LE THÉORÈME DES TROIS CORDES

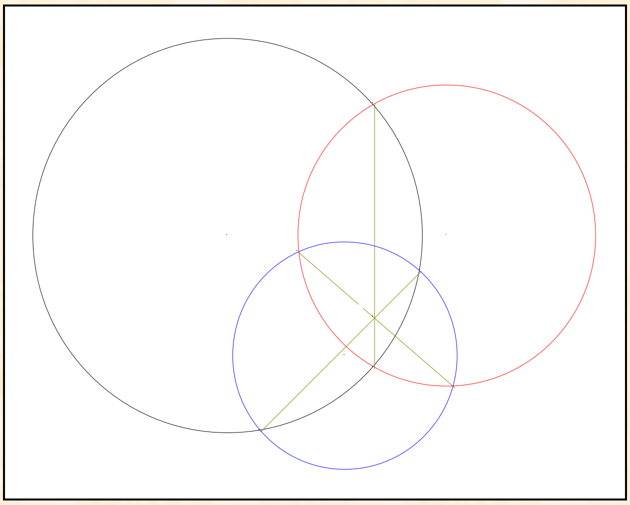
APPLICATIONS

AUX

POINTS INVERSES

†

Jean - Louis AYME



Résumé. Le théorème des trois cordes de Gaspard Monge permet à l'auteur de présenter la construction du point inverse d'un point relativement au cercle circonscrit d'un triangle. Dans le cas particulier où ce point est le centre du triangle, une parallèle passant par le point de Feuerbach à la droite d'Euler du triangle est présentée. En 2006, une généralisation de la relation "est l'inverse de" est proposée par Quang Tuan Bui.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

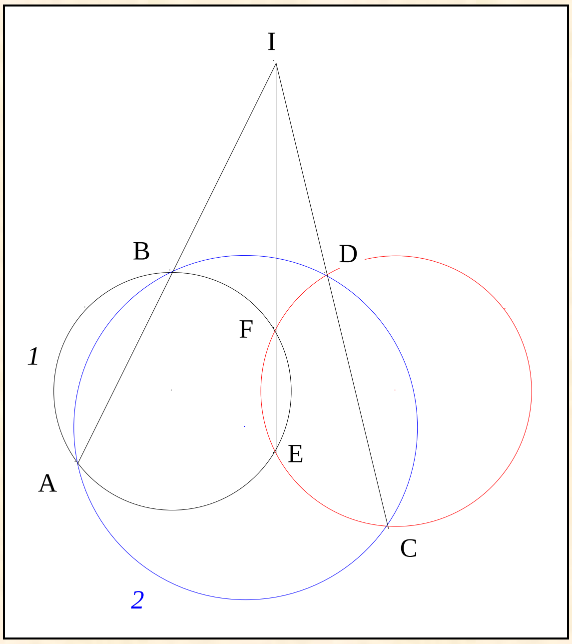
A. LE THÉORÈME DES TROIS CORDES

VISION DOUBLE

OU

RESBIS

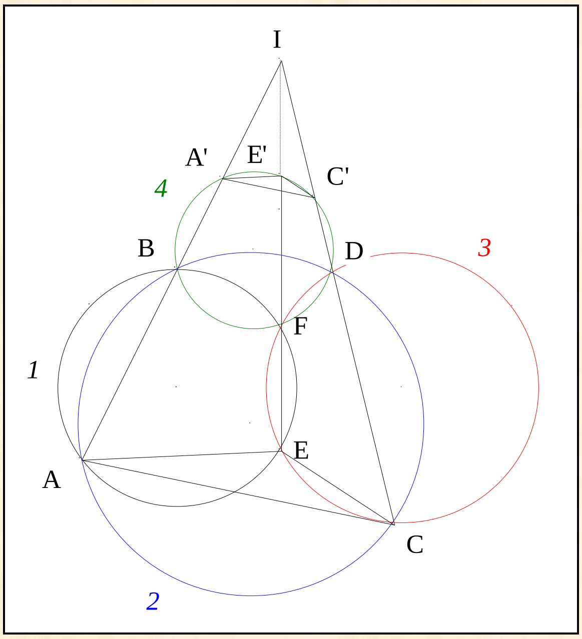
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	C, D	deux points de *2*,
	E, F	deux points de *1*
et	I	le point d'intersection de (AB) et (CD).

Donné : C, D, E et F sont cocycliques *si, et seulement si,* (EF) passe par I.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *3* le cercle passant par C, D, E, F,
  4 le cercle passant par B, F, D
  et A', C', E' les seconds points d'intersection resp. de (AB), (CD), (EF) avec *4*.

