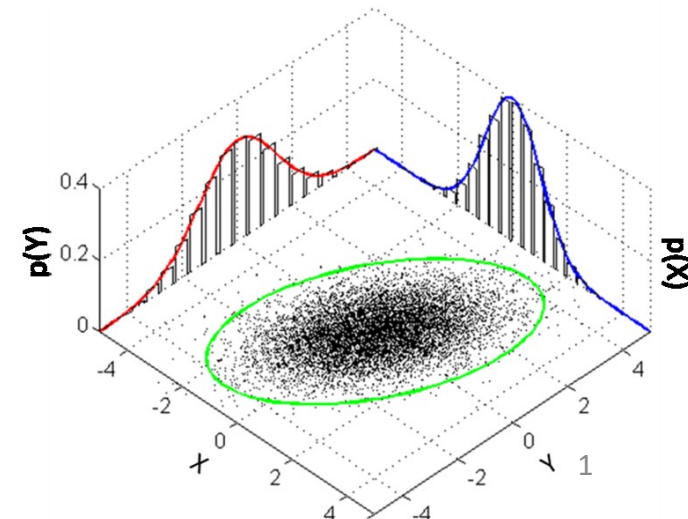
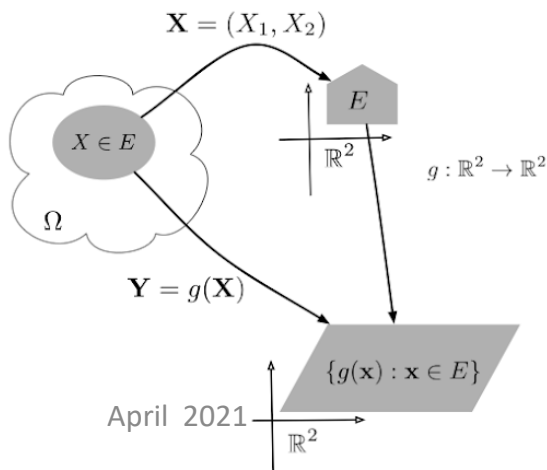


آمار و احتمالات مهندسی

فصل: متغیرهای تصادفی توأم

مدرس: مشکانی فراهانی



توزیع احتمالات توأم دو متغیره

- اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، توزیع احتمال برای وقوع همزمان آنها به صورت تابع دو متغیره $f_{X,Y}(x,y)$ نشان داده می‌شود و آن را توزیع احتمال توأم X و Y گویند.

تابع چگالی احتمال توأم (حالت گسسته)

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابع چگالی توأم آنها به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

یعنی $f_{X,Y}(x,y)$ احتمال این است که نتایج x و y به طور همزمان اتفاق بیفتند.

- تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع احتمال توأم برای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y گویند، هرگاه

$$۱) \quad f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall x \in R_X, y \in R_Y$$

$$۲) \quad \sum_{R_Y} \sum_{R_X} f_{X,Y}(x,y) = 1$$

مثال ۱

- از ظرفی شامل ۴ مهره سفید، ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه، ۲ مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید و Y تعداد مهره‌های قرمز به دست آمده باشد. تابع چگالی احتمال (X, Y) را به دست آورید.

| $\downarrow Y / X \rightarrow$ | ۰ | ۱ | ۲ |
|--------------------------------|---|---|---|
| ۰ | $\frac{\binom{4}{0}^W \binom{3}{0}^R \binom{3}{2}^B}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$ | $\frac{\binom{4}{1}^W \binom{3}{0}^R \binom{3}{1}^B}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{15}$ | $\frac{\binom{4}{2}^W \binom{3}{0}^R \binom{3}{0}^B}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$ |
| ۱ | $\frac{\binom{4}{0}^W \binom{3}{1}^R \binom{3}{1}^B}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{15}$ | $\frac{\binom{4}{1}^W \binom{3}{1}^R \binom{3}{0}^B}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{15}$ | ۰ |
| ۲ | $\frac{\binom{4}{0}^W \binom{3}{2}^R \binom{3}{0}^B}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$ | ۰ | ۰ |

مثال ۲

- در جعبه‌ای سه مهره با شماره ۱، سه مهره با شماره ۲ و سه مهره با شماره ۳ وجود دارد؛ سه مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کرده و X را مینیمم اعداد انتخاب شده و Y را ماکسیمم اعداد انتخاب شده در نظر می‌گیریم. تابع احتمال توأم (X, Y) را بیابید.

| $Y \setminus X$ | ۱ | ۲ | ۳ |
|-----------------|---|---|--|
| ۱ | $\frac{\binom{3}{3} \binom{3}{0} \binom{3}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}$ | 0 | 0 |
| ۲ | $\frac{\binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{0}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{3}{2} \binom{3}{1} \binom{3}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{18}{84}$ | $\frac{\binom{3}{0} \binom{3}{3} \binom{3}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}$ | 0 |
| ۳ | $\frac{\binom{3}{1} \binom{3}{0} \binom{3}{2}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{3}{2} \binom{3}{0} \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{45}{84}$ | $\frac{\binom{3}{0} \binom{3}{2} \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{18}{84}$ | $\frac{\binom{3}{0} \binom{3}{0} \binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}$ |

مثال ۳

• تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت مقابل است:

الف- مقدار k را بیابید.

$$f(x, y) = \frac{k}{x + y}, \quad x = 0, 1, 2 \quad y = 1, 2$$

ب- احتمال‌های زیر را به دست آورید.

| Y / X | ۰ | ۱ | ۲ |
|---------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ۱ | $\frac{k}{0+1} = k$ | $\frac{k}{1+1} = \frac{k}{2}$ | $\frac{k}{2+1} = \frac{k}{3}$ |
| ۲ | $\frac{k}{0+2} = \frac{k}{2}$ | $\frac{k}{1+2} = \frac{k}{3}$ | $\frac{k}{2+2} = \frac{k}{4}$ |

a. ۱) $k \geq 0$. ۲) $k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = \frac{12}{35}$

b. $P(X < Y) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 2) = \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} = \frac{22}{35}$

c. $P(XY < 2) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) = \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = \frac{24}{35}$

تابع چگالی احتمال توأم (حالت پیوسته)

- تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y گویند، هرگاه:

$$۱ - f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall x \in R_X, y \in R_Y$$

$$۲ - \int_{R_Y} \int_{R_X} f_{X,Y}(x,y) dx dy = ۱$$

مثال ۴

- فرض کنید X زمان واکنش (بر حسب ثانیه) نسبت به محرک معینی باشد و Y درجه‌ی حرارتی (بر حسب فارنهایت) باشد که در آن واکنش معینی شروع می‌شود. فرض کنید تابع چگالی توأم X و Y به صورت مقابل است:
- الف- مقدار a را محاسبه کنید. ب- احتمال زیر را به دست آورید.

$$f(x, y) = a x y, \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

• راه حل

$$۱) a \geq 0$$

$$۲) \int_0^1 \int_0^1 a x y dx dy = a \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \frac{a}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4$$

$$b. P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < 2\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} a x y dx dy = a \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} dy = \frac{a}{8} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{64}$$

مثال ۵

- ناحیه مربع شکل $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ با تابع چگالی مقابل را در نظر بگیرید:
 $f(x, y) = x + y$
احتمال $P\left(\frac{1}{2} < X < 1, 0 < Y < \frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

• راه حل

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} < X < 1, 0 < Y < \frac{1}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (x + y) dy dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} \right)_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال ۶

• تابع مقابل را در نظر بگیرید. $O.W.$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx(1+2y), & 0 < x < 3 \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{O.W.} \end{cases}$$

الف- مقدار c را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع یک تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y باشد.

ب- احتمال $P(X + 2Y \geq 3)$ را محاسبه کنید.

• راه حل

a.
$$\int_0^3 \int_0^1 cx(1+2y) dy dx = c \int_0^3 x \left[y + y^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = 2c \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

b.
$$P(X + 2Y \geq 3) = \int_0^1 \int_{3-2y}^3 cx(1+2y) dx dy = c \int_0^1 (1+2y) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=3-2y}^{x=3} dy$$

$$= \frac{1}{18} \int_0^1 (1+2y)(-4y^2 + 12y) dy = \frac{1}{18} \int_0^1 (-8y^3 + 20y^2 + 12y) dy$$

$$= \frac{1}{18} \left(-2y^4 + \frac{20}{3}y^3 + 6y^2 \right)_{y=0}^{y=1} = \frac{16}{27}$$



مثال ۷

- تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت مقابل مفروض است:

الف- تعیین مقدار k ب- محاسبه $P(X+Y < 1)$

$$f(x, y) = k x y^3, \quad 0 < y < 2x \quad 0 < x < 1$$

• راه حل

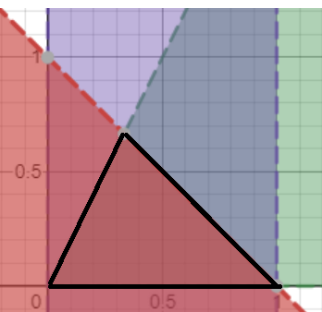
a. ۱) $k > 0$

$$۲) \int_0^1 \int_0^{2x} k x y^3 dy dx = k \int_0^1 x \left[\frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=2x} dx = k \int_0^1 4 x^5 dx = 4k \left[\frac{x^6}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4k}{6} = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$b. \quad P(X + Y < 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{y}{2}}^{1-y} k x y^3 dx dy = k \int_0^{\frac{1}{2}} y^3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=1-y} dy$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^3 - 2y^4 + \frac{3}{4}y^5 \right) dy = \frac{3}{2} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{2}{5}y^5 + \frac{y^6}{6} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = ???$$



نحوه محاسبه‌ی احتمال (متغیرهای پیوسته توأم)

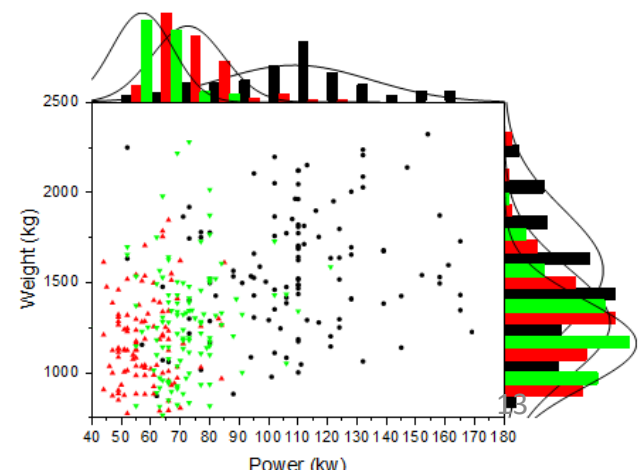
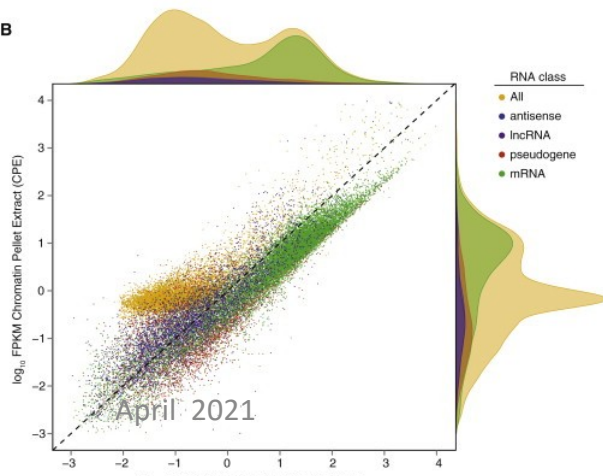
برای محاسبه این احتمال:

- ۱- ابتدا حدود تکیه‌گاه X و Y را در یک محور مختصات رسم می‌کنیم.
- ۲- سپس برای پیشامد مورد نظر خط مربوط به عبارت داخل پرانتز را (در حالت تساوی) رسم می‌کنیم.
- ۳- حال مشخص می‌کنیم که نقاط بالا یا پایین این خط را در حدود تکیه‌گاه در نظر بگیریم؛ آن را هاشور می‌زنیم.
- ۴- اگر بخواهیم انتگرال داخلی را بر حسب x بنویسیم، یک خط فرضی موازی محور x ها رسم می‌کنیم؛ نقاط مینیمم و ماکسیمم برخورد این خط فرضی با ناحیه هاشور زده را مشخص کرده و آن‌ها را به عنوان کران‌های انتگرال داخلی می‌نویسیم.
- ۵- برای نوشتن حدود انتگرال خارجی، باید مقادیر مینیمم و ماکسیمم را از حدود تغییرات Y در ناحیه هاشور زده مشخص کنیم. توجه شود که حدود انتگرال خارجی هرگز نباید به X و Y وابسته باشد.

