

# THE NEUBERG – MINEUR CIRCLE

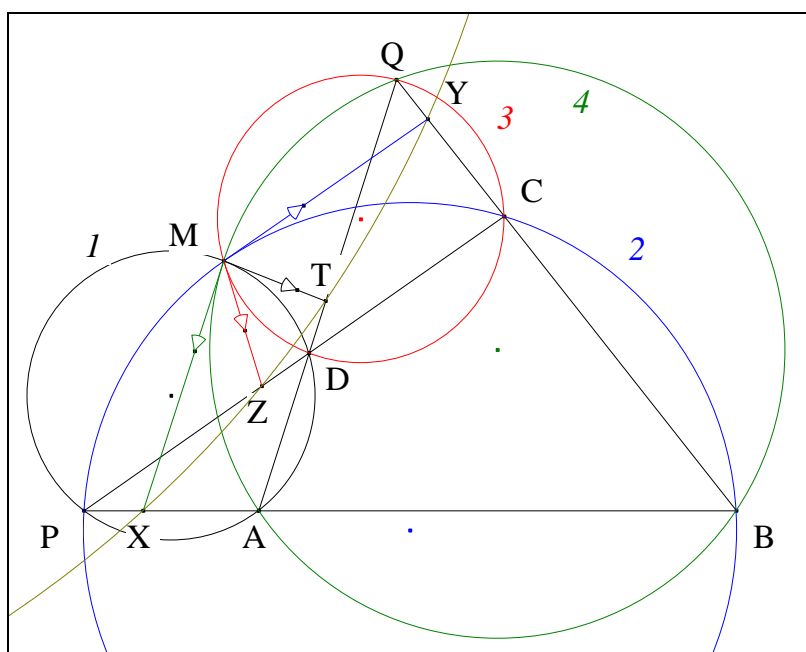
## REVISITED

Jean-Louis AYME

**Résumé.** Nous présentons une preuve purement synthétique et revisitée d'un résultat, à la fois simple et élégant, de Joseph Neuberg datant de 1897, suivie d'une courte note historique.  
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

## VISION

Figure :

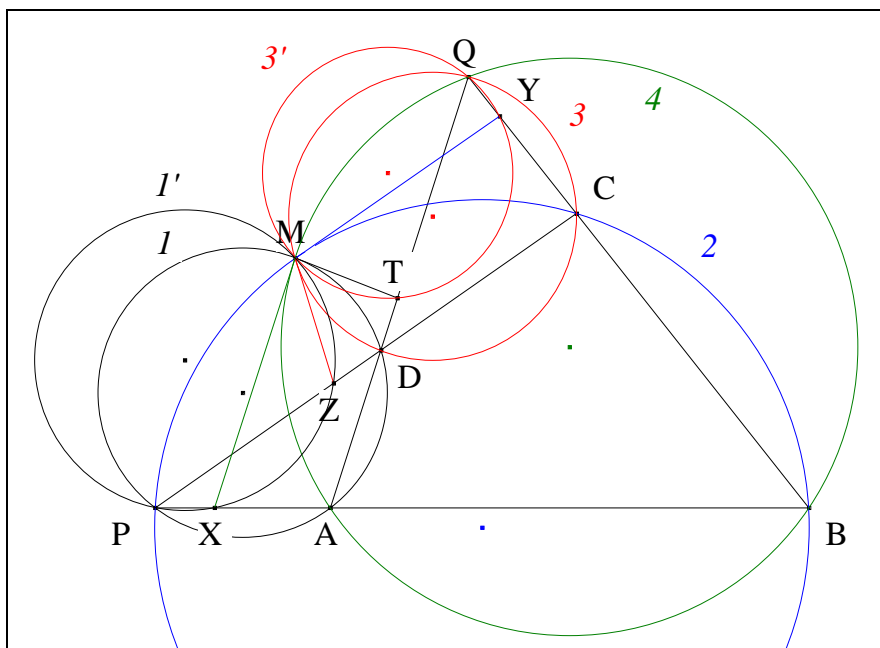


**Traits :** ABCD un quadrilatère non cyclique,  
P, Q les points d'intersection de (AB) et (CD), de (BC) et (DA),  
1, 2, 3, 4 les cercles circonscrits resp. aux triangles PAD, PBC, QDC, QAB,  
M le point de Miquel du delta déterminé par QAB et la ménélienne (PDC)  
et X, Y, Z, T, les points d'intersection des tangentes à 1, 2, 3, 4 en M  
resp. avec (AB), (BC), (CD), (DA).

