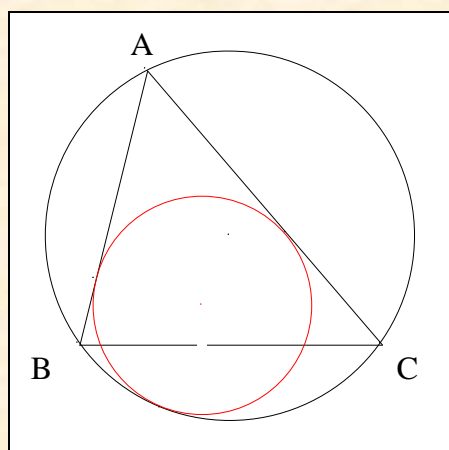


A NEW MIXTILINEAR INCIRCLE ADVENTURE I

†

Jean – Louis Ayme ¹



Un cercle y règne sans partage

Résumé : nous présentons une San Gaku i.e. une énigme géométrique japonaise gravée sur une tablette votive, voire un cercle de Longchamps accompagné de nombreuses propriétés, de notes historiques, de commentaires et de références connues de l'auteur. Les figures sont toutes en position générale et les théorèmes cités peuvent tous être prouvés synthétiquement.

Remerciements: l'auteur remercie tout particulièrement le professeur Ercole Suppa pour son attentive relecture de cet article.

Abstract. We present a San Gaku i.e. Enigma geometric Japanese engraved on a votive tablet, or a circle of Longchamps accompanied many properties, historical notes, comments and references known to the author. The figures are all in general position and cited theorems can all be proven synthetically.

Acknowledgements. the author thanks Professor Ercole Suppa for his attentive proofreading of this article.

¹ St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 01/10/2010 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

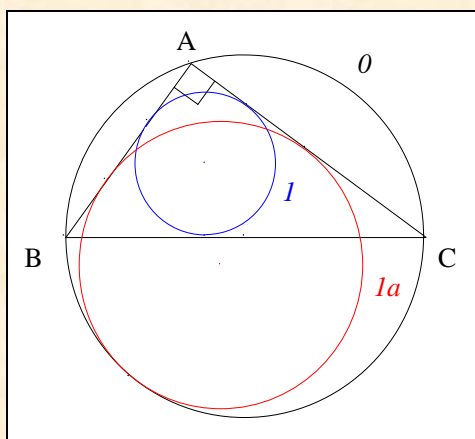
| Sommaire | |
|--|-----------|
| I. Préfecture d'Iwate (Japon) | 3 |
| 1. Une San Gaku de 1842 | |
| 2. Le triangle d'or de Stanley Rabinowitz | |
| II. Gohierre de Longchamps ou la question 659 | 9 |
| 1. Une bissectrice intérieure | |
| 2. Première partie de la question 659 ou la polaire de A | |
| 3. Le résultat d'Etienne Deprez | |
| 4. L'alignement remarquable d'Eugène Lauvernay | |
| 5. Une droite de Longchamps | |
| 6. Début de la seconde partie de la Question 659 ou la "concourance" des droites de Longchamps | |
| 7. Fin de la seconde partie de la Question 659 ou M est l'isogonal de Na | |
| III. Deux "concourances" remarquables | 33 |
| 1. Première "concourance" | |
| 2. Seconde "concourance" | |
| IV. Un cercle remarquable | 39 |
| 1. Un quadrilatère harmonique | |
| 2. Un cercle tangent en un point de Longchamps | |
| 3. Un cercle remarquable | |
| V. Deux tangentes remarquables | 45 |
| 1. Une autre San Gaku d'Iwate | |
| 2. Une variation sur cette San Gaku | |
| 3. La tangente de Léon Bankoff | |
| 4. Une tangente de l'auteur | |
| VI. Questions diverses | 58 |
| 1. Une parallèle à (AI) | |
| 2. Avec le point de Feuerbach | |
| 3. Un parallélogramme | |
| 4. Axe radical d'un cercle de Longchamps et du cercle inscrit | |
| 5. Une parallèle à (AC) | |
| 6. Une situation de l'auteur | |
| 7. Un résultat de Paul Yiu | |
| VII. Deux cercles associés à un cercle de Longchamps | 82 |
| 1. Les deux cercles associés | |
| 2. Deux tangentes aux cercles associés | |
| 3. Le P-cercle de Morley des cercles associés | |
| VIII. Annexe | 89 |
| IX. Archives | 96 |

I. PRÉFECTURE D'IWATE (JAPON)

1. Une San Gaku ² de 1842

VISION

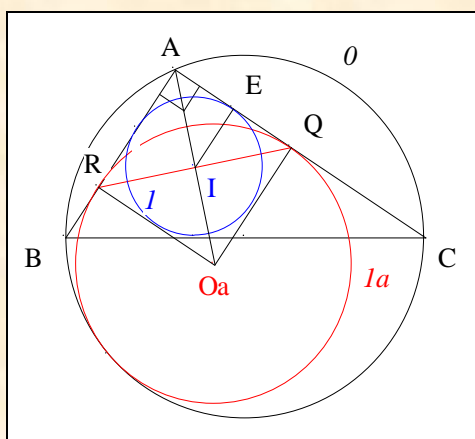
Figure :



Traits : ABC un triangle A-rectangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 I le cercle inscrit à ABC
 et Ia le A-cercle de Longchamps³ de ABC .

Donné : le rayon de Ia est égal au diamètre de I .⁴

VISUALISATION



• Notons Q, R les points de contact de Ia resp. avec (AC) , (AB) ,
 I le centre de I ,
 Oa le centre de Ia
 et E le point de contact de I avec (AC) .

² Préfecture d'Iwate (Japon)

³ Cf. p. 10

⁴ Yuko Yasutomi, private circulation, Iwate (1982)

- **Scolies :**
 - (1) d'après II. 3. Le résultat de Deprez, I est le milieu de $[QR]$
 - (2) le quadrilatère $AOaQ$ étant un carré, I est le milieu de $[AOa]$.
- Par définition d'une tangente, $(IE) \perp (AC)$;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(AC) \perp (OaQ)$;
 $(IE) \parallel (OaQ)$.
- D'après l'axiome de passage **IIIa**, E est le milieu de $[AQ]$.
- D'après "Le petit théorème de Thalès" appliqué au triangle $AOaQ$, $OaQ = 2.IE$.
- **Conclusion :** le rayon de Ia est égal au diamètre de I .

Note historique : cette San Gaku ⁵ de la préfecture d'Iwate (Japon) datant de 1842, a été repropo-
sée par Léon Bankoff ⁶ en 1954 dans l'*American Mathematical Monthly*. Deux solutions ⁷ en
ont été données, l'une s'appuyant sur le cercle des neuf points et l'autre, sur une
approche analytique.
Cette San Gaku a été présentée comme problème en 2001 dans la revue canadienne
Crux Mathematicorum ⁸.
Une San Gaku ⁹ analogue de la préfecture de Fukushima (Japon) datant de 1893, ne
considère pas le cercle inscrit mais demande simplement de montrer que le diamètre
du cercle Ia est égal à $a + b - c$ où a et b sont les mesures de AB et AC et c celle de
 BC .

Un peu d'histoire :

en 1635, un puissant Shogun i.e. un seigneur féodal, tenait le mikado i.e. l'empereur du Japon en tutelle,
interdisait à tout ressortissant du Japon de quitter l'île. Quatre années plus tard, il rompait toute relation avec
l'Espagne et le Portugal qui étaient depuis longtemps présents dans les parages. Seuls les chinois et les hollandais
purent continuer à commercer à distance. Durant la période Edo qui alla de 1603 à 1867, le Japon vécut sur lui-
même. Les connaissances mathématiques n'arrivèrent plus et seul, par miracle, fut connu le traité de Yang Hui
datant de 1261 qui sera traduit en japonais en 1661 par Seki Takakazu.

Une coutume voulait que les géomètres japonais inscrivent leurs découvertes sur des tablettes de bois qu'ils
pendaient dans les sanctuaires shintoïstes ou dans les temples bouddhistes à la gloire des Dieux¹⁰ et à l'honneur
de leurs auteurs. Certaines divinités étaient supposées aimer les mathématiques et plus particulièrement les
théorèmes de géométrie. Les historiens ont recensé environs 900 San Gaku, les plus anciens datant du XVIIème
siècle.

Si, dans la géométrie développée par les grecs, les arabes et les latins, le triangle a une situation privilégiée, dans
la géométrie dite des "Temples japonais", c'est le cercle qui occupe une position prépondérante. Sur la plupart
des San Gaku ou tablettes votives en bois, sont gravés avec art de simples figures en couleurs accompagnées
d'aucune démonstration mais impliquant le challenge "See if you can prove this !".

Notons que c'est le professeur Hidetoschi Fukagawa du Lycée de la préfecture d'Aichi (Japon), une ville située
entre Tokyo et Osaka, qui souhaitant améliorer ses cours en passionnant pour les San Gaku, se mit dans les
années 70, à les traduire, à les recenser et même à en découvrir; cette passion lui a permis de soutenir une thèse à
l'Académie des Sciences de Bulgarie.

⁵ Fukagawa H., Pedoe D., 2.3.3. Japanese Temple Geometry Problems
Charles Babbage Research Centre (1989) ; ISBN 0-919611-21-4

⁶ Bankoff L., (proposer of) Problem **E 1141**, *American Mathematical Monthly* 61 (1954) 711

⁷ Solutions to Problem E 1141, *American Mathematical Monthly* 62 (1955) 444

⁸ Okumura Hiroshi and Watanabe Masayuki, Tangent circles in the ratio 2:1, *Crux Mathematicorum* (2001) 116-120

⁹ Fukagawa H., Pedoe D., 2.2.7. Japanese Temple Geometry Problems
Hyogo (1967), Ichiro Yamamoto, private circulation

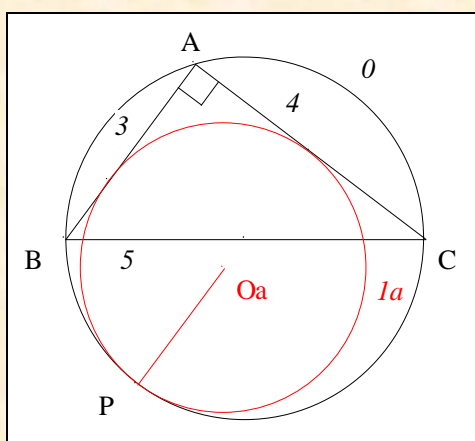
¹⁰ Le shintoïsme est habité par environ 800 dieux appelés kami

En 1989, Hidetoschi Fukagawa ¹¹ et Dan Pedoe ¹² publient le classique *Japanese Temple Geometry Problems* ¹³. En 1998, un article de fond sur ce même sujet est publié par Tony Rothmann dans le *Scientific American* ¹⁴ et en 2002, Fukagawa et John Rigby reviennent sur ce sujet en écrivant *Traditional Japanes Mathematics of the 18th and 19th centuries*.

2. Le triangle d'or de Stanley Rabinowitz

VISION

Figure :

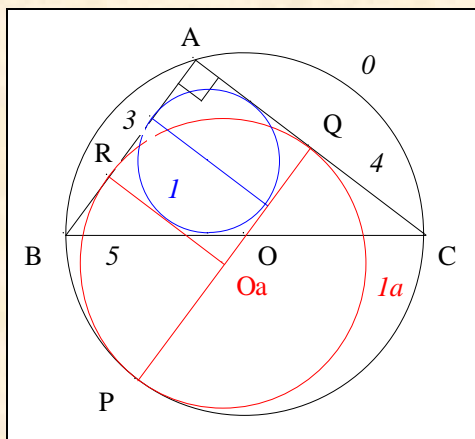


Traits : ABC un triangle rectangle en A,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 Ia le A-cercle de Longchamps¹⁵ de ABC,
 Oa le centre de Ia
 et P le point de contact de Ia et O .

Donné : ABC est d'or ¹⁶ si, et seulement si, (OaP) est parallèle à (AB) .

VISUALISATION NÉCESSAIRE ¹⁷

¹¹ Fukagawa H., Rothman A., *Sacred Geometry : Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press (2008)
¹² Fukagawa H., Pedoe D., *Japanese Temple Geometry Problems*, The Charles Babbage Research Center, Winnipeg (1989)
 The Charles Babbage Research Center, P.O. Box 272, St. Norbert Postal Station, Winnipeg (MB) Canada R3V 1L6
¹³ Fukagawa, Pedoe, *Japanese Temple Geometry Problems*, The Charles Babbage Research Foundation, Winnipeg (1989)
¹⁴ Rothmann T., *Japanese Temple Geometry*, *Sci. Amer.* **278** (Mai 1998) 85-91
¹⁵ Cf. p. 10
¹⁶ Un triangle d'or est un triangle rectangle dont les côtés sont proportionnels à 3, 4 et 5
¹⁷ Rabinowitz S., Problème **703**, *Crux Mathematicorum* (1982) 14



- Notons O le centre de θ ,
et I le cercle inscrit dans ABC
 Q, R les points de contact de Ia resp. avec (AC) , (AB) .
- **Scolies :**
 - (1) O est le milieu de $[BC]$
 - (2) $AROaQ$ est un carré
 - (3) $(OaQ) \parallel (AB)$
 - (4) I a pour diamètre 2 et est inscrit dans $AROaQ$.
- D'après la scolie 4,
en conséquence,
 $AROaQ$ étant un carré,
d'après l'axiome Iva des perpendiculaires,
d'après le postulat d'Euclide,
 Q est le milieu de $[AC]$;
 $(OQ) \perp (AC)$;
 $(AC) \perp (OaQ)$;
 $(OQ) \parallel (OaQ)$;
 $(OQ) = (OaQ)$.
- **Conclusion partielle :** Oa, O, Q sont alignés.
- θ et Ia étant tangent en P ,
 P, Oa, O sont alignés.
- D'après l'axiome d'incidence Ia ,
 P, Oa, O, Q sont alignés.
- **Conclusion :** (OaP) est parallèle à (AB) .

Note historique :

ce résultat a été proposé en 1982 par Stanley Rabinowitz dans la revue *Crux Mathematicorum* ¹⁸ :

"A right triangle ABC has legs $AB = 3$ and $AC = 4$. A circle γ with center G is drawn tangent to the two legs and tangent internally to the circumcircle of the triangle, touching the circumcircle in H . Find the radius of γ and prove that GH is parallel to AB ".

Dans la réponse ¹⁹ à ce problème, nous trouvons :

* le commentaire de John A. Winterink d'Albuquerque (Nouveau Mexique, États-unis) :

"ce problème est un cas spécial du cinquième problème d'Apollonius ²⁰ de Perge en se référant au livre *Appolonius gallus* de François Viète²¹ :

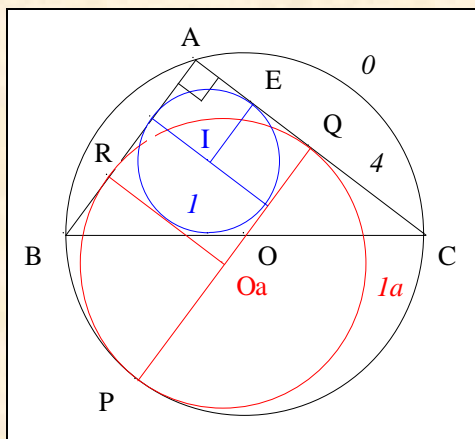
Problema V : Dato circulo, & duabus lineis describere circulum quem datus, & datae duae

¹⁸ Rabinowitz S., Problème 703, *Crux Mathematicorum* vol. 8 (jan. 1982) 14

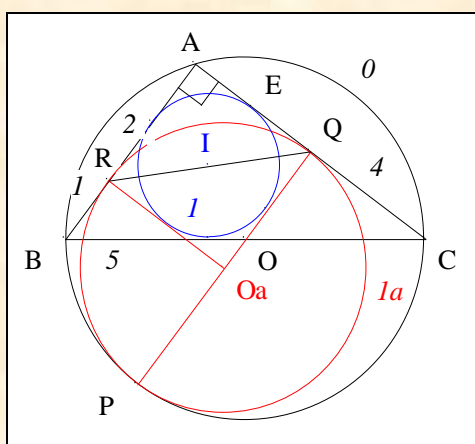
¹⁹ Bankoff L., Problème 703, *Crux Math. with Math. Mayhem* 9 (1983), 28-29

²⁰ Apollonius, dixième problème, *Traité des contacts* ou *De Tactionibus* (ouvrage perdu)

²¹ Viète F., *Appolonius gallus*, Paris (1600) 329



- Notons
 - R le point de contact de la avec (AB) ,
 - I le cercle inscrit dans ABC ,
 - I le centre de ABC
- et
 - E le point de contact de I avec (AC) .
- **Scolies :**
 - (1) $AROaQ$ est un carré
 - (2) I a pour diamètre 2 et est inscrit dans $AROaQ$
 - (3) E est le milieu de $[AQ]$.
- **Conclusion partielle :** $AC = 4$.



- **Scolies :**
 - (1) Q, I, R sont alignés
 - (2) $AR = 2$.
- D'après "Cercle inscrit dans un triangle rectangle",
en conséquence,
 - $BR = 1$;
 - $AB = 3$.
- **Conclusion :** ABC est d'or.

II. GASTON GOHIERRE de LONGCHAMPS

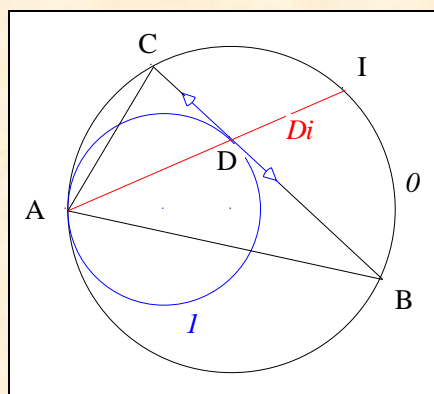
OU

LA QUESTION 659

1. Une bissectrice intérieure

VISION

Figure :

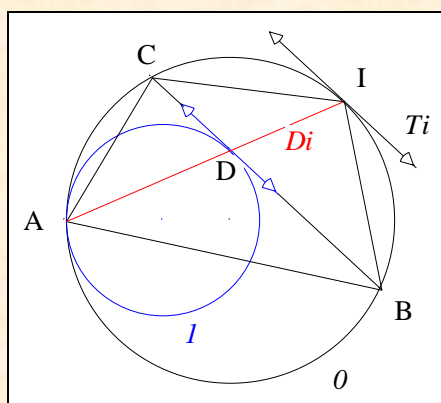


Traits :

- O un cercle,
- $[BC]$ une corde de O ,
- I un point de l'un des deux arcs BC de O ,
- Di une droite passant par I ,
- D le point d'intersection de Di avec $[BC]$,
- A le second point d'intersection de Di avec O

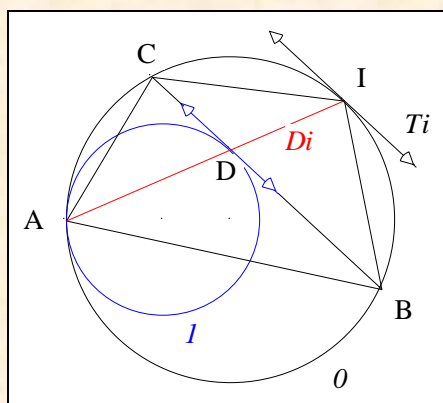
et I le cercle passant par A et tangent à (BC) en D .

Donné : I est tangent à O en A .
si, et seulement si,
 (AD) est la A -bissectrice intérieure du triangle ABC

VISUALISATION NÉCESSAIRE ²⁴

- Les cercles tangents θ et I , le point de base A , la monienne double (IAD), conduisent au théorème 8 de Reim ; il s'en suit que $Ti \parallel (BC)$.
- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 1), le triangle ICB est I-isocèle
i.e. I est le milieu de l'arc BC ne contenant pas A .
- **Conclusion :** (AD) est la A -bissectrice intérieure du triangle ABC .

VISUALISATION SUFFISANTE ²⁵

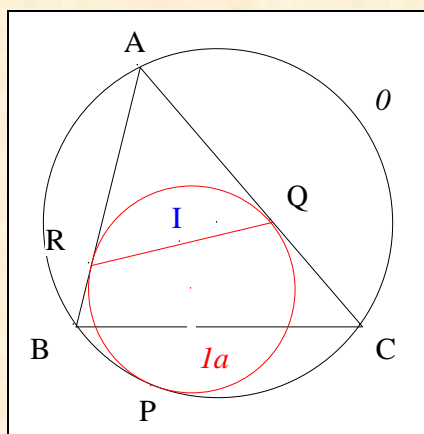


- Notons Ti la tangente à θ en I .
- (AD) étant la A -bissectrice intérieure du triangle ABC , I est le milieu de l'arc BC ne contenant pas A ;
en conséquence, le triangle ICB est I-isocèle.
- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 1), $Ti \parallel (BC)$.
- **Conclusion :** les cercles θ et I , le point de base A , la monienne double (IAD), les parallèles Ti et (BC) , conduisent au théorème 8'' de Reim ;
en conséquence, I est tangent à θ en A .

2. Première partie de la Question 659 ou la polaire de A

VISION

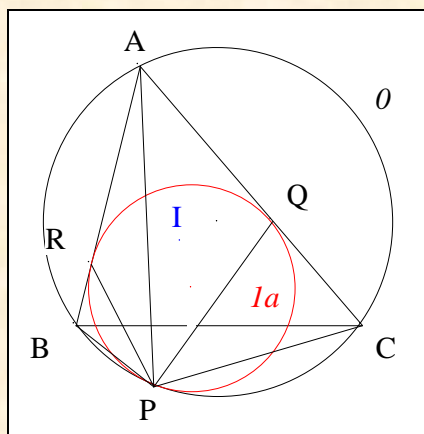
Figure :



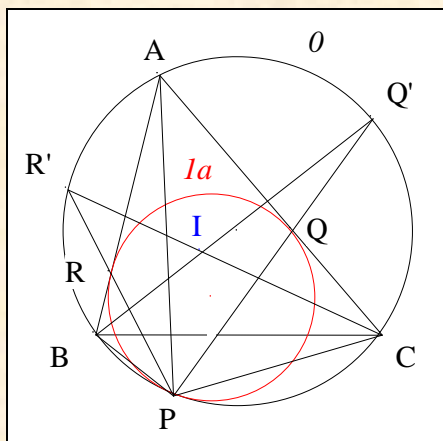
Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 Ia le cercle tangent resp. à (AB), (AC), et intérieurement tangent à O ,
P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec O , (AC), (AB)
et I le centre de ABC.

Donné : (QR) passe par I ²⁶.

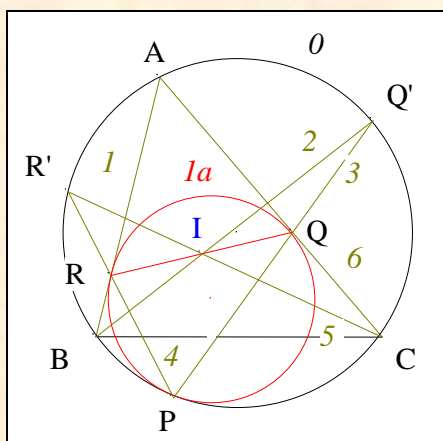
VISUALISATION



- D'après II. 1. Une bissectrice intérieure, (PR), (PQ) sont resp. les P-bissectrices intérieures des triangles PAB, PCA.

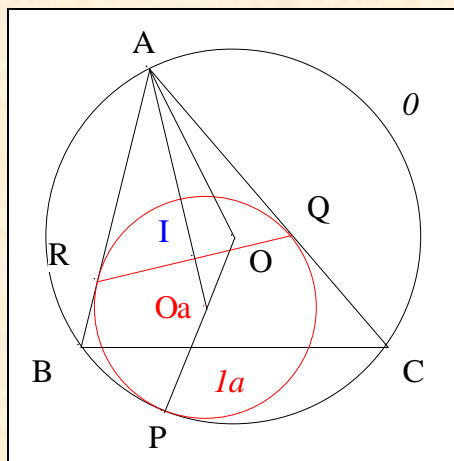


- Notons Q', R' les seconds points d'intersection resp. de $(PQ), (PR)$ avec \odot .
- **Scolies :**
 - (1) R' étant le milieu de l'arc AB de \odot ne contenant pas P et C , (CR') est la C-bissectrice intérieure de ABC
 - (2) Q' étant le milieu de l'arc AC de \odot ne contenant pas P et B , (BQ') est la B-bissectrice intérieure de ABC .
- **Conclusion partielle :** (BQ') et (CR') passent par I .



- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2), (IRQ) est la pascale de l'hexagone $ABQ'PR'CA$.
- **Conclusion :** (QR) passe par I .

- Scolies :**
- (1) Ia est le A-cercle de Longchamps de ABC
 - (2) P est le A-point de Longchamps de ABC
 - (3) Rayon de Ia



- Notons O, O_a les centres resp. de θ, I_a ,
 r, r_a les rayons resp. de I, I_a
 et α, β, γ les mesures resp. des angles A, B, C à Π près.

- Considérons le triangle AO_aO ²⁷

* la loi des cosinus $OO_a^2 = AO^2 + AO_a^2 - 2 \cdot AO \cdot AO_a \cdot \cos(\beta - \gamma)/2$

$$(R - r_a)^2 = R^2 + r_a^2 \csc^2 \alpha / 2 - 2 \cdot R \cdot r_a \cdot \csc \alpha / 2 \cdot \cos(\beta - \gamma)/2$$

$$r_a^2 \cdot \csc^2 \alpha / 2 - r_a^2 = 2 \cdot R \cdot r_a \cdot \csc \alpha / 2 \cdot \cos(\beta - \gamma)/2 - 2 \cdot R \cdot r_a$$

* division par $r_a \cdot \csc^2 \alpha / 2$

$$r_a - r_a \cdot \sin^2 \alpha / 2 = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha / 2 \cdot \cos(\beta - \gamma)/2 - 2 \cdot R \cdot \sin^2 \gamma / 2$$

$$r_a \cdot \cos^2 \alpha / 2 = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha / 2 \cdot [\cos(\beta - \gamma)/2 - \cos(\beta + \gamma)/2]$$

$$r_a \cdot \cos^2 \alpha / 2 = 4 \cdot R \cdot \sin \alpha / 2 \cdot \sin \beta / 2 \cdot \sin \gamma / 2$$

$$r_a \cdot \cos^2 \alpha / 2 = r$$

- **Conclusion :** $r_a = r \cdot \sec^2 \alpha / 2$.
- Une autre voie consiste à utiliser la formule de Stewart.

Énoncé traditionnel : la polaire de A relativement au A-cercle de Longchamps d'un triangle ABC passe par le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Commentaire : nous venons de répondre à la première partie de la Question **659** posée par de Longchamps en 1889 dans la revue belge *Mathesis* ²⁸.

Note historique : la solution ²⁹ publiée en 1890 s'articule en deux étapes :
 la première de nature métrique élaborée par Etienne Déprez prouve que (AI) et (IR) sont perpendiculaires,
 et la seconde proposée par J. N. ³⁰ aboutit au résultat par inversion.

²⁷ Bankoff L., Mixtilinear Adventure, *Crux Mathematicorum* **9** (1983) 2-7

²⁸ Longchamps (Gohierre de) G., Question **659** *Mathesis* **IX** (1889) 207

²⁹ *Mathesis* **X** (1890) 67-68

³⁰ J. N. sont certainement les initiales de Joseph Neuberg

En 1890, Randall Charles John Nixon ³¹ propose ce même résultat dans *l'Educational Times*.

La solution ³² présentée en 1891 dans cette même revue par les professeurs R. C. J. Nixon, R. W. Genese et G. Heppel, s'appuie aussi sur l'inversion.

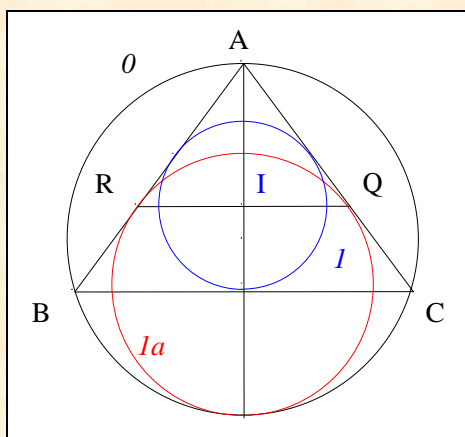
En 1905, Y. Sawayama généralise ce résultat ³³.

Ce résultat sera redécouvert en 1897 par Amédée Mannheim ³⁴ et présenté en 1929 comme théorème dans l'incontournable livre de Roger Arthur Johnson ³⁵ et aussi comme sujet au Cambridge Mathematical Tripos de 1929.

En 1939, Clément Vavator Durell et Alan Robson ³⁶ donne comme exercice le calcul du rayon de Ia . En 1977, Jakob Tjakko Groenman ³⁷ et en 1983, Léon Bankoff ³⁸ donnent une solution purement métrique du résultat de Longchamps.

Une solution synthétique, différente de celle présentée par l'auteur, est proposée en 2000 par Toshio Seimiya ³⁹.

Signalons que le cas particulier suivant a été proposé à la 20-ième O.I.M. (problème 4) qui s'est déroulée à Bucarest (Roumanie) en 1978 :



Traits :

| | |
|------|---|
| ABC | un triangle A-isocèle, |
| O | le cercle circonscrit à ABC, |
| I | le cercle inscrit à ABC |
| Ia | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| Q, R | les points de contact resp. de Ia avec (AC), (AB) |
| et I | le milieu de [PQ] |

Donné : I est le centre de I .

