הרצאה 11: אלגוריתם Strassen למכפלת מטריצות ריבועיות

בהרצאה זו נציג את אלגוריתם Strassen להכפלת מטריצות ריבועיות ונחשב את הסיבוכיות שלו, בעזרת משפט האב.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

חזרה על משפט האב (Master Theorem)

קיימים אלגוריתמים רקורסיביים רבים שאנו מתקשים בחישוב הסיבוכיות שלהם. משפט האב מספק לנו מכשיר רב עוצמה לטיפול ברוב האלגוריתמים הרקורסיביים. אנו נלמד גרסה מסויימת של משפט האב. גרסה אחרת נמצאת בספר הקורס.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

התנאים להפעלת משפט האב

משפט האב מאפשר לנו לדון באלגוריתמים רקורסיביים המקיימים את התנאים הבאים:
לכל בעיה בגודל n, אשר אינה מקרה קצה, האלגוריתם מבצע a קריאות רקורסיביות לפתרון a תת בעיות בגודל n/b.

שימו לב

1. a ו b הם קבועים התלויים בבעיה אך לא ב n.
2. a תת הבעיות אינן בהכרח חלוקה של הקלט ל a חלקים זרים.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

דוגמא

מיון ע"י מיזוג:

1. **חלק** את מערך הקלט ל 2 מערכים בגודל $n/2$ ($a=b=2$).
2. **מיין** כל תת-מערך באופן על ידי קריאה רקורסיבית למיון-מיזוג.
3. **מזג** את שתי המחציות הממוינות.

לעומת זאת, **מיון מהיר** אינו עונה לדרישות אלה משום שבמיון מהיר מחלקים את מערך הקלט לשני קבצים שהיחס בין גדליהם אינו קבוע.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

הצגת סיבוכיות מיון-מיזוג על ידי מערכת משוואות רקורסיביות

נסמן ב $T(n)$ את הזמן הדרוש למיון-מיזוג מערך בן n איברים.

הזמן הנדרש לכל קריאה רקורסיבית הוא כמובן $T\left(\frac{n}{2}\right)$ ומאחר שמיזוג של שני מערכים באורך $n/2$ כל אחד אורך זמן לינארי ומיון קובץ באורך 1 אורך זמן קבוע כלשהו נקבל כי:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + dn$$

$$T(1) = c$$

עבור c ו- d קבועים כלשהם.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

הכללת מערכת המשוואות

נתבונן באלגוריתם רקורסיבי A לפתרון בעיה כלשהי P. נניח כי אם מריצים את A על קלט בגודל n אזי:

1. נדרשות a קריאות רקורסיביות עם קלט בגודל n/b.
2. מספר הפעולות בשגרה הראשית, ללא הקריאות הרקורסיביות, הוא $d \cdot f(n)$. כאשר $f(n)$ היא פונקציה כלשהי התלויה באלגוריתם.
3. פתרון מקרה הקצה של הרקורסיה, עבור קלט בגודל 1, דורש c פעולות.
4. הקבועים a, b, c, d והפונקציה f תלויים באלגוריתם A.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

הכללת מערכת המשוואות (המשך)

נסמן ב$T(n)$ את הזמן הנדרש להרצת האלגוריתם A על קלט בגודל n.
אזי מתקיים:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + df(n)$$

$$T(1) = c$$

להלן נציג את משפט האב (Master Theorem) הפותר את מערכת המשוואות הזו באופן כללי.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

משפט הMaster

תהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על ידי:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + df(n)$$

$$T(1) = c$$

אזי אם f היא פונקציה כפלית (תוגדר להלן) התנהגות הפונקציה $T(n)$ תלויה ביחס בין a לבין $f(b)$ כמתואר להלן:

1. אם $a > f(b)$, $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.
2. אם $a < f(b)$, $T(n) = \Theta(f(n))$
3. אם $f(b) = a$, $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

הערות למשפט הMaster

1. **במקרה 1 -** רוב צעדי A מתבצעים על ידי הקריאות הרקורסיביות.
   במקרה 2 - רוב צעדי A מתבצעים מחוץ לקריאות הרקורסיביות.
   במקרה 3 - שני הגורמים הקודמים תורמים לסיבוכיות.
2. לערכי c ו-d אין שום השפעה על $T(n)$.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

דוגמא - סיבוכיות מיון-מיזוג

כזכור, מיון מיזוג מקיים:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + dn$$

$$T(1) = c$$

מאחר ש $a = b = 2$ ו $f(n) = n$, אנו מקבלים כי

$$a = 2 = f(2) = f(b)$$

ומכאן, סיבוכיות מיון-מיזוג היא

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 2} \log_2 n\right) = \Theta(n \log n)$$

כעת, נציג את אלגוריתם Strassen למכפלת מטריצות מרובעות. סיבוכיות האלגוריתם תקבע תוך שימוש במשפט האב.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

אלגוריתם Strassen לביצוע מכפלת מטריצות ריבועיות

קלט: שתי מטריצות **ריבועיות** A ו-B מסדר $n \times n$.