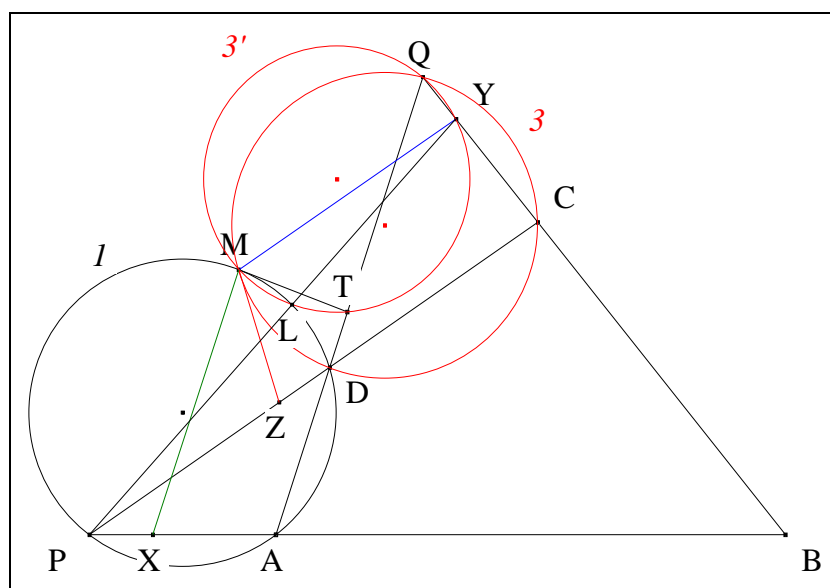
**Donné :** X, Y, Z et T sont cocycliques<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Thébault V., Mineur A., Sur une propriété du quadrilatère, *Mathesis* 45 (1931) 384-386.

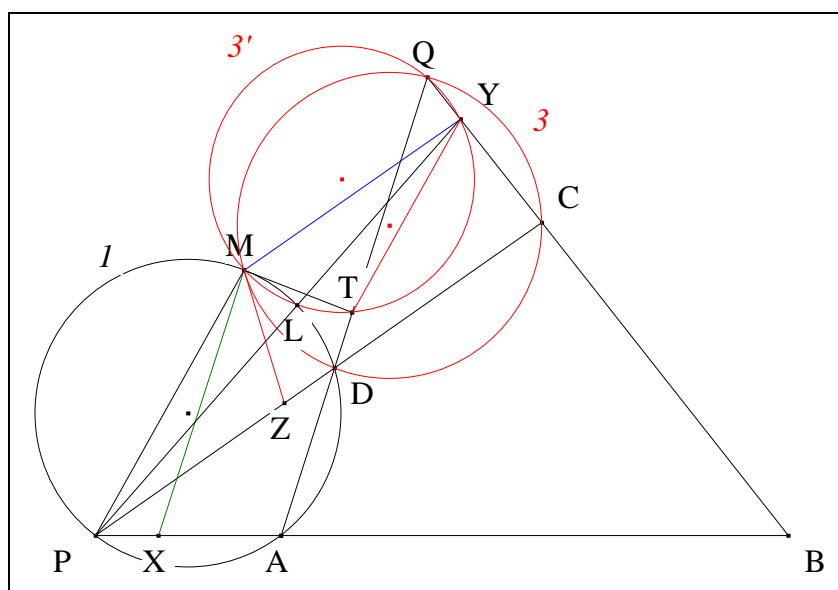




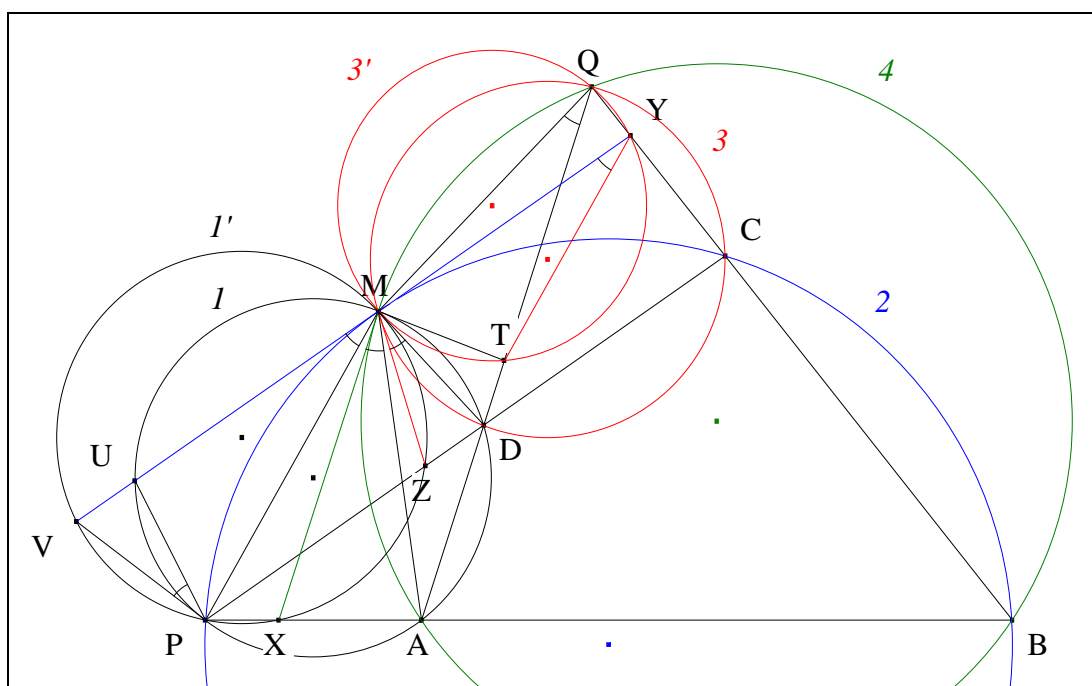
- Mutatis mutandis, nous montrerions que  $M, Q, Y$  et  $T$  sont cocycliques.
- Notons  $3'$  ce cercle.