- Les cercles *2* et *4*, les points de base B et D, les moniennes (ABA') et (CDC'),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AC) // (A'C').

- Les cercles *3* et *4*, les points de base D et F, les moniennes (CDC') et (EFE'),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (CE) // (C'E').

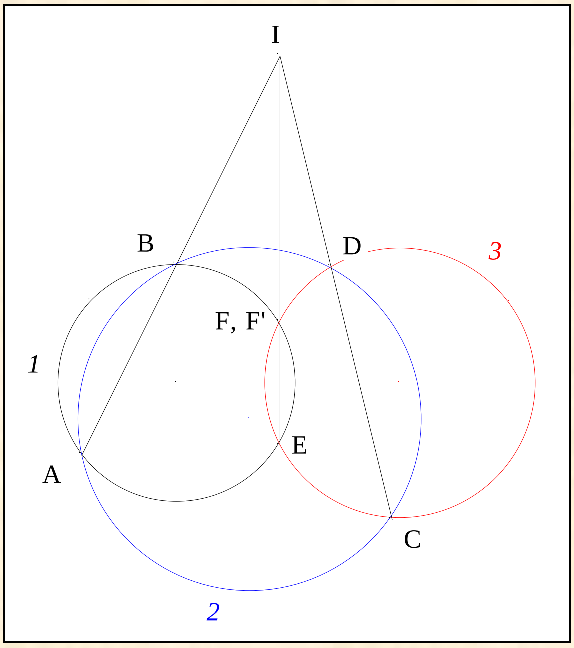
- Les cercles *1* et *4*, les points de base B et F, les moniennes (ABA') et (EFE'),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (EA) // (E'A').

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe)
  appliqué aux triangles homothétiques EAC et E'A'C', (EE') passe par I.

- **Conclusion :** (EF) passe par I.

Énoncé de Monge : *lorsque trois cercles sont sécants deux à deux,*
les trois droites d'intersection sont concourantes.

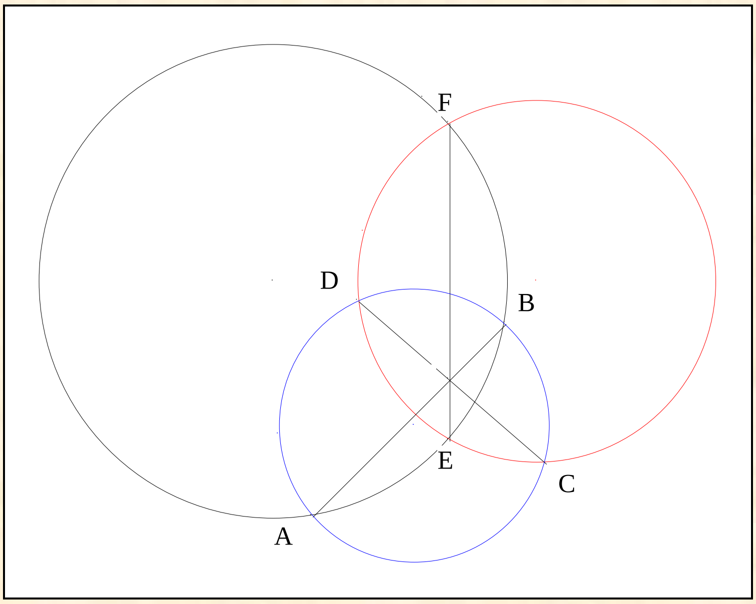
VISUALISATION SUFFISANTE



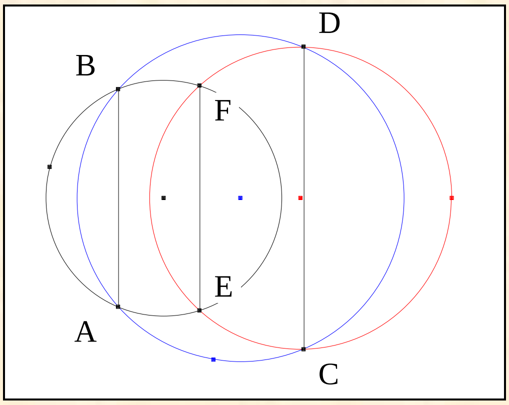
- Notons 3 le cercle passant par C, D, E
  et F' le second point d'intersection de *3* et *1*.
- D'après la visualisation nécessaire, (EF') passe par I.
- F' étant à la fois sur (EI) et sur *1*, est confondus avec F.
- **Conclusion :** C, D, E et F sont cocycliques**.**

Énoncé : *si, deux cercles sont sécants et que la droite commune passe par le point d'intersection d'une sécante à l'un et d'une sécante à l'autre,*
alors, les quatre points d'intersection sont cocycliques.

