COLLECTION MATHÉMATIQUE

AUTOUR

DE

TROIS CERCLES COAXIAUX

À

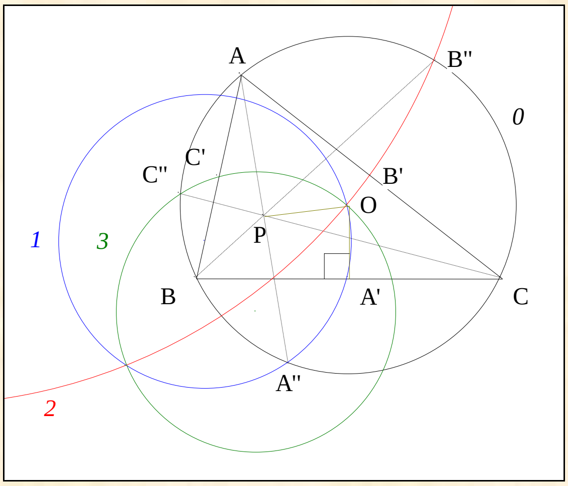
POINTS DE BASE

†

Jean-Louis AYME [1]

II.

LA TECHNIQUE DES CENTRES ALIGNÉS



Résumé. Cette *Collection* présente différentes techniques permettant de montrer que trois cercles sont coaxiaux à points de base. Chaque technique relate plusieurs situations qui s'appuient sur un résultat suivi d'applications directes, puis d'exemples variés glanés par l'auteur au cours de ses lectures.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This *Collection* presents various techniques to show that three circles are coaxial with two basis points. Each technique describes several situations that rely on a result followed by direct applications, and varied examples gleaned by the author during his readings.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan indien, France), le 29/08/2015 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

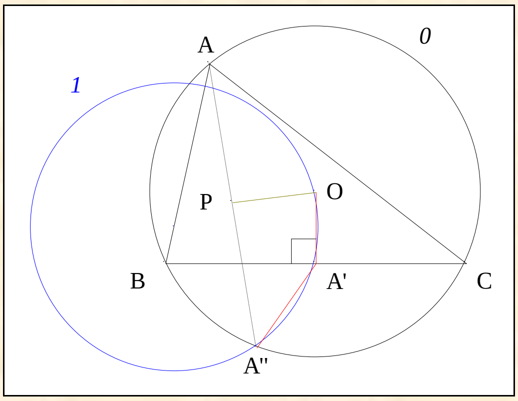
Sommaire

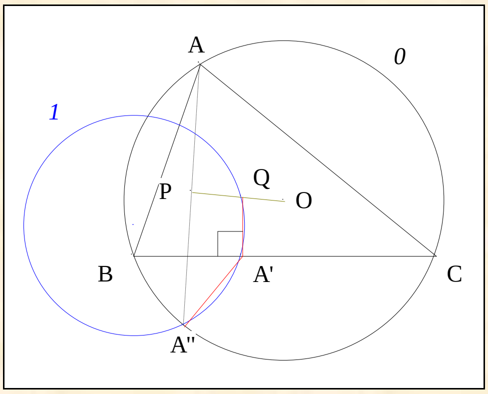
RÉCAPITULATION

EN

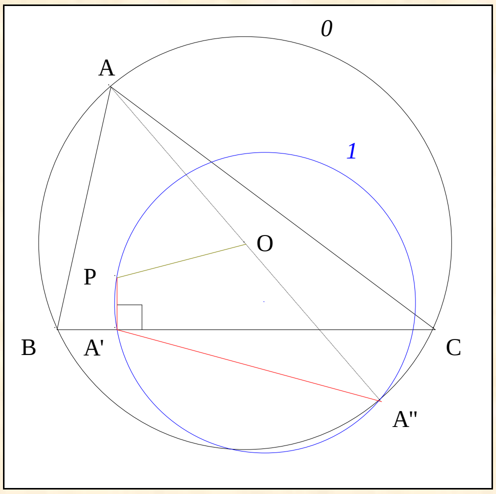
IMAGES

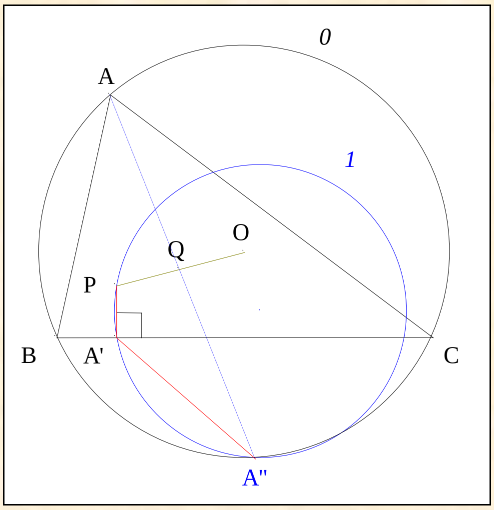
DES HUIT SITUATIONS



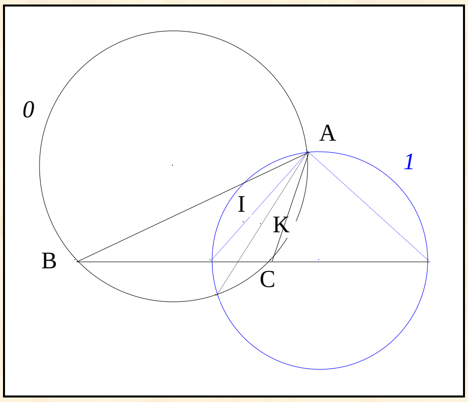


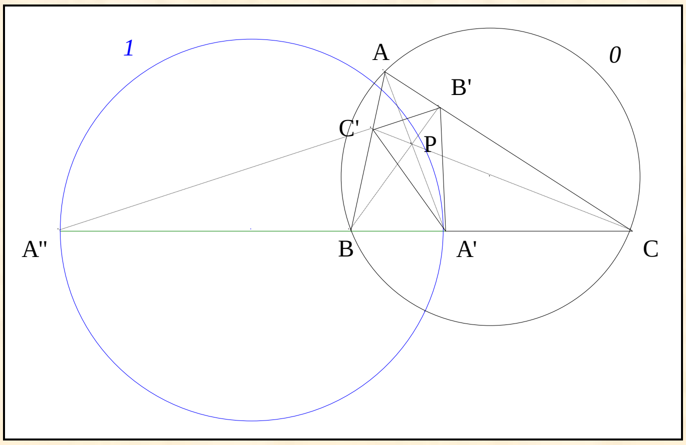
A.



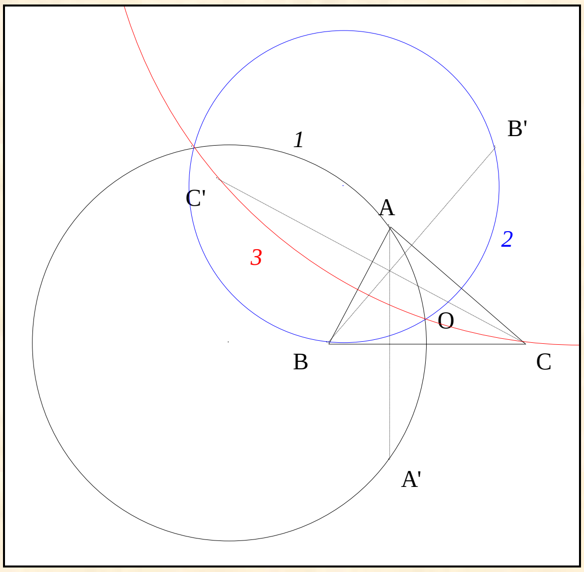


B.

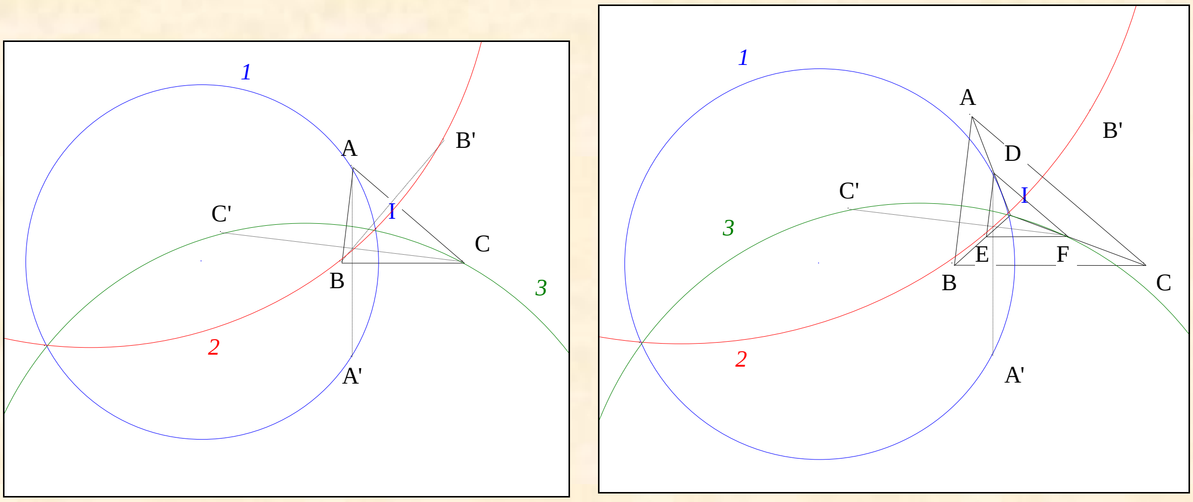




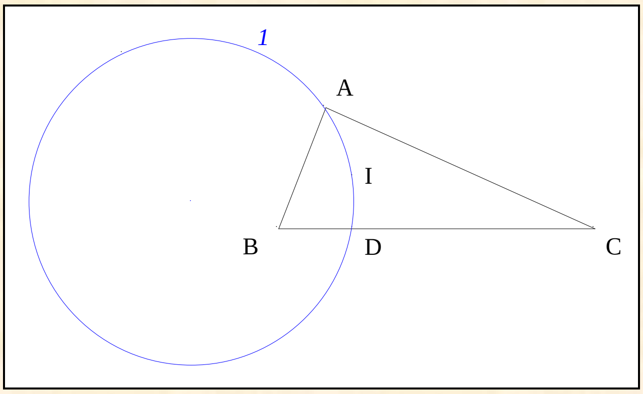
C.

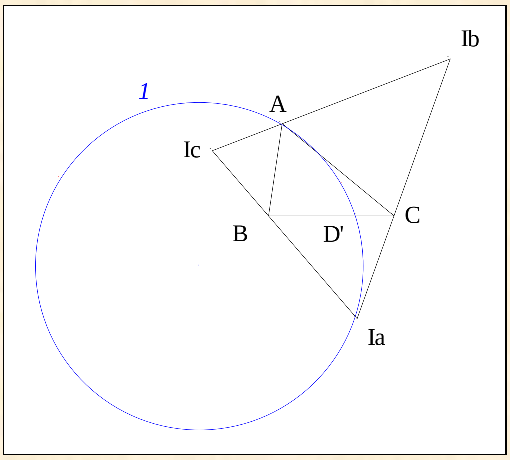

1
B'
C'
A
2
3
O
B
C
A'

D.


1
A
B'
C'
I
C
B
3
2
A'
1
A
B'
D
C'
I
3
E
F
B
C
2
A'

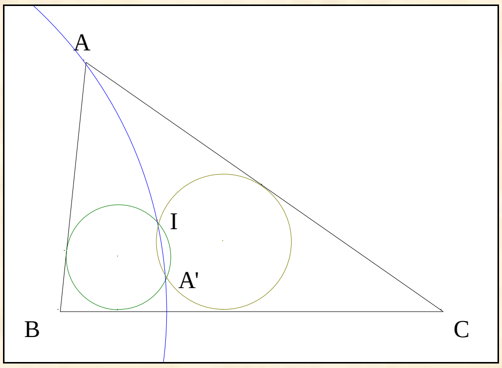
E.


1
A
I
B
D
C


Ib
1
A
Ic
C
B
D'
Ia

F.

G.



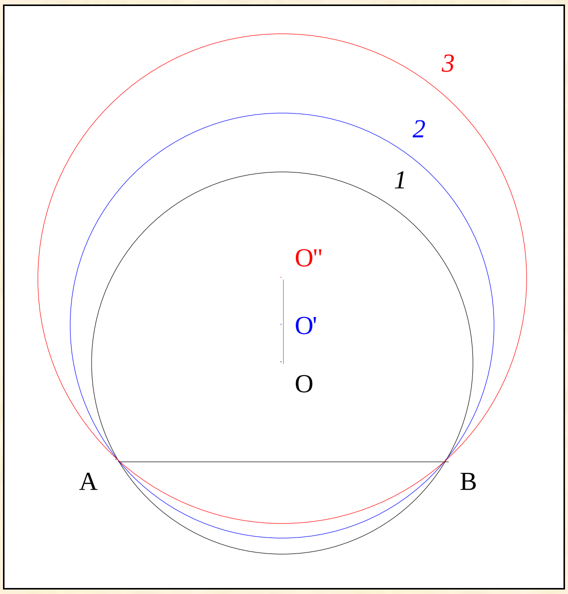
H.

II. LA TECHNIQUE DES CENTRES ALIGNÉS

1. Présentation

VISION DOUBLE

Figure :



Traits : A un point,
1, *2*, *3* trois cercles concourants en A
et O, O', O" les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

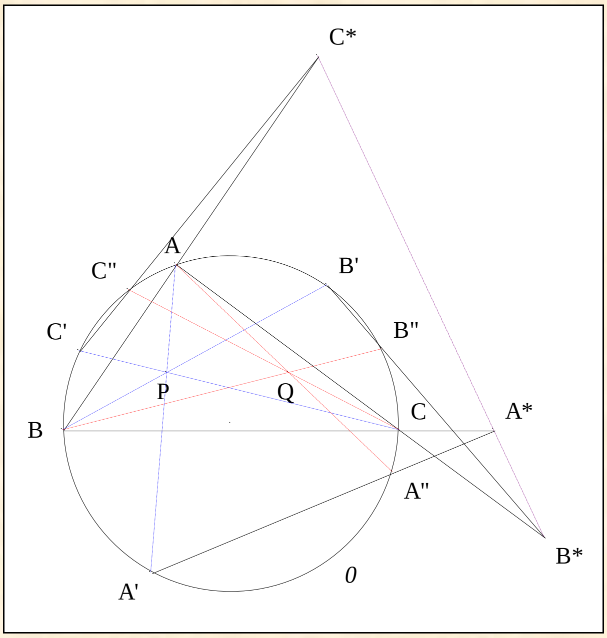
Donné : O, O', O" sont alignés *si, et seulement si,* *1*, *2*, *3* concourent en un second point.

Commentaire : la preuve synthétique est laissée aux bons soins du lecteur.

2. Le théorème de Vaclav Jerabek

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
P, Q deux points,
A'B'C', A"B"C" les triangles P, Q-circumcéviens de ABC,
A*, B*, C* le point d'intersection resp. de (A'A") et (BC), (B'B") et (CA), (C'C") et (AB).

Donné : A*, B* et C* sont alignés.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [2].
Ce résultat adapté aux différentes situations qui vont être étudiées se révèlera très fructueux.
Notons que lorsque P et Q sont confondus, nous considérons les tangentes conduisant à un triangle tangentiel… ce qui sera démontré par la suite (Cf. p. 13-14).

3. Une courte biographie de Vaclav Jerabek [3]

Vaclav Jerabek est né le 11 décembre 1845 à Kolodeje (Pardubice, république tchèque).
Élève de la Realschule de Pardubice, puis de celle de Pisek, il entre en 1866 à l'École Polytechnique de Vienne.
En 1870, il enseigne à la Realschule de Litomys où il obtient le titre de professeur en 1872. L'année suivante, il enseigne à la Realschule de Telc.
En 1881, il est nommé professeur à la Realschule de Brno. En 1901, il en devient le directeur jusqu'à sa retraite en 1907.

---

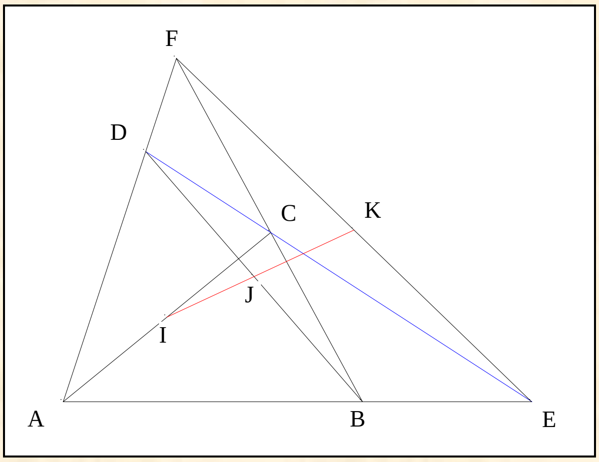
[2] Ayme J.-L., La promesse-Le tour-Le prestige, G.G.G. vol. **4**, p. 6-12 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[3] traduit par Emil Jerabek, communiquée par Francisco Javier García Capitán ; http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Jerabek.html

Dans ses dernières années, il perd complètement la vue suite à une cataracte mal soignée et décède le 20 décembre 1931 à Telc après avoir fait don de sa vaste bibliothèque de l'Université de Brno.
Vaclav Jerabek a été membre de la Société royale de Bohême des Sciences et membre honoraire de l'Union des mathématiciens tchèque.
Il a écrit plus de 50 articles, publiés pour la plupart en *Casopis pro pestovani matematiky un fysiky*, certains d'entre eux dans le journal belge *Mathesis*.

4. La ponctuelle de Gauss-Newton

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère,
E un point de (AB),
F le point d'intersection de (AD) et (BC),
et I, J, K les milieux resp. de [AC], [BD], [EF].

Donné : C, D et E sont alignés *si, et seulement si*, I, J et K sont alignés.

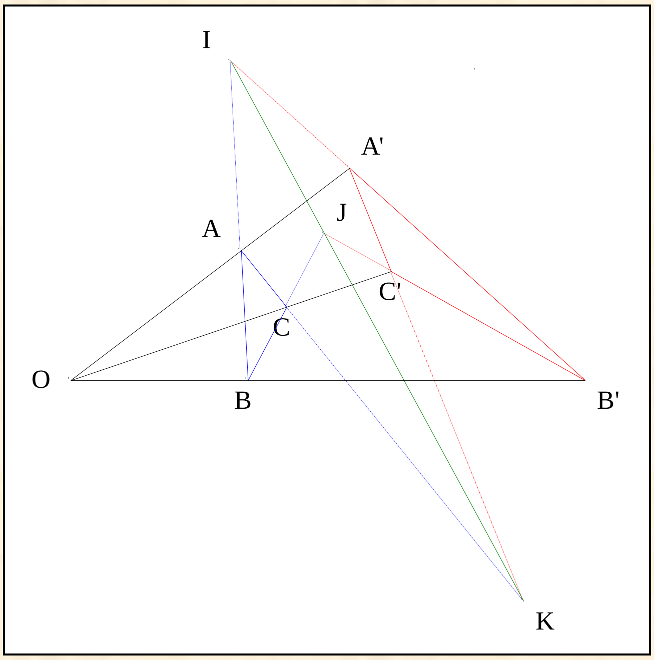
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [4].