- Notons  $L$  le second point d'intersection de  $I$  et  $3'$ .
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 3) appliqué au triangle  $PYC$  avec  $E$  sur  $(YC)$ ,  $D$  sur  $(PC)$ ,  $P, L$  et  $Y$  sont alignés.

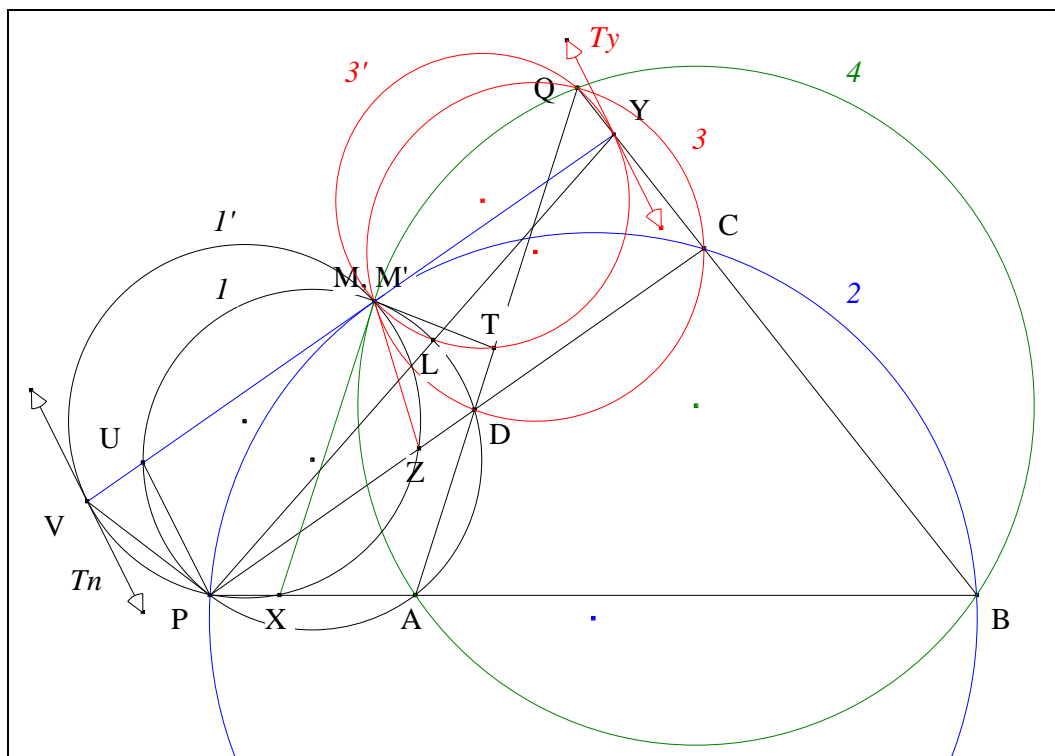


- Les cercles  $3'$  et  $I$ , les points de base  $M$  et  $L$ , les moniennes  $(TMM)$  et  $(YLP)$ , conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que  $(TY) \parallel (MP)$ .
- **Scolie :** mutatis mutandis, nous montrerions que  $(XZ) \parallel (MQ)$ .