Scolies : **(1)** la figure de Monge

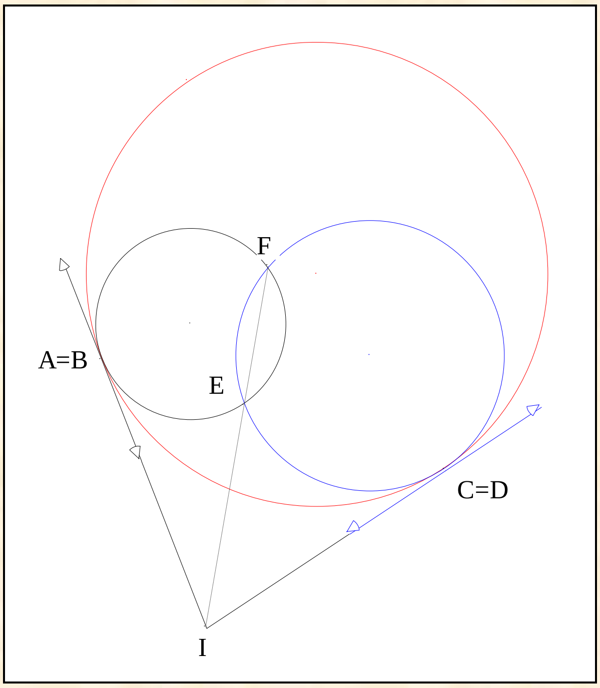


(2) Vision particulière



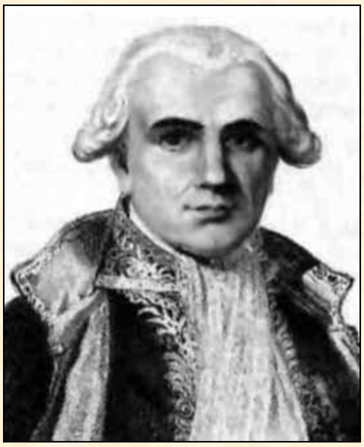
(AB) et (CD) étant parallèles,
C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
(AB), (CD) et (EF) sont parallèles entre elles.

(3) Une autre vision particulière



si, les tangentes Ta et Tc sont sécantes en I
alors, (EF) passe par I.

Une courte biographie de Gaspard Monge, Comte de Péluse



Gaspard Monge est né à Beaune (Bourgogne, France), le 9 mai 1746.
Fils de Jacques Monge, un modeste marchand ambulant originaire de Haute-Savoie et de la bourguignonne Jeanne Rousseaux, Gaspard est un élève brillant au collège des Oratoriens de Beaune. En 1762, il poursuit ses études au collège de la Trinité de Lyon où l'année suivante, il enseigne à l'âge de 17 ans la physique. Ses dons remarquables pour le dessin, lui permettent d'entrer en 1765 comme dessinateur à l'École royale militaire du génie de Mézières. L'année suivante, il devient technicien, puis répétiteur de cette École. Il a alors 20 ans. En 1769, il remplace le professeur de mathématiques, l'abbé Charles Bossut. En 1770, il remplace l'abbé Jean Antoine Nollet, devient l'année suivante professeur de physique et en 1775, obtient finalement le titre de "Professeur royal de mathématiques et de physique".
En 1777, il épouse Catherine Huart.
Créateur d'une nouvelle doctrine, la Géométrie descriptive qui fut longtemps considérée comme un secret d'État, et dont les méthodes ne furent divulguées que par la publication des cours professés à l'École Normale de l'An III, Monge s'intéresse aussi à la géométrie différentielle et aux équations aux dérivées partielles.
En 1780, il est élu "associé géomètre" à l'Académie des Sciences, entre en relation avec Condorcet, Lavoisier et Vandermonde et obtient une chaire d'hydraulique.
En 1783, il remplace Étienne Bezout et devient examinateur des cadets de la Marine et quitte l'année suivante l'École royale pour se fixer à Paris. Favorable à la Révolution, il devient ministre de la Marine de 1792 à 1793, fait partie du Comité de Salut Public et participe à la fondation de l'École Polytechnique où il enseignera la géométrie descriptive à de nombreuses promotions. Son influence grandit au travers de son enseignement et sa réputation de géomètre se propage en dehors de l'École. Pour beaucoup, il est à l'origine du nouvel essor que connaîtra la Géométrie synthétique du XIX-ième siècle.
Le grand traité de l'*Analyse appliquée à la Géométrie* écrit d'abord sous le titre de *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie* (1795), pour l'usage de l'École Polytechnique, est en grande partie le résumé des différents Mémoires de Monge, insérés durant une trentaine d'année, dans le recueil des *Savants étrangers*, dans les *Mémoires de l'Acadie* et dans le *Journal de l'École Polytechnique*.
Après avoir accompagné Napoléon Bonaparte en Égypte, il devient à son retour, directeur de l'École Polytechnique.
La Restauration privera le comte de Péluse de tous ses titres et charges.
Il meurt à Paris, le 28 juillet 1818.