5. Le théorème des deux triangles de Girard Desargues

VISION

Figure :

[4] Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4**, p. 1-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

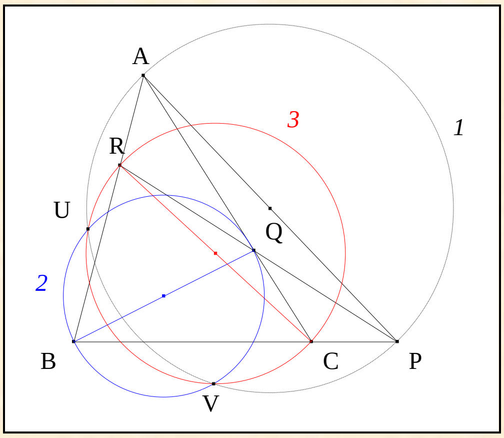


Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
O ce point de concours,
I, J, K les points d'intersection de (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés. [5]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [6].

6. Le théorème de Bodenmiller [7]



Traits : ABC un triangle,
(PQR) une ménélienne de ABC,
1, 2, 3 les cercles de diamètre resp. [AP], [BQ], [CR]
et U, V les points d'intersection de *2* et *3*.

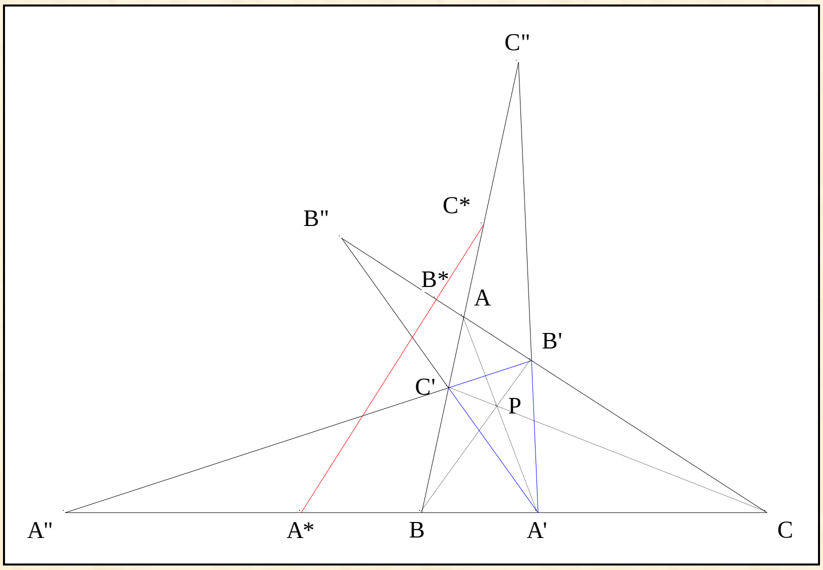
Donné : *1* passe par U et V.

5 Bosse A., *Perspective et de la Coupe des pierres* (1648)
6 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 40-44 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
7 Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Cologne (1830) 138

7. Trois milieux alignés

VISION

Figure :

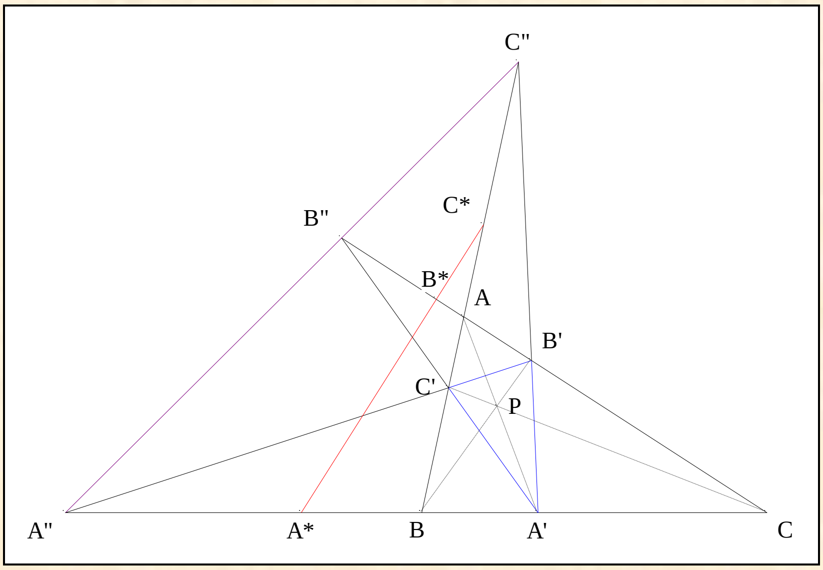


Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	A", B", C"	les points d'intersection de (B'C') et (BC), (C'A') et (CA), (A'B') et (AB),
et	A*, B*, C*	les milieux resp. de [A'A"], [B'B"], [C'C"].

Donné : A*, B* et C* sont alignés [8].

VISUALISATION

[8] Ayme J.-L., **7** Quickie **3**, G.G.G. vol. **15**, p. 10-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- **Scolie :** (A"B"C") est l'arguésienne des triangles perspectifs ABC et A'B'C'.

- **Conclusion :** d'après Gauss "La ponctuelle de Gauss-Newton" appliqué au quadrilatère complet A"B'A'B", A*, B* et C* sont alignés.

A. TRIANGLES P-CIRCUMCÉVIEN

ET

O-PÉDAL

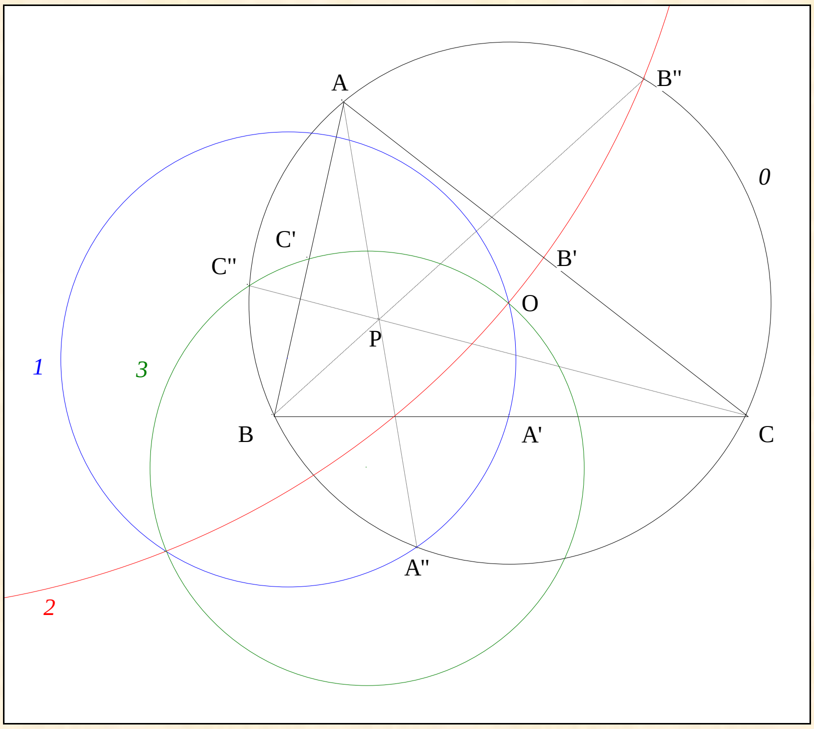
LE RÉSULTAT DE NGUYEN VAN LINH

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :

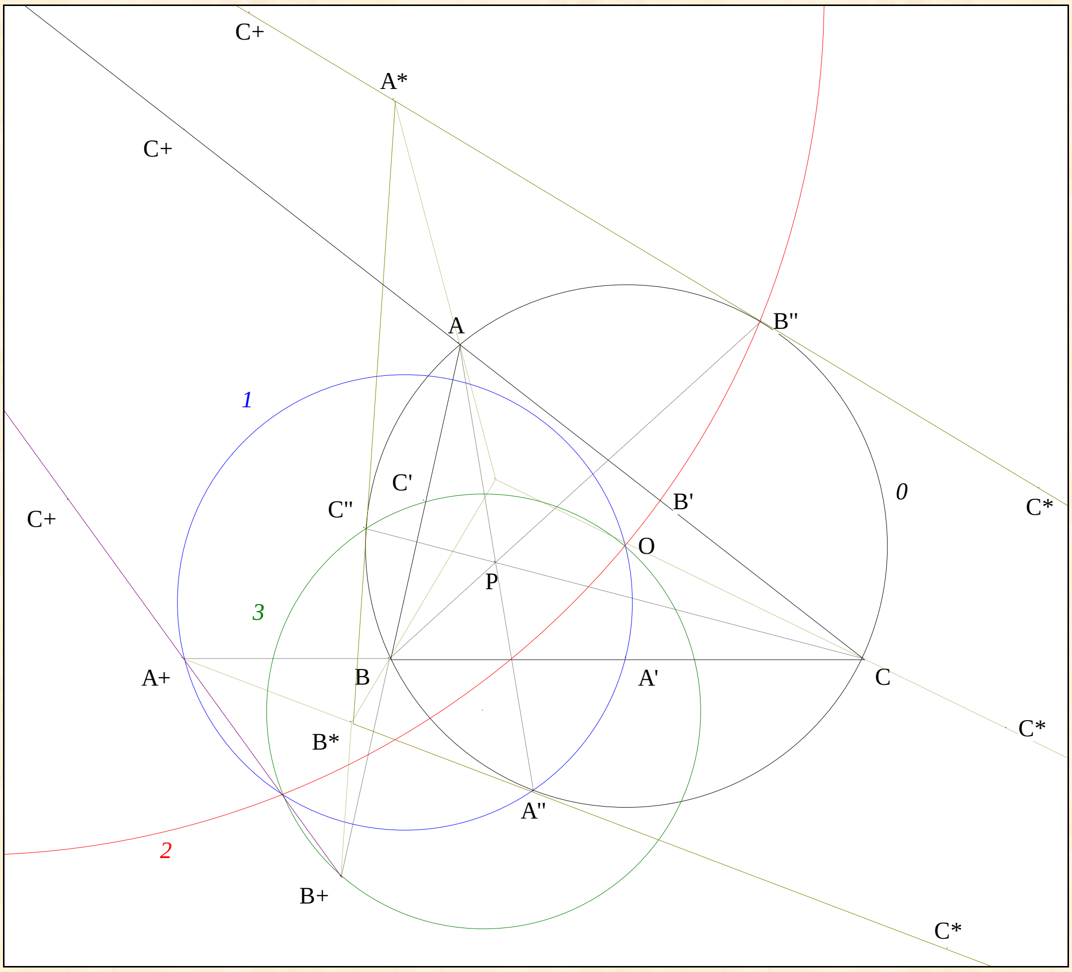


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A'B'C'	le triangle O-pédal (médian) de ABC,
	P	un point intérieur à ABC,
	A"B"C"	le triangle P-circumcévien
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles A'A"O, B'B"O et C'C"O.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [9]

VISUALISATION

[9] Nguyen Van Linh, Concurrent **4**, AoPS du 04/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=316260



- Notons A*B*C* le triangle tangentiel de A"B"C"
  et A+, B+, C+ les points d'intersection de (B*C*) et (BC), (C*A*) et (CA), (A*A) et (AB).

- D'après "Le théorème de Steinbart" [10], (A*A), (B*B) et (C*C) sont concourantes
  en conséquence, A*B*C* et ABC sont perspectifs.

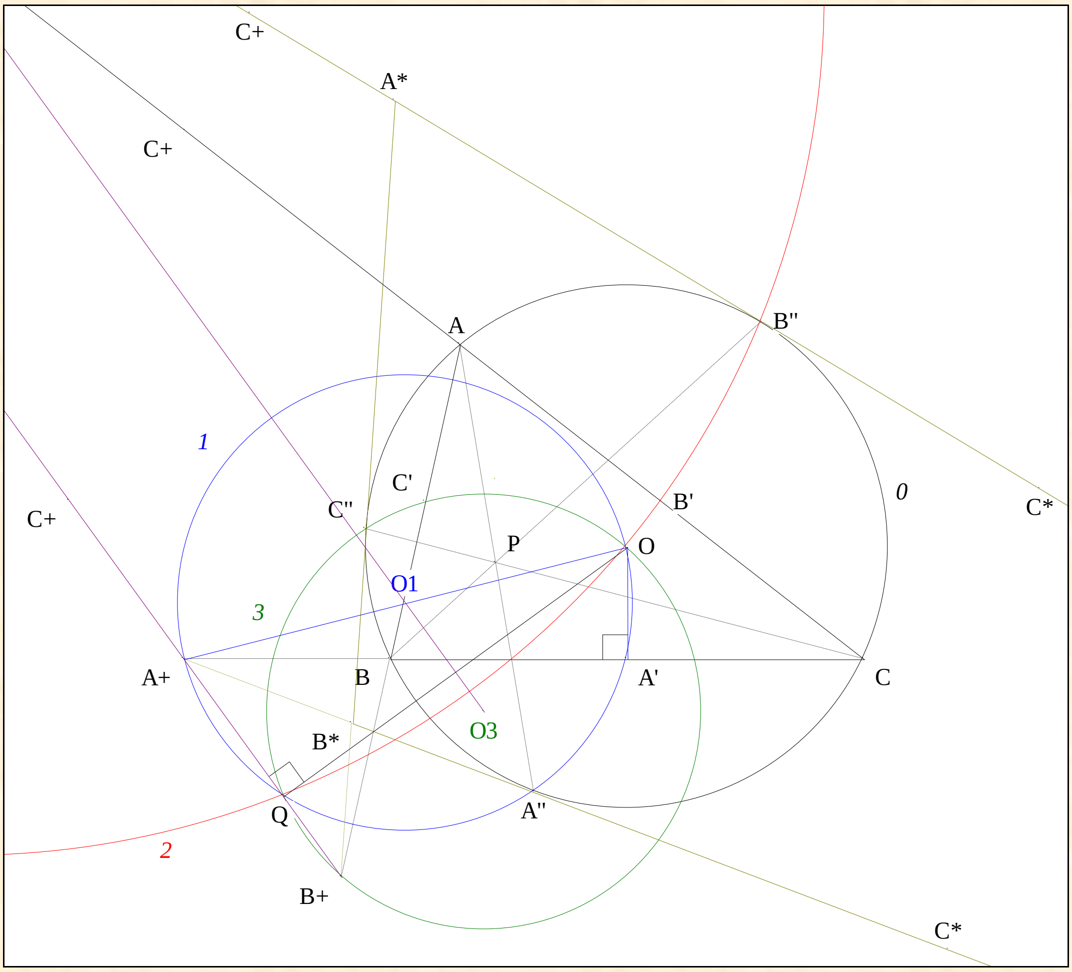
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [11]
  appliqué aux triangles perspectifs A*B*C* et ABC, A+, B+ et C+ sont alignés.

- **Commentaire :** ce résultat est un cas particulier du théorème de Jerabek (P et Q étant confondus entraînant de ce fait la considération du triangle tangentiel A*B*C* de A"B"C").

---

10 Ayme J.-L., Les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. **3**, p. 1-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

11 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons O1, O2, O3 les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", O1 est le milieu de [OA+]
O2 est le milieu de [OB+]
O3 est le milieu de [OC+].

- D'après Thalès "La droite de milieux" et le postulat d'Euclide, O1, O2 et O3 sont alignés.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

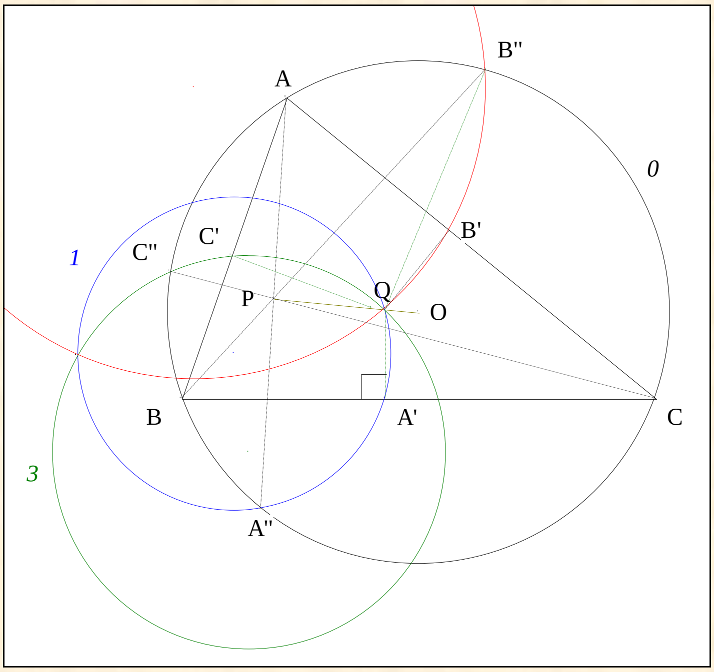
- Notons Q ce second point de concours.

Scolie : (A+B+C+) passe par Q et est perpendiculaire à (OQ).

