# A NEW POINT

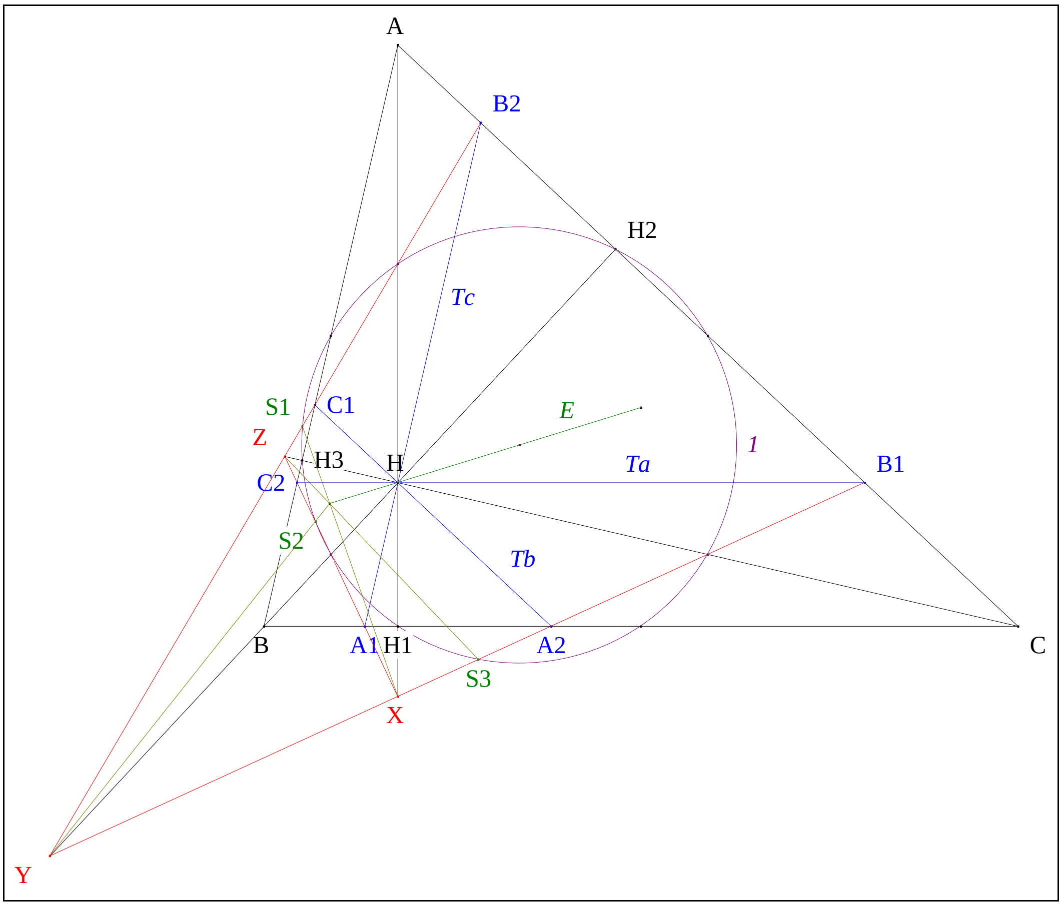
## ON

## EULER LINE

## PREMIÈRE PREUVE SYNTHÉTIQUE

†

Jean - Louis AYME




**Résumé.** L'auteur prouve synthétiquement le résultat de Yakub N. Aliyev qui met en exergue un centre, non répertorié par ETC[1], d'un triangle et situé sur la droite d'Euler de ce triangle. La preuve présentée a recours au théorème faible de Desargues, au théorème de Terquem et à la célèbre "proposition 139" de Pappus.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

---

1 Kimberling C., http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

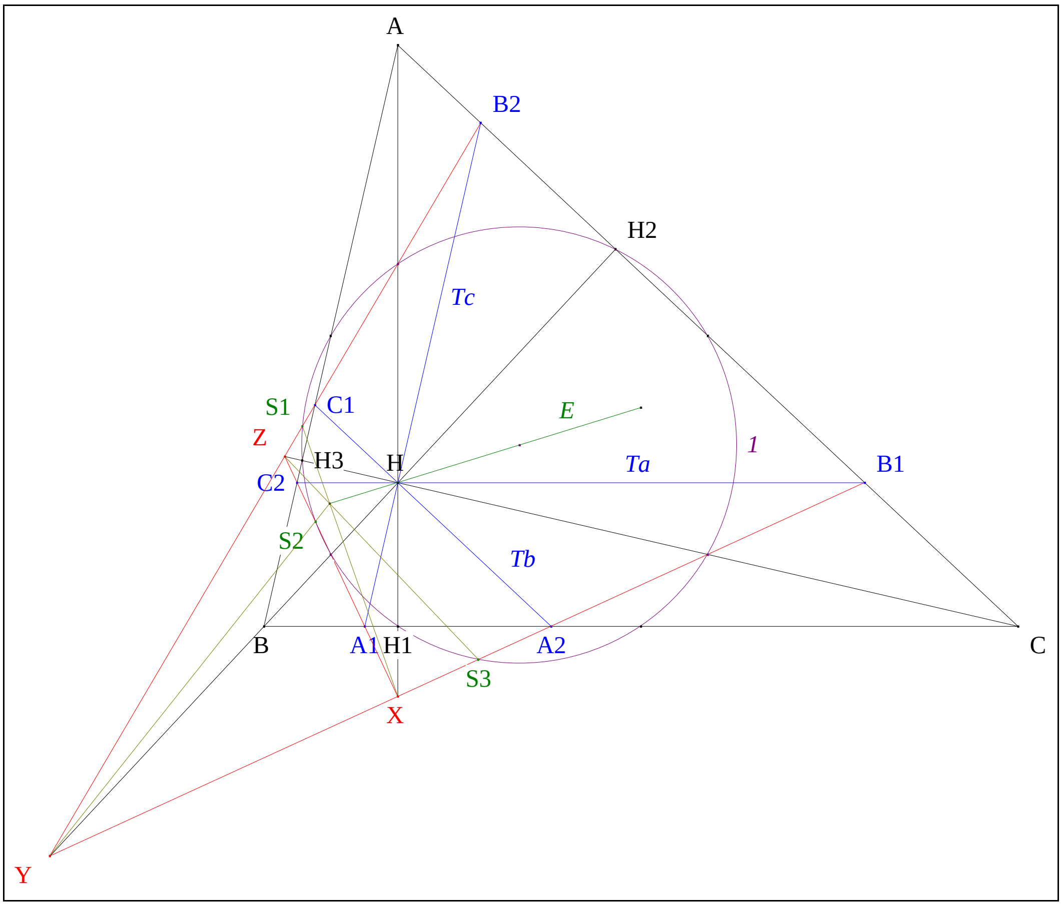
Sommaire



## A. LE RÉSULTAT DE YAKUB ALIYEV

### VISION

**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | H | l'orthocentre de ABC, |
| | H1, H2, H3 | les pieds de A, B, C-hauteurs de ABC, |
| | *Ta*, *Tb*, *Tc* | les A, B, C-thalésiennes passant par H, |
| | B1, C2 | les points d'intersection de *Ta* resp. avec (AC), (AB), |
| | C1, A2 | les points d'intersection de *Tb* resp. avec (BA), (BC), |
| | A1, B2 | les points d'intersection de *Tc* resp. avec (CB), (CA), |

| | | |
|---|---|---|
| | X, Y, Z | les points d'intersection de (A1C2) et (A2B1), de (B1A2) et (B2C1), de (C1B2) et (C2A1), |
| | *1* | le cercle circonscrit au triangle H1H2H3, |
| | S1, S2, S3 | les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (YZ), (ZX), (XY) |
| et | *E* | la droite d'Euler de ABC. |

**Donné :** (XS1), (YS2) et (ZS3) concourent sur *E*.[2]

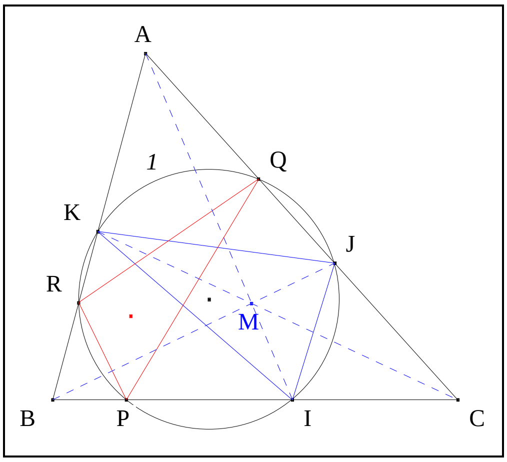
**Scolies :** **(1)** *Ta* est la parallèle à (BC) passant par H et circulairement.
**(2)** *1* est le cercle d'Euler de ABC.[3]