Rappelons qu'en 1993, la première partie de la Question 659 de Longchamps a été proposée par l'Espagne au jury des O.I.M. qui ne l'a pas retenu.

Notons pour terminer que cette question apparaît régulièrement sur le site *Mathlinks* ⁴⁰.

Terminologie :

c'est Léon Bankoff qui a introduit l'adjectif *mixtiligne* (en anglais mixtilinear) pour qualifier un triangle curviligne ayant deux côtés rectilignes et le troisième étant un arc de cercle ; en conséquence, le cercle inscrit d'un triangle *mixtiligne*, est un cercle mixtiligne (en anglais, mixtilinear incircle).

³¹ Nixon R. C. J., Question n° 10693, Mathematical questions and solutions, *Educational Times* (Reprints, London, 1863-1918) LV (1890)

³² Nixon R. C. J., Question n° 10693, Mathematical questions and solutions, *Educational Times* (Reprints, London, 1863-1918) LV (1891) 107

³³ Sawayama Y., A new geometrical proposition, *American Mathematical Monthly* vol. 12, 12 (1905) 222-224

³⁴ Mannheim A., *J.M.E.* de Bourget (1897) 124

³⁵ Johnson R. A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960. (from 1929 original), n° 537, p. 239

³⁶ Durell C. V. and Robson A., *Advanced Trigonometry*, London, Bell & sons (1939) 23

³⁷ Groenman J. T., Vraagstuk 2338 mit oplossing, *Nieuw Tijdschr. Wisk.* 65 (1977-1978) 253

³⁸ Bankoff L., Mixtilinear Adventure, *Crux Mathematicorum* 9 (1983) 2-7

³⁹ Seimiya T., Problème 2464, *Crux Mathematicorum* vol. 26 (2000) 432-435

⁴⁰ <http://www.mathlinks.ro/Forum/index.php?f=4>.

En conséquence,

Ia est, en français, le "A-cercle de Longchamps de ABC",
 en anglais, le "A-mixtilinear incircle of ABC",
 ou encore en suivant Ionnis Panakis ⁴¹, le "A-cercle de Mannheim de ABC".

Une courte biographie de Gaston Gohierre de Longchamps ⁴²

dit *Elgé*

Gaston Albert Gohierre de Longchamps est né le 1^{er} mars 1842 à Alençon (Orne, France).

Fils d'Alexis Gohierre docteur en médecine et d'Adèle Eude, il est élève du lycée Charlemagne à Paris de 1859 à 1860, puis de mathématiques spéciales l'année suivante dans laquelle Hauser enseigne les mathématiques et Boutet la physique, tout en étant pensionnaire à l'institution Favard.

De 1862 à 1863, il est élève de mathématiques spéciales au lycée Bonaparte, actuellement Condorcet dans laquelle Ventéjol enseigne les mathématiques et Troost la physique, tout en étant pensionnaire à l'institution Ébrard.

En 1863, il entre à l'École Normale Supérieure (11^e sur 17 entrants) et suit dans ses échappées lumineuses d'autres cours que ceux dispensés, en particulier ceux de Charles Hermite, de Charles Auguste Briot et de Jean Serret.

En 1866, il est chargé de cours de mathématiques au lycée Impérial de Mont-de-Marsan (Landes), puis en 1869 de mathématiques élémentaires au lycée de Poitiers (Vienne).

Sous-lieutenant volontaire au 10^e d'artillerie en 1871, il retrouve la même année son poste au lycée de Poitiers.

Agrégé de mathématiques en 1871 (8^e sur 9) après plusieurs tentatives, il épouse le 20 décembre 1871, à Châtellerault (Vienne) Léonie Louise Marie Brunet avec laquelle il aura trois enfants.

En 1871, il est chargé de cours de mathématiques élémentaires au lycée Fontanes de Niort (Deux-Sèvres), puis l'année suivante est nommé professeur de mathématiques élémentaires au lycée de Poitiers. En 1873, il devient suppléant de mathématiques spéciales dans ce dernier lycée suite au congé pour maladie du professeur Fochier et lui succède en 1875.

En 1878, il enseigne en spéciales au collège Rollin, puis l'année suivante au lycée Charlemagne suite à la mutation d'Édouard Lucas pour le lycée Saint-Louis, auquel il lui succède en 1890.

En 1882, il prend la direction du *Journal de Mathématiques Élémentaires et Spéciales* fondé par Bourget qu'il sépare en deux journaux, signe plusieurs articles sous le pseudonyme d'*Elgé* dans ces revues qu'il dirige jusqu'en 1898.

En 1897, il est nommé Censeur du Lycée Charlemagne et l'année suivante, professeur de mathématiques élémentaires au lycée Condorcet.

Il prend sa retraite le 1^e mai 1900.

De 1900 à 1906, il est examinateur au concours d'admission à l'École de Saint-Cyr et à l'École spéciale militaire.

Philanthrope utopiste, chef de file de l'école saint-simonienne, Gaston Gohierre de Longchamps fonde une communauté modèle, à Ménilmontant, avec quarante disciples.

Il décède à Paris le 9 juillet 1906.

⁴¹ Panakis I., *Plane Trigonometry*, Vol II., Athens (1973) 218ff

⁴² Roland Brasseur, Gaston Gohierre de Longchamps, *Bulletin de l'UPS*, n° 235 (juillet 2011) 15-22
<https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/home>
<https://docs.google.com/file/d/0B71JfRYrV2lYZVoZc3BmNVBBbnM/edit?pli=1>

Remerciements : ils vont tout particulièrement au professeur Francisco Bellot Rosado, un amoureux de la Géométrie du Triangle et rédacteur en chef de la revue espagnole *Revista oim*⁴³, qui m'a fait parvenir les photocopies des pages concernant "La Question 659", et aussi au géomètre américain d'origine russe, Mark Tudosi qui m'a procuré l'énoncé et la solution du problème posé par Randall Charles John Nixon.

Une courte biographie en anglais de Francisco Bellot Rosado

Francisco Bellot Rosado received the BA degree from University of Madrid in 1963 and has been associated with the Institute Emilio Ferrari of Valladolid in some capacity since 1966, serving both as secretary and as principal, and later as Associate Professor in the department of Algebra, Geometry and Topology.

After serving two years as deputy leaders of the Spanish Olympiad team in 1988 and 1989, he served for the next 8 years as team leader. He has been an active contributor to conferences of the World Federation of National Mathematics Competitions. He has also been an avid contributor to problem journals such as to *Crux Mathematicorum*, the *MAA Monthly*, and *Math Magazine*. He has served as European representative of the WFNMC since 1996.

One of Francisco's recommenders said, referring to his Pravetz (1994) talk "was about the practice of recycling competition problems in the problem creation and problem selection. He argued that for the sake of problem culture as well as for practical applications, e.g. mathematics competitions, originality was constantly required. Speaking softly, he delivered a true challenge."

Also Francisco Bellot-Rosado has been a very influential figure in another prestigious mathematical contest that involves more than twenty-five countries: the "Olimpiada Iberoamericana de Matematica" conducted by the "O. E. I." (Organizacion de los Estados Iberoamericanos para la Educacion, la Ciencia y la Cultura or "Organization of the Iberoamerican States for Education, Science, and Culture". "Iberoamerican" meaning all Latin American countries plus Spain and Portugal). Additionally, Francisco is noted for single-handedly founding a Mediterranean Regional Mathematics Olympiad.

Again quoting from a letter of nomination, "As an O. E. I.'s international expert, Francisco Bellot has visited many Latin American countries promoting the mathematical olympiads idea, taking care of organizational matters as well as technical aspects like frequent lectures and workshops about mathematical problem solving for students, "mathletes", and teachers. The efforts, orientation, and help from Francisco Bellot made it possible, in 1996, that Costa Rica became the first Central American country in being home for the XI O. E. I.'s Mathematical Olympiad. Presently, he is working on the organization and initiation of a new international mathematical olympiad for the six Central American countries and we are sure he will succeed as usual.

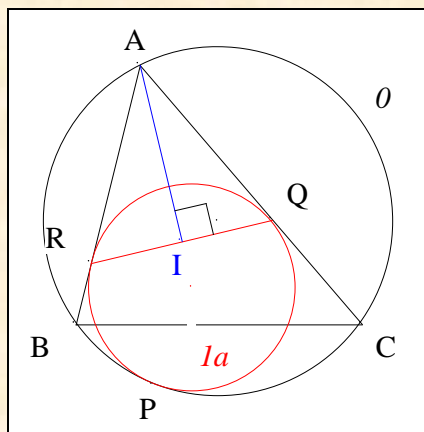
⁴³

http://www.oei.es/oim/revista_oim/index.html

3. Le résultat d'Etienne Deprez

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 Ia le A-cercle de Longchamps de ABC,
P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec O , (AC), (AB)
et I le centre de ABC.

Donné : (QR) est perpendiculaire à (AI) en I ⁴⁴.

VISUALISATION

- D'après **II. 2.** Première partie de la Question **659**, (QR) passe par I.
- D'après Euclide "Tangentes égales", le triangle ARQ est A-isocèle ;
en conséquence, la A-bissectrice (AI) de ARQ est aussi hauteur.
- **Conclusion :** (QR) est perpendiculaire à (AI) en I.

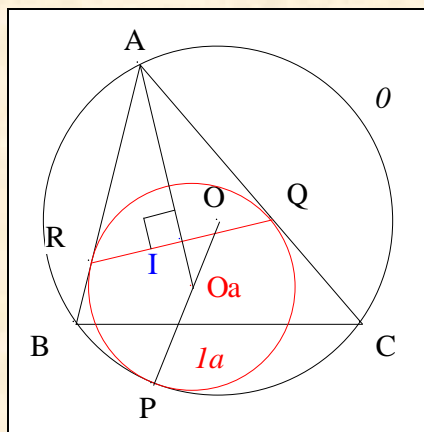
Note historique : ce résultat a été prouvé métriquement en 1890 par Etienne Deprez, agrégé de physique en 1872.
En 1976, G. R. Veldkamp ⁴⁵ redécouvre ce résultat comme Léon Bankoff ⁴⁶ en 1983.
Signalons que ce résultat est présent en 1993 dans la *Shortlist* des I.M.O..

- Scolies :**
- (1) la A-bissectrice (AI) de ARQ est aussi médiane, I est le milieu de [PQ].
 - (2) Position du centre de Ia

⁴⁴ Deprez E., *Mathesis* **X** (1890) 67-68

⁴⁵ Veldkamp G. R., "Vraagstuk **2230** met oplossing", *Nieuw Tijdschr. Wisk.* **64** (1976-1977) 109

⁴⁶ Bankoff L., *Mixtilinear Adventure*, *Crux Mathematicorum* **9** (1983) 2-7

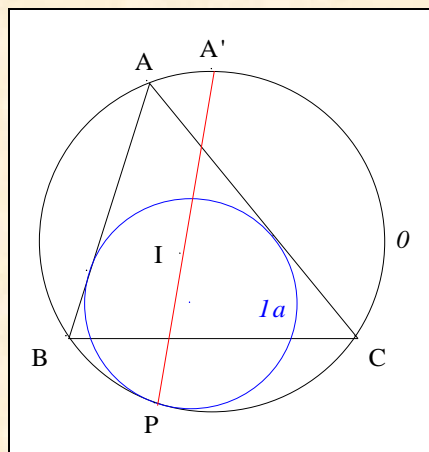


- Notons O, Oa les centres resp. de \odot, Ia .
- \odot et Ia étant tangents en P , P, Oa et O sont alignés.
- I étant le milieu de la corde $[QR]$ de Ia , la perpendiculaire (AI) à $[PQ]$ en I passe par Oa .
- **Conclusion :** Oa est le point d'intersection de (AI) et (OP) .

4. L'alignement remarquable d'Eugène Lauvernay

VISION

Figure :

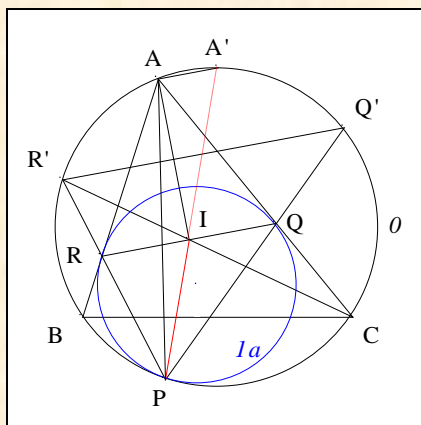


Traits : ABC un triangle,
 \odot le cercle circonscrit à ABC ,
 A' le premier A-perpoint de ABC ,
 Ia le A-cercle de Longchamps de ABC ,
 P le A-point de Longchamps de ABC
 et I le centre de ABC .

Donné : P, I et A' sont alignés ⁴⁷.

⁴⁷ Lauvernay E., *Journal de Mathématique Élémentaire*, n° 390 (1892)

VISUALISATION

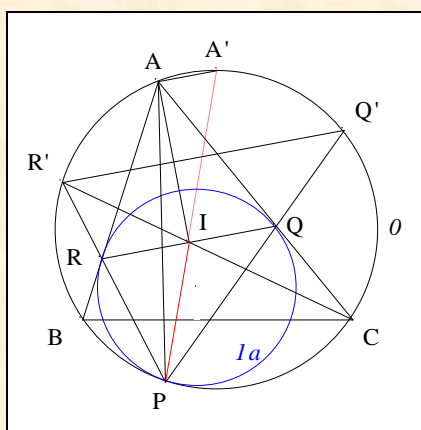


- Notons et Q, R les points de contact resp. de l_a avec (AC) , (AB)
 Q', R' les seconds points d'intersection resp. de (PQ) , (PR) avec θ .
- **Scolies :** (1) (AA') , $(Q'R')$ et (QIR) sont parallèles entre elles
 (2) (PI) est la P-médiane du triangle PQR .
- Par construction, (PA) est la P-symédiane de PQR ;
 en conséquence, (PI) passe par A' .
- **Conclusion :** P, I et A' sont alignés.

Commentaire : cet alignement permet de construire le A-point de Longchamps.

Note historique : ce résultat a été proposé aux O. M. d'Iran en 2002 dans l'épreuve du second tour.

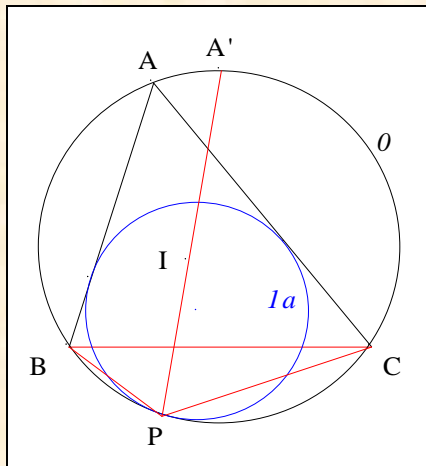
Scolies : (1) le milieu de $[Q'R']$



- Notons I' le milieu de $[Q'R']$.
- Le quadrilatère $RQQ'R'$ étant un trapèze, (PI) passe par I' .

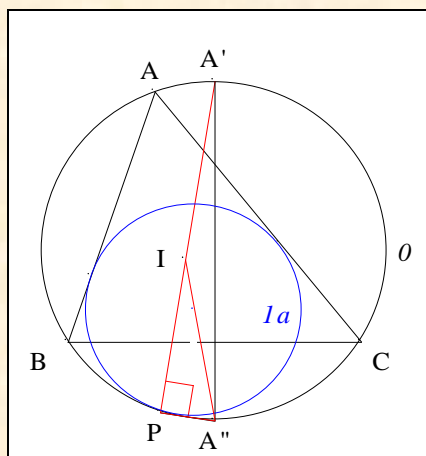
- **Conclusion** : d'après l'axiome d'incidence Ia , P, I, I' et A' sont alignés.⁴⁸

(2) une bissectrice



- **Conclusion** : A' étant le milieu de l'arc BAC , (PI) est la P -bissectrice intérieure du triangle PCB ⁴⁹.

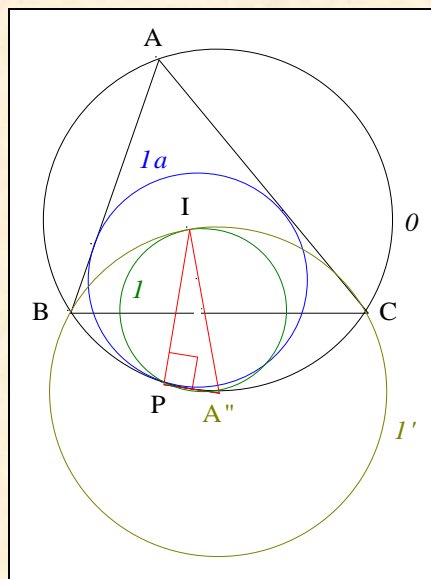
(3) Avec le second perpoint de ABC



- Notons A'' le second A -perpoint de ABC
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", $(PA') \perp (PA'')$.
- **Conclusion** : le triangle PIA'' est P -rectangle⁵⁰.

(4) Avec le A -cercle de Mention de ABC

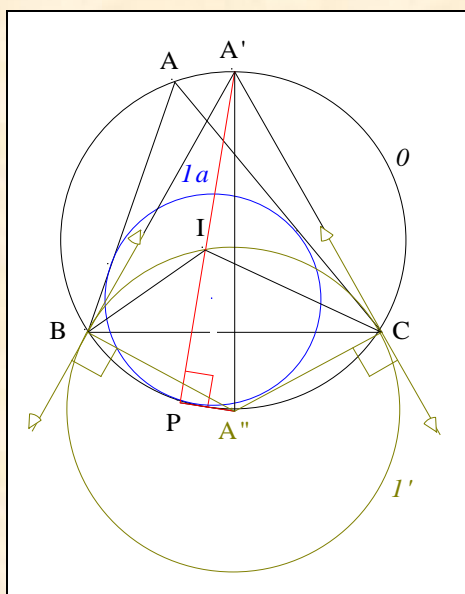
⁴⁸ TST Chine
⁴⁹ O.M. Turquie (2003)
⁵⁰ Wuhan Chine (2006)



- Notons I le cercle de diamètre $[IA'']$
et I' le A-cercle de Mention ; il a A'' pour centre et passe par B, I, C.

- **Conclusion :** I et I' sont tangents en I.

(5) Une symédiane

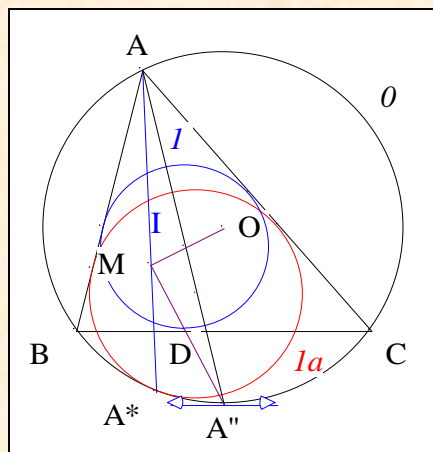


- **Conclusion :** (BA') , (CA') étant tangentes à O resp. en B, C, (PIA') est la I-symédiane du triangle IBC.

5. Une droite de Longchamps

VISION

Figure :



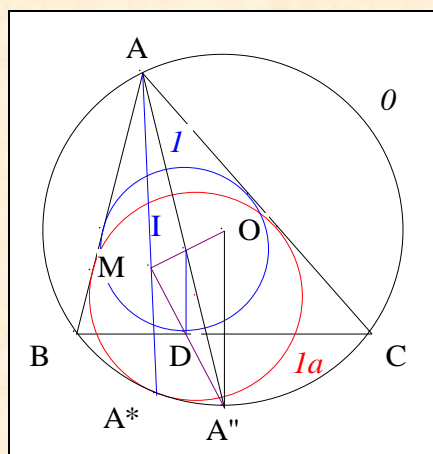
Traits :

| | |
|-------|---------------------------------------|
| ABC | un triangle, |
| O | le cercle circonscrit à ABC, |
| O | le centre de O , |
| I | le cercle inscrit à ABC, |
| I | le centre de I , |
| D | le point de contact de I avec (BC), |
| A'' | le second perpoint de ABC, |
| Ia | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| A^* | le A-point de Longchamps de ABC |

et M le point d'intersection de $(A''D)$ et (OI) .

Donné : (AA^*) passe par M .

VISUALISATION



- **Scolie :** A'' et D (resp. O et I) sont deux couples de points homologues de O et I .
- D'après L'Huilier⁵¹,
 - (1) M est le centre externe d'homothétie de O et I
 - (2) A est le centre externe d'homothétie de I et Ia
 - (3) A^* est le centre externe d'homothétie de Ia et O
- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe 3), A^* , A et M sont alignés.
- **Conclusion :** (AA^*) passe par M .

⁵¹

L'Huilier S., *Éléments d'analyse*, Paris et Genève (1809) 39, art. 28

- Scolies :**
- (1) (AA^*) est la A-droite de Longchamps de ABC
 - (2) M est répertorié sous X_{56} conformément à la nomenclature d'ETC ⁵².

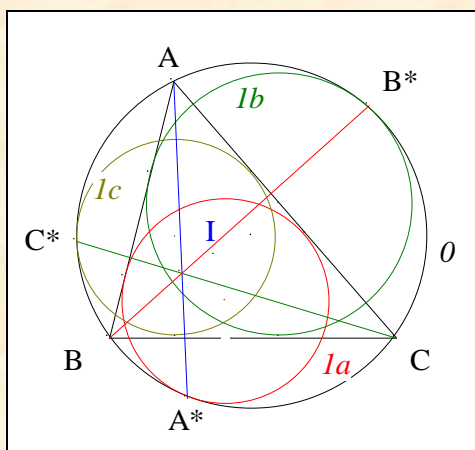
Note historique : la nature géométrique de M a été donnée comme question par Eugène Lauvernay ⁵³ dans le *Journal de Mathématique Élémentaire* de 1892 et résolu par B. Sollertinsky ⁵⁴. Ce résultat a été rappelé par l'américain Paul Yiu ⁵⁵ en 1999 et par le français Jean-Pierre Ehrmann ⁵⁶ en 2004.

Énoncé de Lauvernay : si l'on joint le point A', où la bissectrice extérieure de l'angle A d'un triangle ABC rencontre le cercle circonscrit, au centre I du cercle inscrit, cette droite (A'I) rencontre le cercle circonscrit en un second point P. Démontrer que (AP) passe par le centre de similitude externe des circonférences considérées.

6. Début de la seconde partie de la Question 659 ou la "concourance" des droites de Longchamps

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 Ia, Ib, Ic les A, B, C-cercles de Longchamps de ABC
 et A^*, B^*, C^* les A, B, C-points de Longchamps de ABC.

Donné : $(AA^*), (BB^*)$ et (CC^*) sont concourantes.

VISUALISATION

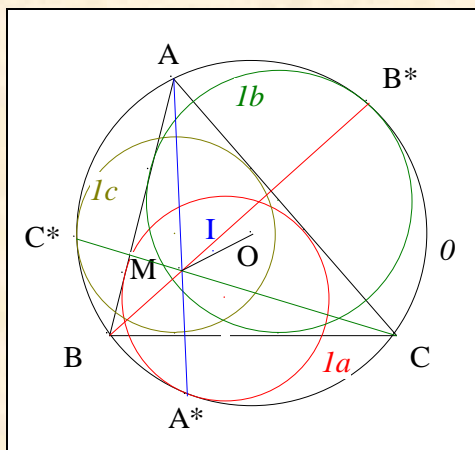
⁵² <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

⁵³ Lauvernay E., *Journal de Mathématique Élémentaire* (1892) 390

⁵⁴ Sollertinsky B., *Journal de Mathématique Élémentaire* (1893) 37, 72

⁵⁵ Yiu P., Mixtilinear incircles, *Amer. Math. Monthly*, **106** (1999) 952-955

⁵⁶ Ehrmann J.-P., Fwd (Darij Grinberg): New triangle center in connexion with an Iranian Math. Olympiad, Iran 1997, Message *Hyacinthos* # **6115** (06/12/2004) ; <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6115>



- Notons O le centre de \odot ,
 I le cercle inscrit à ABC ,
 I le centre de I
 et M le centre externe d'homothétie de \odot et I .
- D'après II. 5. Une droite de Longchamps, (AA^*) , (BB^*) , (CC^*) passent par M .
- **Conclusion :** (AA^*) , (BB^*) et (CC^*) sont concourantes en M .

Commentaire : nous venons de répondre au début de la seconde partie de la Question **659** posée par de Longchamps en 1889 dans la revue *Mathesis* ⁵⁷.

Note historique : la solution ⁵⁸ de J. N. ⁵⁹ publiée en 1890 utilise l'inversion et montre que M est l'isogonal du point de Nagel de ABC .
 En 1892, ce résultat réapparaît sous la signature d'Eugène Lauvernay ⁶⁰ dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires* et une réponse en est donnée par B. Sollertinsky ⁶¹.
 Ce résultat a été proposé en 1999 par Michael Lambrou ⁶² de l'université de Crète (Grèce) dans *Crux Mathematicorum*, par l'américain Paul Yiu ⁶³ dans une note du *Monthly* accessible à partir de son site ⁶⁴ dans la quelle il précise la nature géométrique du point de concours et par Orlando Döhring ⁶⁵ au sein du groupe *Hyacinthos*. Il a été résolu par l'inversion par Nikolaos Dergiades et métriquement par Toshio Seimiya après une chasse angulaire dans la revue *Crux Mathematicorum* ⁶⁶.
 La solution présentée ci avant s'inspire de celle de Darij Grinberg ⁶⁷.

- Scolies :**
- (1) (OI) est la droite d'Euler du triangle excentral de ABC
 - (2) (OI) passe par M .

Énoncé de Paul Yiu : les droites de Longchamps d'un triangle concourent (sur la droite d'Euler de son

⁵⁷ Longchamps (Gohierre de) G., Question **659** *Mathesis* **IX** (1889) 207

⁵⁸ *Mathesis* **X** (1890) 67-68

⁵⁹ J. N. sont certainement les initiales de Joseph Neuberg

⁶⁰ Lauvernay E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1892) 390

⁶¹ Sollertinsky B., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1893) 37, 72

⁶² Lambrou M., Problem 2464, *Crux Mathematicorum* n°6 vol. 25 (October 1999) 366

⁶³ Yiu P., Mixtilinear incircles, *Amer. Math. Monthly* **106** (December 1999) 952-955 ;

Yiu P., Notes on Euclidean Geometry (1999) ; <http://www.math.fau.edu/yiu/Geometry.html>

⁶⁴ <http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html>

⁶⁵ Döhring O., Triangle ABC inscribed in circle, message *Hyacinthos* # **9537** (12/03/2004)

⁶⁶ Dergiades N., Seimiya T., Problem **2464**, *Crux Mathematicorum* n°7 vol. **26** (November 2000) 434-436

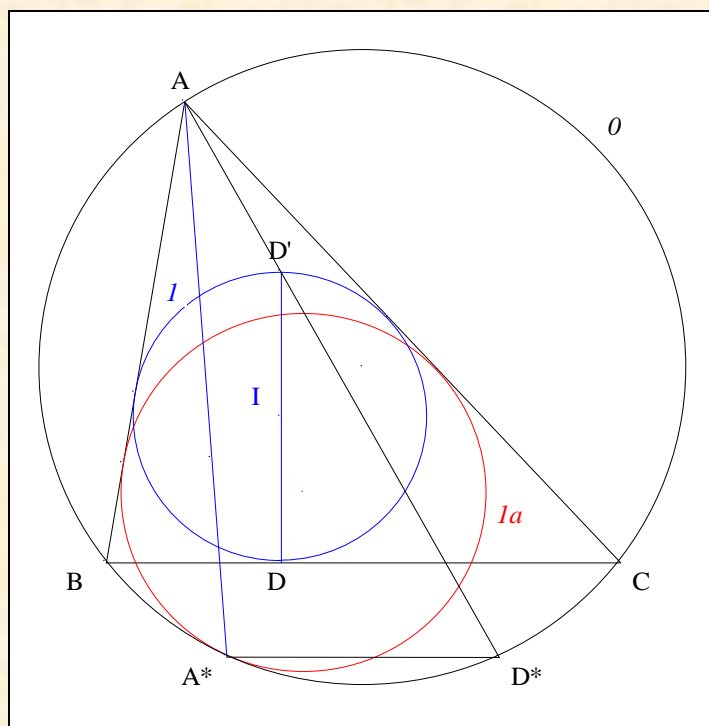
⁶⁷ Grinberg D., Message *Hyacinthos*

triangle excentral) au centre externe d'homothétie des cercles circonscrit et inscrit.