توزیع احتمالات حاشیه‌ای

یا

توزیع احتمالات کناری



توزیع احتمالات حاشیه‌ای (کناری)

- با داشتن تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم متغیرهای تصادفی X و Y می‌توان تابع احتمال X به تنهایی و Y به تنهایی را محاسبه کرد که به آنها توابع احتمال حاشیه‌ای (یا کناری) گویند.

توزیع احتمالات حاشیه‌ای (حالت گسسته)

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{R_Y} P(X = x, Y = y)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{R_X} P(X = x, Y = y)$$

مثال ۸

- جعبه‌ای شامل ۳ مهره است که بر روی آن‌ها شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است. ۲ مهره یک‌به‌یک و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر X را برابر شماره‌ی اولین مهره‌ی انتخاب شده از جعبه و Y را برابر شماره‌ی بزرگتر در بین دو مهره‌ی انتخابی در نظر بگیریم.
- الف- تابع احتمال توأم X و Y را بنویسید.

| Y / X | 1 | 2 | 3 | $P(Y = y)$ |
|------------|--|--|--------------------------------------|---|
| 2 | $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{3}$ |
| 3 | $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ | $0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ | 1 |

مثال ۸

- ب- توابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید.

$$P(X = ۱) = P(X = ۱, Y = ۲) + P(X = ۱, Y = ۳) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(X = ۲) = P(X = ۲, Y = ۲) + P(X = ۲, Y = ۳) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(X = ۳) = P(X = ۳, Y = ۲) + P(X = ۳, Y = ۳) = ۰ + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

| $X = x_i$ | ۱ | ۲ | ۳ |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۱}{۳}$ |

$$P(Y = ۲) = P(X = ۱, Y = ۲) + P(X = ۲, Y = ۲) + P(X = ۳, Y = ۲) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + ۰ = \frac{۱}{۳}$$

$$P(Y = ۳) = P(X = ۱, Y = ۳) + P(X = ۲, Y = ۳) + P(X = ۳, Y = ۳) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

| $Y = y_i$ | ۲ | ۳ |
|--------------|---------------|---------------|
| $P(Y = y_i)$ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۲}{۳}$ |

مثال

- تابع چگالی احتمال (X, Y) به صورت زیر است. تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر X را حساب کنید.

| $\downarrow Y / X \rightarrow$ | ۰ | ۱ | ۲ | $P(Y=y)$ |
|--------------------------------|--------|--------|--------|----------|
| ۰ | $1/15$ | $4/15$ | $2/15$ | $7/15$ |
| ۱ | $3/15$ | $4/15$ | ۰ | $7/15$ |
| ۲ | $1/15$ | ۰ | ۰ | $1/15$ |
| $P(X=x)$ | $5/15$ | $8/15$ | $2/15$ | |

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{15} + \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15}$$

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + 0 = \frac{8}{15}$$

$$P(X = 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) = \frac{2}{15} + 0 + 0 = \frac{2}{15}$$

| $X=x$ | 0 | 1 | 2 |
|----------|--------|--------|--------|
| $P(X=x)$ | $5/15$ | $8/15$ | $2/15$ |

توزیع احتمالات حاشیه‌ای (حالت پیوسته)

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{X,Y}(x, y) dx$$

مثال ۹

- توابع چگالی کناری X و Y با چگالی توأم زیر را به دست آورید.

$$f(x, y) = \frac{6 - x - y}{8}, \quad 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4$$

• راه حل

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x, y) dy \\ &= \int_2^4 \frac{6 - x - y}{8} dy \\ &= \frac{1}{8} \left[6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=4} \\ &= \frac{3 - x}{4}, \quad 0 < x < 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x, y) dx \\ &= \int_0^2 \frac{6 - x - y}{8} dx \\ &= \frac{1}{8} \left[6x - \frac{x^2}{2} - yx \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{5 - y}{4}, \quad 2 < y < 4 \end{aligned}$$

مثال ۱۰

- توابع چگالی کناری X و Y با چگالی توأم زیر را به دست آورید.

$$f(x, y) = \lambda x y^2, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

• راه حل

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x, y) dy \\ &= \int_x^1 \lambda x y^2 dy \\ &= \lambda x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{y=1} \\ &= \frac{\lambda x (1 - x^3)}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x, y) dx \\ &= \int_0^y \lambda x y^2 dx \\ &= \lambda y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y} \\ &= \frac{\lambda y^4}{2}, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

استقلال

استقلال متغیرهای تصادفی

- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و توابع احتمال حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند. متغیرهای تصادفی X و Y را از لحاظ آماری مستقل گویند اگر و تنها اگر

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

- استقلال X و Y به معنی عدم تأثیر هر متغیر در توزیع احتمال متغیر دیگر است (یعنی با دانستن مقدار یکی از متغیرها، تغییری در توزیع متغیر دیگر به وجود نمی‌آید).

مثال ۱۱

- توزیع احتمال توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت زیر است. تحقیق کنید آیا X و Y از هم مستقل هستند؟

مثال ۱۱- الف (حالت گسسته)

| $\downarrow Y / X \rightarrow$ | 1 | 2 | $f_Y(y)$ |
|--------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $f_X(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

برای بررسی استقلال دو متغیر، به ازای تمام خانه‌های جدول شرط استقلال را چک می‌کنیم؛ در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که برای همه‌ی نقاط شرط استقلال برقرار است. مثلاً:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) P(Y = 1)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

پس X و Y مستقل هستند

مثال ۱۱-ب (حالت گسسته)

| $\downarrow Y / X \rightarrow$ | 1 | 2 | $P(Y = y)$ |
|--------------------------------|------|-----|------------|
| 0 | 1/9 | 2/9 | 1/3 |
| 1 | 1/18 | 4/9 | 1/2 |
| 2 | 1/6 | 0 | 1/6 |
| $P(X = x)$ | 1/3 | 2/3 | 1 |

برای بررسی استقلال دو متغیر، به ازای تمام خانه‌های جدول شرط استقلال را چک می‌کنیم؛ در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که برای همه‌ی نقاط شرط استقلال برقرار نیست. مثلاً:

$$P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$$

$$\frac{1}{18} \neq \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

پس X و Y مستقل نیستند

مثال ۱۱- ج (حالت پیوسته)

$$f(x, y) = 12xy(1 - y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

• راه حل

$$f(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 12xy(1 - y) dy = 12x \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = 12x \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 2x$$

$$f(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 12xy(1 - y) dx = 12y(1 - y) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 12y(1 - y) \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = 6y(1 - y)$$

$$f(x, y) = f(x)f(y) \quad \Rightarrow \quad 12xy(1 - y) = 2x \times 6y(1 - y)$$

• پس X و Y مستقل هستند.

