

Utilisation des tableaux en calcul barycentrique

J.-L. Aymé & S. Morichère-Matte

Lycée Lislet Geoffroy, St Denis, La Réunion
Ecole Polytechnique, Montréal

Le calcul vectoriel et, plus précisément, la manipulation de combinaisons linéaires, apparaît bien souvent pour beaucoup d'élèves comme un exercice difficile lorsque la question posée dans un problème est ouverte.

Dans la situation contraire, où la question posée est fermée, la démarche étudiante reste souvent hésitante et aléatoire car les principes de ce calcul sont en général insuffisamment dégagés.

Le calcul barycentrique, prolongeant le calcul vectoriel, se présente dans un premier temps comme une "factorisation" d'une combinaison linéaire particulière et s'affirme dans un deuxième temps, comme une technique permettant de répondre à certains types de questions de géométrie comme l'alignement des points.

Aujourd'hui la transmission des connaissances apparaît, malgré l'approche didactique, plus sous l'aspect d'un art que d'une science. La présentation des calculs par tableaux, initiés par *As-Samawal* au X-ème siècle est actuellement une voie élégante à laquelle les étudiants adhèrent naturellement après en avoir été séduits.

Pour séduire, il est donc nécessaire de dégager d'abord les principes du calcul vectoriel sur les combinaisons linéaires, ensuite de les écrire "barycentriquement" sous forme de tableaux et, enfin, de savoir manipuler ces derniers.

Ainsi, le calcul barycentrique prend une forme simple et homogène au sens gestaltiste (von Ehrenfels), et cette "bonne forme" (Wertheimer) ne peut que séduire.

Ce travail a pour ambition de faire connaître et redécouvrir le calcul barycentrique sous forme de tableaux.

1. De l'écriture vectorielle à l'écriture barycentrique

1.1. Combinaison linéaire

- p étant un naturel non nul, considérons p vecteurs géométriques $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_2B_2}$, ... et $\vec{A_pB_p}$.
- Tout vecteur \vec{V} de la forme $\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \vec{A_iB_i}$, où les λ_i sont des réels, est appelé combinaison linéaire des p vecteurs $\vec{A_iB_i}$.

1.2. M -combinaison linéaire

- Soit $\vec{V} = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \vec{A_iB_i}$ une combinaison linéaire.
- Pour tout point M de l'espace géométrique, le vecteur

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i (\vec{MB_i} - \vec{MA_i}) \Leftrightarrow \vec{V} = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \vec{MB_i} + \sum_{i=1}^{i=p} (-\lambda_i) \vec{MA_i}$$

est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{MA_i}$ et $\vec{MB_i}$.

- \vec{V} étant écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de vecteurs de même origine M , nous dirons que \vec{V} est une M -combinaison linéaire.
- Lorsque \vec{V} est nul, nous dirons que la M -combinaison linéaire est nulle.

1.3. Changement interne d'origine dans une M -combinaison linéaire

- Soit $\vec{V} = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \vec{MA_i}$ une M -combinaison linéaire.

- Pour tout point A_k ($k = 1, 2, \dots, p$), le vecteur

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i (\vec{A_k A_i} - \vec{A_k M}) \Leftrightarrow \vec{V} = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \cdot \vec{A_k A_i} + \left(- \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \right) \cdot \vec{A_k M}$$

est une A_k -combinaison linéaire.

- Nous dirons que nous venons de procéder à un changement interne d'origine.

1.4. Tableau associé à une M -combinaison linéaire

- Posons $\lambda = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i$.
- Le calcul précédent nous conduit à écrire la M -combinaison linéaire sous la forme d'un tableau

$$\vec{V} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_p & M \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_p & -\lambda \\ \hline \end{array}$$

qui se développe de la façon suivante :

1. on choisit d'abord un point origine parmi ceux de la première ligne : par exemple A_2 ;
2. ensuite on considère tous les vecteurs non nuls $\lambda_i \cdot \vec{A_2 A_i}$ ($i = 1, 2, \dots, p$) et $-\lambda \cdot \vec{A_2 M}$;
3. et, enfin, on forme la somme \vec{V} de tous ces vecteurs, i.e. pour cet exemple, la A_2 -combinaison linéaire.