## B. TROIS LEMMES

### 1. Le théorème de Terquem

#### VISION

**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** ABC | un triangle, | |
| M | un point, | |
| IJK | le triangle M-cévien de ABC, | |
| *1* | le cercle circonscrit à IJK | |
| et P, Q, R | les second points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB). | |

**Donné :** PQR est un triangle cévien de ABC.[4]

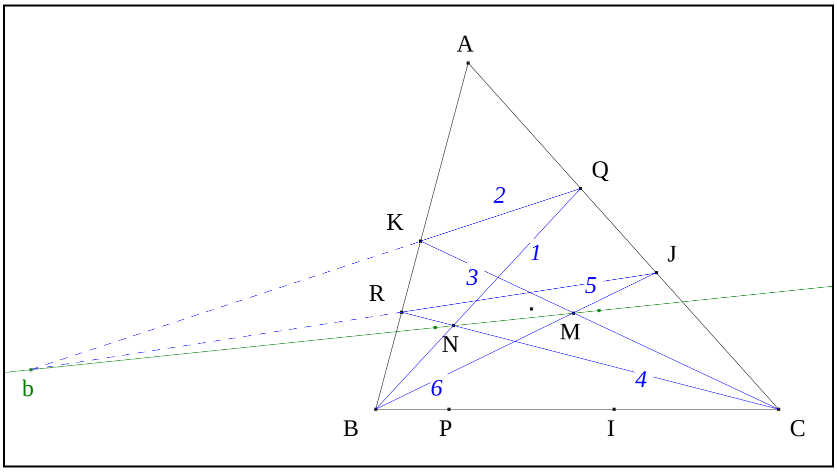
#### VISUALISATION

---

2 Aliyev Y., A new point on Euler line, Message *Hyacinthos* # 18419 du 02/11/2009 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/18419.

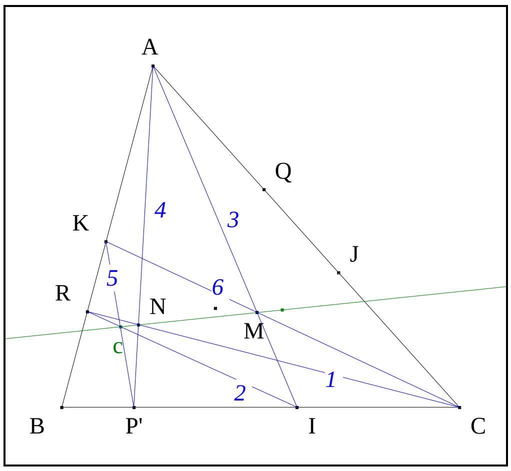
3 Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler,…, G.G.G. vol. 2 p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

4 Terquem O., *Nouvelles Annales* **1** (1842) 403.



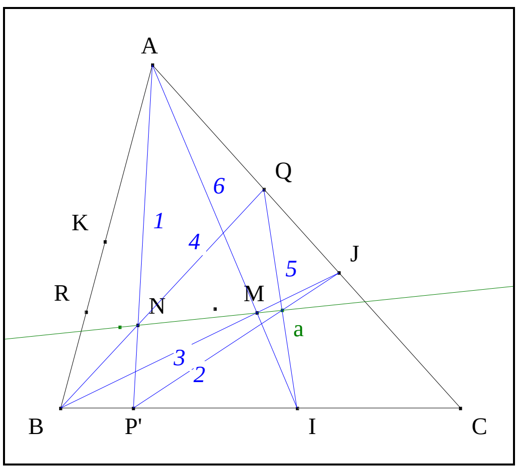

- Notons N le point d'intersection de (BQ) et (CR)
  et b le point d'intersection de (QK) et (JR).

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 1),
  (MNb) est la pappusienne de l'hexagone BQKCRJB.




- Notons P' le point d'intersection de (AN) et (BC)
  et c le point d'intersection de (KP) et (RI).

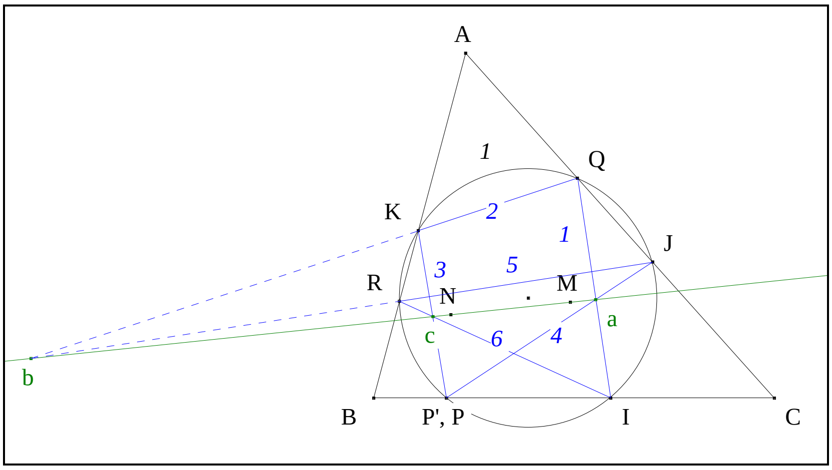
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 1),
  (NcM) est la pappusienne de l'hexagone CRIAP'KC.



- Notons a le point d'intersection de (IQ) et (P'J),

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 1),
  (NaM) est la pappusienne de l'hexagone AP'JBQIA.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia, M, N, a, b et c sont alignés.




- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),
  (abc) étant la pascale de l'hexagone IQKP'JR, P' est sur *1* ;
  en conséquence, P' et P sont confondus.

- **Conclusion :** PQR est le triangle N-cévien de ABC.

**Scolie :** **(1)** *1* est "le cercle cévien de M" ou encore "le cercle M-cévien de IJK".

**(2)** Suite à Giacome Candido de Pise[5], "M et N sont "les points de Terquem".
Aujourd'hui, nous disons que "N est le conjugué cyclocévien de M".

**Énoncé traditionnel :** *le cercle cévien d'un point M*
*est aussi*
*le cercle cévien d'un second point N, éventuellement confondu avec M.*

**Énoncé moderne :** *le cercle qui passe par les pieds de trois céviennes concourantes*
*détermine trois autres points qui sont les pieds de trois céviennes concourantes.*

**Une courte biographie d'Olry Terquem**

*Il faut dans chaque cas, employer la méthode*
*qui mène promptement et le plus facilement au but,*
*mais toujours en conservant l'inexorable rigueur logique*
*qui est l'âme de la science* [6]

Olry Terquem est né à Metz, le 16 juin 1782.

