

COLLECTION MATHÉMATIQUE

AUTOUR DE TROIS CERCLES COAXIAUX À POINTS DE BASE

†

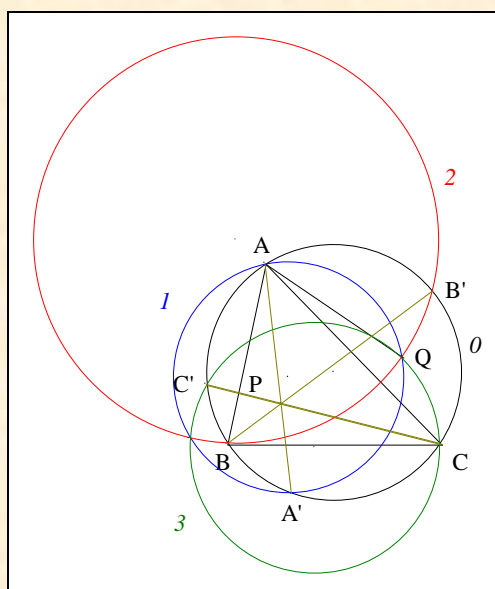
Jean-Louis Ayme ¹

I.

LA TECHNIQUE DE MONGE

DITE

"DES TROIS CORDES"



Résumé.

Cette *Collection* présente différentes techniques permettant de montrer que trois cercles sont coaxiaux à points de base. Chaque technique relate plusieurs situations qui s'appuient sur un résultat suivi d'applications directes, puis d'exemples variés glanés par l'auteur au cours de ses lectures.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

¹

St-Denis, Île de la Réunion (Océan indien, France), le 29/08/2015 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract.

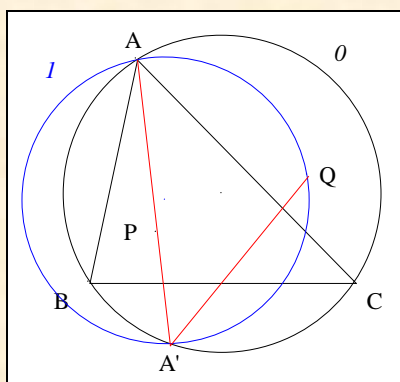
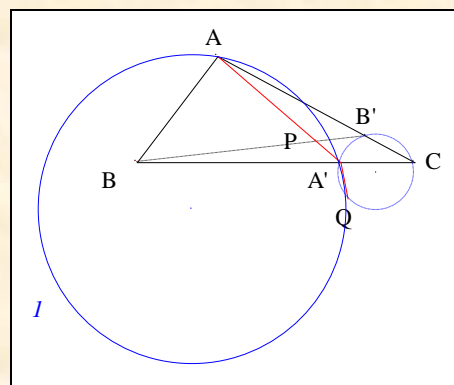
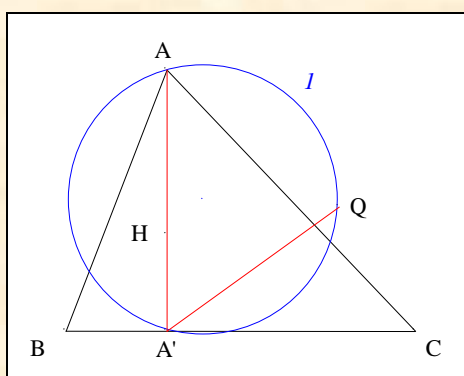
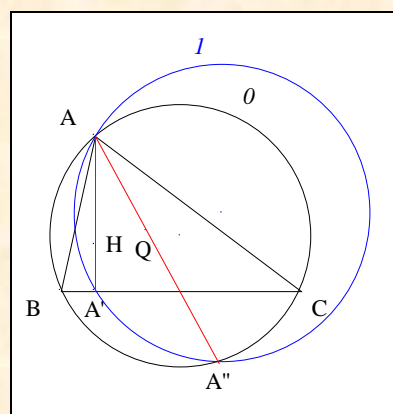
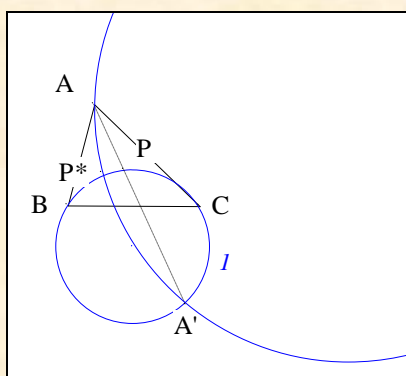
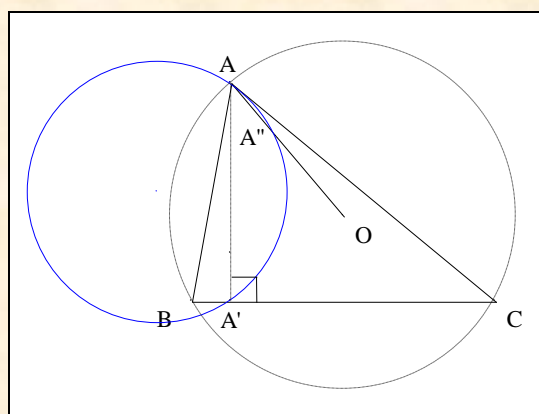
This *Collection* presents various techniques to show that three circles are coaxial with two basis points. Each technique describes several situations that rely on a result followed by direct applications, and varied examples gleaned by the author during his readings.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Sommaire	
Récapitulation en images des quatre situations	4
I. La technique de Monge dite "des trois cordes"	5
1. Présentation	
A. Triangle P-circumcévien et un point Q	6
Le résultat de Quang Tuan Bui ou un point commun au départ	
Applications directes et développements	8
1. Le triangle P-circumcévien et le point O	
2. Le triangle H-circumcévien et le point O	
3. Le triangle I-circumcévien et le point O	
4. Le triangle M-circumcévien et le point I	
Exemples	16
1. Darij Grinberg et le cercle d'Euler	
2. Darij Grinberg et le cercle circonscrit	
3. John Rogers Musselman et le triangle symétrique	
4. Une variante de John Rogers Musselman	
5. Le résultat d'Amir Saeidy	
6. Le résultat d'Amir Saeidy généralisé par l'auteur	
7. Le résultat d'Amir Saeidy généralisé par Telv Cohl	
8. Le résultat de Floor van Lamoën	
9. Le résultat de Lambert suivi d'une courte biographie	
Advanced	36
1. About coaxal circles	
B. Triangle P-cévien et pivot Q	40
Le résultat du <i>Monthly</i> ou le pivot comme point commun au départ	
Applications directes	41
1. L'auteur	
2. Andrés Eduardo Caicedo, préparation des O.I.M. de 1992	
3. Heinz Schröder et le point de Gergonne-Schröder	
4. Heinz Schröder et le triangle tangentiel	
5. Le point de Bevan-Schröder	
Exemple	52
1. L'auteur	
C. Triangle H-cévien et un point Q	54
Le résultat de Ioannis F. Panakis ou un point commun au départ	
Applications directes et développements	57
1. Le triangle orthique et le point O	
2. <i>Mathesis</i> 1888	
Exemples	63
1. Une variante	
2. La généralisation de Tran Quang Hung	
D. Triangles H-cévien et Q-circumcévien	69
Le résultat du Hungary Kürschák 2014 ou aucun point commun au départ	
Application directe	71
1. La conjecture d'Antreas Hatzipolakis	

Sommaire (fin)	
E. Triangle P-cerclecevien et le point P*	73
Le résultat de Ngo Quang Duong ou un point commun au départ	
Exemple	74
1. L'auteur	
F. Triangles H-cévien et O-anticircumcévien	75
ou aucun point commun au départ	
1. Le triangle H-cévien et un rayon	
2. Généralisation	
G. Situation non centrale et le point D	79
Le résultat de Joseph Lam et le point D comme point commun au départ	
H. Appendice	84
1. Un rapport	
2. Une "concourance"	

RÉCAPITULATION
EN
IMAGES
DES SIX SITUATIONS

**A.****B.****C.****D.****E****F**

I. LA TECHNIQUE DE MONGE

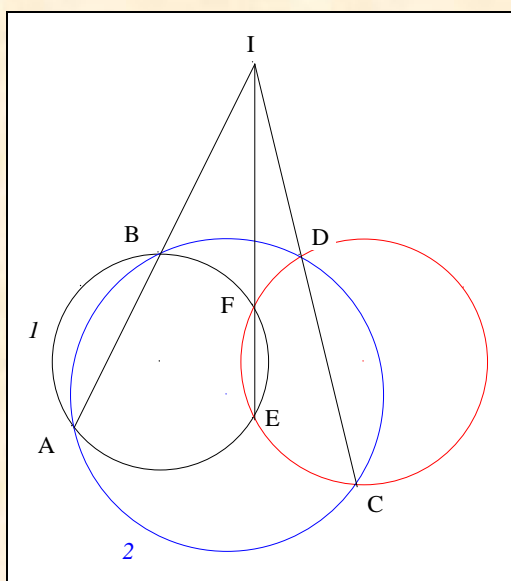
DITE

DES TROIS CORDES

1. Présentation

VISION DOUBLE

Figure :



Traits : $I, 2$ deux cercles sécants,
 A, B les points d'intersection de I et 2 ,
 C, D deux points de 2 ,
 E, F deux points de I
 et I le point d'intersection de (AB) et (CD) .

Donné : C, D, E et F sont cocycliques *si, et seulement si,* (EF) passe par I .

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. ²

² Ayme J.L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

A. TRIANGLE P-CIRCUMCÉVIEN

ET

UN POINT Q

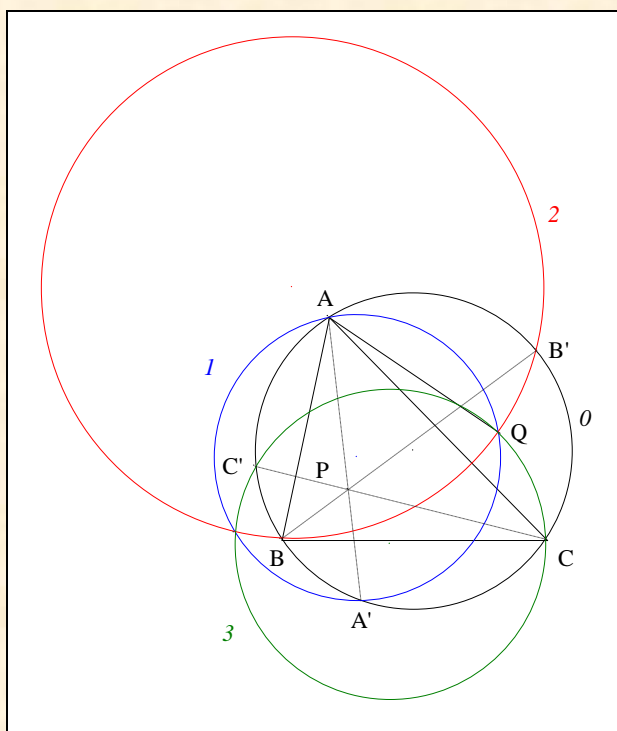
LE RÉSULTAT DE QUANG TUAN BUI

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :

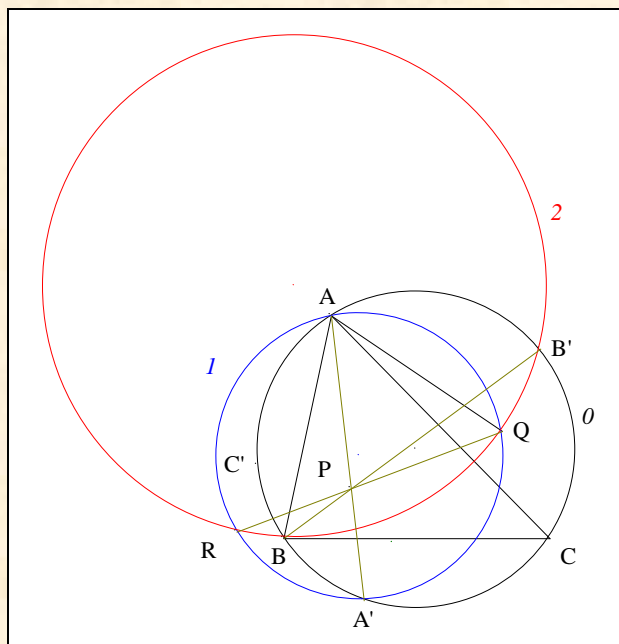


Traits : ABC un triangle,
 0 le cercle circonscrit à ABC ,
 P un point,
 $A'B'C'$ le triangle P-circumcévien de ABC ,
 Q un point
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles $AA'Q, BB'Q, CC'Q$.

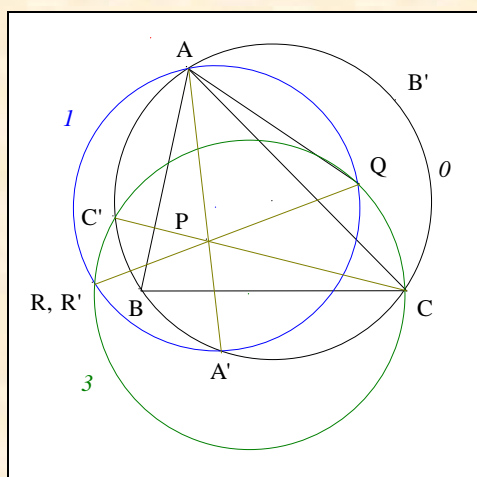
Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux. ³

VISUALISATION

³ Bui Q. T., Funny Conjugate, Message *Hyacinthos* # 13625 du 11/07/2006 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/13625>



- Notons R le second point d'intersection de 1 et 2 .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"⁴ appliqué à 0 , 1 et 2 , (PQ) passe par R .



- Notons R' le second point d'intersection de 1 et 3 .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"⁵ appliqué à 0 , 1 et 3 , en conséquence, (PQ) passe par R' ;
 R et R' sont confondus.
- **Conclusion :** 1 , 2 et 3 sont coaxiaux.

Commentaire : pour montrer que trois cercles concourants en un point sont coaxiaux, il suffit de trouver un point commun appartenant à chaque axe radical de ces cercles pris deux à deux.

⁴ Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
⁵ idem

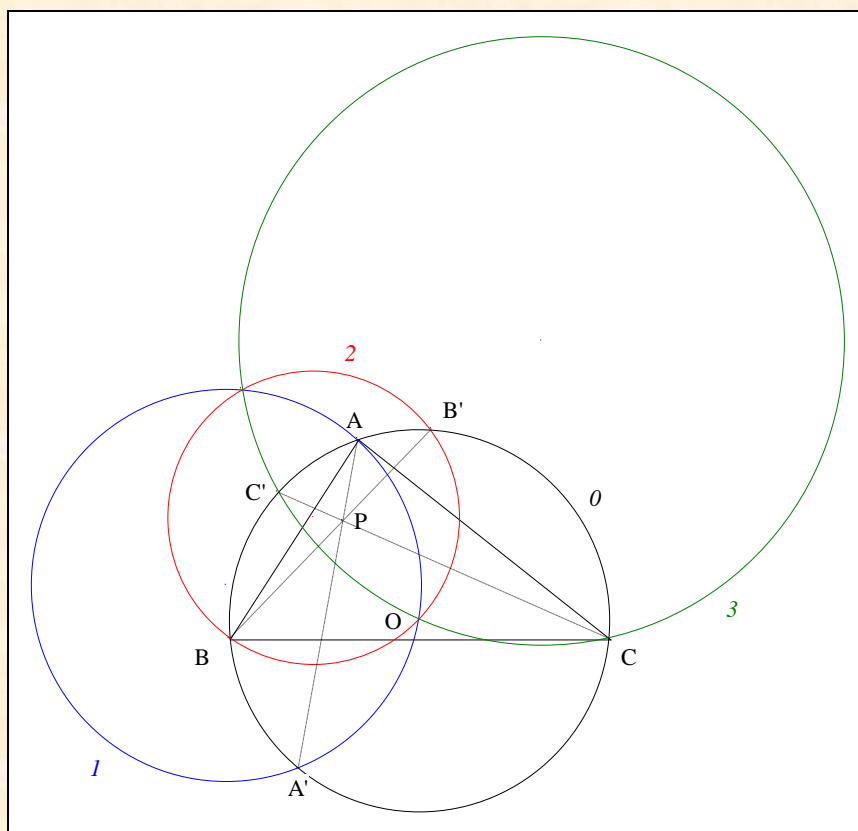
APPLICATIONS

DIRECTES ET DÉVELOPPEMENTS

1. Le triangle P-circumcévien et le point O

VISION

Figure :



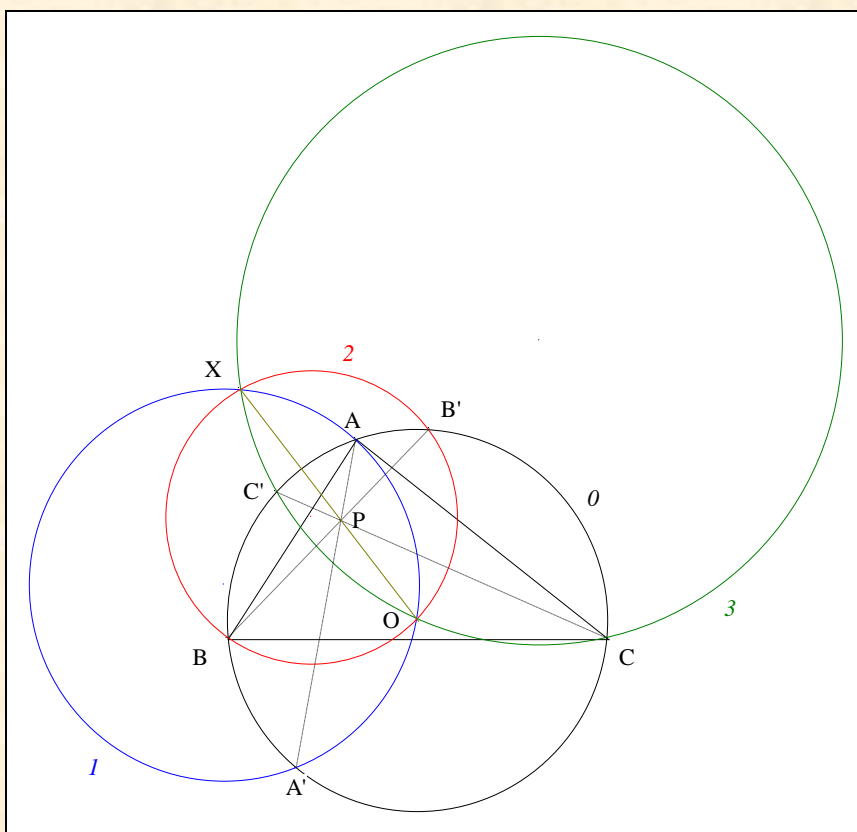
Traits : ABC un triangle,
 O le centre de O ,
 P un point,
 $A'B'C'$ le triangle P-circumcévien de ABC
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. des triangles $AA'O, BB'O, CC'O$.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après I. A. Résultat en particulierisant Q par O ,

$1, 2$ et 3 sont coaxiaux.



- Notons X le second point de base de 1, 2 et 3.

Scolies : (1) X est l'inverse de P relativement à O

(2) Quelques résultats donnés par Darij Grinberg

- * l'inverse du point médian, noté G et répertorié sous X_2 chez ETC, est le "far-out point" X_{23}
- * l'inverse du point de Lemoine, noté K et répertorié sous X_6 chez ETC, est le point de Schoute X_{187}
- * l'inverse du point de Kosnita ⁶ noté K_s et répertorié sous X_{54} chez ETC, est le point de Gibert X_{1157} .

Note historique : la notion de points inverses a été introduite par Jean Victor Poncelet ⁷ en 1822, puis reprise par Adolphe Quetelet ⁸ en 1827, Jacob Steiner ⁹ et Ludwig Immanuel Magnus ¹⁰ en 1832.

⁶ Ayme J.-L., Le point de Kosnitsa, G.G.G. vol. 1 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

⁷ Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives* (1822)

⁸ Quetelet A., *Mémoires Bruxelles* 4 (1827)

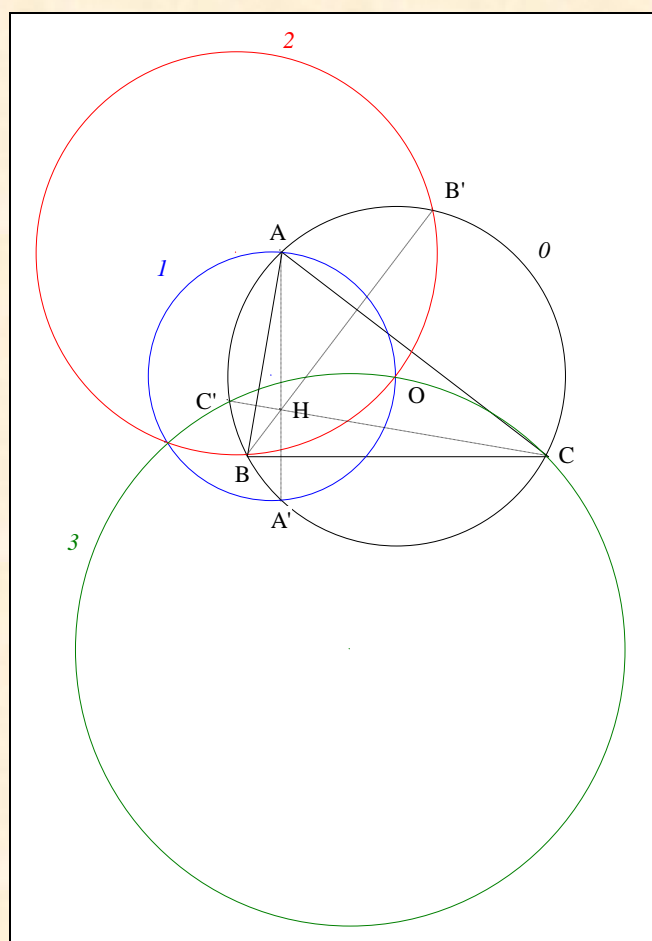
⁹ Steiner J., Article 355, *Les constructions géométriques* (1832)

¹⁰ Magnus L., *Journal de Crelle* 8 (1832) 51 ; http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/toc/?IDDOC=238618

2. Le triangle H-circumcévien et le point O

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	θ	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de θ ,
	H	l'orthocentre de ABC,
	$A'B'C'$	le triangle circum-orthique ¹¹ de ABC
et	1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles $AA'O$, $BB'O$, $CC'O$.
Donné :	1, 2 et 3 sont coaxiaux.	

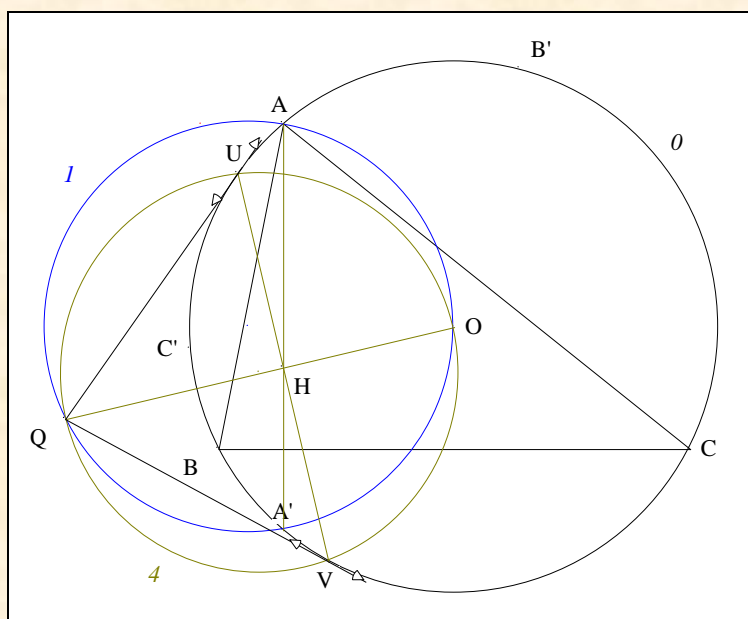
VISUALISATION

- Conclusion :** d'après I. A. Résultat
en particulierisant P par H et Q par O,

$1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

¹¹ H-circumcévien

Scolies : (1) nature géométrique de Q



- Notons 4 le cercle de diamètre $[OQ]$
et U, V les points d'intersection de O et 4 .
- Nous avons : $(UV) \perp (OQ)$.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" ¹² appliqué à O, I et 4 , (UV) passe par H .
- Les tangentes à O resp. en U, V passent par Q .
- **Conclusion :** Q est l'inverse de H relativement à O .
- (2) H est répertorié sous X_4 et Q sous X_{186} chez ETC ¹³
- (3) Q est sur la polaire de H relativement à O .

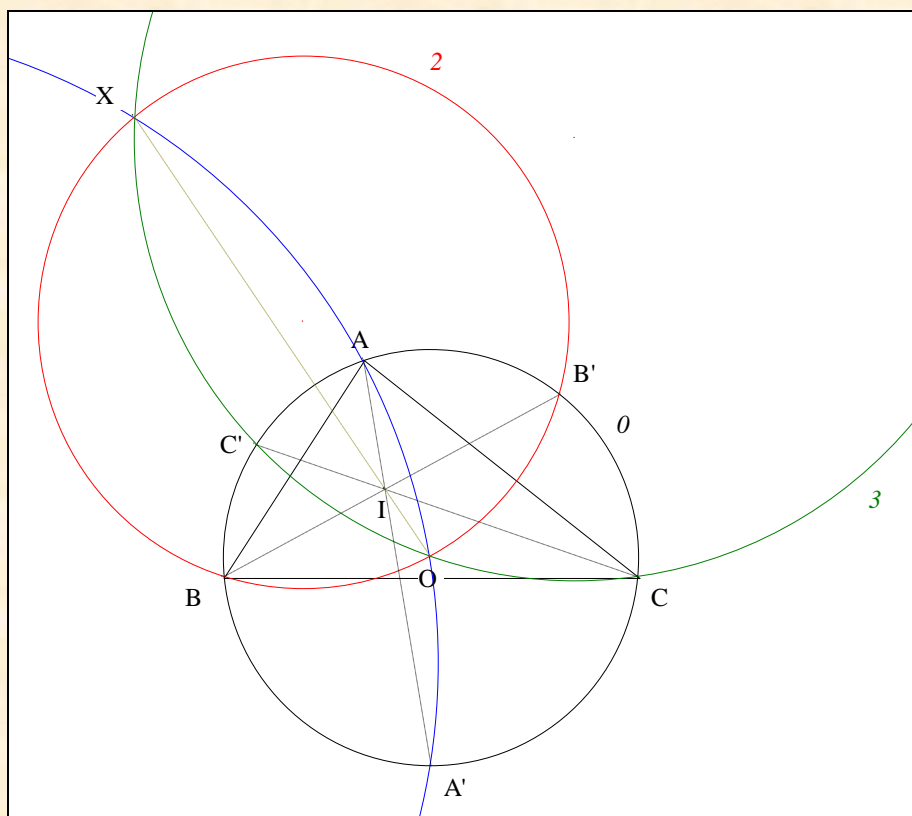
Note historique : ce résultat de Roland Stärk obtenu en 1993 par ordinateur montre que Q est le point d'intersection de la droite d'Euler de ABC avec la polaire de H relativement au cercle circonscrit.
Ce résultat concernant la droite d'Euler a été auparavant obtenu d'une façon non claire par Karl Mütz ¹⁴ en 1992.

¹² idem
¹³ Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
¹⁴ Mütz K., Die Triplex-Punkte und der Dreifachwinkel-Punkt eines Dreiecks, *Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht* (1992) 220-229

3. Le triangle I-circumcévien et le point O

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	θ	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de θ ,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle I-circumcévien de ABC
et	1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'O, BB'O, CC'O.