مثال ۱۱-د (حالت پیوسته)

$$f(x, y) = 3xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2x$$

• راه حل

$$f(x) = \int_0^{2x} 3xy \, dy = 3x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2x} = 3x \left[\frac{(2x)^2}{2} - 0 \right] = 6x^2, \quad 0 < x < 1$$

$$f(y) = \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^1 3xy \, dx = 3y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\sqrt{\frac{y}{2}}}^{x=1} = 3y \left[\frac{1}{2} - \frac{\frac{y}{2}}{2} \right] = \frac{3}{4} y (2 - y), \quad 0 < y < 2$$

$$f(x, y) = f(x) f(y) \quad \Rightarrow \quad 3xy \neq 6x^2 \times \frac{3}{4} y (2 - y)$$

امید ریاضی

امید ریاضی تابعی از بردار تصادفی

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x, y)$ باشند، امید ریاضی تابع $g(X, Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum_{R_X} \sum_{R_Y} g(X, Y) P(X = x, Y = y) \\ \int_{R_X} \int_{R_Y} g(X, Y) f(x, y) dy dx \end{cases}$$

مثال ۱۲

- با توجه به جدول توزیع احتمال زیر مطلوبست:

| Y / X | 1 | 2 | 3 |
|---------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

الف - $E(X+Y)$

ب - $E(XY)$

ج - $E(Y)$

$$E(X+Y) = \left[(1+0) \frac{1}{12} \right] + \left[(2+0) \frac{1}{6} \right] + \left[(3+0) \frac{1}{3} \right] + \left[(1+2) \frac{1}{4} \right] + \left[(2+2) \frac{1}{12} \right] + \left[(3+2) \frac{1}{12} \right] = \frac{35}{12}$$

$$E(XY) = \left[(1 \times 0) \frac{1}{12} \right] + \left[(2 \times 0) \frac{1}{6} \right] + \left[(3 \times 0) \frac{1}{3} \right] + \left[(1 \times 2) \frac{1}{4} \right] + \left[(2 \times 2) \frac{1}{12} \right] + \left[(3 \times 2) \frac{1}{12} \right] = \frac{4}{3}$$

$$E(Y) = \left[(0) \frac{1}{12} \right] + \left[(0) \frac{1}{6} \right] + \left[(0) \frac{1}{3} \right] + \left[(2) \frac{1}{4} \right] + \left[(2) \frac{1}{12} \right] + \left[(2) \frac{1}{12} \right] = \frac{5}{6}$$

مثال ۱۳

- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای چگالی احتمال توأم مقابل باشند. امید ریاضی $g(X, Y) = \frac{X+1}{Y}$ را محاسبه کنید.

$$f(x, y) = \frac{16y}{x^3}, \quad x > 2 \quad 0 < y < 1$$

• راه حل

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X+1}{Y}\right) &= \int_2^{\infty} \int_0^1 \frac{x+1}{y} \times \frac{16y}{x^3} dy dx \\ &= 16 \int_2^{\infty} \frac{x+1}{x^3} \times [y]_0^1 dx \\ &= 16 \left[\frac{-1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right]_2^{\infty} \\ &= 16 \times \frac{5}{8} = 10. \end{aligned}$$

مثال ۱۴

- تابع احتمال توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت زیر داده شده است.
اگر $E(XY) = \frac{96}{25}$ باشد، a و b را به دست آورید.

| Y / X | 1 | 2 |
|---------|----------------|----------------|
| 1 | $\frac{1}{25}$ | $\frac{4}{25}$ |
| 2 | a | $\frac{5}{25}$ |
| 3 | $\frac{5}{25}$ | b |

$$\begin{aligned}
 ۲) \quad E(XY) &= \left[(1 \times 1) \frac{1}{25} \right] + \left[(2 \times 1) a \right] + \left[(3 \times 1) \frac{5}{25} \right] + \\
 &\quad + \left[(1 \times 2) \frac{4}{25} \right] + \left[(2 \times 2) \frac{5}{25} \right] + \left[(3 \times 2) b \right] = \\
 &= 2a + 6b + \frac{44}{25} = \frac{96}{25} \\
 \Rightarrow a + 3b &= \frac{26}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱) \quad \frac{1}{25} + a + \frac{5}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} + b &= a + b + \frac{15}{25} = 1 \\
 \Rightarrow a + b &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{2}{5} \\ a + 3b = \frac{26}{25} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{25} \\ b = \frac{8}{25} \end{cases}
 \end{aligned}$$

مثال ۱۵

• در مثال ۷ امید ریاضی $g(X, Y) = \frac{1}{XY^2}$ را به دست آورید.

$$f(x, y) = \frac{3}{2} x y^2, \quad 0 < y < 2x \quad 0 < x < 1$$

• راه حل

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{XY^2}\right) &= \int_0^1 \int_0^{2x} \frac{1}{x y^2} \times \frac{3}{2} x y^2 dy dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{2x} y dy dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 2 x^2 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{2x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = 1 \end{aligned}$$

قضیه

- مقدار مورد انتظار مجموع یا تفاضل دو یا چند تابع از متغیرهای تصادفی X و Y برابر با مجموع یا تفاضل مقادیر مورد انتظار تابع است:

$$E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]$$

- اثبات:

$$\begin{aligned} E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] &= \int_{R_Y} \int_{R_X} [g(X, Y) \pm h(X, Y)] f(x, y) dx dy \\ &= \int_{R_Y} \int_{R_X} g(X, Y) f(x, y) dx dy \pm \int_{R_Y} \int_{R_X} h(X, Y) f(x, y) dx dy \\ &= E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)] \end{aligned}$$

- به عنوان مثال:

$$E\left[X^2 + 2XY - \frac{5Y}{X^2}\right] = E[X^2] + 2E[XY] - 5E\left[\frac{Y}{X^2}\right]$$

- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند. در این صورت برای همه‌ی توابع حقیقی $g(X)$ و $h(Y)$