7. Fin de la seconde partie de la Question 659 ou M est l'isogonal de N_a

VISION

Figure :

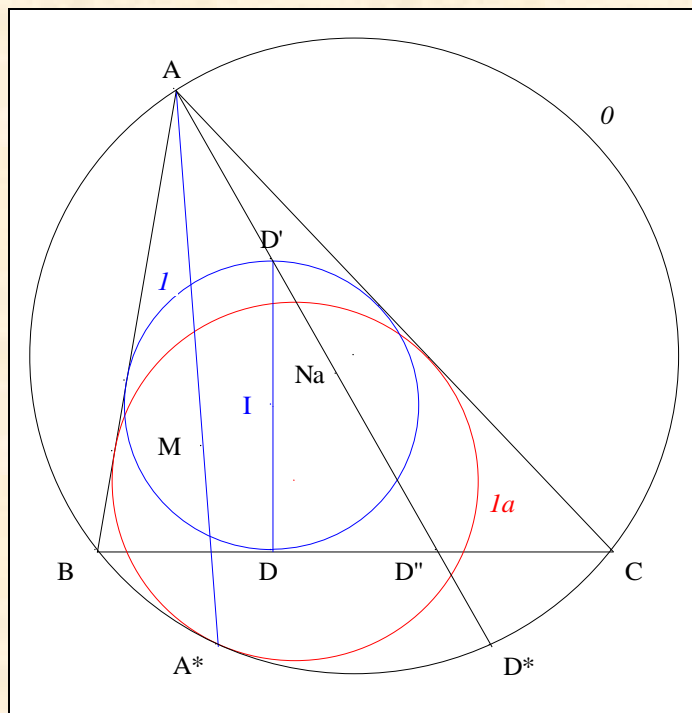


Traits :

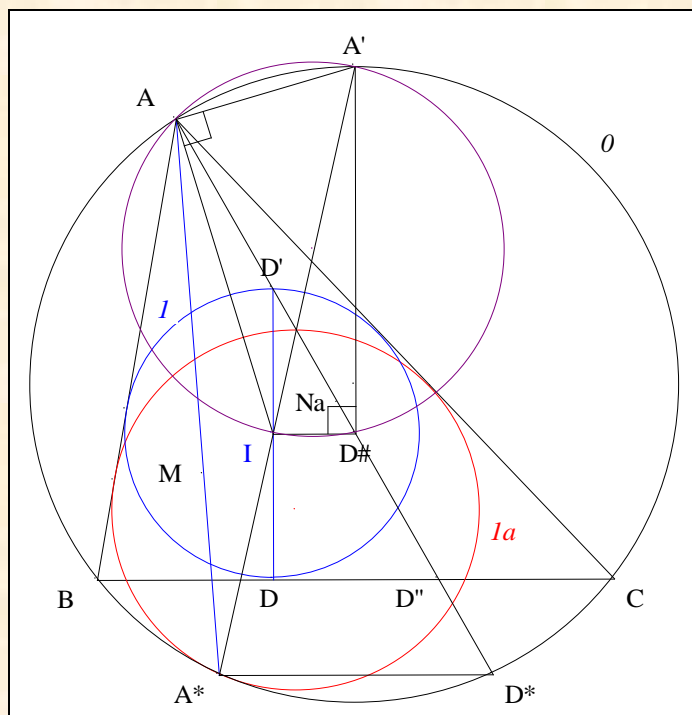
- ABC un triangle,
- O le cercle circonscrit à ABC ,
- I le cercle inscrit de ABC ,
- I le centre de I ,
- D le point de contact de I avec (BC) ,
- D' l'antipôle de D relativement à I ,
- D^* le second point d'intersection de (AD') avec O ,
- I_a le A-cercle de Longchamps de ABC ,
- A^* le A-point de Longchamps de ABC .

Donné : (A^*D^*) est parallèle à (BC) .

VISUALISATION



- Notons M le centre externe d'homothétie de O et I ,
et D'' le point de contact du A-excercle de ABC avec (BC)
et Na le point de Nagel de ABC .
- D'après "Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel"⁶⁸,
 D'' est le point de contact du A-excercle de ABC avec (BC) .
- **Scolies :** (1) (AA^*) passe par M
(2) (AD^*) passe par Na .

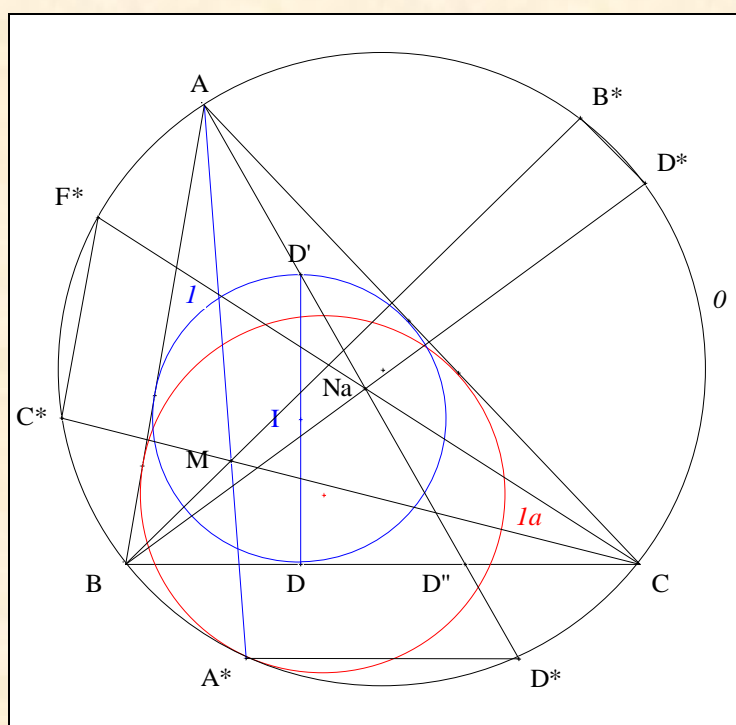


68

Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3
<http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/Docs/Cinq%20theoremes%20de%20Christian%20von%20Nagel.pdf>

- Notons A' le premier A-perpoint de ABC
et $D\#$ le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par I avec (AD^*) .
- **Scolies :** (1) le triangle $D\#A'I$ est $D\#$ -rectangle
(2) le triangle AIA' est A-rectangle.
- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi-cercle",
le cercle de diamètre $[AI]$ passe par A et $D\#$.
- Notons ω ce cercle.
- Les cercles ω et ω_3 , les points de base A' et A, les moniennes $(A^*A'I)$ et $(D^*AD\#)$,
conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que $(A^*D^*) \parallel (ID\#)$;
nous avons : $(ID\#) \parallel (BC)$.
- **Conclusion :** par transitivité de la relation \parallel , $(A^*D^*) \parallel (BC)$.

- Scolies :** (1) le résultat de H. Verrière ⁶⁹ : (AA^*) et (AD^*) sont deux A-isogonales de ABC
- (2) Fin de la seconde partie de la Question 659 ou M est l'isogonal de Na



- Notons Ib, Ic les B, C-cercles de Longchamps de ABC,
 B^*, C^* les B, C-points de Longchamps de ABC,
 E^*, F^* les points définis comme D^*
et Na le point de Nagel de ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB^*) et (BE^*) sont deux B-isogonales de ABC
 (CC^*) et (CF^*) sont deux C-isogonales de ABC.
- $(AD^*), (BE^*), (CF^*)$ sont concourantes en Na.

⁶⁹ Verrière H., J.M.E. (1893) p. 196 ;
Efimov D., Modern geometry of triangle (1902) 130

- (AA*), (BB*), (CC*) sont concourantes en M.
- **Conclusion :** d'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 4), M est l'isogonal de Na.

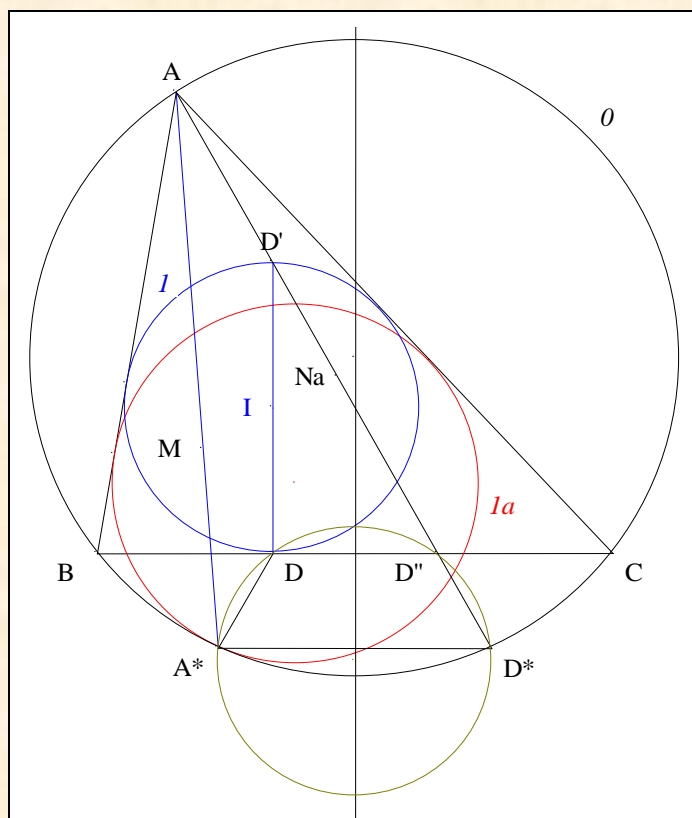
Commentaire : nous venons de répondre complètement à la seconde partie de la Question 659 posée par de Longchamps en 1889 dans la revue *Mathesis* ⁷⁰.

Note historique : la solution ⁷¹ de J. N. ⁷² publiée en 1890 montre que M est l'isogonal du point de Nagel de ABC.

Rappelons qu'en 1892, Arnold Droz-Farny ⁷³ proposait comme exercice de montrer que "l'inverse l'isogonal du point de Nagel se trouve sur la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre du cercle inscrit".

Une solution en était donnée l'année suivante dans la même revue par Émile Lemoine⁷⁴ et S. J. Poulain.

(3) Quatre points cocycliques



- D et D" d'une part, A* et D* d'autre part étant symétriques par rapport à la médiatrice de [BC], le quadrilatère A*D*D"D est un trapèze isocèle.
- **Conclusion :** A*, D*, D", D sont cocycliques.

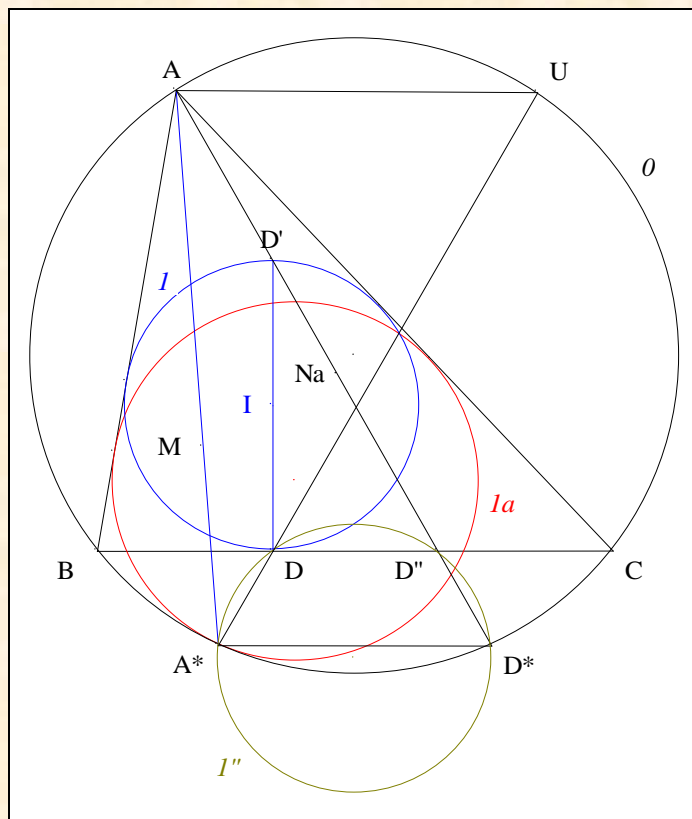
⁷⁰ Longchamps (Gohierre de) G., Question **659** *Mathesis* **IX** (1889) 207

71 Longchamps (Gouffier de
Mathesis **X** (1890) 67-68

⁷² J. N. sont certainement les initiales de Joseph Neuberg

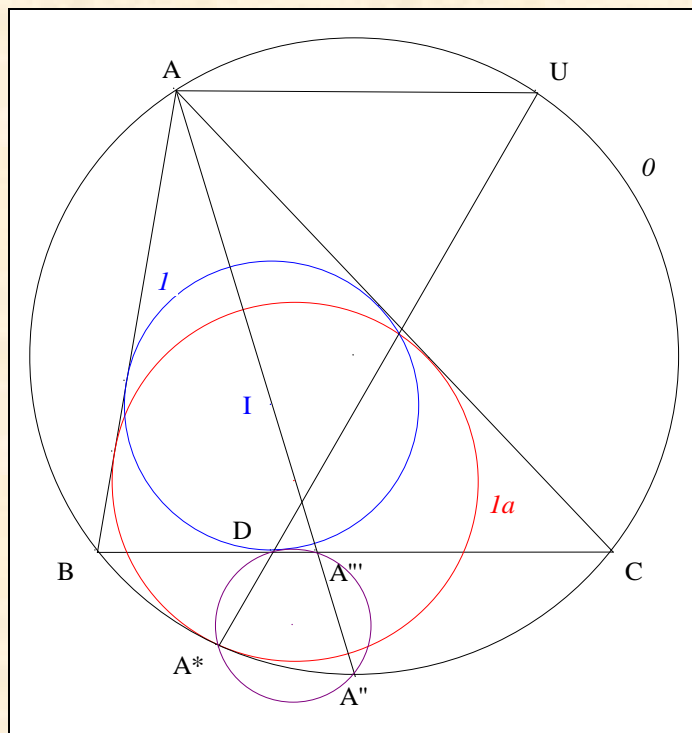
⁷³ Droz-Farny A., *Journal de Mathématiques Élémentaires* de Longchamps (1892) 471

⁷⁴ Lemoine E., Poulain, *Journal de Mathématiques Élémentaires* de Longchamps (1893) 230

(4) Deux parallèles ⁷⁵

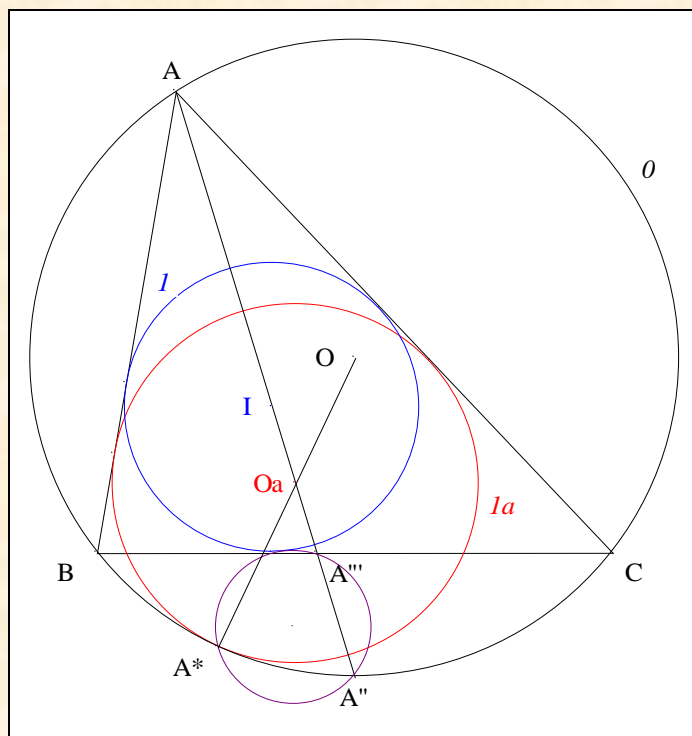
- Notons I'' le cercle circonscrit au trapèze isocèle $A^*D^*D''D$
et U le second point d'intersection de (A^*D) avec \mathcal{O} .
- Les cercles \mathcal{O} et I'' , les points de base D^* et A^* , les moniennes (AD^*D'') et (UA^*D) , conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que $(AU) \parallel (D''D)$.
- **Conclusion :** (AU) est parallèle à (BC) .

(5) Un cercle passant par A^*



- Notons A'' le second point d'intersection de (AI) avec \mathcal{O}
 et A''' le point d'intersection de (AI) et (BC) .
- **Conclusion :** le cercle \mathcal{O} , les points de base A'' et A^* , les moniennes naissantes $(AA''A''')$ et (UA^*D) , les parallèles (AU) et $(A'''D)$, conduisent au théorème **0''** de Reim ; en conséquence, A^*, A'', A''' et D sont cocycliques ⁷⁶.

(6) Une construction du centre de Ia

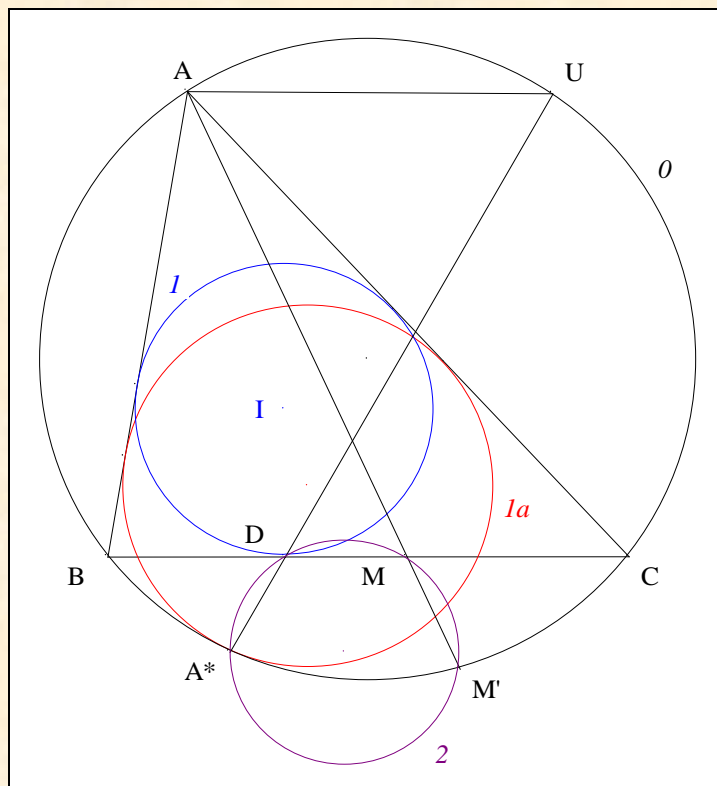


⁷⁶

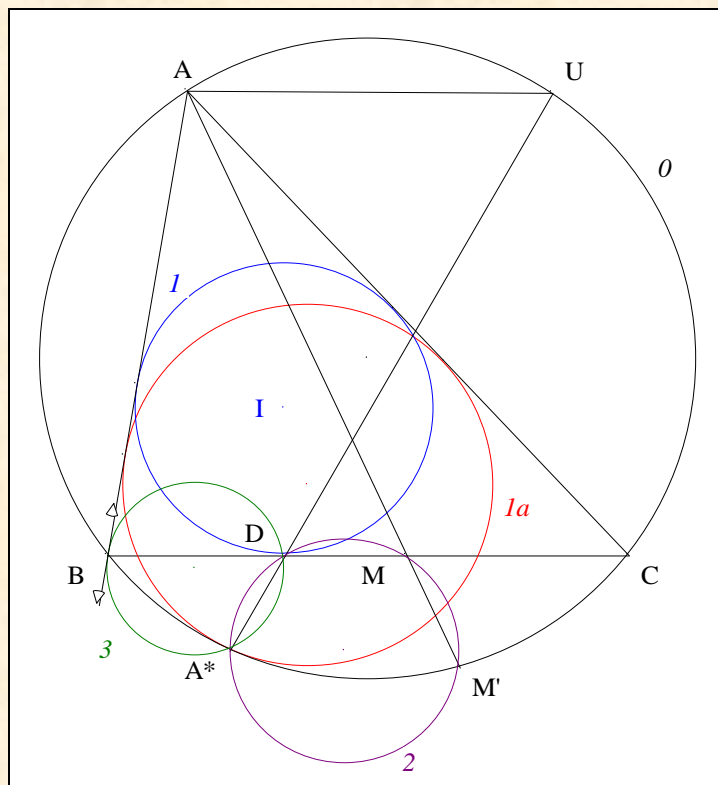
Pohoata C., Theorem 4, Geometric constructions of mixtilinear incircles, *Crux Mathematicorum* (2008)

- Notons O, O_a les centres resp. de θ, la .
- La figure ci-dessus indique une construction de O_a .

(7) Une famille de cercles passant par A^*



- Notons M un point de $[BC]$
et M' le second point d'intersection de (AM) avec θ .
 - **Conclusion :** le cercle θ , les points de base M' et A^* , les moyennes naissantes $(AM'M)$ et (UA^*D) , les parallèles (AU) et (MD) , conduisent au théorème θ'' de Reim ; en conséquence, $A^*, M' M$ et D sont cocycliques.
 - Notons 2 ce cercle.
- (8) Un cercle tangent à un côté



- Notons \mathcal{C}_3 le cercle passant par A^* , D , B .
- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles" appliqué à \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_3 est tangent à (AB) en B .

Commentaire : ce dernier résultat a été généralisé par Cosmin Pohoata ⁷⁷.

⁷⁷

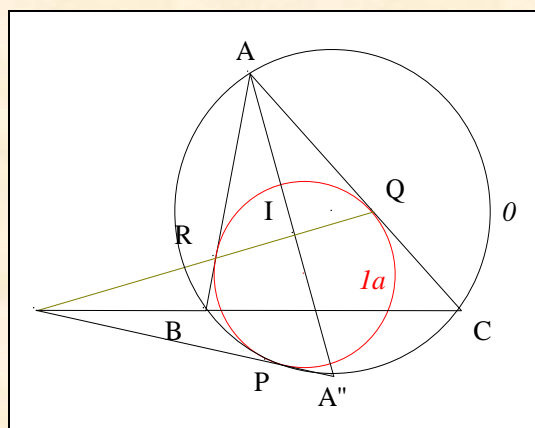
Pohoata C., From mixtilinear incircles to the Thébault's circles, *Mathlinks* (03/07/2008) ; <http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=213098>.

III. DEUX "CONCOURANCES" REMARQUABLES

1. Première "concourence"

VISION

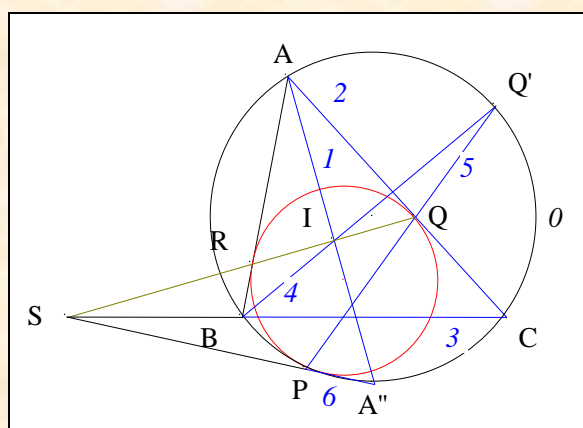
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 A'' le second point d'intersection de (AI) avec O,
 Ia le A-cercle de Longchamps de ABC,
 et P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec O, (AC), (AB).

Donné : (PA''), (QR) et (BC) sont concourantes.

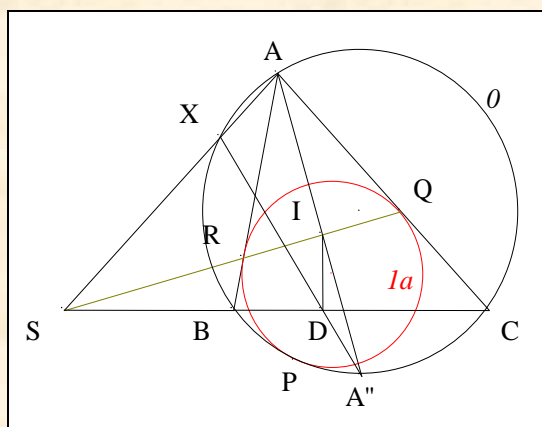
VISUALISATION



- Notons et S le point d'intersection de (PA'') et (BC),
 Q' le second point d'intersection de (PQ) avec O.

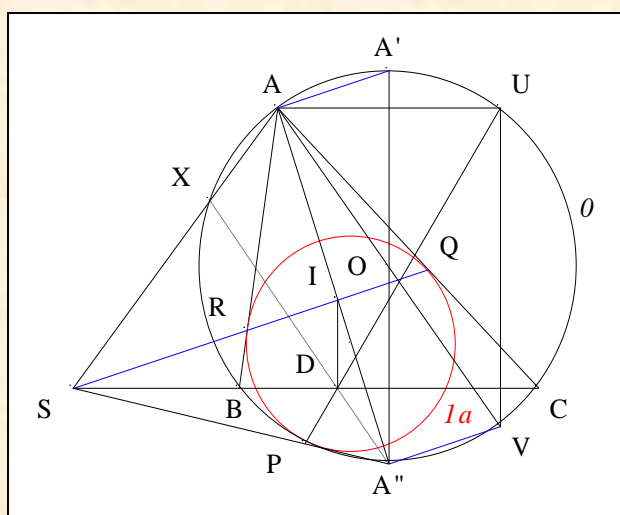
- **Scolies :** (1) Q, I et R sont alignés
 (2) B, I et Q' sont alignés.

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),



- Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 et D le point de contact de l avec (BC)
 X le second point d'intersection de (AS) avec θ ,
- Donné :** X, D et A'' sont alignés ⁷⁹.

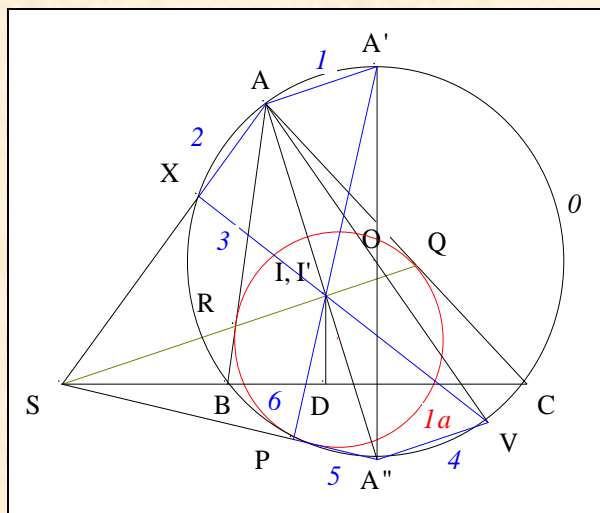
VISUALISATION



- Notons O le centre de θ ,
 A' le premier perpoint de ABC ,
 et U, V les seconds points d'intersection resp. de (PD) , (AO) avec θ .
- **Scolie :** (AA') , $(A''V)$ et $(SRIQ)$ sont parallèles entre elles.

⁷⁹

Zhang Fangyu, Collinear, *Mathlinks* (22/06/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=2143797380&t=211233

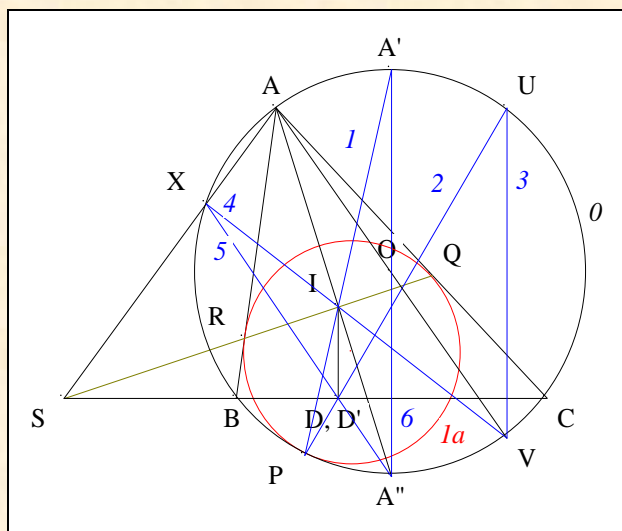


- Notons I le point d'intersection de (XV) et (PA) .
- D'après "L'équivalence d'Aubert-M'Kensie" (Cf. Annexe 5),

- (1) (SI') est la pascalie de l'hexagone A'AXVA"PA'
- (2) (SI') //(SRIQ) ;

en conséquence I' et I sont confondus.

- **Conclusion partielle :** X, I et V sont alignés.



- **Scolies :**
 - (1) $(AU) \parallel (BC)$
 - (2) $(A'A'')$, (UV) et (ID) sont parallèles entre elles.

- Notons D'' le point d'intersection de (XA'') et (PU) .

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),

- (1) (ID') est la pascale de l'hexagone A'PUVXA"A'
- (2) (ID') // (ID) ;

en conséquence, D' et D sont confondus.

- **Conclusion :** X, D et A" sont alignés.

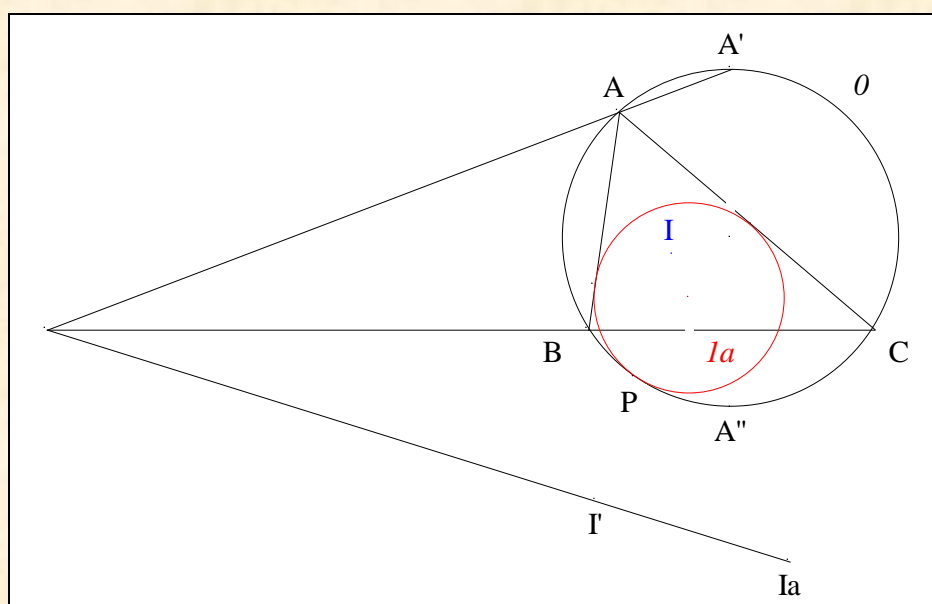
Note historique : Zhang Fangyu a trouvé ce résultat pour prouver celui de la scolie 4 p. 26. Ce résultat a été établi par inversion par Vladimir Zajic du Brookhaven National Laboratory (États-unis), plus connu sous le pseudonyme de "Yeti".