GÉNÉRALISATION

VISION

Figure :

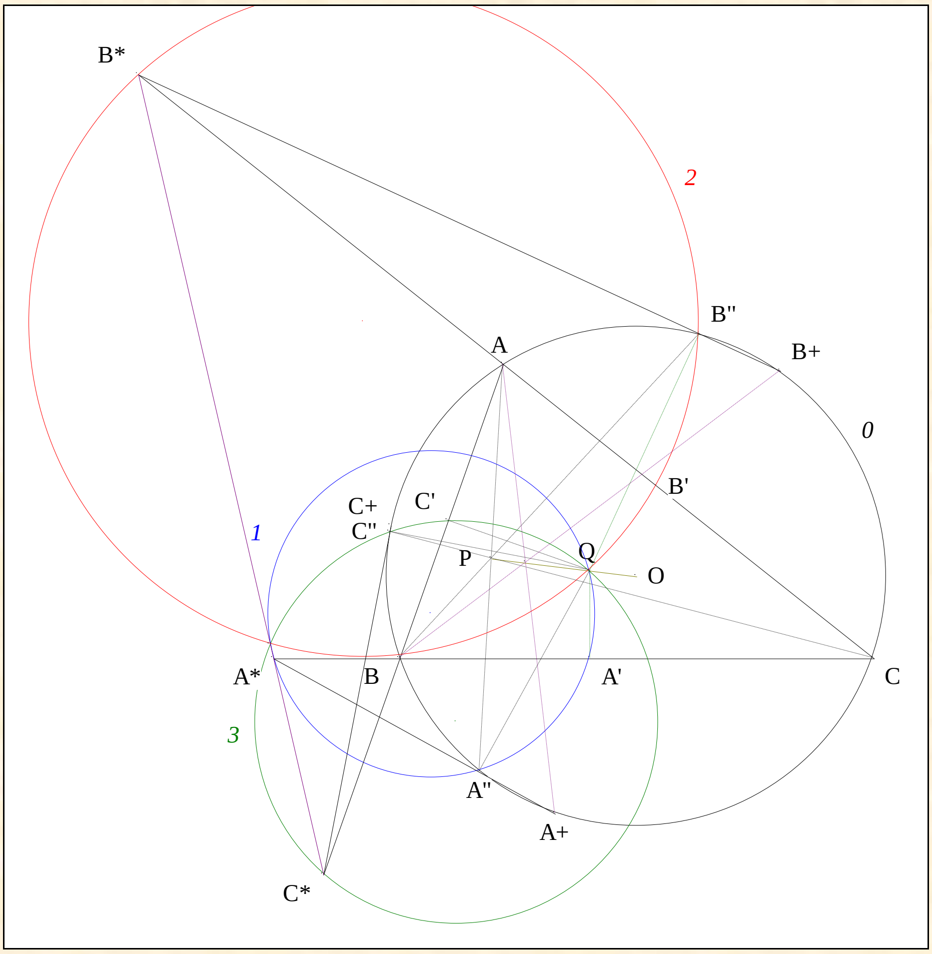


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	P	un point intérieur à ABC,
	A"B"C"	le triangle P-circumcévien
	Q	un point de (OP),
	A'B'C'	le triangle Q-pédal de ABC
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles A'A"Q, B'B"Q et C'C"Q.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [12]

VISUALISATION

[12] Coaxial circles, AoPS du 10/01/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=325959
Tran Quang Hung, *Red Geometry*, Problème **20**

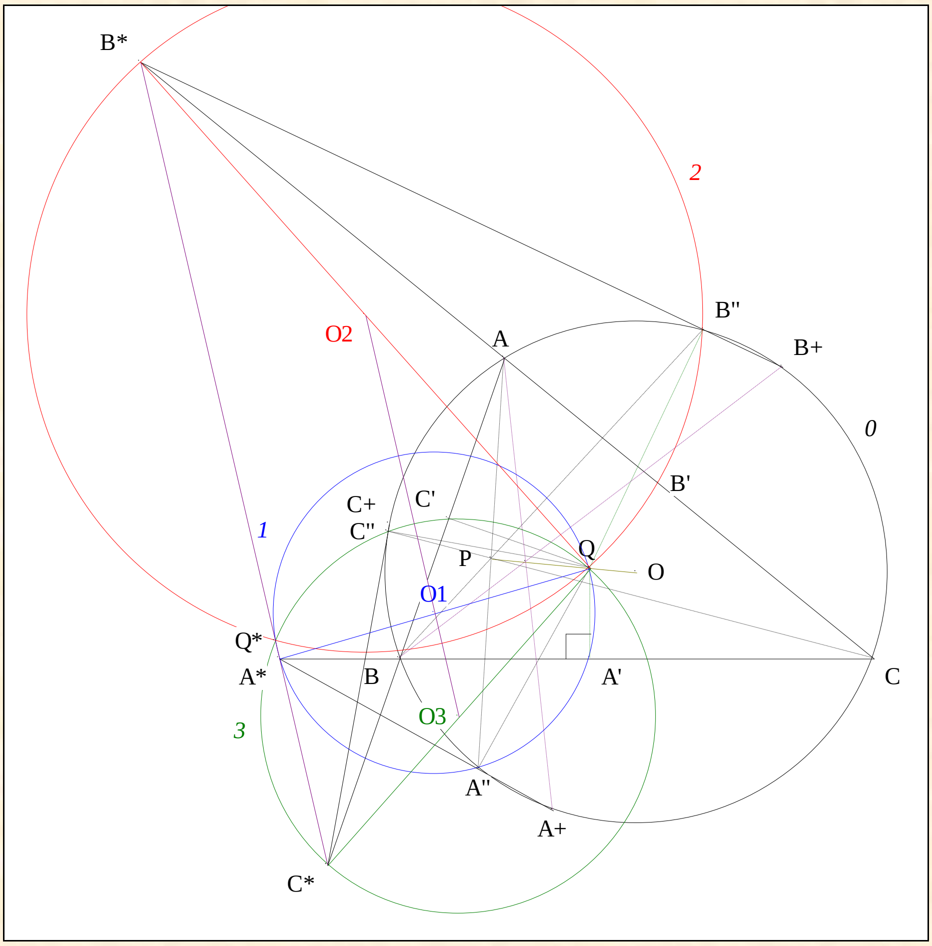


- Notons A+ le second point d'intersection de la perpendiculaire à (QA") en A" avec *0*,
  B+ le second point d'intersection de la perpendiculaire à (QB") en B" avec *0*,
  C+ le second point d'intersection de la perpendiculaire à (QC") en C" avec *0*
  et A*, B*, C* les points d'intersection de (A"A+) et (BC), (B"B+) et (CA), (C"C+) et (AB).

- D'après **I. A**ppendice **1**, (AA+), (BB+) et (CC+) sont concourantes.

- D'après "Le théorème de Jerabek"[13], A*, B* et C* sont alignés.

[13] Ayme J.-L., Le tour-La promesse-Le prestige, G.G.G. vol. **4**, p. 6-12 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons O1, O2, O3 les centres resp. de *1*, *2*, *3*.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", O1 est le milieu de [QA*]
  O2 est le milieu de [QB*]
  O3 est le milieu de [QC*].
- D'après Thalès "La droite de milieux" et le postulat d'Euclide, O1, O2 et O3 sont alignés.
- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.
- Notons Q* ce second point de concours.

Scolie : (A*B*C*) passe par Q* et est perpendiculaire à (QQ*).

B. TRIANGLES O-CIRCUMCÉVIEN

ET

P-PÉDAL

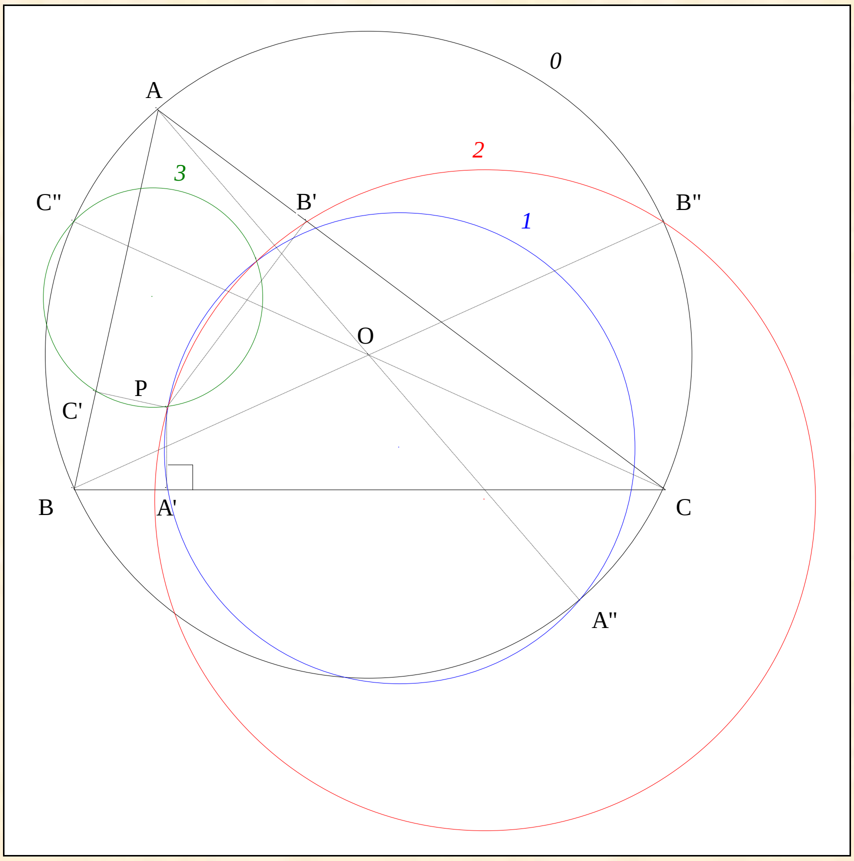
LE RÉSULTAT INVERSE DE NGUYEN VAN LINH

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	A"B"C"	le triangle O-symétrique de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	P	un point intérieur à ABC,
	A'B'C'	le triangle P-pédal de ABC
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles A'A"P, B'B"P et C'C"P.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [14]

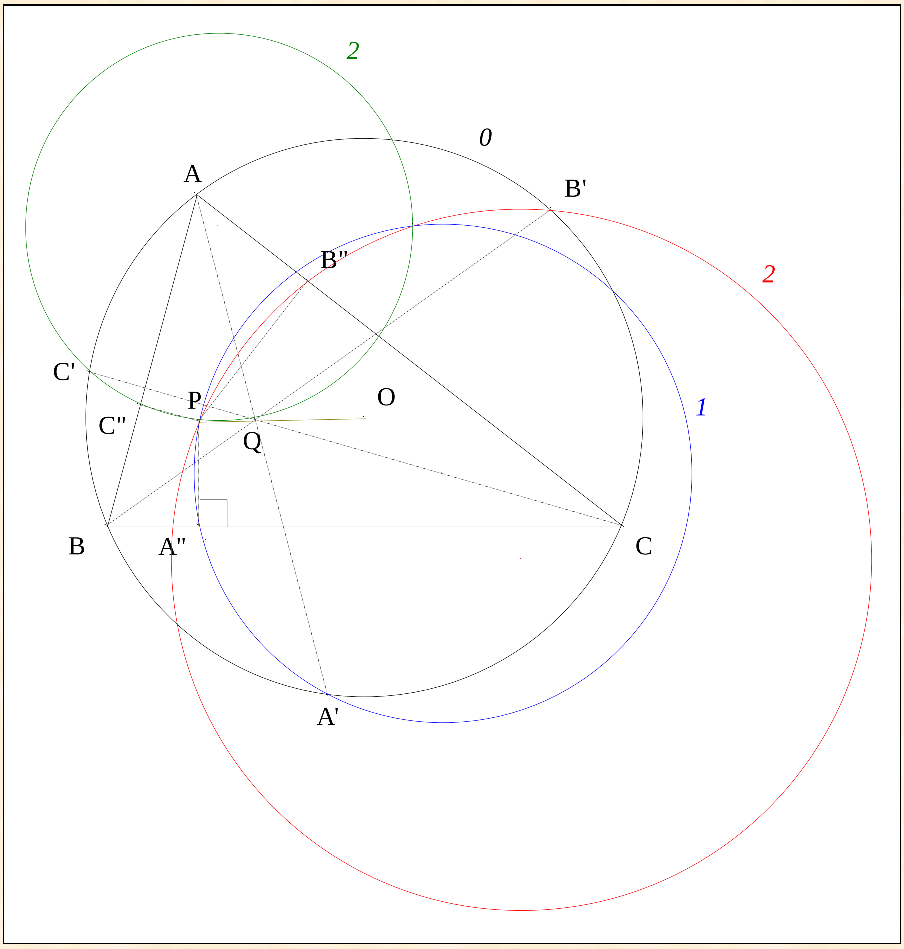
[14] Ayme J.-L., Three coaxal circles, AoPS du 30/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=615855

Commentaire : la preuve est identique à celle du résultat de Nguyen van Linh
en remplaçant O par P et P par O.

GÉNÉRALISATION

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	P	un point intérieur à ABC,
	A"B"C"	le triangle P-pédal de ABC
	Q	un point de (OP),
	A'B'C'	le triangle Q-circumcévien de ABC
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles A'A"P, B'B"P, C'C"P.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [15]

---

[15] Coaxial circles, AoPS du 19/01/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=325959

Commentaire : la preuve est identique à celle du résultat de Nguyen van Linh en remplaçant P par Q et Q par P.

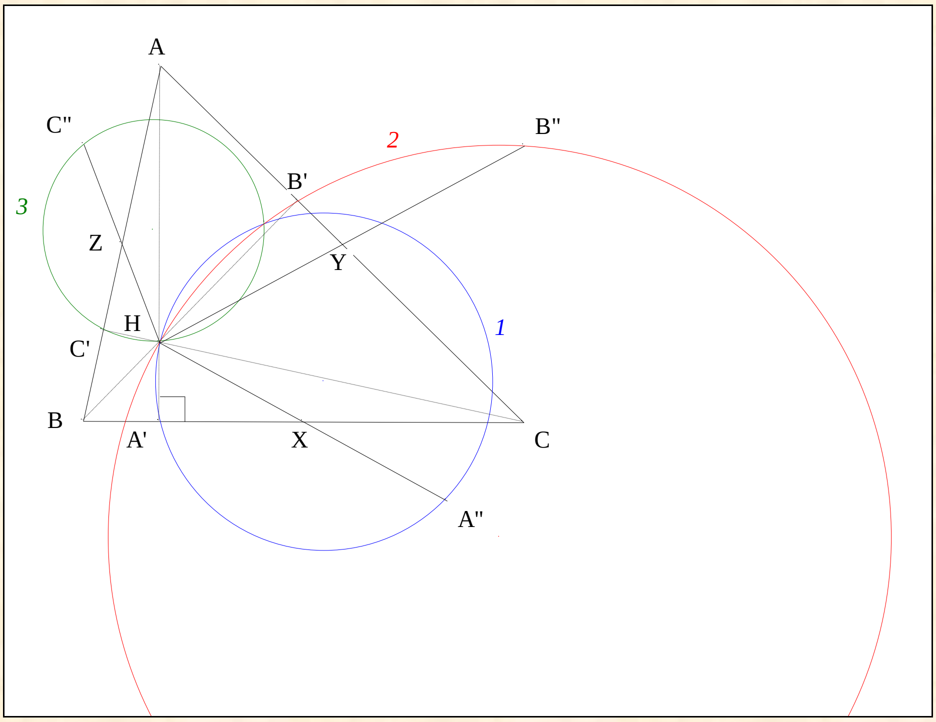
APPLICATIONS

DIRECTES ET DÉVELOPPEMENTS

1. Darij Grinberg

VISION

Figure :

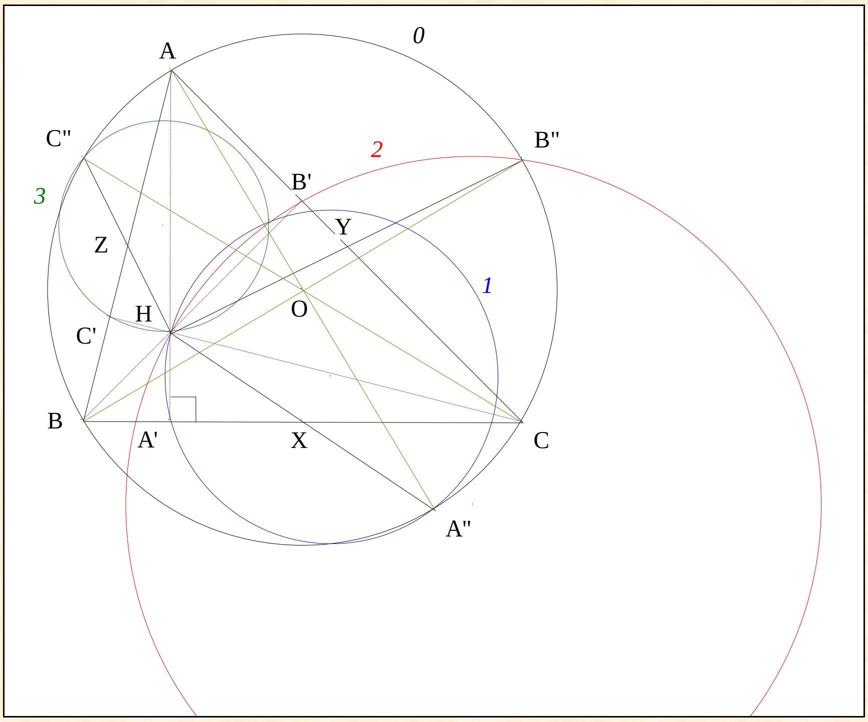


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
XYZ le triangle médian de ABC,
A", B", C" les symétriques de H resp. par rapport à X, Y, Z
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles HA'A", HB'B", HC'C".

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [16]

VISUALISATION

[16] Grinberg D., Some newer results from *MathLinks*, Schröder **7 ;** http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Schroeder/Schroeder.html



- Notons $\quad 0 \quad$ le cercle circonscrit à ABC
  et $\quad$ O $\quad$ le centre de *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport au milieu d'un côté", A", B" et C" sont sur *0*.

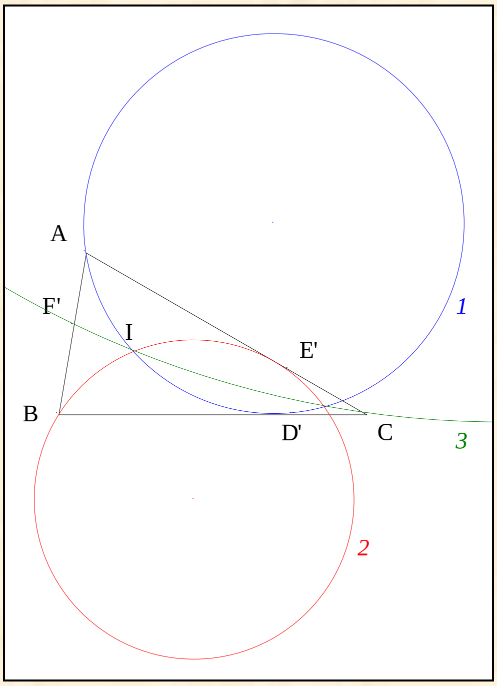
- **Scolie :** A", B", C" sont resp. les A, B, C-antipôle par rapport à *0*.

- **Conclusion :** d'après **B.** Le résultat inverse de Nguyen van Linh
  en remplaçant P par H, *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

2. Darij Grinberg : the Nagel-Schröder's point

VISION

Figure :

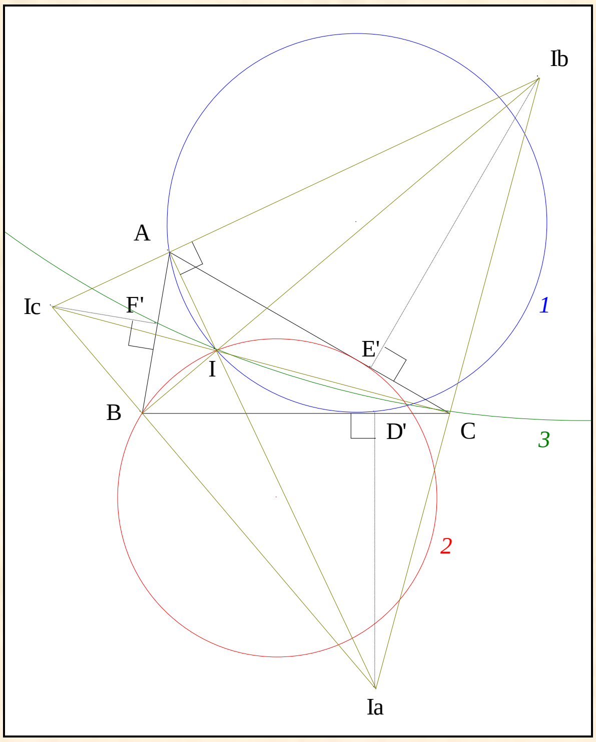


Traits :		ABC	un triangle,
		I	le centre de ABC,
		D'E'F'	le triangle de Nagel de ABC
	et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AD'I, BE'I, CF'I.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [17]

VISUALISATION

[17] Grinberg D., **4** new Schröder points, Message *Hyacinthos* # **6544** ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos
Grinberg D., Some newer results from *MathLinks*, Schröder **7** (04/07/2003) ;
http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Schroeder/Schroeder.html
Coaxal circles, AaoPS du 16/01/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=386935
Romania TST 2010/**6**, AoPS du 11/04/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=474485
Prove that circumcircles have common point other than I, AoPS du 20/07/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=489896
Well known, AoPS du 21/10/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=610802



- Notons IaIbIc le triangle excentral de ABC.