Notons que ce développement *ne dépend pas de l'ordre* des colonnes du tableau.

1.5. Ecriture barycentrique

- Soit

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_p & G \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_p & -\lambda \\ \hline \end{array} = \vec{0} \quad (1)$$

l'écriture tabulaire d'une G -combinaison linéaire nulle telle que la somme λ (des λ_i) soit différente de 0.

4

- Dans le cas où $p \geq 2$, G est, par définition, le barycentre du système S des points pondérés (A_j, λ_j) , nous conviendrons d'étendre cette définition lorsque p est égal à 1.

- Ecriture tabulaire de S :

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_p \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_p \\ \hline \end{array}$$

- Ecriture barycentrique de G : en utilisant la notation "bar", nous avons

$$G = \text{bar } S.$$

- Ecriture barycentrée de G : le calcul vectoriel nous conduit à écrire la relation (1) sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \lambda \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_p \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_p \\ \hline \end{array}$$

- Dans cette situation, le changement interne d'origine, nous montre que tout point A_j de coefficient λ_j non nul est, par définition, barycentre du système formé par tous les autres points pondérés.

1.6. Règles tabulaires

1. Règle d'*homogénéité* :

Pour tout réel k non nul, la relation (1) est équivalente à

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_p & G \\ \hline k\lambda_1 & k\lambda_2 & \dots & k\lambda_i & \dots & k\lambda_p & -k\lambda \\ \hline \end{array} = \vec{0}$$

2. Règle de *réduction* :

Nous savons que pour toute partie non vide de $\{1, 2, \dots, p\}$ telle que la somme des λ_j correspondant est non nulle, il existe un point unique G' barycentre du système S' de points pondérés correspondants.

On démontre alors que nous pouvons réduire le tableau de la relation (1) en substituant à l'écriture tabulaire de S' l'écriture barycentrée de G' . ⁽¹⁾

3. Règle d'extension :

Inversement, l'écriture barycentrée d'une colonne du tableau de la relation (1), jointe à la règle d'homogénéité conduit à étendre ce tableau en substituant à cette colonne le tableau correspondant.

Remarque : ces règles se transposent à l'écriture barycentrique en passant par l'écriture barycentrée.

⁽¹⁾ Exemple avec $p = 5$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_p & G \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_i & \dots & \lambda_p & -\lambda \\ \hline \end{array} = \vec{0} \quad (1)$$

Supposons que la somme $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ soit non nulle.
Notons G' le barycentre du système

$$S' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \hline \end{array}$$

Écriture barycentrée de G' :

$$\begin{array}{|c|} \hline G' \\ \hline \lambda' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \hline \end{array}$$

D'où l'équivalence :

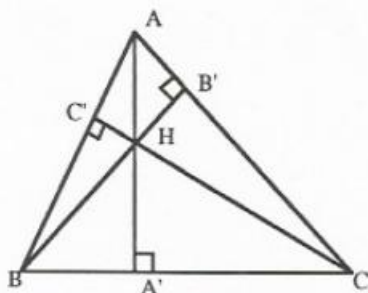
$$(1) \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G' & A_4 & A_5 & G \\ \hline \lambda' & \lambda_4 & \lambda_5 & -\lambda \\ \hline \end{array} = \vec{0}.$$

2. Application 1 : orthocentre d'un triangle

Considérons un triangle ABC non rectangle d'orthocentre H .

Question : démontrer que H est le barycentre d'un système de sommets pondérés.