Commentaire : cette "concourance" sera enrichie par la suite.

2. Seconde "concourance"

VISION

Figure :



Traits :

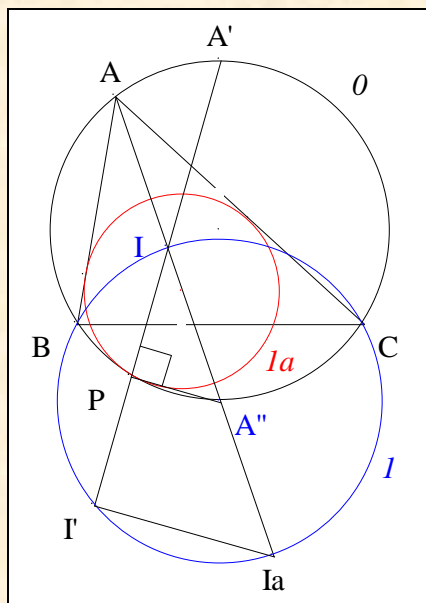
| | |
|-----------|---|
| ABC | un triangle, |
| O | le cercle circonscrit à ABC, |
| I | le cercle inscrit à ABC, |
| I | le centre de I , |
| A', A'' | les premier et second perpoints de ABC, |
| Ia | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| P | le A-point de Longchamps de ABC, |
| I' | le symétrique de I par rapport à R |
| et Ia | le A-excentre de ABC. |

Donné : $(AA'), (BC)$ et (IaI') sont concourantes ⁸⁰.

VISUALISATION

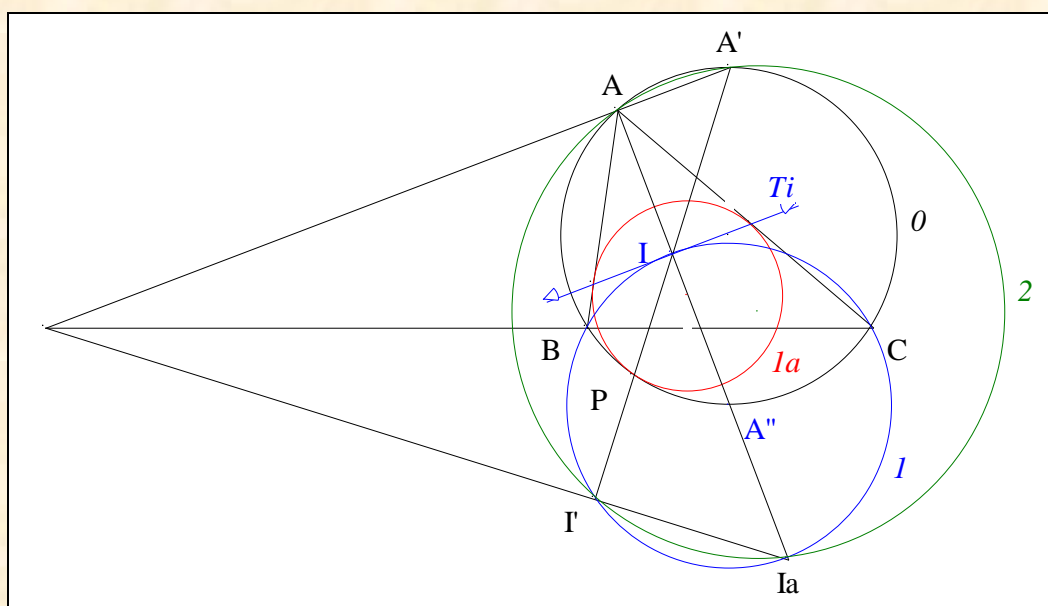
⁸⁰

Ayme J.-L., With mixtilinear incircle, *Mathlinks* (28/07/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1305984488&t=217363



- **Scolies :**
 - (1) A, I, A'', Ia sont alignés
 - (2) A'' est le milieu de $[Ia]$
 - (3) P, I, A' sont alignés
 - (3) P est le milieu de $[II']$.
- D'après "Un cercle de Mention" (Cf. Annexe 6), B, I, C, Ia sont sur le cercle de centre A'' passant par B .
- Notons I ce A-cercle de Mention.
- D'après **II. 4. scolie 2**,
d'après Thalès "Le théorème de la droite des milieux" appliqué au triangle $II'a$,
d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,

$(PII') \perp (PA'') ;$
 $(PA'') \parallel (I'Ia) ;$
 $(PI') \perp (I'Ia).$
- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", I passe par I' .



- Notons Ti la tangente à I en I .
- **Scolie :** $Ti \parallel (AA')$.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 7), (AA') , (BC) et (IaI') sont concourantes.

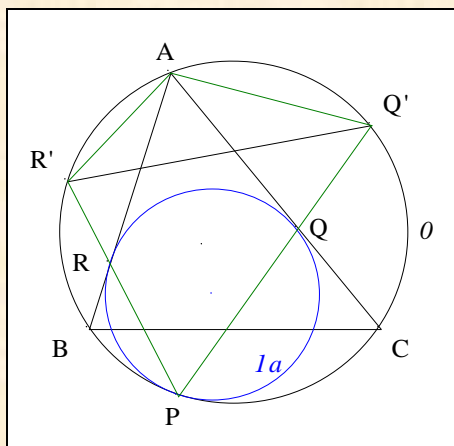
Note historique : Vladimir Zajic, plus connu sous le pseudonyme de Yetti dans le site *Mathlinks*, en a donné une solution basée sur inversion.

IV. UN CERCLE REMARQUABLE

1. Un quadrilatère harmonique

VISION

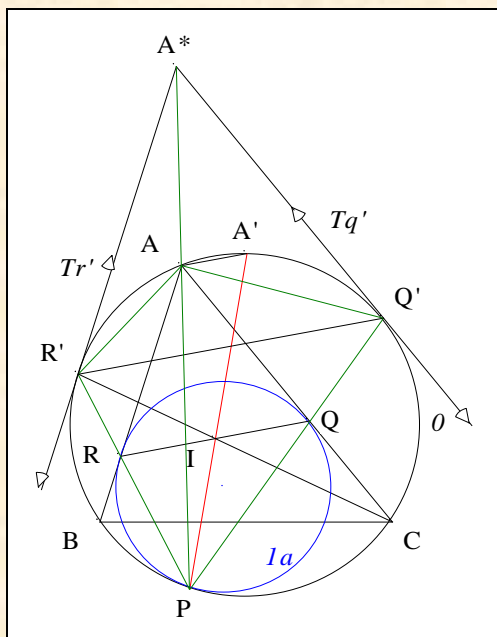
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 Ia le A-cercle de Longchamps de ABC,
 P le A-point de Longchamps de ABC,
 Q, R les points de contact de Ia resp. avec (AC) , (AB)
 et Q', R' les seconds points d'intersection resp. de (PQ) , (PR) avec O .

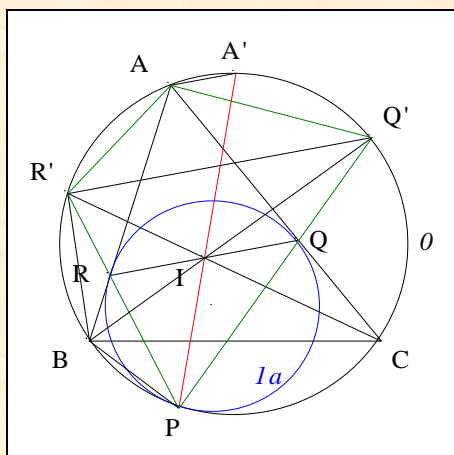
Donné : le quadrilatère $PQ'AR'$ est harmonique.

VISUALISATION



- Notons I le centre de ABC ,
 A' le premier A -perpoint de ABC ,
 Tq', Tr' les tangentes à θ resp; en Q', R'
 et A^* le point d'intersection de Tq' et Tr' .
- **Scolie :** (1) $(AA'), (Q'R')$ et (QIR) sont parallèles entre elles
 (2) d'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 1), $Tq' \parallel (AC)$ et $Tr' \parallel (AB)$.
- Les triangles $A^*R'Q'$ et ARQ étant homothétiques, A^*, A et P sont alignés.
- **Conclusion :** par définition, le quadrilatère $PQ'AR'$ est harmonique.

Scolies : (1) deux triangles semblables



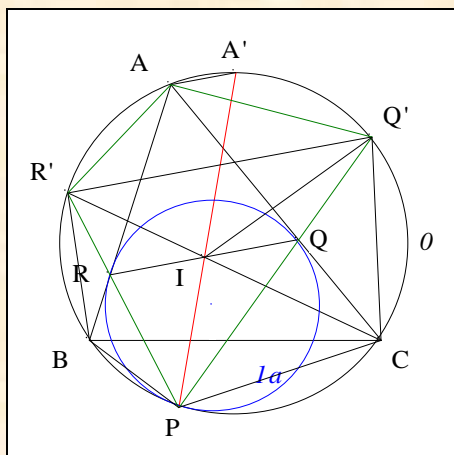
- **Conclusion :** les triangles $PR'B$ et $PQ'I$ ayant trois angles égaux, sont semblables ;
 en conséquence, $R'B/R'P = Q'I/Q'P$.

(2) Une suite de proportion

- nous avons : $R'B/R'P = R'A/R'P = Q'I/Q'P = Q'A/Q'P$

- **Conclusion :** dans tout quadrilatère harmonique, le produit des côtés opposés est égal au produit des deux autres

(3) Deux autres triangles semblables



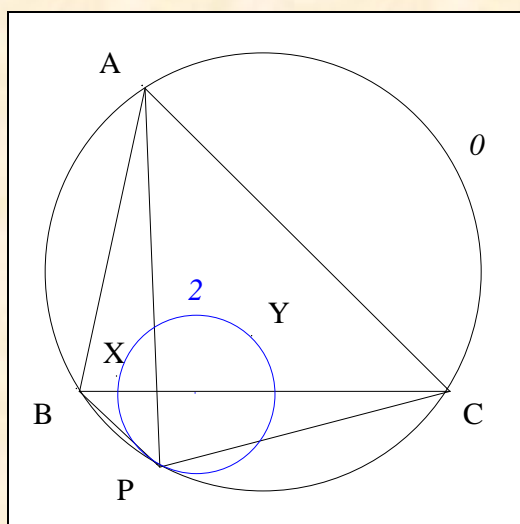
- **Conclusion :** les triangles $PR'I$ et $PQ'C$ ayant un angle égal entre deux côtés proportionnels, sont semblables.

Commentaire : ces résultats seront utiles par la suite.

2. Un cercle tangent en un point de Lonchamps

VISION

Figure :

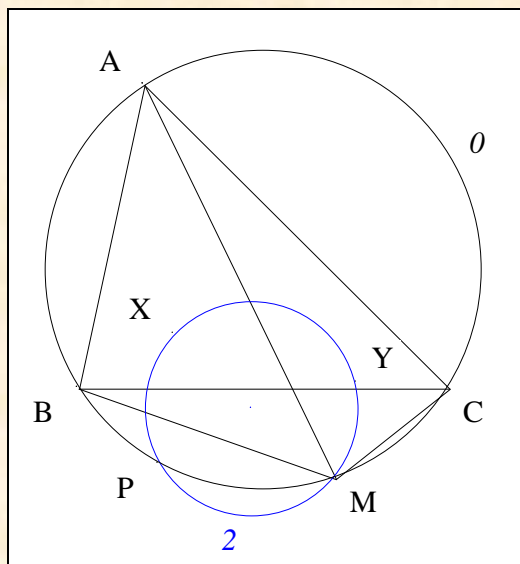


- Traits :**
- | | |
|------|--|
| ABC | un triangle, |
| O | le cercle circonscrit à ABC, |
| la | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| P | le A-point de Longchamps de ABC, |
| X, Y | les centres resp. des triangles PAB, PCA |
| et 2 | le cercle passant par X, Y, P. |

3. Un cercle remarquable

VISION

Figure :

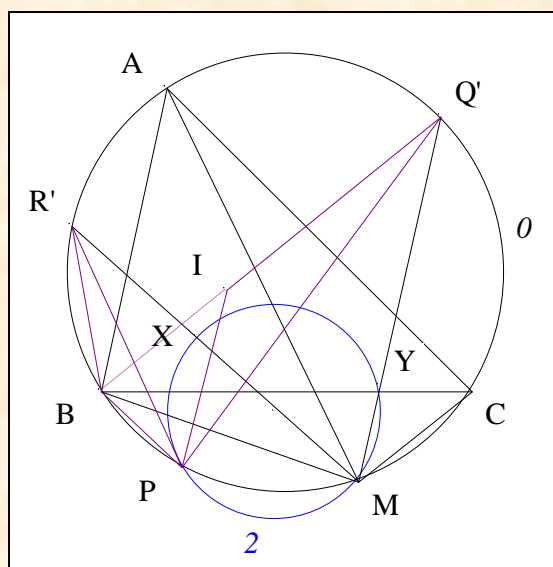


Traits :

| | |
|-------|--|
| ABC | un triangle, |
| O | le cercle circonscrit à ABC, |
| I_a | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| P | le A-point de Longchamps de ABC, |
| M | un point de l'arc BC ne contenant par le sommet A, |
| X, Y | les centres resp. des triangles MAB, MCA |
| et 2 | le cercle passant par X, Y, M. |

Donné : 2 passe par P.

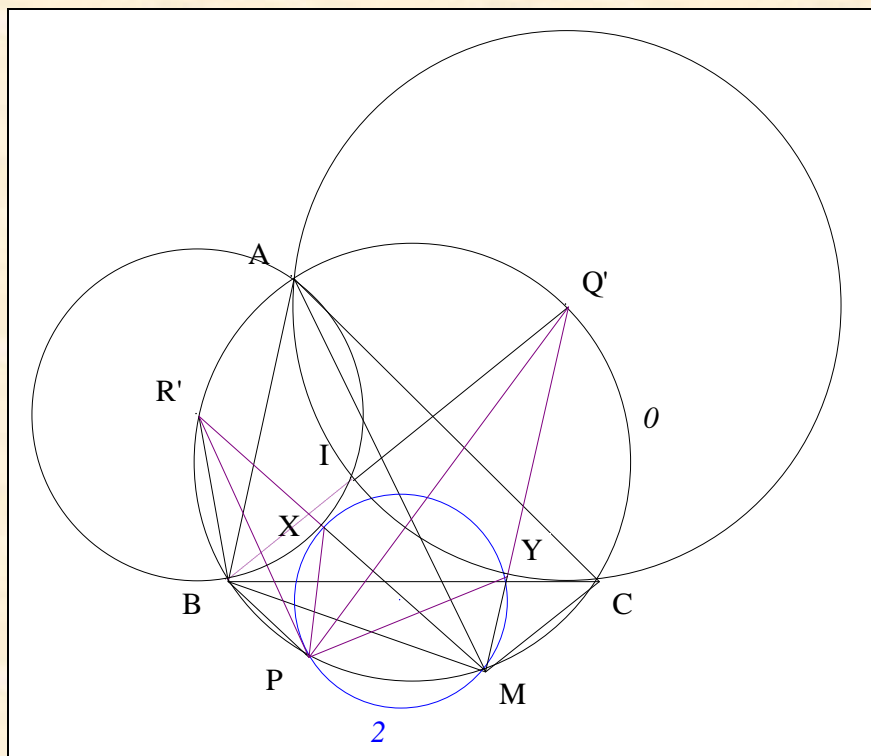
VISUALISATION



• Notons I le centre de ABC

et R', Q' les seconds points d'intersection resp. de (MX) , (MY) avec θ .

- D'après **IV. 1.** Un quadrilatère harmonique, scolie 1, les triangles $PR'B$ et $PQ'I$ ayant trois angles égaux, sont semblables ; en conséquence, $R'B/R'P = Q'I/Q'P$.



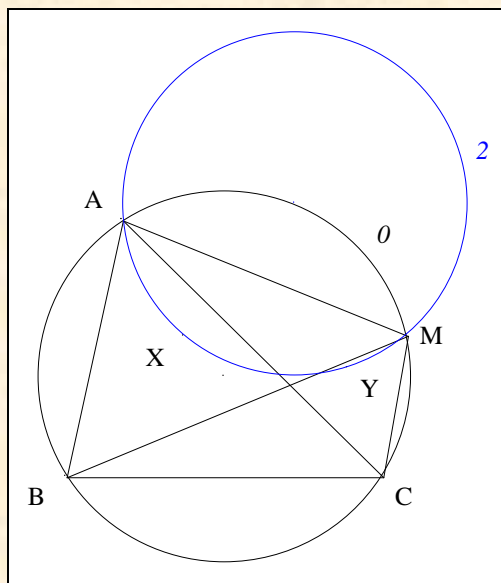
- **Scolies :**
 - (1) le B-cercle de Mention de centre Q' passe par A, I, Y, C
 - (2) le C-cercle de Mention de centre R' passe par A, I, X, B.
- Une suite de proportions : $R'X/R'P = R'B/R'P = Q'I/Q'P = Q'Y/Q'P$.
- **Conclusion partielle :** les triangles $PR'X$ et $PQ'Y$ ayant un angle égal entre deux côtés proportionnels, sont semblables.
- Nous avons : $\angle PXM = \angle PYM$.
- **Conclusion :** d'après le théorème de l'arc capable, 2 passe par P.

Note historique : ce résultat a été proposé en 1997 aux O.M. d'Iran.
 Dans la *Short list* ⁸² de 1999, le problème consistait à montrer que le cercle passant par M, X et Y passait par un point fixe de θ lorsque M décrivait l'arc BC ne contenant pas A.
 Ce point fixe P a été identifié par Nikolaos Dergiades dans un message *Hyacinthos* ⁸³.

Scolies : (1) M est sur l'un des deux autres arcs de θ

⁸² 40-ième IMO (1999) Short list, Problem G8

⁸³ New triangle center in connection with an Iranian Math. Olympiad, <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6117>



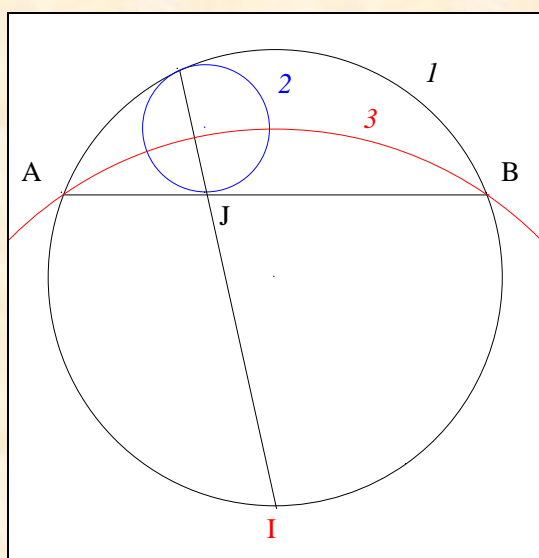
- D'après "Un cercle de Mention" (Cf. Annexe 6), 2 passant par M, X et Y, passe par A.
- **Conclusion** : lorsque M varie sur l'arc BAC, 2 passe par le point fixe A.

V. DEUX TANGENTES REMARQUABLES

1. Une autre San Gaku d'Iwate⁸⁴

VISION

Figure :



⁸⁴

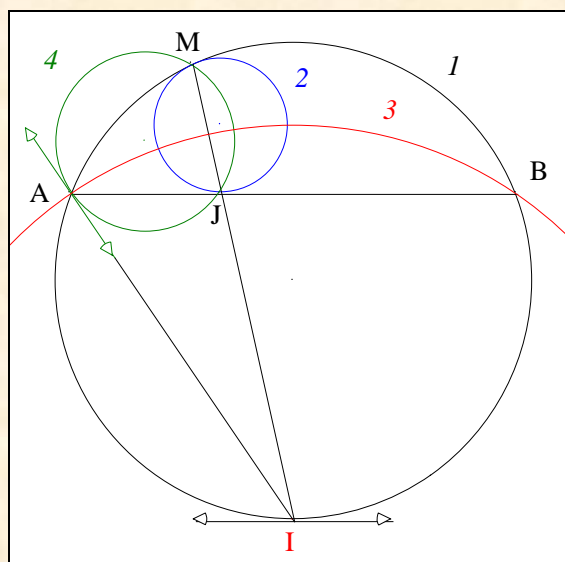
Leybourn's Mathematical repository (Nouvelle série) 6 tome I (1811) 209

Traits :

| | | |
|--------|--|---|
| I | un cercle, | |
| $[AB]$ | une corde horizontale de I , | |
| J | un point de $[AB]$, | |
| 2 | un cercle nordique tangent à (AB) en J , | |
| I | le pôle sud de I | |
| et | 3 | le cercle de centre I , passant par A . |

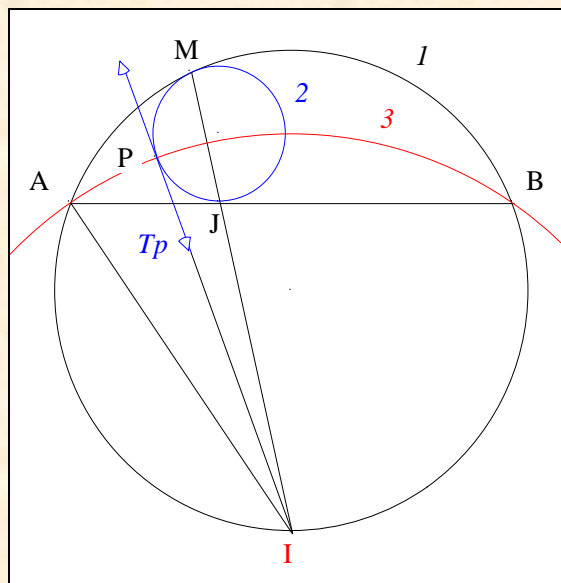
Donné : 2 est tangent à I si, et seulement si, 2 est orthogonal à 3 .

VISUALISATION NÉCESSAIRE



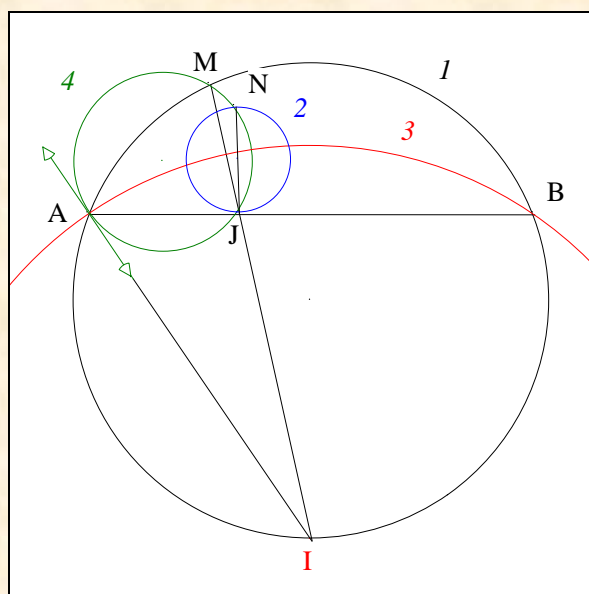
- Notons M le point de contact de I et 2 ,
 T_i la tangente à I en I
 et 4 le cercle passant par A , J et M .
- Les cercles tangents I et 2 , le point de base M , la monienne (IMJ) , les parallèles T_i et (AB) , conduisent au théorème 8' de Reim ; en conséquence, I , M et J sont alignés.
- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 9), 4 est tangent à (IA) en A ;
 en conséquence, 3 est orthogonal à 4 .
- Conclusion :** d'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 10),
 I étant sur l'axe radical (MJ) de 2 et 4 , 2 est orthogonal à 3 .

Scolie⁸⁵ :



- Notons P l'un des deux points d'intersection de 2 et 3
et T_p la tangente à 2 en P .
- 2 et 3 étant orthogonaux, T_p passe par I .
- **Conclusion :** $IP = IA (= IB)$.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que 2 n'est pas tangent à I .
- Notons M le second point d'intersection de (IJ) avec I ,
4 le cercle passant par A, J et M
et N le second point d'intersection de 4 et 2.
- Les cercles I et 4, les points de base A et M , les moniennes (IAA) et (IMJ) , les parallèles T_i et (AJ) , conduisent au théorème 2' de Reim ; en conséquence, 4 est tangent à (IA) en A ;
par définition 4 est orthogonal à 3.

- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 10),
 3 étant orthogonal à 4 et à 2 , I est sur leur axe radical (JN) ;
d'après l'axiome d'incidence **Ia**, N est sur (IJ) ;
en conséquences, N et M sont confondus i.e. I et 2 sont sécants ou bien tangents.
- **Conclusion :** les cercles sécants I et 2 , le point de base M , la monienne (IMJ),
les parallèles Ti et (AB), conduisent au théorème 8'' de Reim ;
en conséquence, 2 est tangent à I .

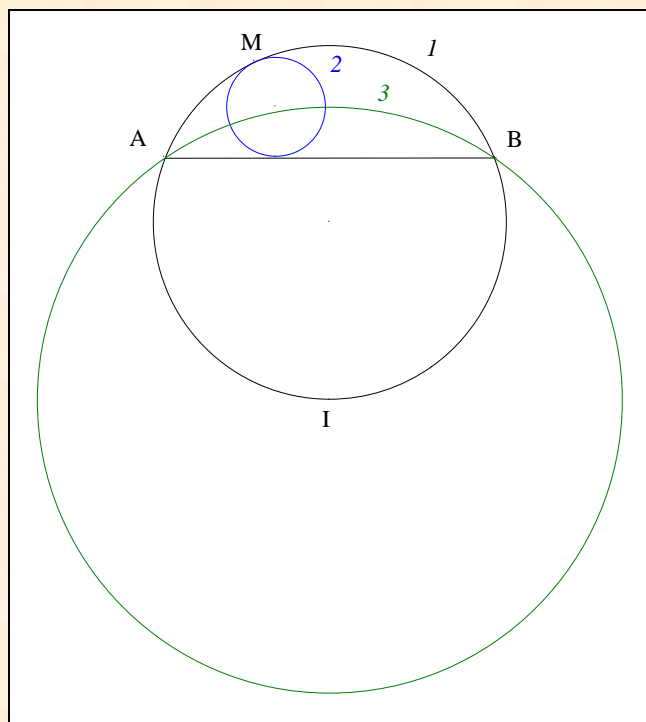
Commentaire : ce résultat s'apparente à un théorème de F. G.-M.⁸⁶

Note historique : ce type de San Gaku⁸⁷ se retrouve aussi à la préfecture d'Aichi (Japon) sur une tablette datant de 1843 qui, aujourd'hui, a disparue.

2. Une variation sur cette San Gaku

VISION

Figure :



Traits :

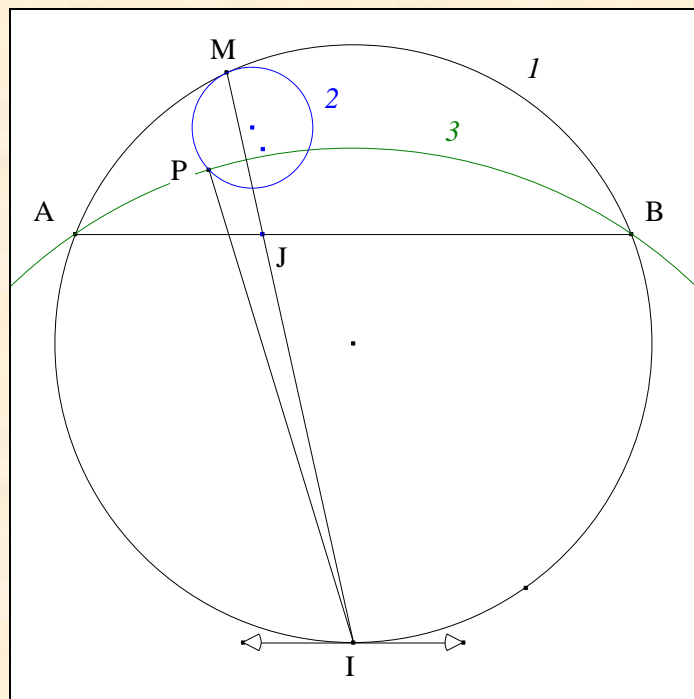
| | |
|-----------|---|
| I | un cercle, |
| M | un point de I , |
| 2 | un cercle tangent intérieurement à I en M , |
| I | un point de I , |
| 3 | le cercle de centre I orthogonal à 2 |
| et A, B | les points d'intersection de 3 et I . |

⁸⁶ F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th éd., (1920) ; rééditions Jacques Gabay, Paris, (1991) théorème 408 III p. 600

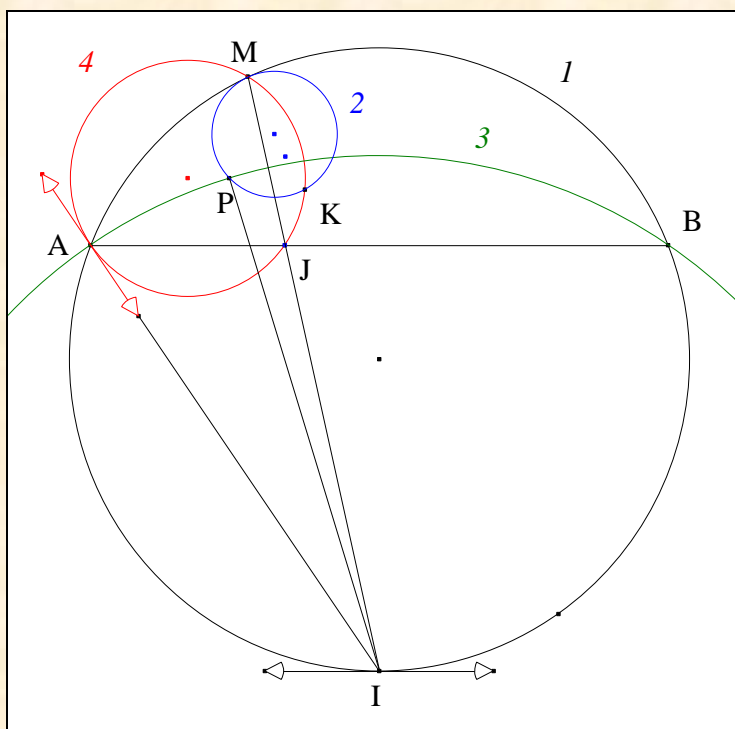
⁸⁷ Fukagawa H., Pedoe D., 1. 6., Japanese Temple Geometry Problems, Charles Babbage Research Centre (1989) 14, 88-89

Donné : 3 est orthogonal à 2 si, et seulement si, 2 est tangent à (AB) .