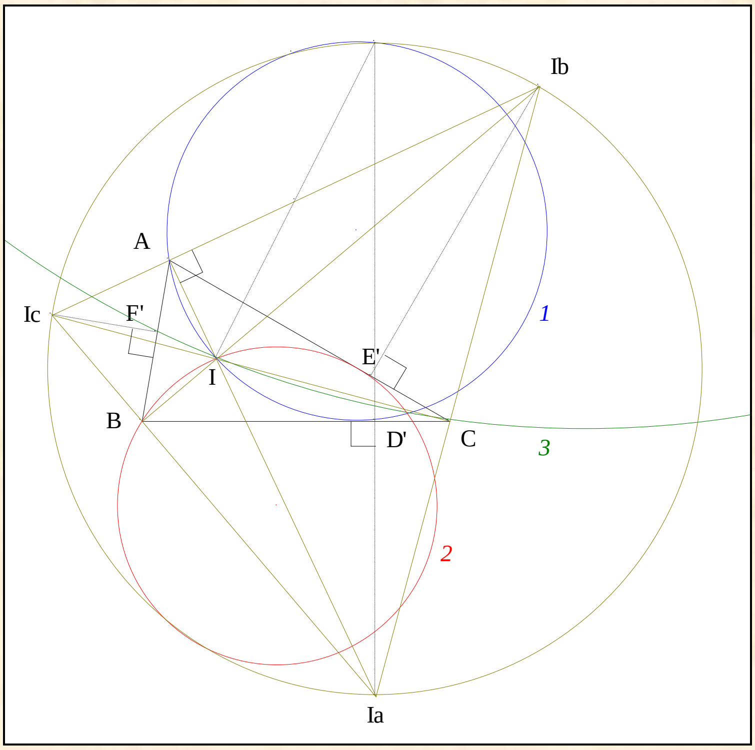
- D'après Mention "Deux résultats" [18], **(1)** I est l'orthocentre du triangle IaIbIc

  (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc.

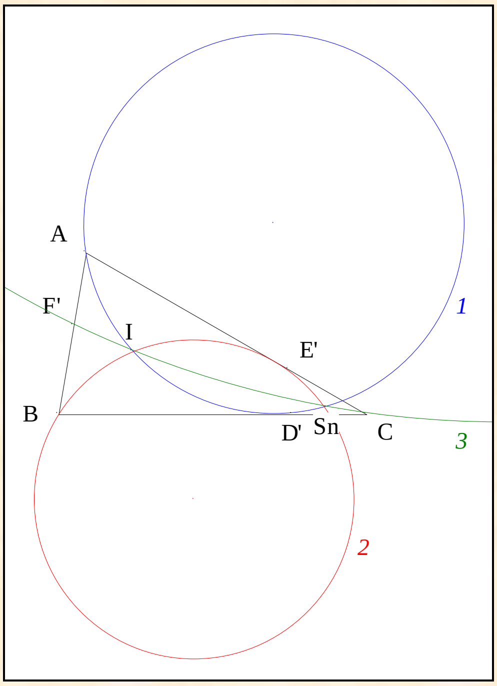
- Par définition, D', E', F' sont les pieds des perpendiculaires abaissées de Ia, Ib, Ic resp. sur (BC), (CA), (AB).

- D'après **I.** Appendice **2**, *1*, *2* et *3* passent resp. par D', E', F'.

[18] Ayme J.-L., Deux résultats de Jules Alexandre Mention, G.G.G. vol. **25**, p. 2-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



• **Conclusion :** d'après **B. 1**. Darij Grinberg *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.



• Notons Sn ce second point d'intersection.

Scolies : **(1)** Sn est "le point de Nagel-Schröder de ABC"

(2) il est répertorié sous X_{1339} chez ETC [19].

[19] Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Note historique : citons la remarque de Darij Grinberg

unlike the Schröder's point Sc, *for whose existence we have two rather simple synthetic proofs, the first elementary proof for the existence of the Nagel-Schröder' point* Sn *was found more than a year after the discovery of the point itself, and this proof is very long.*

Jean-Pierre Ehrmann a prouvé ce résultat en passant par les coordonnées barycentriques.
Khoa Lu Nguyen dit *Treegoner* [20] a prouvé ce résultat en utilisant le théorème de Céva dans sa version trigonométrique.
Une preuve synthétique plus complexe de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [21]

[20] Treegoner, A problem relating to the Euler's line and circle, AoPS du 25/06/2004 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?p=22210

[21] Ayme J.-L., Le point de Nagel-Schroeder, G.G.G. vol. **20** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

C. TRIANGLES K-CIRCUMCÉVIEN

ET

I-CÉVIEN

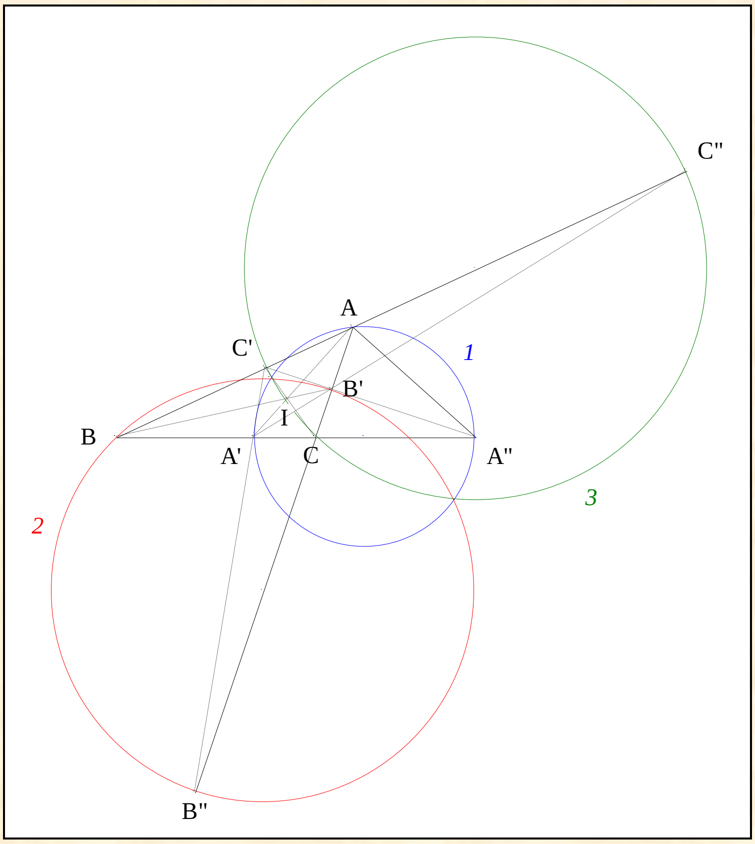
LE RÉSULTAT VECTEN vers 1819

OU

AUCUN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :

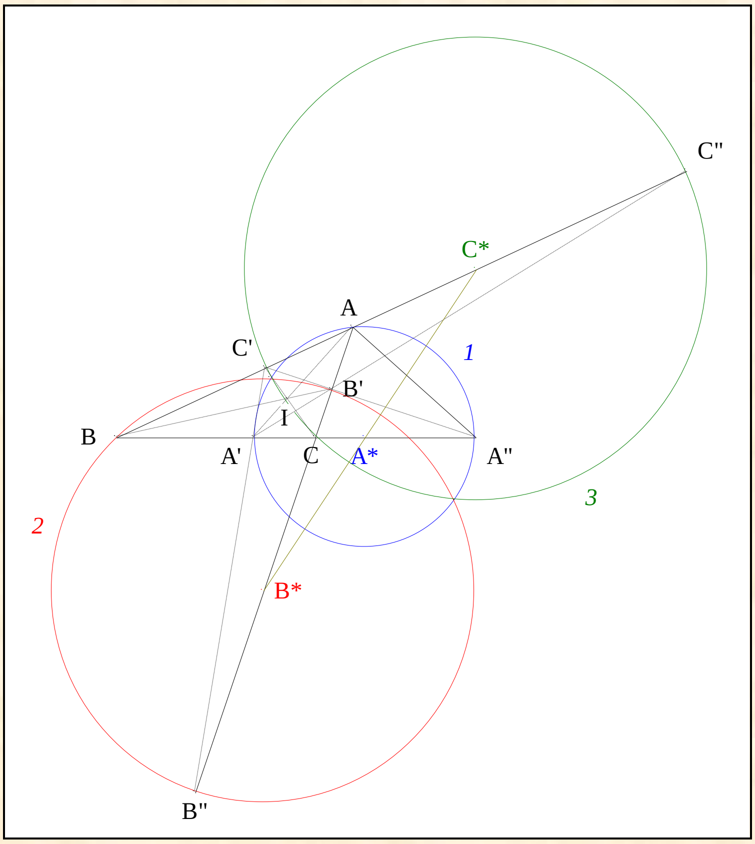


Traits : ABC un triangle
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle I-cévien de ABC,
A", B", C" les points d'intersection resp. de (B'C') et (BC), (C'A') et (CA), (A'B') et (AB)
et *1, 2, 3* les cercles de diamètre [A'A"], [B'B"], [C'C"].

Donné : *si, 1* et *2* sont sécants *alors, 1, 2* et *3* sont coaxiaux à points de base [22].

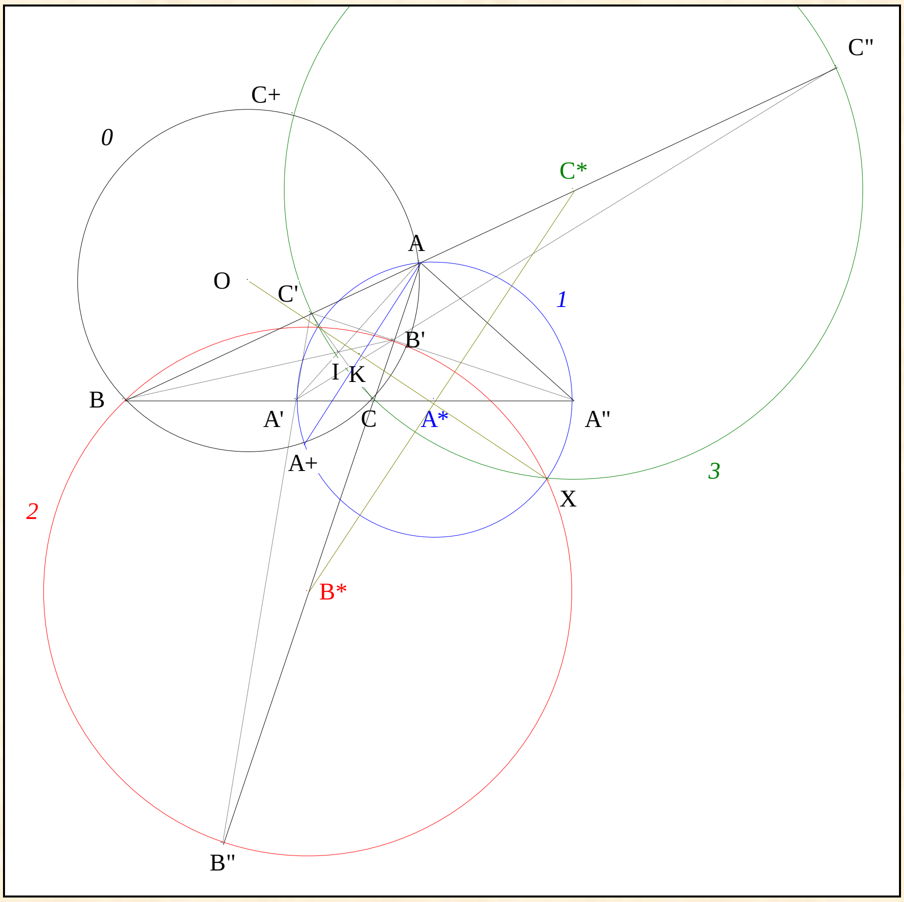
[22] Vecten, *Annales* de Gergonne **X** (1819-20) 202-204 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

VISUALISATION



- Notons A*, B*, C* les centres resp. de *1*, *2*, *3*.
- D'après **II. 7.**, A*, B* et C* sont alignés.
- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux à points de base

Scolies : **(1)** le point de Lemoine de ABC



- Notons K le point de Lemoine de ABC,
  0 le cercle circonscrit à ABC,
  O le centre de *0*,
  X, Y points de base de *1*, *2*, *3*
  et A+, B+, C+ les seconds points d'intersection de *0* resp. avec *1*, *2*, *3*.

- **Conclusion :** d'après John Casey [23], (AA+), (BB+) et (CC+) passent par K.

(2) *1*, *2*, *3* sont resp. les A, B, C-cercles d'Apollonius [24] de ABC

(3) (OK) est "la droite de Brocard de ABC"

(4) X et Y sont "les points isodynamiques de ABC" [25]
ou encore
"les points de Hesse de ABC" ; ils sont répertoriés sous X_{15} et X_{16} chez ETC

(3) Le premier point de Hesse, noté S+, est celui qui est à l'intérieur du plus grand angle de ABC, (X dans notre figure) ; le second point de Hesse est noté S-, (Y dans notre figure).

Note historique : c'est F. Vallès, ingénieur des Ponts et Chaussée, qui a montré le premier que "la corde commune" passe par O.

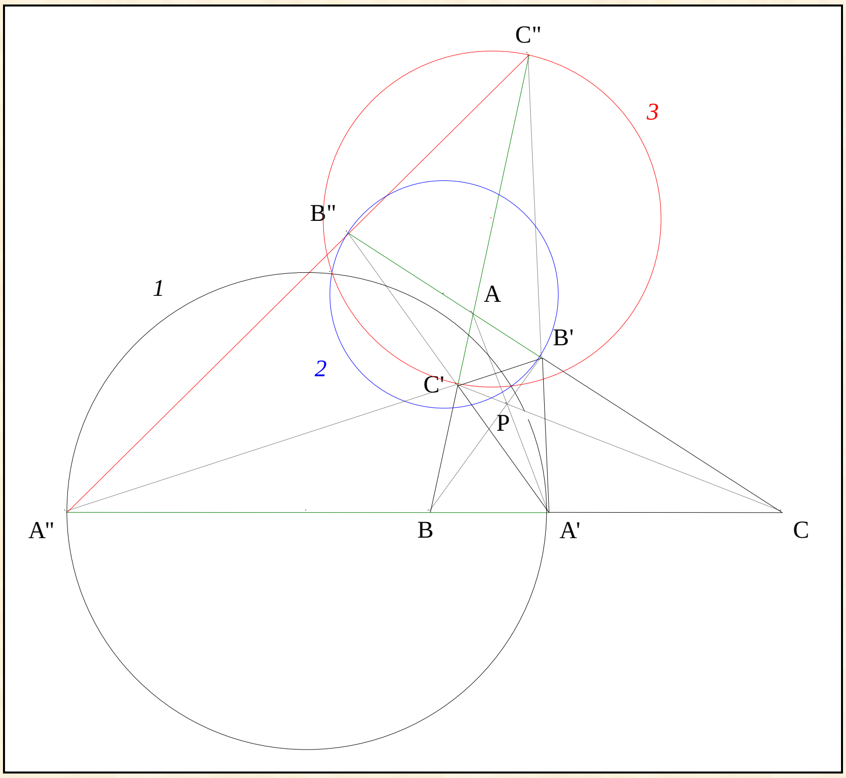
---

23 Ayme J.-L., La fascinante figure de undy, G.G.G. vol. **2**, p. 6-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
24 Le A-cercle d'Apollonius a pour diamètre les segments joignant les pieds de A-bissectrices intérieure, extérieure de ABC
25 Neuberg J., *Mathesis* (1885) 204, renvoi

GÉNÉRALISATION

VISION

Figure :

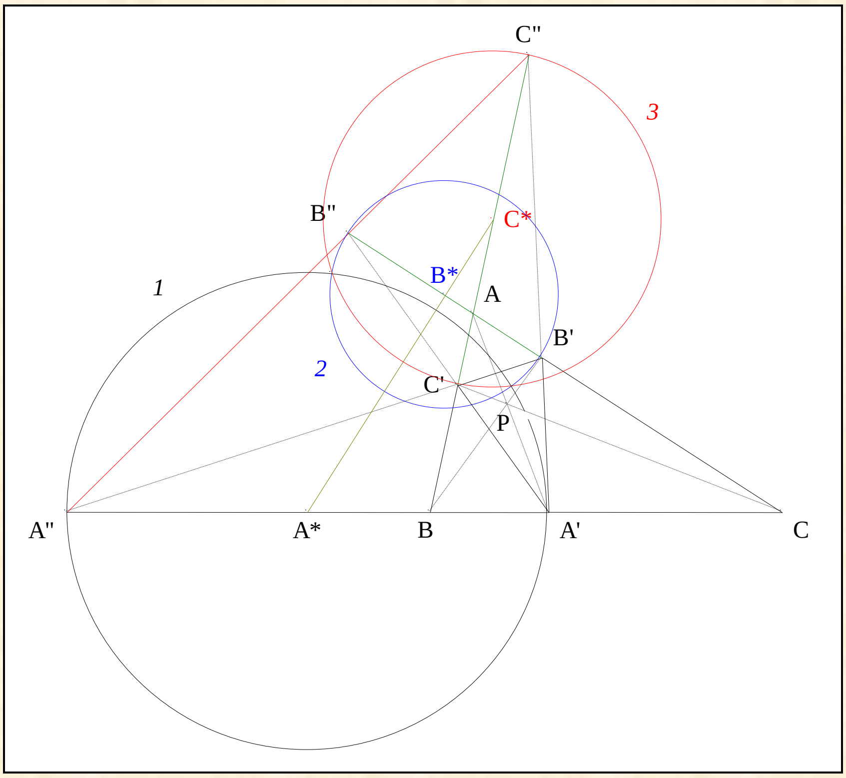


Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	A", B", C"	les points d'intersection resp. de (B'C') et (BC), (C'A') et (CA), (A'B') et (AB)
et	*1, 2, 3*	les cercles de diamètre [A'A"], [B'B"], [C'C"].

Donné : *si,* *1* et *2* sont sécants *alors,* *1*, *2* et *3* sont coaxiaux à points de base [26].