פלט: מכפלת הטריצות $C = A \times B$.

שימו לב: גודל הקלט הוא $O(n^2)$.

נפתח את ההרצאה בחזרה על האלגוריתם התקני ולאחר מכן נפתח את אלגוריתם Strassen. נסיים את ההרצאה בחישוב הסיבוכיות של האלגוריתם, שהיא $\Theta(n^{2.81\ldots})$, תוך שימוש במשפט האב.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

מכפלת מטריצות ריבועיות

נניח ש-A ו-B הן מטריצות ריבועיות ממימד n.

מכפלת **המטריצות** A ו- B היא מטריצה C, המקיימת

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ומסמנים $C = A \times B$.

מהי סיבוכיות בעיית חישוב מכפלת שתי מטריצות?

ברור כי $\Omega(n^2)$ היא חסם תחתון לסיבוכיות הבעיה (למה?).

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

אלגוריתם ישיר

האלגוריתם הישיר לחישוב C הוא:

for $i=1$ **to** n **do**
    for $j=1$ **to** n **do**
        $c_{ij} \leftarrow 0$
        for $k=1$ **to** n **do**
            $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$
        end
    end
end

<u>אלגוריתם 11.1: אלגוריתם ישיר למכפלת מטריצות ריבועיות</u>

זמן הריצה: $\Theta(n^3)$.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

תצוגה מטריצית של כפל מטריצות

נפתח כעת אלגוריתם אחר, רקורסיבי, למכפלת מטריצות. האלגוריתם מבוסס על הצגת מטריצה באמצעות ארבע תת-מטריצות:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

תחת תצוגה זו, המכפלה $C=A\times B$ מתקבלת כמכפלת שתי מטריצות מסדר 2×2 שאבריהן הן תת מטריצות של מטריצות הקלט.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

תצוגה מטריצית של כפל מטריצות

$$C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

נכונות האלגוריתם הזה מוכחת באופן ישיר. לדוגמא: נניח כי A_{ij} וגם B_{ij} הן מטריצות מסדר 2×2: במקרה זה מתקיים:

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad B_{21}=\begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

אם ננסה כעת לחשב את האיבר הראשון בשורה הראשונה של $A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}$ נקבל

$$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+(a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41})$$

השווה בדיוק לאיבר הראשון בשורה הראשונה במכפלה $A\times B$. אם נמשיך כך אפשר להוכיח את נכונות הטענה כולה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

הערות

1. כל אחת מן המטריצות A_{ij}, B_{ij} ו-C_{ij}, $i,j=1,2$ היא מסדר $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ ובכל מטריצה כזו יש $\frac{n^2}{4}$ איברים.
2. במקרה זה, פעולות החיבור והכפל הן **פעולות של מטריצות**. פעולות הכפל מחושבות על ידי קריאות רקורסיביות לאלגוריתם הכפל. הסימון × הושמט כדי לחסוך במקום. פעולות חיבור המטריצות משתמשות באלגוריתם הבא:

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

סכום מטריצות

תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר n (בגודל $n\times n$).

סכום המטריצות $D=A+B$ הוא מטריצה D המקיימת

$$d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad i,j=1,2,\ldots,n$$

נתבונן בבעיית חישוב סכום מטריצות:

קלט: שתי מטריצות מסדר n.

פלט: סכום המטריצות.

טענה: סיבוכיות בעיית חישוב סכום מטריצות היא $\Theta(n^2)$.

הוכחה: כל אלגוריתם חייב לייצר את מטריצת הסכום שגודלה הוא n^2.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

אלגוריתם הפרד ופתור (רקורסיבי) לחישוב מכפלת מטריצות בגודל $n\times n$

1. ״רפד״ את שתי המטריצות באפסים עד שמימדן יגיע לחזקה של 2 הגדולה מ-n והקרובה אליו ביותר.
2. **אם** $n=1$ הכפל A ב-B (כפל סקלארי)
3. **אחרת**
   - 3.1 חלק כל מטריצה לארבע.
   - 3.2 חשב את שמונה המכפלות הנדרשות (בעזרת קריאות רקורסיביות).
   - 3.3 בצע ארבע פעולות חיבור.
   - 3.4 מזג התוצאות למטריצה הנדרשת.