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons P l'un des deux points d'intersection de 3 et 2 ,
 J le point d'intersection de (IM) et $[AB]$
 et T_I la tangente à I en I .
- Par définition de deux cercles orthogonaux, (IP) est la tangente à 2 en P et $IP = IA$.



- Notons 4 le cercle passant par les points A, J, M
et K le second point d'intersection de 4 avec 2.
- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 1),
le triangle IBA étant I-isocèle, I est le milieu de l'arc AB ne contenant pas M.
- Les cercles 1 et 4 , les points de base A et M, les moniennes (IAA) et (IMJ), les parallèles Ti et (AJ),
conduisent au théorème 2' de Reim ; en conséquence, 4 est tangent à (IA) en A ;
il s'en suit que 4 est orthogonal à 3.
- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 10),
3 étant orthogonal à 4 et à 2, I est sur leur axe radical (MK);
d'après l'axiome d'incidence Ia, K est sur (IMJ);
en conséquences, K et J sont confondus i.e. [AB] est sécant ou bien tangent à 2.
- **Conclusion :** les cercles sécants 1 et 2, le point de base M, la monienne (IMJ), les parallèles Ti et (AB),
conduisent au théorème 8'' de Reim ; en conséquence, 2 est tangent à [AB].

VISUALISATION SUFFISANTE

- **Conclusion :** d'après VI. 1. Une autre San Gaku d'Iwate, 3 est orthogonal à 2.

Commentaire : ce résultat se retrouve dans un problème de Jakob Tjakko Groenman ⁸⁸.

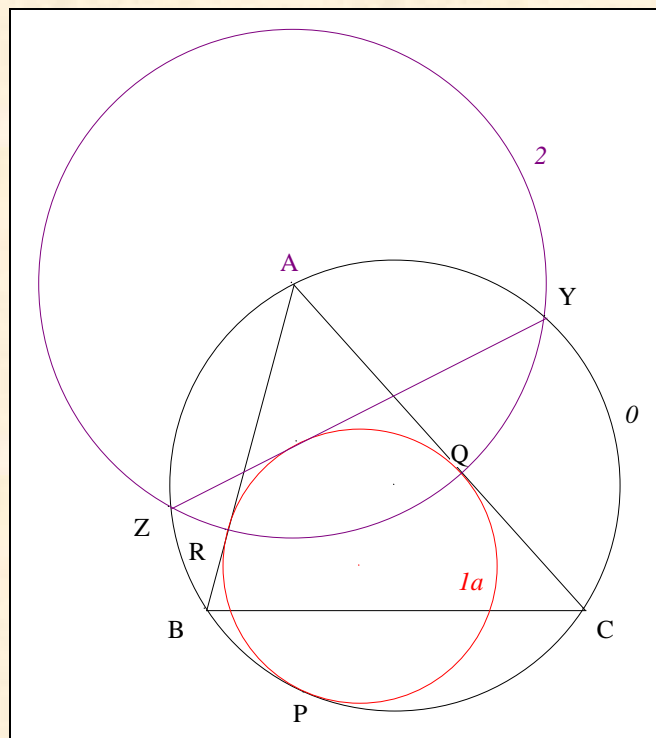
3. La tangente de Léon Bankoff

VISION

Figure :

⁸⁸

Groenman T. J., *Praxis der Mathematik*, problème 546.



| | | |
|-----------------|----------|--|
| Traits : | ABC | un triangle, |
| | θ | le cercle circonscrit à ABC, |
| | Ia | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| | P, Q, R | les points de contact de Ia resp. avec θ , (AC), (AB) |
| | 2 | le cercle de centre A passant par Q |
| et | Y, Z | les points d'intersection de θ et 2. |

Donné : (YZ) est tangente à Ia .⁸⁹

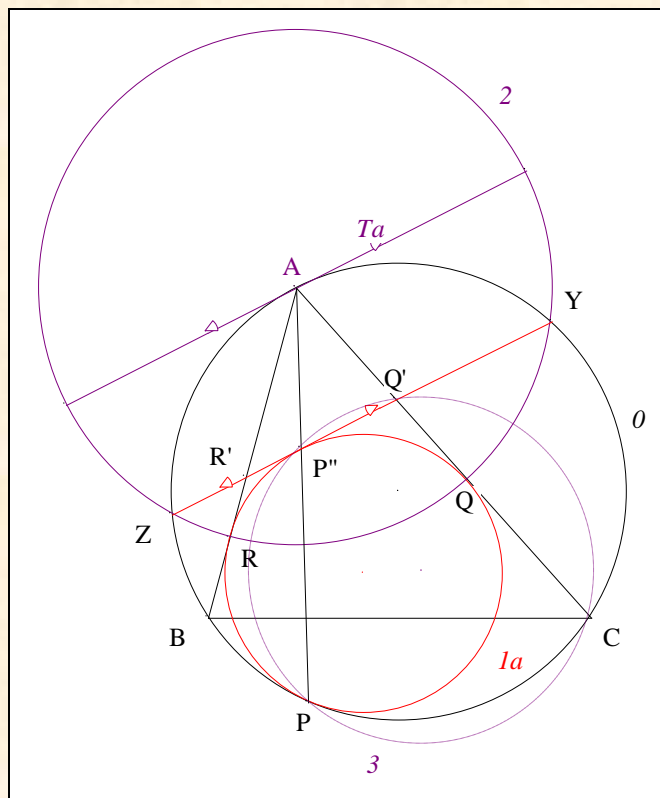
VISUALISATION

- **Scolie :** 2 est orthogonal à Ia .
- **Conclusion :** d'après VI. 2. Une variation sur cette San Gaku, (YZ) est tangente à Ia .

Note historique : l'approche de Léon Bankoff est purement métrique.

- Scolie :**
- (1) (XY) est "la A-tangente de Bankoff relativement à ABC".
 - (2) Le point de contact

⁸⁹ Bankoff L., Mixtilinear Adventure, *Crux Mathematicorum* 9 (1983) 5-6



- Notons Q', R' les points d'intersection resp. de (YZ) avec (AC) , (AB) ,
 r le rayon du cercle inscrit à ABC ,
 ra le rayon de Ia
 et α une mesure à Π près de $\angle BAC$.
- Le cercle 0 , les points de base P, C , les moniennes naissantes (APP'') et (ACQ') ,
 les parallèles Ta et $(P''Q')$ conduisent au théorème 1'' de Reim ;
 en conséquence, P, C, Q', P'' sont cocycliques.
- Notons 3 ce cercle.
- Nous avons :
 - * puissance de A par rapport à 3 $\overline{AQ'}.AC = \overline{AP''}.AP$;
 - * puissance de A par rapport Ia $\overline{AP'}.AP = AQ^2$;
 - * par transitivité de la relation $=$, $\overline{AQ'}.AC = AQ^2$.
- Calcul de AQ^2 :
 - * par définition de la cotangente, $AQ = ra \cdot \cotan \alpha / 2$
 - * nous savons : $ra = r \cdot \sec^2 \alpha / 2$
 - * par substitution et élévation au carré, $AQ^2 = 4r^2 / \sin^2 \alpha$.
- Notons $b = AC$.
- Conclusion : $AQ' = 4r^2 / b \sin^2 \alpha$.

Une courte biographie de Léon Bankoff :

Léon Bankoff est né le 13 décembre 1908, à New York (États-unis). Sa mère, originaire de Riga (Lettonie), est une célèbre couturière de la 5-ième avenue et son père, arrivé aux États-unis vers 1900, est un marchand de tabac en dehors de ses heures de travail. Après ses études en chirurgie dentaire, il obtient son doctorat et quitte la côte ouest pour aller pratiquer son métier à Beverley Hill. Pour l'anecdote, il aura parmi ses patients, des célébrités hollywoodiennes. Aimant le piano, la guitare et l'ordinateur, il se passionne pour les mathématiques vers 1940 et écrit des articles relevant des mathématiques et de son domaine professionnel.

Sa fascination pour l'Arbelos d'Archimède, l'amène à rassembler de nombreux résultats sur le sujet et le pousse à entreprendre en 1958, un voyage en France pour rencontrer un autre "fan" de l'Arbelos, Victor Thébault. La rencontre se fait à Tennesse (Sarthe, France) où réside le célèbre "problémiste" français. Les échanges se font l'intermédiaire d'une interprète, Francine Laloue, qu'il épouse en 1966.

De 1968 à 1981, il prend en charge la section Problèmes de la revue *Pi Mu Epsilon Journal* qui dépérira à cause d'un manque de lecteurs. Il contribue aussi au journal *Eureka*, l'ancêtre de *Crux Mathematicorum*, fondé par Léon Sauvé. Auteur d'une démonstration du théorème d'Erdős-Mordell, le gentleman de Beverley Hill, découvre en 1954, dans l'Arbelos, deux autres cercles géométriques, égaux à celui d'Archimède. En 1983, il présente dans la revue *Crux Mathematicorum*⁹⁰, un article, voire une aventure sur les "mixtilinear incircles" qui deviendra par la suite un classique.

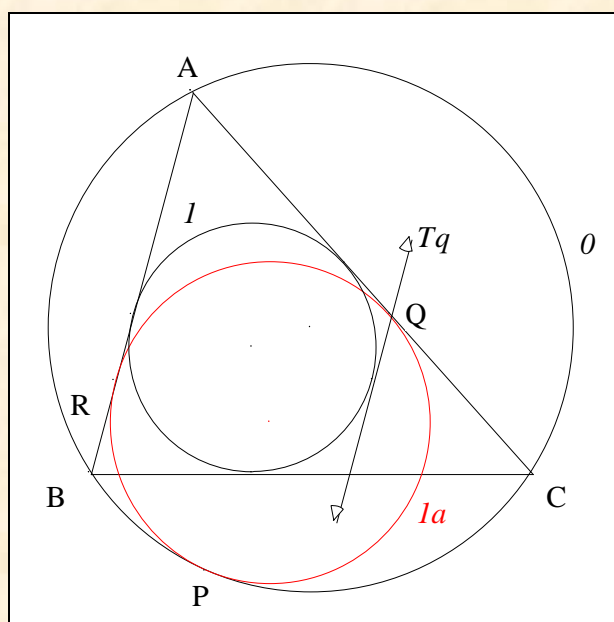
Durant sa retraite, il travaille sur un livre résumant tous les travaux concernant l'Arbelos et demande à Clayton W. Dodge de l'Université du Maine (États-unis) de le terminer suite à une perte de la vue.

Il décède d'un cancer, le dimanche après-midi du 16 février 1997.

4. Une tangente de l'auteur

VISION

Figure :



| | | |
|-----------------|------|-----------------------------------|
| Traits : | ABC | un triangle, |
| | O | le cercle circonscrit à ABC, |
| | I | le cercle inscrit de ABC, |
| | Ia | le A-cercle de Longchamps de ABC, |

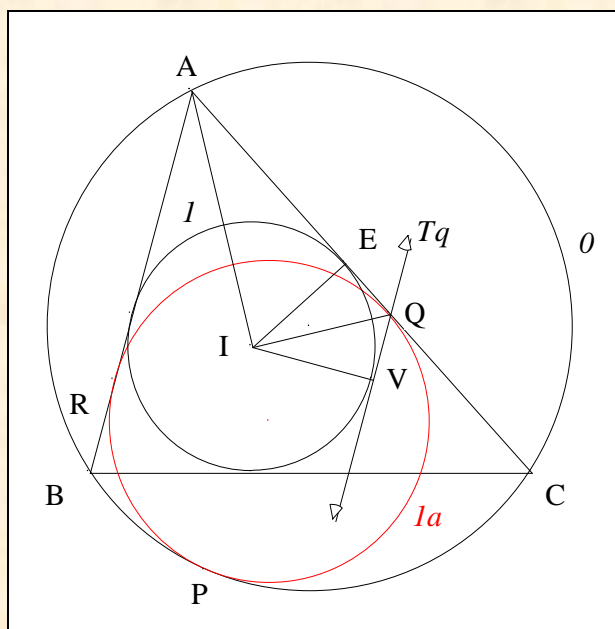
⁹⁰

Bankoff L., A Mixtilinear Adventure, *Crux Math. with Math. Mayhem* **9** (1983), 2-7

P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec O , (AC), (AB)
 I le cercle de centre A passant par Q
 et Tq la tangente à I issue de Q.

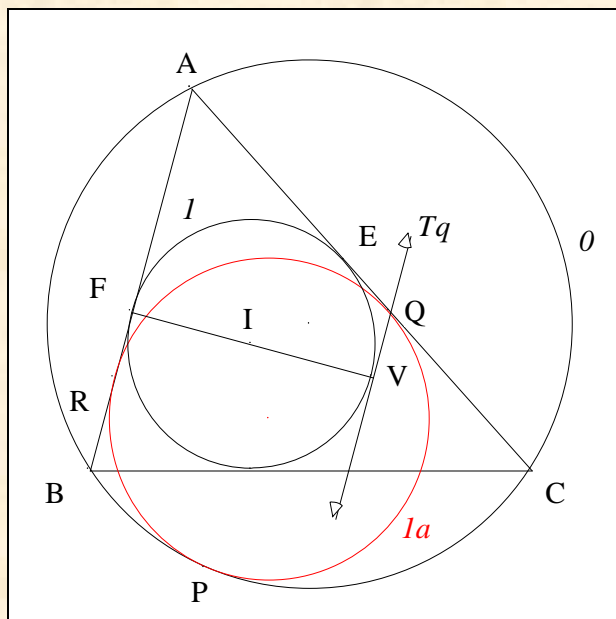
Donné : Tq est parallèle à (AB).

VISUALISATION



- Notons I le centre de I ,
 V le point de contact de Tq avec I
 et E le point de contact de I avec (AC).
- Une chasse angulaire à π près :
 le quadrilatère IVQF étant cyclique, $\angle VQC = \angle VIE$;
 IVQF étant un cerf-volant, $\angle VIE = 2\angle QIE$;
 le triangle IQA étant I-rectangle, $2\angle QIE = \angle BAC$ (car (AI) est la A-bissectrice de ABC) ;
 par transitivité de la relation =, $\angle VQC = \angle BAC$.
- Conclusion :** $\angle VQC$ et $\angle BAC$ étant deux angles égaux correspondants, Tq est parallèle à (AB).

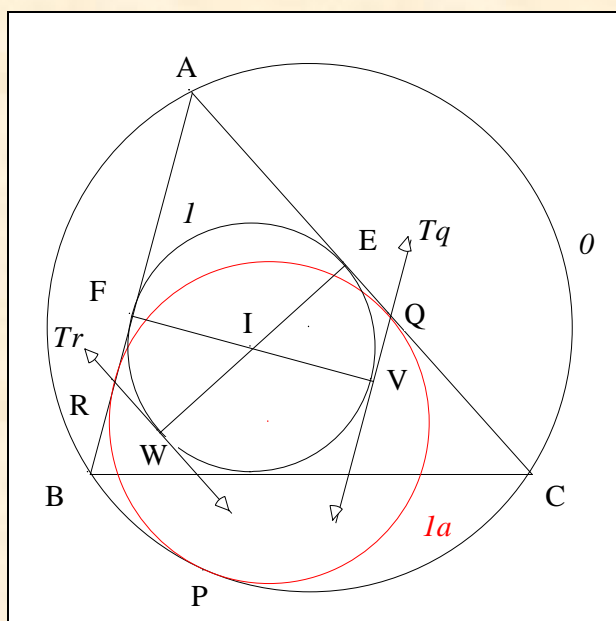
Scolies : (1) un alignement



- Notons F le point de contact de I avec (AB) .

- **Conclusion :** F, I et V sont alignés.

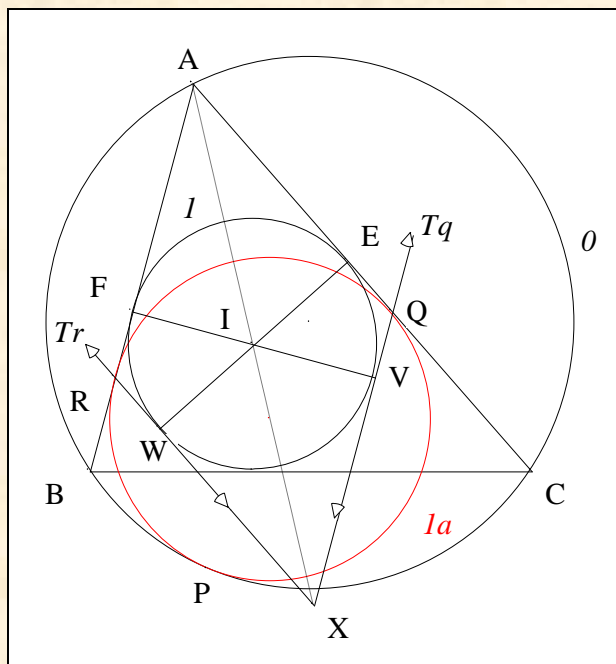
(2) une autre parallèle et un autre alignement



- Notons Tr la tangente à I issue de R
et W le point de contact de Tr avec I .

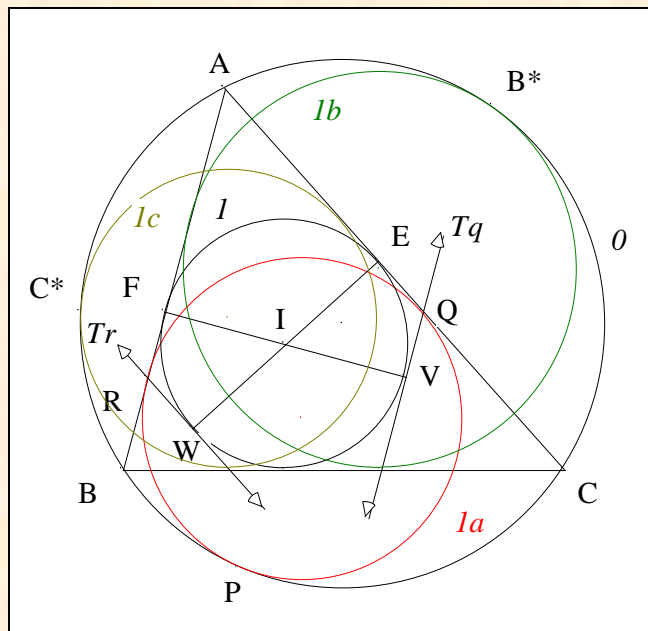
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que Tr est parallèle à (AC) et E, I et W sont alignés.

(3) Intersection sur la A-bissectrice de ABC



- Notons X le point d'intersection de Tq et Tr .
- **Conclusion :** d'après Newton "Un quadrilatère circonscriptible" (Cf. Annexe 11) appliqué au quadrilatère $ARXQ$, Tq et Tr se coupent sur (AI) .

(4) Les traces latérales de cercles de Longchamps de ABC



- **Conclusion :** d'après "Deux tangentes parallèles" ⁹¹, les points d'intersection resp. de Tq , Tr avec (BC) , sont les traces resp. des B , C _cercles de Longchamps de ABC.

⁹¹

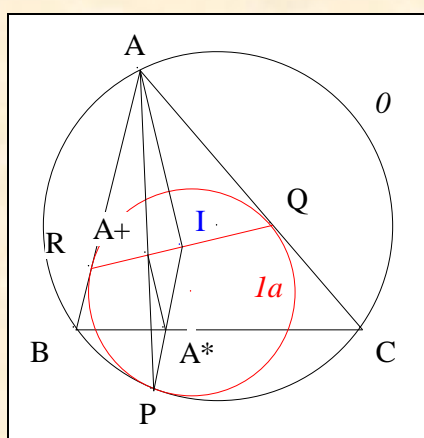
Commentaire : ces résultats seront généralisés.

VI. QUESTIONS DIVERSES

1. Une parallèle à (AI)

VISION

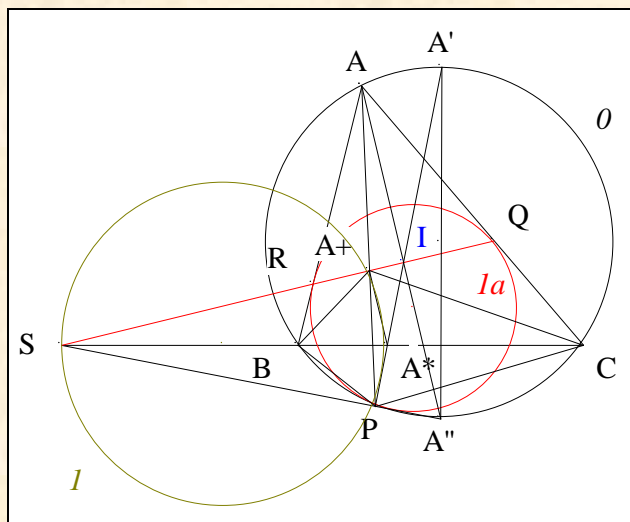
Figure :



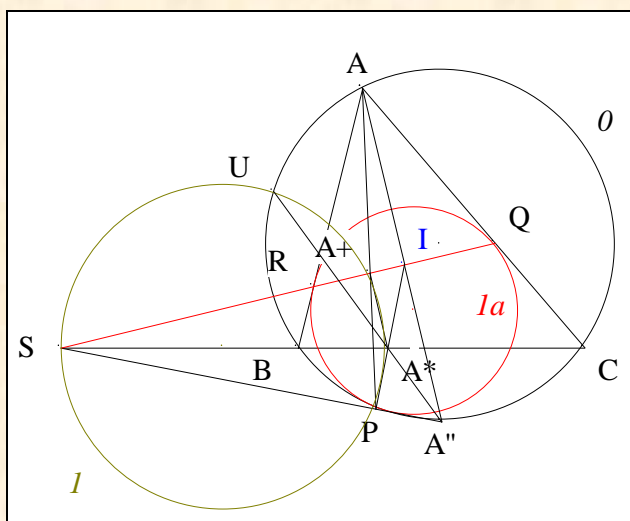
Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 Ia le A-cercle de Longchamps de ABC ,
 P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec (AB) , (AC) , O ,
 I le centre de ABC
 et A^*, A^+ les points d'intersection resp. de (PI) et (BC) , de (PA) et (QR) .

Donné : $(A+A^*)$ est parallèle à (AI) .⁹²

VISUALISATION



- D'après II. 4. scolie 2, en conséquence, (PIA') est la P-bissectrice intérieure de PCB ; (PA'') est la P-bissectrice extérieure de PCB.
- La quaterne (B, C, A*, S) étant harmonique, le pinceau (A+ ; B, C, A*, S) est harmonique.
- Ce pinceau ayant deux rayons perpendiculaires, (1) (A+A*) est la A+-bissectrice intérieure de A+BC ; (2) (A+S) est la A+-bissectrice extérieure de A+BC.
- **Conclusion :** $\angle RA+B = \angle CA+Q$.
- (2) Trois points alignés

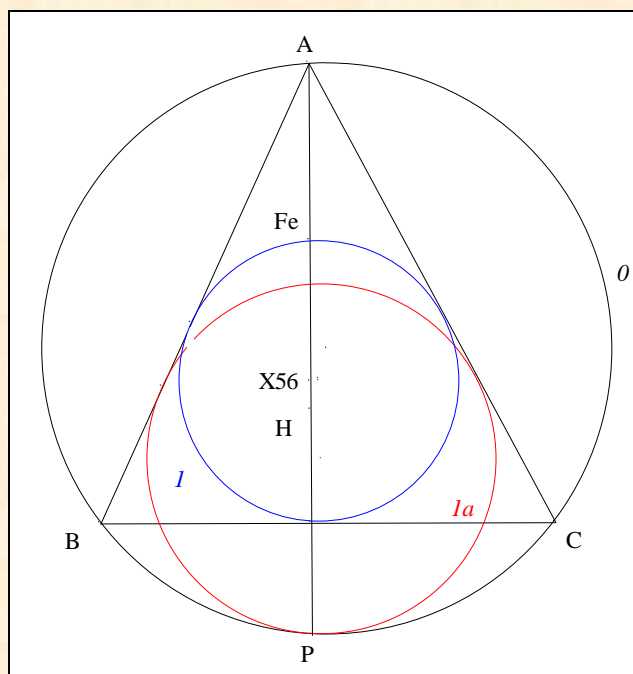


- Notons U le second point d'intersection de O et I .
- **Conclusion :** les cercles I et O , les points de base P et U , la monienne (A+PA), les parallèles (A+A*) et (AA''), conduisent au théorème 0' de Reim ; en conséquence, A*, U et A'' sont alignés.
- (3) Un cercle passant par A+ et tangent à Ia en P ⁹⁵

et P le A-point de Longchamps de ABC,
Fe le point de Feuerbach de ABC.

Donné : A, Fe, P sont alignés si, et seulement si, (AP) est perpendiculaire à (BC) ⁹⁶.

VISUALISATION



- Notons I le cercle inscrit de ABC,
et I' le cercle d'Euler de ABC.
 H l'orthocentre de ABC.
- D'après "Le théorème de Feuerbach" ⁹⁷, Fe est le point de contact des cercles tangents I et I' .
- **Scolies :**
 - (1) X_{56} est le centre externe d'homothétie de O et I
 - (2) Fe est le centre externe d'homothétie de I et I'
 - (3) H est le centre externe d'homothétie de O et I' .
- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe 3), H, Fe et X_{56} sont alignés.
- **Scolies :**
 - (1) X_{56} est le centre externe d'homothétie de O et I
 - (2) A est le centre externe d'homothétie de I et Ia
 - (3) P est le centre externe d'homothétie de O et Ia .
- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe 3), P, A et X_{56} sont alignés.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- A, Fe et P sont alignés.

⁹⁶ Fang J., Nice Collinear, *Mathlinks* (16/07/2008) ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1746639913&t=215223.
⁹⁷ Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ;
Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica (Espagne) 26 (2006).
<http://www.oei.es/oim/revistaioim/index.html>.

- D'après l'axiome d'incidence I_a ,
 - (1) A, Fe et X_{56} sont alignés
 - (2) A, Fe, X_{56} et H sont alignés.
- **Conclusion :** (AP) est perpendiculaire à (BC) .

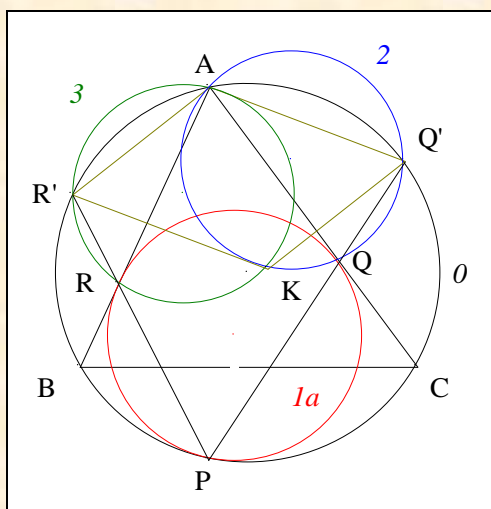
VISUALISATION NÉCESSAIRE

- (AP) est perpendiculaire à (BC) .
- A, H et X_{56} sont alignés.
- D'après l'axiome d'incidence I_a , A, H, X_{56} et Fe sont alignés.
- **Conclusion :** A, Fe et P sont alignés.

3. Un parallélogramme

VISION

Figure :

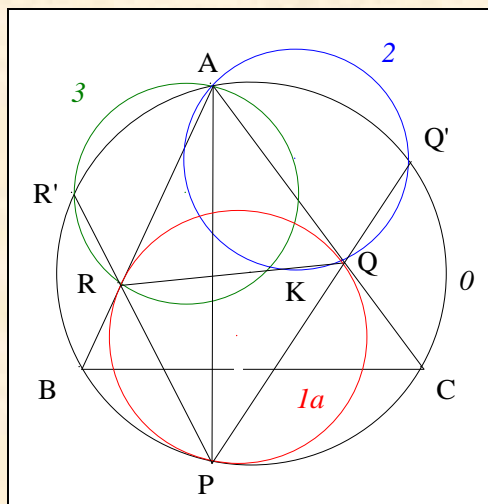


| | | |
|-----------------|---------|---|
| Traits : | ABC | un triangle, |
| | O | le cercle circonscrit à ABC, |
| | I_a | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| | P, Q, R | les points de contact de I_a resp. avec O , (AB), (AC), |
| | P', Q' | les seconds points d'intersection de (PQ), (PR) avec O , |
| | 2, 3 | les cercles circonscrits resp. aux triangles AQQ', ARR' |
| et | K | le second point d'intersection de 2 et 3. |

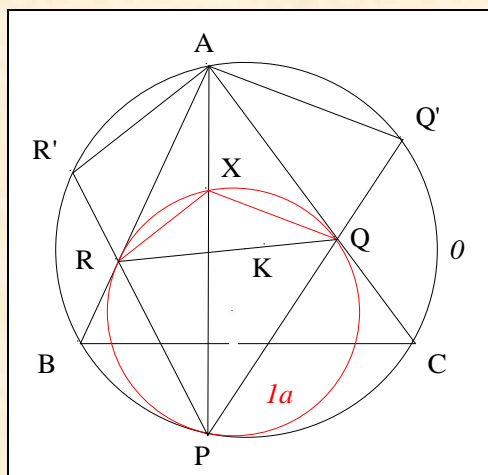
Donné : le quadrilatère $AR'KQ'$ est un parallélogramme ⁹⁸.