VISUALISATION

[26] Competicion Mathematica Mediterranea 2011, Problema **4**



- Notons A*, B*, C* les centres resp. de *1*, *2*, *3*.
- D'après **II. 7.**, A*, B* et C* sont alignés.
- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux à points de base

D. LE TRIANGLE SYMÉTRIQUE

ET

LE POINT O

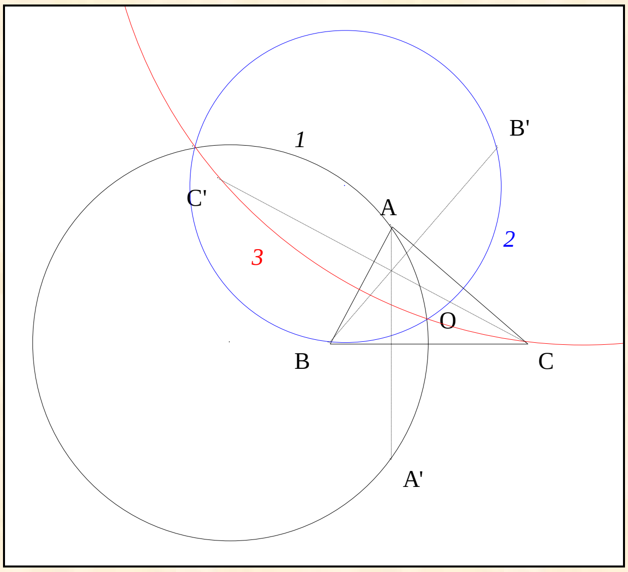
LE RÉSULTAT DE JOHN ROGERS MUSSELMAN

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	A', B', C'	les symétriques de A, B, C resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AOA', BOB', COC'.

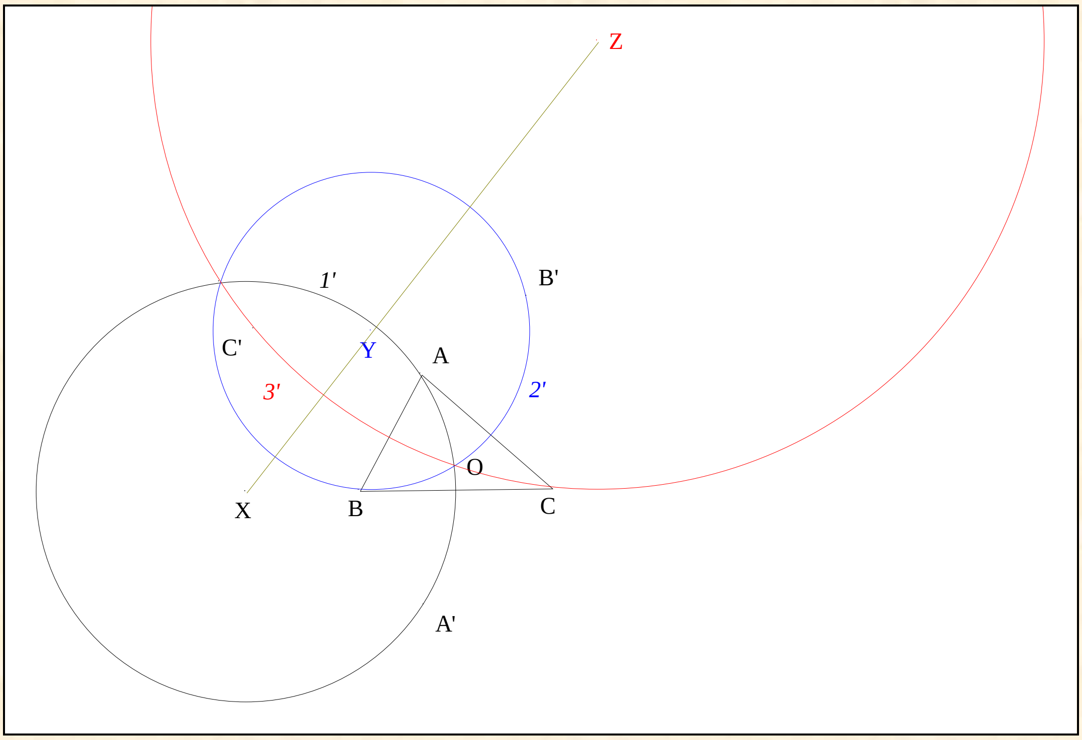
Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [27]

VISUALISATION

- **Commentaire :** une preuve basée sur "Le théorème des trois cordes" a été présentée [28].

[27] Musselman J. R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **46** (1939) 601

[28] Ayme J.L., Cercles coaxiaux **I**, G.G.G. vol. **24**, p. 20-21 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons X, Y, Z les centres resp. de *1*, *2*, *3*.
- D'après Nicolas Dergiades "Trois points alignés" [29], X, Y et Z sont alignés.
- Ayant leurs centres alignés, *1*, *2* et *3* se recoupent en un second point.
- Notons M ce second point de concours.
- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

Scolies : **(1)** (XYZ) est la médiatrice de OM

(2) M est répertorié sous X_{1157} chez ETC

(3) M est le point de Gibert de ABC

(4) M est l'inverse du point de Kosnitza de ABC par rapport au cercle circonscrit de ABC

Note historique : ce résultat de l'américain J. R. Musselman a été démontré et généralisé à nouveau par le belge René Goormaghtigh [30] ; sa preuve a recours aux nombres complexes.
Notons que cette généralisation était connue de Joseph Neuberg [31].
Rappelons que la preuve proposée par Darij Grinberg a recours à l'inversion.

---

29 Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. **1**, p. 1-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
30 Goormaghtigh R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **48** (1941) 281-283
31 Neuberg J., Mémoire sur le Tétraèdre (1884)

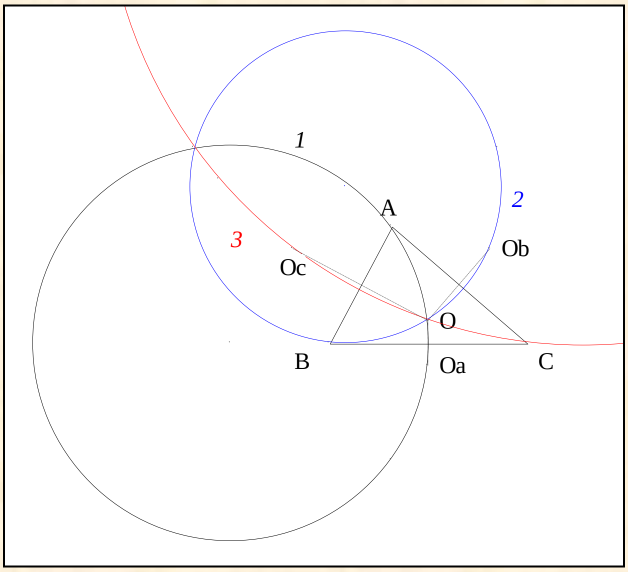
APPLICATIONS

DIRECTES ET DÉVELOPPEMENTS

1. Le triangle O-symétrique

VISION

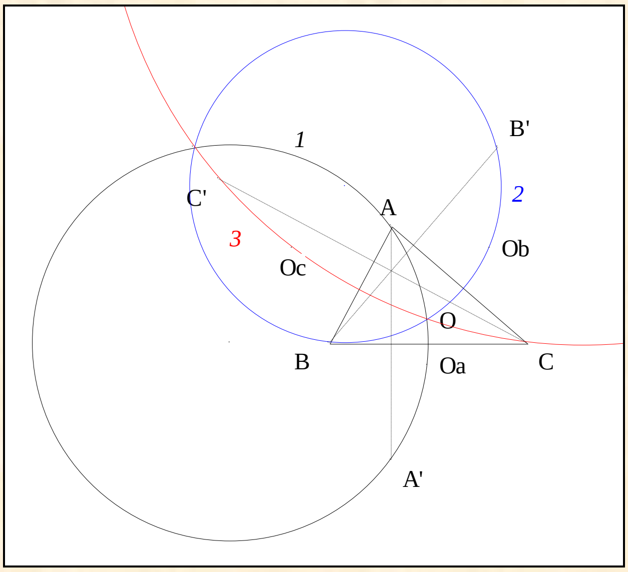
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	Oa, Ob, Oc	les symétriques de O resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AOOa, BOOb, COOc.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

VISUALISATION

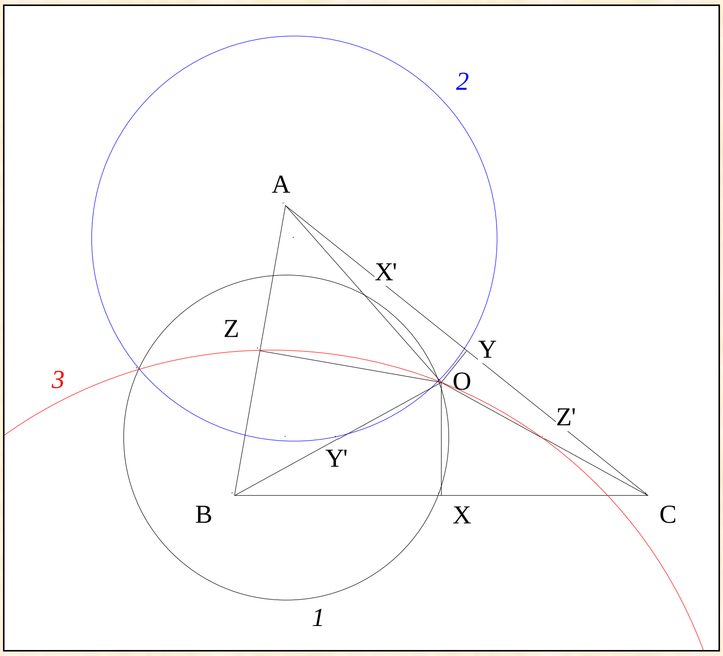


- Notons A', B', C' les symétriques de A, B, C resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).
- **Scolies :** A', B', C' sont resp. sur *1*, *2*, *3*.
- **Conclusion :** d'après **D.** Le résultat de J. R. Musselman, *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

2. Une situation homothétique

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	XYZ	le triangle médian de ABC,

	X', Y', Z'	les milieux resp. de [OA], [OB], [OC]
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles XOX', YOY', ZOZ'.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [32]

Commentaire : par homothétie de centre O et de rapport 2,
nous retrouvons la situation **D.** Le résultat de J. R. Musselman.
Une généralisation du rapport est opérante.

E. LE TRIANGLE SYMÉTRIQUE

ET

LE POINT I

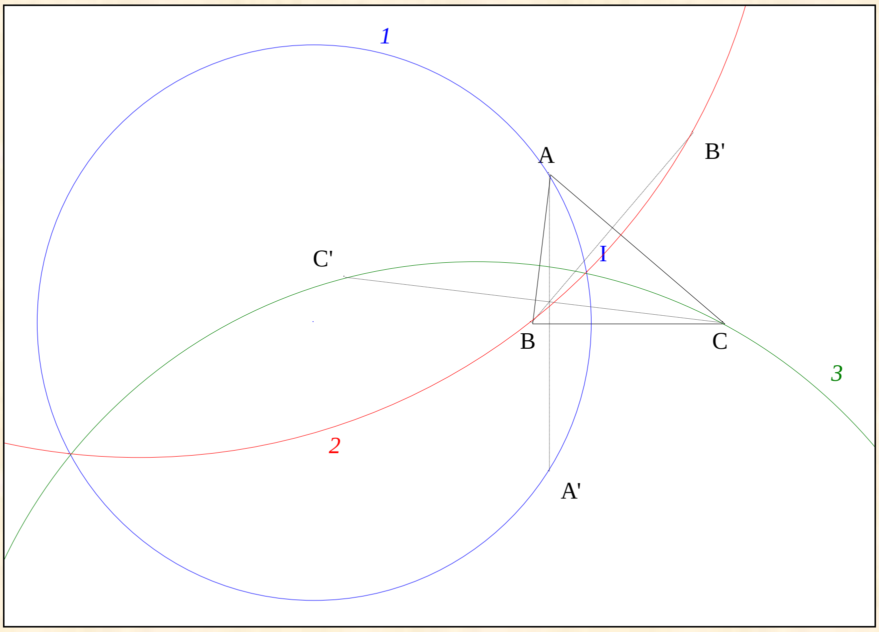
LE RÉSULTAT D'UN ANONYME

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :

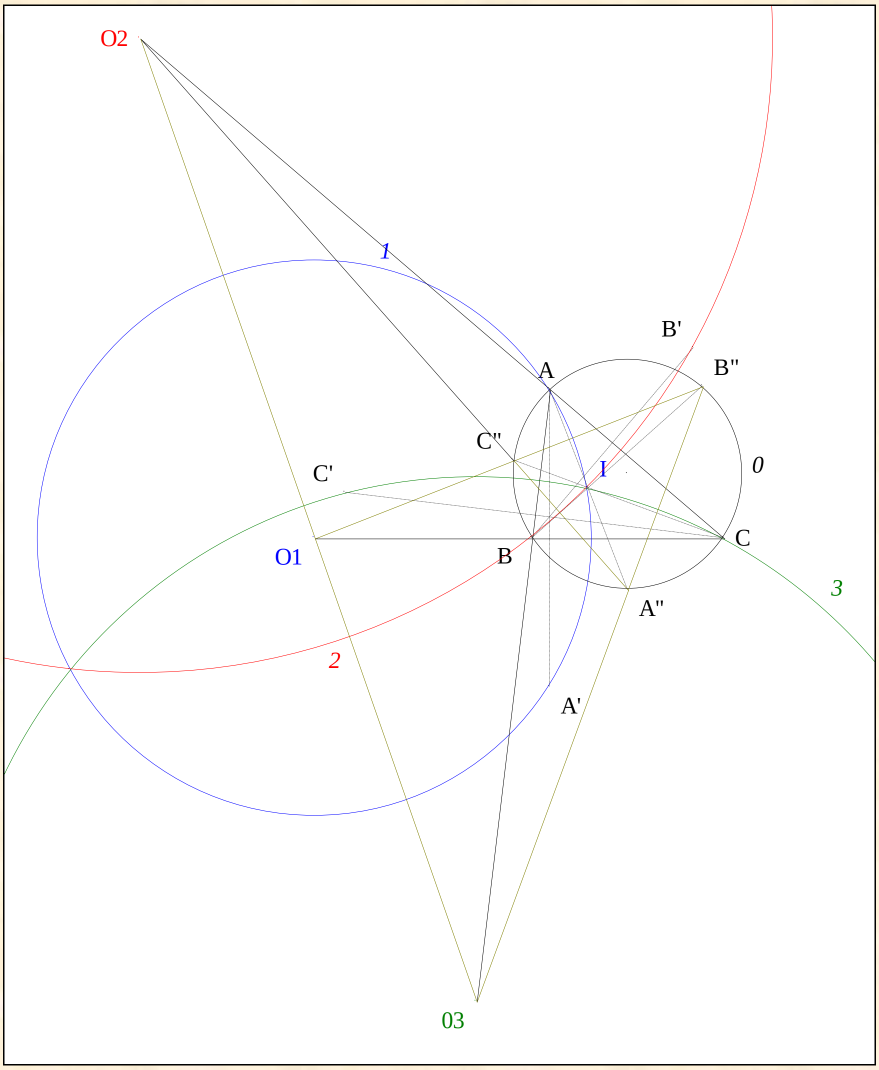


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle symétrique de ABC
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'I, BB'I, CC'I.

[32] Coaxal circles, AoPS du 24/02/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=393441

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [33]

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  A"B"C" le triangle I-circumcévien de ABC
  et O1, O2, O3 les points d'intersection de (B"C") et (BC), (C"A") et (CA), (A"B") et (AB).

- **Scolies :** **(1)** (B"C") est la médiatrice de [AI]

  (2) (C"A") est la médiatrice de [BI]

  (3) (A"B") est la médiatrice de [CI].

  (4) O1, O2, O3 sont les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [34]
  (O1O2O3) est l'arguésienne des triangles perspectifs ABC et A"B"C" de centre I.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

---

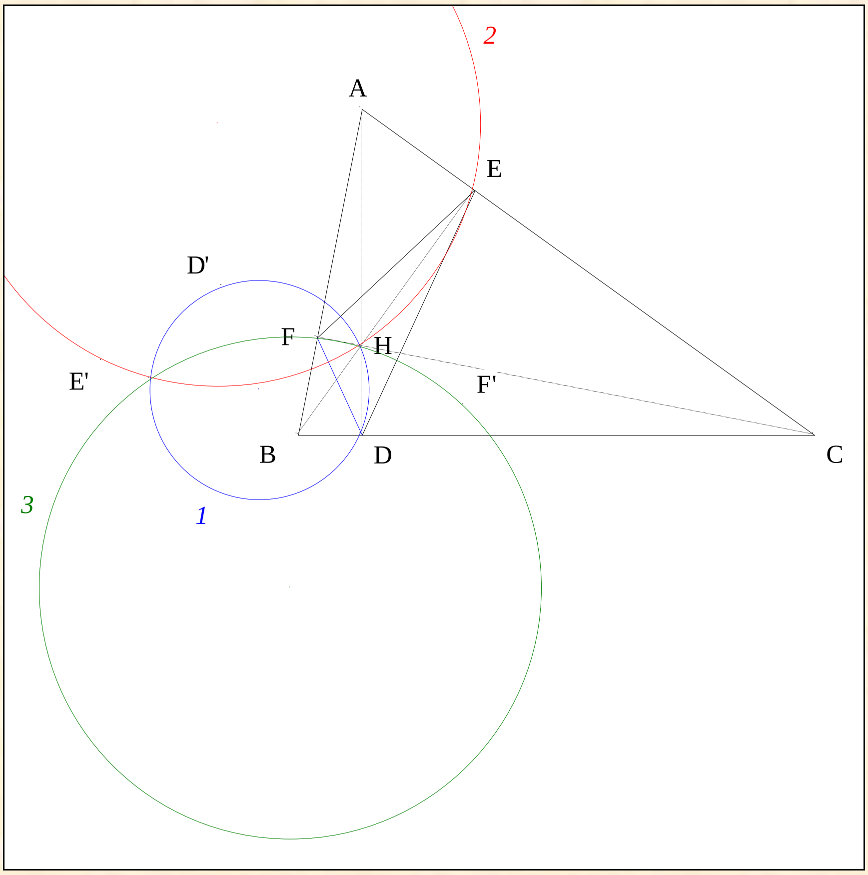
33 Coaxal circles again ?, AoPs du 07/12/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616652
34 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39-44 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

EXEMPLE

1. Avec le triangle orthique

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
DEF le triangle orthique de ABC,
D'E'F' le triangle symétrique de DEF
et *1, 2, 3* les cercles circonscrits resp. aux triangles DD'H, EE'H, FF'H.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

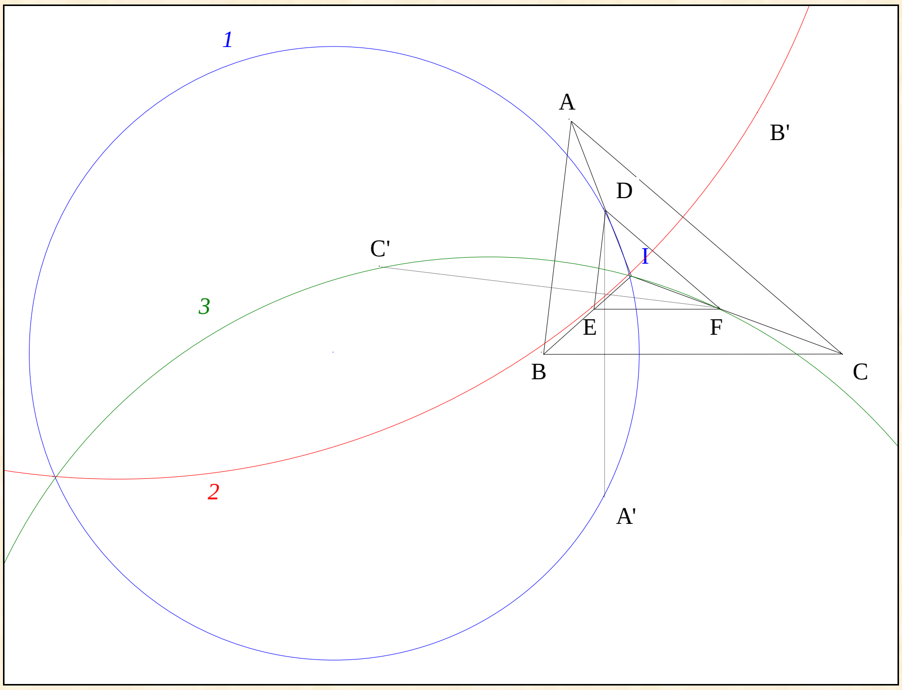
Commentaire : la preuve est identique à celle du **E.** Le triangle symétrique et le point I en remplaçant DEF par ABC et H par I. (d'après Guillaume Naudé, H est le centre du triangle orthique)

GÉNÉRALISATION

1. Telv Cohl

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
D, E, F trois points resp. de (IA), (IB), (IC)
tels que les triangles DEF et ABC soient homothétiques,
A', B', C' les symétriques de D, E, F resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles DA'I, EB'I, FC'I.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [35]

Commentaire : la preuve est laissée aux bons soins du lecteur.