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

- اثبات:

$$\begin{aligned} E[g(X)h(Y)] &= \iint_R g(x)h(y)f(x,y)dx dy \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} \iint_R g(x)h(y)f(x)f(y)dx dy \\ &= \int_{R_Y} h(y)f(y) \int_{R_X} g(x)f(x)dx dy \\ &= \int_{R_Y} h(y)f(y)dy \int_{R_X} g(x)f(x)dx \\ &= E[h(Y)]E[g(X)] \end{aligned}$$

نکته

• اگر X و Y مستقل باشند، آن گاه $E(XY) = E(X)E(Y)$

• **عکس قضیه‌ی قبل لزوماً برقرار نیست؛**

• به عنوان مثال فرض کنید مجموعه‌ی مقادیر متغیر تصادفی $R_X = \{-1, 0, 1\}$ و تابع جرم احتمال آن $P\{-1\} = P\{0\} = P\{1\} = \frac{1}{3}$ باشد. با فرض $Y = X^r$

$$E(X) = \left[-1 \times \frac{1}{3}\right] + \left[0 \times \frac{1}{3}\right] + \left[1 \times \frac{1}{3}\right] = 0.$$

$$E(Y) = E(X^r) = \left[1 \times \frac{1}{3}\right] + \left[0 \times \frac{1}{3}\right] + \left[1 \times \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = E(X^r) = \left[-1 \times \frac{1}{3}\right] + \left[0 \times \frac{1}{3}\right] + \left[1 \times \frac{1}{3}\right] = 0.$$

$$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

اما دو متغیر مستقل نیستند.

توزیع های شرطی

تابع چگالی شرطی
احتمال شرطی

توزیع‌های شرطی (حالت گسسته)

فرض کنید

- X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه R_X و تابع جرم احتمال $P(X=x)$
- Y یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه R_Y و تابع جرم احتمال $P(Y=y)$
- فرض کنید $P(X=x, Y=y)$ تابع احتمال توأم بردار (X, Y) باشد.

- وقتی مقدار Y معلوم باشد، به جای $P(X=x)$ از احتمال شرطی X با فرض معلوم بودن $Y=y$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$P(X=x | Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

✓ **تذکر:** توجه کنید که $P(X=x|Y=y)$ خود یک تابع احتمال با مجموعه

مثال ۱۶

- فرض کنید تابع احتمال (X, Y) به صورت زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمالات زیر:

$$P(x, y) = \frac{1}{15}(x + y), \quad x = 0, 1, 2 \quad y = 1, 2$$

• راه حل

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{\frac{1}{15}(x + y)}{\frac{1 + y}{5}} = \frac{1}{3} \times \frac{x + y}{1 + y}$$

$$P(Y = y) = \sum_{x=0}^2 \frac{1}{15}(x + y) = \frac{1}{15}[(0 + y) + (1 + y) + (2 + y)] = \frac{1 + y}{5}$$

$$\Rightarrow P(X = 1 | Y = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(X = 0 | Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{0 + 2}{1 + 2} = \frac{2}{9}$$

توزیع های شرطی (حالت پیوسته)

فرض کنید

- X یک متغیر تصادفی پیوسته با تکیه گاه R_X و تابع جرم احتمال $f(x)$
- Y یک متغیر تصادفی پیوسته با تکیه گاه R_Y و تابع جرم احتمال $f(y)$
- فرض کنید $f(x, y)$ تابع احتمال توأم بردار (X, Y) باشد.

- زمانی که هیچ اطلاعی از مقدار Y نداریم، از $f_X(x) = \int_{R_Y} f(x, y) dy$ برای محاسبه ی احتمال پیشامدهای مربوط به X استفاده می کنیم.

- وقتی مقدار Y معلوم باشد، به جای $f(x)$ از احتمال شرطی X با فرض معلوم بودن $Y=y$ استفاده می کنیم. در این صورت داریم:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

- توجه کنید که $f(x | y)$ خود یک تابع چگالی احتمال با مجموعه مقادیر R_X است:

$$\begin{aligned} \int_{R_X} f(x | y) dx &= \int_{R_X} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{R_X} f(x, y) dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

مثال ۱۷

- فرض کنید تابع چگالی توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت زیر باشد.
مطلوب است تعیین تابع چگالی شرطی زیر:

$$f(x, y) = \frac{3}{2} (x^2 + y^2), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

• راه حل

$$f(x | y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3}{2} (x^2 + y^2)}{\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} + y^2 \right)} = \frac{x^2 + y^2}{\frac{1}{3} + y^2}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dx \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) \end{aligned}$$

محاسبه‌ی احتمال شرطی

$$P(a \leq X \leq b \mid Y = c) = \begin{cases} \sum_{x=a}^b P(x \mid Y = c) \\ \int_a^b f(x \mid Y = c) dx \end{cases}$$

$$P(a \leq X \leq b \mid Y \geq c) = \frac{P(a \leq X \leq b, Y \geq c)}{P(Y \geq c)} = \begin{cases} \frac{\sum_{x=a}^b \sum_{y=c}^{\infty} P(X = x, Y = y)}{\sum_{y=c}^{\infty} P(Y = y)} \\ \frac{\int_a^b \int_c^{\infty} f(x, y) dy dx}{\int_c^{\infty} f_Y(y) dy} \end{cases}$$

مثال ۱۸

- فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت زیر باشد.
مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P(X \leq 2 | Y = 1)$

$$f(x, y) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^y, \quad x, y = 1, 2, \dots$$

• راه حل

$$*** P(X \leq 2 | Y = 1) = P(X = 1 | Y = 1) + P(X = 2 | Y = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^y}{2 \left(\frac{1}{3}\right)^y} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$P(Y = y) = \sum_{x=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^y = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^y \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

مثال ۱۹

- فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت جدول زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P(X \geq 0 | Y \geq 0)$

| $\downarrow Y / X \rightarrow$ | -۱ | ۰ | ۲ | $f_Y(y)$ |
|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| -۱ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{9}{16}$ |
| ۲ | $\frac{4}{16}$ | 0 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{7}{16}$ |

• راه حل

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 0 | Y \geq 0) &= P(X \geq 0 | Y = 2) = \frac{P(X \geq 0, Y = 2)}{P(Y = 2)} \\
 &= \frac{P(X = 0, Y = 2) + P(X = 2, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{0 + \frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