Rappelons que son frère Louis a été professeur au petit séminaire d'Autun et que dernier frère a été d'abord professeur dans une école militaire, ensuite consul en Espagne à la Corogne et, enfin, professeur d'hydrographie à Nantes et à Anvers.

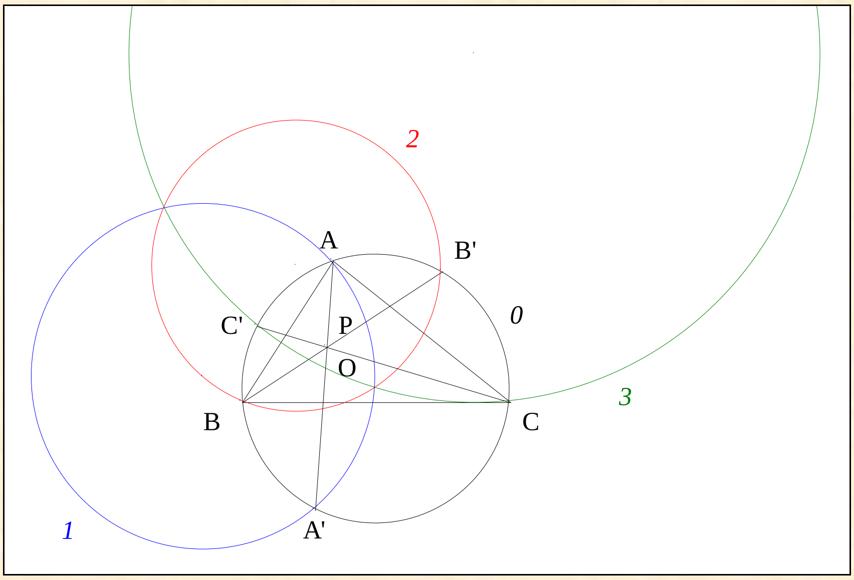
Terminons avec une petite anecdote concernant la Tour Eiffel qui a rendu hommage à 72 savants dont 24 mathématiciens :

face Trocadéro :	Poncelet, Chasles, Ampère, Legendre
face Grenelle :	Sturm
face École Militaire :	Cauchy, Monge
face Paris :	Carnot

B. TROIS CERCLES COAXIAUX

VISION

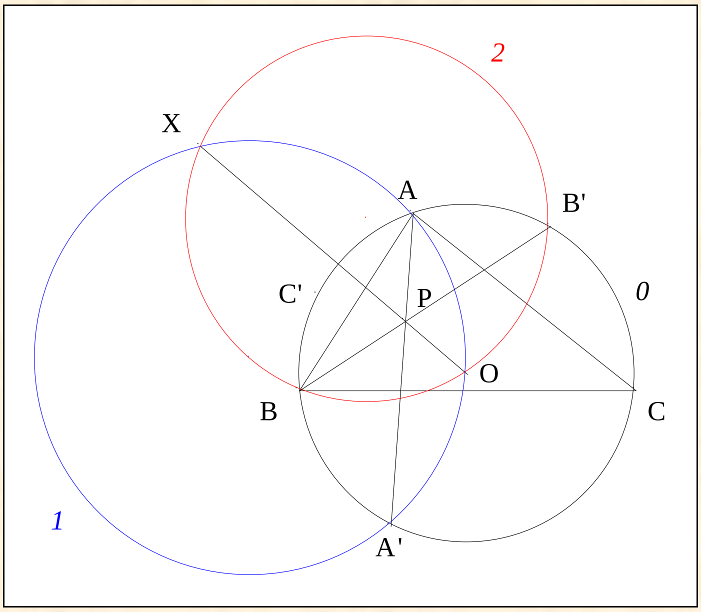
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	P	un point,
	A', B', C'	les circumtraces resp. de (AP), (BP), (CQ)
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. des triangles AOA', BOB', COC'.