Donné : 1, 2 et 3 sont coaxiaux. ¹⁷

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après I. A. Résultat en particulierisant P par I et Q par O, 1, 2 et 3 sont coaxiaux.
- Notons X ce point de concours.

Scolie : X est l'inverse de I relativement à θ et est répertorié sous X_{36} chez ETC.

¹⁷

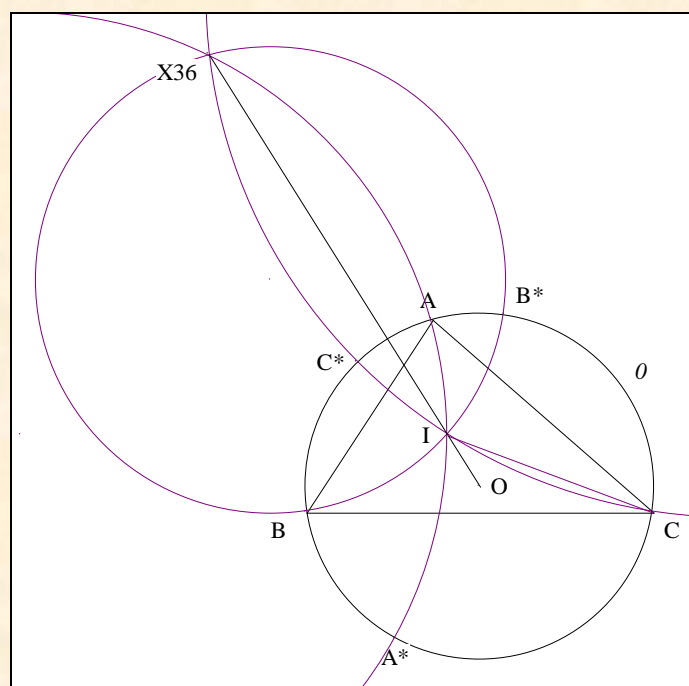
Salazar J. C., Coaxial circles, AoPS du 12/11/2006 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=118916&p=674715>

Note historique : la précision X_{36} a été donnée par Jan Vonk.

4. Le triangle M-circumcévien¹⁸ et le point I

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
I	le centre de ABC,
O	le cercle circonscrit à ABC,
A^*, B^*, C^*	les A, B, C-point de Longchamps de ABC,
1	le cercle passant par A, I, A^* ,
2	le cercle passant par B, I, B^* ,
et 3	le cercle passant par C, I, C^* .

Donné : 1, 2, 3 sont coaxiaux¹⁹.

Indication de solution :

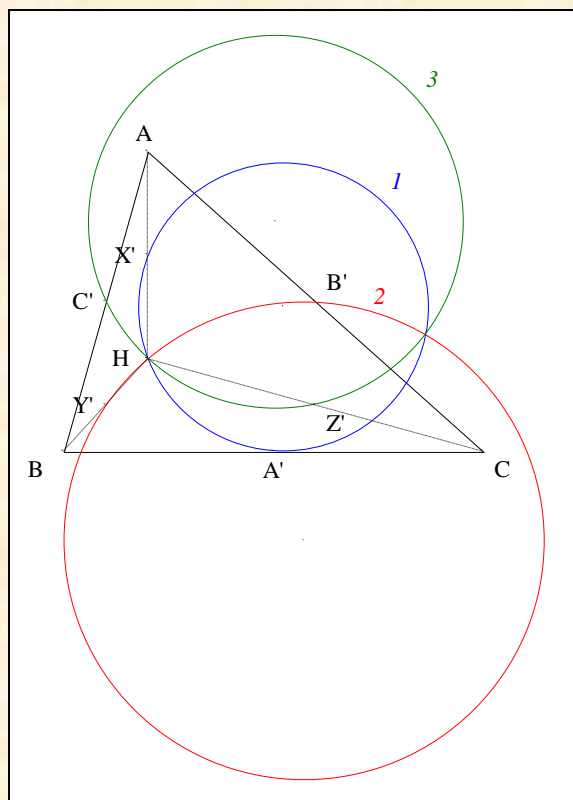
¹⁸ M est le centre externe d'homothétie entre les cercles inscrit et circonscrit du triangle
¹⁹ Ayme J.-L., A conjecture with mixtilinear incircles, *Mathlinks* (14/11/2008) ;
<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=239593> ;
 Ayme J.-L., Message *Hyacinthos* # 16960 du 14/11/2008 ; <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/16960>

EXEMPLES

1. Darij Grinberg et le cercle d'Euler

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 H l'orthocentre de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC ,
 $X'Y'Z'$ le triangle d'Euler ²⁰ de ABC
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles $A'X'H$, $B'Y'H$, $C'Z'H$.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux. ²¹

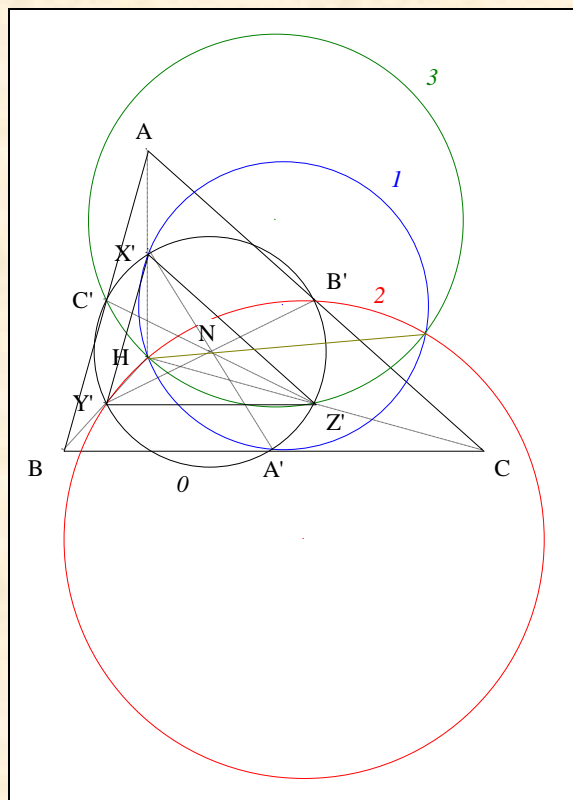
VISUALISATION

²⁰

X', Y', Z' sont les milieux resp. de $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$

²¹

Grinberg D., Some newer results from *MathLinks*, Message # 9985 *Hyacinthos* du 04/07/2004 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/9985>



- Notons O le cercle d'Euler de ABC ,
et N le centre de O .

- **Scolies :** (1) O passe par les points A', B', C', X', Y' et Z'
(2) d'après Poncelet "Le cercle des neuf points",
($A'X'$), ($B'Y'$) et ($C'Z'$) sont concourantes en N .

- **Conclusion :** d'après **I. A. Résultat**
en considérant $A'B'C'$ et en particulierisant P par N et Q par H , $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

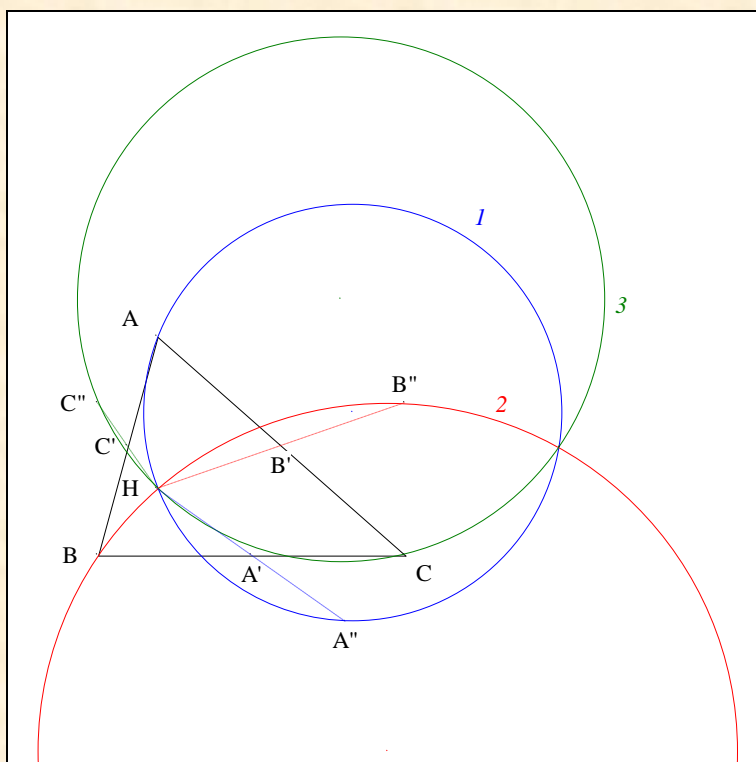
Scolie : l'axe radical de ces trois cercles est la droite d'Euler (HN) de ABC .

Commentaire : la preuve de Darij Grinberg a recours aux puissances.

2. Darij Grinberg et le cercle circonscrit

VISION

Figure :

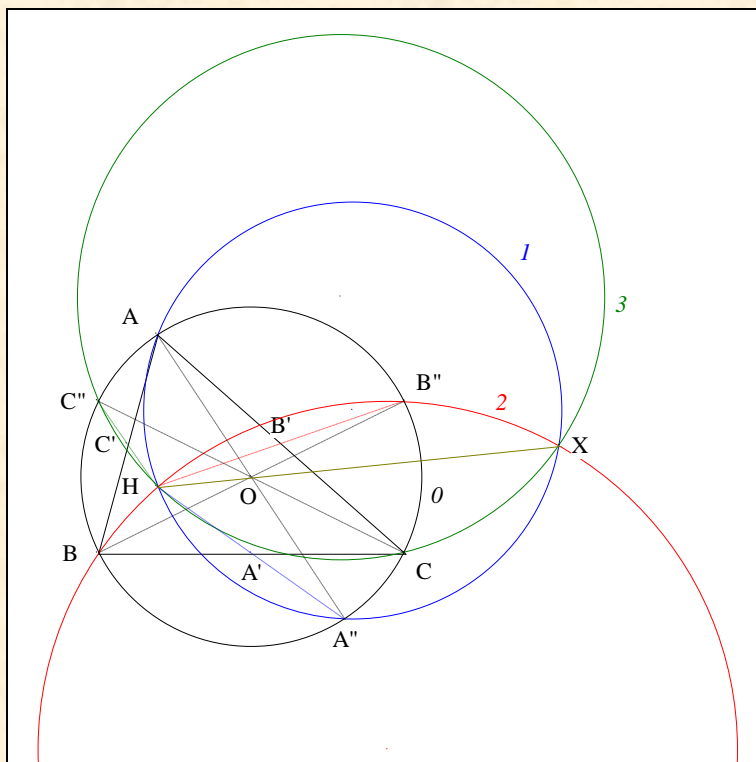


Traits : ABC un triangle,
 H l'orthocentre de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC ,
 A'', B'', C'' les symétriques de H resp. par rapport à A', B', C'
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles $AA''H, BB''H, CC''H$.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.²²

VISUALISATION

²² Grinberg D., Some newer results from *MathLinks*, Schroeder 7, Message # 9985 *Hyacinthos* du 04/07/2004 ; <https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/9985>

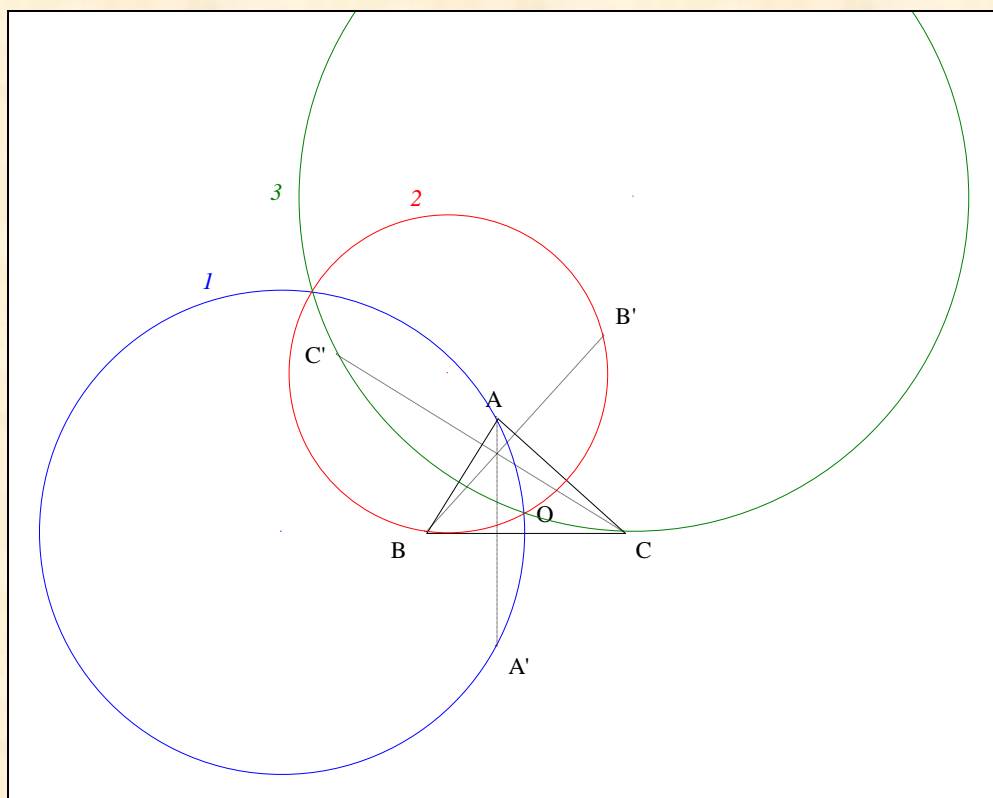


- Notons θ le cercle circonscrit de ABC
et O le centre de θ .
- D'après Carnot "Symétrie de l'orthocentre par rapport à un milieu",
 - (1) θ passe par A'', B'', C''
 - (2) $(A'A'')$, $(B'B'')$ et $(C'C'')$ passent par O .
- **Conclusion :** d'après **I. A. Résultat**
en considérant ABC et en particulierisant P par O et Q par H, $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.
- Notons X ce second point de concours.
- Scolies :**
 - (1) l'axe radical de ces trois cercles est la droite d'Euler (HO) de ABC
 - (2) X est le symétrique de l'inverse de H par rapport à O .

3. John Rogers Musselman et le triangle symétrique

VISION

Figure :

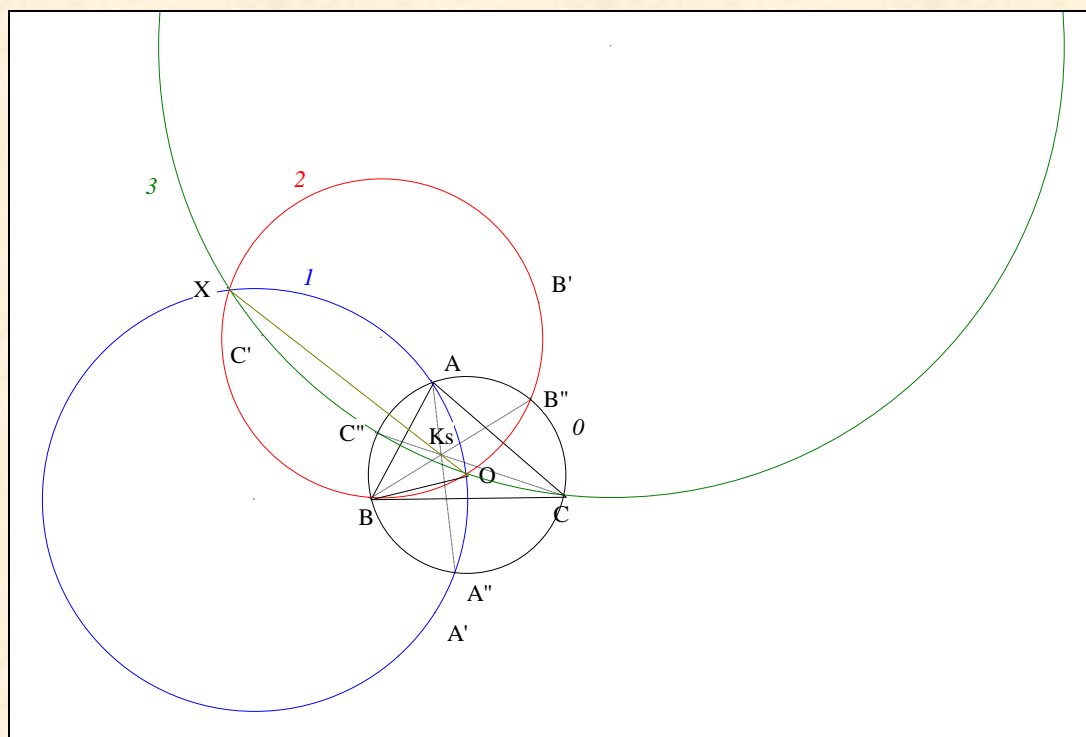


Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle symétrique de ABC
et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles AOA', BOB', COC'.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.²³

VISUALISATION

²³ Musselman J. R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **46** (1939) 601
Signé J. N. (Joseph Neuberg ?), *Mathesis* (1924) 331



- Notons O le cercle circonscrit à ABC ,
et K_s le point de Kosnitza
le triangle K_s -circumcévien de ABC .
- D'après "Le point de Kosnitza" ²⁴,
 A'' est sur 1
 B'' est sur 2
 C'' est sur 3 .
- **Conclusion :** d'après **I. A. Résultat**
en considérant ABC et en particulierisant P par K_s et Q par O , $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.
- Notons X ce second point de concours.

Note historique : ce résultat de l'américain John Rogers Musselman a été démontré et généralisé par le belge René Goormaghtigh ²⁵ ; sa preuve a recours aux nombres complexes. Notons que cette généralisation était connue de Joseph Neuberg ²⁶. Rappelons que la preuve proposée par Darij Grinberg a recours à l'inversion.

- Scolies :**
- (1) le second point de base répertorié sous X_{1157} chez ETC a été attribué à Bernard Gibert. Ce point est l'inverse de K_s par rapport à O
 - (2) (BC) , (CA) , (AB) sont des axes de symétrie resp. de $1, 2, 3$
 - (3) les cercles circonscrits resp. aux triangle $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ passe par X ²⁷
 - (4) le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est sur (OX) ²⁸ ; c'est le symétrique de O par rapport à K_s .

²⁴ Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. **1**, p. 11-13 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
²⁵ Goormaghtigh R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **48** (1941) 281-283
²⁶ Neuberg J., Mémoire sur le Tétrèdre (1884)
²⁷ Ayme J.-L., Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. **23** ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
²⁸ Ayme J.-L., Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. **23** p. 13-14 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Une courte biographie de John Rogers Musselman ²⁹

Fils de J. Elmer Musselman, John Rogers est né le premier décembre 1890 à Gettysburg (Pennsylvanie, États-Unis).

Après des études au lycée de Gettysburg jusqu'en 1910, il y enseigne pendant deux années avant d'entrer à l'université Johns Hopkins. Étudiant en mathématiques, il prend comme matières secondaires la Physique et l'astronomie. En juin 1916, il soutient sa thèse de doctorat en Mathématiques.

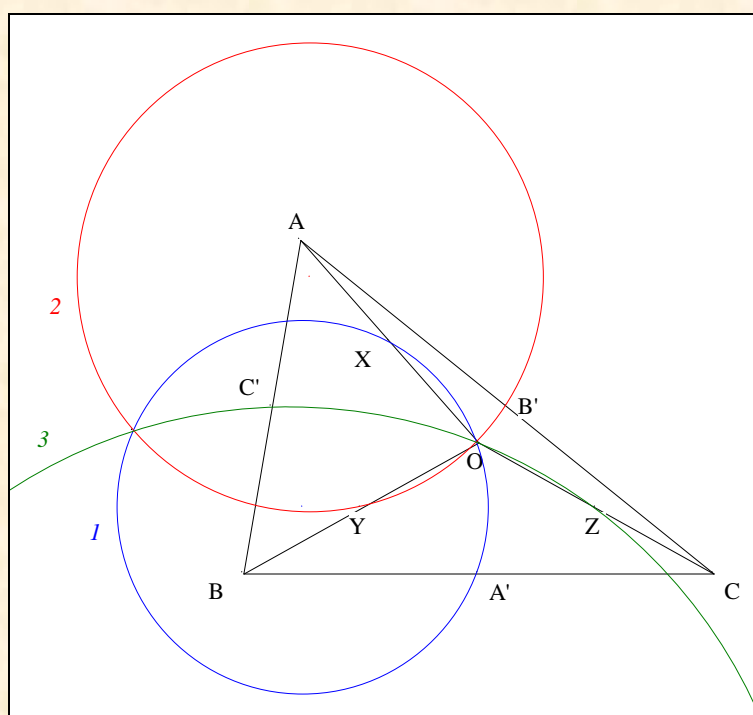
Il a été professeur de la Western Reserve University de Cleveland (Ohio, États-Unis) comme l'a relaté *The Star and Sentinel*, de Gettysburg le 28 mars 1936 qui signalait ces quelques jours passés chez ses parents résidant à Baltimore street.

L'auteur remercie tout particulièrement Bernard Gibert et Francisco Javier Garcia Capitan pour ces informations.

4. Une variante de John Rogers Musselman

VISION

Figure :



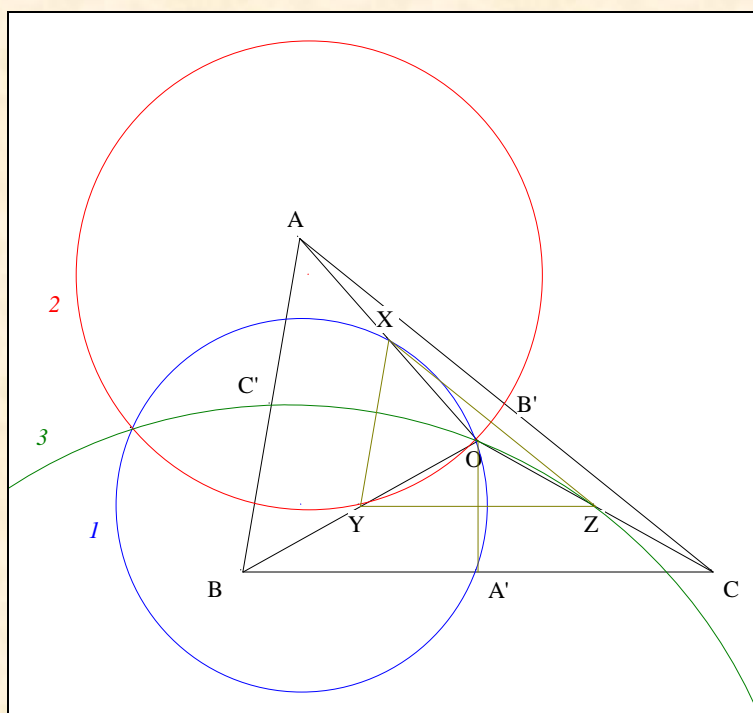
Traits :	ABC	un triangle,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de O ,
	$A'B'C'$	le triangle médian de ABC,
	X, Y, Z	les milieux resp. de [AO], [BO], [CO]
et	1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles $A'XO$, $B'YO$, $C'ZO$.

Donné : 1, 2 et 3 sont coaxiaux. ³⁰

²⁹ <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015080020699;view=1up;seq=25>

³⁰ Coaxal circles, AoPS du 24/02/2011 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=393441>

VISUALISATION

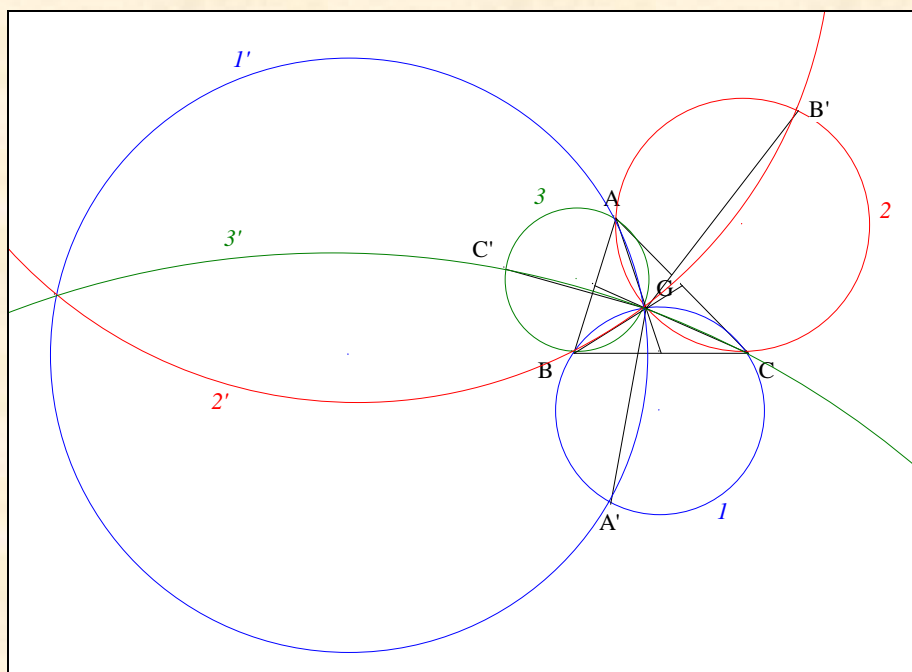


- **Scolie :** A', B', C' sont les symétriques de O respectivement par rapport à (YZ) , (ZX) , (XY) .
- **Conclusion :** d'après **I. A. Exemple 3.**, $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

5. Le résultat d'Amir Saeidy

VISION

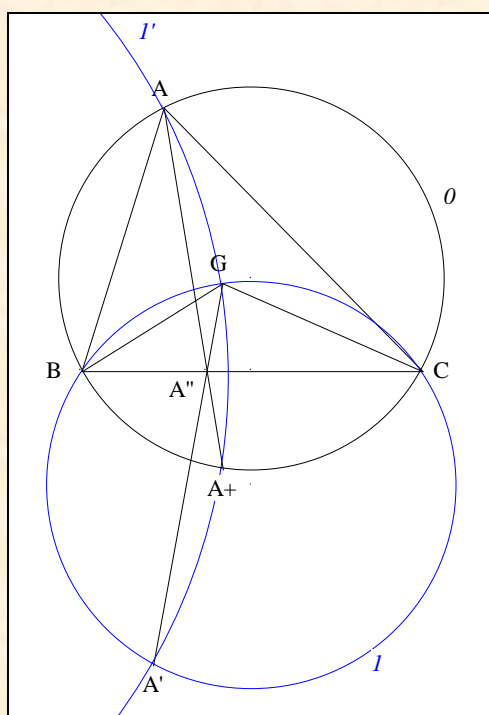
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 G le point médian de ABC ,
 $I, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles GBC, GCA, GAB ,
 A', B', C' les seconds points d'intersection des G -symédianes de GBC, GCA, GAB
 resp. avec $I, 2, 3$
 et $I', 2', 3'$ les cercles circonscrits resp. aux triangles AGA', BGB', CGC' .