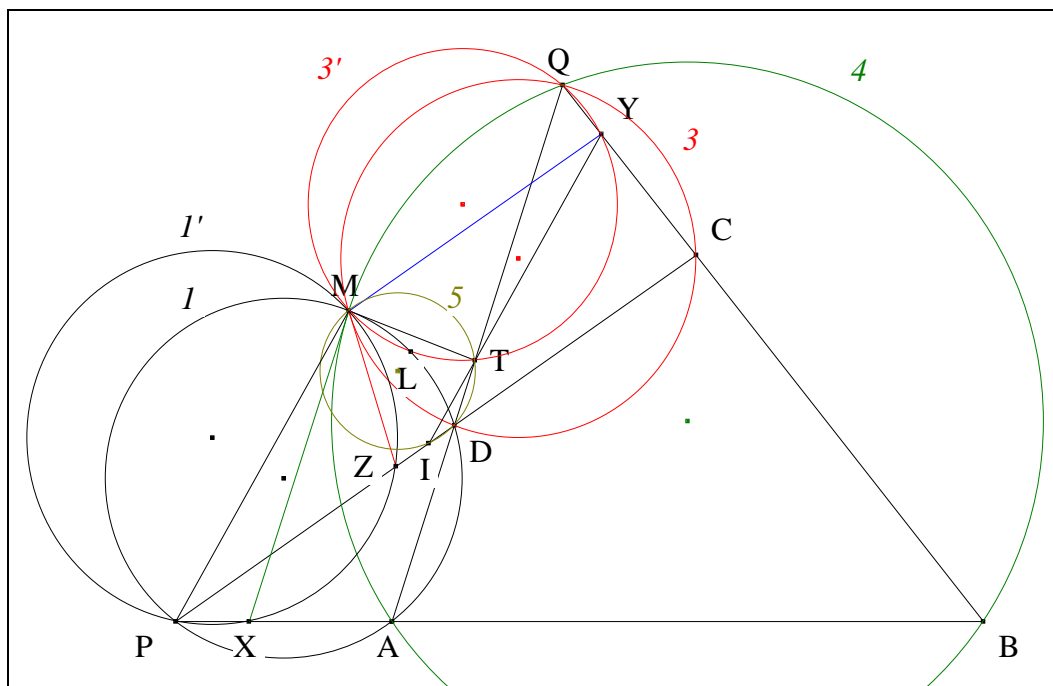


- Notons  $U, V$  les seconds points d'intersection de  $(MY)$  resp. avec  $I, I'$ .
- Une chasse angulaire :  
 d'après "Le triangle de Möbius" (Cf. Annexe 2) appliqué à  $I$  et  $I'$ ,  
 d'après le théorème de la tangente appliqué à  $3$ ,  
 nous avons :  
 d'après le théorème de l'angle inscrit appliqué à  $3'$ ,  
 $(TY)$  étant parallèle à  $(MP)$ ,  
 par transitivité de la relation  $=$ ,
 

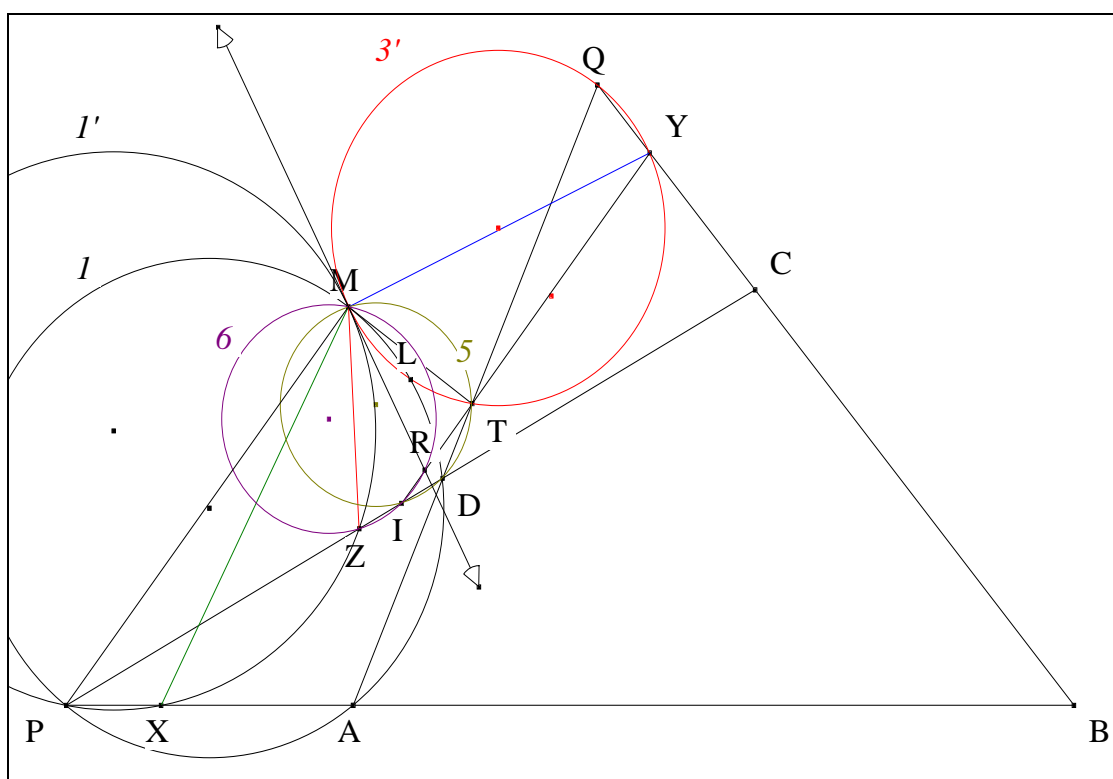
$\angle UPV = \angle XMA$
$\angle XMA = \angle ZMD$ ;
$\angle ZMD = \angle MQD$ ;
$\angle MQD = \angle MQT$ ;
$\angle MQT = \angle MYT$ ;
$\angle MYT = \angle UMP$ ;
$\angle UPV = \angle UMP$ .
- **Conclusion partielle :** d'après le théorème de la tangente appliqué à  $I$ ,  $(PV)$  est tangente à  $I$  en  $P$ .



- Notons  $T_y$  la tangente à  $3'$  en  $Y$   
et  $T_v$  la tangente à  $1'$  en  $V$ .
- Les cercles  $3'$  et  $1$ , les points de base  $M$  et  $L$ , les moniennes  $(YMU)$  et  $(YLP)$ , conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que  $T_y \parallel (UP)$ .
- Les cercles  $1$  et  $1'$ , les points de base  $M$  et  $P$ , les moniennes  $(UMV)$  et  $(PPV)$ , conduisent au théorème 2 de Reim ; il s'en suit que  $(UP) \parallel T_v$  ;  
par transitivité de la relation  $\parallel$ ,  $T_y \parallel T_v$ .
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que  $3'$  et  $1'$  sont sécants.
- Notons  $M'$  le second point d'intersection de  $3'$  et  $1'$ .
- Les cercles  $3'$  et  $1'$ , les points de base  $M$  et  $M'$ , la monienne  $(YMV)$  et la monienne brisée  $(YM'V)$ , les parallèles  $T_y$  et  $T_v$ , conduisent au théorème 8'' de Reim ; en conséquence,  $Y, M'$  et  $V$  sont alignés ;  
il s'en suit que  $M$  et  $M'$  sont confondus ce qui est contradictoire.
- **Conclusion partielle :**  $3'$  et  $1'$  sont tangents en  $M$ .