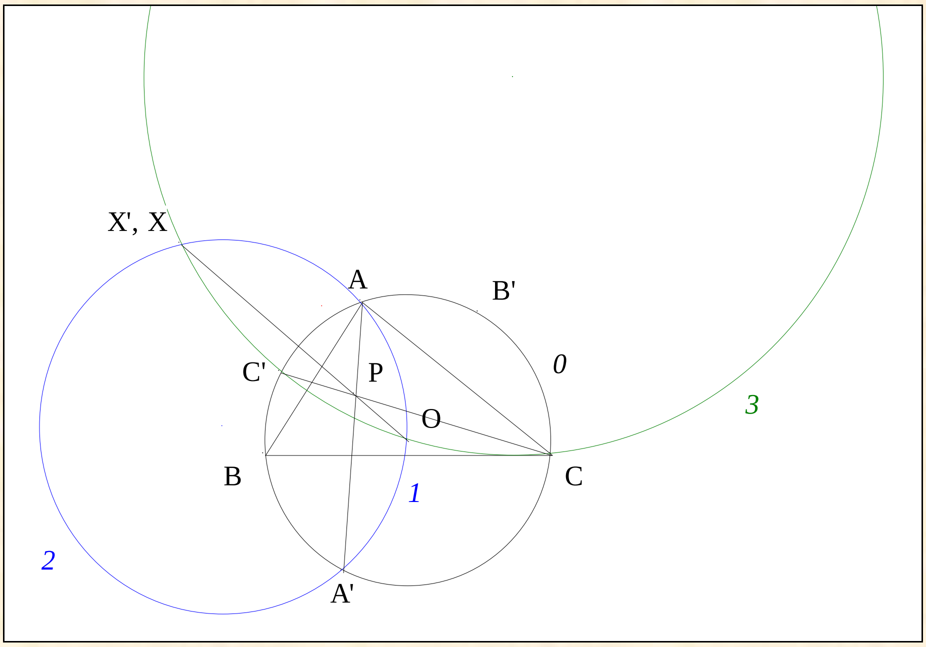
Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

VISUALISATION



- Notons X le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après A. Le théorème des trois cordes, appliqué à *0*, *1* et *2*, (OP) passe par X.



- Notons X' le second point d'intersection de *1* et *3*.

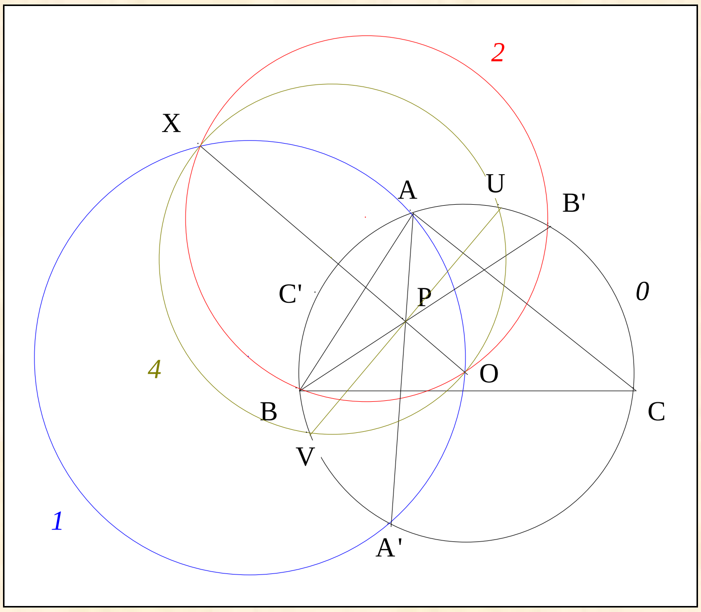
- D'après A. Le théorème des trois cordes, appliqué à *0*, *1* et *3*, (OP) passe par X' ;
  en conséquence, X et X' sont confondus.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

Scolies : **(1)** X et P sont inverses relativement au cercle *0* de centre O.

(2) Relativement à P, X est noté P^{-1}.

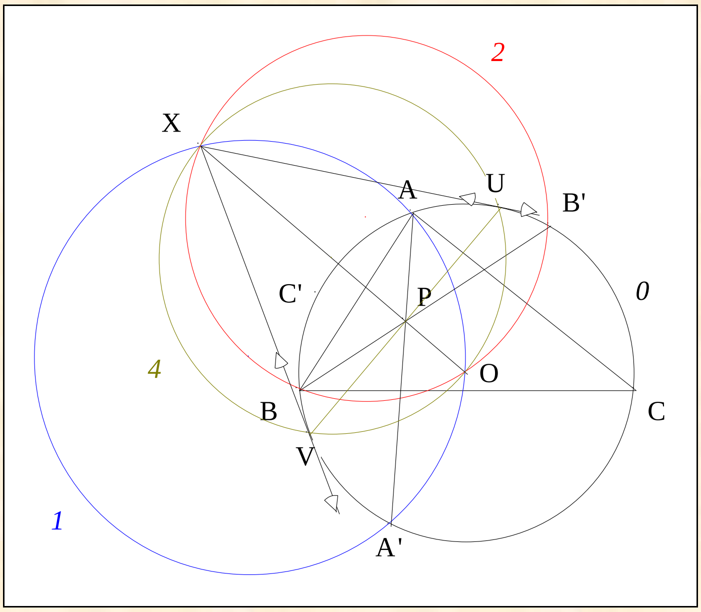
(3) Pour mieux comprendre la nature algébrique de X