---

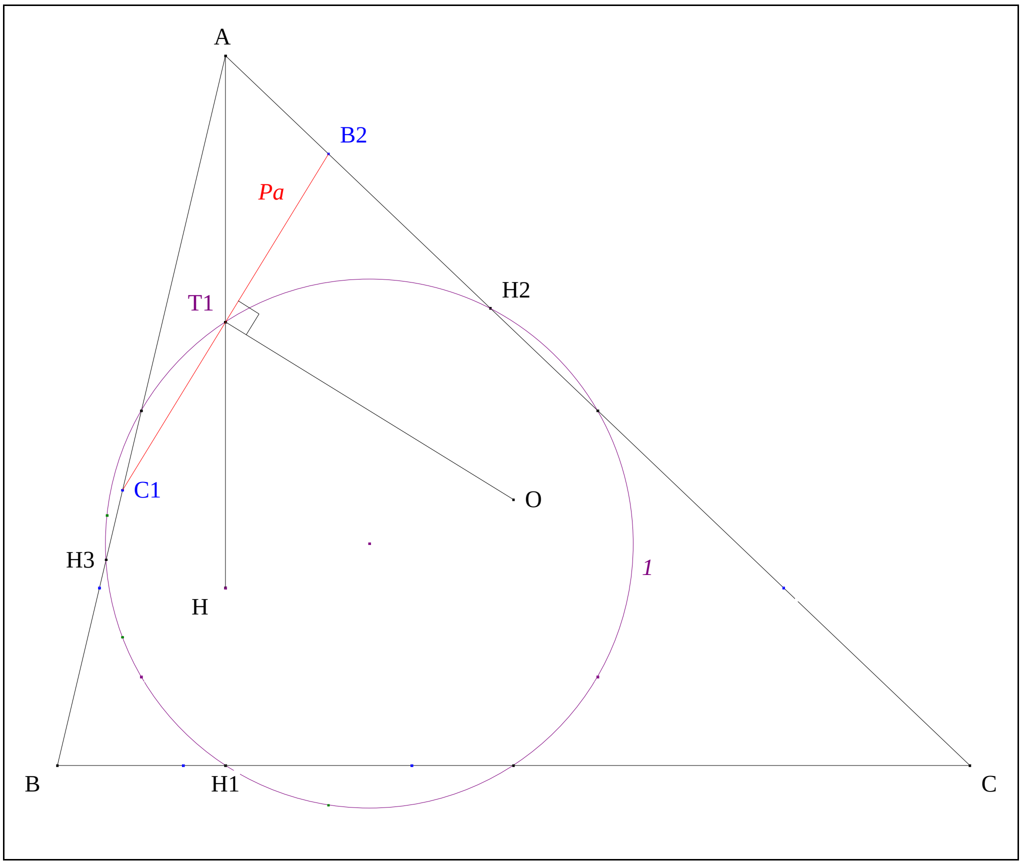
[5] Candido G. (1871-1941), *Nouvelles Annales* (1900) 251.
[6] Terquem O., *Nouvelles Annales mathématiques* (1852) 447.

En 1801, il entre à l'École Polytechnique. À sa sortie, il en devient un répétiteur avant d'occuper de 1804 à 1814, la chaire de mathématique transcendante à Mayence. En 1815, il assure la charge de bibliothécaire au dépôt central d'artillerie à Paris, poste qu'il occupera durant presque un demi siècle. Érudit et polyglotte, il joue un rôle central dans la presse mathématique de la première moitié du XIX-ème siècle en participant notamment activement au *Journal* de Liouville puis en co-fondant avec Camille Gérono les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1842, revue regorgeant des traces des oraux de l'X.
Rappelons qu'Olry Terquem a consacré une biographie de Marie-Sophie Germain dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* [7] et écrit quelques articles dans l'éphémère journal intitulé *Le Géomètre*.
Il décède à Paris en 1862.

## 2. Une autre nature des points d'Euler

**VISION**

**Figure :**



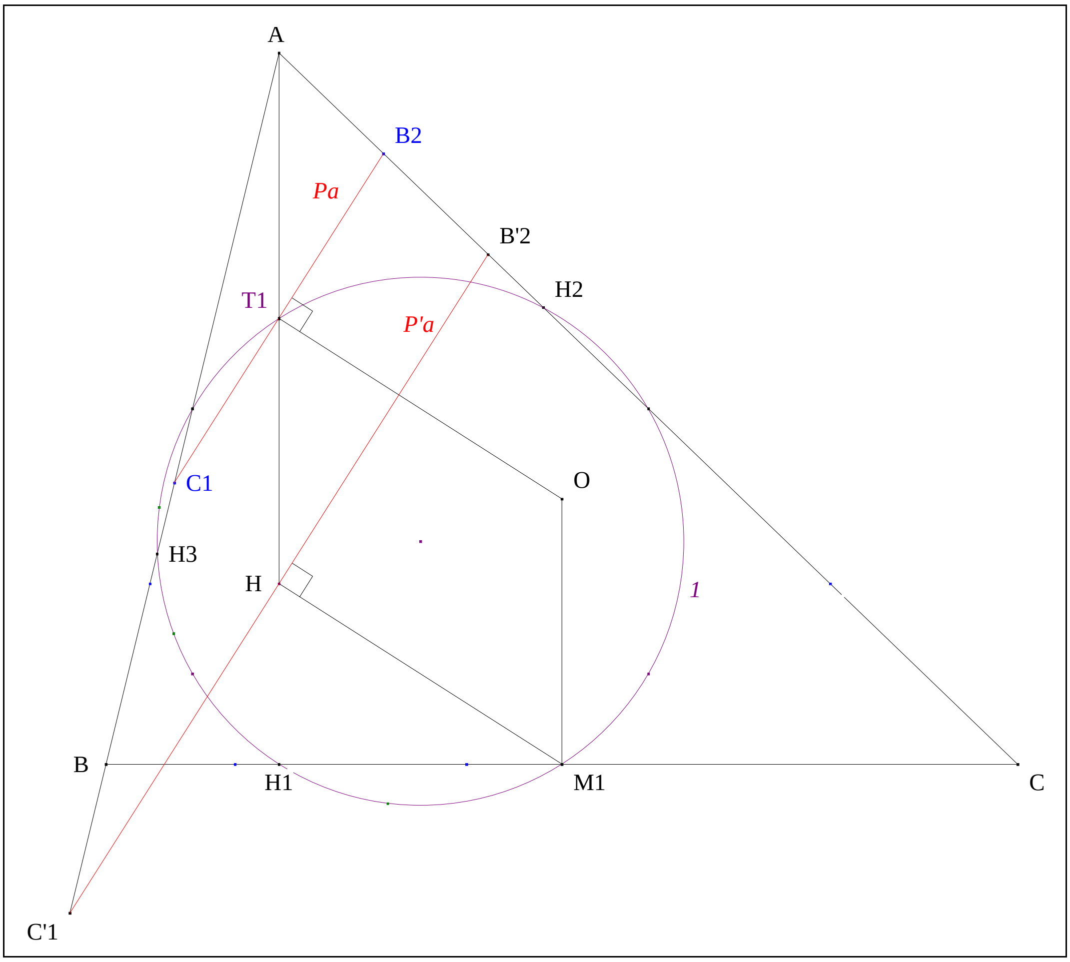

| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | H | l'orthocentre de ABC, |
| | H1, H2, H3 | les pieds de A, B, C-hauteurs de ABC, |
| | *1* | le cercled'Euler de ABC, |
| | T1 | le milieu de [AH], |
| | O | le centre du cercle circonscrit à ABC, |
| | *Pa* | la perpendiculaire à (OT1) en T1 |
| et | B2, C1 | les points d'intersection de *Pa* resp. avec (AC), (AB). |

**Donné :** T1 est le milieu de [B2C1].[8]

[7] Terquem O., *Nouvelles Annales mathématiques* XIX (1860) 9-12 et XX 14-16.

## VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** par définition, T1 est "le A-point d'Euler de ABC".
  **(2)** D'après Charles-Julien Brianchon, *1* passe par T1. [9]




- Notons M1 le milieu de [BC],
  *P'a* la perpendiculaire à (M1H) en H
  et B'1, C'2 les points d'intersection de *P'a* resp. avec (AC), (AB).

- **Scolie :** *1* passe par M1.

- D'après Carnot "Une relation" (Cf. Annexe 3), OM1 = T1H ;
  nous savons que (OM1) // (T1H) ;
  le quadrilatère OM1HT1 ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (M1H) // (OT1) ;
  la relation // étant compatible avec la relation ⊥ , *P'a* // *Pa*.