Donné : $I', 2'$ et $3'$ sont coaxiaux.³¹

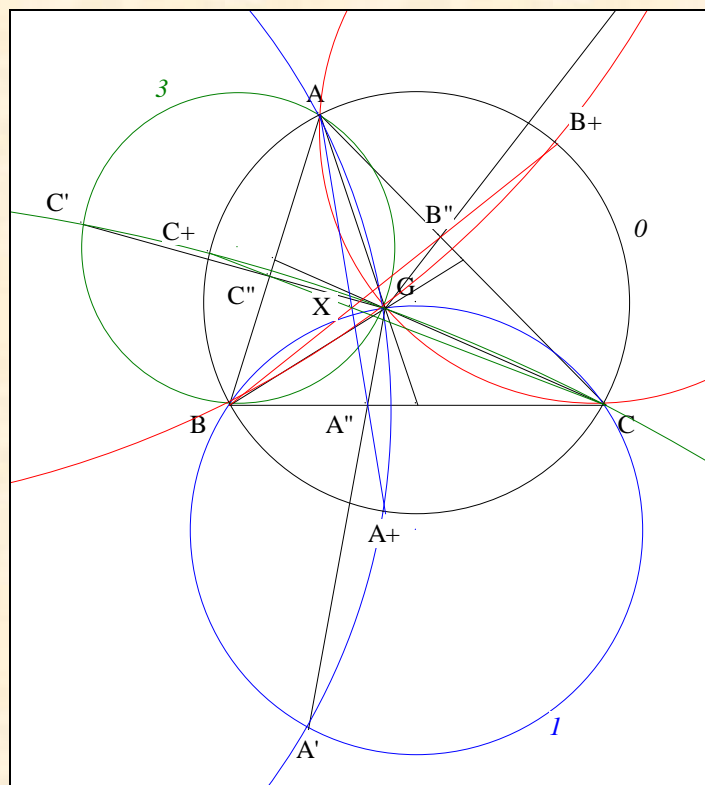
VISUALISATION



³¹

Amir Saeidy, Nice : Coaxal circles, AoPS du 27/09/2006 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=112334>

- Notons O le cercle circonscrit à ABC ,
 A'' le pied de la G -symédiane de GBC
et A^+ le second point d'intersection de I et I' .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes", (AA^+) passe par A'' .



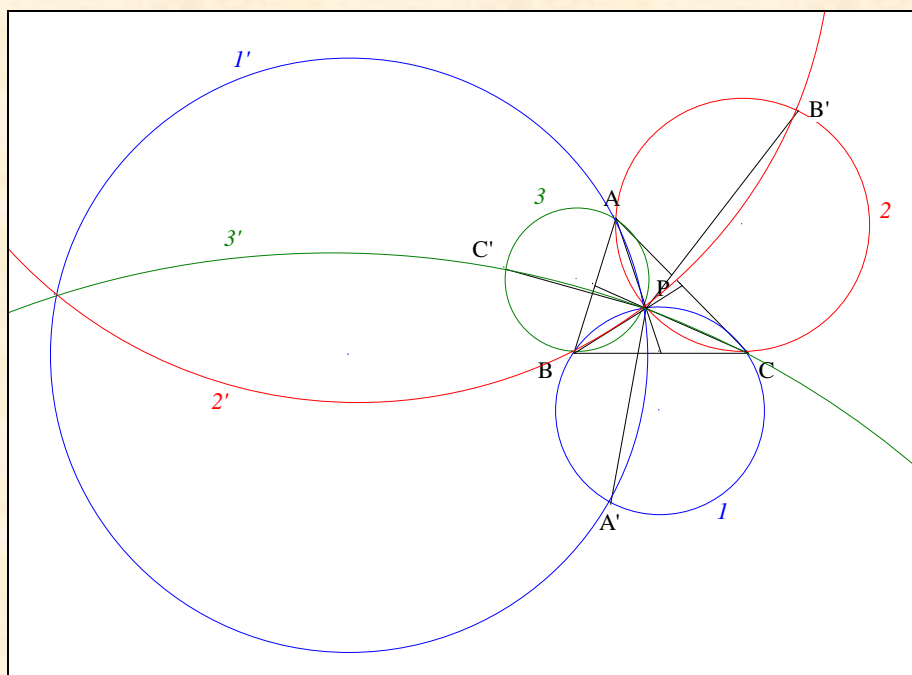
- Notons B'', C'' les pieds des G -symédiane de GCA, GAB
et B^+, C^+ les seconds points d'intersection de I et $I', 2$ et $2', 3$ et $3'$.
- Mutatis mutandis, nous montrons que, (BB^+) passe par B''
 (CC^+) passe par C'' .
- D'après Steiner "Symédiane et côtés d'un triangle"³²
suivi du "théorème de Ceva", $(AA^+), (BB^+)$ et (CC^+) sont concourantes.
- Notons X ce point de concours.
- **Conclusion :** d'après **I. A. Résultat**
en considérant ABC et en particulierisant P par X et Q par G , $I', 2'$ et $3'$ sont coaxiaux.

6. Le résultat d'Amir Saeidy généralisé par l'auteur

VISION

Figure :

³² $A''B/A''C = (GB/GC)^2$



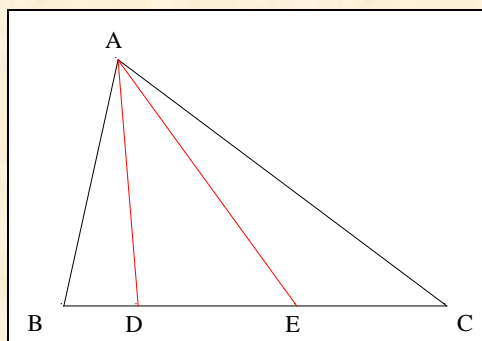
Traits : ABC un triangle,
 P un point,
 $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB ,
 A', B', C' les seconds points d'intersection des P-isogonales de $(PA), (PB), (PC)$
 relativement à PBC, PCA, PAB resp. avec $1, 2, 3$
et $1', 2', 3'$ les cercles circonscrits resp. aux triangles APA', BPB', CPC' .

Donné : $1', 2'$ et $3'$ sont coaxiaux.³³

VISUALISATION

- **Conclusion :** mutatis mutandis à partir de **A. 5**. Le résultat d'Amir Saeidy avec le théorème généralisé de Steiner³⁴, nous montrerions que $1', 2'$ et $3'$ sont coaxiaux.

Scolie : rappelons le théorème généralisé de Steiner



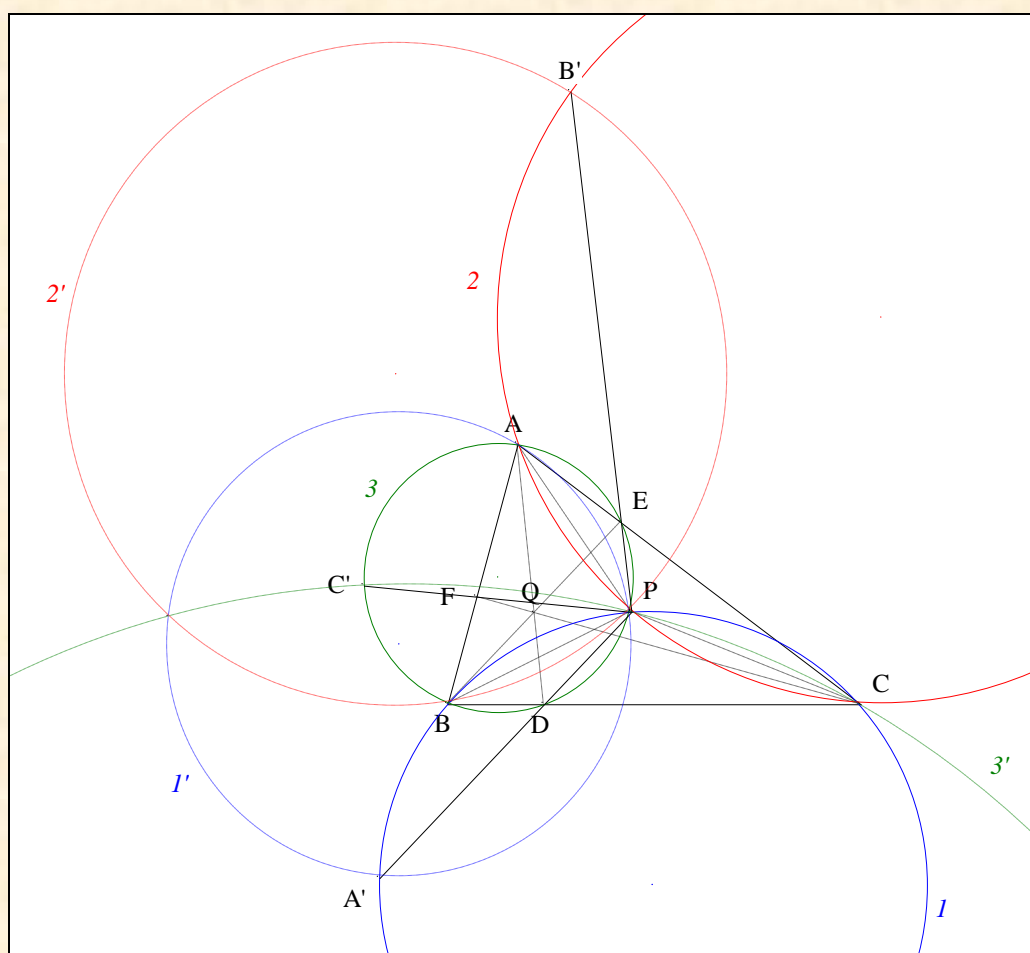
(AD) et (AE) étant deux A-isogonales de ABC , $(BD/DC).(BE/EC) = (AB/AC)^2$.

³³ Ayme J.-L., Coaxial circles again, AoPS du 07/12/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616641>
³⁴ <http://www.artofproblemsolving.com/blog/36978>

7. Le résultat d'Amir Saeidy généralisé par Telv Cohl

VISION

Figure :

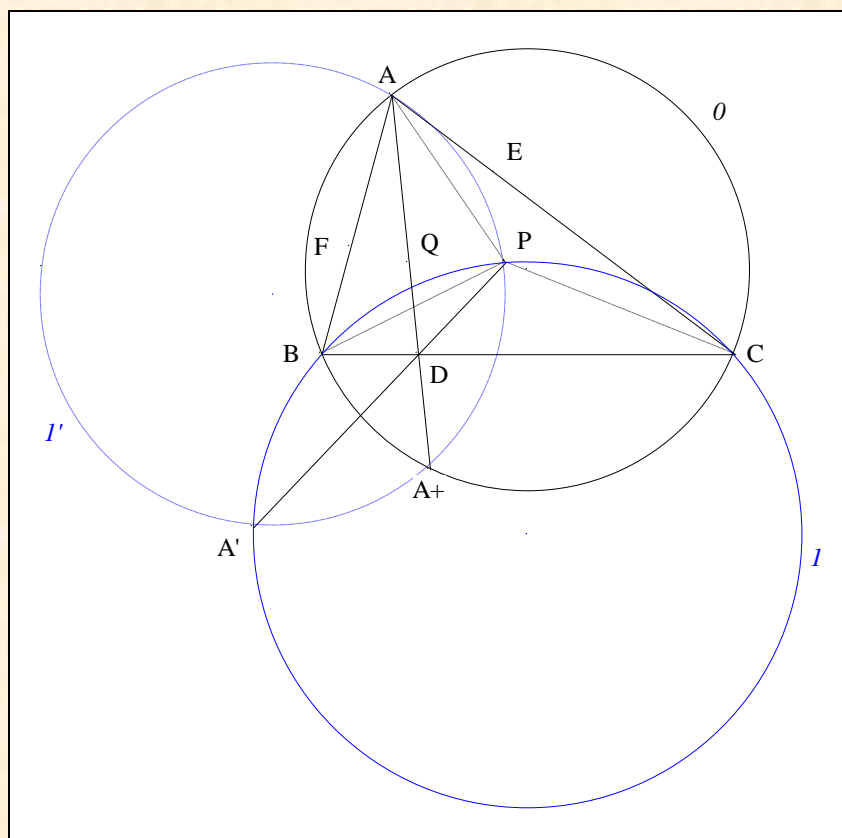


Traits : ABC un triangle,
 P, Q deux points,
 DEF le triangle Q-cévien de ABC ,
 $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB ,
 A', B', C' les seconds points d'intersection de $(PD), (PE), (PF)$ resp. avec $1, 2, 3$
et $1', 2', 3'$ les cercles circonscrits resp. aux triangles APA', BPB', CPC' .

Donné : $1', 2'$ et $3'$ sont coaxiaux. ³⁵

VISUALISATION

³⁵ Telv Cohl, Coaxial circles again, AoPS du 07/12/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616641>

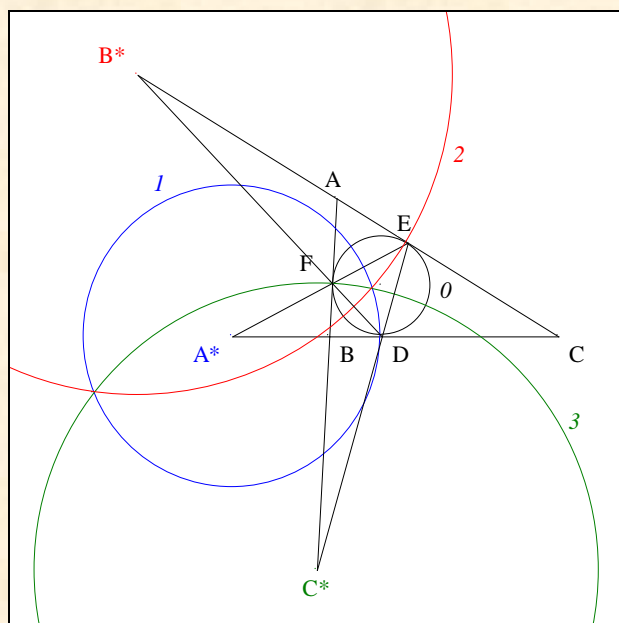


- Notons O le cercle circonscrit à ABC ,
et $A+$ le second point d'intersection de I et I' .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes", $(AA+)$ passe par D .
- **Conclusion :** mutatis mutandis à partir de **A. 5**. Le résultat d'Amir Saeidy, nous montrerions que $I', 2'$ et $3'$ sont coaxiaux.

8. Le résultat de Floor van Lamoën

VISION

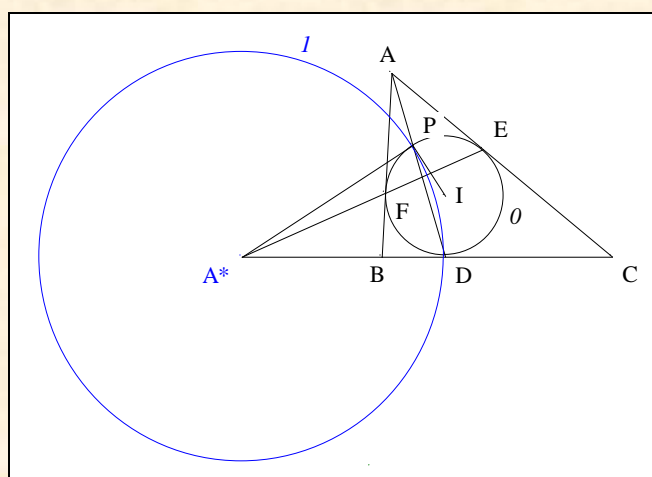
Figure :



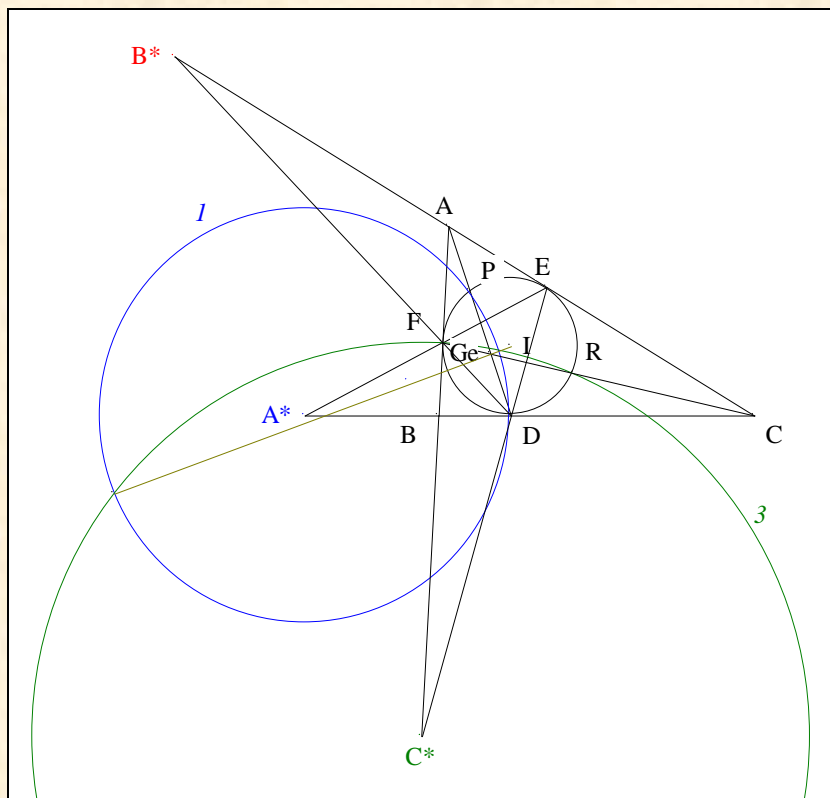
Traits : ABC un triangle,
 O le cercle inscrit à ABC,
 DEF le triangle de contact de ABC,
 A^*, B^*, C^* les A, B, C-points de Nobbs de ABC
 et $1, 2, 3$ les cercles de centre A^*, B^*, C^* passant resp. par D, E, F.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

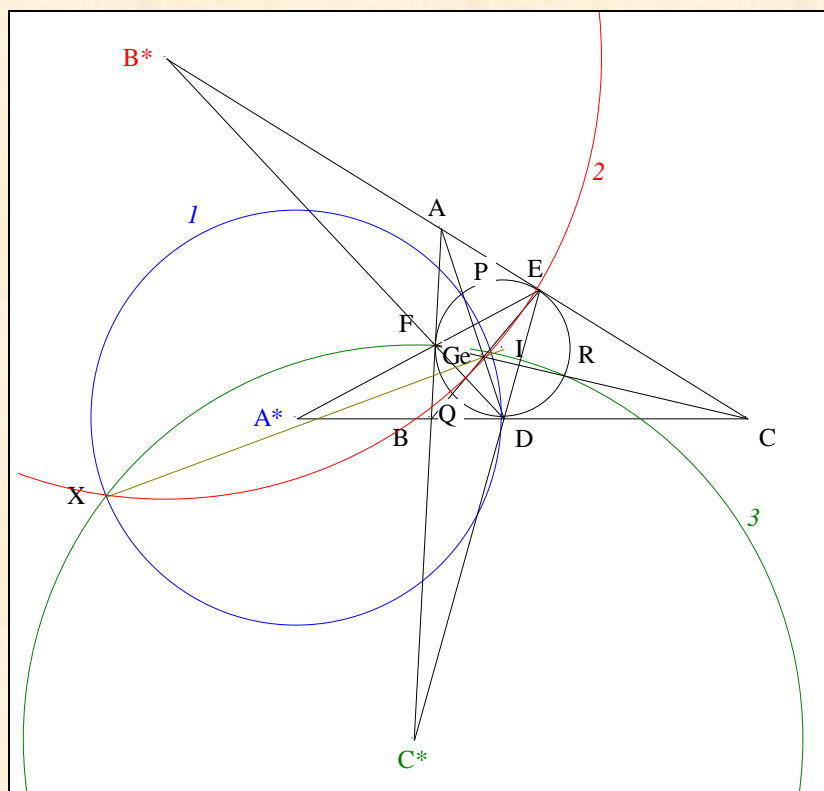
VISUALISATION



- Notons I le centre de O
 et P le second point d'intersection de (AD) avec O .
- Scolie :** (A^*P) est tangente à O en P.
- D'après Euclide "Tangentes égales",
 en conséquence, $A^*D = A^*P$;
 1 passe par P.
- Par définition, O et 1 sont orthogonaux.



- Notons R le second point d'intersection de (CF) avec \odot
et Ge le point de Gergonne de ABC .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - (1) \odot passe par Q
 - (2) \odot et \odot sont orthogonaux.
- **Scolie :** Ge étant le point d'intersection de $[DP]$ et $[FR]$, est un point intérieur à \odot , \odot et \odot ;
en conséquence, \odot , \odot et \odot sont sécants deux à deux.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"
appliqué à \odot , \odot et \odot , Ge est sur la corde commune de \odot et \odot .
- D'après Gaultier "Axe radical de deux de cercles sécants"
appliqué à \odot et \odot , I est sur la "corde" commune de \odot et \odot .
- **Conclusion partielle :** la droite de Soddy (GeI) est l'axe radical de \odot et \odot .



- Notons Q le second point d'intersection de (BE) avec \mathcal{O} .
- **Conclusion partielle :** mutatis mutandis, nous montrerions que (GeI) est l'axe radical de 1 et 2.
- **Conclusion :** 1, 2 et 3 sont coaxiaux.

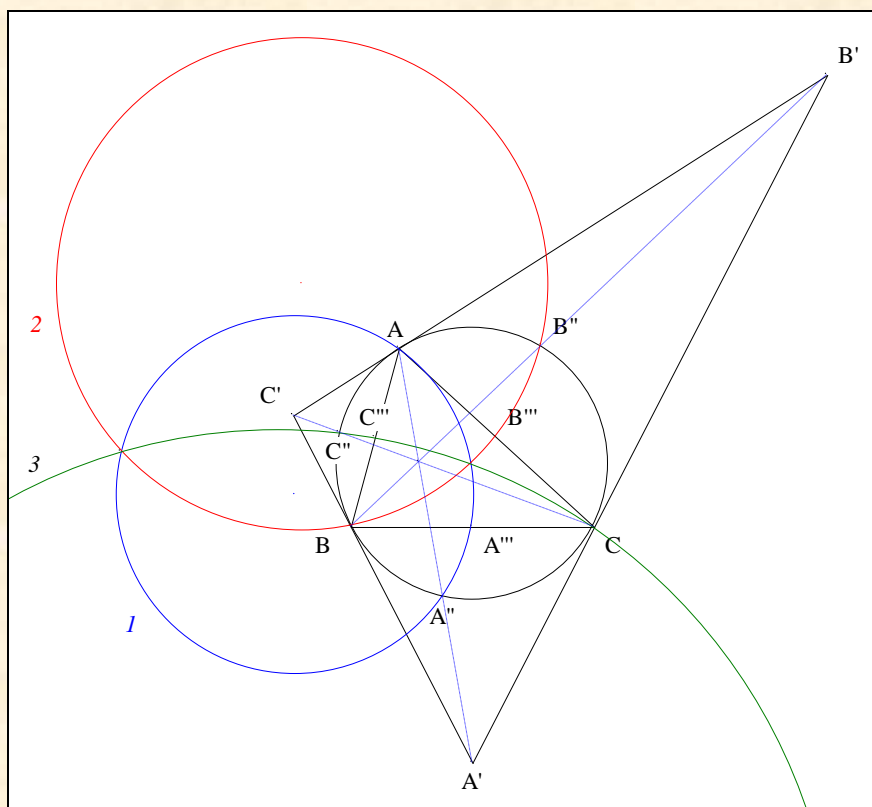
Note historique : Floor van Lamoën a communiqué ce résultat dans une correspondance privée à Éric Danneels. Celui-ci ³⁶ a montré par le calcul que les deux points d'intersection sont sur la droite de Soddy.

9. Le résultat de Lambert

VISION

Figure :

³⁶ Danneels E., Two new points on the Soddy Line, Message # 11948 Hyacinthos du 29/12/2005 ; <https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/11948>

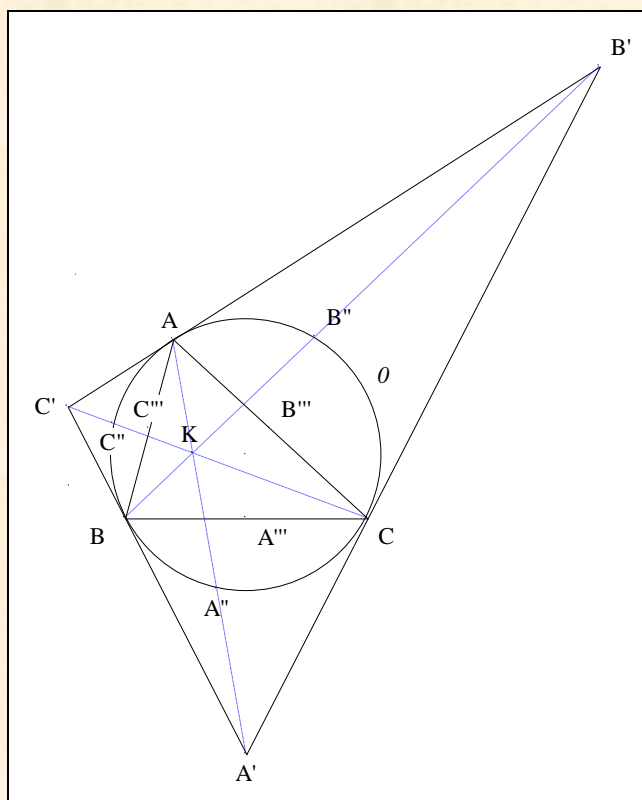


Traits : ABC un triangle,
 \emptyset le cercle circonscrit à ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle tangentiel de ABC ,
 A'', B'', C'' les seconds points d'intersection de (AA') , (BB') , (CC') avec \emptyset ,
 $A'''B'''C'''$ le triangle médian de ABC
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits aux triangles $AA''A'''$, $BB''B'''$, $CC''C'''$.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux. ³⁷

VISUALISATION

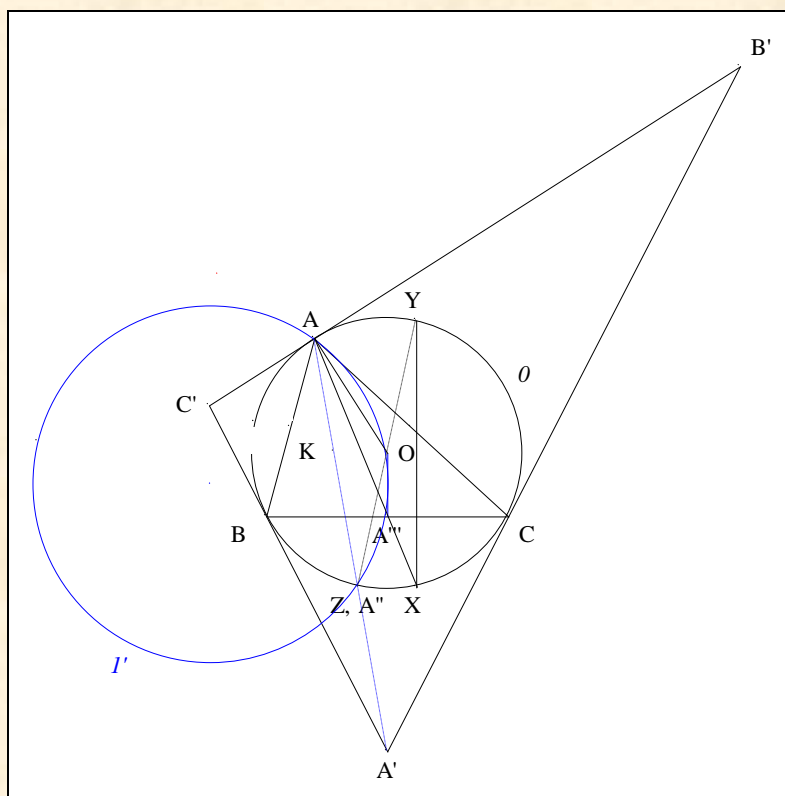
³⁷ Lambert, *Mathesis*, p. 423
 Solution : Lambert, *Mathesis* 85, p. 234



- D'après d'Ocagne ³⁸, (AA') , (BB') , (CC') sont les A, B, C-symédiannes de ABC.
- D'après Lemoine ³⁹, (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes.
- Notons K ce point de concours i.e. "le point de Lemoine de ABC".