- Notons 4 le cercle de diamètre [OX]
  et U, V les points d'intersection de *0* et *4*.

- Nous avons : (UV) ⊥ (OX).

- D'après A. Le théorème des trois cordes, appliqué à *0*, *1* et *4*, (AA'), (OX) et (UV) sont concourantes ;
  en conséquence, (UV) passe par P.



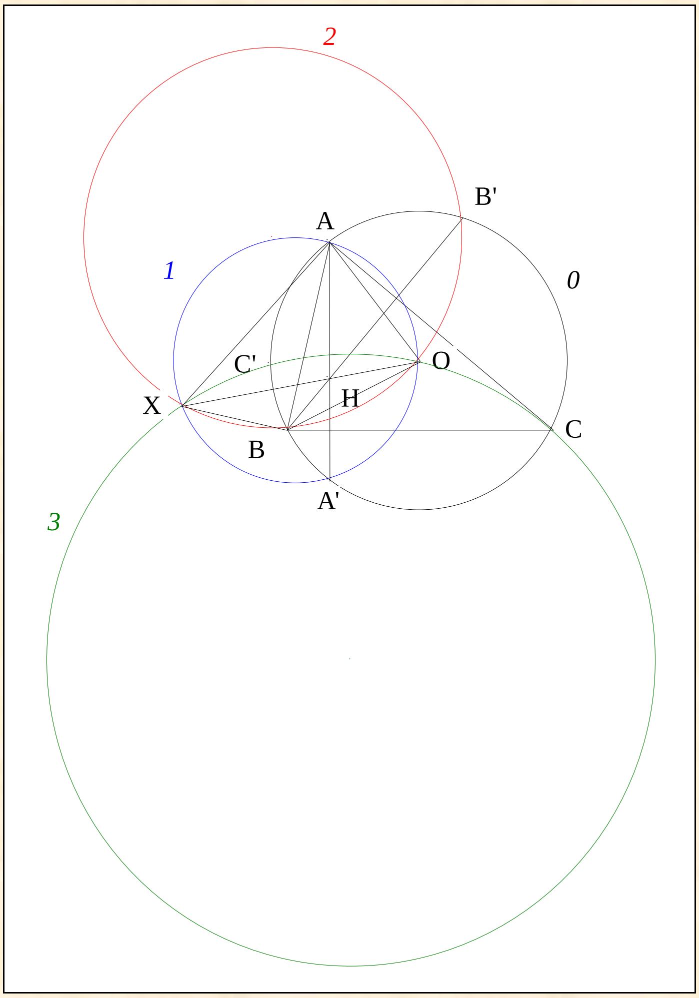
- Les tangentes à *0* en U, V passant par X, $OU^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OX}$.

- **Conclusion :** algébriquement, X et P sont inverses relativement au cercle *0* de centre O.

Note historique : la notion de points inverses a été introduite par Jean Victor Poncelet[1] en 1822, puis reprise par Adolphe Quetelet[2] en 1827, par Jacob Steiner[3] et Ludwig Immanuel Magnus[4] en 1832.

[1] Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives* (1822).

(4) Le point inverse de l'orthocentre, noté H et répertorié sous X_4 chez ETC, est le point X_{186}.
Appelé en allemand "Dreifachwinkelpunkt"[5], en anglais "threefold angle point", X_{186} est le point à partir duquel chaque côté du triangle est vu sous un angle qui est le triple de l'angle opposé à ce côté.



- Une chasse angulaire basée sur <HAO et sur <OBH permet de montrer que <APB = 3. <ACB.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que <BPC = 3. <BAC
  <CPA = 3. <CBA.

Note historique : ce résultat de Roland Stärk obtenu en 1993 par ordinateur montre que X est le point d'intersection de la droite d'Euler de ABC avec la polaire de H relativement au cercle circonscrit.
Le résultat concernant la droite d'Euler a été auparavant obtenu d'une façon non claire par Karl Mütz[6] en 1992.