2.1. Démonstration



posons : $a = BC$
 $b = CA$
 $c = AB$

$$\begin{aligned}
 A' &= \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \vec{B} & \vec{C} \\ \hline \vec{A'C} & -\vec{A'B} \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \vec{B} & \vec{C} \\ \hline \vec{BC} \cdot \vec{A'C} & -\vec{BC} \cdot \vec{A'B} \\ \hline \end{array} \\
 &= \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \vec{B} & \vec{C} \\ \hline \vec{BC} \cdot \vec{A'C} & -\vec{BC} \cdot \vec{A'B} \\ \hline \end{array} \\
 A' &= \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \vec{B} & \vec{C} \\ \hline \vec{CB} \cdot \vec{CA} & \vec{BC} \cdot \vec{BA} \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \vec{B} & \vec{C} \\ \hline ab \cdot \cos \hat{C} & ac \cdot \cos \hat{B} \\ \hline \end{array} \\
 &= \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \vec{B} & \vec{C} \\ \hline b \cdot \cos \hat{C} & c \cdot \cos \hat{B} \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Nous venons d'appliquer successivement la règle d'homogénéité, la définition géométrique du produit scalaire, une règle du calcul vectoriel, la définition trigonométrique du produit scalaire et enfin, la règle d'homogénéité.

En appliquant la même démarche :

$$B' = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline \vec{C} & \vec{A} \\ \hline c \cdot \cos \hat{A} & a \cdot \cos \hat{C} \\ \hline \end{array}$$

- Sachant que tout point d'un plan peut être considéré comme barycentre de trois points (pondérés) non alignés de ce plan, recherchons trois réels x, y et z de somme non nulle tels que

$$H = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline x & y & z \\ \hline \end{array}$$

- Tableau associé aux points A, A' et H :

	A	B	C
A	1	0	0
A'	0	$b \cdot \cos \hat{C}$	$c \cdot \cos \hat{B}$
H	x	y	z

$$A, A' \text{ et } H \text{ alignés }^{(2)} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot \cos \hat{C} & c \cdot \cos \hat{B} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

- Tableau associé aux points B, B' et H :

	A	B	C
B	0	1	0
B'	$a \cdot \cos \hat{C}$	0	$c \cdot \cos \hat{A}$
H	x	y	z

$$B, B' \text{ et } H \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a \cdot \cos \hat{C} & 0 & c \cdot \cos \hat{A} \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (2)$$

- Résolvons le système homogène

$$\begin{cases} c \cdot \cos \hat{B} \cdot y - b \cdot \cos \hat{C} \cdot z = 0 & (1) \\ c \cdot \cos \hat{A} \cdot x - a \cdot \cos \hat{C} \cdot z = 0 & (2) \end{cases}$$

⁽²⁾ Etant donné un triangle ABC (non dégénéré) et les points P, Q et R vérifiant respectivement

$$P = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline \end{array} \quad Q = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \hline \end{array} \quad R = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline R_1 & R_2 & R_3 \\ \hline \end{array}$$

Nous supposons connue l'équivalence suivante :

$$P, Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8

Le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & c \cdot \cos \hat{B} \\ c \cdot \cos \hat{A} & 0 \end{vmatrix}$ étant non nul, ce système est équivalent à :

$$\begin{aligned} \frac{x}{\begin{vmatrix} c \cdot \cos \hat{B} & -b \cdot \cos \hat{C} \\ 0 & -a \cdot \cos \hat{C} \end{vmatrix}} &= \frac{y}{\begin{vmatrix} 0 & -b \cdot \cos \hat{C} \\ c \cdot \cos \hat{A} & -a \cdot \cos \hat{C} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{z}{\begin{vmatrix} 0 & -c \cdot \cos \hat{B} \\ c \cdot \cos \hat{A} & 0 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

 \Downarrow

$$\frac{x}{a \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}} = \frac{y}{b \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C}} = \frac{z}{c \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B}}$$

 \Downarrow

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{\sin \hat{A}} \cdot \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} \cdot \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}}{\frac{a}{\sin \hat{A}} \cdot \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} \cdot \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}} &= \frac{\frac{b}{\sin \hat{B}} \cdot \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} \cdot \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}}{\frac{b}{\sin \hat{B}} \cdot \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} \cdot \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}} \\ &= \frac{\frac{c}{\sin \hat{C}} \cdot \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} \cdot \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}}{\frac{c}{\sin \hat{C}} \cdot \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} \cdot \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}} \end{aligned}$$