³⁸ d'Ocagne M., Sur un élément du triangle rectiligne ; symédiane, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série **II** (1883) 464, exercice 5 ; <http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=1> ; Symmedian, *Art of Problem Solving* (14/07/2008) ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=214829>

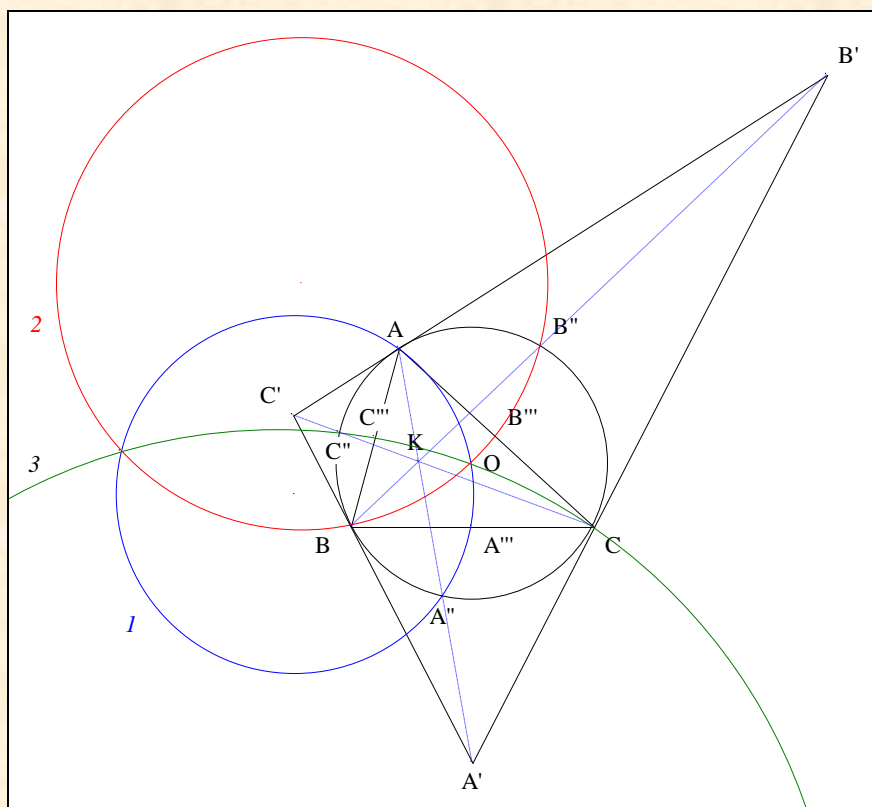
³⁹ Lemoine E., (1873) congrès l'AFAS à Lyon, "Sur un point remarquable du triangle", résultat présenté sans démonstration



- Notons
 - O le centre de θ ,
 - I' le cercle passant par A , O et A'' ,
 - Z le second point d'intersection de I' et θ ,
 - X le second point d'intersection de (AA'') avec θ
- et Y le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) issue de X avec θ .
- **Scolies :**
 - (1) (AA'') est la A -médiane de ABC
 - (2) $(A''O) \parallel (XY)$.
- Les cercles I' et θ , les points de base A et Z , la monienne (XAA'') , les parallèles $(A''O)$ et (XY) , conduisent au théorème 0' de Reim ; en conséquence, O , Z et Y sont alignés.
- **Scolies :**
 - (1) $(XZ) \parallel (BC)$
 - (2) (AZ) est la A -symédiane de ABC
 - (3) Z et A'' sont confondus
 - (4) I' et I sont confondus.
- **Conclusion partielle :** I passe par O .⁴⁰
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - 2 passe par O
 - 3 passe par O .

40

Ayme J.-L., A circle through O , AoPS du 24/06/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1105916_a_circle_through_o



- **Conclusion :** d'après I. A. Résultat en particulierisant P par K et Q par O, $I, 2$ et 3 sont coaxiaux.

Une courte biographie de Jean-Henri Lambert



Jean-Henri Lambert est né le 26 août 1728 à Mulhouse (Alsace, France) qui était à ce moment-là une enclave de la Suisse.

Après avoir quitté l'école, il continue dans son temps libre à étudier tout en assurant une série d'emplois ; assistant de son père (un tailleur), commis à une usine de fer, précepteur, secrétaire du rédacteur en chef du *Basler Zeitung* et, à l'âge de 20 ans, précepteur des fils de comte Salis à Coire (canton des Grisons, Suisse). Durant son voyage en Europe de 1756 à 1758, il rencontre des mathématiciens dans les États allemands, aux Pays-Bas, France et les États italiens.

À son retour à Coire, il publie ses premiers livres (en optique et en cosmologie) et commence à chercher un poste universitaire. Après en avoir occupé quelques uns, l'Académie des Sciences de Prusse à Berlin lui propose un

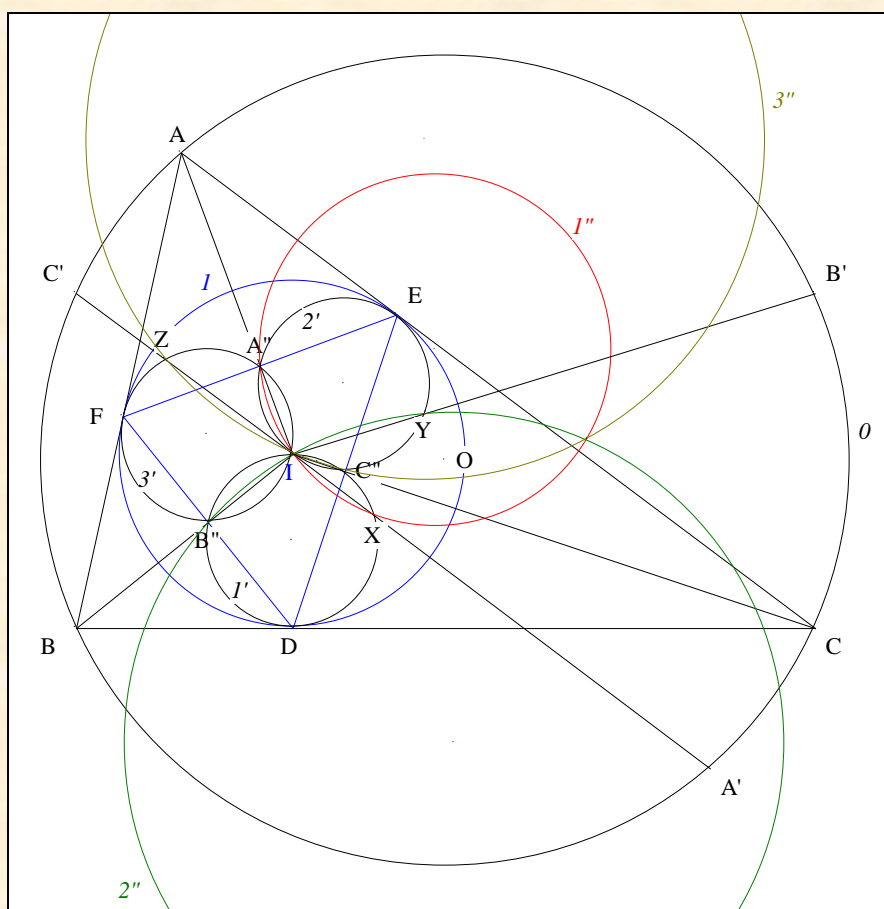
poste où il devient un ami de Leonhard Euler. Dans cet environnement stimulant et financièrement stable, il travaille prodigieusement jusqu'à sa mort survenue le 25 septembre 1777.

ADVANCED

1. About coaxal circles

VISION

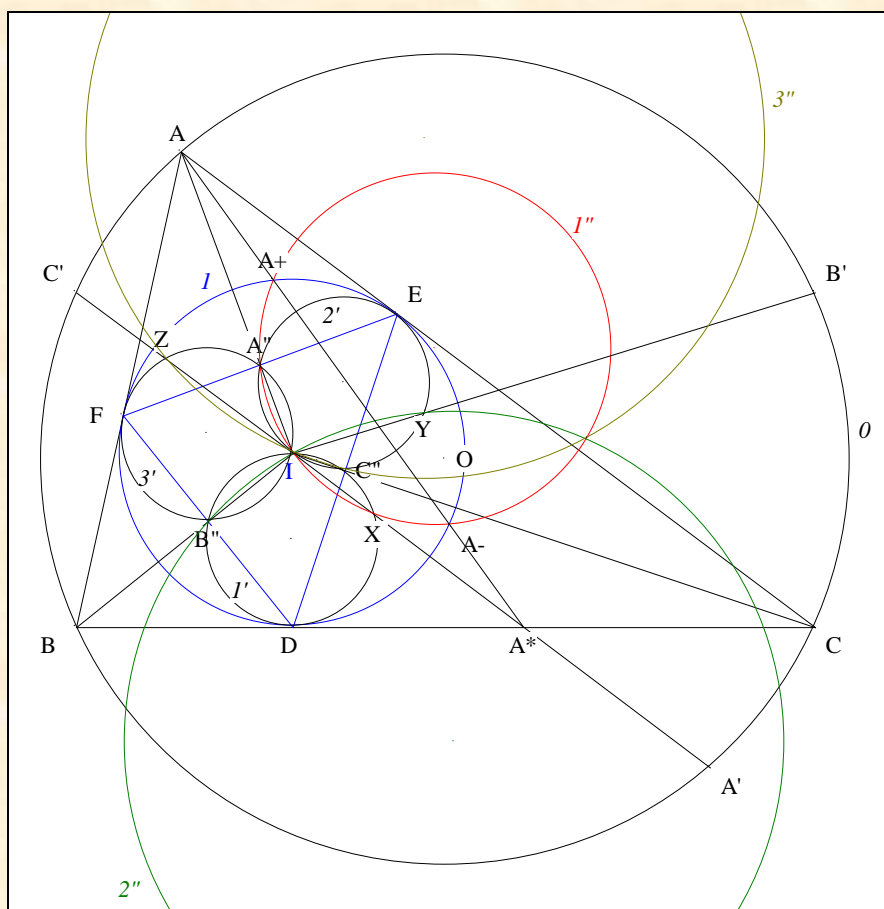
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de O ,
	$A'B'C'$	le triangle O-circumcévien de ABC,
	I	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de I ,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	A'', B'', C''	les points d'intersection de $[IA]$, $[IB]$, $[IC]$ resp. avec (EF) , (FD) , (DE) ,
	$I', 2', 3'$	les cercles circonscrits aux triangles $IB''C''$, $IC''A''$, $IA''B''$
	X, Y, Z	les seconds points d'intersection de (IA') , (IB') , (IC') resp. avec $I', 2', 3'$
et	$I'', 2'', 3''$	les cercles circonscrits resp. aux triangles $IA''X$, $IB''Y$, $IC''Z$.

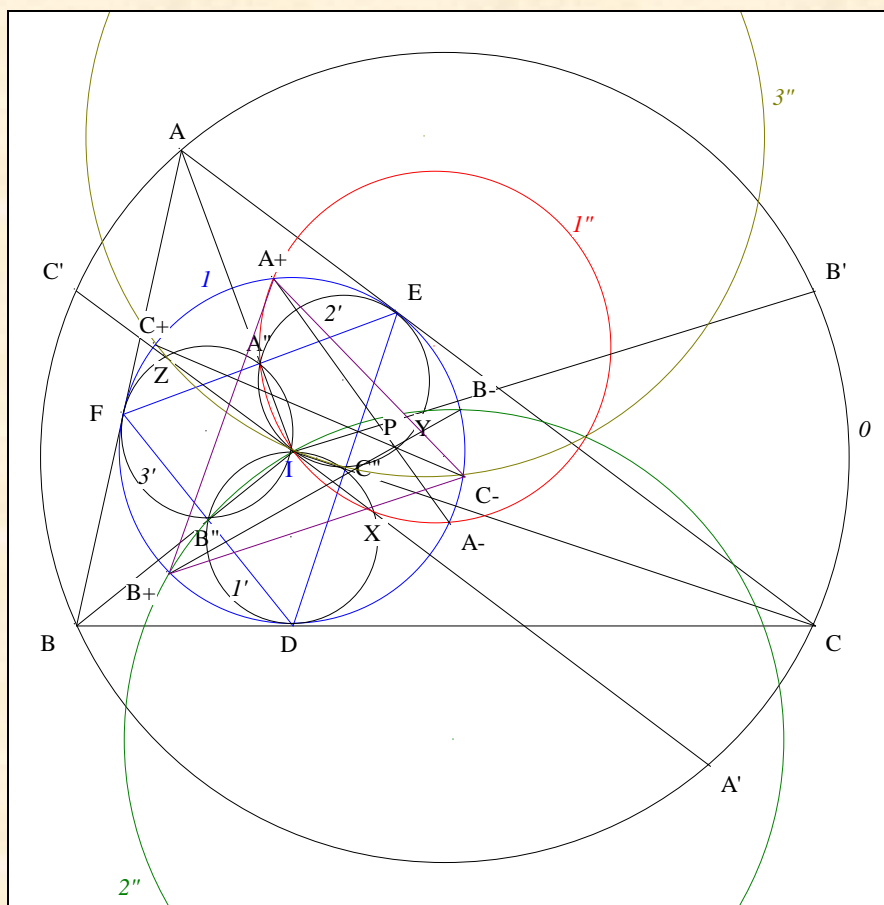
Donné : $I'', 2''$ et $3''$ sont coaxiaux. ⁴¹

VISUALISATION



- Notons $A+, A-$ les points d'intersection de I et I'' comme indiqués sur la figure.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" ⁴²
appliqué à I, I'' et $3'$, $(A+A-)$ passe par A .
- Notons A^* le point d'intersection de $(AA+A-)$ et (BC) .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"
appliqué à I, I'' et I' , (IX) passe par A^* .
- **Conclusion partielle :** $(AA+A-)$ passe par A^* .

⁴¹ About coaxial circles, AoPS du 30/01/2011 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=389117>
⁴² Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- **Conclusion :** d'après I. A. Résultat en particulierisant Q par I, $I'', 2''$ et $3''$ sont coaxiaux.

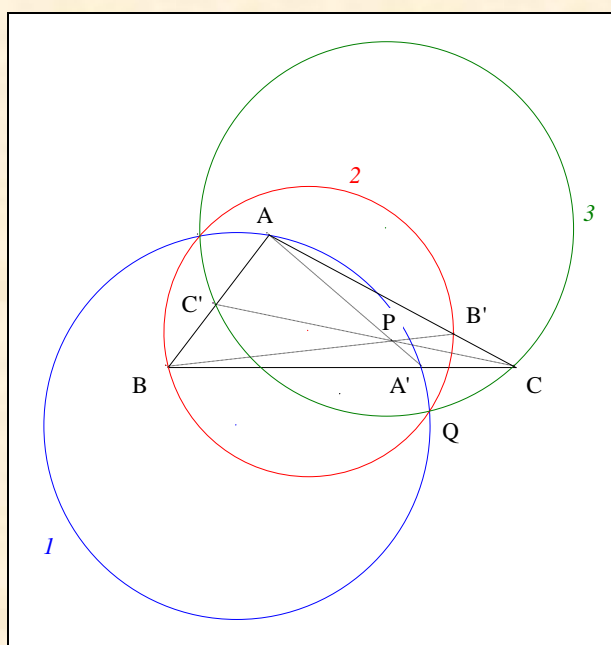
Remerciements : ils vont au jeune géomètre taiwanais Telv Cohl âgé de 17 ans...

B. TRIANGLE P-CÉVIEN
ET
PIVOT Q

LE RÉSULTAT DU *MONTHLY*
OU
LE PIVOT COMME POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure



Traits	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	Q	le pivot de ABC relativement à A', B', C'
et	1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'Q, BB'Q, CC'Q.

Donné 1, 2 et 3 sont coaxiaux.⁴⁴

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.⁴⁵
 Darij Grinberg affirme sans preuve en 2003, la "coaxialité" des trois cercles.

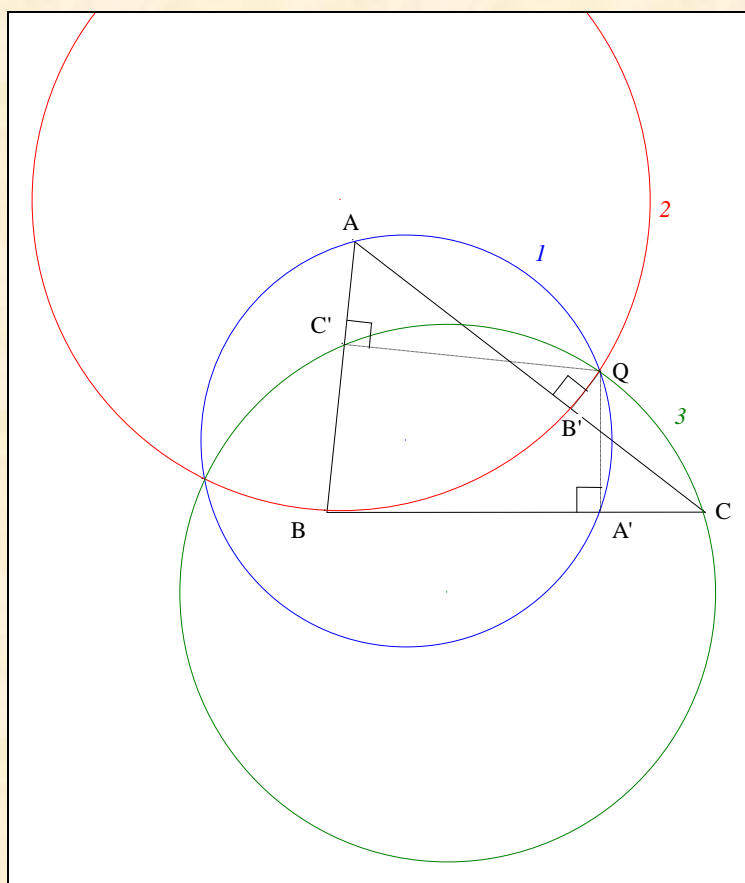
⁴⁴ *American Mathematical Monthly* **24** (1917) 313-317 ;
 A.M.'s Problem, Message *Hyacinthos* # **1350** du 04/09/2000 ;
 Grinberg D., A.M.'s Problem, *Hyacinthos* Message # **7360** du 15/07/2003 ; [http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/Coaxal circles, AoPS du 13/10/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=609882](http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/Coaxal%20circles,AoPS%20du%2013/10/2014%20%3B%20http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=609882)
⁴⁵ Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le marquis Giovanni Ceva, G.G.G. vol. **6**, p. 18 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

APPLICATIONS DIRECTES

1. L'auteur

VISION

Figure :

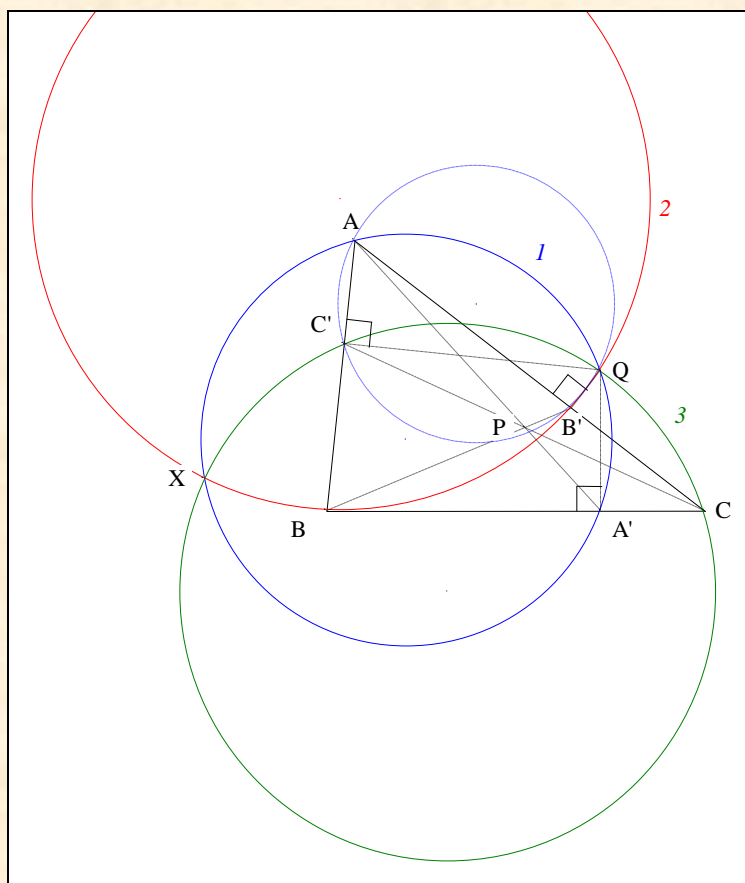


Traits : ABC un triangle,
 Q un PC-point ⁴⁶ de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle Q -pédal de ABC ,
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux trianglex $AA'Q, BB'Q, CC'Q$.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux. ⁴⁷

VISUALISATION

⁴⁶ Pédal-Cévien
⁴⁷ Nguyen Van Linh, Concurrent 2 (PC-point again), AoPS du 02/12/2009 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=315750>
 Ayme J.-L., Coaxal conjecture, AoPS du 14/10/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=610005>

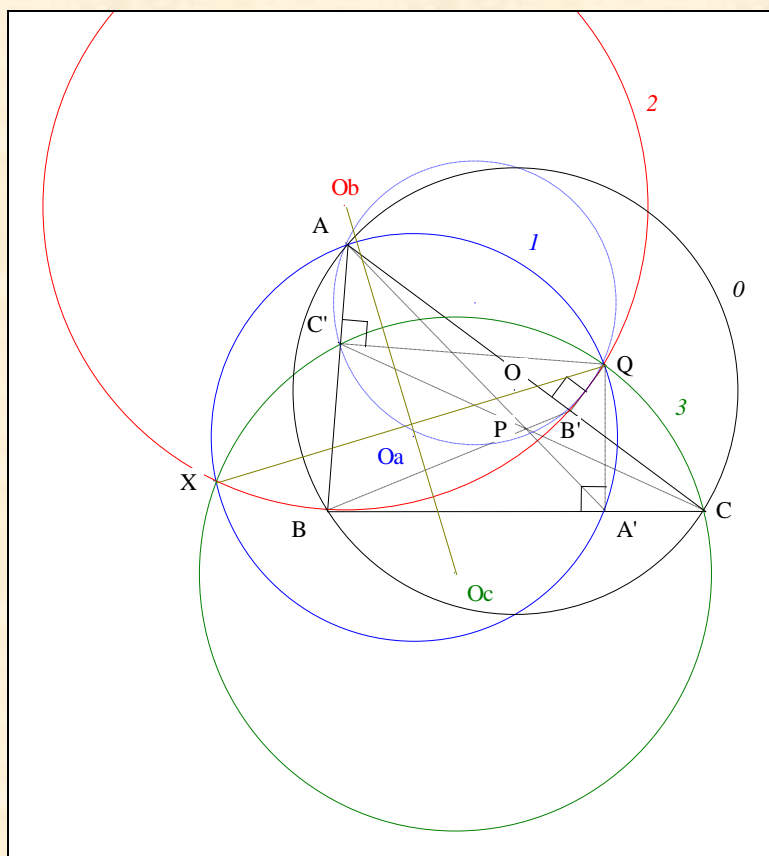


- Notons P le point de Ceva de $A'B'C'$.
- **Scolie :** Q est le pivot de ABC relativement à A', B', C' .
- **Conclusion :** d'après **I. B.** Résultat, $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.
- Notons X ce second point d'intersection.

Scolies : (1) nature de X ⁴⁸

⁴⁸

Gonzalez L., Concurrent 2 (PC-point again), AoPS du 02/12/2009 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=315750>
 The Schröder's point, AoPS du 30/11/2014 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=615846>



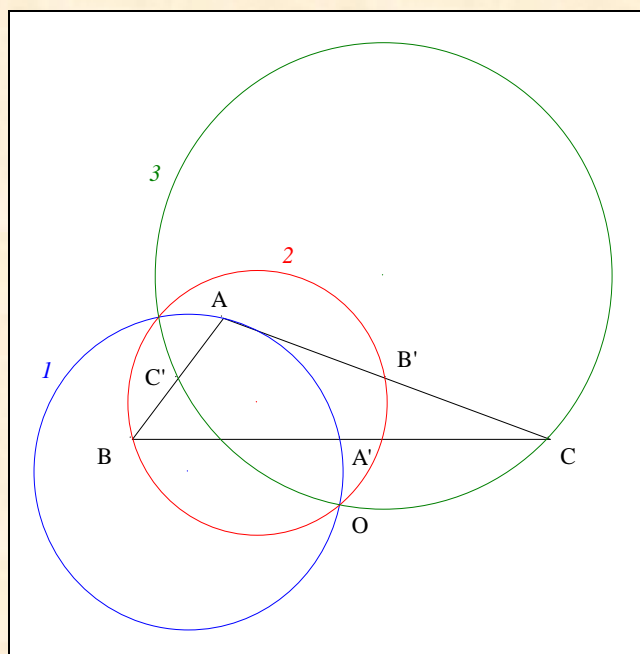
- Notons O_a, O_b, O_c les centres resp. de 1, 2, 3,
 P^* l'isogonal de P relativement à ABC,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et O le centre de O .
- Nous savons que (1) Q, O et P^* sont alignés ⁴⁹
 (2) O, P^* et X sont alignés ⁵⁰
- Conclusion : X est l'inverse de P^* relativement à O . ⁵¹

⁴⁹ Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le Marquis Giovanni Ceva, G.G.G., vol. 6, p. 27 ; <http://jl.ayme.pagesperso.orange.fr/>
⁵⁰ Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le Marquis Giovanni Ceva, G.G.G., vol. 6, p. 22 ; <http://jl.ayme.pagesperso.orange.fr/>
⁵¹ Ayme J.-L., Ménélaüs d'Alexandrie et le Marquis Giovanni Ceva, G.G.G., vol. 6, p. 23 ; <http://jl.ayme.pagesperso.orange.fr/>

2. Andrés Eduardo Caicedo, préparation des O.I.M. de 1992

VISION

Figure :



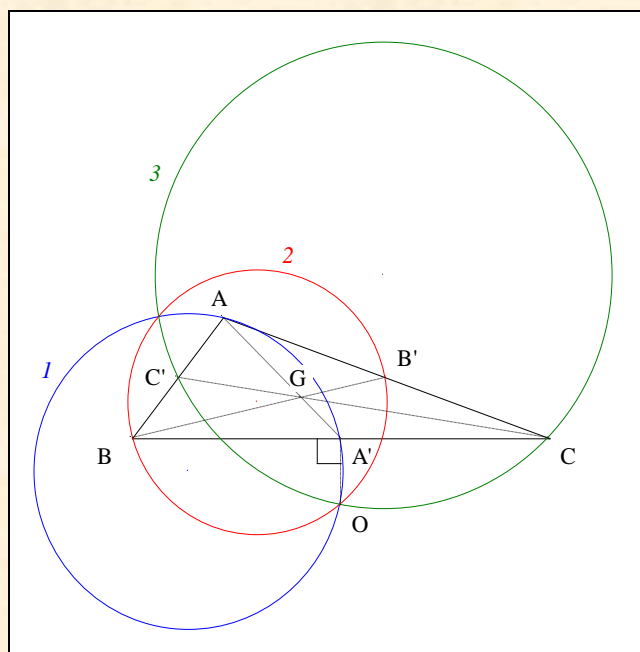
Traits : ABC un triangle,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC ,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC ,
 et $1, 2, 3$ le cercle circonscrit resp. aux triangles $AA'O, BB'O, CC'O$.