VISUALISATION

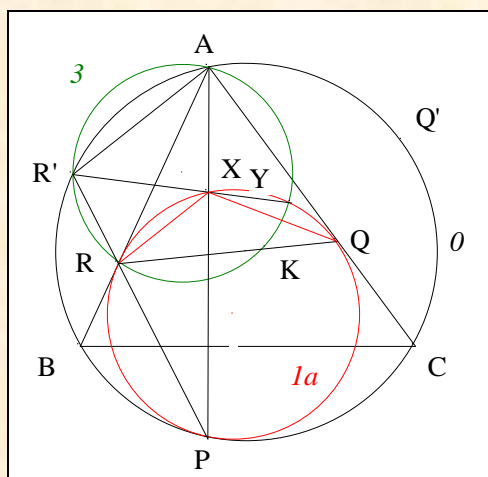
⁹⁸



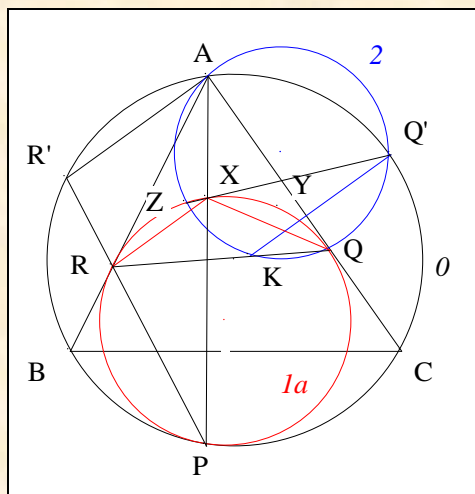
- **Conclusion partielle** : d'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 9) appliqué aux cercles 0 , 1 , 2 , P , K et R sont alignés.



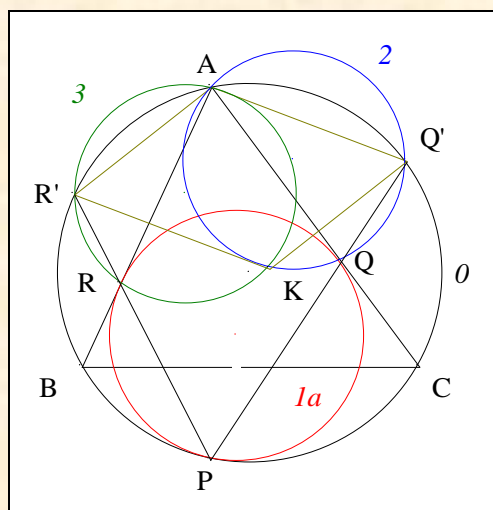
- Notons X le second point d'intersection de (PA) avec Ia .
- Les cercles 0 et Ia , le point de base P , les moniennes $(R'RP)$ et (APX) , conduisent au théorème 7 de Reim ; il s'en suit que $(R'A) \parallel (RX)$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(QX) \parallel (Q'A)$.



- Notons Y le second point d'intersection de $1a$ et 3 .
- Les cercles $1a$ et 3 , les points de base R et Y , la monienne (RRA), les parallèles (RX) et (AR'), conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, X, Y et R' sont alignés.

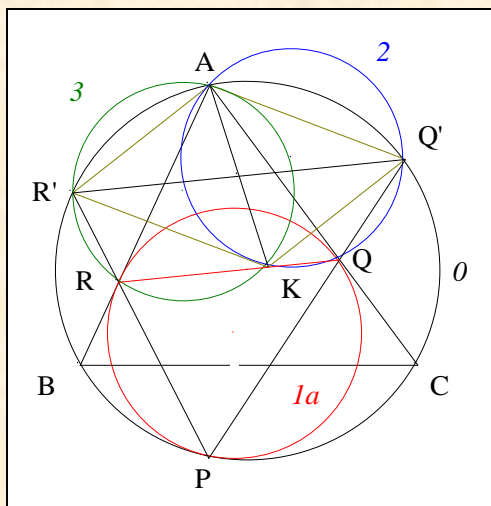


- Notons Z le second point d'intersection de $1a$ et 2 .
- Les cercles $1a$ et 2 , les points de base Q et Z , la monienne (QQA), les parallèles (QX) et (AQ'), conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, X, Z et Q' sont alignés.
- Les cercles $1a$ et 2 , les points de base Q et Z , les moniennes (RQK) et (XZQ'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que $(RX) \parallel (KQ')$; par transitivité de la relation \parallel , $(R'A) \parallel (KQ')$.



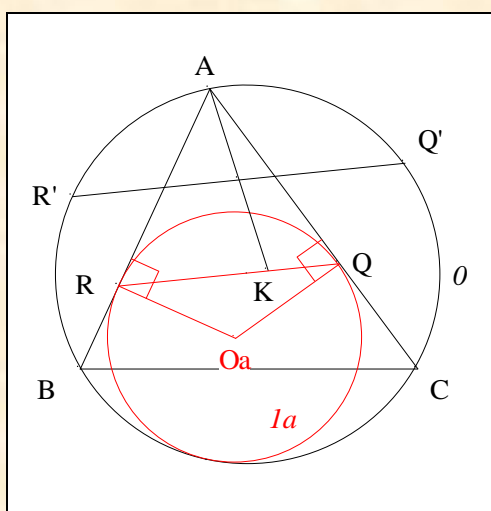
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(Q'A) \parallel (KR')$.
- **Conclusion** : par définition, le quadrilatère $AR'KQ'$ est un parallélogramme.

Scolies : (1) symétrique de A par rapport au milieu de $[Q'R']$



- **Conclusion :** le symétrique K de A par rapport au milieu de $[Q'R']$ est sur $[QR]$.

- (2) Q' est le milieu de l'arc AC de \odot ne contenant pas B
 R' est le milieu de l'arc AB de \odot ne contenant pas C .
- (3) $(Q'R')$ est parallèle à (QR) .
- (4) Une construction de Oa ⁹⁹



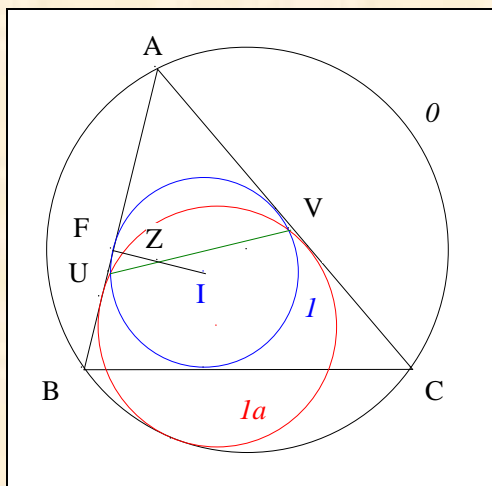
- Notons Oa le centre de Ia .
- La figure ci-dessus et les scolies précédentes indiquent la construction de Oa .

4. Axe radical d'un cercle de Longchamps et du cercle inscrit

VISION

Figure :

⁹⁹ Pohoata C., Geometric constructions of mixtilinear incircles, *Crux Mathematicorum* (2008)

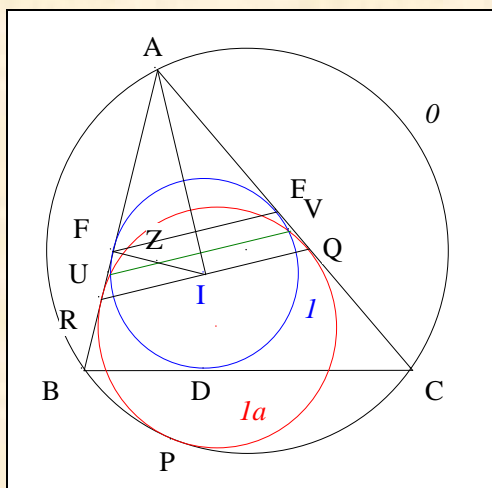


Traits :

| | |
|------|---|
| ABC | un triangle, |
| O | le cercle circonscrit à ABC, |
| I | le cercle inscrit à ABC, |
| I | le centre de I , |
| F | le point de contact de I avec (AB) , |
| Ia | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| U, V | les points d'intersection de Ia et I |
| et Z | le point d'intersection de (UV) et (IF) . |

Donné : Z est le milieu de $[IF]$.

VISUALISATION



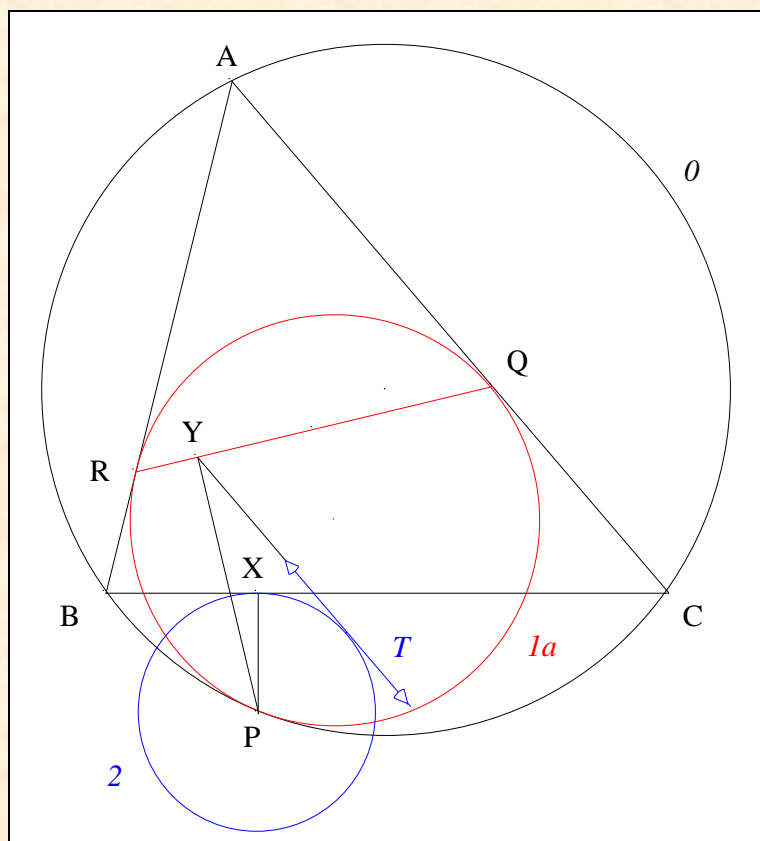
- Notons et DEF le triangle de contact de ABC
P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec O , (AB) , (AC) .
- Nous savons : $(EF) \perp (AI)$ et $(AI) \perp (QR)$;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(EF) \parallel (QR)$.
- Scolies :** (1) (UV) passe par les milieux resp. de $[RF]$, $[QE]$
(2) $(UV) \parallel (QR)$.
- D'après II. 2. Un cercle de Longchamps, I est sur (QR) .

- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle FRI, Z est le milieu de $[IF]$.

5. Une parallèle à (AC)

VISION

Figure :



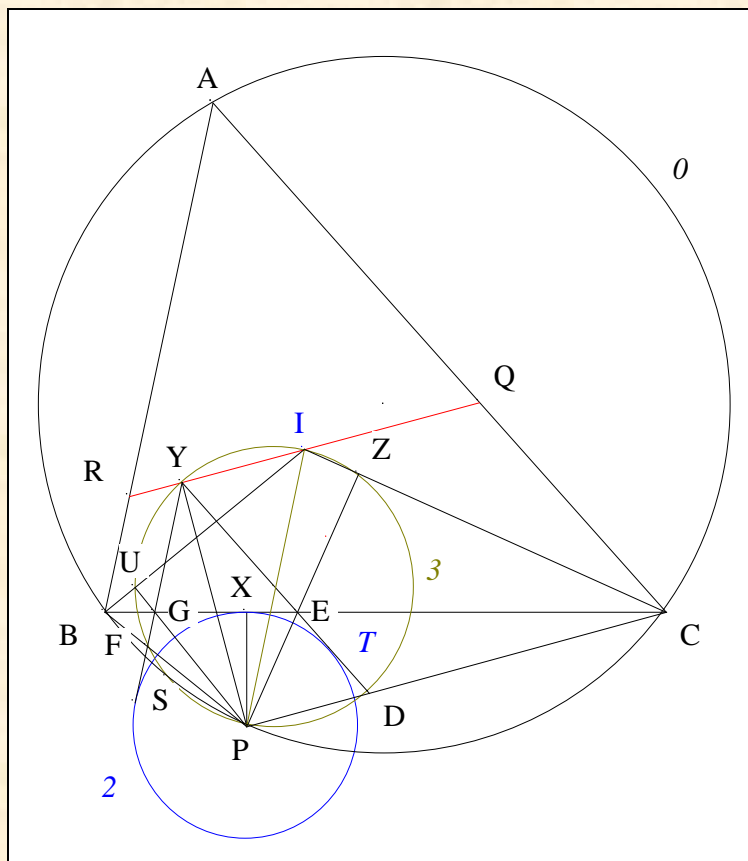
| | | |
|-----------------|---------|---|
| Traits : | ABC | un triangle, |
| | O | le cercle circonscrit à ABC, |
| | Ia | le cercle tangent resp. à (AB) , (AC) , et intérieurement tangent à O , |
| | P, Q, R | les points de contact de Ia resp. avec O , (AC) , (AB) |
| | X, Y | les pieds des perpendiculaires abaissées de P resp. sur (BC) , (QR) , |
| | 2 | le cercle de centre P passant par X |
| et | T | la tangente à 2 passant par Y comme indiqué sur la figure. |

Donné : (YU) est parallèle à (AC) ¹⁰⁰.

VISUALISATION

¹⁰⁰

Ayme J.-L., Mixtilinear again, *Mathlinks* (05/12.2008) ;
<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=243559>



- P étant le P-excentre de YGE, (1) 2 est tangent à (YED) et à (YGF)
- (2) 2 est le P-excercle de YGE.
- **Scolie :** $T = (YED)$.
- **Conclusion :** T est parallèle à (AC) .

Note historique : ce problème a été proposé en 1998 par Toshio Seimiya ¹⁰¹ dans une version métrique qui consistait à montrer que

$$PX = PY \cdot \sin A/2.$$

La solution proposée par l'étudiant Florian Herzig ¹⁰² de Cambridge (Grande-Bretagne) recourt à l'inversion. Dans une note additive, l'éditeur rappelle que Francisco Bellot Rosado lui a signalé quelques références au sujet de la figure. L'auteur a tout simplement traduit synthétiquement ce résultat. La solution de Vladimir Zajic repose sur la considération d'éléments homologues dans une homothétie.

Francisco Bellot Rosado ¹⁰³ et la Géométrie du triangle

En Espagne, la Géométrie du Triangle a été régulièrement sacrifiée dans toutes les réformes qui se sont succédées depuis 1970. Aujourd'hui, nous pouvons constater que la majorité des professeurs de Mathématiques n'ont, par exemple, jamais rencontré dans leur cursus la droite de Simson ou le concept de droites isogonales, et affirmer sans le moindre risque d'erreur que les problèmes de Géométrie proposés dans les concours sont a priori

¹⁰¹ Seimiya T., Problème 2335, *Crux Mathematicorum* (1998) 177

¹⁰² Herzig F., solution du problème 2335, *Crux Mathematicorum* (1999) 68

¹⁰³ Redacteur en chef de la Revista Escolar de la O.I.M

jugés comme difficiles à résoudre par les participants. Cette situation est vraiment incompréhensible car, à mon humble avis, l'enseignement de la Géométrie contribue pleinement à l'élaboration de la pensée scientifique.

Je ne saurais dire à quel moment de ma carrière, je suis devenu un "fan" de la Géométrie. Cette passion s'est reflétée dans ma bibliothèque en accumulant les classiques de cette discipline comme F. G.-M., Altshiller-Court, Maxwell, Prasolov, Efremov pour n'en citer que quelques uns. Aussi deux anecdotes que j'aimerais vous faire partager me viennent à l'esprit.

Comme les livres attirent les livres, j'eus un jour l'agréable surprise de recevoir de la part du professeur Shiiko Iwata son *Encyclopédie du Triangle* en huit volumes, écrite en japonais, illustrée par de nombreuses figures, se référant à des problèmes de *Mathesis*, de l'*American Mathematical Monthly* et d'autres avec les solutions de leurs auteurs. Ce magnifique cadeau était accompagné de ces quelques mots

parce que vous aimez la Géométrie.

Pour le classique *College Geometry* de Nathan Altshiller-Court, tout commença en 1989 à l'Instituto Preuniversitario Vocacional en Ciencias Exactas « Lénine » situé près de La Havane (Cuba) lors des Olympiades Iberoaméricaines où l'un de mes collègues cubains me signala que le Docteur Raimundo Reguera, personnage clef des Olympiades cubaines, en détenait un exemplaire. Je prenais contact avec Raimundo et lui demandais l'impossible i.e. d'en faire une photocopie ce qui était impensable sous le régime de l'époque. Effectivement, ma demande ne pouvait aboutir... et à ma grande surprise Raimundo m'offrit en cadeau son exemplaire datant la première édition de 1925. Celui de la seconde édition de 1952, me fut aussi gracieusement offert par le professeur Kenneth S. Williams qui dirigeait la revue *Crux Mathematicorum*.

Tous ces témoignages d'amitiés "géométriques" m'ont profondément émus et touchés.

Depuis 2002, je dirige la *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, une revue électronique sponsorisée par l'Organisation des États Ibéro-américains pour l'Éducation, la Science et la Culture, où de nombreux articles et problèmes de Géométrie sont proposés aux lecteurs.

Mon attrait pour la Géométrie et plus particulièrement pour celle du Triangle est toujours intacte. Cela me permet de trouver de nouveaux résultats ou de découvrir un nouvel aspect de tels ou tels théorèmes.

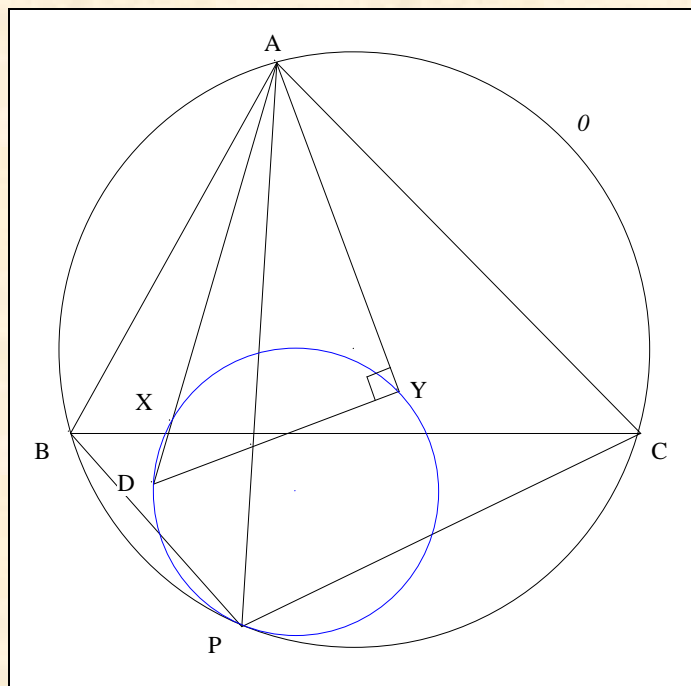
Cela semble impossible, mais cela est vrai.

Deux sites web peuvent illustrer cette réflexion à savoir ceux de *Forum Geometricorum* et de Jean-Louis Ayme...

6. Une situation de l'auteur

VISION

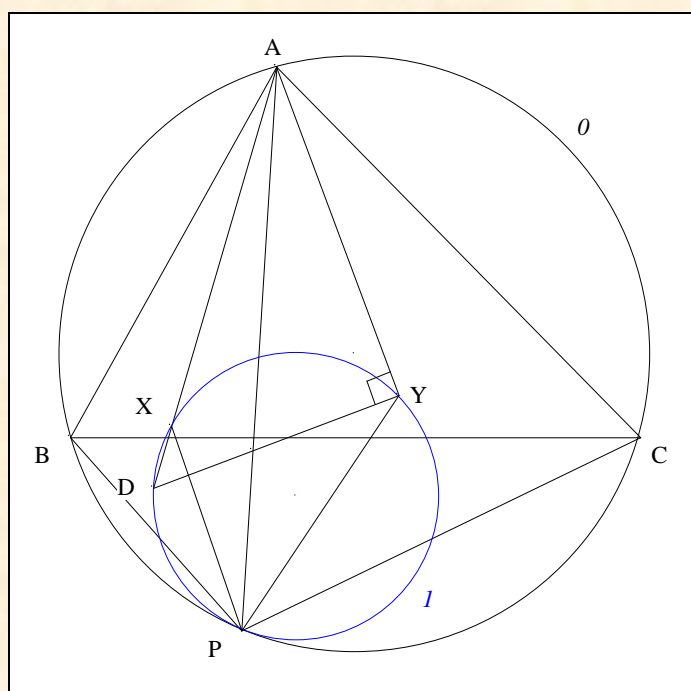
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 P le A-point de Longchamps de ABC,
 X, Y les centres resp. des triangles PAB, PCA
 Py la perpendiculaire à (AY) en Y
 et D le point d'intersection de Py et (AX) .

Donné : P, X, Y, D sont cocycliques ¹⁰⁴.

VISUALISATION



¹⁰⁴

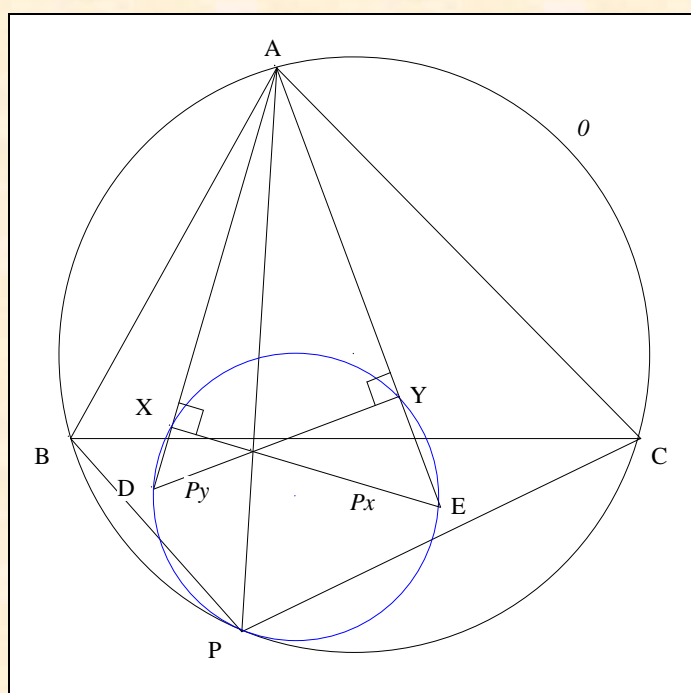
Ayme J.-L., Mixtilinear..., *Mathlinks* (07/12/2008) ;
<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=243889>

- Une chasse angulaire :
nous avons :
le triangle YAD étant Y-rectangle,
(AX) et (AY) étant les A-bissectrices de PAB, PCA,
A, B, C, P étant cocycliques,
(PX) et (PY) étant les P-bissectrices de PAB, PCA,
par transitivité de la relation =,

$$\begin{aligned}\angle YDX &= \angle YDA ; \\ \angle YDA &= (\pi/2) - \angle DAY ; \\ \angle YAD &= \frac{1}{2} \angle CAB ; \\ \angle CAB &= \pi - \angle CPB ; \\ \angle CPB &= 2 \cdot \angle YPX ; \\ \angle YDX &= \angle YPX.\end{aligned}$$

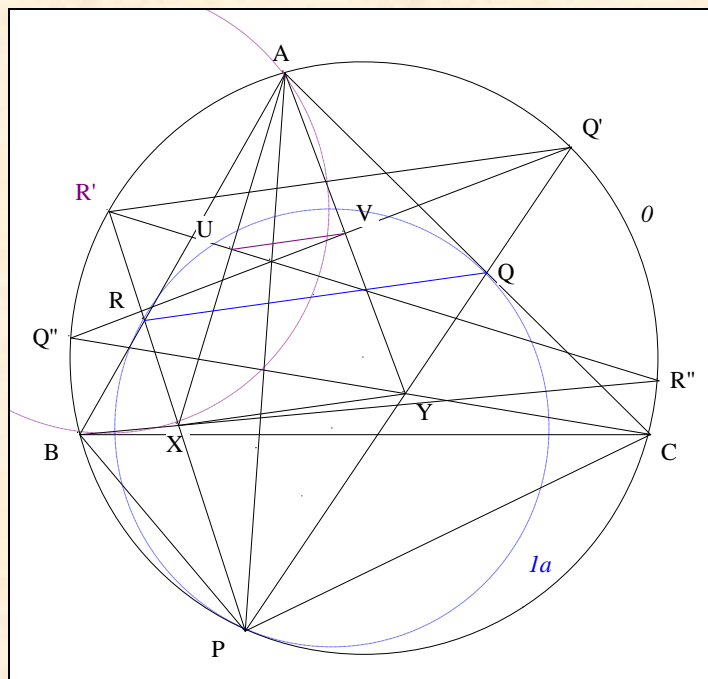
- **Conclusion :** P, X, Y, D sont cocycliques.
- Notons I ce cercle.

Scolies : (1) un autre point sur I



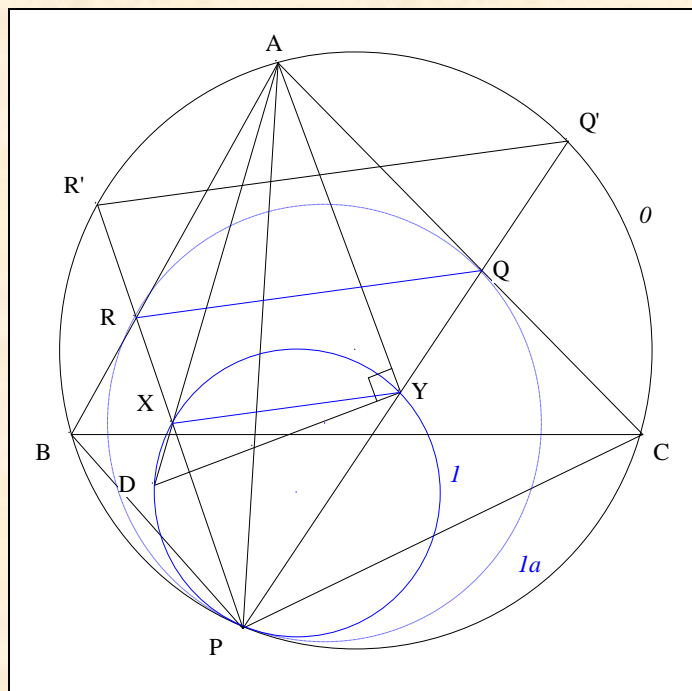
- Notons P_x la perpendiculaire à (AX) en X
et E le point d'intersection de P_x et (AY).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que P, X, Y, E sont cocycliques.
- **Conclusion :** E est sur I .

(2) Trois parallèles entre elles



- Notons Q'', R'' les seconds points d'intersection resp. de (CY) , (BX) avec θ
 et U, V les points d'intersection resp. de (AX) et $(R'R'')$, de (AY) et $(Q'Q'')$.
- Nous savons que $(1) \quad (R'R'') \perp (AX) ;$
 $(2) \quad (AX) \perp P_x ;$
 d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, $(R'R'') \parallel P_x.$
- Nous savons que le P-cercle de Mention de PAB a pour centre R' et passe par $B, X, A.$
- **Conclusion partielle :** $(R'R'')$ étant la médiatrice de $[AX]$, U est le milieu de $[AX].$
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(Q'Q'') \parallel P_y$ et V est le milieu de $[AY].$
- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AXY , $(UV) \parallel (XY).$

(5) Deux cercles tangents

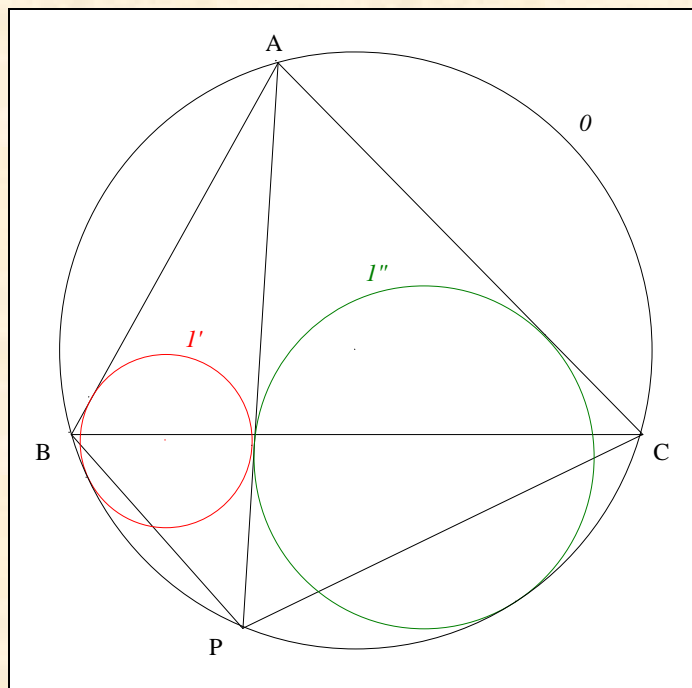


- Le cercle O , le point de base P , les moniennes $(R'PX)$ et $(Q'PY)$, les parallèles $(R'Q')$ et (XY) , conduisent au théorème 7'' de Reim ; il s'en suit que le cercle passant par P, X, Y est tangent à O en P .
- **Conclusion :** I est tangent à O en P .