مثال ۲۰

- فرض کنید تابع چگالی احتمال شرطی متغیر تصادفی $X | Y = y$ به صورت زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P(X < ۱ | Y = ۲)$

$$f(x | y) = \frac{x + y}{1 + y} e^{-x}, \quad 0 < x, y < \infty$$

• راه حل

$$\begin{aligned} P(X < ۱ | Y = ۲) &= \int_0^1 \frac{x + y}{1 + y} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{1 + ۲} \left[-e^{-x} (x + ۱ + ۲) \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= ۱ - \frac{۴}{۳e} \end{aligned}$$

مثال ۲۱

- فرض کنید تابع چگالی توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت زیر باشد.
مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P\left(Y > \frac{1}{2} \middle| X < \frac{1}{2}\right)$

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

• راه حل

$$P\left(Y > \frac{1}{2} \middle| X < \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dx dy}{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{7} (2x^2 + x) dx} = \frac{\frac{23}{128}}{\frac{5}{24}} = \frac{69}{80}$$

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dy = \frac{6}{7} \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{6}{7} (2x^2 + x)$$

مثال ۲۲

- فرض کنید برای متغیرهای تصادفی X و Y داشته باشیم:

$$f_X(x) = a, \quad 0 < x < 1$$

الف- مقادیر a و b را تعیین کنید.

$$f_{Y|X}(y|x) = b, \quad 0 < x < 1, \quad x < y < x+1$$

ب- محاسبه $P\left(\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2} \mid X = \frac{1}{2}\right)$

- راه حل

$$\int_{R_X} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 a dx = a x \Big|_0^1 = a = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \Rightarrow f(x,y) = f(y|x)f(x) \Rightarrow f(x,y) = b \times a = b$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_x^{x+1} b dy dx = b \int_0^1 y \Big|_{y=x}^{y=x+1} dx = b x \Big|_0^1 = b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

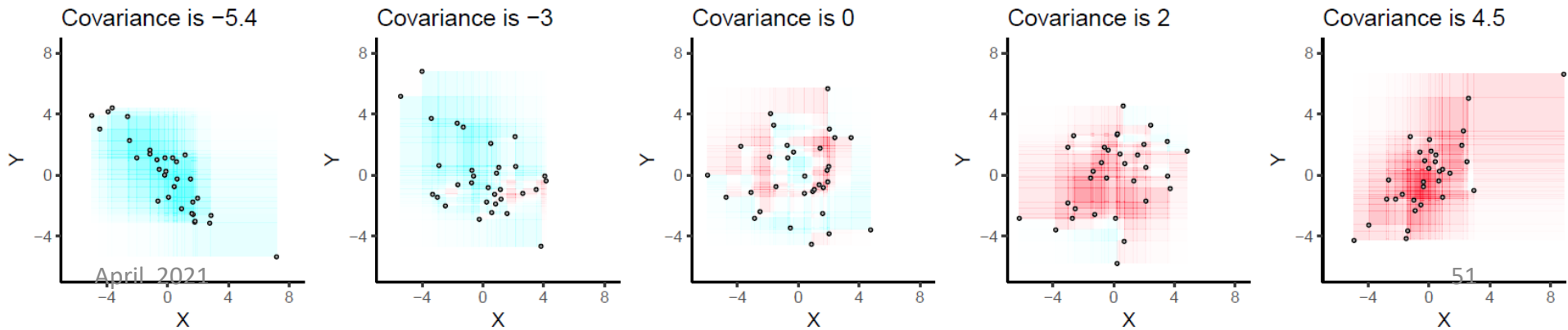
$$b. \quad P\left(\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2} \mid X = \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f_{Y|X}\left(y \mid x = \frac{1}{2}\right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 dy = \frac{1}{2}$$

نکته:

- چنانچه X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت واضح است که تابع احتمال شرطی $f_{X|Y}(x|y)$ با تابع چگالی حاشیه‌ای $f_X(x)$ برابر خواهد شد. زیرا:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \stackrel{\text{ind}}{=} \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

کوواریانس



کوواریانس

- واریانس اندازه‌ی پراکندگی یا عدم تمرکز توزیع X پیرامون میانگین را نشان می‌دهد.
- مقادیر $\text{Var}(X)$ و $\text{Var}(Y)$ پراکندگی‌های X و Y را مستقلاً (نه به طور توأم) نشان می‌دهند.
- کوواریانس کمیتی است که اطلاعات مربوط به پراکندگی توأم X و Y را به دست می‌دهد. به عبارتی دیگر، این کمیت چگونگی تغییرات توأم X و Y را نشان می‌دهد.
- هرگاه X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، مقادیر آنها تحت تأثیر یکدیگر نبوده و ناهمبسته‌اند.
- حال اگر X و Y مستقل نباشند، نوع ارتباط یا همبستگی مقادیر آنها و همچنین میزان قدرت این همبستگی می‌تواند بوسیله‌ی **کوواریانس** X و Y اندازه‌گیری شود:

تعریف کوواریانس

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع توأم باشند. در این صورت کوواریانس X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] \\ &= E\left[XY - X E(Y) - Y E(X) + E(X) E(Y)\right] \\ &= E(XY) - E(X) E(Y) - E(X) E(Y) + E(X) E(Y) \\ &= E(XY) - E(X) E(Y) \end{aligned}$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$$

کوواریانس

- برای هر جفت متغیر تصادفی X و Y ممکن است کوواریانس مثبت، منفی و یا صفر باشد.
- **مثبت** بودن مقدار کوواریانس نشان دهنده تغییرات **هم جهت** X و Y است (مثل سطح کلسترول خون هر فرد با مقدار چربی اشباع شده در بدن او)
- **منفی** بودن کوواریانس نشان دهنده همبستگی منفی یا **معکوس** بین X و Y است (مثل مقدار الکل موجود در خون یک نفر با نحوه رانندگی او)
- اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $Cov(X, Y)=0$. اما عکس این گزاره درست نیست؛ یعنی دو متغیر تصادفی وابسته می توانند کوواریانس صفر داشته باشند.

- توجه کنید که $Cov(X, Y) = 0$ تنها نشان‌دهنده‌ی عدم وجود همبستگی **خطی** بین X و Y است و ارتباط‌های غیرخطی هنوز ممکن است بین X و Y برقرار باشد.