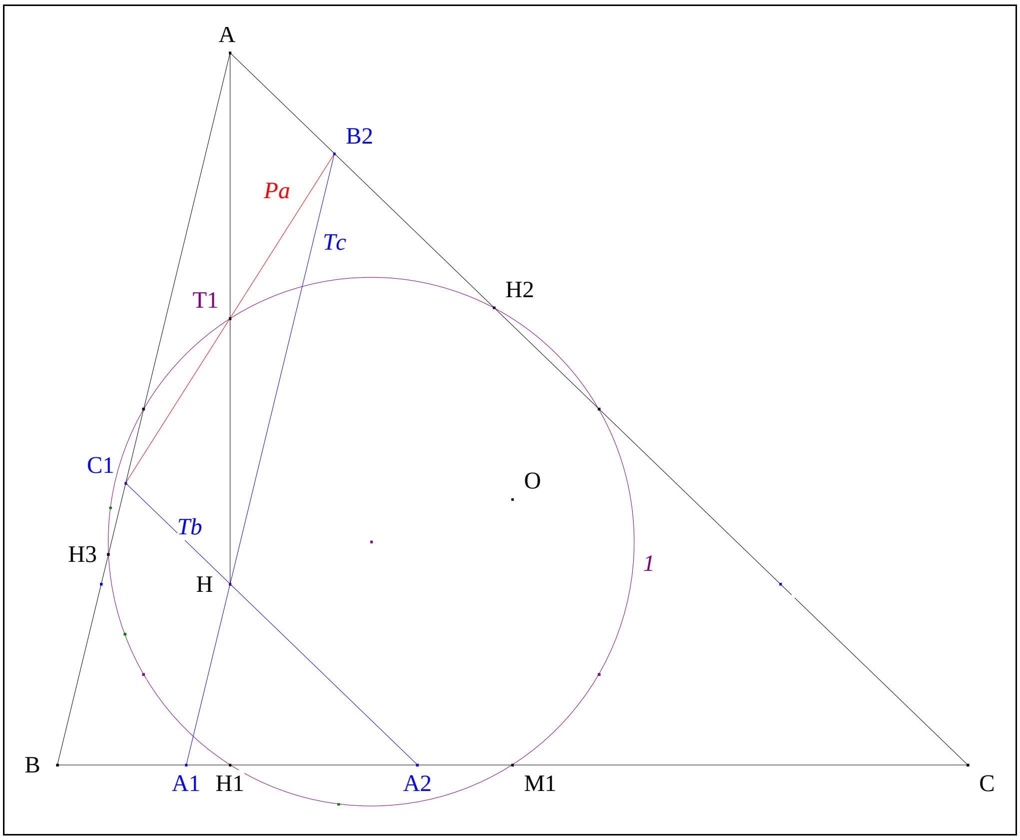
- D'après "Un exercice d'Oleg Faynsteyn" (Cf. Appendice 1), H est le milieu de [B'2C'1].

- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" (Cf. Annexe 4), T1 est le milieu de [B2C1].

---

8 Ayme J.-L., An Euler point is midpoint, *Mathlinks* du 06/03/2010 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=336564.
9 Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler,…, G.G.G. vol. 2 p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

**Scolies :** **(1)** une autre nature de B2 et C1

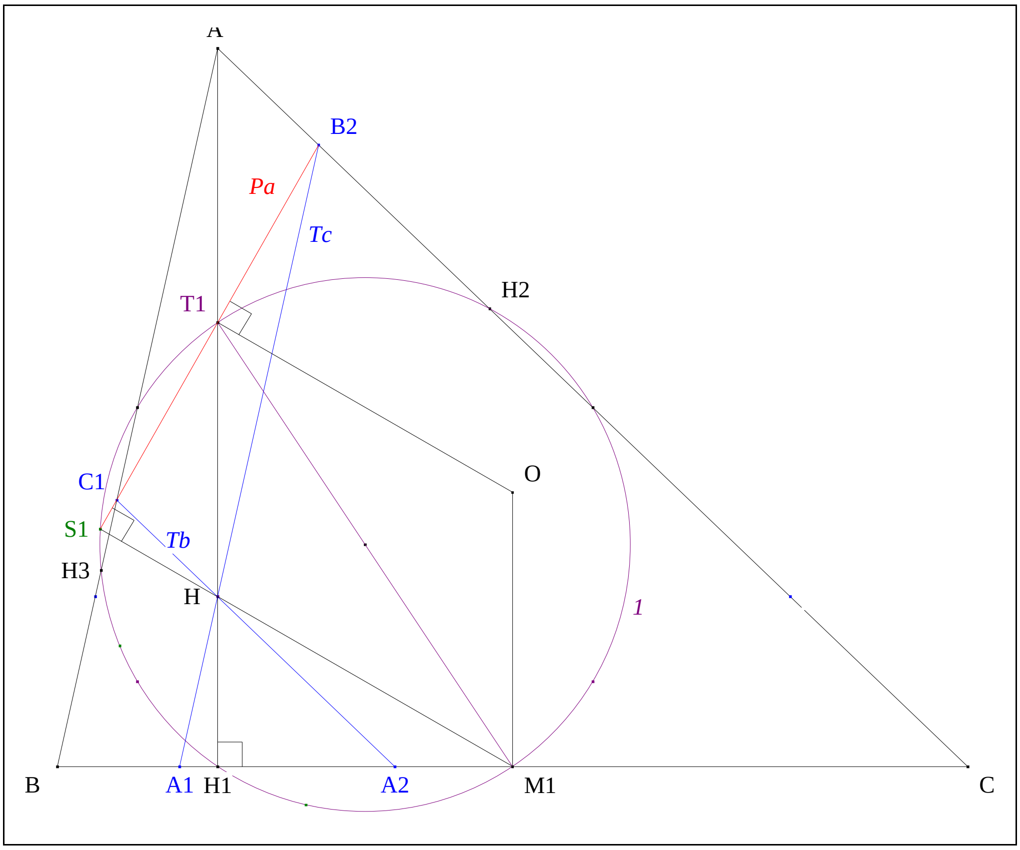



- Le quadrilatère AB2HC1 ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ; en conséquence, (HB2) // (AB) et (HC1) // (AC).

- **Conclusion :** B2 et C2 sont les points considérés dans la figure de Yakub Aliyev.

**(2)** (B2T1C1) = *Pa*.

**(3)** Nature de l'intersection de *Pa* et (M1H)

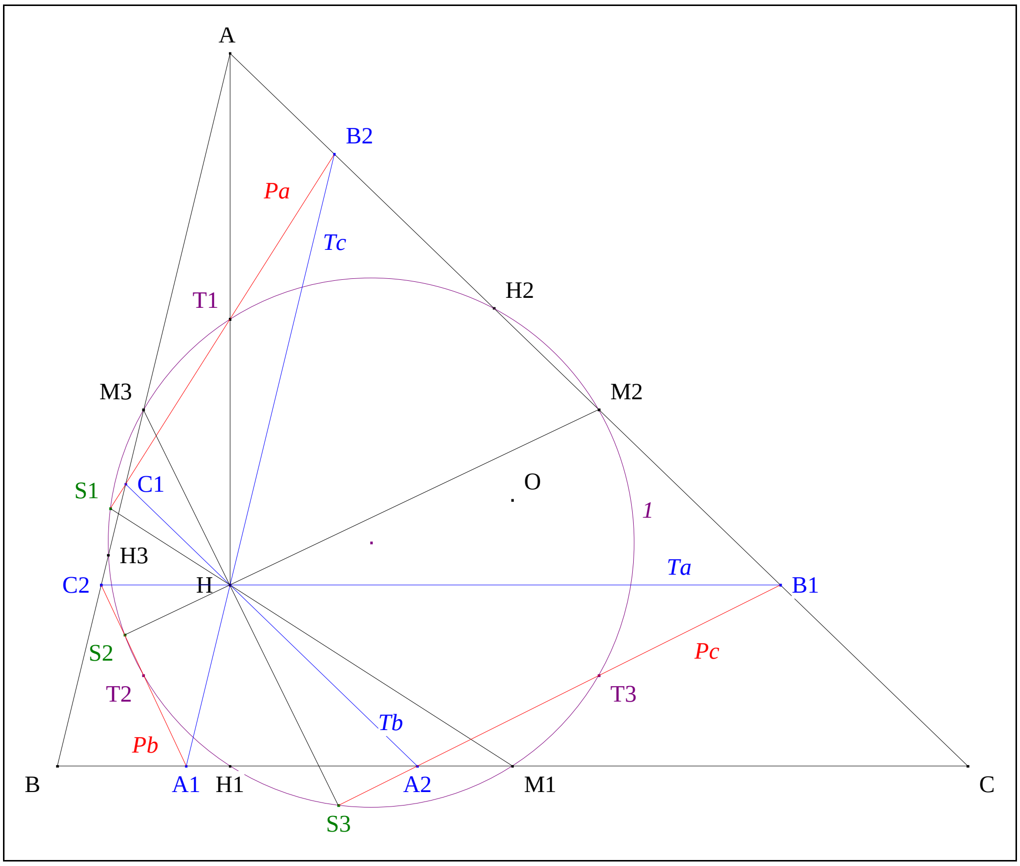



- Par hypothèse, nous savons que d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, *Pa* ⊥ (OT1) ; (OT1) // (M1H) ; *Pa* ⊥ (M1H).

- M1 et T1 étant deux points diamétraux de *1*, d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *Pa* et (M1H) se coupent sur *1*.

- **Conclusion :** ce point d'intersection n'est d'autre que le point S1 de la figure de Yakub Aliyev.