[35] Telv Cohl, Coaxal circles again ?, AoPs du 07/12/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=616652

F. LE TRIANGLE DE GERGONNE

ET

LE POINT I

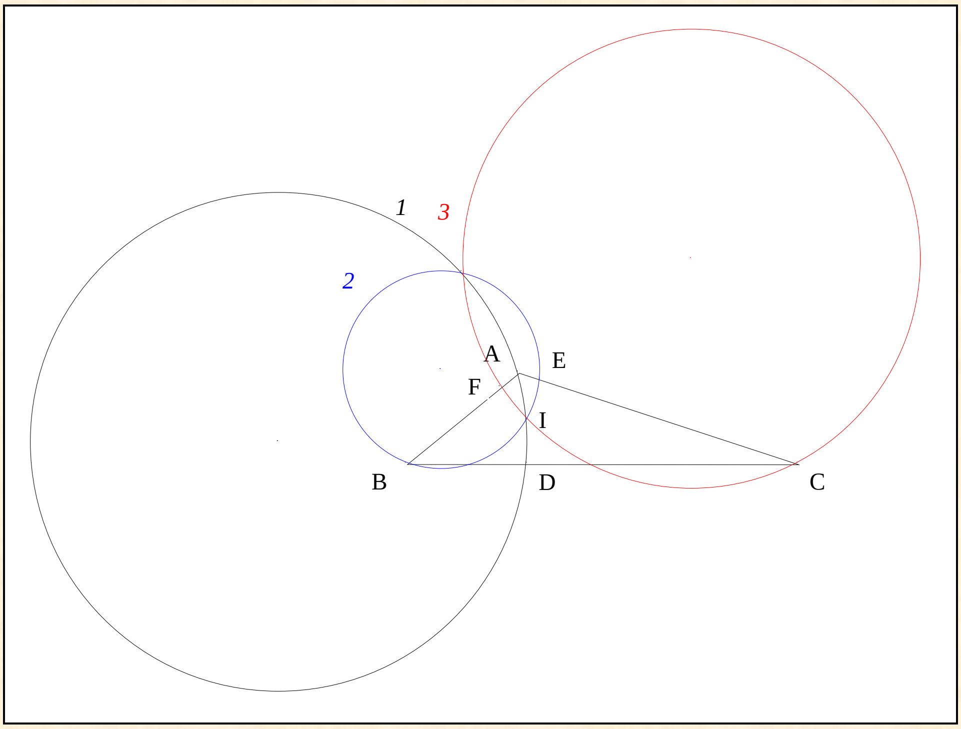
LE POINT DE GERGONNE-SCHRÖDER

OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :



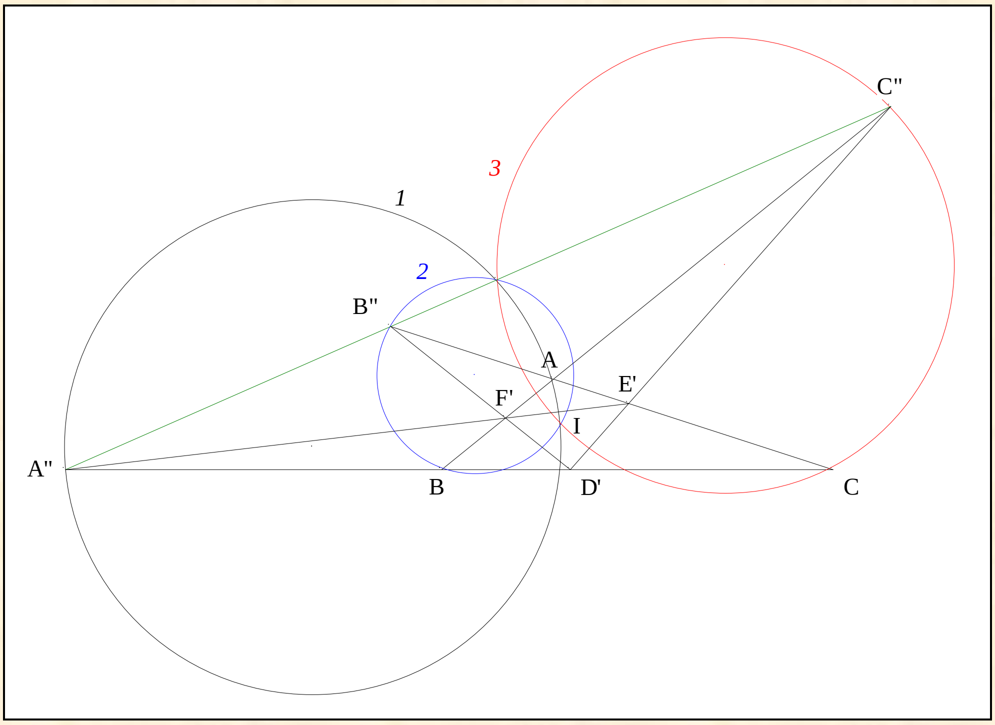
Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	D, E, F	les pieds des perpendiculaires abaissées de I resp. sur [BC], [CA], [AB]
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AID, BIE, CIF.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [36]

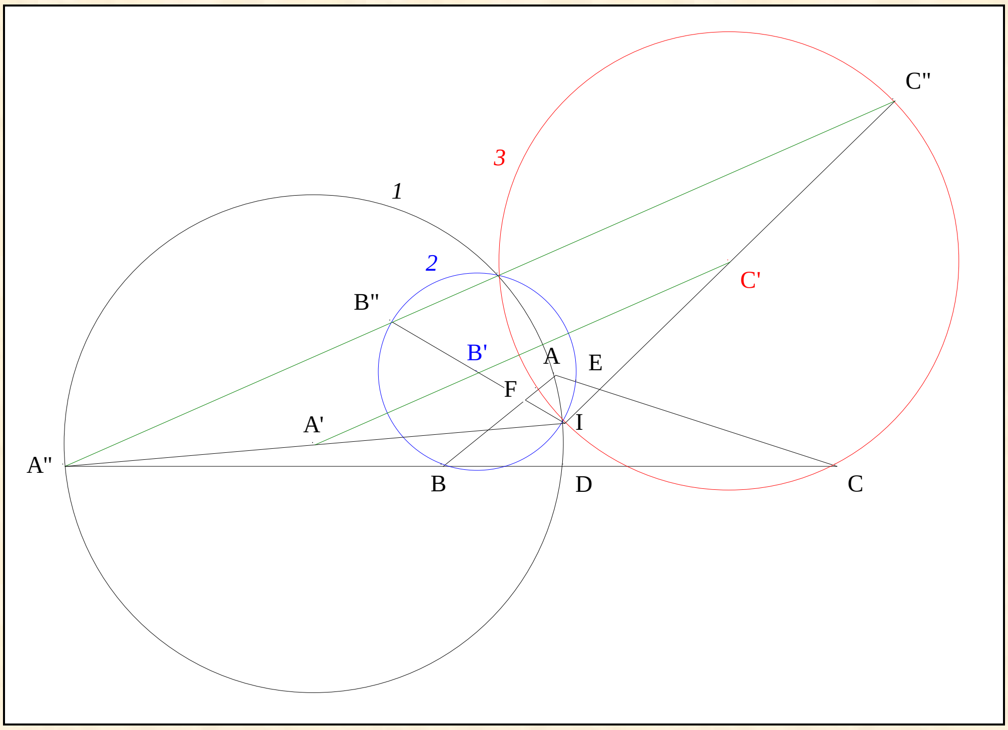
VISUALISATION

---

[36] Schröder H., Die Inversion und ihre Anwendung im Unterricht der Oberstufe, *Der Mathematikunterricht* **1** (1957) 59-80
Grinberg D., Some newer results from *MathLinks*, Schröder **7 ;** http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Schroeder/Schroeder.html
This problem is a problem of Singaporean TST 1998
Incenters and 3 circles, AoPS du 05/01/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=181827
An old problem, AoPS du 21/08/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=221942
Circumcenter–Incenter, AoPS du 15/06/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=283185



- Notons D'E'F' le triangle I-cévien de ABC
  et (A"B"C") la polaire trilinéaire de I.



- Notons A', B', C' les milieux resp. de [IA"], [IB"], [IC"].

- D'après Thalès "La droite des milieux" et le postulat d'Euclide **Ib**, A', B' et C' sont alignés.

- Sachant que les bissectrices intérieure et extérieure d'un triangle sont perpendiculaires,
  les quadrilatères AA"DI, BB"EI et CC"FI sont cycliques ;
  en conséquences, *1*, *2* et *3* ont pour diamètre resp. [IA"], [IB"] et [IC"] et pour centre A', B' et C'.

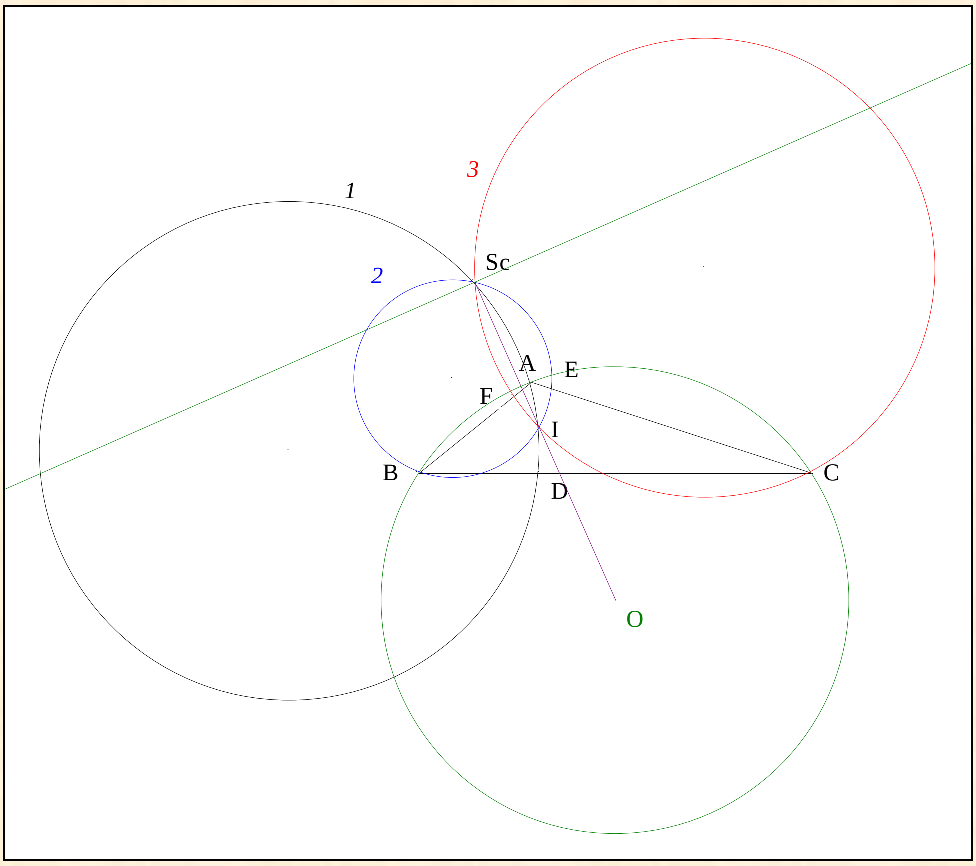
1, *2* et *3* concourent en un deuxième point,
symétrique de I par rapport à la droite des centres (A'B'C').

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

Scolies : **(1)** ce point de concours est "le point de Schröder de ABC"
ou encore "le point de Gergonne-Schröder de ABC",
noté Sc, répertorié sous X_{1155} chez ETC

(2) (Isc) est perpendiculaire à (A"B"C")

(3) Position géométrique de Sc



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC.

- **Scolie :** (OI) est la droite d'Euler du triangle excentral à ABC.

- D'après John Griffiths, (OI) est perpendiculaire à l'axe orthique du triangle excentral de ABC ;
en conséquence, (OI) est perpendiculaire à la polaire trilinéaire de I.

- **Conclusion :** (OI) passe par Sc.

Énoncé traditionnel :

la droite d'Euler du triangle excentral
rencontre perpendiculairement
la tripolaire de I *en* Sc.

Note historique : Heinz Schröder a démontré ce résultat dans son article de 1957 en utilisant l'inversion. La visualisation ci-dessus s'inspire de l’approche de Jean-Pierre Ehrmann [37].
Ce résultat a été redémontré synthétiquement en 2005 par Declecio Gouvea Mota Junior [38].

Commentaire : une preuve basée sur "Le théorème des trois cordes" a été présentée [39].

G. TRIANGLES DE NAGEL

ET

EXCENTRAL

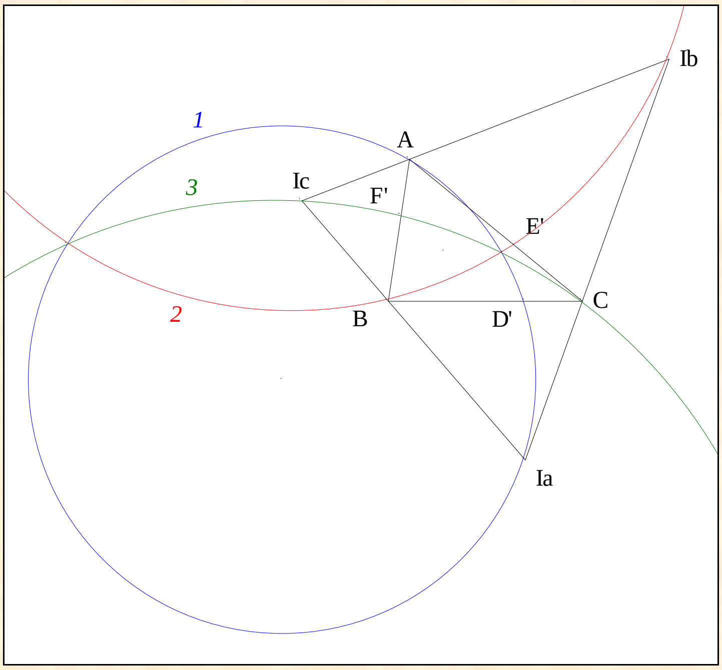
THE MITTEN-SCHRÖDER's POINTS

OU

AUCUN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
D'E'F' le triangle de Nagel de ABC,

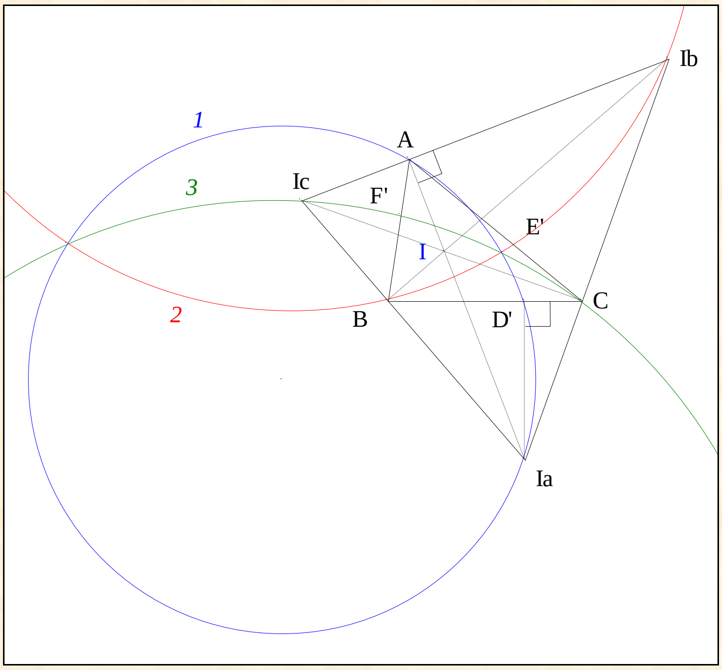
37 Ehrmann J.-P., Message *Hyacinthos* # **6326**, # **6327**
38 Mota D. G., Schröder Point – Synthetic Proof, Message *Hyacinthos* du 20/12/2005
39 Ayme J.L., Cercles coaxiaux **I**, G.G.G. vol. **24** , p. 46-47 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

	IaIbIc	le triangle excentral de ABC
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles ADP, BEQ, CFR.

Donné : *1, 2* et *3* sont coaxiaux à points de base. [40]

Commentaire : c'est une extraversion de **E.**

VISUALISATION



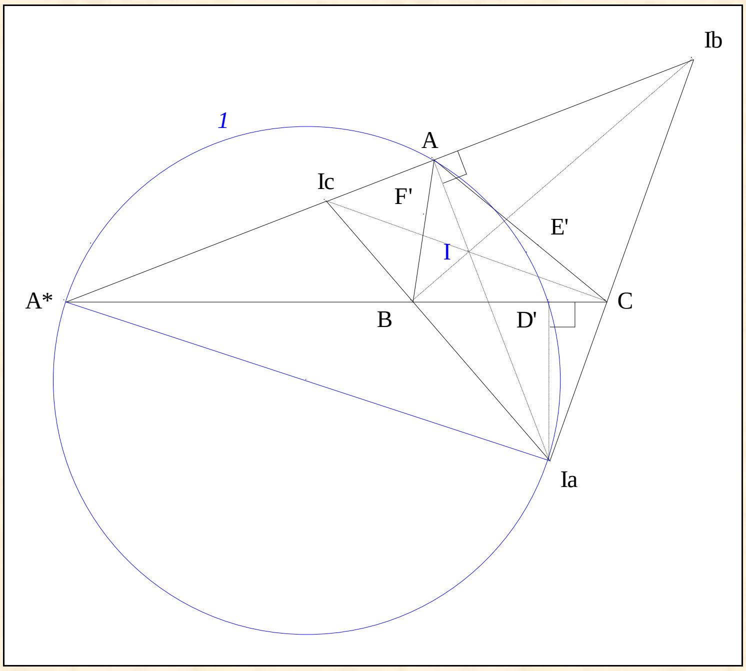
- Notons I le centre de ABC.
- D'après Mention "Deux résultats" [41], **(1)** I est l'orthocentre de IaIbIc

  (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc.
- Par définition, D', E', F' sont les pieds des perpendiculaires abaissées de Ia, Ib, Ic resp. sur (BC), (CA), (AB).