(5) Quelques résultats

---

2 Quetelet A., Mémoires Bruxelles 4 (1827).
3 Steiner J., Article 355, *Les constructions géométriques* (1832).
4 Magnus L., *Journal* de Crelle 8 (1832) 51.
5 Stärk R., Beispiele zur Anwendung eines Computeralgebrasystems in der Geometrie", *Elemente der Mathematik* (1993) 107-116 ; Grinberg D., Dreifachwinkelpunkt X(186) (was : From Schröder to McCay, Messsage # 6385, *Hyacinthos*).
6 Mütz K., Die Triplex-Punkte und der Dreifachwinkel-Punkt eines Dreiecks, *Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht* (1992) 220-229.

l'inverse du centre, noté I et répertorié sous X_1 chez ETC,
est le point X_{36}

l'inverse du point médian, noté G et répertorié sous X_2 chez ETC,
est le "far-out point" X_{23}

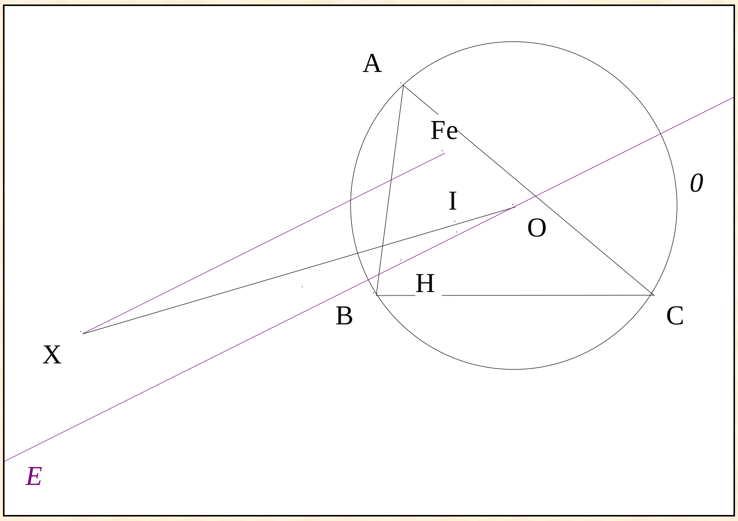
l'inverse du point de Lemoine, noté K et répertorié sous X_6 chez ETC,
est le point de Schoute X_{187}

l'inverse du point de Kosnita[7] noté Ks et répertorié sous X_{54} chez ETC,
est le point de Gibert X_{1157}

C. UNE PARALLÈLE À LA DROITE D'EULER

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
E la droite d'Euler de ABC,
I le centre de ABC,
X l'inverse de I
et Fe le point de Feuerbach de ABC.

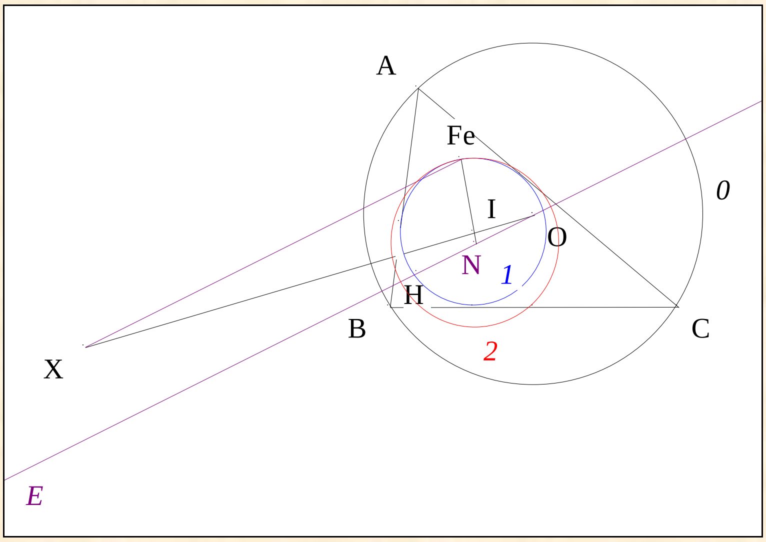
Donné : (FeX) est parallèle à *E*. [8]

VISUALISATION

- **Scolie :** l'inverse de I répertorié sous X_1 chez ETC, est le point X_{36}.

---

7 Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
8 Ayme J.-L., Parallel to the Euler's line, *Mathlinks* du 13/04/2010 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/index.php?f=47.



- Notons R le rayon de *0*,
  1 le cercle inscrit de ABC,
  2 le cercle d'Euler de ABC
  N le centre de *2*
  et r le rayon de *2*.