- اگر دو متغیر X و Y مستقل باشند، آنگاه $Cov(X, Y) = 0$
- اثبات:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\underline{\underline{indp}} \quad E(X)E(Y) - E(X)E(Y)$$

$$= 0$$

مثال ۲۳ (حالت گسسته)

• تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر است. مطلوب است:

• الف- تعیین مقدار k
 ب- تعیین کوواریانس X و Y

$$f(x, y) = k(x + y), \quad x = 1, 2, 3 \quad y = 1, 2, 3$$

• راه حل

| $X \setminus Y$ | ۱ | ۲ | ۳ | $P(X = x)$ |
|-----------------|------|-------|-------|------------|
| ۱ | $2k$ | $3k$ | $4k$ | $9k$ |
| ۲ | $3k$ | $4k$ | $5k$ | $12k$ |
| ۳ | $4k$ | $5k$ | $6k$ | $15k$ |
| $P(Y = y)$ | $9k$ | $12k$ | $15k$ | ۱ |

$$a) \quad k > 0. \quad \sum_{R_Y} \sum_{R_X} P(X = x, Y = y) = 1 \Rightarrow 9k + 12k + 15k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{36}$$

$$b) \quad E(X) = (1 \times 9k) + (2 \times 12k) + (3 \times 15k) = 78k$$

$$E(Y) = (1 \times 9k) + (2 \times 12k) + (3 \times 15k) = 78k$$

$$E(XY) = (1 \times 2k) + (2 \times 3k) + (3 \times 4k) + \dots + (9 \times 6k) = 168k$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{168}{36} - \left(\frac{78}{36} \times \frac{78}{36} \right)$$

مثال ۲۴ (حالت پیوسته)

- فرض کنید X طول عمر یک دستگاه الکترونیکی و Y طول عمر یک جزء آن باشد. فرض کنید با از کار افتادن این جزء دستگاه از کار بیفتد. به علاوه، فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر باشد. کوواریانس X و Y را بیابید.

$$f(x, y) = \frac{1}{49} e^{\frac{-y}{7}}, \quad 0 \leq x \leq y < \infty$$

• راه حل

$$E(X) = \int_0^\infty \int_0^y x \times \frac{1}{49} e^{\frac{-y}{7}} dx dy = 7$$

$$E(Y) = \int_0^\infty \int_0^y y \times \frac{1}{49} e^{\frac{-y}{7}} dx dy = 14$$

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^y xy \times \frac{1}{49} e^{\frac{-y}{7}} dx dy = 147$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 147 - (7 \times 14)$$

چند ویژگی کوواریانس

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- * $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(YX) - E(Y)E(X) = Cov(Y, X)$
- $Cov(X, X) = Var(X)$
- * $Cov(X, X) = E(X \cdot X) - E(X)E(X) = E(X^2) - E^2(X) = Var(X)$
- $Cov(aX, Y) = a Cov(X, Y)$
- * $Cov(aX, Y) = E(aX \cdot Y) - E(aX)E(Y) = aE(XY) - aE(X)E(Y) = aCov(X, Y)$
- $Cov(aX + b, cY + d) = ac Cov(X, Y)$
- *
$$\begin{aligned} Cov(aX + b, cY + d) &= E[(aX + b)(cY + d)] - E(aX + b)E(cY + d) \\ &= E[acXY + adX + bcY + bd] - [aE(X) + b][cE(Y) + d] \\ &= acE[XY] - acE(X)E(Y) = acCov(X, Y) \end{aligned}$$

قضیه:

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، آن گاه:

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2 a b Cov(X, Y)$$

$$\Rightarrow Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 Cov(X, Y)$$

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه

$$Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

مثال ۲۵

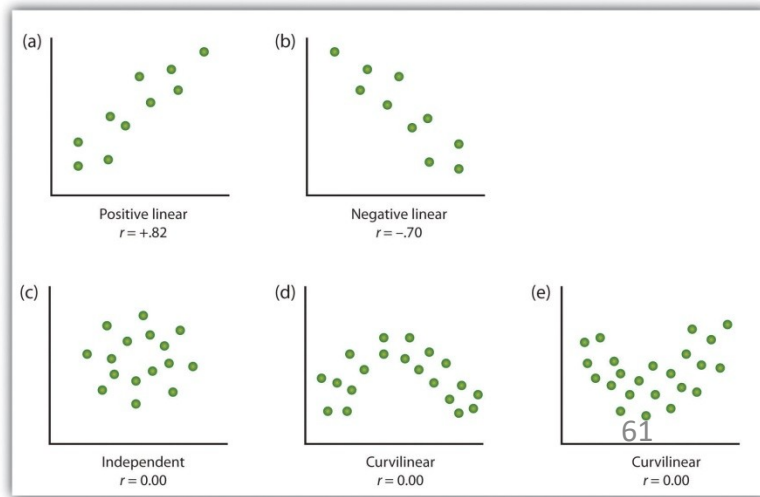
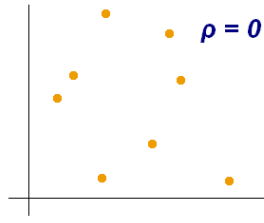
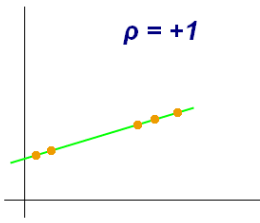
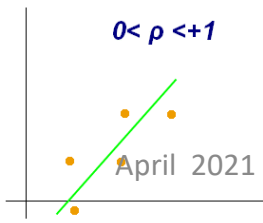
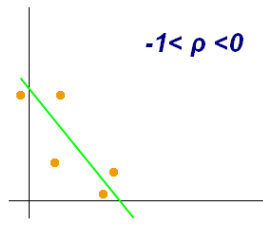
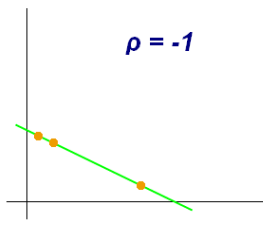
- فرض کنید X و Y میزان دو نوع ناخالصی در یک محصول شیمیایی باشد. با فرض اینکه $Var(X) = ۲$ ، $Var(Y) = ۳$ و $Cov(X, Y) = ۱$ مقدار $Var(۳X - ۲Y + ۵)$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} Var(۳X - ۲Y + ۵) &= ۹ Var(X) + ۴ Var(Y) - ۱۲ Cov(X, Y) \\ &= (۹ \times ۲) + (۴ \times ۳) - (۱۲ \times ۱) = ۱۸ \end{aligned}$$

* اگر X و Y مستقل باشند، آن گاه:

$$\begin{aligned} Var(۳X - ۲Y + ۵) &= ۹ Var(X) + ۴ Var(Y) - ۱۲ Cov(X, Y) \\ &= (۹ \times ۲) + (۴ \times ۳) - (۱۲ \times ۰) = ۳۰ \end{aligned}$$