**(4)** Vision triangulaire avec la notation de Yakub Aliyev




- Notons T2, T3 les milieux resp. de [BH], [CH],
  M2, M3 les milieux resp. de [CA], [AB],
  *Pb*, *Pc* les perpendiculaires resp. à (OT2) en T2, à (OT3) en T3,
  C2, A1 les points d'intersection de *Pb* resp. avec (BA), (BC).
  et A2, B1 les points d'intersection de *Pc* resp. avec (CB), (CA).

- **Conclusions :**

  **(1)** T2, T3 sont les milieux resp. de [C2A1], [A2B1].

  **(2)** C2, A1, A2 et B1 sont les points considérés dans la figure de Yakub Aliyev.

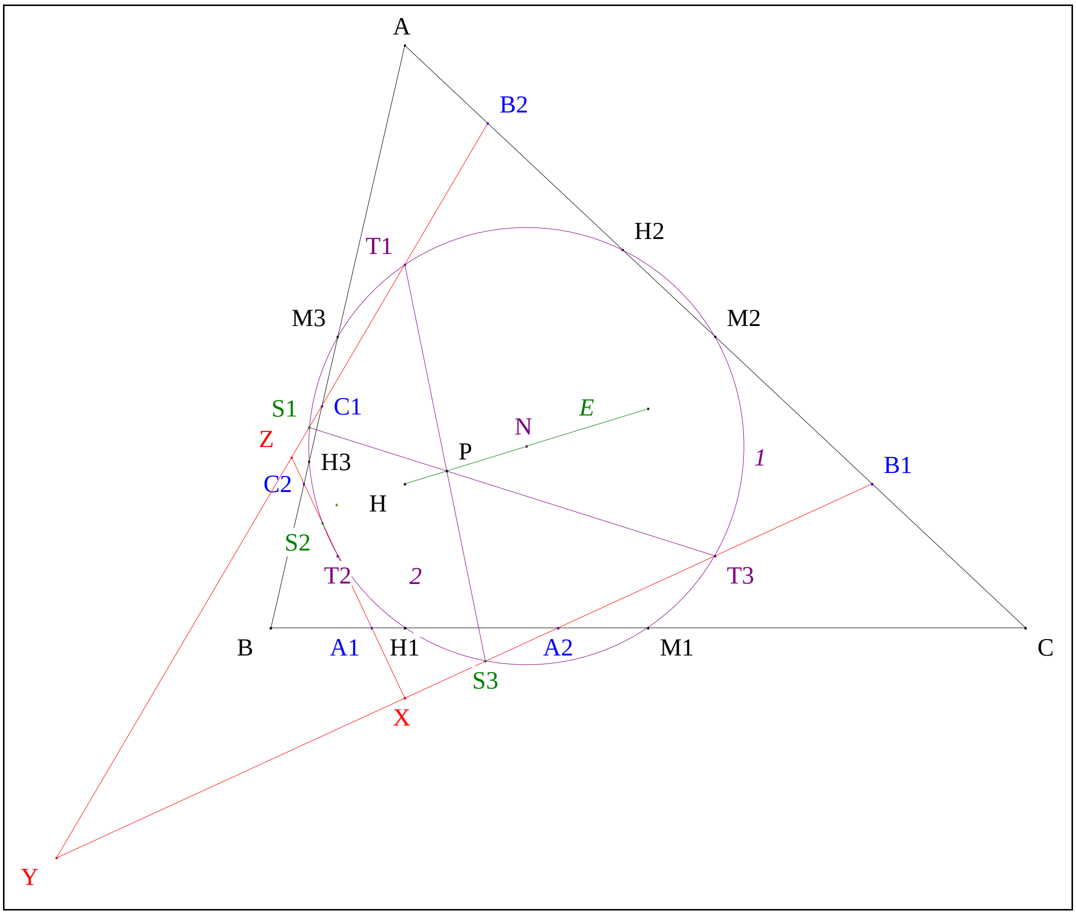
  **(3)** (C2T2A1) = *Pb* et (A2T3B1) = *Pc*.

  **(4)** *Pb* et (M2H) se coupent en S2 sur *1*
  *Pc* et (M3H) se coupent en S3 sur *1*.

## 3. Un point anodin sur la droite d'Euler

**VISION**

**Figure :**




**Traits :** aux hypothèses et notations de Yakub Aliyiev, nous ajoutons

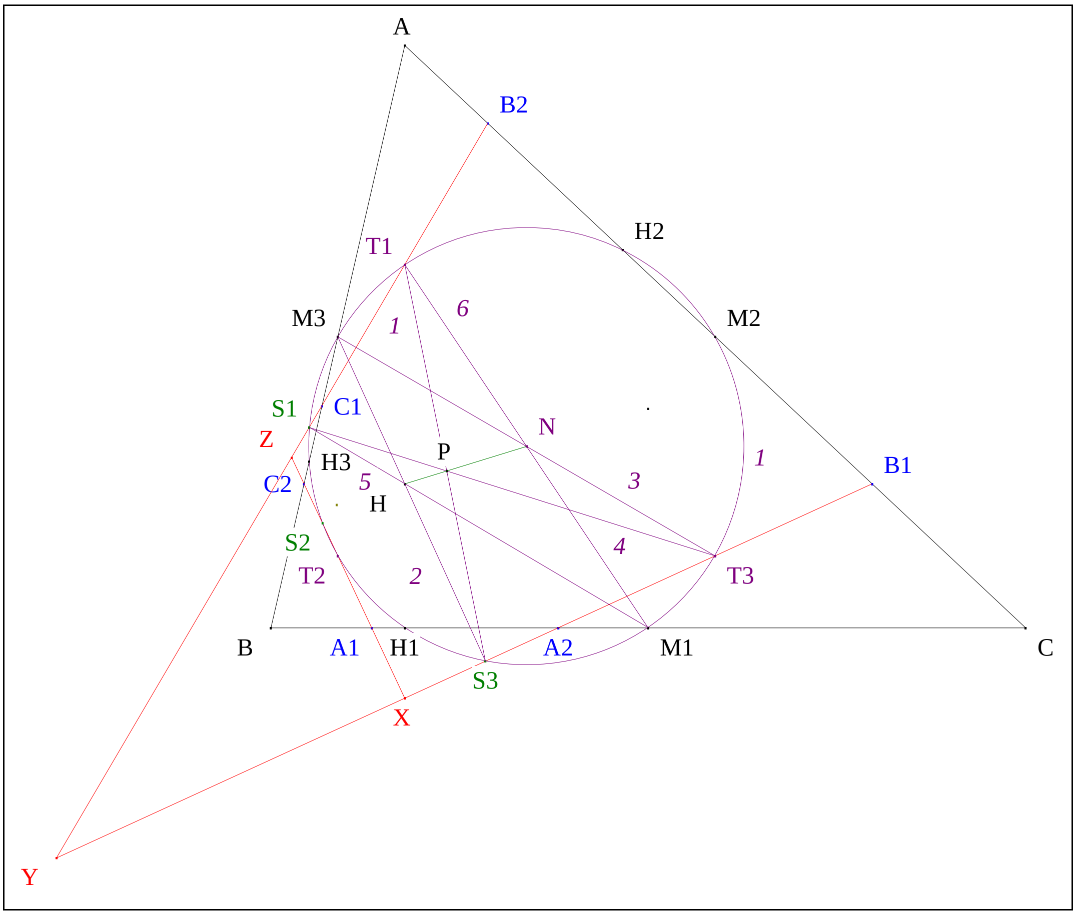
N le centre de *1*,

M1, M2, M3 les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]

et P le point d'intersection de (T1S3) et (T3S1).