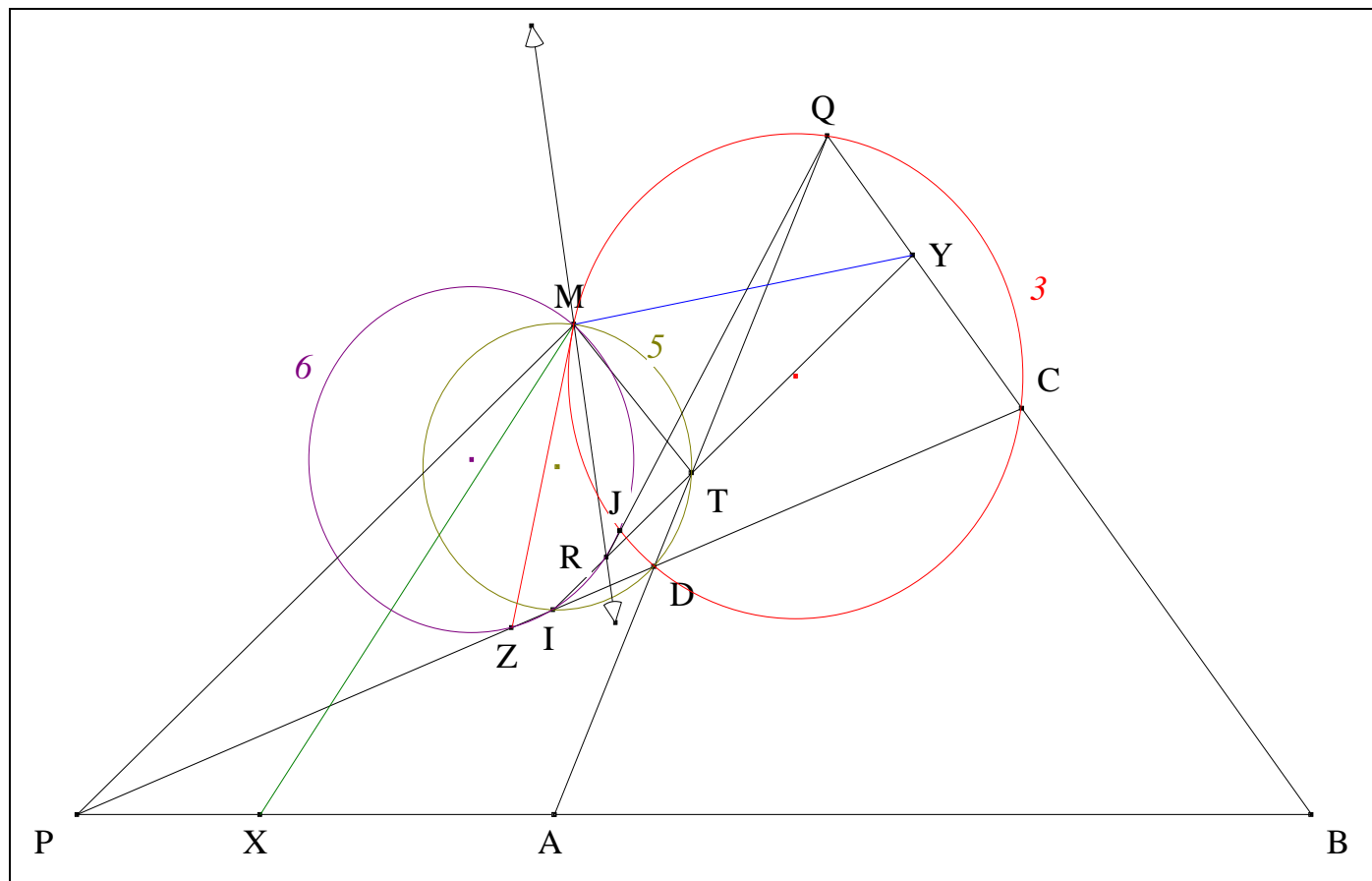


- Notons  $I$  le point d'intersection de  $(TY)$  et  $(CD)$ .
- Le cercle  $I$ , les points de base  $M$  et  $D$ , les moniennes naissantes  $(MMT)$  et  $(PDI)$ , les parallèles  $(MP)$  et  $(TI)$ , conduisent au théorème 3'' de Reim ; en conséquence,  $M, D, T$  et  $I$  sont cocycliques.
- Notons  $5$  ce cercle.



- Notons  $R$  le point d'intersection de  $(TY)$  et de la tangente commune intérieure à  $I'$  et  $3'$ .
- Le cercle  $I'$ , les points de base  $M$  et  $Z$ , les moniennes naissantes  $(MMR)$  et  $(PZI)$ , les parallèles  $(MP)$  et  $(RI)$ , conduisent au théorème 3'' de Reim ; en conséquence,  $M, Z, R$  et  $I$  sont cocycliques.