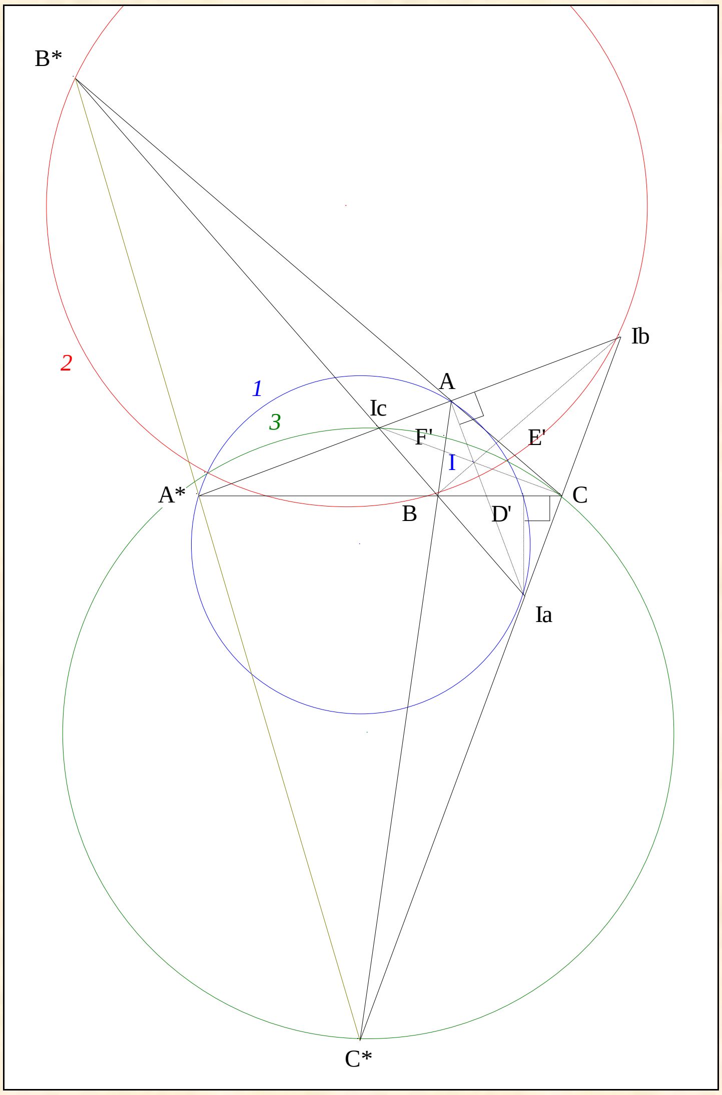
---

40 Grinberg D., Some newer results from *MathLinks*, Schröder **7 ;** http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Schroeder/Schroeder.html
Circumcircles of 3 triangles have two common points, AoPS du 01/01/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=569311
Coaxal circles formed by excenters, AoPS du 26/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=615437

41 Ayme J.-L., Deux résultats de Jules Alexandre Mention, G.G.G. vol. **25**, p. 2-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons A* le point d'intersection de (BC) et (IbIc).
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", [A*Ia] est un diamètre de *1*.



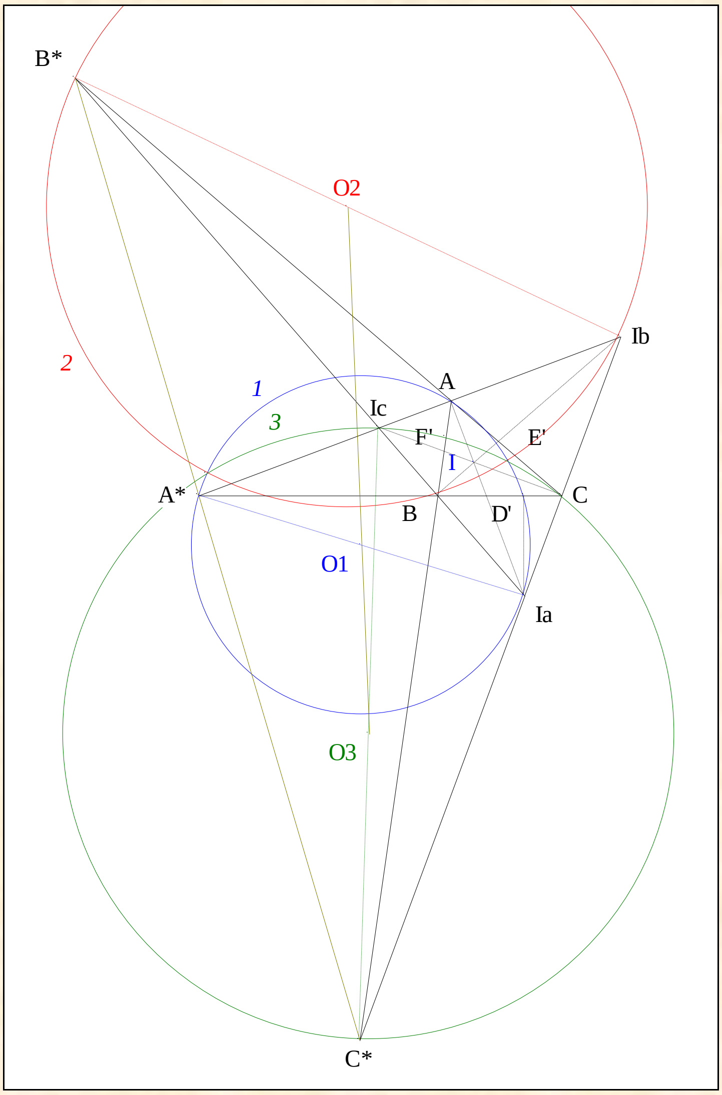
- Notons B*, C* les points d'intersection resp. de (CA) et (IcIa), (AB) et (IaIb).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que [B*Ib] est un diamètre de *2*
  [C*Ic] est un diamètre de *3*.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [42]
  (A*B*C*) est l'arguésienne i.e. l'axe orthique des triangles perspectifs ABC et IaIbIc.

---

[42] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons O1, O2, O3 les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

- **Scolies :** **(1)** O1 est le milieu de [A*Ia]

  (2) O2 est le milieu de [B*Ib]

  (3) O3 est le milieu de [C*Ic].

- D'après "La droite de Gauss-Newton" appliqué au quadrilatère complet A*B*IaIb O1, O2 et O3 sont alignés.

- D'après **II. 6.** Bodenmiller [43], *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

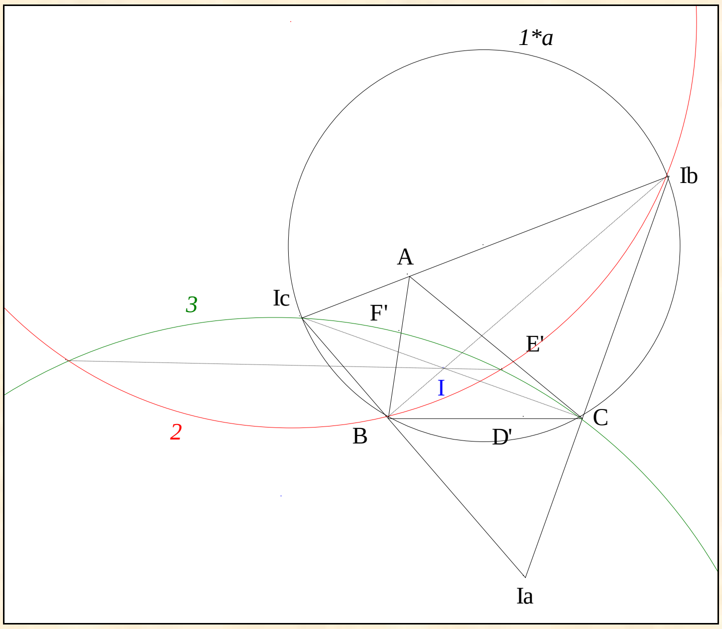
- I étant sur chaque corde [AIa], [BIb], [CIc] resp. de *1*, *2*, *3*, I est intérieur à *1*, *2*, *3* ;
  en conséquence, *1*, *2* et *3* ont au moins un point en commun.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux à points de base.

[43] Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Köln (1830)
Grinberg D., Message *Hyacinthos* # **6544** ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6544
Fritsch R., *Gudermann, Bodenmiller und der Satz von Bodenmiller-Steiner*, Didaktik der Mathematik 20/1992, 165-187

Scolies : **(1)** suite à Darij Grinberg,
les deux points de base sont "les Mitten-Schröder points du triangle ABC"

(2) I est sur l'axe radical de *1*, *2* et *3*



- **Conclusion :** I étant l'orthocentre de IaIbIc,
nous montrerions par puissance que I est sur l'axe radical de *1*, *2* et *3*.

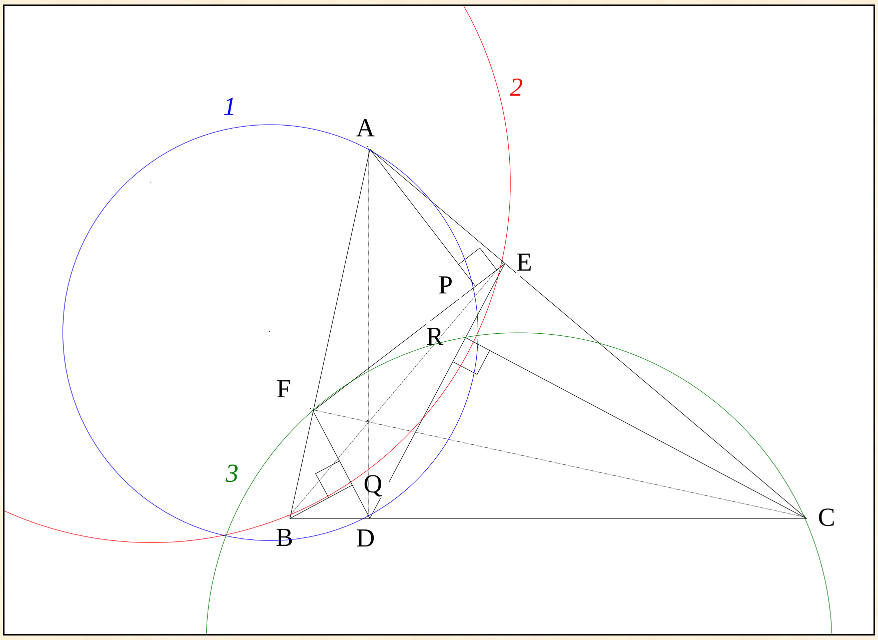
(3) Le point de Lemoine K de ABC est sur l'axe radical de *1*, *2* et *3*

APPLICATIONS DIRECTES

1. Vision inverse

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
DEF le triangle orthique de ABC,
PQR les pieds des perpendiculaires à (EF), (FD), (DE) issues resp. de A, B, C
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles ADP, BEQ, CFR.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [44]

Commentaire : c'est la situation inverse de la précédente où
DEF correspond à ABC, PQR à D'E'F', ABC à IaIbIc.

H. UN TRIANGLE ET LE POINT I

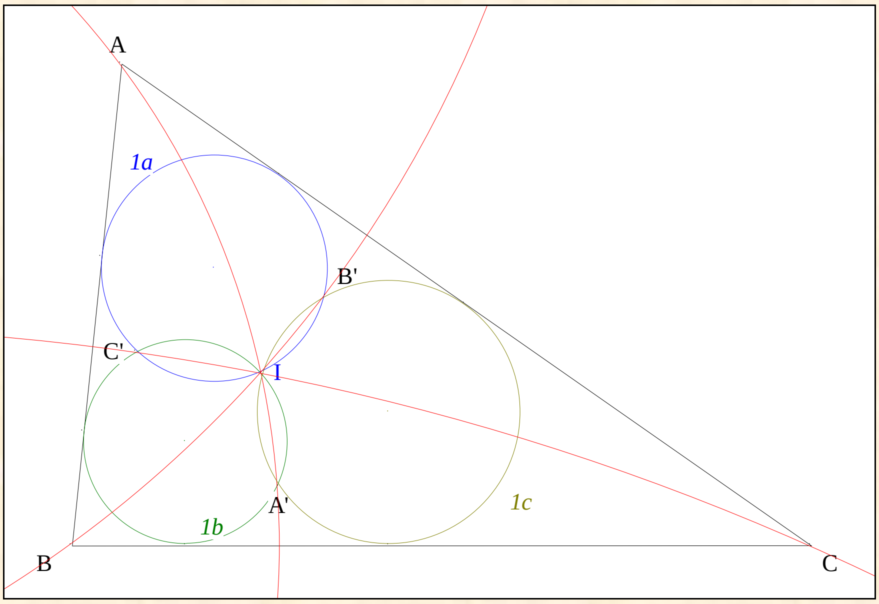
OU

UN POINT COMMUN AU DÉPART

VISION

[44] Two common points, AoPS du 21/12/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=568018

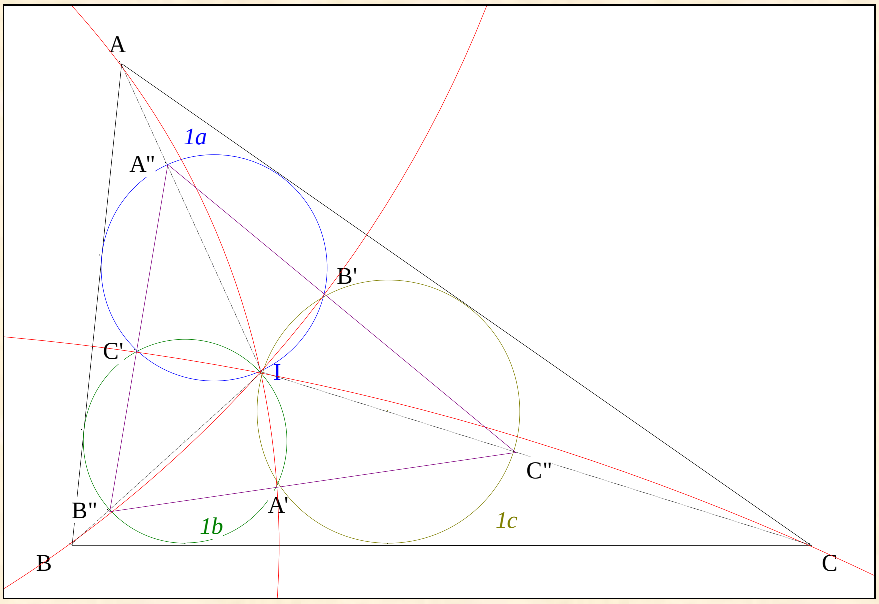
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
1a le cercle tangent à (AB), (AC) centré sur [AI] et passant par I,
1b le cercle tangent à (BC), (BA) centré sur [BI] et passant par I,
1c le cercle tangent à (CA), (CB) centré sur [CI] et passant par I,
A', B', C' les seconds points d'intersection resp. de *1b* et *1c*, *1c* et *1a*, *1a* et *1b*,
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AA'I, BB'I, CC'I.

Donné : *1*, *2* et *3* sont coaxiaux. [45]

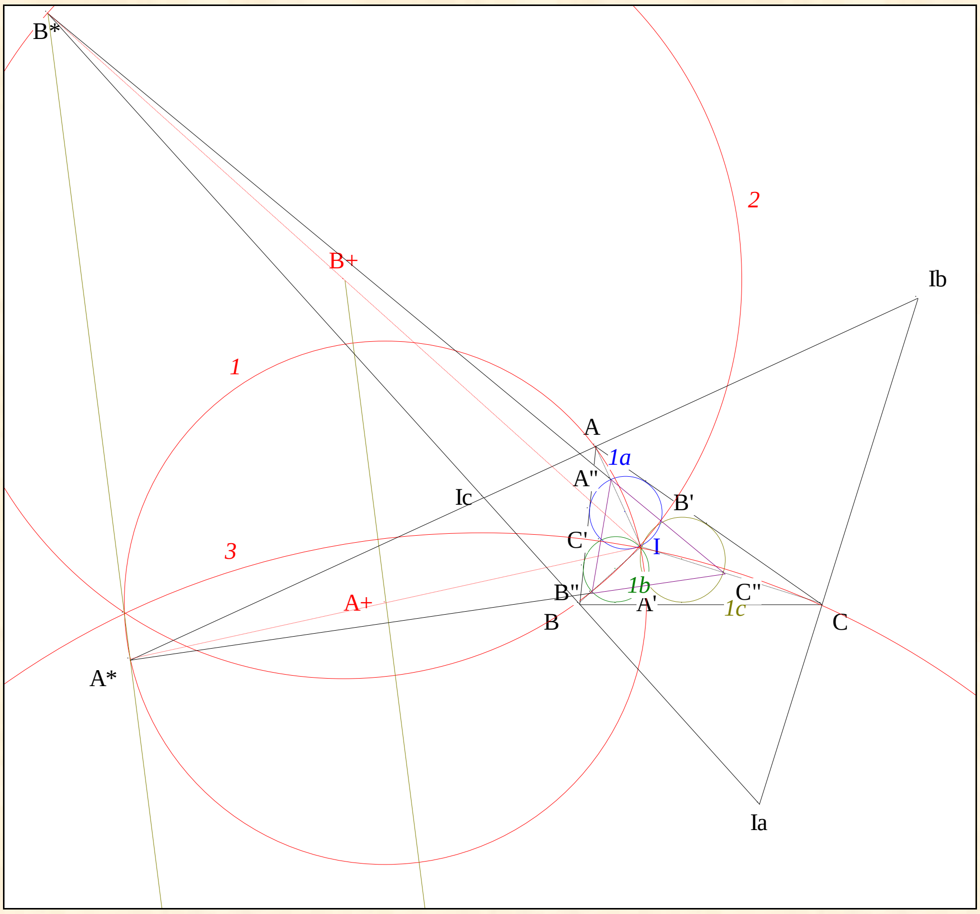
VISUALISATION



[45] IMO Short List 1997 Pb **9** ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=1&cid=17&year=1997
Prove that the circumcentres of the triangles are collinear, AoPS du 09/08/2008
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1219054
Three circumcenters are colinear, AoPS du 16/12/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=617643
Cercles coaxiaux, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1033053,1033793

- Notons A", B", C" les seconds points d'intersection resp. de *1a* et [AI], *1b* et [BI], *1c* et [CI].

- **Scolies :** A', B', C' sont resp. sur (B"C"), (C"A"), (A"B").