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.⁵²

VISUALISATION

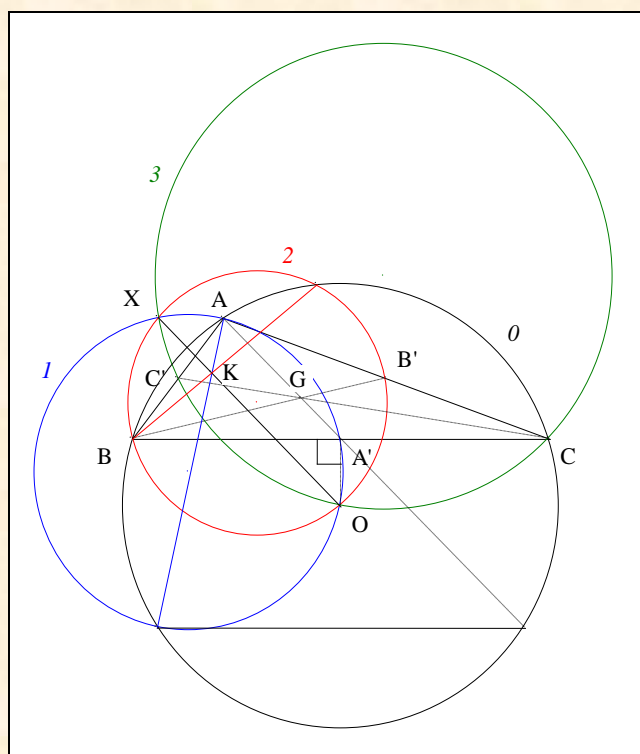
⁵²

Exercice proposé par A.E. Caicedo de Colombie durant la préparation des O.I.M. de 1992
 Circumcircles of vertex-circumcenter-side midpoint coaxal, AoPS du 01/09/2006 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=109081>



- Notons G le point médian de ABC ou encore le point de Ceva de $A'B'C'$.
- **Solie :** O est le pivot de ABC relativement à A', B', C' .
- **Conclusion :** d'après **I. B.** Résultat en particulierisant P par G et Q par O , $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.
- Notons X le second point de concours.

Solies : (1) nature géométrique de X



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC

et O le centre de \mathcal{O}
 K le point de Lemoine de ABC

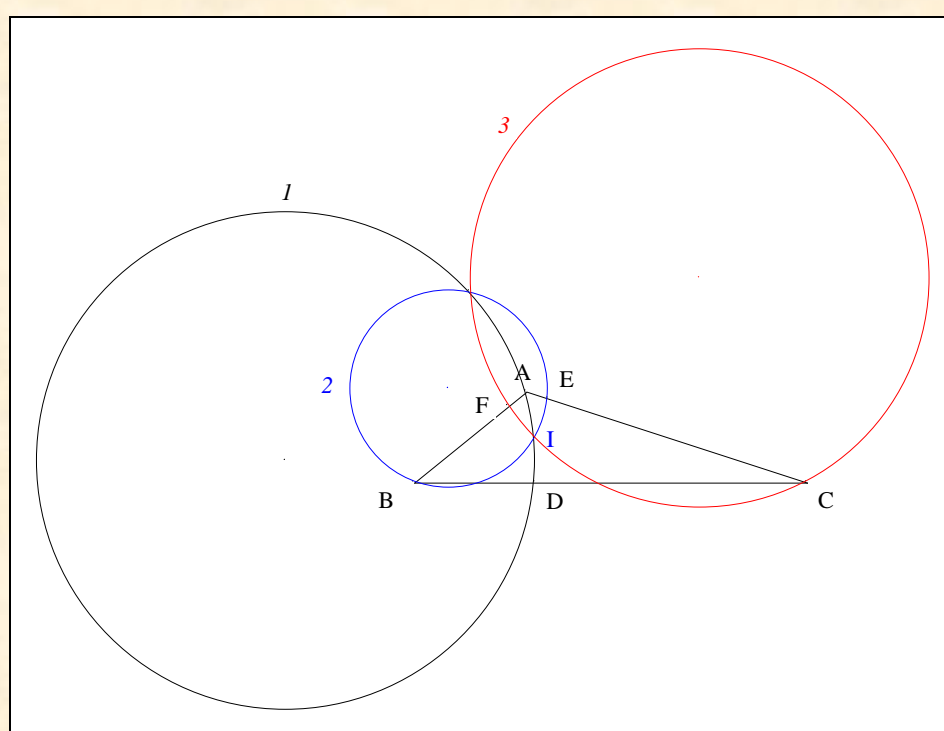
- **Conclusion :** X est l'inverse par rapport à \mathcal{O} de l'isogonal K de G .

(2) X est le point de Schoute de ABC ; il est répertorié sous X_{187} chez ETC.

3. Heinz Schröder et le point de Gergonne-Schröder

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC ,
 DEF le triangle de contact ⁵³ de ABC
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles ADI, BEI, CFI .

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux ⁵⁴.

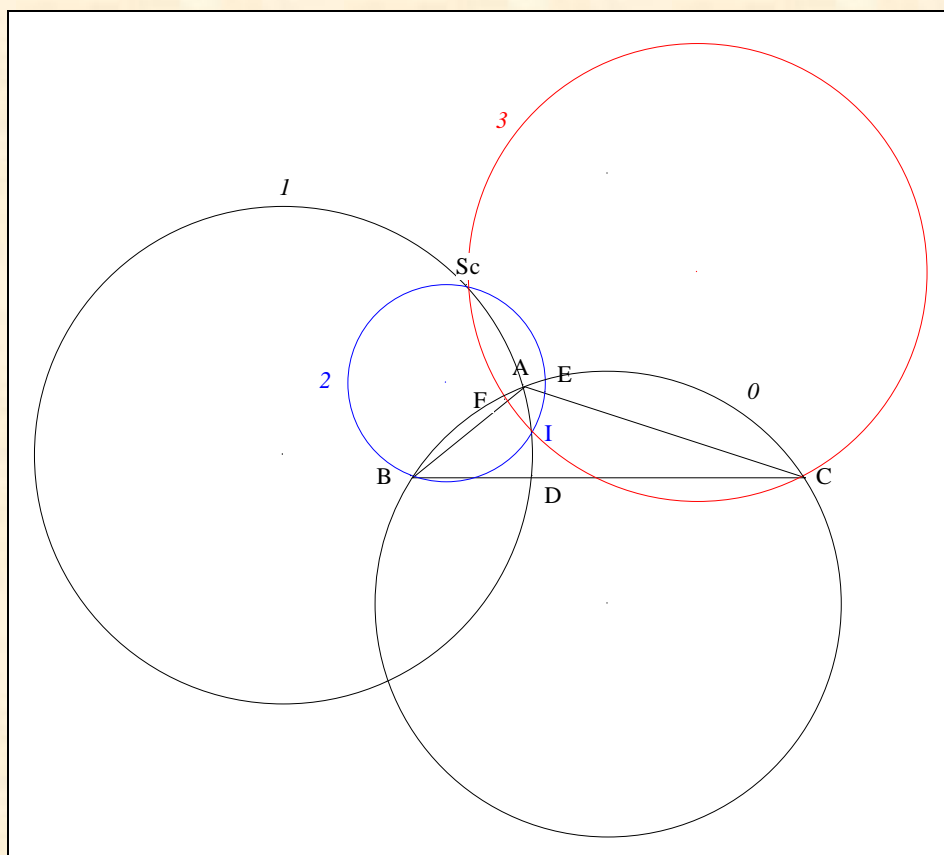
VISUALISATION

- Notons Ge le point de Gergonne de ABC ou encore le point de Ceva de DEF .
- **Scolie :** I est le pivot de ABC relativement à D, E, F .

⁵³ ou de Gergonne

⁵⁴ Heinz Schröder: *Die Inversion und ihre Anwendung im Unterricht der Oberstufe*, Der Mathematikunterricht **1**/1957, p. 59 – 80
 Grinberg D., Some newer results from *MathLinks*, Schröder **7** (04/07/2003) ;
<http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Schroeder/Schroeder.html>
 The Schröder's point, AoPS du 30/11/2014 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=615846>

- **Conclusion :** d'après **I. B.** Résultat en particulierisant P par Ge et Q par I, $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.



- Scolies :**
- (1) le second point de concours noté **Sc**, répertorié sous X_{1155} chez ETC⁵⁵, est "Le point de Gergonne-Schröder de ABC"
 - (2) Sc est l'inverse par rapport à O de l'isogonal du Mittenpunct de ABC.

Note historique : dans son article, la concurrence a recours à l'inversion.
Darij Grinberg précise

*From this we get that Sc lies on the Euler line of XYZ, i. e. on the line OI, where O is the circumcenter and I is the incenter of ABC.
(This follows from the theorem that the Euler line of XYZ is the line OI, which can be shown using the homothety of triangle XYZ with the excentral triangle of ABC.)*

*Unlike the Schröder point Sc, for whose existence we have two rather simple synthetic proofs, the **first elementary proof** for the existence of Sn was found more than a year after the discovery of the point itself, and this proof is very long.*

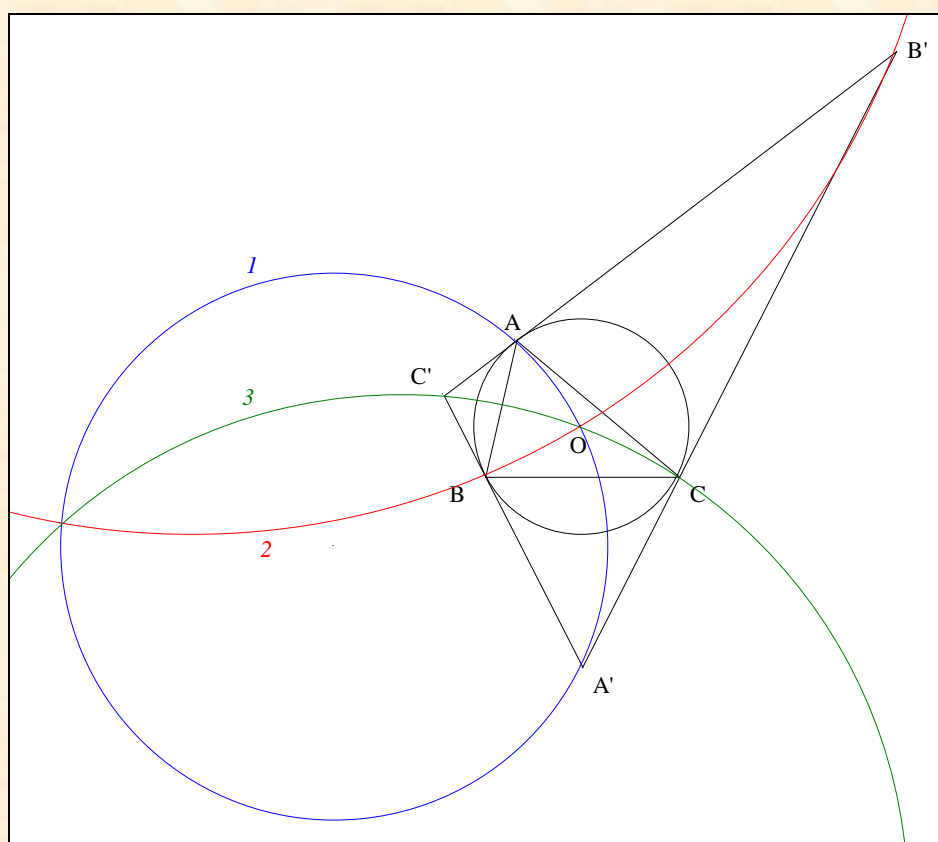
4. Heinz Schröder et le triangle tangentiel

⁵⁵

Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

VISION

Figure :

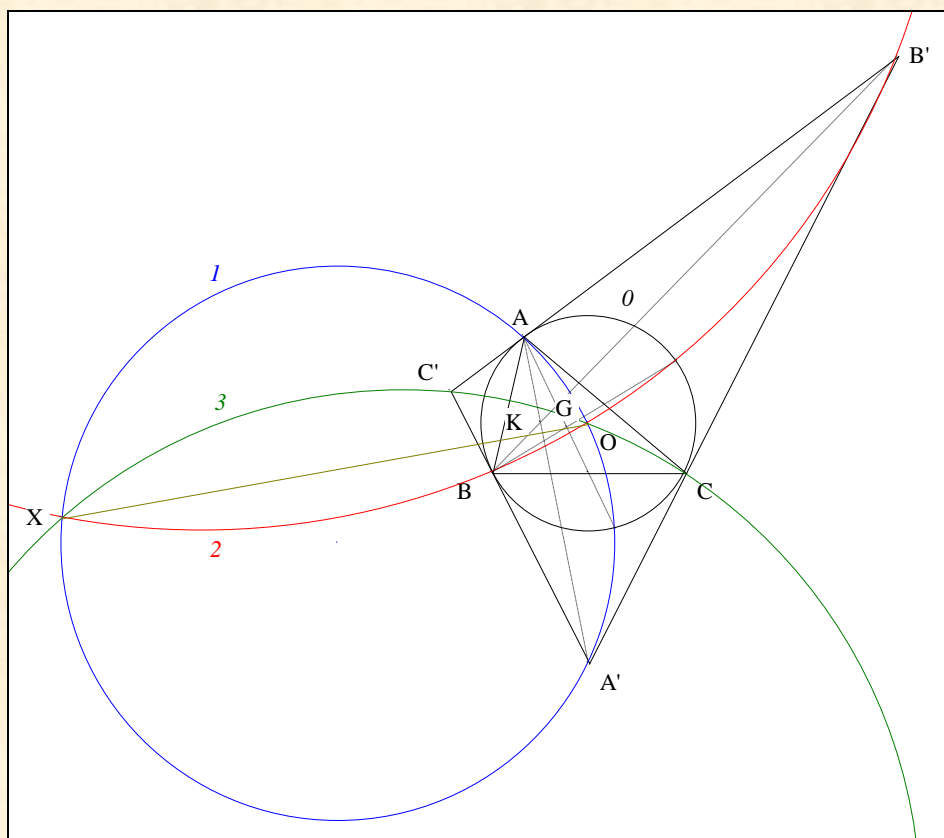


Traits : ABC un triangle,
 θ le cercle circonscrit à ABC ,
 O le centre de θ ,
 $A'B'C'$ le triangle tangential de ABC ,
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits aux triangles AOA' , BOB' , COC' .

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

Commentaire : du point de vue $A'B'C'$, O en est le centre ;
 en conséquence, ce problème revient à la situation précédente.

Scolie : nature du second point de concours

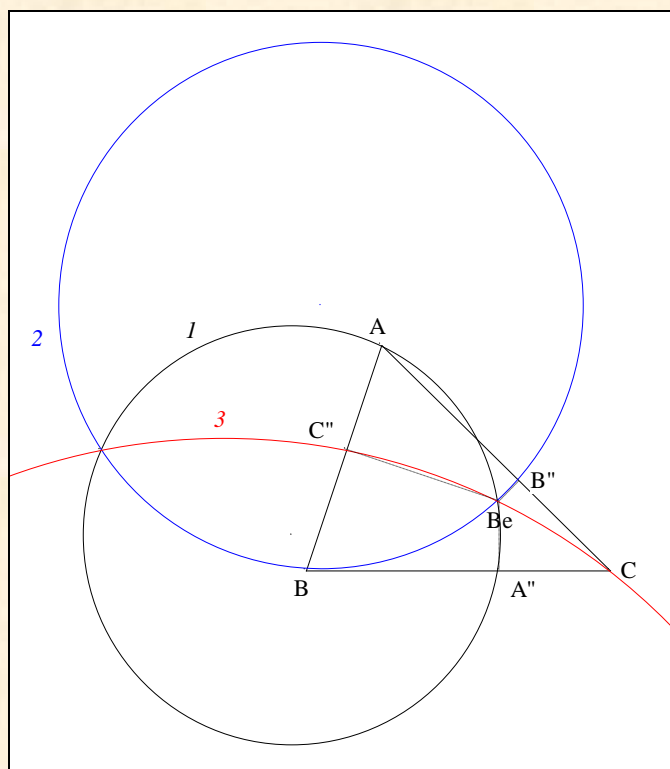


- Notons X ce second point d'intersection
et G le point médian de ABC .
- **Conclusion :** X étant l'inverse de G par rapport à O , est le "far-out point" de ABC .

5. Le point de Bevan-Schröder

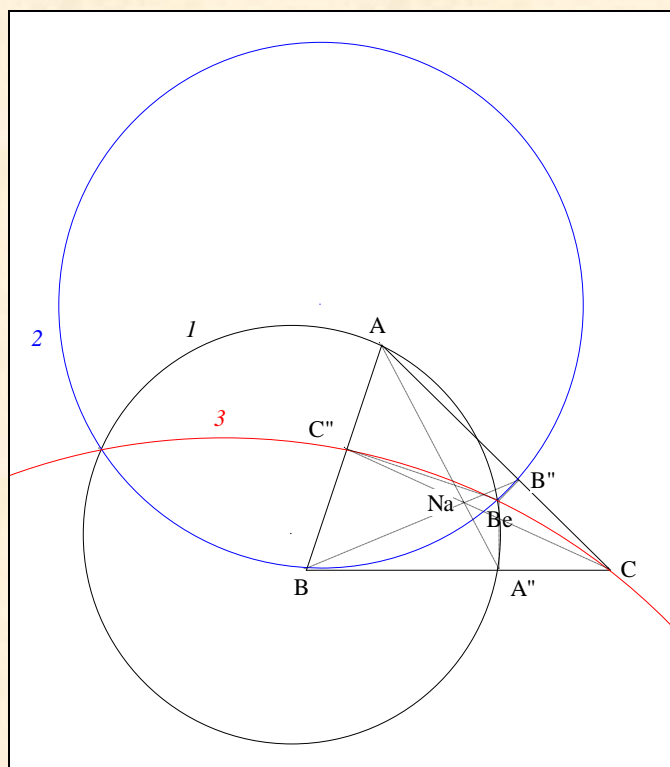
VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	Be	le point de Bevan de ABC,
	A''B''C''	le triangle Be-pédal ou de Nagel de ABC
et	1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles ABeA'', BBeB'', CBeC''.
Donné :	1, 2 et 3 sont coaxiaux.	

VISUALISATION



- **Scolies :**
 - (1) Be est un PC-point de ABC
 - (2) Be est le pivot de ABC relativement à A'' , B'' , C'' .
- Notons Na le point de Nagel de ABC ou encore le point de Ceva de $A''B''C''$.
- **Conclusion :** d'après **I. B.** Résultat en particulierisant P par Na et Q par Be, I , 2 et 3 sont coaxiaux.
- Notons Sb ce second point de concours.

- Scolies :**
- (1) Sb est répertorié sous X_{1319} chez ETC ⁵⁶
 - (2) X_{1319} est "le point de Bevan-Schröder de ABC".

Note historique : ce résultat signalé par Darij Grinberg a été donné sans preuve synthétique.

⁵⁶

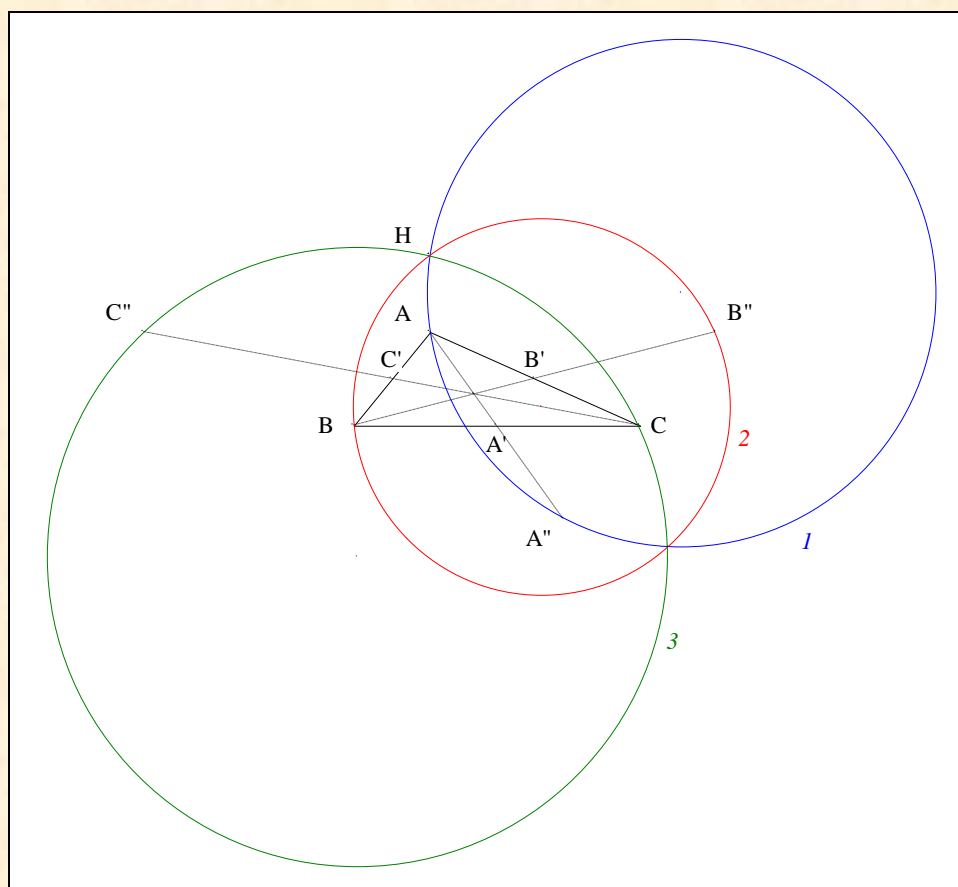
Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

EXEMPLE

1. L'auteur

VISION

Figure :



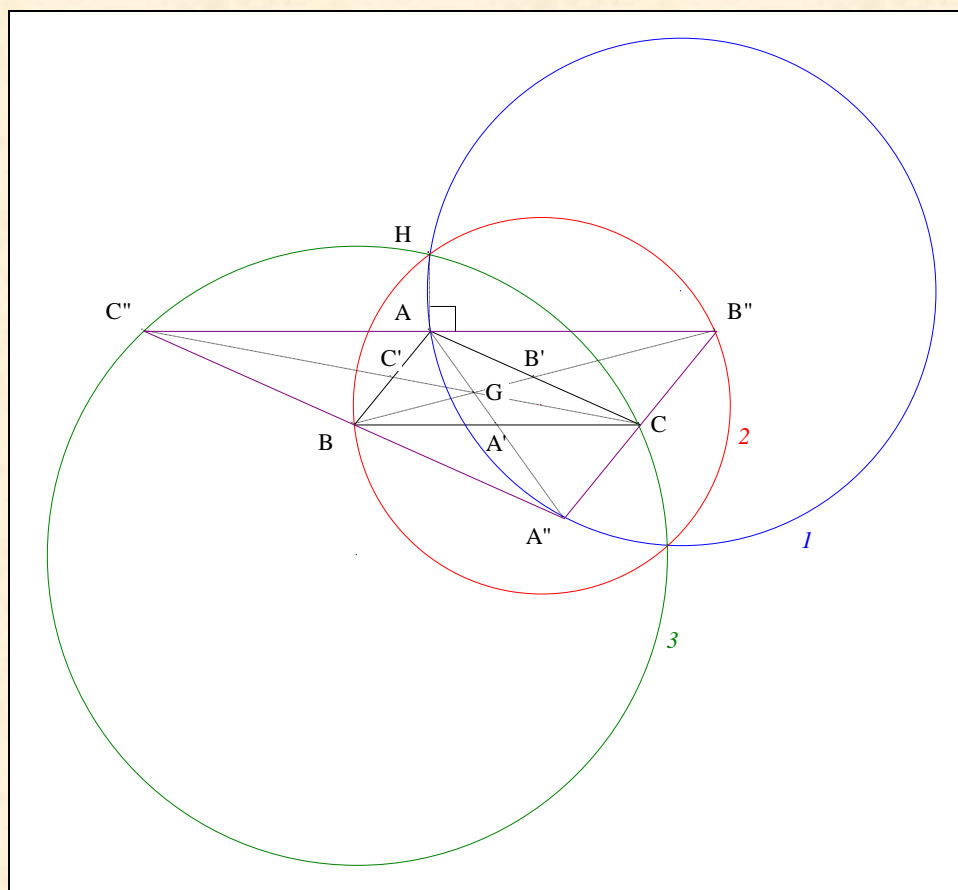
Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
A'B'C' le triangle médian de ABC,
A'', B'', C'' les symétriques de A, B, C par rapport à A', B', C'
et I, 2, 3 les cercles circonscrits aux triangles AHA'', BHB'', CHC''.

Donné : I, 2 et 3 sont coaxiaux. ⁵⁷

VISUALISATION

⁵⁷

Ayme J.-L. (2005)



- Notons G le point médian de ABC .
- **Scolies :**
 - (1) G est le point médian ou le point de Ceva de $A''B''C''$
 - (2) $A''B''C''$ est le triangle antimédian de ABC
 - (3) H est le centre du cercle circonscrit à $A''B''C''$
 - (4) H est un PC-point de $A''B''C''$
 - (5) H est le pivot de $A''B''C''$ relativement à A, B, C .
- **Conclusion :** d'après **I. B.** Résultat en considérant $A''B''C''$ et en particulierisant P par G et Q par H , $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

C. TRIANGLE H-CÉVIEN ET UN POINT Q

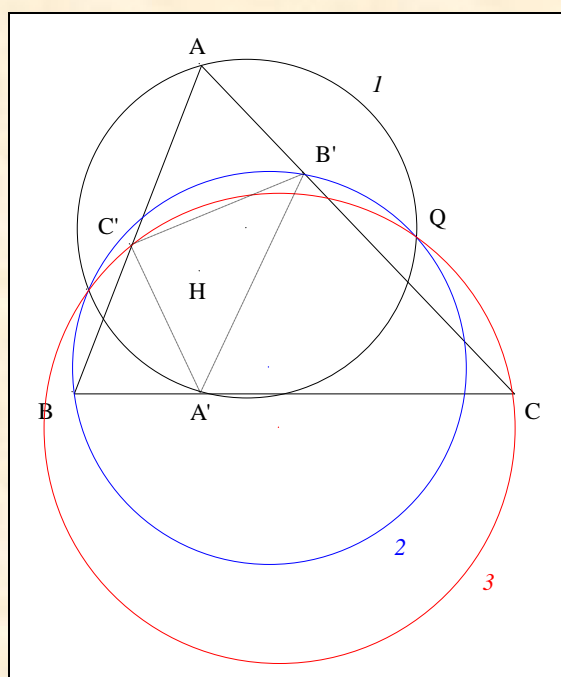
LE RÉSULTAT DE IOANNIS F. PANAKIS

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :

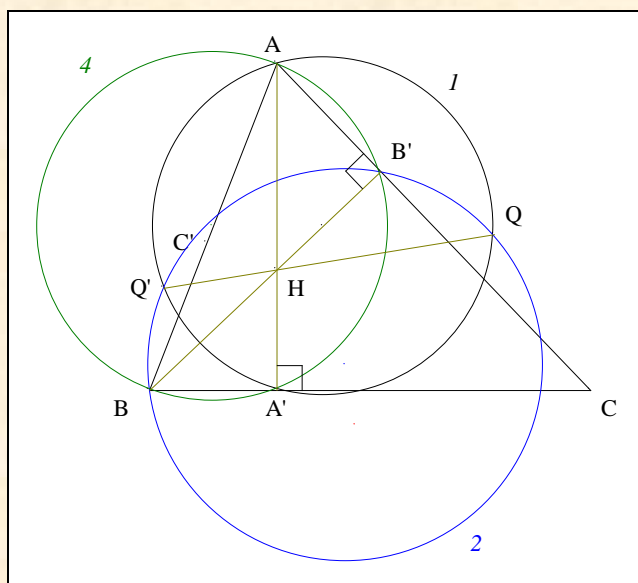


Traits : ABC un triangle acutangle,
 H l'orthocentre de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle orthique ⁵⁸ de ABC ,
 Q un point
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles $AA'Q, BB'Q, CC'Q$.

