sup>37</sup> Recorde, R., *Whetstone of Witte*, 1557.

<sup>38</sup> Cajori F., *A history of mathematics*, vol. 1, p. 164.

<sup>39</sup> Cajori F., *A history of mathematics*, vol. 1, p. 297.



Le symbole = réapparaît en 1618 dans un Appendice anonyme probablement écrit par William Oughtred, puis en 1631 chez Thomas Harriot.<sup>41</sup>

Pour confirmer ses sources, William Cajori<sup>42</sup> (1859-1930) écrivait :

*Un manuscrit de l'Université de Bologne (Italie) contient des dates concernant le signe de l'égalité (=). Ces dates m'ont été communiqué par le professeur E. Bortolotti et tendent à prouver que (=) a été développée à Bologne indépendamment de Robert Recorde et peut être encore plus tôt.*

Cajori écrivait quelque part ailleurs que ce manuscrit devait avoir été écrit entre 1550 et 1568.

---

<sup>40</sup> <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>.

<sup>41</sup> Cajori F., *A history of mathematics*, vol. 1, p. 298.

<sup>42</sup> Cajori F., *A history of mathematics*, vol. 1, p. 126.