**Donné :** P est sur *E*.

**VISUALISATION**



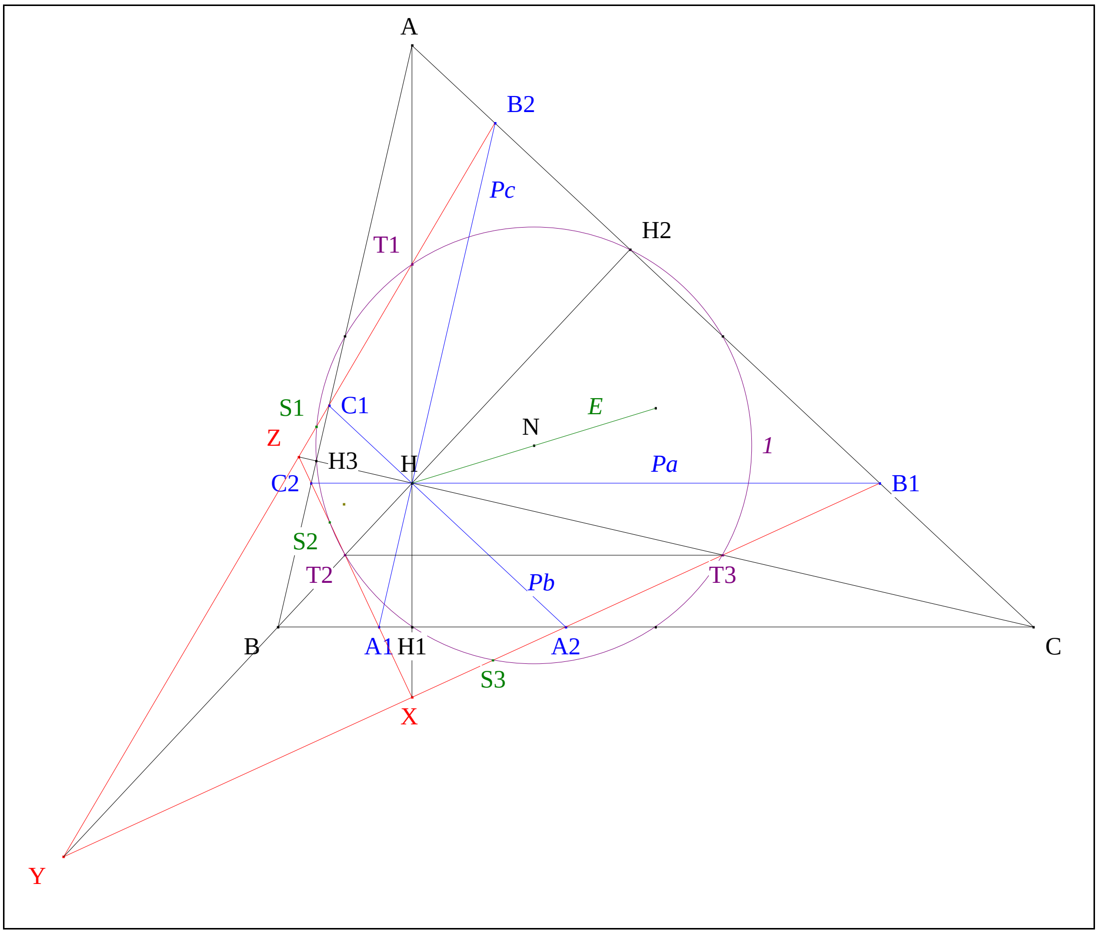

- **Scolie :** $E$ = (HN).[10]

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),
  (PHN) est la pascale de l'hexagone T1S3M3T3S1M1T1.

- **Conclusion :** P est sur $E$.

## C. LA PREUVE

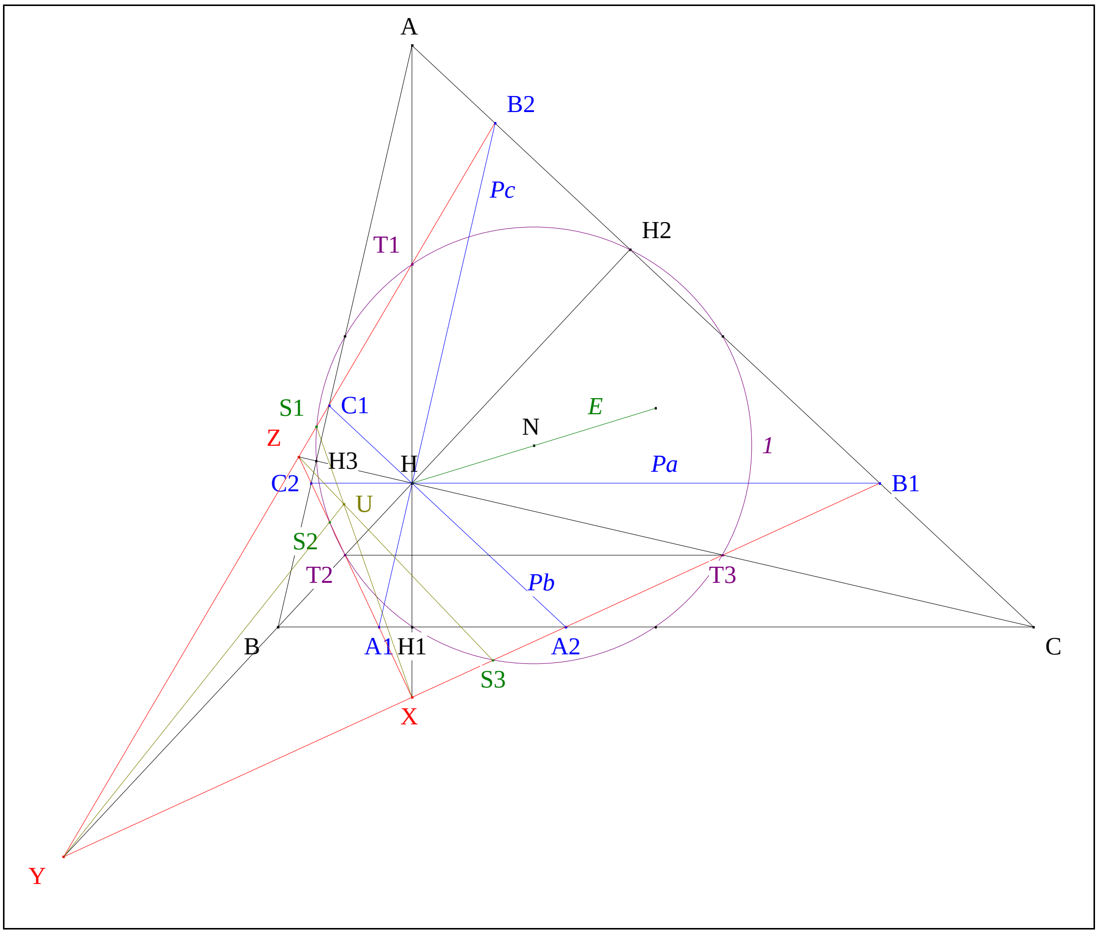
[10] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2 p. 1-3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.




- Par hypothèse, (C2B1) // (BC) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle HBC, (BC) // (T2T3) ;
  par transitivité de la relation //, (C2B1) // (T2T3).

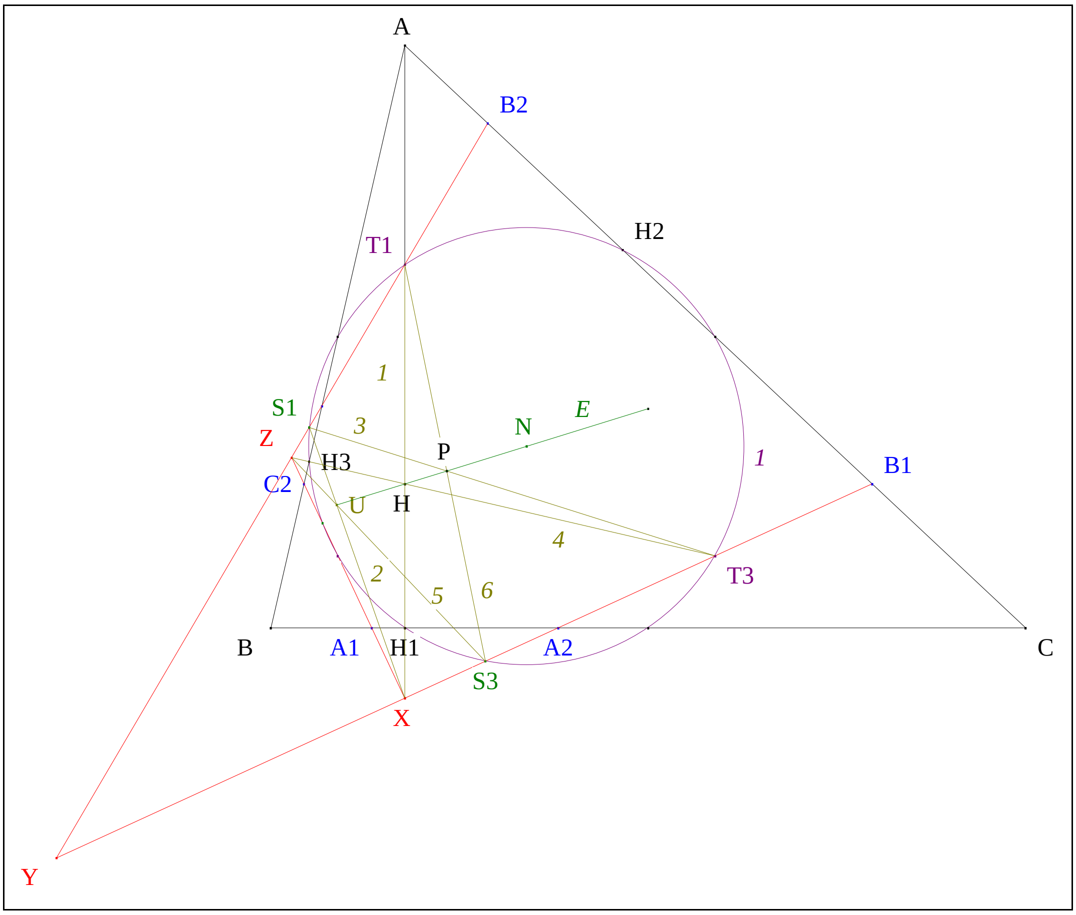
- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème faible de Desargues" (Cf. Annexe 5)
  appliqué aux triangles homothétiques AC2B1 et HA1A2,
  (AH) passe par X intersection de (C2A1) et (B1A2).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BH) passe par Y intersection de (A2B1) et (C1B2).
  (CH) passe par Z intersection de (B2C1) et (A1C2).