7. Un résultat de Paul Yiu

VISION

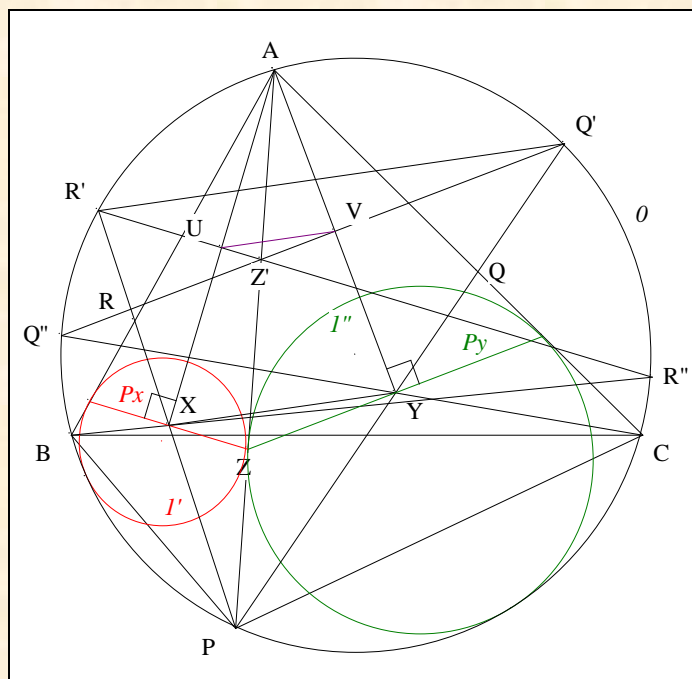
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 P le A-point de Longchamps de ABC,
 I', I'' les A-cercles de Longchamps resp. des triangles PAB, PCA.

Donné : I' et I'' sont tangents¹⁰⁵.

VISUALISATION

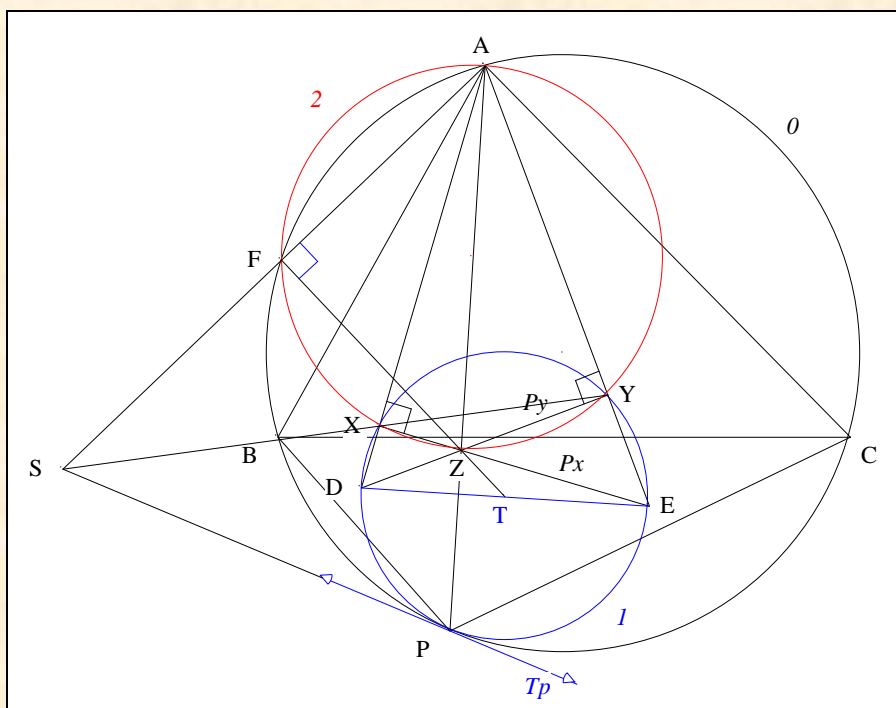


- Les hypothèses et certaines notations du résultat VI. 7. sont considérées.

- Notons Z le point d'intersection de Px et Py
et Z' le point d'intersection de $(Q'Q'')$ et $(R'R'')$.
- D'après Desargues "Le théorème faible" appliqué aux triangles homothétiques XYZ et $R'Q'Z'$, P, Z, Z' sont alignés.
- D'après Desargues "Le théorème faible" appliqué aux triangles homothétiques XYZ et UVZ' , A, Z, Z' sont alignés.
- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, A, Z', Z, P sont alignés.
- **Conclusion** : I' et I'' sont tangents en Z à la A-droite de Longchamps (AP) de ABC .

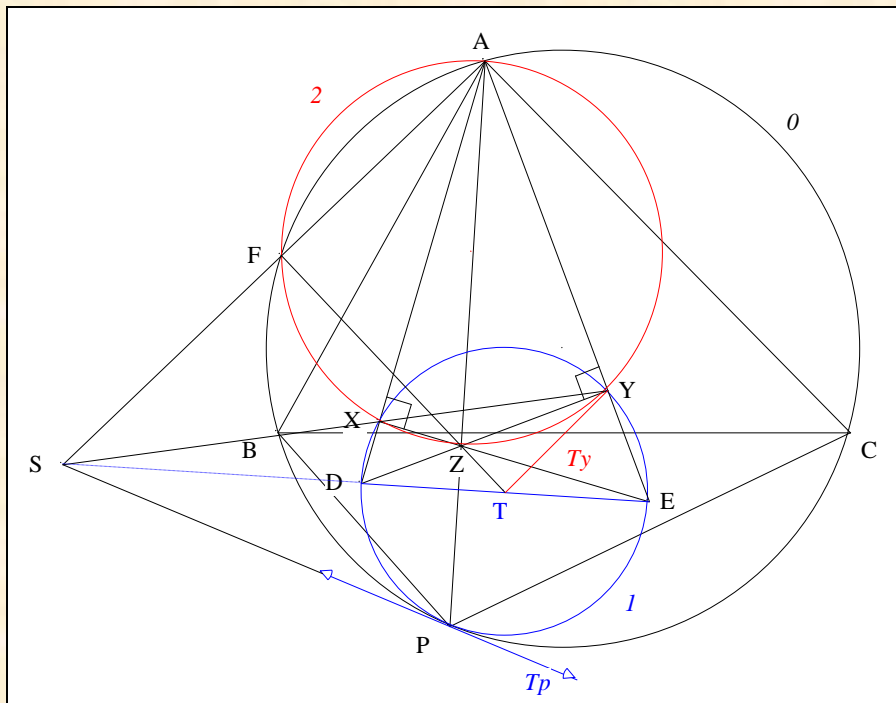
Note historique : ce résultat a été proposé à la revue *Crux Mathematicorum*.

Scolie : un cercle remarquable ¹⁰⁶



- Notons 2 le cercle passant par A, X, Y
 F le second point d'intersection de 0 et 2 ,
 Tp la tangente à 0 en P
et Z le point d'intersection de Px et Py .
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", Z est sur 2 et $(FZ) \perp (AS)$.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 7) appliqué $0, I, 2$, $Tp, (XY), (AF)$ sont concourantes.
- Notons S ce point de concours
et T le centre de I .

- D'après "Orthocentre et médiane" (Cf. Annexe 13) appliqué au triangle ADE ayant pour orthocentre Z, F, Z, T sont alignés.
- [DE] est un diamètre de l et [AZ] est un diamètre de 2.
- D'après "Deux cercles orthogonaux" (Cf. Annexe 14), l est orthogonal à 2.



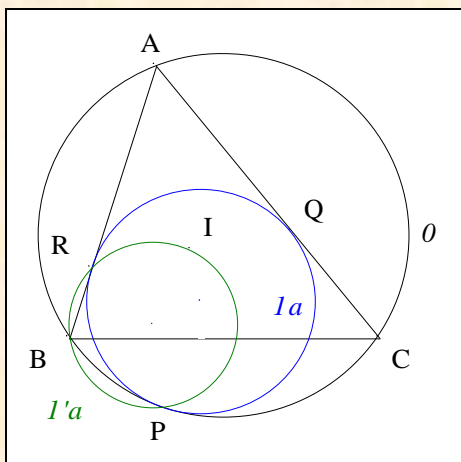
- Notons T_y la tangente à 2 en Y.
- l étant orthogonal à 2, T_y passe par T.
- **Conclusion :** d'après Carnot "Pentagramma mysticum", (STE) est la pascale de l'hexagone dégénéré AFZXY T_y A.

VII. DEUX CERCLES ASSOCIÉS À UN CERCLE DE LONGCHAMPS

1. Les deux cercles associés

VISION

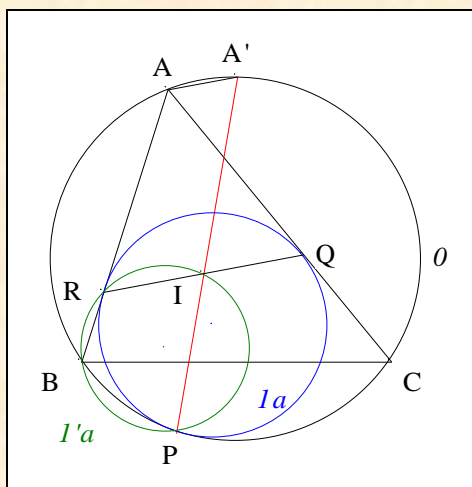
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 Ia le A-cercle de Longchamps de ABC ,
 P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec $O, (AC), (AB)$
 et I le centre de ABC .

Donné : B, P, I, R sont cocycliques.

VISUALISATION



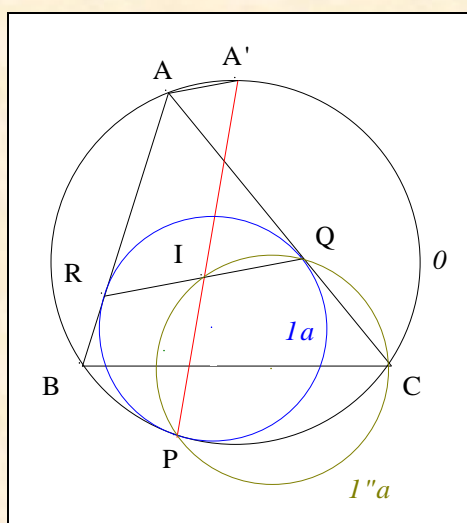
• Notons A' le premier A-perpoint de ABC .

• **Scolies :** (1) P, I et A' sont alignés
 (2) (AA') et (QIR) sont parallèles.

- **Conclusion :** le cercle O , les points de base P et B , les moniennes naissantes $(A'PI)$ et (ABR) , les parallèles $(A'A)$ et (IR) , conduisent au théorème $0''$ de Reim ; en conséquence, P, B, I et R sont cocycliques.
- Notons $I'a$ ce cercle.

Commentaire : on rapprochera ce résultat de celui du lemme catalytique de l'article intitulé "Un remarquable résultat de Vladimir Protassov"¹⁰⁷.

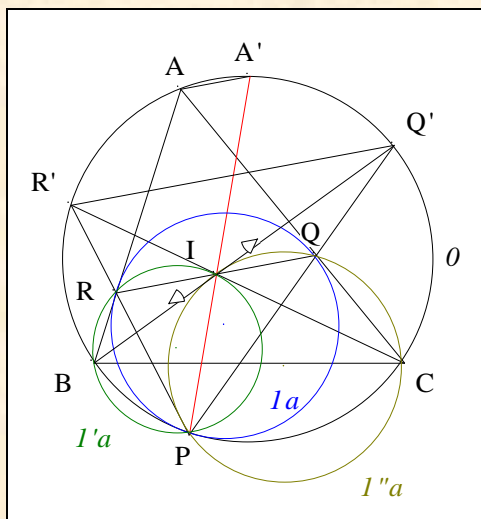
- Scolies :**
- (1) $I'a$ est le B-cercle associé à Ia de ABC .
 - (2) Quatre autres points cocycliques



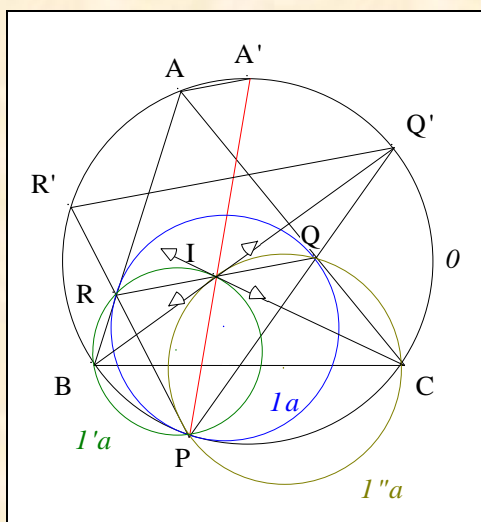
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que P, C, I et Q sont cocycliques.
 - Notons $I''a$ ce cercle.
- (3) $I'a$ est le B-cercle associé à Ia de ABC .
 - (4) Deux tangentes en I

¹⁰⁷

Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protassov, G.G.G. vol. 2 p. 1-4 ;
<http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/Docs/Un%20remarquable%20resultat%20de%20Vladimir%20Protassov.pdf>



- Notons Q', R' les seconds points d'intersection resp. de (PQ) , (PR) avec \odot .
- Considérons le triangle BIR avec I sur (BI) , Q sur (IR) , R sur (BR) .
- **Conclusion :** d'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 9) appliqué au triangle BIR , $l'a$, $l''a$ et l_a étant concourants en P , $l''a$ est tangent à (BI) en I .

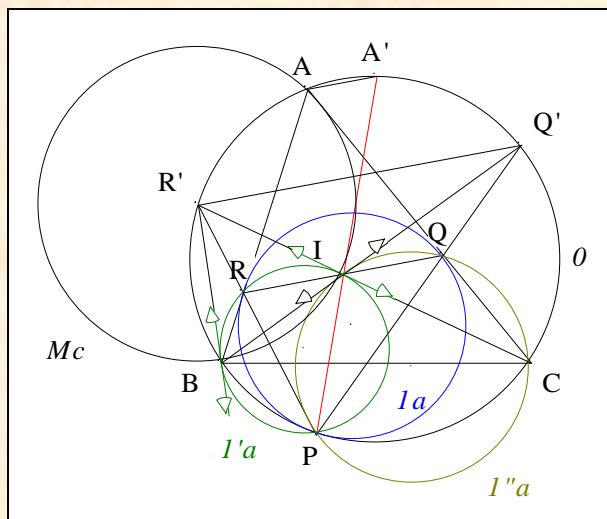


- Mutatis mutandis, nous montrerions que $l'a$ est tangent à (CI) en I .

2. Deux tangentes aux cercles associés

VISION

Figure :



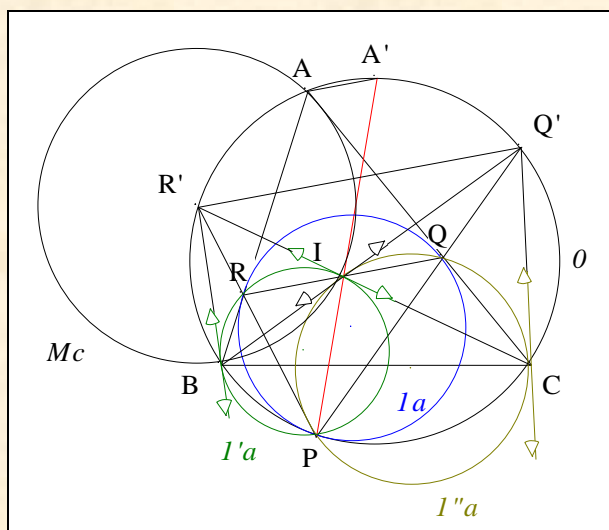
Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 Ia le A-cercle de Longchamps de ABC ,
 P, Q, R les points de contact de Ia resp. avec $O, (AC), (AB)$
 et I le centre de ABC .

Donné : $(R'B)$ est tangente à $I'a$ en B .

VISUALISATION

- D'après "Un cercle de Mention" (Cf. Annexe 6), le cercle de centre R' passant par I , passe par A et B .
- Notons Mc ce cercle.
- $(R'I)$ étant tangente à $I'a$ en I , Mc est orthogonal à $I'a$.
- Le centre R' de Mc étant sur l'axe radical de Ia et $I'a$, Mc est orthogonal à $I'a$;
- **Conclusion :** d'après VI. 1. Une autre San Gaku d'Iwate, $(R'B)$ est tangente à $I'a$ en B .

Scolie : une autre tangente

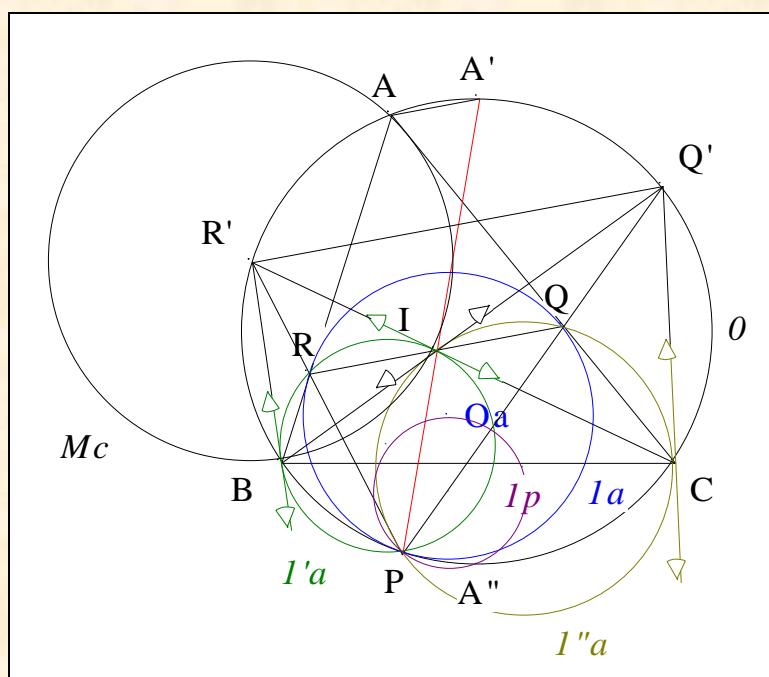


- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que $(Q'C)$ est tangente à $I''a$ en C.

3. Le P-cercle de Morley des cercles associés ¹⁰⁸

VISION

Figure :

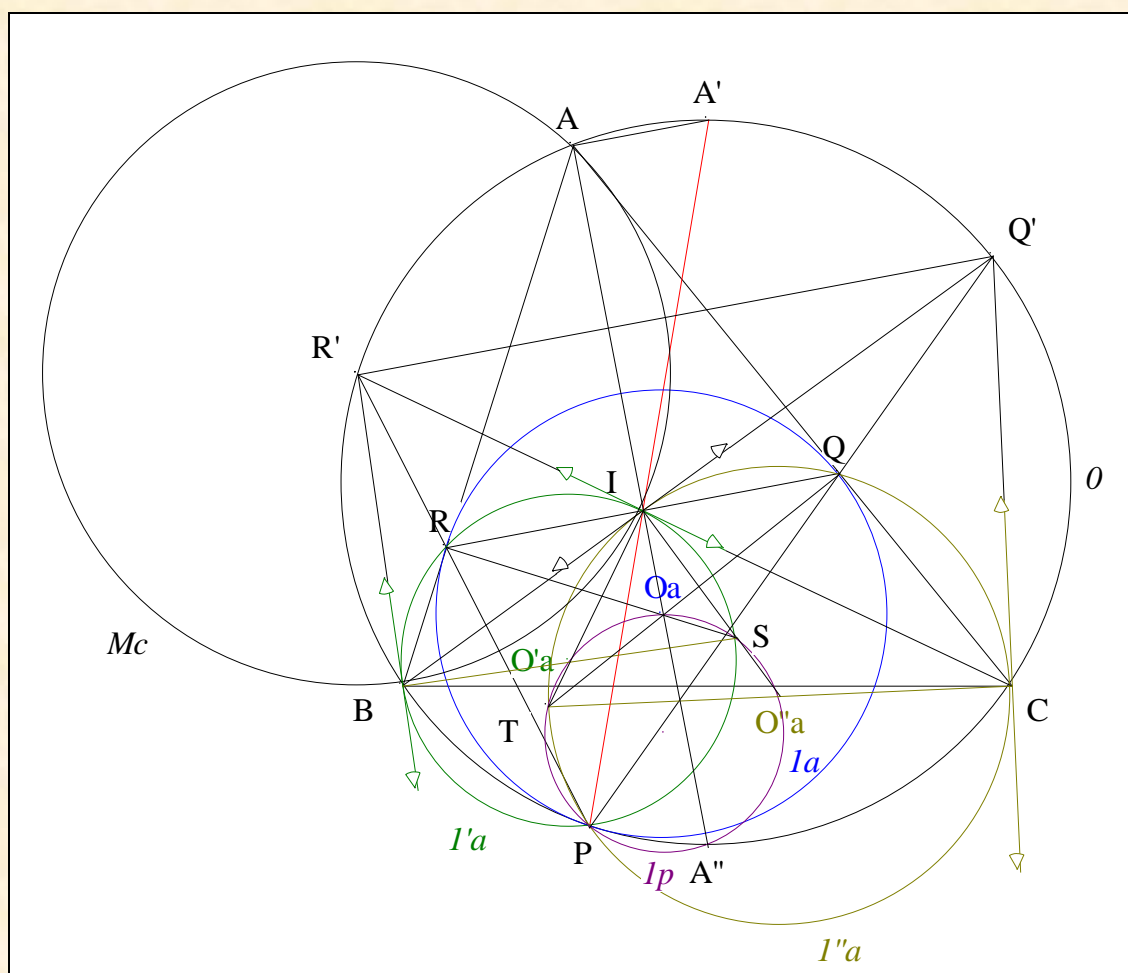


| | | |
|-----------------|-----|-----------------------------------|
| Traits : | ABC | un triangle, |
| | O | le cercle circonscrit à ABC, |
| | Ia | le A-cercle de Longchamps de ABC, |
| | Oa | le centre de Ia, |
| | I | le centre de ABC, |

| | | |
|----|-------------|--|
| | A'' | le second point d'intersection de (AI) avec \mathcal{O} , |
| | P | le A-point de Longchamps de ABC , |
| | $I'a, I''a$ | les cercles associés à Ia |
| et | Ip | le P-cercle de Morley ¹⁰⁹ associé à $I'a$ et $I''a$. |

Donné : Ip passe par A'' et Oa .

VISUALISATION



- Notons $O'a, O''a$ les centres resp. de $I'a, I''a$,
 S, T les seconds points d'intersection de Ip resp. avec $I'a, I''a$.
- **Scolie :** nous savons¹¹⁰ que Ip passe par $P, O'a, O''a, S, T$.
- (BI) étant la tangente à $I''a$ en I ,
d'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", $(ISO''a) \perp (IB)$;
 $S, O'a$ et B sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $T, O''a$ et C sont alignés.
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle",
 $(RS) \perp (AB)$
 $(QT) \perp (AC)$.
- **Scolie :** Oa est le point d'intersection de (RS) et (TQ) .

¹⁰⁹

Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2

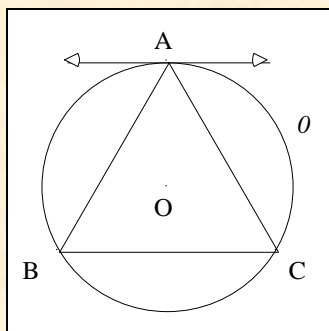
¹¹⁰

Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 2

- Une chasse angulaire à π près :
d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle TOaS = \angle CAB$;
d'après le théorème de l'angle inscrit, $\angle CAB = \angle BR'C$;
d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle CR'B = \angle TO'aS$;
par transitivité de la relation $=$, $\angle TOaS = \angle TO'aS$.
- **Conclusion partielle** : d'après le théorème de l'arc capable, Ip passe par Oa .
- Notons X le second point d'intersection de Ip avec O .
- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 9) appliqué à Ip , $I'a$, O concourant en P , A , Oa et X sont alignés.
- **Scolie** : A , I et Oa sont alignés.
- D'après l'axiome d'incidence, A , I , Oa et X sont alignés ; en conséquence, X et A sont confondus.
- **Conclusion** : Ip passe par A .

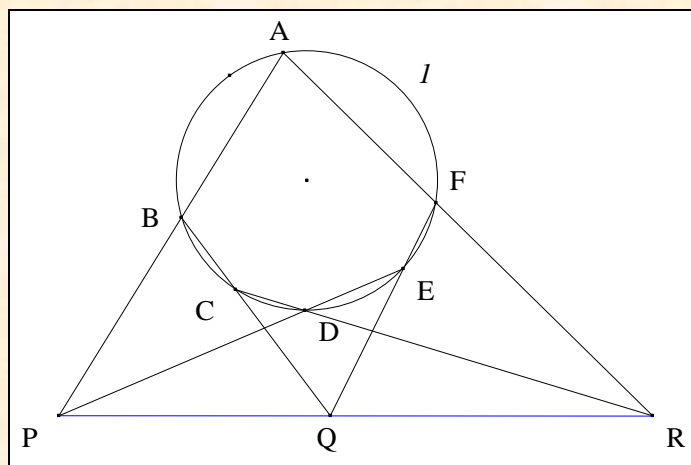
VIII. ANNEXE

1. La tangente au sommet



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de O
 et Ta la tangente à O en A.

Donné : ABC est isocèle en A si, et seulement si, Ta est parallèle à la base (BC).

2. Hexagramma mysticum ¹¹¹

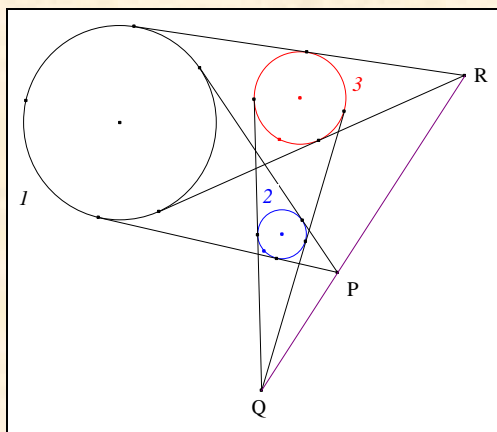
Traits : I un cercle,
 ABCDEF un hexagone tels que les sommets A, B, C, D, E soient sur I ,
 et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur I si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.

3. La droite de d'Alembert ¹¹²

¹¹¹ Pascal B. (1640)

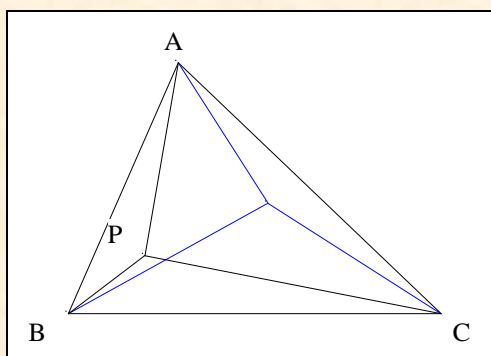
¹¹² Chasles M., Note VI, *Aperçu historique* (1837) 293



Traits : $1, 2, 3$ trois cercles deux à deux extérieurs
et P, Q, R les points d'intersections des tangentes communes extérieures
 de 1 et 2 , de 2 et 3 , de 3 et 1 .

Donné : P, Q et R sont alignés.

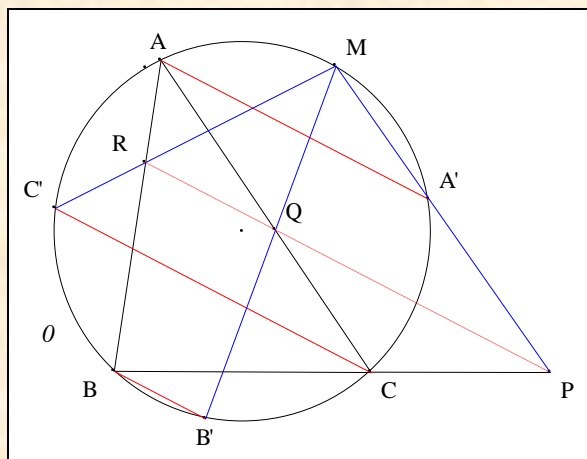
4. The isogonal theorem ¹¹³



Traits : ABC un triangle,
et P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
 Da, Db, Dc les isogonales resp. de $(AP), (BP), (CP)$.

Donné : Da, Db et Dc sont concourantes.

5. L'équivalence d'Aubert-M'Kensie

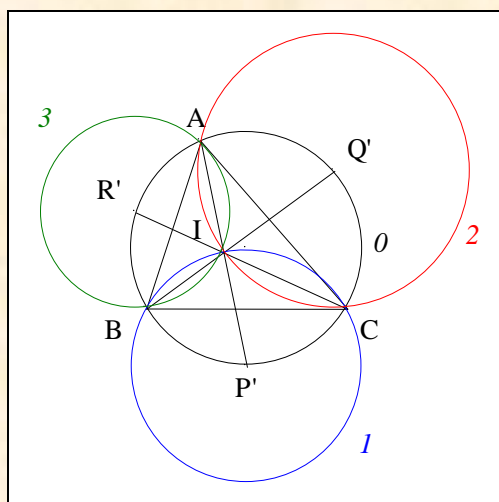


Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 A', B', C' trois points de O tels que (AA') , (BB') et (CC') soient parallèles entre elles,
 M un point,
 et P, Q, R les point d'intersection de (MA') et (BC) , (MB') et (CA) , (MC') et (AB) .