 \Downarrow

Loi des sinus : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$
--

$$\frac{x}{\tan \hat{A}} = \frac{y}{\tan \hat{B}} = \frac{z}{\tan \hat{C}} \quad (3)$$

• D'où :

$$\begin{aligned} H &= \text{bar} \begin{vmatrix} A & B & C \\ \tan \hat{A} & \tan \hat{B} & \tan \hat{C} \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \frac{H}{\sum \tan} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \tan \hat{A} & \tan \hat{B} & \tan \hat{C} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en notant $\sum \tan = \tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C}$.

(³) Dans un triangle ABC non rectangle :

$$\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B} \cdot \tan \hat{C} \quad (\neq 0).$$

2.2. Conclusion

Si le triangle ABC est non rectangle alors l'orthocentre est barycentre du système :

$$\{(A, \tan \hat{A}), (B, \tan \hat{B}), (C, \tan \hat{C})\}.$$

3. Application 2 : Centre du cercle circonscrit

Considérons un triangle ABC non rectangle et le point O centre du cercle circonscrit.

Question : Démontrer que O est le barycentre d'un système de sommets pondérés.

3.1. Rappels

- Notons H l'orthocentre de ce triangle.
- Ecriture barycentrée de H :

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sum \tan} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \tan A & \tan B & \tan C \\ \hline \end{array} \\ \Leftrightarrow \frac{H}{1} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \frac{\tan A}{\sum \tan} & \frac{\tan B}{\sum \tan} & \frac{\tan C}{\sum \tan} \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

- Relation vectorielle d'Euler ⁽⁴⁾ :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

- Ecriture barycentrique de O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline H & A & B & C \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

⁽⁴⁾ Sortais Y. et R., *La géométrie du triangle*, Paris, Hermann, 1987, 210 pages.

- Relations trigonométriques dans un triangle non rectangle :

$$\tan \hat{A} + \tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{A} \cos \hat{B}} = \frac{\sin 2\hat{C}}{2 \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C}}$$

3.2. Démonstration à partir de l'écriture barycentrique de O

-

$$O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline H & A & B & C \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Substituons à la colonne $\begin{array}{|c|} \hline H \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$ le tableau correspondant à l'écriture barycentrée de H .

- règle d'extension :

$$O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & A & B & C \\ \hline \frac{\tan A}{\sum \tan} & \frac{\tan B}{\sum \tan} & \frac{\tan C}{\sum \tan} & -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

- règle de réduction :

$$O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \frac{\tan B + \tan C}{\sum \tan} & \frac{\tan A + \tan C}{\sum \tan} & \frac{\tan A + \tan B}{\sum \tan} \\ \hline \end{array}$$

- règle d'homogénéité :

$$O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \tan B + \tan C & \tan A + \tan C & \tan A + \tan B \\ \hline \end{array}$$

- c'est-à-dire :

$$O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \frac{\sin 2A}{2 \cos A \cos B \cos C} & \frac{\sin 2B}{2 \cos A \cos B \cos C} & \frac{\sin 2C}{2 \cos A \cos B \cos C} \\ \hline \end{array}$$

- règle d'homogénéité :

$$O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \sin 2\hat{A} & \sin 2\hat{B} & \sin 2\hat{C} \\ \hline \end{array}$$

3.3. Conclusion

Si le triangle ABC est non rectangle alors le centre du cercle circonscrit est barycentre du système :

$$\{(A, \sin 2\hat{A}), (B, \sin 2\hat{B}), (C, \sin 2\hat{C})\}.$$

Adresse des auteurs :

Dr. Jean-Louis AYME
Lycée Lislet Geoffroy du Butor
97400 St Denis
La Réunion

S. MORICHERE-MATTE
Ecole Polytechnique
Montréal, Canada