- Notons IaIbIc le triangle excentral de ABC,
  A*, B*, C* les points d'intersection de (IbIc) et (B"C"), (IcIa) et (C"A"), (IaIb) et (A"B"),
  et A+, B+, C+ les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [46]
  appliqué aux triangles perspectifs IaIbIc et A"B"C" de centre I, A*, B* et C* sont alignés.

- A'B'C' étant le triangle I-pédal de A"B"C",
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", A+ est le milieu de [IA*]
  B+ est le milieu de [IB*]
  C+ est le milieu de [IC*] ;
  en conséquence, A+, B+, C+ sont alignés.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont coaxiaux.

- Notons X le second point de concours de *1*, *2* et *3*.

Scolies : **(1)** X est sur l'arguésienne (A*B*C*)

(2) Après plusieurs interrogation, X n'est pas répertorié chez ETC. [47]

---

[46] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

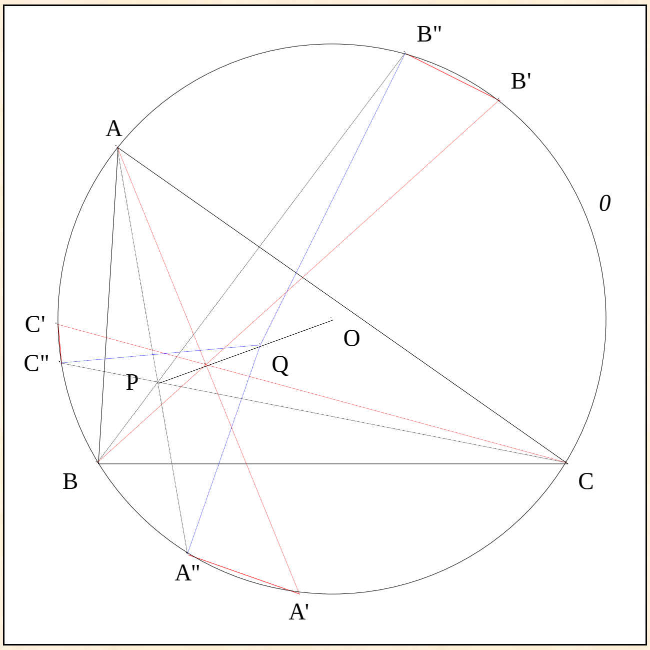
[47] Ayme J.-L., Nature of a point, AoPS du 17/12/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=617805

I. APPENDICE

1. Situation

VISION

Figure :

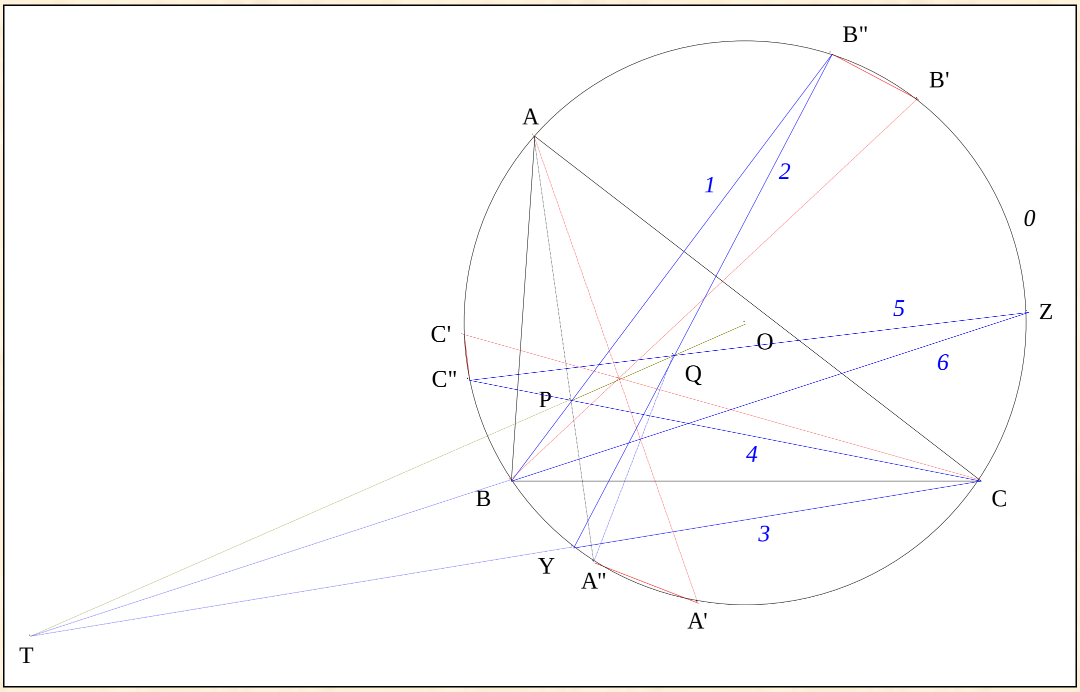


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	P	un point intérieur à ABC,
	A"B"C"	le triangle P-circumcévien
	Q	un point de (OP),
	A'	le second point d'intersection de la perpendiculaire à (QA") en A" avec *0*,
	B'	le second point d'intersection de la perpendiculaire à (QB") en B" avec *0*
et	C'	le second point d'intersection de la perpendiculaire à (QC") en C" avec *0*.

Donné : (AA'), (BB') et (CC') concourent sur (OP). [48]

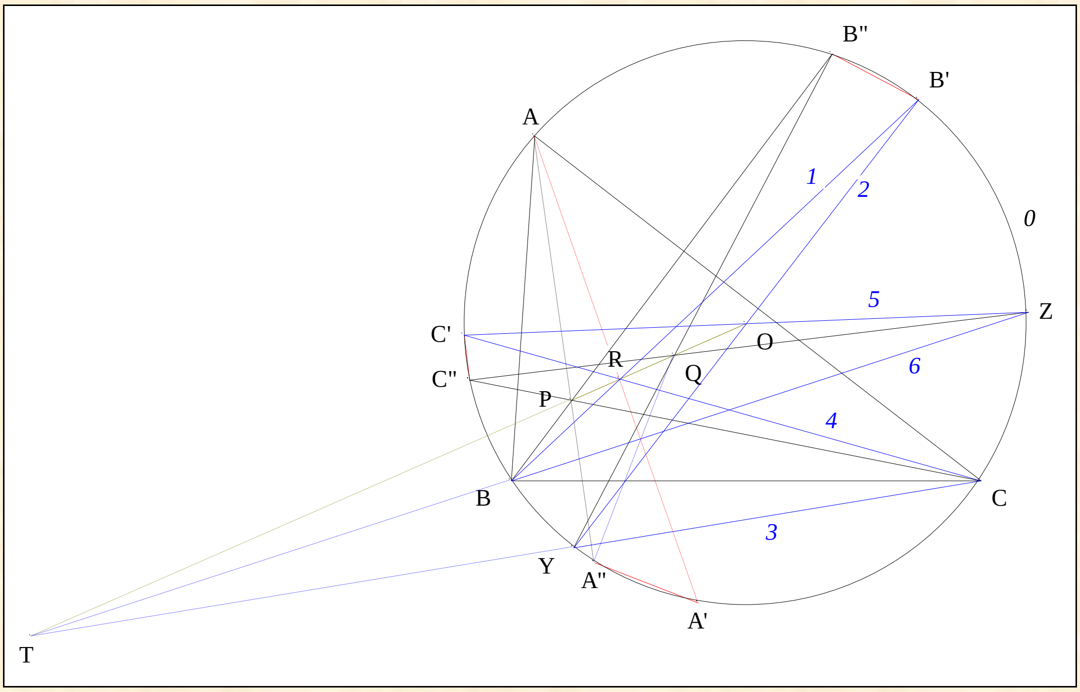
VISUALISATION

[48] Ayme J.-L., Three concurrent lines, AoPS du 29/11/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=615754



- Notons Y, Z les seconds points d'intersection de (B"Q), (C"Q) avec *0*
  et T le point d'intersection de (BZ) et (CY).

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" [49], (PQT) est la pascale de l'hexagone cyclique BB"YCC"Z.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle",
  Y, Z sont les antipôles resp. de B', C' relativement à *0*.

- Notons R le point d'intersection de (BB') et (CC').

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" [50], (ROT) est la pascale de l'hexagone cyclique BB'YCC'Z.

[49] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12**, p. 4-8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, O, P, Q, R et T sont alignés.

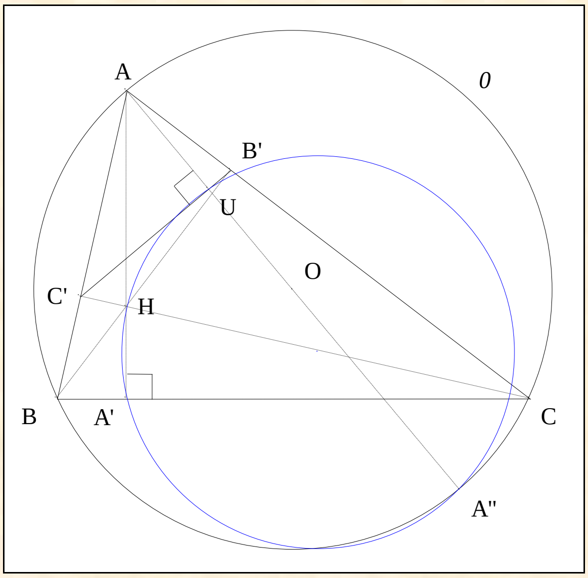
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AA') passe par R.

- **Conclusion :** (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

2. L'auteur

VISION

Figure :



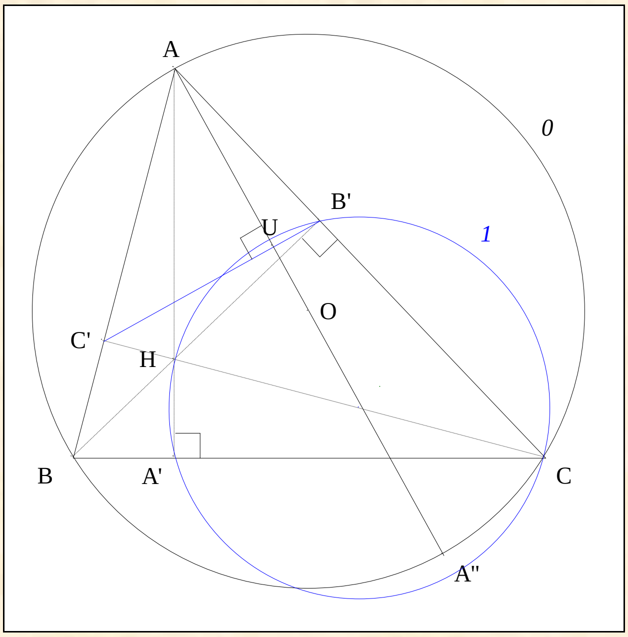
Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A"	l'antipôle de A relativement à *0*
et	U	le pied de la perpendiculaire à (B'C') issue de A

Donné : H, A', A" et U sont cocycliques. [51]

VISUALISATION

[50] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12**, p. 4-8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

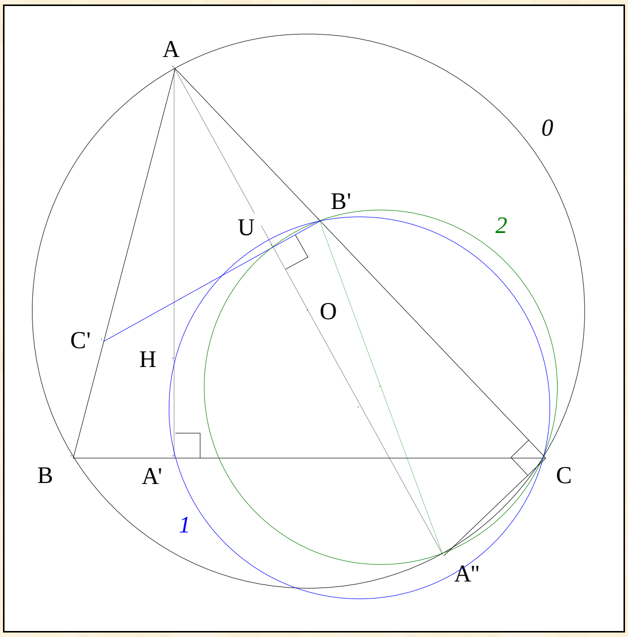
[51] Ayme J.-L., Four concyclic points ; AoPS du 14/10/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=610095



- D'après Nagel "Un rayon" [52], A, U et O sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence **Ia**, A, U, O et A" sont alignés.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", H, A', C et B' sont cocycliques.

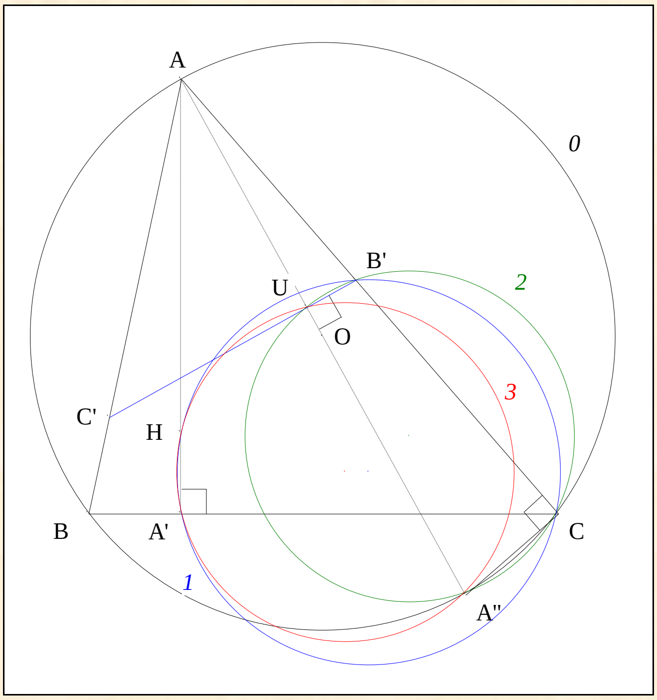
- Notons *1* ce cercle de diamètre [CH].



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", A", C, B' et U sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle de diamètre [A"B'].

[52] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 21-22 ; http//jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [53] appliqué à [A'H], [A"U] et [CB'], H, A', A" et U sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

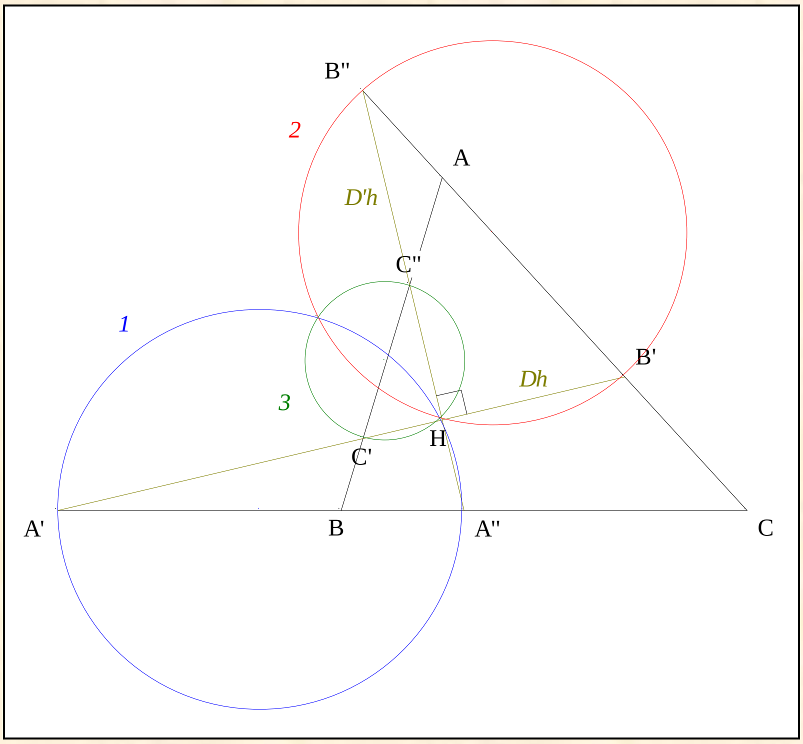
[53] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ADDENTUM

1. Les cercles de Droz-Farny

VISION

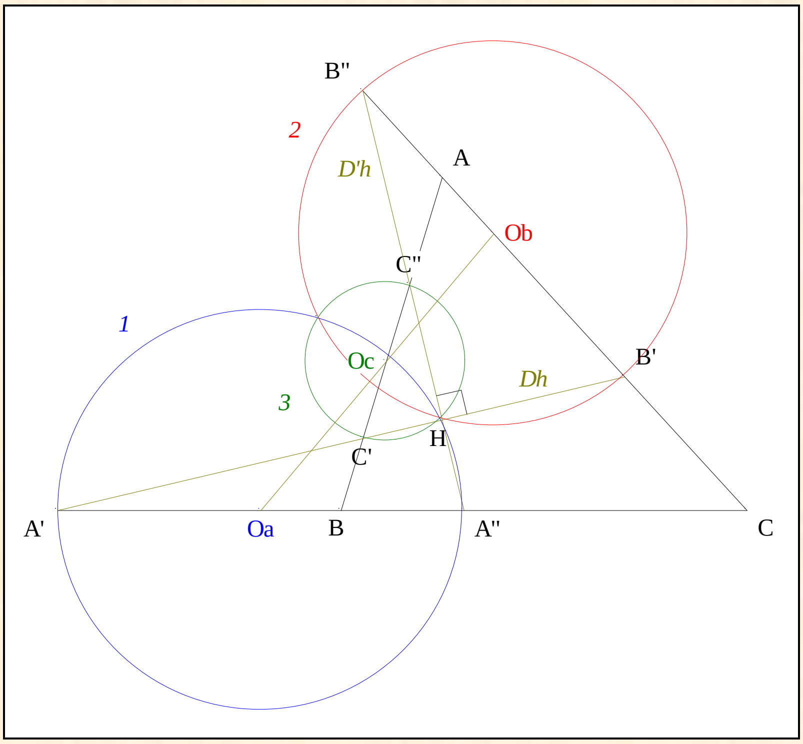
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	Dh	une droite passant par H,
	B', C'	les points d'intersection de *Dh* resp. avec (CA), (AB),
	D'h	la droite perpendiculaire à *Dh* en H
	B", C"	les points d'intersection de *D'h* resp. avec (CA), (AB).
et	*1, 2, 3*	les cercles de diamètre resp. [A'A"], [B'B"], [C'C"].

Donné : *1*, *2*, *3* sont coaxiaux.

VISUALISATION



- Notons Oa, Ob, Oc les centres resp. de *1*, *2*, *3*.
- **Scolies :** **(1)** Oa, Ob, Oc sont les milieux resp. de [A'A"], [B'B"], [C'C"]

  (2) *1*, *2* et *3* passent par H.
- D'après "La droite de Droz-Farny" [54], Oa, Ob et Oc sont alignés.
- **Conclusion :** *1*, *2*, *3* sont coaxiaux.

[54] Ayme J.-L., The Droz-Farny's line, First synthetic proof, *Forum Geometricorum* (États-Unis) **4** (2004) 219-224 ; http://forumgeom.fau.edu/.
Ayme J.-L., La droite de Droz-Farny, G.G.G. Vol. **10** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/