- D'après B. 1. le théorème de Terquem, appliqué à XYZ et à *1*,
  (XT1), (YT2) et (ZT3) étant concourantes en H, (XS1), (YS2) et (ZS3) sont concourantes.

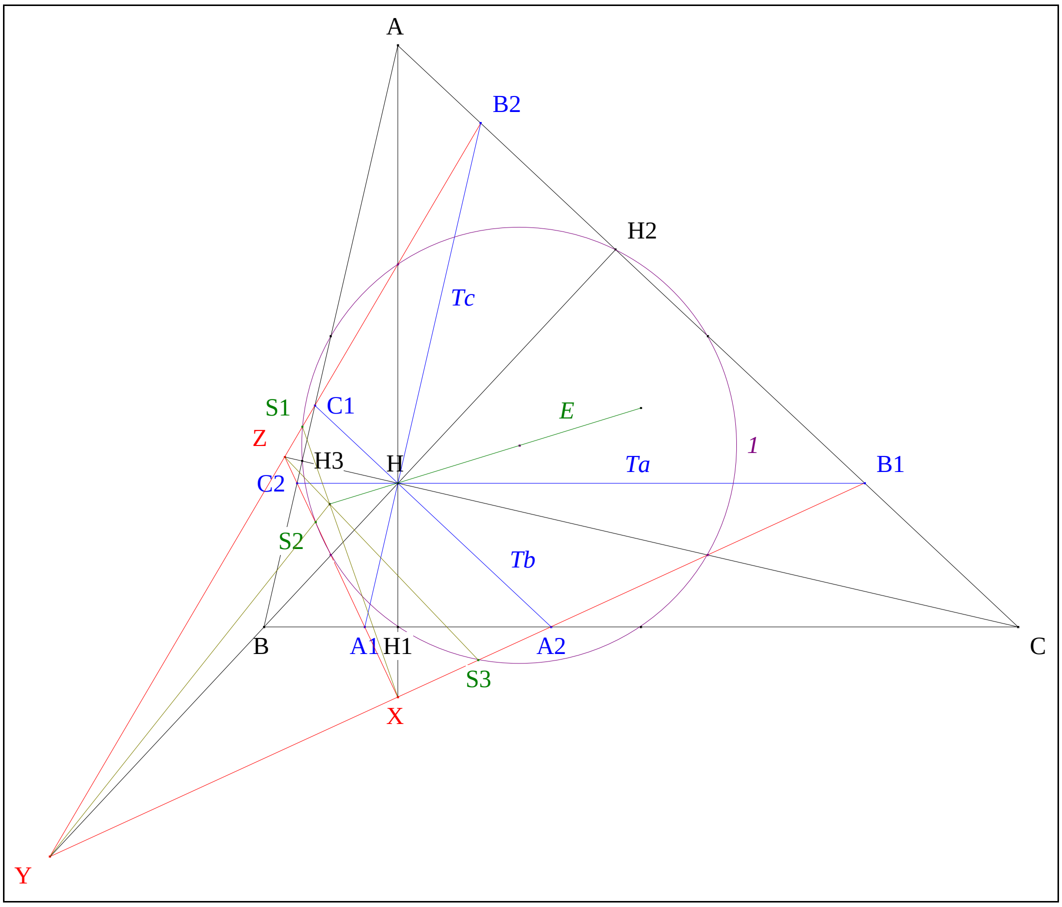
- Notons U ce point de concours.




- Notons P le point d'intersection de (T1S3) et (T3S1).

- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 1),
  (HUP) est la pappusienne de l'hexagone T1XS1T3ZS3T1.

- D'après B. 3. Un point anodin sur *E*, *E* = (PHN) ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, U est sur *E*.




- **Conclusion :** (XS1), (YS2) et (ZS3) concourent sur *E*.

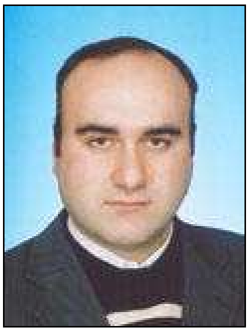
**Note historique :** le 2 novembre 2009, Yakub Aliyev présente sur le site Hyacinthos son résultat. Le même jour, Eric Danneels confirme la "concourance", calcule les coordonnées normales de ce point de concours et affirme que celui-ci n'est pas répertorié chez ETC[11].
Dans sa réponse en date du 6 novembre, Francisco Javier Garcia Capitan souhaite qu'une solution synthétique soit trouvée

*synthetic proofs are better for all of us.*

Le 7 novembre, Pierre L. Douillet[12] propose une généralisation du problème.
Le 6 mars 2010, l'auteur propose la première preuve synthétique.

**Une courte biographie de Yakub Aliyev**

11 Kimberling C., http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.
12 http://www.douillet.info/.



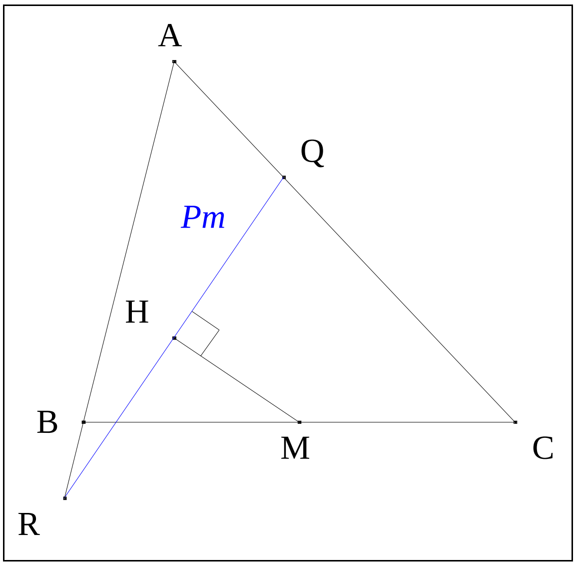
Yakub Aliyev est né le 7 juillet 1980 à Bakou (Azerbaïdjan).
Fils du géomètre Najaf Aliyev qui lui-même a suivi les cours de Géométrie du fameux professeur Bazylev à Moscou, Yakub Aliyev a eu rapidement accès à de nombreux livres anciens et nouveaux de Géométrie qui lui ont donné le goût de s'investir dans cette discipline.
Médaille d'or aux Olympiades Nationales de Mathématiques, il fait parti de l'équipe d'Azerbaïdjan aux O.I.M. de 1997 qui ont lieu à Mar del Plata (Argentine). La même année, il entre alors à l'Université de Bakou et durant ses études obtient la médaille d'or dans une compétition analogue à celle de Putnam aux États-unis. Actuellement doctorant, il enseigne les mathématiques à l'université Qafqaz de Bakou et a été l'un des deux coachs de l'équipe d'Azerbaïdjan pour les O.I.M.
Sa passion pour la Géométrie se retrouve dans ses articles ou problèmes publiés dans le *Monthly*, dans *Crux* et dans le *Journal* de l'université de Qafqaz.