Donné : M est sur O si, et seulement si, (PQR) est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA') .

Solie : la visualisation nécessaire est de Paul Aubert ¹¹⁴ et suffisante de M'Kensie ¹¹⁵.

6. Un cercle de Mention

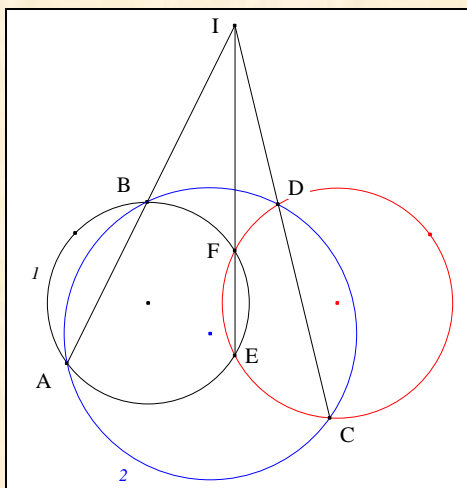


Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 I le centre de ABC,
 P', Q', R' le points d'intersection resp. de (IA) , (IB) , (IC) avec O
 et $1, 2, 3$ les cercles de centres resp. P', Q', R' passant resp. par B et C, C et A, A et B.

Donné : $1, 2$ et 3 sont concourants en I .

7. Le théorème des trois cordes

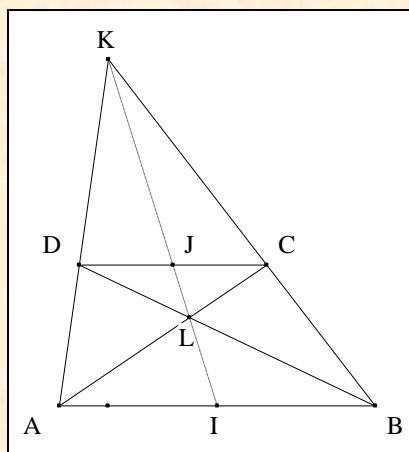
¹¹⁴ Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899)
¹¹⁵ M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201



Traits : $I, 2$ deux cercles sécants,
 A, B les points d'intersection de I et 2 ,
 C, D deux points de 2 ,
 E, F deux points de I
 et I le point d'intersection des droites (AB) et (CD) .

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
 les droites $(AB), (CD)$ et (EF) sont concourantes en I .

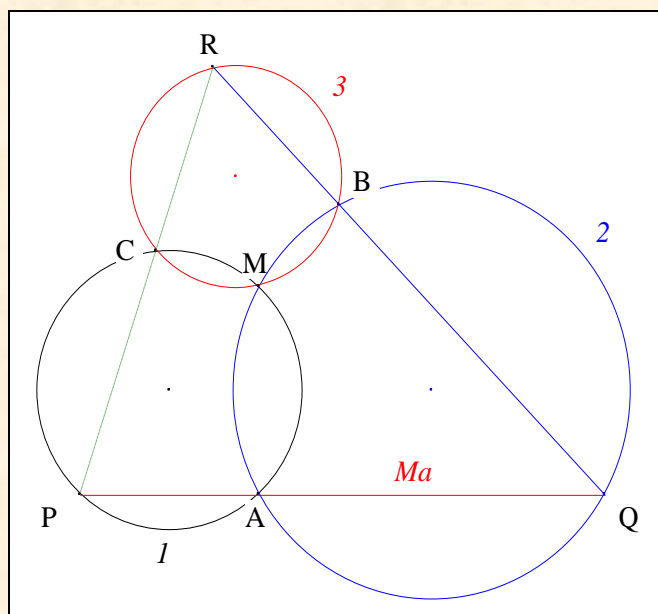
8. Le trapèze complet



Traits : $ABCD$ un quadrilatère,
 I le milieu de $[AB]$,
 J le milieu de $[CD]$,
 K le point d'intersection de (AD) et (BC)
 et L le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) .

Donné : $ABCD$ est un trapèze de bases (AB) et (CD) *si, et seulement si,* I, J, K et L sont alignés.

9. Le théorème des trois cercles

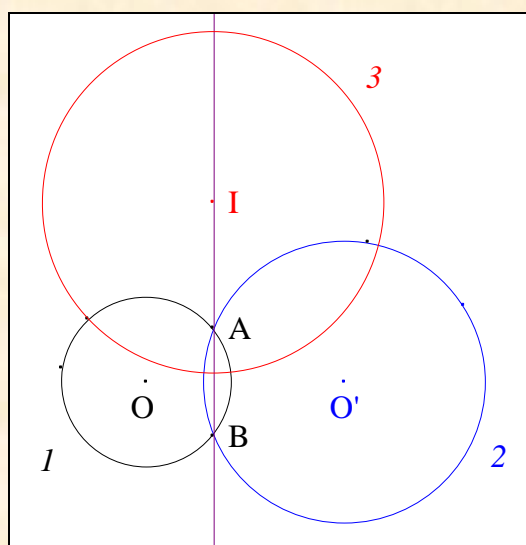


Traits : $1, 2, 3$ trois cercles concourants,
 M le point de concours de $1, 2, 3$,
 A le second point d'intersection de 1 et 2 ,
 Ma une A-monienne de 1 et 2 ,
 P, Q les seconds points d'intersection de Ma resp. avec $1, 2$,
 B, C les seconds points d'intersection de 3 resp. avec $2, 1$
 et R un point de 3 .

Donné : (QBR) est une monienne de 2 et 3
si, et seulement si,
 (PCR) est une C-monienne de 1 et 3 .

Commentaire : ce résultat est une réciproque du pivot de Miquel ¹¹⁶.
 Il reste vraie dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

10. Axe radical de deux cercles sécants ¹¹⁷

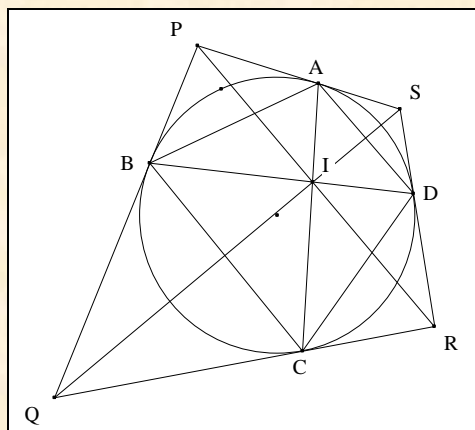


¹¹⁶ Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1, 3** (1838) 485-487
¹¹⁷ Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier **16** (1813) 124-214

Traits : $1, 2$ deux cercles sécants,
 O, O' les centres de $1, 2$,
 A, B les points d'intersection de 1 et 2 ,
 3 un cercle orthogonal à 1
 et I le centre de 3 .

Donné : I est sur la droite (AB) si, et seulement si, 3 est orthogonal à 2 .

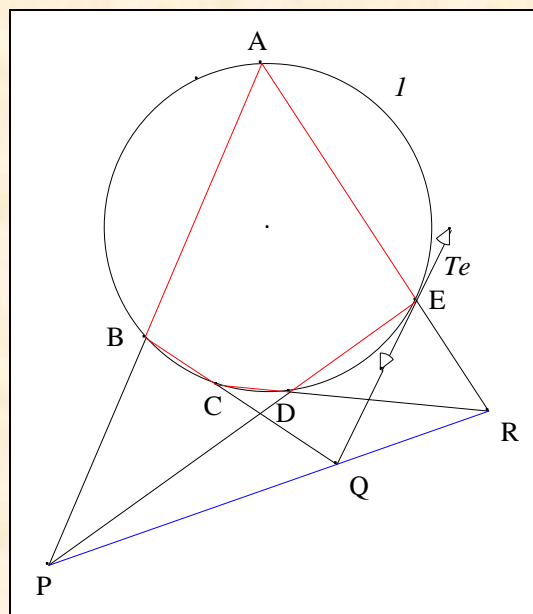
11. Un quadrilatère circonscriptible ¹¹⁸



Traits : I un cercle,
 $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans I
 et $PQRS$ le quadrilatère tangentiel de $PQRS$.

Donné : les diagonales $[PR]$, $[SQ]$, $[AC]$ et $[BD]$ sont concourantes.

12. Pentagramma mysticum ¹¹⁹



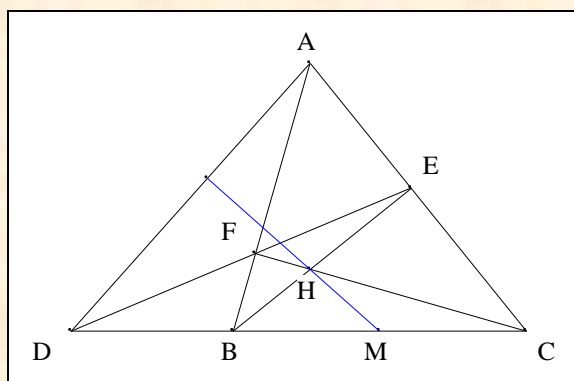
Traits : I un cercle,

¹¹⁸ Newton I., *Principes* (1686), corollaire II du lemme XXIV
¹¹⁹ Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456

ABCDEA un pentagone tels que les points A, B, C, E soient sur l ,
 Te la tangente à l en E
 et P, Q, R les points d'intersection des droites (AB) et (DE), (BC) et Te, (CD) et (EA).

Donné : D est sur l si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.

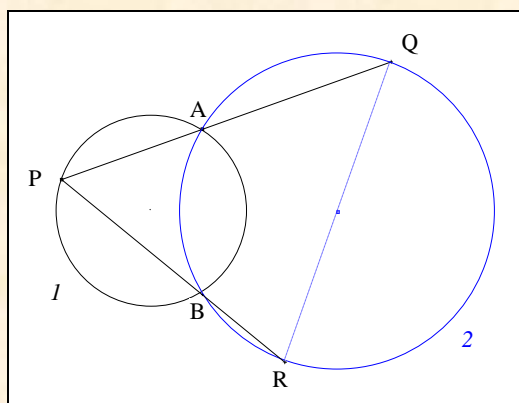
13. Orthocentre et médiane ¹²⁰



Traits : ABC un triangle acutangle,
 H l'orthocentre de ABC,
 E, F les pieds des B, C-hauteurs de ABC,
 D le point d'intersection de (EF) et (BC)
 et M un point de [BC].

Donné : M est le milieu de [BC] si, et seulement si, (MH) est perpendiculaire à (AD).

14. Deux cercles orthogonaux ¹²¹



Traits : 1, 2 deux cercles sécants,
 A, B les deux points d'intersection de 1 et 2,
 P un point de 1
 et Q, R les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec 2.

Donné : 1 et 2 sont orthogonaux si, et seulement si, (QR) est une droite diamétrale de 2.

¹²⁰ Papelier G., *Exercices de Géométrie Moderne*, Pôles et polaires (1927) n° 34, p 24, Eds J. Gabay (1996)
¹²¹ Altshiller-Curt N., Note on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* (34) 500-501

IX. ARCHIVES

*Question 659.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 207.)

On décrit deux cercles Δ_a , Δ'_a qui touchent les côtés AB, AC d'un triangle et qui ont, le premier un contact intérieur en V_a , le second un contact extérieur en V'_a avec le cercle circonscrit à ABC. Démontrer 1° que les polaires de A par rapport à Δ_a , Δ'_a passent, respectivement, par le centre I du cercle inscrit à ABC et par le centre I_a du cercle exinscrit, opposé à A. 2° Les droites AV_a , BV_b , CV_c concourent au point inverse du point de Nagel de ABC. 3° Les droites AV'_a , BV'_b , CV'_c concourent au point inverse du point de Gergonne de ABC.

(DE LONGCHAMPS.)

Une bonne solution de cette question nous a été adressée par M. DÉPREZ; nous n'en reproduisons que la première partie, parce que les deux autres peuvent être établies par une méthode plus intuitive.

1° Soient O, R le centre et le rayon du cercle ABC, M le point de contact de Δ_a avec AB, d la distance $A\Delta_a$, ρ le rayon de Δ_a . Le triangle $AO\Delta_a$ donne

$$\overline{O\Delta_a}^2 = d^2 + R^2 - 2Rd \cos \frac{B+C}{2};$$

on a aussi

$$O\Delta_a = R - \rho = R - \Delta_a M = R - d \sin \frac{A}{2},$$

d'où

$$\left(R - d \sin \frac{A}{2}\right)^2 = d^2 + R^2 - 2Rd \cos \frac{B+C}{2},$$

et après quelques réductions faciles

$$d = \frac{4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}}, \quad AM = d \cos \frac{A}{2} = \frac{4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Si I désigne le centre et r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC, on a

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

donc $AI = d \cos \frac{A}{2}$, et par suite MI est perpendiculaire à AI. (DÉPREZ.)

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, A étant le pôle d'inversion et $\sqrt{AB \cdot AC}$ la puissance. Prenons sur AB la longueur $AB' = AC$, sur AC la longueur $AC' = AB$; B' et C' seront les points inverses de B et C, et la circonférence ABC se transforme en la droite B'C'. Le cercle Δ_a a donc pour transformée le cercle I_a , qui touche BC, B'C', et les prolongements de AB, AC; soient $\alpha, \alpha', \gamma, \beta$ les points de contact du cercle I_a avec ces droites. Par conséquent, si M est le point où le cercle Δ_a touche AB, on a $A\gamma \cdot AM = bc$; mais si I est le centre du cercle inscrit à ABC, on trouve, au moyen des triangles semblables ABI, AI_aC la relation $AI \cdot AI_a = bc$. Donc $A\gamma \cdot AM = AI \cdot AI_a$, et puisque l'angle $A\gamma I_a$ est droit, l'angle AIM est également droit.

2° Le cercle Δ_a s'étant transformé en un cercle touchant B'C' en α' , les points A, α' , V_a sont en ligne droite. Donc les droites $A\alpha, AV_a$ sont isogonales. Or, les droites analogues à $A\alpha'$ se rencontrent au point de Nagel de ABC; donc les droites AV_a, BV_b, CV_c concourent au point inverse du point de Nagel de ABC.

3° Si le cercle inscrit à ABC, touche B'C' en α_1 , les points A, α_1, V'_a sont en ligne droite, et la droite AV'_a est l'isogonale de celle qui joint A au point de contact de BC avec le cercle inscrit à ABC, etc. (J. N.)

10963. (R. C. J. NIXON, M.A.)—A circle touches the sides CA, CB of a triangle in P, Q, and also touches its circumcircle in T: show that PQ goes through the in-centre, if the contact at T is internal, or through the ex-centre if external.

Solution by Professors NIXON, GENESE, and G. HEPPEL, M.A.

Let T be the point of internal contact; and let CI, bisecting angle ACB, meet PQ in I. Invert with respect to C and CI, as centre and radius of inversion.

Circle CAB inverts into ab anti-parallel to AB; so that

$CA \cdot Ca = CI^2 = CB \cdot Cb$,
and angle $Cba = \text{angle } CAB$.
CT cuts ab in t , the inverse of T.

If p, q are the inverses of P, Q, respectively,

$CP \cdot Cp = CI^2 = CQ \cdot Cq$;
therefore, since angles CIP, CIQ are right, so also are angles CpI, CqI .

Therefore Ip, Iq are radii of circle, centre I, touching CA, CB in p, q ; and this last circle is obviously the inverse of circle PTQ, and therefore touches ab at t ; i.e., I is ex-centre of triangle Cab.

Let D be in-centre of triangle Cab; therefore $aIbD$ is cyclic.

Now, triangles CIA, CaI are similar;

$\therefore \text{angle } CAI = CIa = Dba = \frac{1}{2}Cba = \frac{1}{2}CAB$;
therefore I is in centre of triangle CAB.

The proof is similar when the contact is external.

[Otherwise:—Take CII' as axis of x . Then $CI = r \operatorname{cosec} \frac{1}{2}C$;

$CI' = r_c \operatorname{cosec} \frac{1}{2}c$. First circle is $(x - k)^2 + y^2 = k^2 \sin^2 \frac{1}{2}C$. PQ is $x = k \cos \frac{1}{2}C$. Circumcircle is

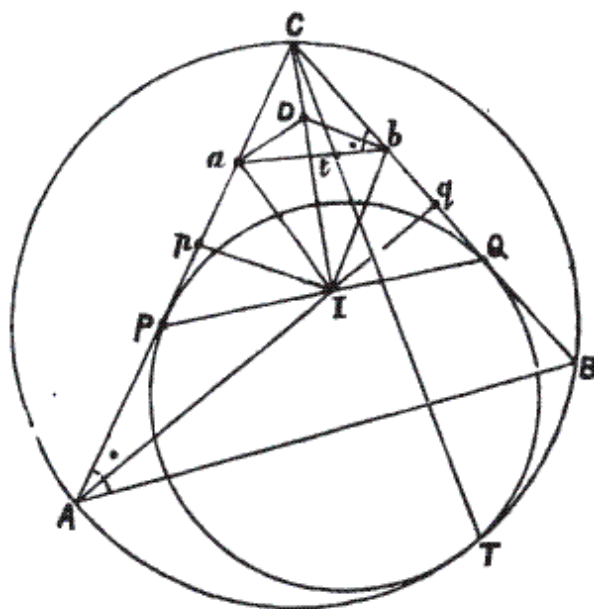
$$x^2 + y^2 - 2Rx \cos \frac{1}{2}(A - B) - 2Ry \sin \frac{1}{2}(A - B) = 0.$$

If circles touch, then either

$$k \cos^2 \frac{1}{2}C = 4R \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B = r \operatorname{cosec} \frac{1}{2}C,$$

or

$$k \cos^2 \frac{1}{2}C = 4R \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B = r_c \operatorname{cosec} \frac{1}{2}C.]$$



- 2 -

A MIXTILINEAR ADVENTURE

LEON BANKOFF

Triangles in the Euclidean plane may be classified as rectilinear, mixtilinear, or curvilinear depending on whether all, some, or none of the bounding lines are straight. Our interest here will first lie in the consideration of circles inscribed in a special kind of mixtilinear triangle, one bounded by two sides of a rectilinear triangle and an arc of its circumcircle. We will then consider circles inscribed in another type of mixtilinear triangle. We will consistently use the convenient notation $(M)_n$ (or sometimes simply (M)) for a circle with center M and radius n . We start with a relatively simple problem.

Let $(O)R$ and $(I)r$ be the circumcircle and incircle, respectively, of a given triangle ABC with sides a, b, c in the usual order. Our objective is to learn what we can about the circle $(W)p$ inscribed in the mixtilinear triangle bounded by the sides AC and BC and the arc AB of the circumcircle (O) . As shown in Figure 1, circle (W) touches AC at D and BC at E . To find the radius p , we proceed as follows.

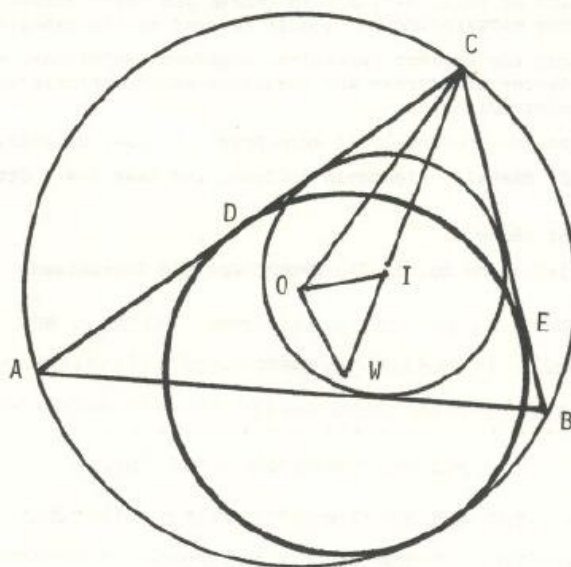


Figure 1

We apply the cosine law to triangle COW , in which

$$CO = R, \quad OW = R - p, \quad CW = p \csc \frac{C}{2}, \quad \angle OCW = \frac{|A - B|}{2}.$$

- 3 -

obtaining

$$(R-p)^2 = R^2 + p^2 \csc^2 \frac{C}{2} - 2Rp \csc \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

which is equivalent to

$$p^2 \csc^2 \frac{C}{2} - p^2 = 2Rp \csc \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2Rp.$$

Dividing throughout by $p \csc^2 \frac{C}{2}$, we get

$$p - p \sin^2 \frac{C}{2} = 2R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2R \sin^2 \frac{C}{2},$$

whereupon

$$\begin{aligned} p \cos^2 \frac{C}{2} &= 2R \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ &= r, \end{aligned}$$

and we have the desired result

$$p = r \sec^2 \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Another simple proof of (1) results from the application of Stewart's Theorem to the point O and the three points C, I, W [which are collinear on the internal bisector of angle C]. With

$$OW = R-p, \quad OI^2 = R^2 - 2Rp, \quad CI = r \csc \frac{C}{2}, \quad CW = p \csc \frac{C}{2}, \quad OC = R, \quad IW = (p-r) \csc \frac{C}{2}, \quad (2)$$

Stewart's relation

$$OW^2 \cdot CI + OC^2 \cdot IW = OI^2 \cdot CW + CI \cdot CW \cdot IW$$

becomes

$$r(R-p)^2 \csc \frac{C}{2} + R^2(p-r) \csc \frac{C}{2} = p(R^2 - 2Rp) \csc \frac{C}{2} + pr(p-r) \csc^3 \frac{C}{2}.$$

This reduces to $r = p \cos^2(C/2)$, and (1) follows.

A special case of interest arises when C is a right angle. Then $\sec^2(C/2) = 2$, and the radius p is twice the inradius r . For any right triangle with hypotenuse a , the inradius is $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$, and so

$$p = a + b - c. \quad (3)$$

The special case leading to (3) was proposed by the author in 1954 [1]. Of the two solutions later published [2], one stemmed from the use of the nine-point circle, and the other from a straightforward use of analytic geometry. A still more special

- 4 -

case (with $a, b, c = 3, 4, 5$) was proposed recently in this journal (Crux 703 [1982: 14]). [A solution appears later in this issue. (Editor)]

An interesting sidelight of the general case illustrated in Figure 1 is that I is the midpoint of chord DE . To show this, we note from (2) and (1) that

$$\frac{IW}{CW} = \frac{p-r}{p} = 1 - \frac{r}{p} = 1 - \cos^2 \frac{C}{2} = \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{p^2}{CW^2},$$

and so $IW \cdot CW = p^2$. This means that CW is perpendicular to DE and intersects it at I , which is therefore the midpoint of DE . In particular, when $C = 90^\circ$, then $CDWE$ is a square with center I .

There are various ways of expressing the length of the equal segments CD and CE in Figure 1; for example, by the chain of equalities

$$CD = p \cot \frac{C}{2} = r \sec^2 \frac{C}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{2r}{\sin C} = \frac{4Rr}{a} = \frac{ab}{s}.$$

This chain provides us with another way of expressing p , one not involving r :

$$p = \frac{ab}{s} \tan \frac{C}{2}. \quad (4)$$

Radford [3] finds the value of CD by use of an inversion centered at C with constant of inversion $\sqrt{CD \cdot CD'}$, where D' is the point of contact of the escribed circle opposite C with the side AC (see Figure 2). Then, since the circle (W) inverts into the escribed circle and the circumcircle into the line $A'B'$ (where A', B' are the points inverse to A, B), the line $A'B'$ must touch the escribed circle. Also, since $CB \cdot CB' = CA \cdot CA'$, the triangles CAB and $CB'A'$ are similar and equal in all respects. Hence $CB' = CA$ and we have $CA \cdot CB = CD \cdot CD'$. Since $CD' = s$, it follows that $CD = ab/s$.

Let us now go on to satisfy our curiosity about the circle $(N)_q$ inscribed in the mixtilinear triangle bounded by side AC and the arcs of circles (O) and (W) , as shown in Figure 3. Since this is a challenge far more daunting than those already grappled with, we might as well recognize that any attempt to find the radius q by ordinary synthetic procedures will only lead to frustration. The solution of this problem, however, is a splendid example of how the principles of inversion can come to the rescue. Inversion enables us to transform a given figure into one more amenable to interpretation and calculation, and to transfer the information so obtained back to the original configuration by means of certain ratios.

In the problem we are considering here, we invert the figure by using $(C)CD$ as the circle of inversion. Its radius, as we now know, is $CD = ab/s$. As shown in Figure 3, the circle of inversion cuts the circumcircle (O) at J and K , the extremities of their common chord. In turn, the chord JK cuts CA and CB at A' and B' ,

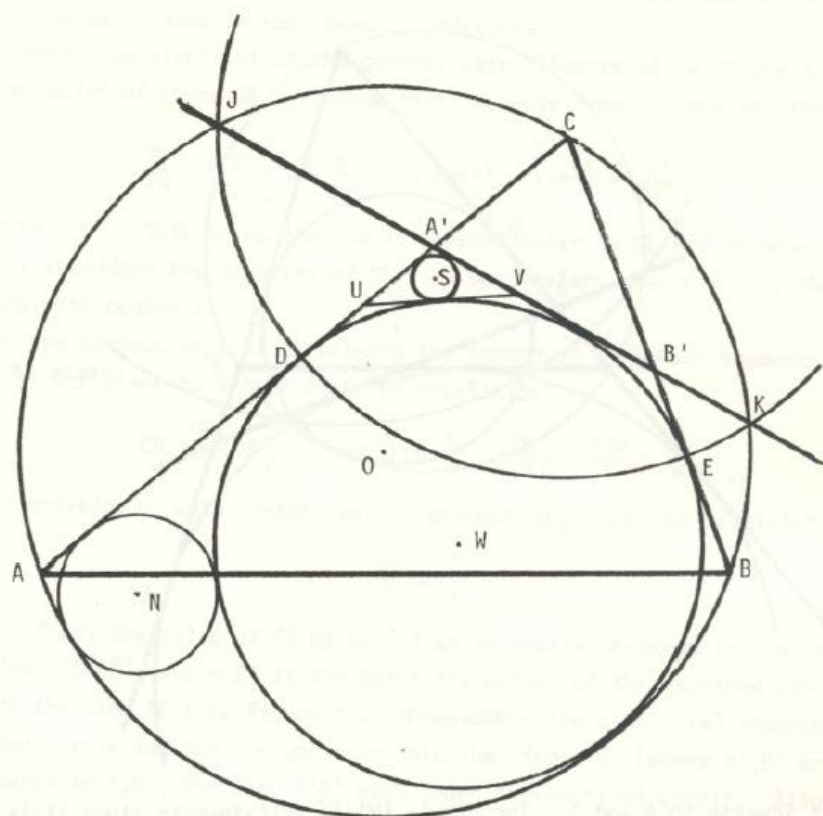


Figure 3

base angles u is $\rho/\rho_m = \tan^2(u/2)$. Consequently, with $u = B/2$, we may write

$$\frac{x}{p} = \tan^2 \frac{B}{4}, \quad (5)$$

thus establishing the relationship between circles $(W)_p$ and $(S)_x$.

Now comes the denouement of our inversion drama. We have used information regarding circle (W) to discover certain characteristics of circle (S) . Our final step is to relate circle $(S)_x$ to circle $(N)_q$. We accomplish this by utilizing another one of the principles of inversion: *the ratio of x to q is equal to the ratio of the square of the tangent from C to circle (S) to the square of the radius of inversion*. The latter is $(ab/s)^2$, and the former is the square of the difference between ab/s and the length of the common external tangent of circles (S) and (W) , the last of which is known to be $2\sqrt{px}$, or $2p \tan(B/4)$. Therefore

- 7 -

$$\frac{x}{q} = \frac{(ab/s - 2p \tan(B/4))^2}{(ab/s)^2}.$$

With x given by (5) and p by (1) or (4), the only unknown in this relation is q . With very few lines of paper work, we arrive at the result

$$q = \frac{x \sec^2(C/2)}{(\cot(B/4) - 2 \tan(C/2))^2}.$$

Another way of looking at this relation is

$$\frac{p}{q} = (\cot \frac{B}{4} - 2 \tan \frac{C}{2})^2. \quad (6)$$

At first glance this relation may appear erroneous, since we would not normally expect the angle $B/4$ to be related to the radius of the circle tucked away in the corner near angle A . However, the formula is correct. Mathematical reality is more to be trusted than intuition, which often turns out to be deceptive.

Finally, we apply (4) and (6) to a few special cases. For the Pythagorean triangle considered earlier, in which $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, we find that $p = 2$ and $p/q = 5$, a rather neat ratio. For the Pythagorean triangle in which $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$, we find $p = q = 6$: the circles (W) and (N) are equal! In the triangle considered in the article "An Heronian Oddity" [1982: 206], in which $a = 15$, $b = 14$, $c = 13$, we had found that certain strategically placed circles had radii 2, 3, and 4. We now find that (4) yields $p = 5$: the sequence marches on, and the Heronian oddity has become an Heronian odyssey! However, digit delvers will draw cold comfort from the value of p/q in this case.

REFERENCES

1. Leon Bankoff, (proposer of) Problem E 1141, *American Mathematical Monthly*, 61 (1954) 711.
2. Solutions to Problem E 1141, *American Mathematical Monthly*, 62 (1955) 444.
3. Rev. E.M. Radford, *Solutions to Mathematical Problem Papers*, Cambridge, 1925, pp. 160, 418.

6360 Wilshire Boulevard, Los Angeles, California 90048.

*

*

*