- D'après "Le théorème de Feuerbach"[9], **(1)** N, I et Fe sont alignés.
  (2) IFe = r.

- **Scolies :** **(1)** 2. IN = R – 2r
  (2) une formule d'Euler : $OI^2 = R^2 - 2Rr$
  (3) par définition de X, $\overline{OX} \cdot \overline{OI} = R^2$

- Une chasse segmentaire : $\overline{IX} = \overline{OX} - \overline{OI}$
  $\overline{IX} \cdot \overline{OI} = \overline{OX} \cdot \overline{OI} - \overline{OI}^2$
  $\overline{OX} \cdot \overline{OI} - \overline{OI}^2 = 2Rr$

- Une chasse de rapports : **(1)** $\dfrac{\overline{IN}}{\overline{IFe}} = \dfrac{2.\overline{IN}}{2.\overline{IFe}} = \dfrac{R-2r}{2r} = \dfrac{R(R-2r)}{2Rr} = \dfrac{OI^2}{2Rr}$.

  (2) $\dfrac{\overline{IO}}{\overline{IX}} = \dfrac{\overline{IO}}{\dfrac{2Rr}{\overline{OI}}} = \dfrac{OI^2}{2Rr}$

  (3) $\dfrac{\overline{IN}}{\overline{IFe}} = \dfrac{\overline{IO}}{\overline{IX}}$.

- D'après le théorème de Thalès, (FeX) // (ON) ou encore (FeX) // (OH)

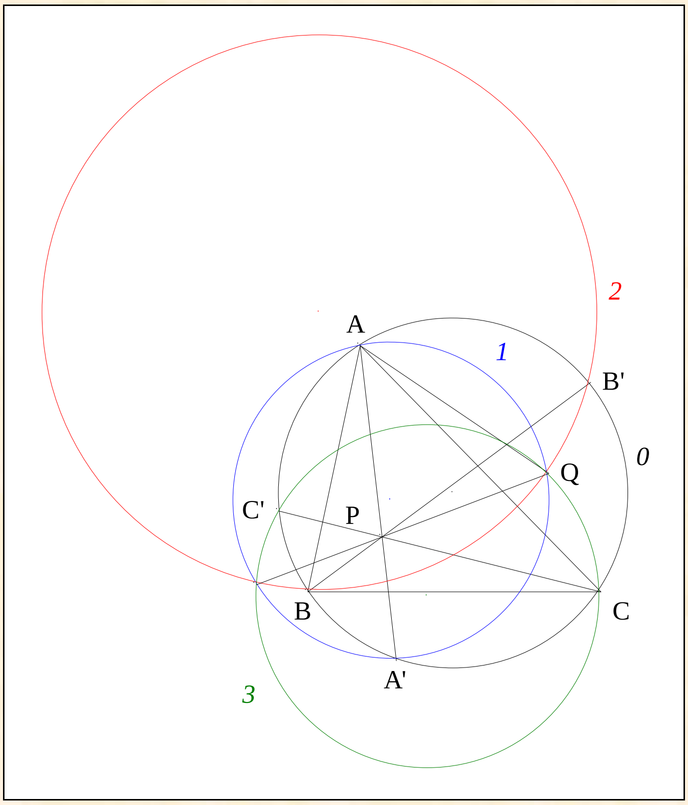
- **Conclusion :** (FeX) est parallèle à *E*.

[9] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

D. UNE GÉNÉRALISATION

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P, Q deux points,
A', B', C' les circumtraces resp. de (AP), (BP), (CQ)
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. des triangles AQA', BQB', CQC'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [10]

VISUALISATION

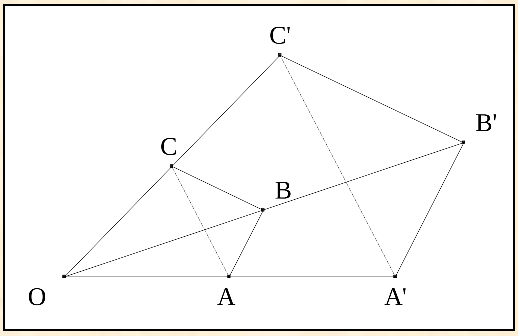
- Considérons B. Trois cercles coaxiaux, en remplaçant O par Q.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

Commentaire : ce résultat de Quang Tuan Bui qui reste à explorer, permet de définir géométriquement un conjugaison entre P et Q.

[10] Bui Q. T., Funny Conjugate, Message *Hyacinthos* # 13625 du 11/07/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/13625.

E. ANNEXE

1. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que
(1) (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C').

Donné : (AC) est parallèle à (A'C').