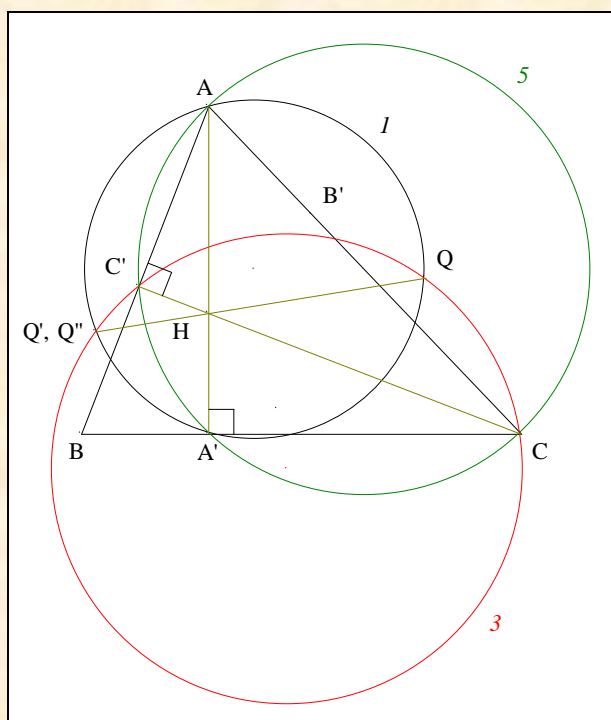
Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

VISUALISATION

⁵⁸ ou H-cévien



- Notons 4 et Q' le cercle de diamètre $[AB]$; il passe par A' et B' ;
le second point d'intersection de I et 2 .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" ⁵⁹ appliqué à I , 2 et 4 , Q , H et Q' sont alignés.



- Notons 5 et Q'' le cercle de diamètre $[AC]$; il passe par A' et C' ;
le second point d'intersection de I et 3 .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à I , 3 et 5 ,
en conséquence, Q , H et Q'' sont alignés ;
 Q'' et Q' sont confondus.
- **Conclusion :** I , 2 et 3 sont coaxiaux.

⁵⁹

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Note : la solution du professeur Ricardo Barroso ⁶⁰

La revista Cruz Mathematicorum (40,4) publica mi solución del problema 3839.

Mi agradecimiento a [Kseniya Garaschuk](#), editora.

3839. *Proposed by Peter Y. Woo.*

Let $\triangle ABC$ be an acute triangle, and P any point on the plane. Let AD , BE , CF be the altitudes of $\triangle ABC$. Let D' , E' , F' be the circumcentres of $\triangle PAD$, $\triangle PBE$, $\triangle PCF$ respectively. Prove that D' , E' , F' are collinear.

Solved by M. Bataille; R. Barroso Campos; M. Benito, Ó. Ciaurri, E. Fernández, and L. Roncal; S. Malikić; T. K. Parayiou; N. Stanciu and T. Zvonaru; and the proposer. We present the solution by Ricardo Barroso Campos.

As usual we denote the orthocentre of $\triangle ABC$ by H . Using similar right triangles, one sees that

$$AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF.$$

Let PH intersect the circumcircle of $\triangle PAD$ again at Q . Then

$$PH \cdot HQ = AH \cdot HD,$$

which implies that the other two circumcircles, of $\triangle PBE$ and $\triangle PCF$, also pass through Q . We conclude that the circumcentres D' , E' , F' all lie on the perpendicular bisector of the common chord PQ .

Editor's comments. Malikić pointed out that should P be chosen on an altitude or its extension, then a more careful statement of the problem would be required to give rise to a meaningful result. On the other hand, it is clear from the featured solution that there was no need to require $\triangle ABC$ to be acute. This observation was provided by Bataille and by Benito et al. The latter group observed, moreover, that the point Q (in the featured solution) is known as the *orthoassociate of P*, which is the point $X(5523)$ in Clark Kimberling's *Encyclopedia of Triangle Centers*. The point is discussed further in Bernard Gibert's "Orthocorrespondence and Orthopivotal Cubics," *Forum Geometricorum* **3** (2003), 1–27. Stanciu and Zvonaru noted that in the special case where P is the centroid of $\triangle ABC$, then Q is Kimberling's point $X(468)$.

⁶⁰

<http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>

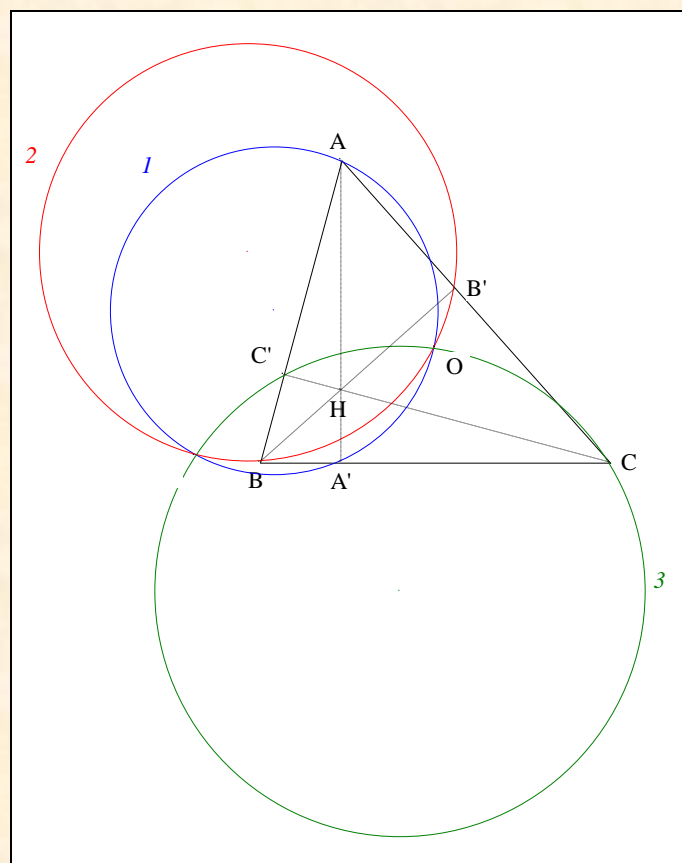
APPLICATIONS

DIRECTES ET DÉVELOPPEMENTS

1. Le triangle orthique et le point O

VISION

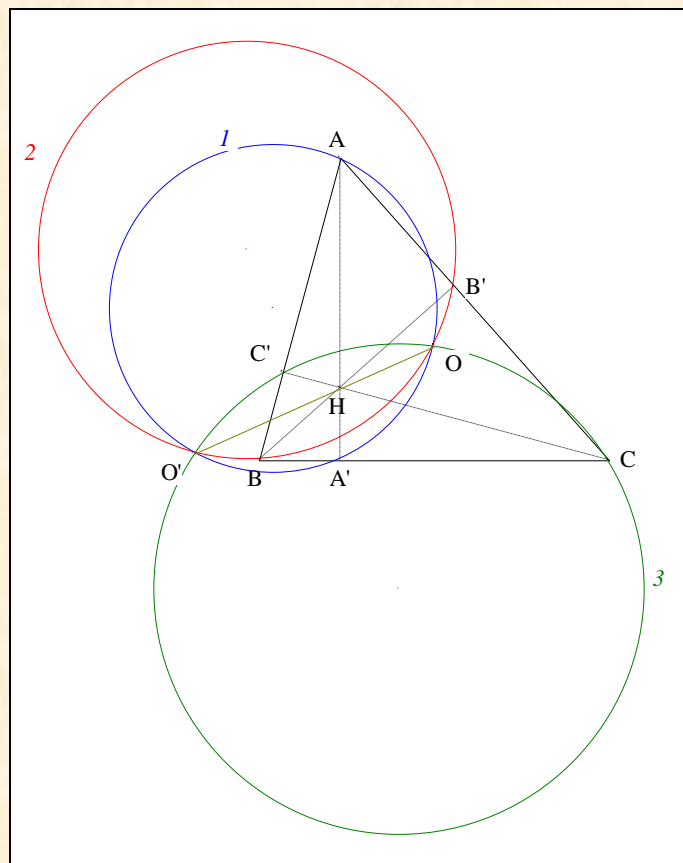
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC
et I, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'O, BB'O, CC'O.

Donné : I, 2 et 3 sont coaxiaux.

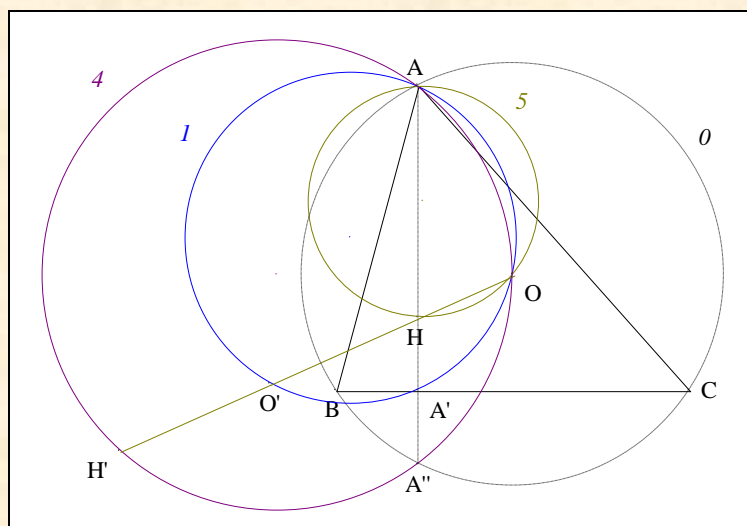
VISUALISATION



- **Conclusion :** d'après I. C. Résultat en particulierisant Q par O, $I, 2$ et 3 sont coaxiaux.
- Notons O' le second point de concours de $I, 2$ et 3 .

- Scolies :**
- (1) dans la nomenclature d'ETC ⁶¹, O' est répertorié sous X_{403}
 - (2) O' est sur la droite d'Euler de ABC
 - (3) L'observation de Jean-Pierre Ehrmann ⁶²

⁶¹ Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
⁶² Ehrmann J.-P., Message Hyacinthos # 7748 ; <https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/info>
 A midpoint, AoPS du 18/10/2014 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=610464>

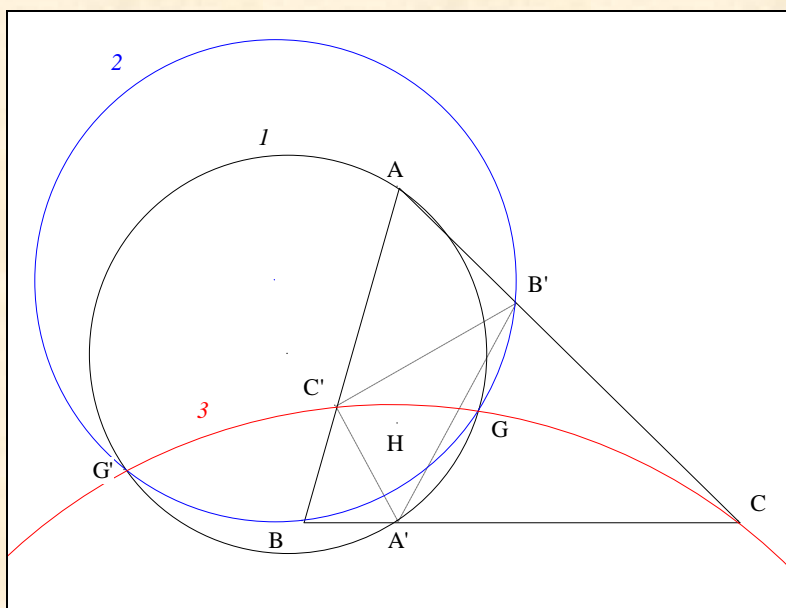


- Notons A'' le A-point circumcévien de H,
 H' l'inverse de H par rapport à O ,
 4 le cercle circonscrit au triangle $AA''O$
 et 5 le cercle circonscrit au triangle AHO .
- D'après I. A. Application 2. Scolie 1, 4 passe par H' .
- D'après Carnot "Symétrique de H par rapport à (BC) ", A' est le milieu de $[HA'']$.
- **Conclusion :** 1 étant le cercle des milieux ⁶³ de 4 et 5 , O' est le milieu de $[HH']$.

2. Mathesis 1888

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
 H l'orthocentre de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle orthique de ABC ,
 G le point médian de ABC
 et $I, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles $AA'G, BB'G, CC'G$.

Donné : $I, 2$ et 3 sont coaxiaux. ⁶⁴

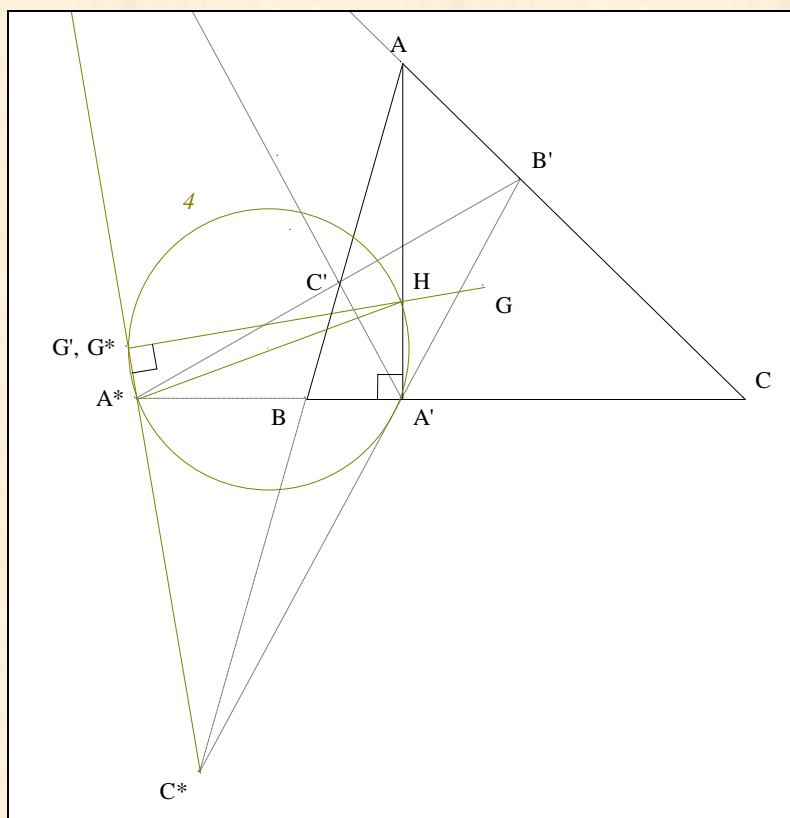
VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après **I. B.** Résultat en particulierisant Q par G , $I, 2$ et 3 sont coaxiaux.
- Notons G' le second point de concours de $I, 2$ et 3 .

Solie : G' est sur l'axe orthique de ABC ⁶⁵

⁶⁴ Educ. Times, *Mathesis* (1888) 39 ; <https://archive.org/details/mathesisrecueil03unkngoog>

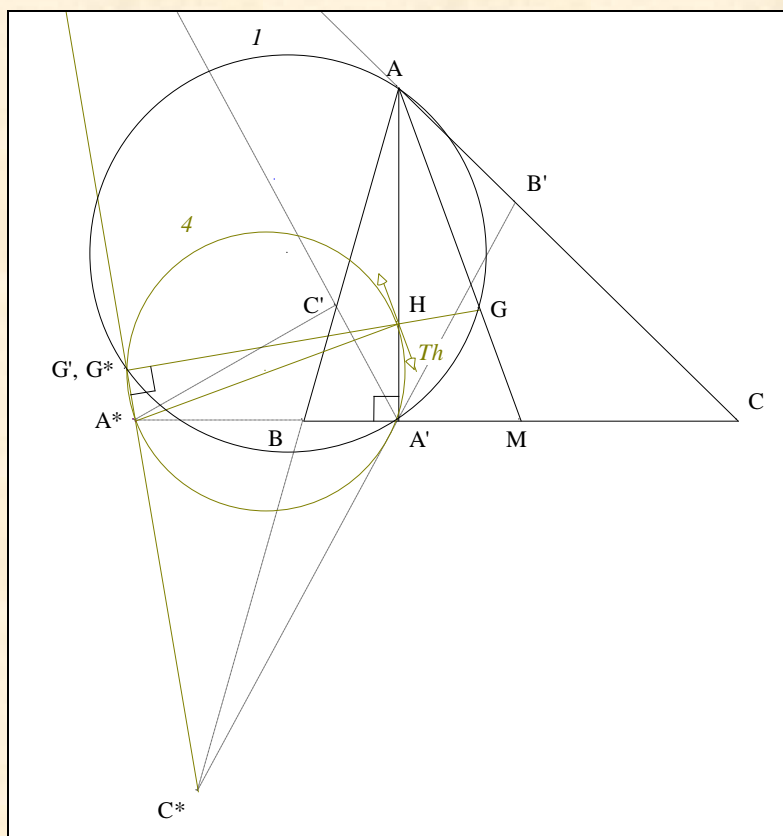
⁶⁵ With the orthic axis, AoPS du 17/10/2014 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=610338>



- Notons A^*, B^*, C^* les points d'intersection de $(B'C')$ et (BC) , $(C'A')$ et (CA) , $(A'B')$ et (AB) .
- Par définition, $(A^*B^*C^*)$ est l'axe orthique de ABC .
- **Scolie :** $(GH) \perp (A^*B^*C^*)$.⁶⁶
- Notons G^* le point d'intersection de (GH) et $(A^*B^*C^*)$
et 4 le cercle de diamètre $[A^*H]$; il passe par A' et G^* .

⁶⁶

Ayme J.-L., La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique, G.G.G. vol. 1 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Notons Th la tangente à 4 en H
et M le milieu de [BC].
- Par définition,
d'après "La droite (MH) " ⁶⁷,
d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,

Th	$\perp (A^*H)$
(A^*H)	$\perp (AGM)$;
Th	$// (AM)$.
- Le cercle 4, les points de base A' et G*, les moniennes naissantes (HA'A) et (HG*G),
les parallèles Th et (AGM), conduisent au théorème **1** de Reim ;
en conséquences,

(1)	A', G*, A et M sont cocycliques
(2)	G* et G' sont confondus.
- **Conclusion** : G' est sur l'axe orthique de ABC.

67

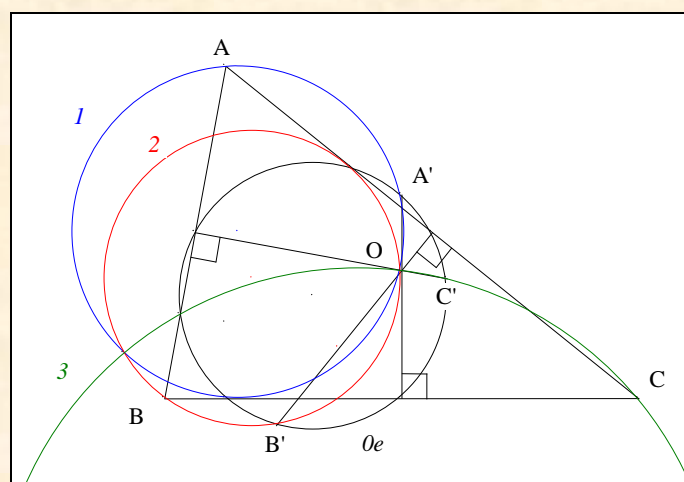
Ayme J.-L., La ponctuelle (MH), G.G.G. vol. 7, p. 7-11 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

EXEMPLES

1. Une variante

VISION

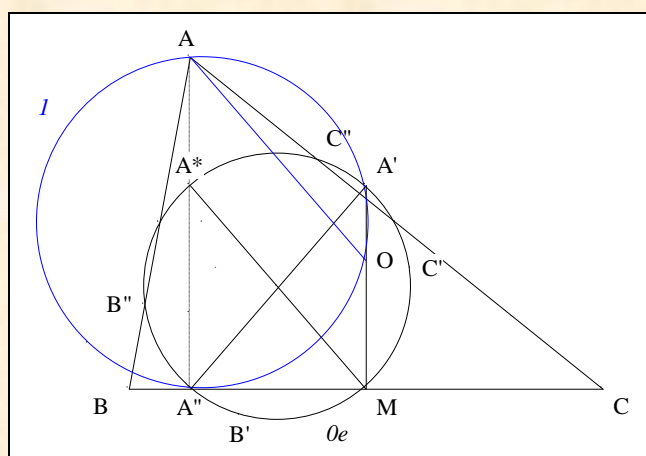
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 θ^e le cercle d'Euler de ABC,
 A' le second point d'intersection de la médiatrice de [BC] avec θ^e ,
 B' le second point d'intersection de la médiatrice de [CA] avec θ^e ,
 C' le second point d'intersection de la médiatrice de [AB] avec θ^e .
 et 1, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'O, BB'O, CC'O.

Donné : 1, 2 et 3 sont coaxiaux.⁶⁸

VISUALISATION

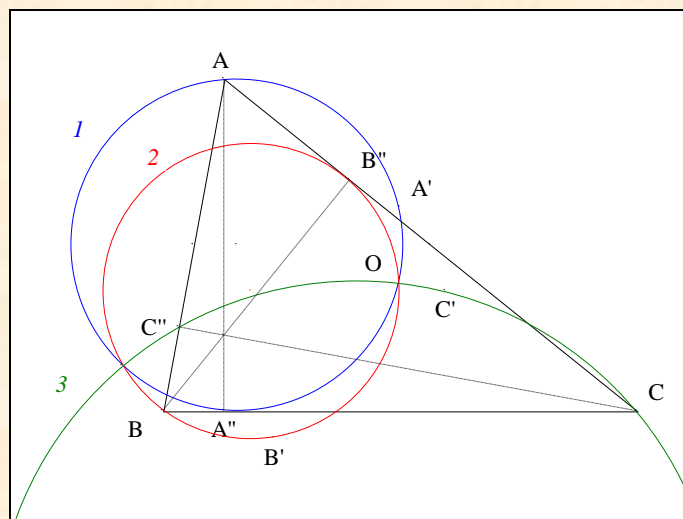


• Notons $A''B''C''$ le triangle orthique de ABC,
 M le milieu de [BC]

⁶⁸ A nice problem, AoPS du 15/02/2010 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=331909>

et A^* le A-point d'Euler de ABC.

- **Scolie :** $(MA^*) \parallel (OA)$.
- Les cercles \mathcal{O}^e et l , le point de base A' , la monienne $(MA'O)$, les parallèles (MA^*) et (OA) , conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, A'' est le second point d'intersection de \mathcal{O}^e et l .
- **Conclusion partielle :** l passe par A'' .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que, 2 passe par B''
 3 passe par C'' .

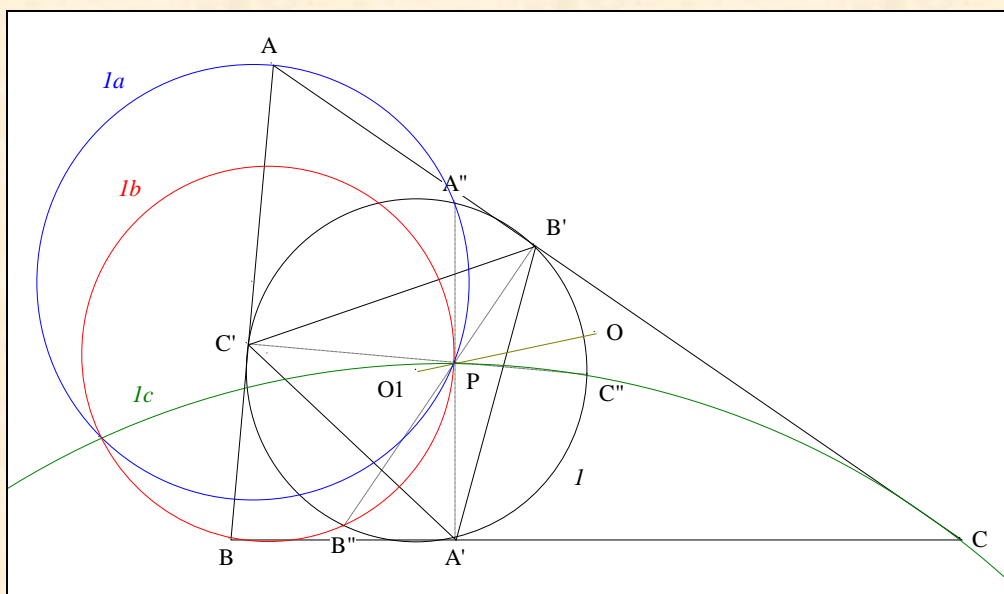


- **Conclusion :** d'après I. C. Exemple 1, l , 2 et 3 sont coaxiaux.

2. La généralisation de Tran Quang Hung

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de O ,
	P	un point,
	$A'B'C'$	le triangle P-pédal de ABC,
	I	le cercle circonscrit à $A'B'C'$,
	$O1$	le centre de I ,
	$A''B''C''$	le triangle P-circumcévien de $A'B'C'$,
	Ia	le cercle circonscrit à A, A'', P ,
	Ib	le cercle circonscrit à B, B'', P ,
et	Ic	le cercle circonscrit à C, C'', P .

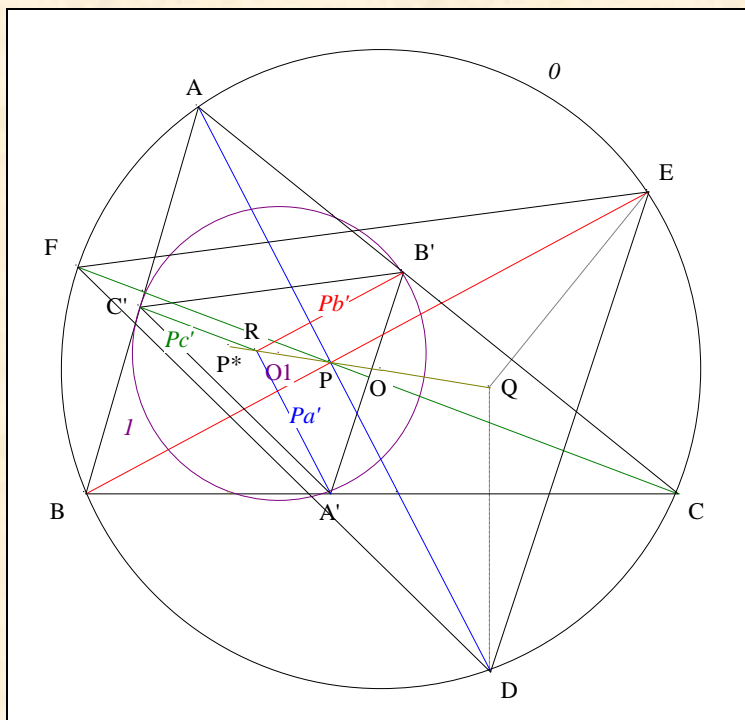
Donné : si, $O, O1$ et P sont alignés alors, Ia, Ib et Ic sont coaxiaux.⁶⁹

VISUALISATION

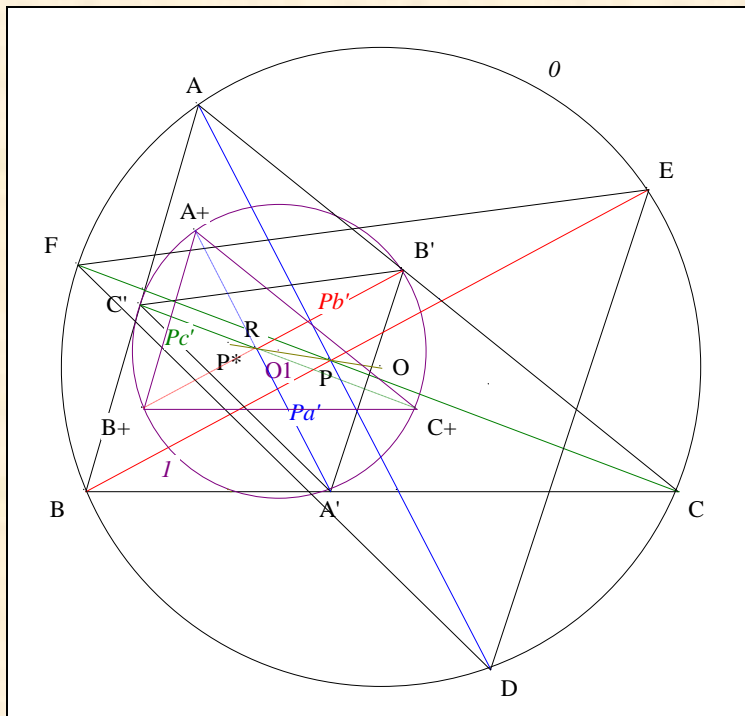
⁶⁹

Tran Quang Hung who has nickname **gemath** in AoPS, Red Geometry **56**, *Les-Mathématiques.net* ;
<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1058929>

Coaxal circles, AoPS du 09/10/2011 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=436952>



- Notons Pa', Pb', Pc' les parallèles à (AP) , (BP) , (CP) issues resp. de A', B', C' .
- DEF et $A'B'C'$ étant homothétiques, Pa', Pb' et Pc' concourent sur (OP) .⁷³
- Notons R ce point de concours.