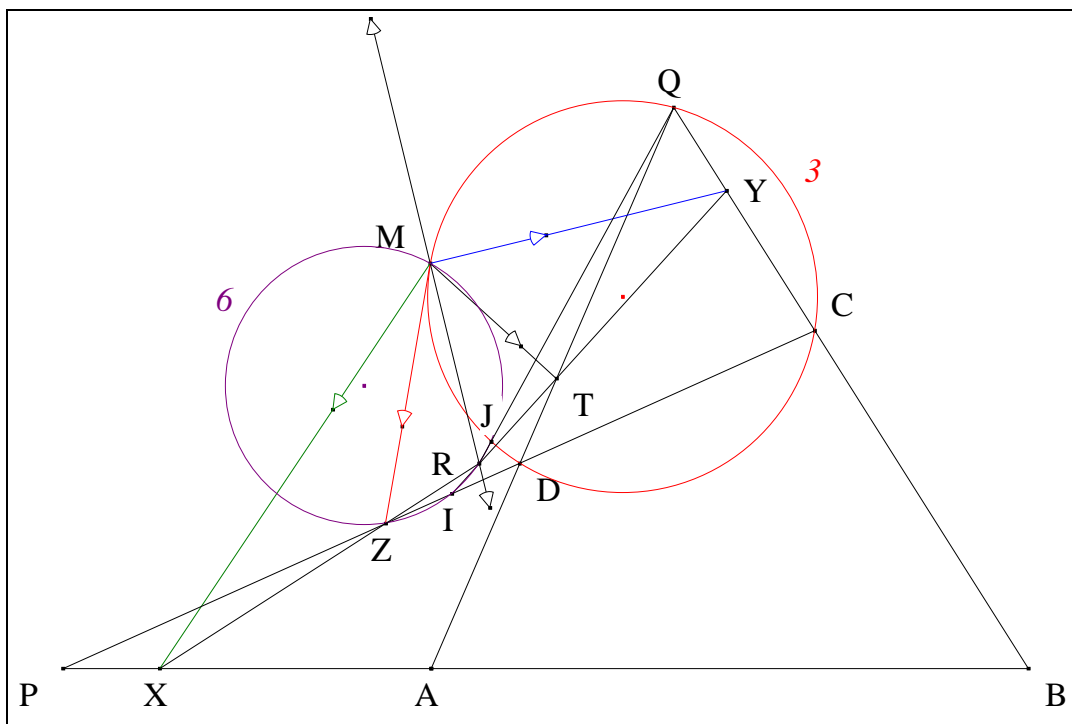
- Notons  $J$  le second point d'intersection de 3 et 6.



- Notons  $J$  le second point d'intersection de 3 et 6.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 3)  
appliqué au triangle  $RQT$  avec  $D$  sur  $(QT)$ ,  $I$  sur  $(TR)$   
ou encore aux cercles 6, 3 et 5 concourant en  $M$ ,

$R$ ,  $J$  et  $Q$  sont alignés.



- Les cercles 6 et 3, les points de base M et J, les moniennes (ZMM) et (RJQ), conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que

$$(ZR) \parallel (MQ).$$

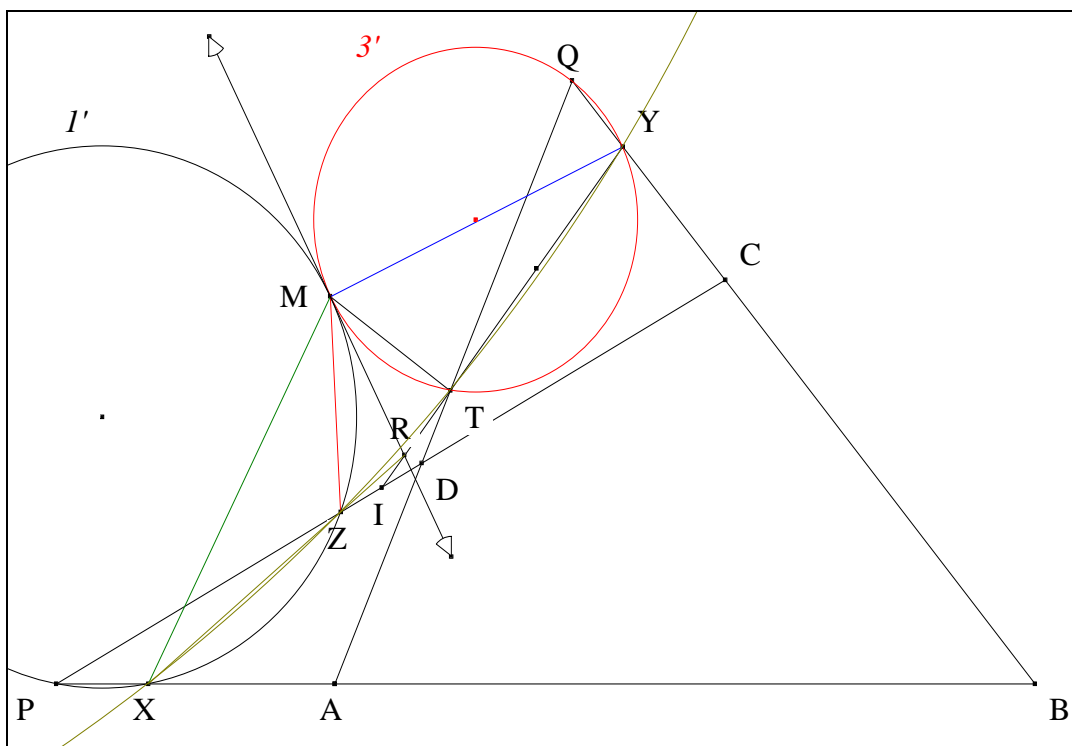
- Nous savons que par transitivité de la relation  $\parallel$ , d'après le postulat d'Euclide, en conséquence,

$$(MQ) \parallel (ZX) ;$$

$$(ZR) \parallel (ZX) ;$$

$$(ZR) = (ZX) ;$$

X, Z et R sont alignés.



- Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 4), X, Y, Z et T sont cocycliques.



**Scolie :** ce cercle est "le cercle de Neuberg-Mineur du quadrangle ABCD".

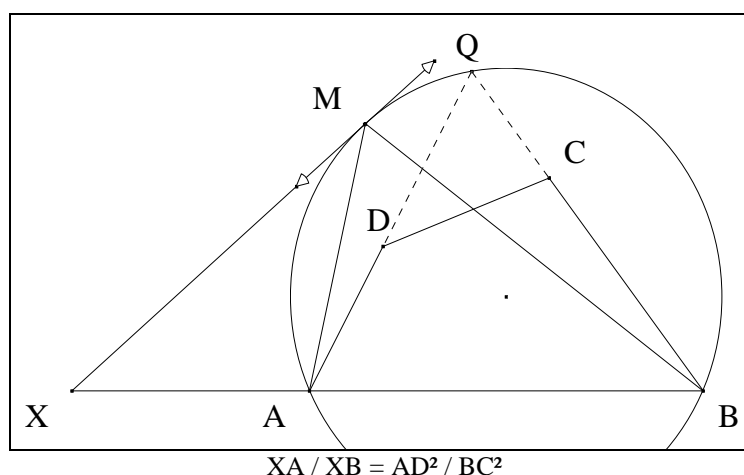
**Note historique :** ce résultat d'un auteur anonyme a été proposé comme question en 1897 dans le *Journal des Mathématiques Élémentaires* de Vuibert :

*les quatre points qui divisent extérieurement les côtés d'un quadrangle dans les rapports des carrés des côtés adjacents sont cocycliques.*

En 1921, Joseph Neuberg<sup>2</sup> le démontre comme conséquence d'un problème plus général. Dix plus tard, Victor Thébault revient sur ce résultat dans la revue *Mathesis* et souhaite "il serait intéressant d'en établir une démonstration directe".

Une réponse métrique en est donnée la même année par Adolphe Mineur<sup>3</sup> qui a recours à des rapports, au théorème de Stewart et aux puissances. Dans sa discussion algébrique, il envisage le cas où le cercle se dégénère en une droite, mais ne fait pas le lien avec le fait que le quadrilatère ABCD est cyclique.

En 2003, l'étudiant Darij Grinberg<sup>4</sup> propose au groupe *Hyacinthos*, cette question qui reste sans réponse. En 2007, Grinberg<sup>5</sup> découvre une preuve synthétique. Dans son article intitulé "The Neuberg-Mineur Circle", il commence par géométriser l'énoncé "métrique" de Neuberg en considérant la tangente au point de Miquel P de ABCD



ensuite, introduit deux cercles tangents et, en fin, démontre le résultat et remarque que lorsque ABCD est cyclique, le cercle se dégénère en une droite qu'il prouve de deux façons différentes.

**Remerciements :** je tiens à remercier tout particulièrement le professeur Francisco Bellot Rosado, rédacteur en chef de la revue espagnole *Revistaoim*, qui m'a fait parvenir l'article de Thébault-Mineur.

<sup>2</sup> Neuberg J., Un problème sur les quadrilatères articulés, *BB* (1921) 583.

<sup>3</sup> Thébault V., Mineur A., Sur une propriété du quadrilatère, Note 37 *Mathesis* 45 (1931) 384-386.

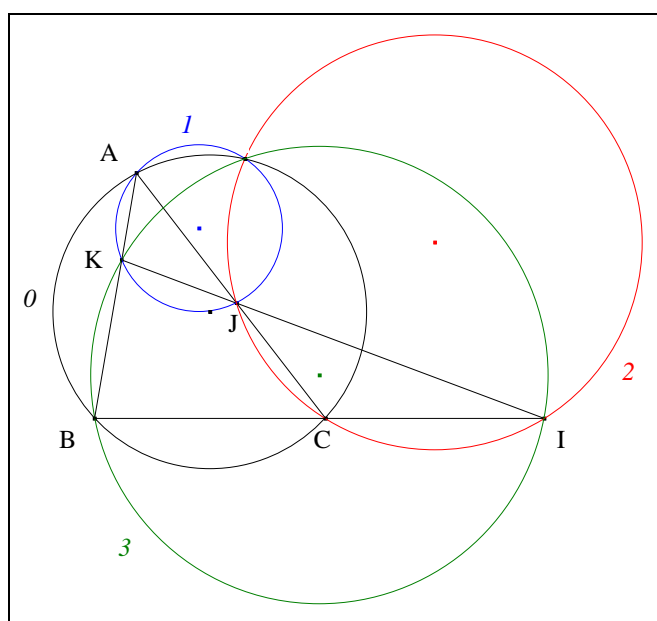
<sup>4</sup> Grinberg D., The Neuberg-Mineur circle, Message *Hyacinthos* # 8510 du 01/11/2003.