همبستگی



ضریب همبستگی

- کوواریانس X و Y را به عنوان معیاری برای تشخیص چگونگی ارتباط یا همبستگی و نیز قدرت همبستگی خطی میان مقادیر X و Y تعریف کردیم.
- اما کوواریانس سه نقص دارد که به ویژه در هنگام مقایسه‌ی میزان همبستگی بین دو یا چند دسته متغیر ما را دچار اشکال می‌کند. این سه نقص عبارتند از:
 - ۱- وابستگی کوواریانس به واحدهای اندازه‌گیری متغیرها.
 - ۲- نامحدود بودن مقادیر ممکن کوواریانس.
 - ۳- عدم وابستگی کوواریانس به میزان پراکندگی مقادیر دو متغیر.
- برای رفع این نقص‌ها و بهبود بخشیدن به این معیار، به جای محاسبه‌ی کوواریانس X و Y ، از **کوواریانس استاندارد شده‌ی X و Y** استفاده می‌کنیم.

ضریب همبستگی

- این کمیت جدید به همان خوبی قبل، میزانی است برای سنجش نوع و قدرت همبستگی متغیرهای تصادفی ولی عیوب را (سلاید قبل) ندارد.

- این کمیت را ضریب همبستگی X و Y می‌نامند و آن را با نماد $\rho_{X,Y}$ یا $Corr(X, Y)$ نشان می‌دهند:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

خواص ضریب همبستگی

- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq +1$
- *if X & Y independent $\Rightarrow \rho_{X,Y} = 0$*
- $|\rho_{X,Y}| = 1$ اگر و تنها اگر یک رابطه‌ی خطی کامل بین X و Y برقرار باشد؛
یعنی $Y = aX + b$ در این صورت
 - $\rho = +1$ اگر و تنها اگر $a > 0$
 - $\rho = -1$ اگر و تنها اگر $a < 0$

مثال آخر

فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند. ضریب همبستگی X و Y را به دست آورید.

$$f(x, y) = e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty$$

• راه حل

$$f(x) = \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}, \quad x > 0$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

$$E(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^y x y e^{-y} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = 2$$

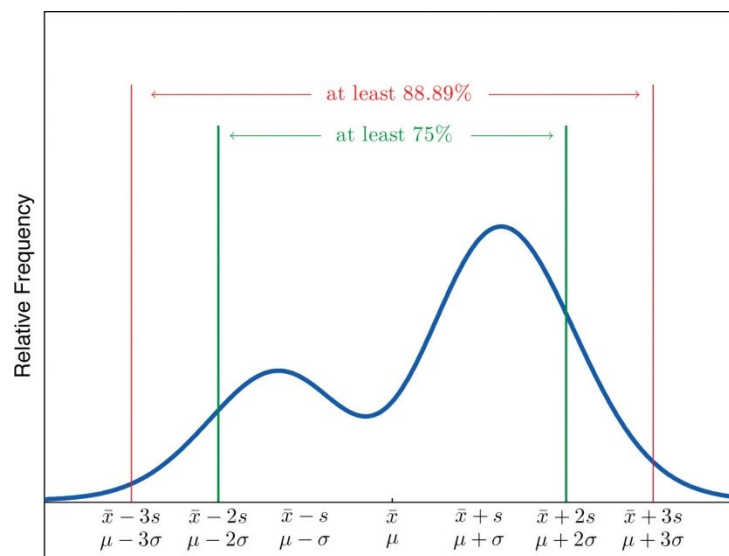
$$\text{Cov}(X, Y) = 1$$

$$\text{Var}(X) = 1$$

$$\text{Var}(Y) = 2$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} = 0.707$$

قضیه چبیشف



نامساوی چبیشف

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آن گاه به ازای هر $t > 0$

$$P\left(|X - \mu| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

مثال

- اداره‌ی پست هر روز به طور متوسط ۱۰,۰۰۰ نامه را با واریانس ۲,۰۰۰ توزیع می‌کند. در مورد احتمال این که اداره‌ی پست فردا بین ۸,۰۰۰ تا ۱۲,۰۰۰ نامه را توزیع کند، چه می‌توان گفت؟

- راه‌حل:

$$\begin{aligned} p(8000 < X < 12000) &= P(8000 - 10000 < X - 10000 < 12000 - 10000) \\ &= P(|X - 10000| < 2000) \end{aligned}$$

**

$$= 1 - P(|X - 10000| \geq 2000) \geq 1 - 0.005$$

$$P(|X - 10000| \geq 2000) \leq \frac{2000}{\sqrt{2000}} = 0.005 \quad **$$

مثال

- فرض کنید می‌دانیم که تعداد محصولات تولید شده در یک کارخانه در طول هفته یک متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ است. اگر واریانس تولید هفتگی برابر ۲۵ باشد، آنگاه در مورد احتمال این که محصول یک هفته معین بین ۴۰ تا ۶۰ باشد، چه می‌توان گفت؟

• راه حل

$$\begin{aligned} P(40 < X < 60) &= P(40 - 50 < X - 50 < 60 - 50) = P(|X - 50| < 10) \\ &\quad ** \\ &= 1 - P(|X - 50| \geq 10) \geq 1 - 0.25 = 0.75 \\ P(|X - 50| \geq 10) &\leq \frac{25}{100} = 0.25 \quad ** \end{aligned}$$

مثال

- فرض کنید میانگین تعداد تصادفات در تقاطعی دو مورد در روز است. فرض کنید واریانس تعداد تصادف‌ها ۲ مورد در روز باشد. احتمال این‌که فردا حداقل ۵ تصادف رخ دهد، چه قدر است؟ (نامساوی چبیشف)

• راه‌حل:

$$P(X \geq 5) = P(X - 2 \geq 3) = P(|X - 2| \geq 3) \leq \frac{2}{9} = 0.2222$$

$$** \text{Poisson Distribution : } P(X \geq 5) = 1 - 0.9473 = 0.0527$$

تذکر

- اهمیت نامساوی چبیشف در این است که ما را قادر می‌سازند هرگاه فقط میانگین و واریانس توزیعی معلوم باشد، کران‌هایی را روی مقادیر احتمال آنها داشته باشیم.
- البته اگر توزیع معلوم باشد، آن‌گاه احتمال‌های مورد نظر دقیقاً قابل محاسبه هستند و لزومی برای مراجعه به کران‌ها وجود ندارد.