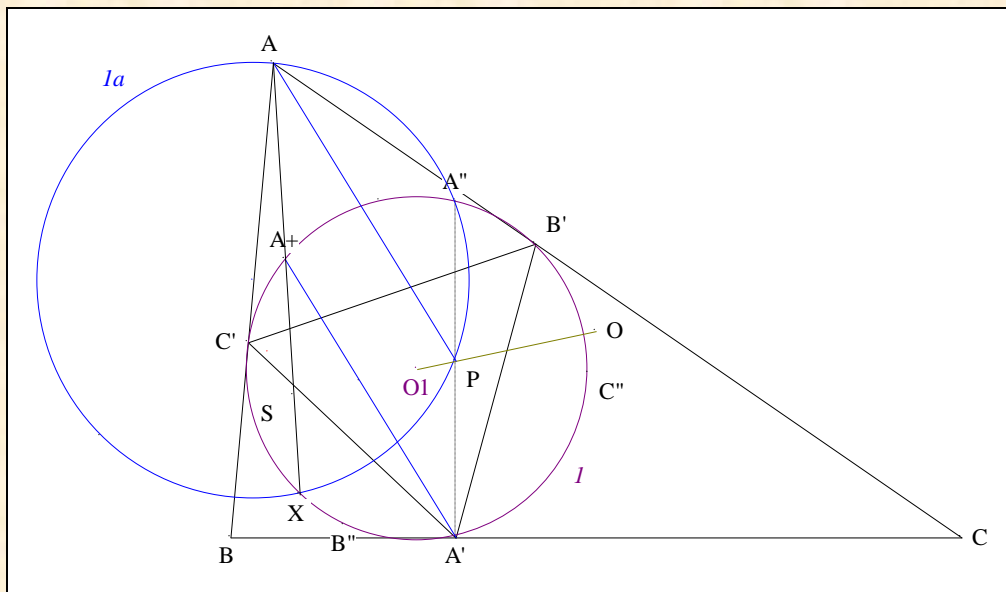


- Notons $A+, B+, C+$ les seconds points d'intersection of Pa', Pb', Pc' avec I .
- DEF et $A'B'C'$ étant homothétiques, le triangle P-circumcévien ABC de DEF

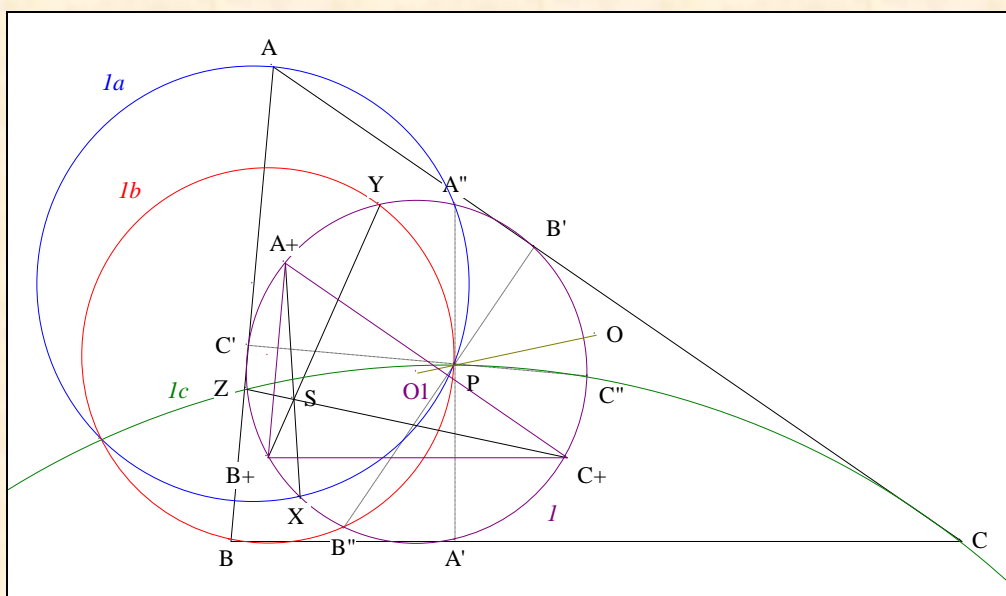
⁷³

Ayme J.-L., Collinear-concurrent, AoPS du 23/02/2015 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=626419>

et
le triangle R-circumcévien $A+B+C+$ de $A'B'C'$
sont homothétiques.⁷⁴



- Notons S le centre d'homothétie de ABC et $A+B+C+$,
et X le second point d'intersection de I et Ia .
- Les cercles Ia et I , les points de base A'' et X , la monienne $(PA''A')$, les parallèles (PA) et $(A'A+)$, conduisent au théorème θ' de Reim ; en conséquence, A , X et $A+$ sont alignés.
- **Conclusion partielle :** $(A+X)$ passe par S .



- Notons Y, Z les seconds points d'intersection de I resp. avec Ib, Ic .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(B+Y)$ passe par S
 $(C+Z)$ passe par S .

74

Ayme J.-L., A surprising homothetic triangle to ABC , AoPS du 24/02/2015 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=626586>

- **Conclusion :** d'après A. Le résultat de Quang Tuan Bui appliqué à $A+B+C+$ avec S et P, $1a, 1b$ et $1c$ sont coaxiaux.

D. TRIANGLES H-CÉVIEN ET Q-CIRCUMCÉVIEN

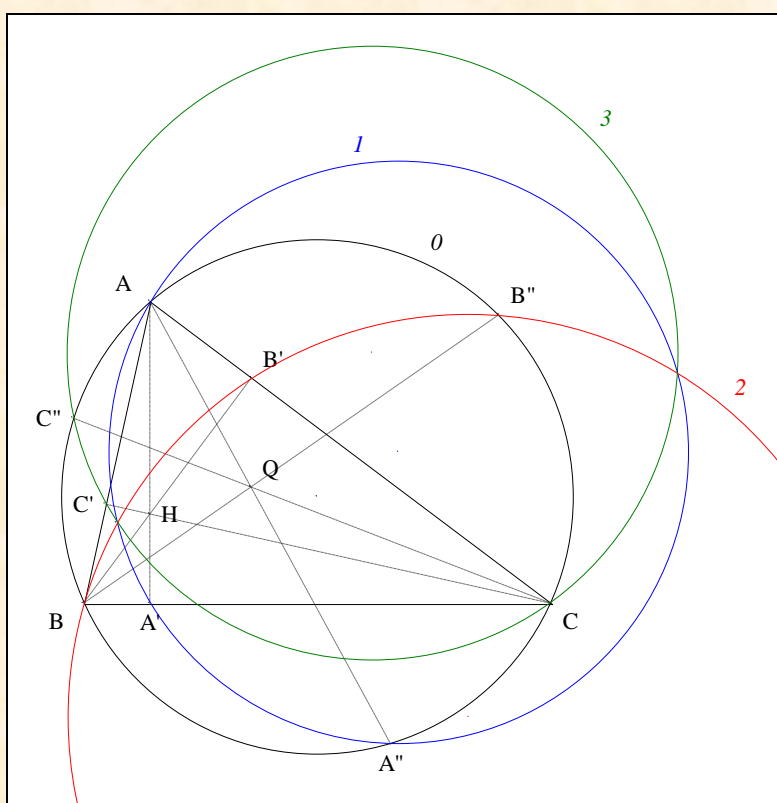
LE RÉSULTAT DU HUNGARY KÜRSCHÁK 2014 ⁷⁵

OU

AUCUN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

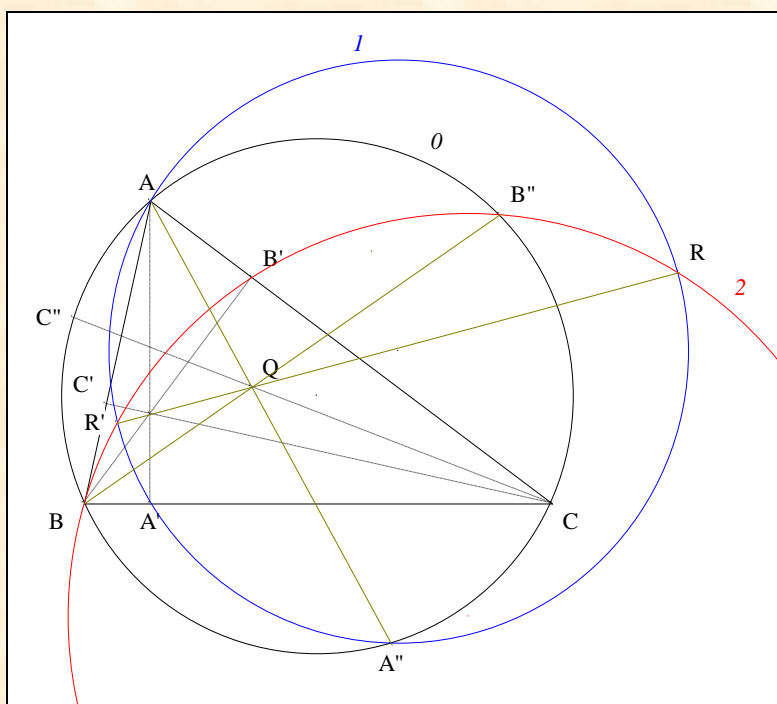
Figure :



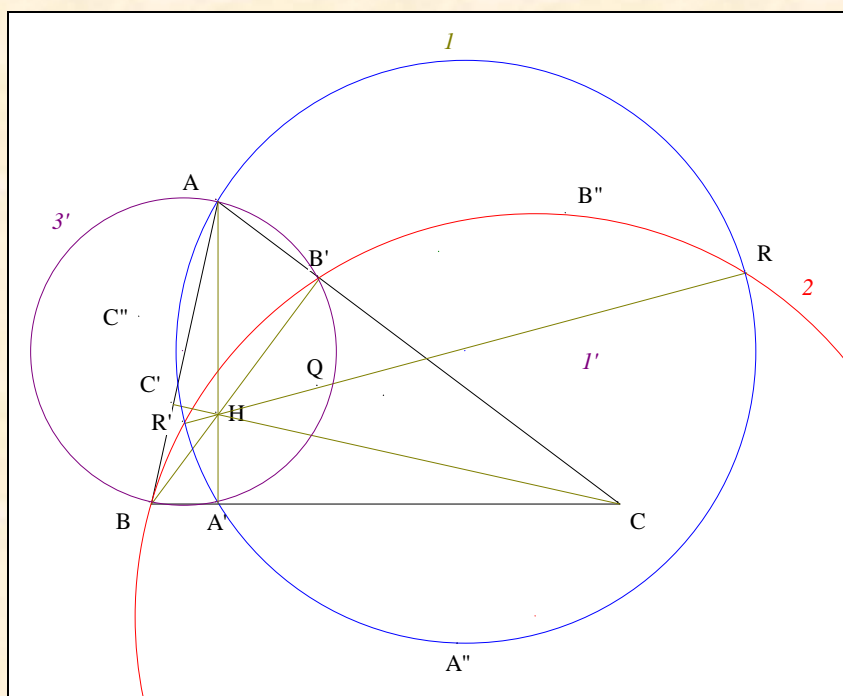
Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
et	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Q	un point,
	A''B''C''	le triangle Q-circumcévien
	1, 2, 3	les cercles circonscrits aux triangles AA'A'', BB'B'', CC'C''.

Donné : $I, 2$ et 3 sont coaxiaux.⁷⁶

VISUALISATION



- Notons R, R' les seconds points d'intersection de I et 2 .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à $0, I$ et 2 , (RR') passe par Q .



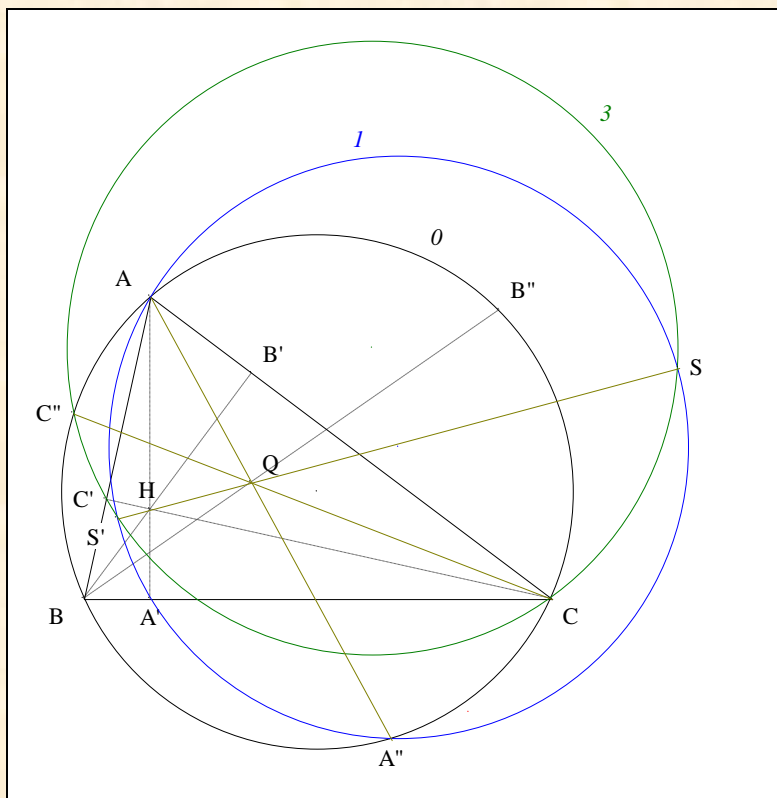
- Notons $3'$ le cercle de diamètre $[AB]$; il passe par A' et B' .

⁷⁶

Kürschák 2014, problem 2

Three concurrent circles, AoPS du 10/10/2014 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=609504>

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à l , 2 et $3'$, (RR') passe par H .



- Notons S, S' les seconds points d'intersection de l et 3 .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que en conséquence, (SS') passe par P et H ;
 R et S sont confondus
 R' et S' sont confondus.
- **Conclusion :** l , 2 et 3 sont coaxiaux.

APPLICATION DIRECTE

1. La conjecture d'Antreas Hatzipolakis

VISION

Figure :

E. TRIANGLES P-CERCLECÉVIEN

ET

LE POINT P^*

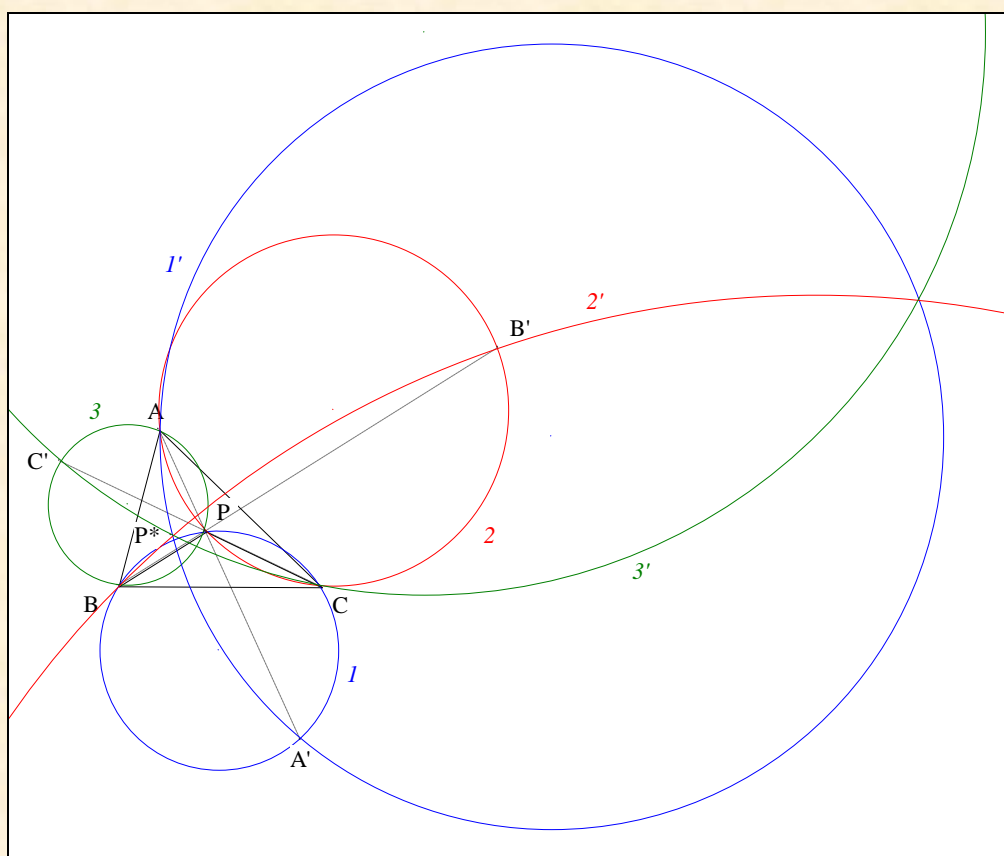
LE RÉSULTAT DE NGO QUANG DUONG

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 P un point,
 P^* l'isogonal de P relativement à ABC ,
 $1, 2, 3$ les cercles circonscrits aux triangles PBC, PCA, PAB ,
 A', B', C' les seconds points d'intersection de $(AP), (BP), (CP)$ resp. avec $1, 2, 3$
 et $1', 2', 3'$ les cercles circonscrits aux triangles P^*AA', P^*BB', P^*CC' .

Donné : $1', 2'$ et $3'$ sont coaxiaux ⁷⁹.

⁷⁹

Ngo Quang Duong, Generalization of Musselman's theorem, *Anopolis* du 14/06/2015 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Anopolis/conversations/topics/2648?from=trending>

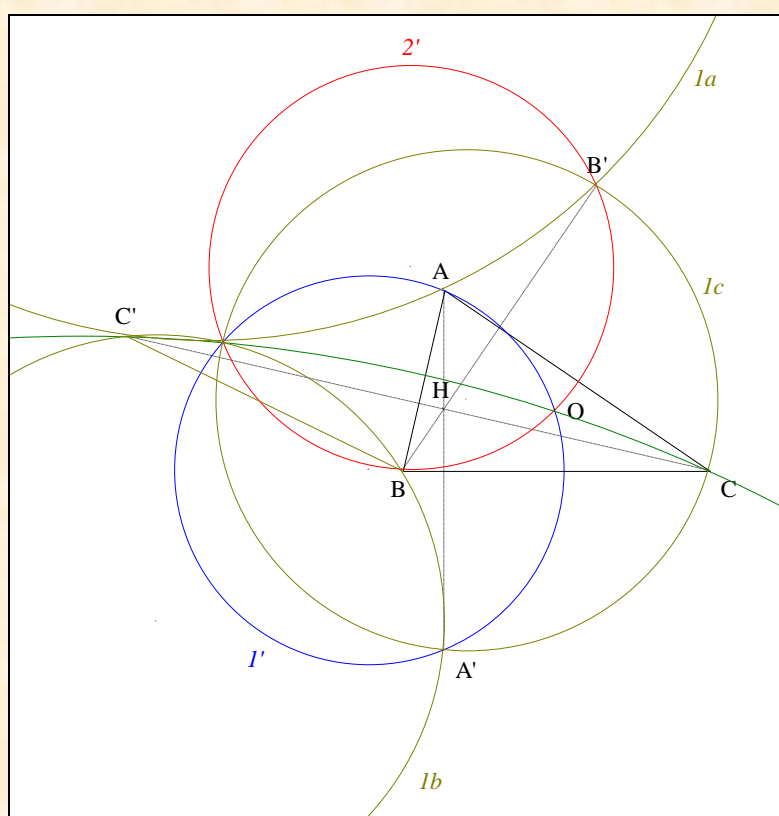
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur ⁸⁰.

EXEMPLES

1. L'auteur

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 H l'orthocentre de ABC,
 A'B'C' le triangle symétrique ⁸¹ de ABC,
 1', 2', 3' les A, B, C-cercles de Musselman ⁸² de ABC
 et 1a, 1b, 1c les A, B, C-cercles de Yiu de ABC.

Donné : 1', 2', 3', 1a, 1b et 1c sont concourants.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur ⁸³.

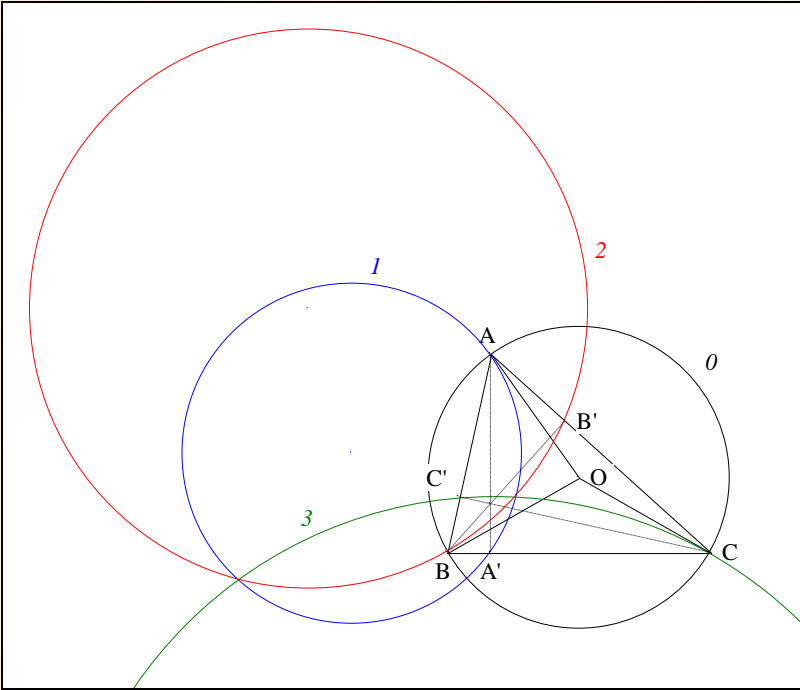
⁸⁰ Quelques cercles, *Les-Mathématiques.net* ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1108941>
 Ayme J.-L., La droite d'Euler généralisée, G.G.G. vol. 23, p. 39 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
⁸¹ Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. 23 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
 ou H-cerclecévien où A', B', C' sont les seconds points d'intersection de (AH), (BH), (CH) avec les cercles circonscrits aux triangles HBC, HCA, HAB
⁸² i.e. les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'O, BB'O, CC'O
⁸³ Ayme J.-L., Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. 23 p. 8-14 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

F. TRIANGLE H-CÉVIEN ET O-ANTICIRCUMCÉVIEN ⁸⁴
OU
AUCUN POINT COMMUN AU DÉPART

1. Le triangle H-cévien et un rayon

VISION

Figure :

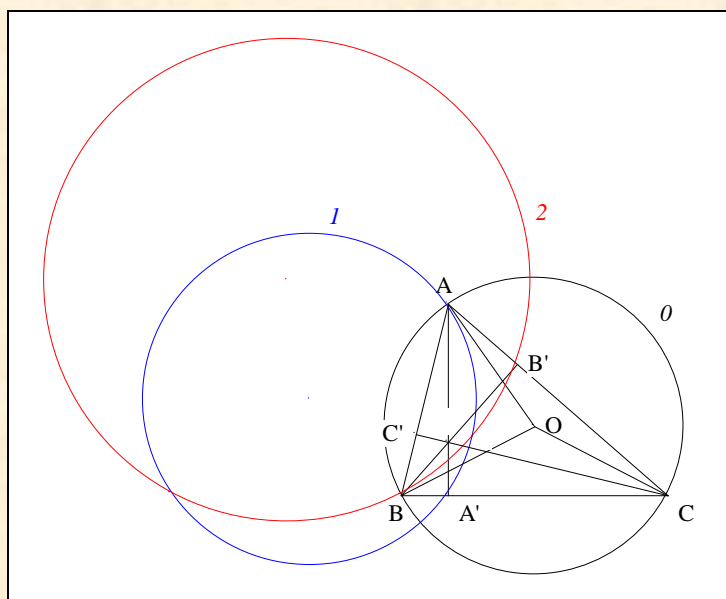


- Traits : ABC un triangle acutangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 O le centre de O ,
 $A'B'C'$ le triangle orthique de ABC ,
 1 le cercle tangent à (OA) en A passant par A' ,
 2 le cercle tangent à (OB) en B passant par B'
et 3 le cercle tangent à (OC) en C passant par C' .

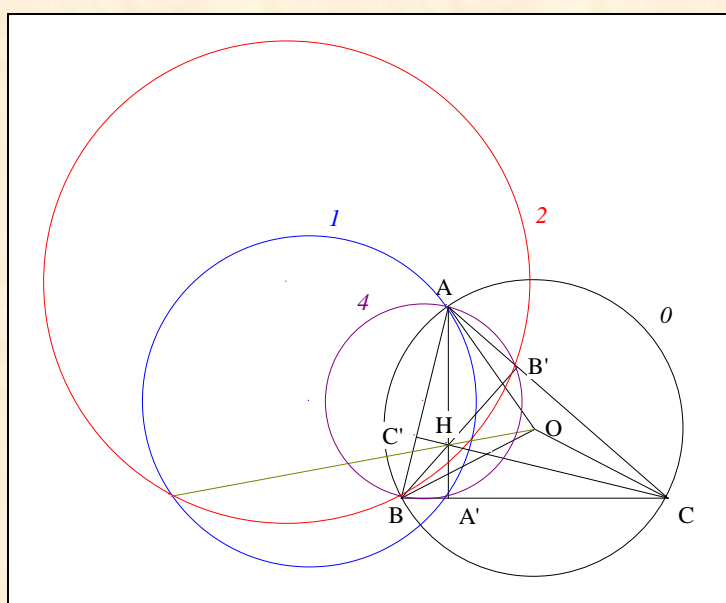
Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux.

VISUALISATION

⁸⁴ i.e. ABC



- Par définition, I et 2 sont orthogonaux à 0 .
- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants", O est sur l'axe radical de I et 2 .



- Notons 4 le cercle de diamètre $[AB]$; il passe par A' et B' ;
et H l'orthocentre de ABC .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à I , 2 et 4 , H est sur l'axe radical de I et 2 .
- **Conclusion partielle :** (OH) est l'axe radical de I et 2 .
- ABC étant acutangle,
 - (1) H est intérieur resp. à ABC , I , 2 .
 - (2) I et 2 sont sécants.⁸⁵
- **Scolie :** (OH) passe par les points d'intersection de I et 2 .