## D. APPENDICE

### UN EXERCICE D'OLEG FAYNSTEYN [13]

#### VISION

**Figure :**



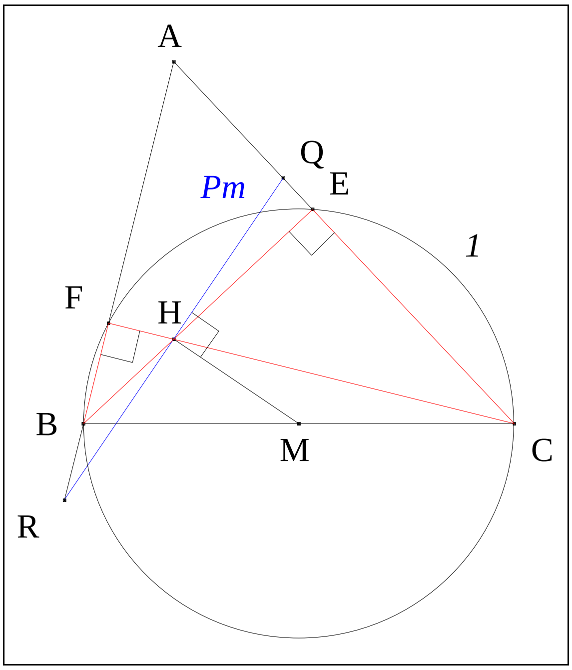

**Traits :** ABC un triangle acutangle,

[13] Faynsteyn O., *Elemente der Mathematik*, problème 1180 ; solution, *Elemente der Mathematik*, 1 (2003) 58.

|  |  |  |
|---|---|---|
|  | H | l'orthocentre de ABC, |
|  | M | le milieu de [BC], |
|  | *P*m | la perpendiculaire à (MH) en H |
| et | Q, R | les intersection de *P*m resp. avec (AC), (AB). |

**Donné :** H est le milieu de [QR].

**VISUALISATION**




- Notons E, F les pieds des B, C-hauteurs de ABC
  et *1* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par E et F.

- **Conclusion :** d'après "Le papillon d'Eves" (Cf. Annexe 1) appliqué au quadrilatère cyclique BECF, croisé en H, H est le milieu de [QR].

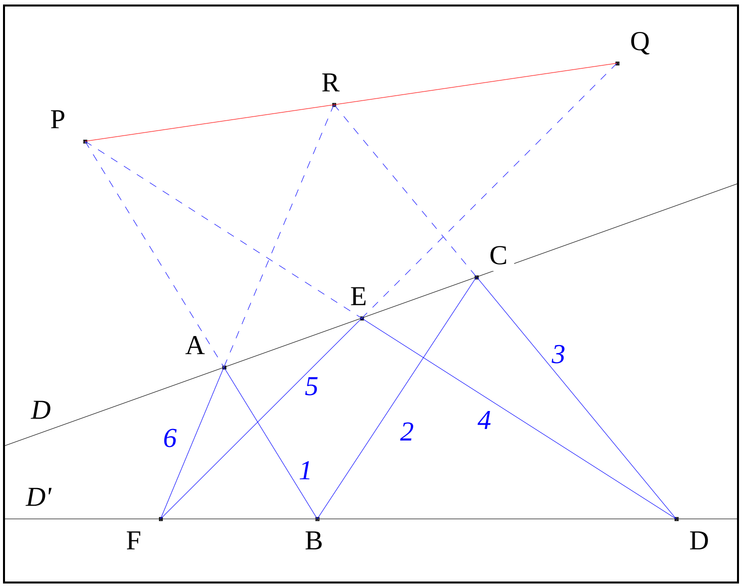
**Commentaire :** la solution proposée dans la revue suisse *Elemente der Mathematik* est trigonométrique.

**Note historique :** cette question avait déjà été posée aux Olympiades Mathématiques de St-Petersbourg (Russie) en 1995-96.

## E. ANNEXE

### 1. "La proposition 139" de Pappus[14]

[14] Pappus, *Collections*, Livre VII.

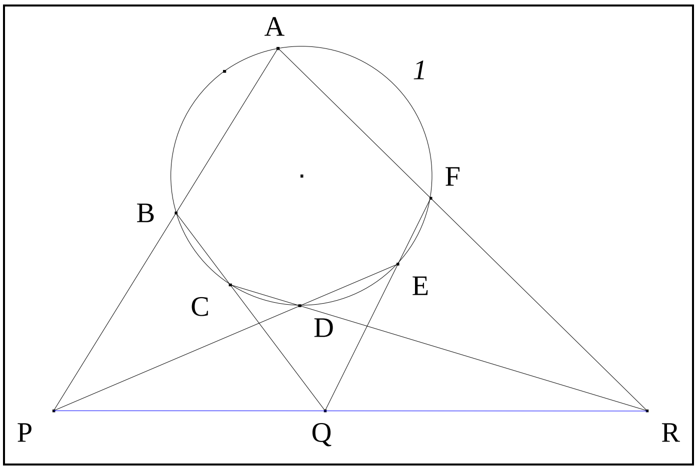



| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | D, D' | deux droites, |
| | ABCDEFA | un hexagone de Pappus |
| et | P, Q, R | les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA). |

**Donné :** E est sur (AC) *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

**Scolie :** (PQR) est "la pappusienne de ABCDEFA".

## 2. Hexagramma mysticum[15]




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | *1* | un cercle, |
| | ABCDEF | un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*, |
| et | P, Q, R | les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA). |

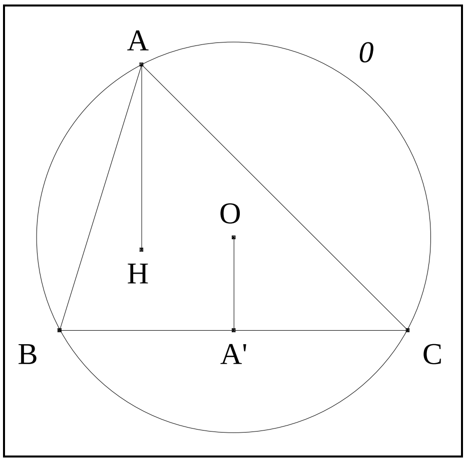
**Donné :** F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

## 3. Une relation[16]

---

[15] Pascal B. (1640)

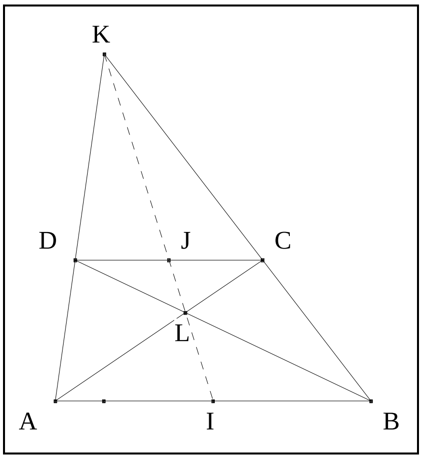
[16] Carnot L., *Géométrie de position* (1803).




**Traits :** ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
*0* le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et A' le milieu de [BC],

**Donné :** AH = 2.OA'.

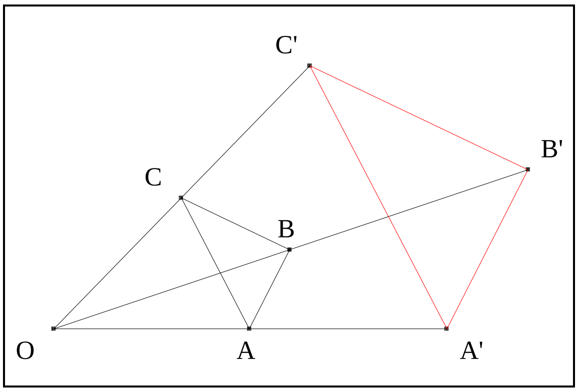
**4. Le trapèze complet**




**Traits :** ABCD un quadrilatère,
I le milieu de [AB],
J le milieu de [CD],
K le point d'intersection de (AD) et (BC)
et L le point d'intersection de (AC) et (BD).

**Donné :** ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD) *si, et seulement si,* I, J, K et L sont alignés.

**5. Le théorème faible de Desargues**




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, | | |
| et | A'B'C' | un triangle tel que | **(1)** | (AA') et (BB') soient concourantes en O |
| | | | **(2)** | (AB) soit parallèle à (A'B') |
| | | | **(3)** | (BC) soit parallèle à (B'C') |

**Donné :** (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').