<sup>5</sup> Grinberg D., The Neuberg-Mineur circle, *Mathematical Reflections* 3 (2007) ;

[http://reflections.awesomemath.org/2007\\_3/NeubergMineur.pdf/](http://reflections.awesomemath.org/2007_3/NeubergMineur.pdf/)

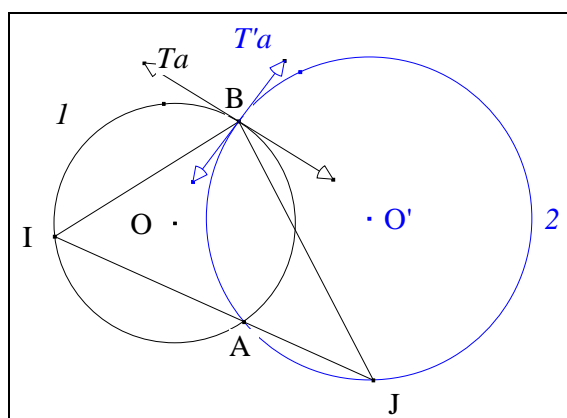
[http://de.geocities.com/darij\\_grinberg/](http://de.geocities.com/darij_grinberg/)

## ANNEXE

1. Le point de Miquel-Wallace<sup>6</sup>

**Traits :** ABC un triangle,  
 I, J, K trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB),  
 O le cercle circonscrit à ABC,  
 et I, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

**Donné :** si, I, J et K sont alignés alors, O, 1, 2 et 3 sont concourants.

2. Un triangle de Möbius<sup>7</sup>

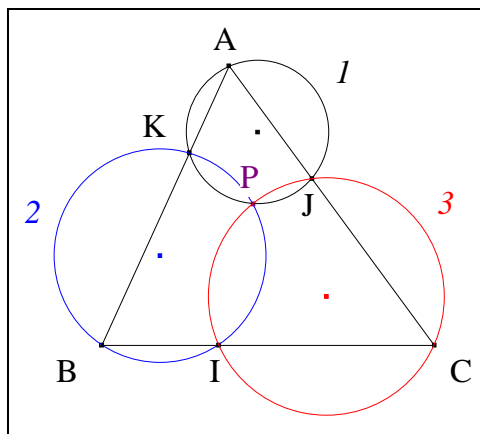
**Traits :** I, 2 deux cercles sécants,  
 O, O' les centres resp. de I, 2,  
 A, B les points d'intersection de I et 2,  
 et (IBJ) une monienne brisée.

**Donné :** (IAJ) est une monienne si, et seulement si,  $\angle IBJ = \angle OBO'$  ( $= \angle Ta T'a$ ) à  $\Pi$  près.

<sup>6</sup> Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.

<sup>7</sup> Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.

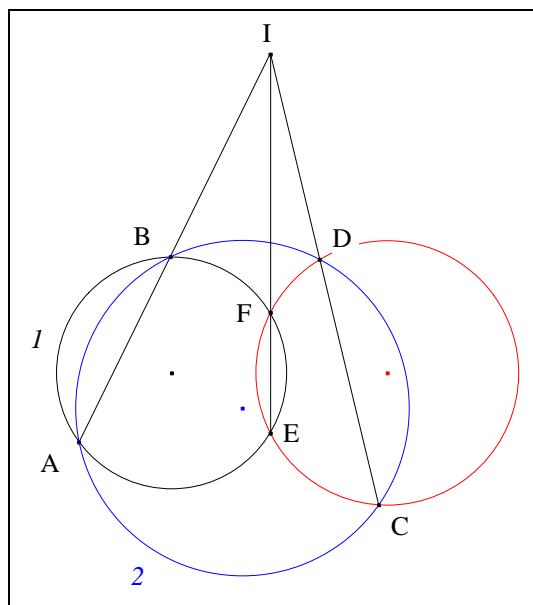
### 3. Le théorème du pivot<sup>8</sup>



**Traits :**  $I, 2, 3$  trois cercles sécants deux à deux,  
 $K, P$  les points d'intersection de  $I$  et  $2$ ,  
 $I$  l'un des points d'intersection de  $2$  et  $3$ ,  
 $J$  l'un des points d'intersection de  $3$  et  $I$ ,  
 $A$  un point de  $I$ ,  
 $B$  le second point d'intersection de la monienne  $(AK)$  avec  $2$   
 et  $C$  le second point d'intersection de la monienne  $(BI)$  avec  $3$ .

**Donné :**  $(CJA)$  est une monienne de  $3$  et  $I$  si, et seulement si,  $3$  passe par  $P$ .

### 4. Le théorème des trois cordes<sup>9</sup>



**Traits :**  $I, 2$  deux cercles sécants,  
 $A, B$  les points d'intersection de  $I$  et  $2$ ,  
 $C, D$  deux points de  $2$ ,  
 $E, F$  deux points de  $I$   
 et  $I$  le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

<sup>8</sup>

Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.

<sup>9</sup>

Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I (1822) 40.

**Donné :** les points C, D, E et F sont cocycliques  
*si, et seulement si,*  
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

**Solie :** le résultat reste inchangé lorsque les cercles sont tangents.