85

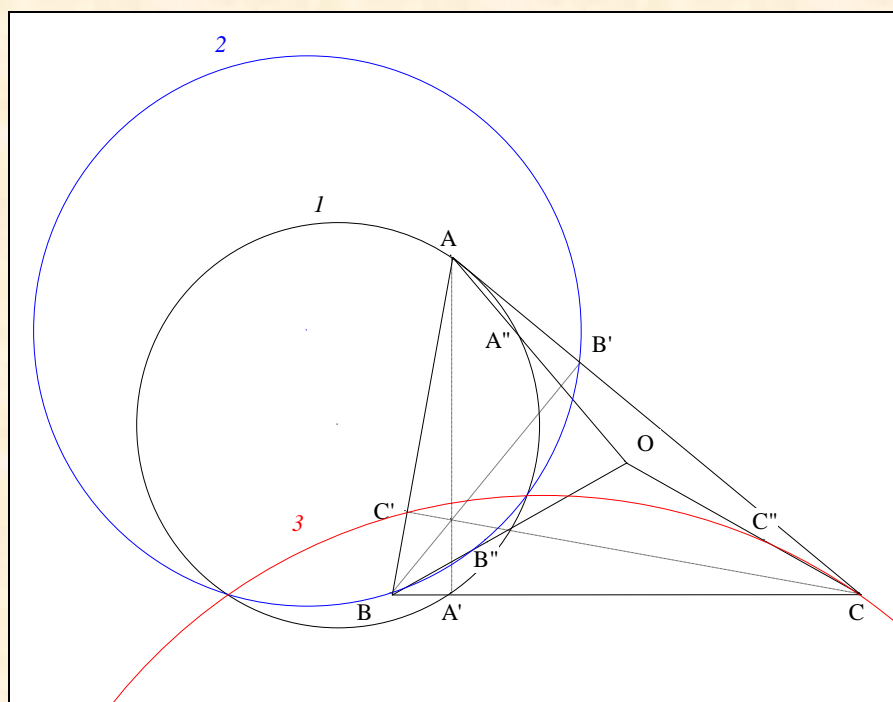
Ayme J.-L., Secant circles ?, AoPS du 16/02/2015 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=625445>

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (OH) passe par les points d'intersection de 2 et 3.
- **Conclusion** : 1, 2 et 3 sont coaxiaux.

2. Généralisation

VISION

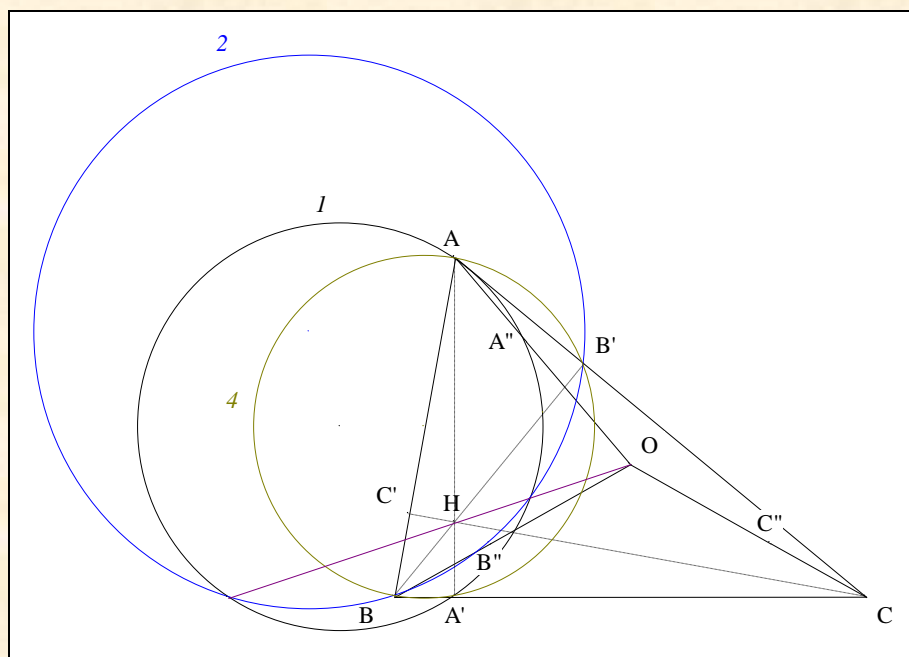
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	θ	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de θ ,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	A'', B'', C''	trois point resp. de [OA], [OB], [OC] tels que $OA'' = OB'' = OC''$,
	1	le cercle passant par A, A', A'',
	2	le cercle passant par B, B', B'',
et	3	le cercle passant par C, C', C''.

Donné : 1, 2 et 3 sont coaxiaux.

VISUALISATION



- Par puissance de O resp. par rapport à 1 et 2, O est sur l'axe radical de 1 et 2.
- Notons 4 le cercle de diamètre $[AB]$; il passe par A' et B' ;
et H l'orthocentre de ABC .
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à 1, 2 et 4, H est sur l'axe radical de 1 et 2.
- **Conclusion partielle :** (OH) est l'axe radical de 1 et 2.
- ABC étant acutangle,
 - (1) H est intérieur resp. à ABC , 1, 2.
 - (2) 1 et 2 sont sécants.
- **Scolie :** (OH) passe par les points d'intersection de 1 et 2.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (OH) passe par les points d'intersection de 2 et 3.
- **Conclusion :** 1, 2 et 3 sont coaxiaux.

Scolie : lorsque A'', B'', C'' sont en O ,
le résultat en **C. 1**. Le triangle orthique et le point O ,
apparaît comme un cas particulier.

G. SITUATIONS NON CENTRALE

ET

LE POINT D

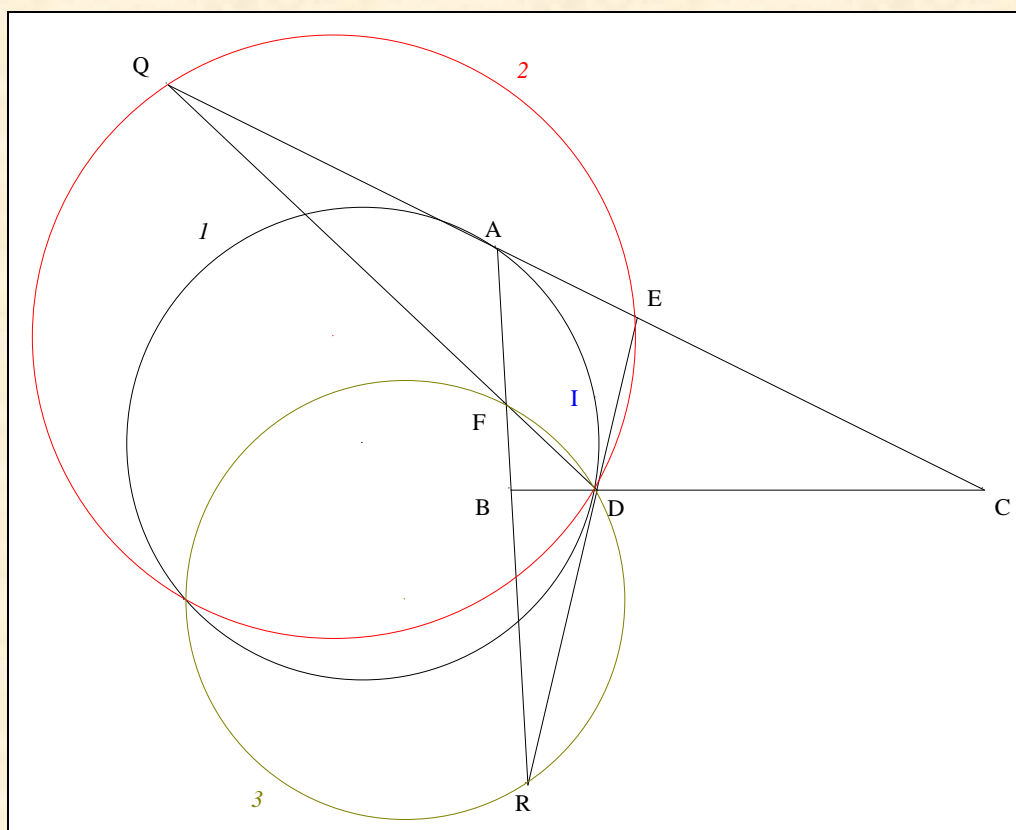
LE RÉSULTAT DE JOSEPH LAM ⁸⁶

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
 I le centre de ABC,
 DEF le triangle de contact de ABC,
 R, Q les points d'intersection de (DE) et (AB), (DF) et (AC),
 et 1, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles AID, EQD, FRD.

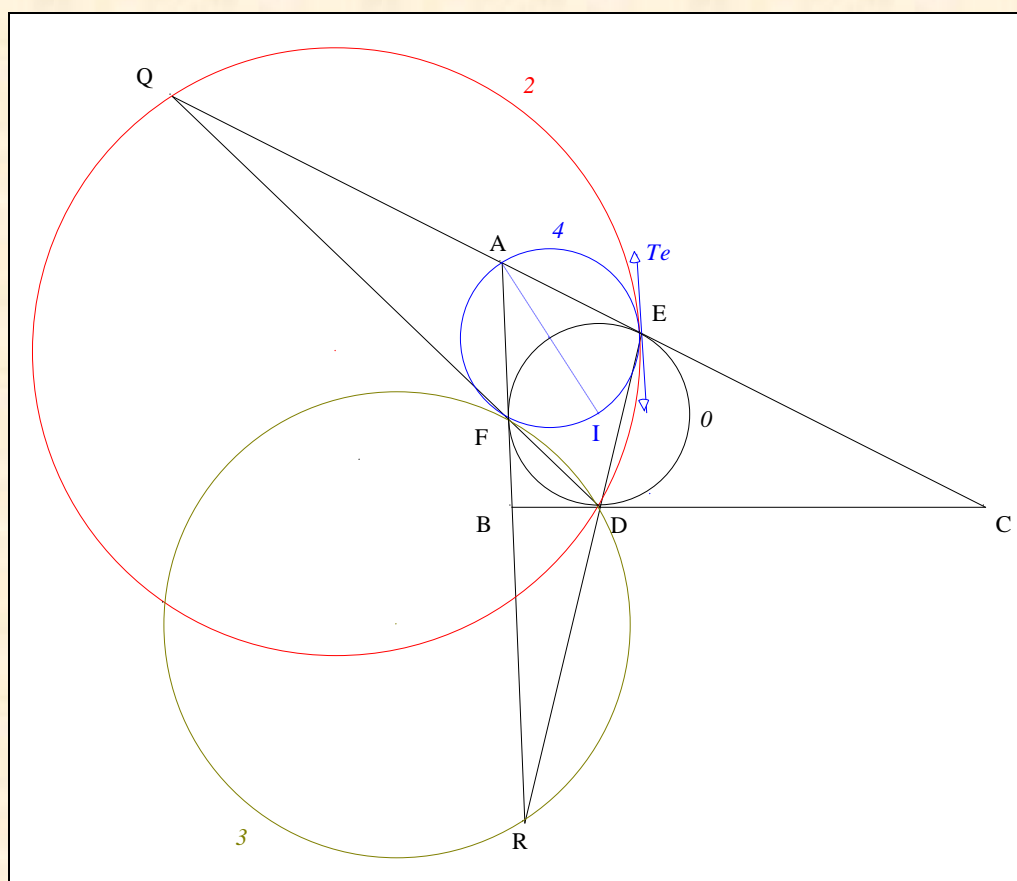
Donné : 1, 2 et 3 sont coaxiaux. ⁸⁷

⁸⁶
⁸⁷

Connu sous le pseudonyme *jlammy* sur le site AoPS
 jlammy, Coaxal circles in incenter/excenter configuration, AoPS du 13/04/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1077334_coaxal_circles_in_incenterexcenter_configuration
 Liberator, Coaxal circles in incenter/excenter configuration, 15/04/2015 ; <http://artofproblemsolving.com/community/c3103>

Commentaire : le résultat reste inchangé dans une extraversion de I.

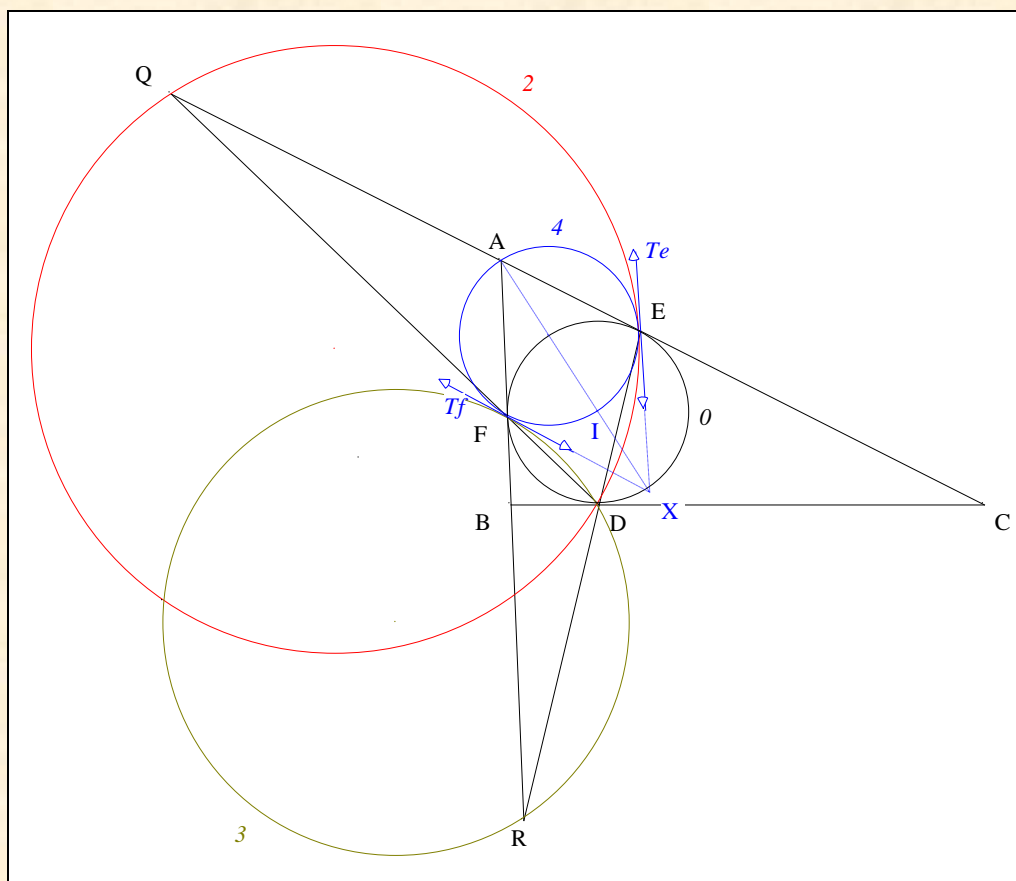
VISUALISATION



- Notons 0 le cercle inscrit à ABC
et 4 le cercle de diamètre $[AI]$.
- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles concourants"⁸⁸
appliqué au triangle AFQ avec F sur (AF), D sur (FQ) et E sur (QA), 4 est tangent à 2 en E.
- Notons Te la tangente commune à 2 et 4 en E.

⁸⁸

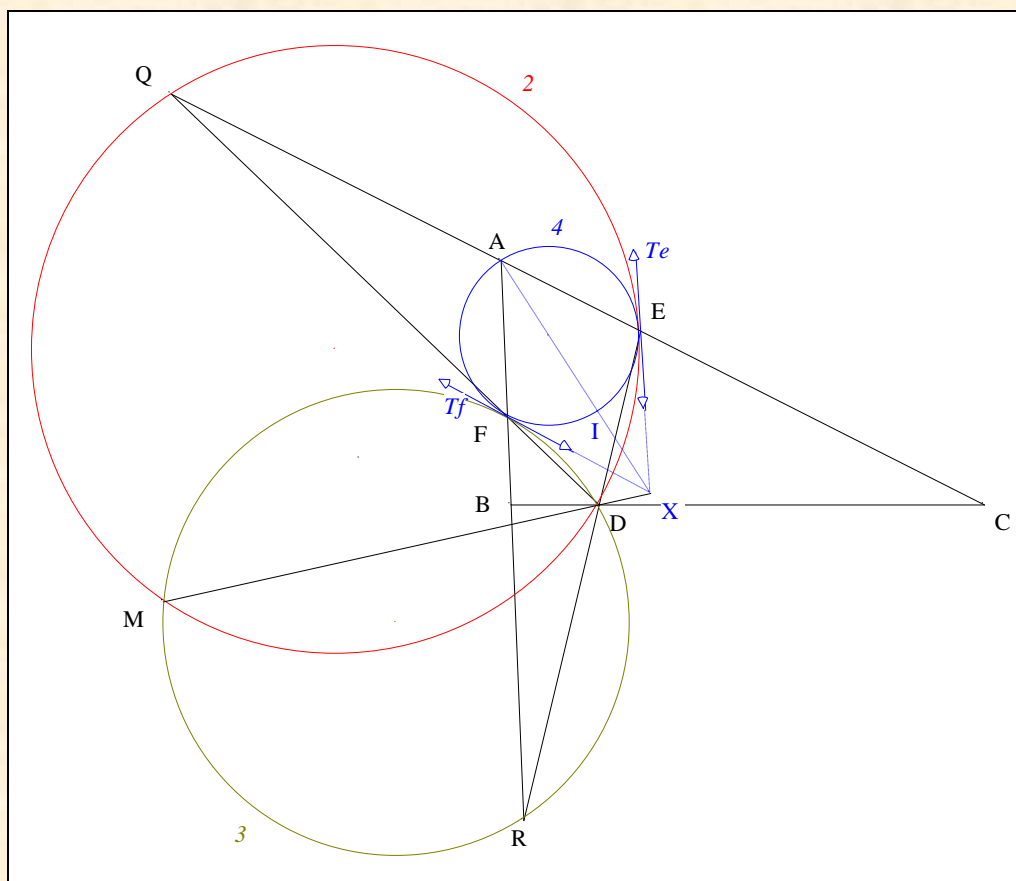
Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 6 p. 4 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles concourants"⁸⁹ appliqué au triangle AER avec E sur (AE), D sur (ER) et F sur (RA), 4 est tangent à 3 en F.
- Notons T_f la tangente commune à 3 et 4 en E.
- Par symétrie d'axe (AI), T_e et T_f se coupent sur (AI).
- Notons X ce point de concours

⁸⁹

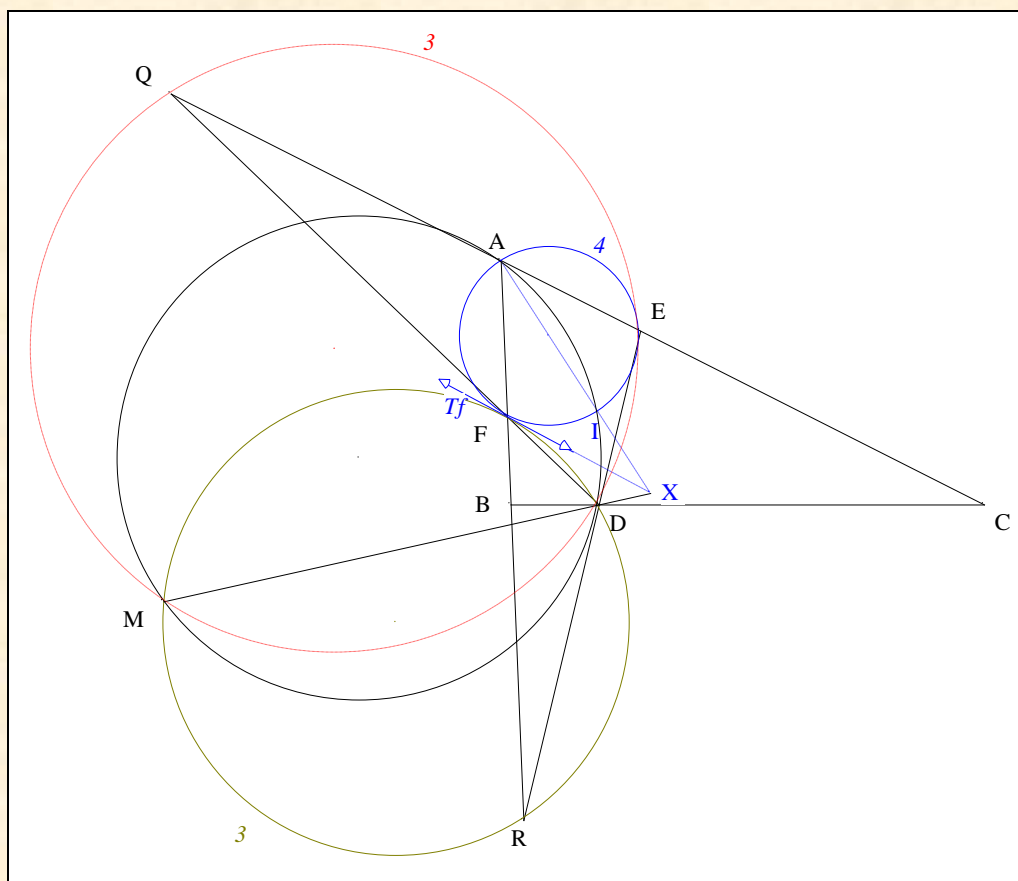
Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 6 p. 4 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Notons M le second point d'intersection de 2 et 3.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"⁹⁰ appliqué à 2, 3 et 4, (MD) passe par X .

⁹⁰

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" ⁹¹ appliqué à 3, 4 et X, A, I, D et M sont cocycliques.
- **Conclusion :** 1, 2 et 3 sont coaxiaux.

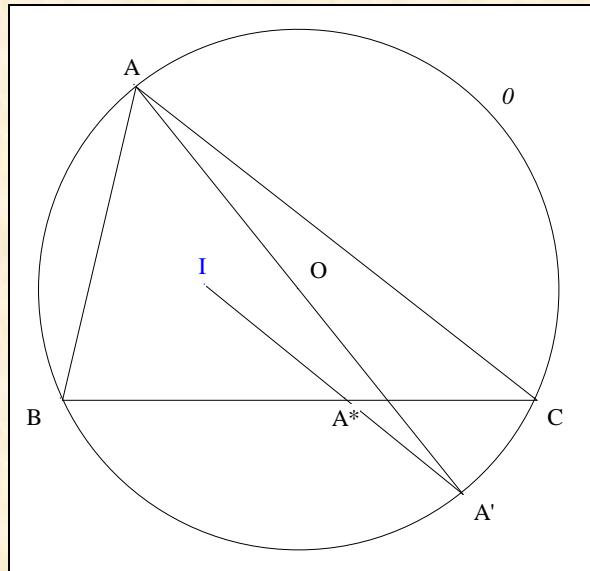
⁹¹ Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

H. APPENDICE

1. Un rapport

VISION

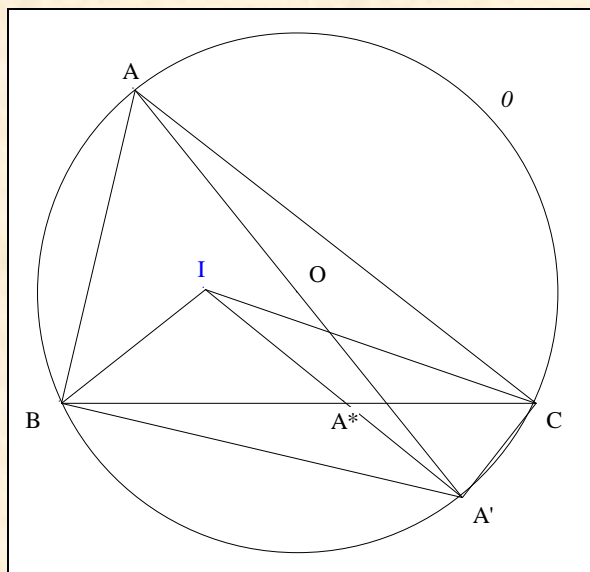
Figure :



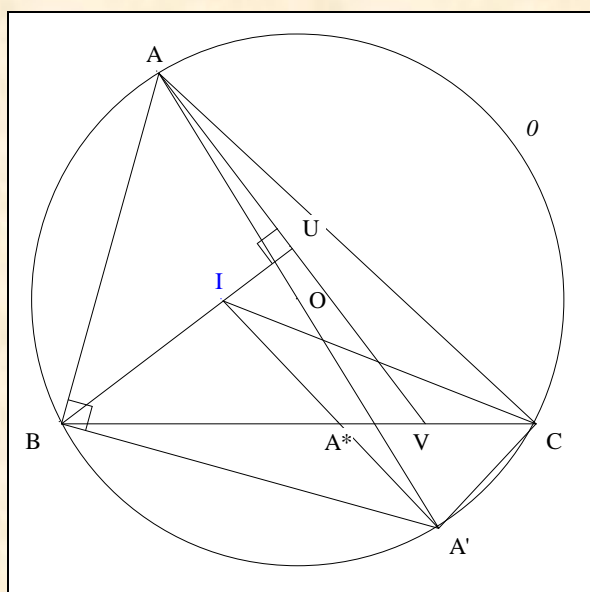
Traits : ABC un triangle,
 θ le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de θ ,
 A' l'antipôle de A relativement à I ,
 I le centre de I ,
 et A* le point d'intersection de (IA') et (BC).

Donné : $A^*B/A^*C = (IB/IC) \cdot (\cos \frac{1}{2} \angle B \cdot \cos \angle C / \cos \angle B \cdot \cos \frac{1}{2} \angle C)$.

VISUALISATION



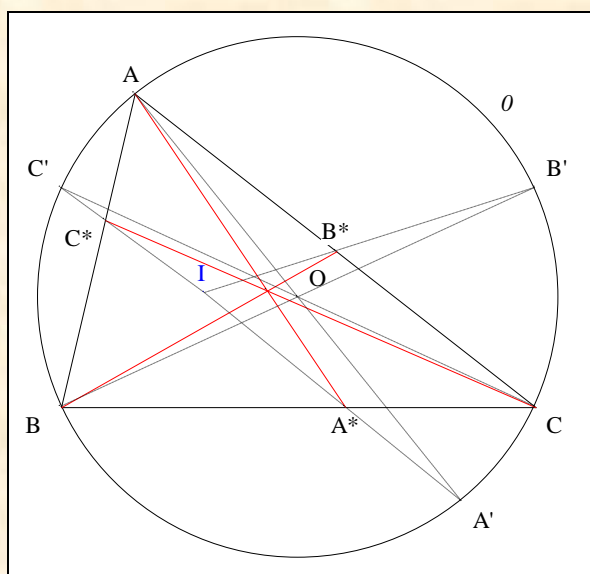
- Notons $[ABC]$ l'aire de ABC .
- Une chasse de rapports :
 - * culture géométrique, $A^*B/A^*C = [BIA']/[CIA']$
 - * la formule de Snell, $[BIA']/[CIA'] = (BI \cdot BA' \cdot \sin \angle A'BI) / (CI \cdot CA' \cdot \sin \angle ICA')$
- **Conclusion partielle :** transitivité de $=$, $A^*B/A^*C = (BI \cdot BA' \cdot \sin \angle A'BI) / (CI \cdot CA' \cdot \sin \angle ICA')$.



- Notons U le point d'intersection de (BI) avec la perpendiculaire à (BI) issue de A
 et V le point d'intersection de (AU) et (BC) .
- **Scolie :** le triangle BAV est B -isocèle.
- Une chasse angulaire :
 - * une autre écriture, $\angle A'BI = \angle A'BU$
 - * "angles à côtés perpendiculaires", $\angle A'BU = \angle BAU$

Donné : (AA^*) , (BB^*) et (CC^*) sont concourantes.

VISUALISATION



- D'après **G.** Appendice 1, $A^*B/A^*C = (IB/IC).(\cos \frac{1}{2} \angle B \cos \angle C / \cos \angle B \cos \frac{1}{2} \angle C)$.
- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Ceva", (AA^*) , (BB^*) et (CC^*) sont concourantes.