אלגוריתם 11.2: כפל מטריצות רקורסיבי

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

אנליזה של זמן החישוב

נסמן ב $T(n)$ את מספר הפעולות האריתמטיות, חיבור וכפל, הנדרשות להכפלת שתי מטריצות שגודלן $n\times n$.

מן האלגוריתם הרקורסיבי שהצגנו נובעות **משוואות הרקורסיה** הבאות:

$$T(n)=8T\left(\frac{n}{2}\right)+4\left(\frac{n}{2}\right)^2=$$

$$8T\left(\frac{n}{2}\right)+n^2$$

ידוע גם כי $T(1)=1$ כי מטריצה מסדר 1×1 היא סקלר ומכפלת שתי מטריצות כאלה דורשת פעולת כפל יחידה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

הצבה במשוואות הרקורסיה

כדי לחשב את סיבוכיות האלגוריתם, נשתמש במשפט האב ונקבל:

$$c=1,\ d=1,\ a=8,\ b=2,\ f(x)=x^2$$

תזכורת

אם $a > f(b)$,

$T(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.

באלגוריתם הרקורסיבי שהצגנו $f(2)=4<a$.

ומקבלים

$$T(n)=\Theta\left(n^{\log_2 8}\right)=\Theta(n^3)$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

דיון

ברור כי $2n^3+n^2=\Theta(n^3)$, כלומר סיבוכיות האלגוריתם החדש שווה לסיבוכיות האלגוריתם הישיר. מה הרווחנו?

תשובה:

הרווחנו דרך חדשה להסתכלות על הבעיה. כעת אנו יכולים לחפש אלגוריתם רקורסיבי **יעיל יותר** כדי לצמצם את זמן החישוב הנדרש כדי לחשב את תת המטריצות C_{ij}, $i, j=1,2$.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

האלגוריתם של Strassen

האינטואיציה: המקור לסיבוכיות n^3 הוא ביצוע המכפלות הרקורסיביות. (סיבוכיות החיבור היא n^2 בלבד). כדי להקטין את הסיבוכיות יש להוריד את מספר המכפלות.

האלגוריתם הרקורסיבי מחשב 8 תת מטריצות ולאחר מכן מכפיל אותן לפי תבנית של הכפלת שתי מטריצות מסדר 2×2 .

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

המתמטיקאי השויצרי Strassen גילה שיטה חלופית להכפלת שתי מטריצות מגודל 2×2 .

בשיטת Strassen במהלך הכפלת שתי מטריצות מסדר 2×2 מתבצעות שבע פעולות כפל מטריצות (במקום שמונה בשיטה המקובלת).
בתמורה מספר פעולות החיבור עולה.

הרעיון: האלגוריתם של שטרסן מחשב את המטריצות C_{11}, C_{12}, C_{21} ו C_{22}.
(כמו באלגוריתם הרקורסיבי המקורי), ואחר כך מחשב את המכפלה הסופית בשיטת שטראסן.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

שבע מטריצות הביניים

בשיטת שטראסן האלגוריתם מחשב שבע מטריצות ביניים שחישוב כל אחת מהן נעשה באמצעות מכפלה אחת ויחידה:

$$M_1 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})$$
$$M_2 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22})$$
$$M_3 = (A_{11} - A_{21}) \times (B_{11} + B_{22})$$
$$M_4 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}$$
$$M_5 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22})$$
$$M_6 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11})$$
$$M_7 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

חוק הפילוג עבור מטריצות

לפני שנמשיך בהצגת האלגוריתם יש לציין כי צריך (וגם קל) לוודא כי **חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות)** של הכפל מעל החיבור מתקיים גם עבור כפל וחיבור מטריצות כלומר: לכל שלוש מטריצות מסדר $n \times n$ B, A ו- C מתקיים:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A$$

מדוע יש צורך בשני חוקי פילוג?

תרגיל:

שכנעו את עצמכם כי חוק הפילוג עבור כפל וחיבור מטריצות אכן מתקיים.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

האלגוריתם של Strassen (המשך):

לאחר חישוב שבע מטריצות הביניים נשתמש בהן כדי לחשב את ארבעת המטריצות הסופיות כדלהלן:

$$C_{11} = M_1 + M_2 - M_4 + M_6$$
$$C_{12} = M_4 + M_5$$
$$C_{21} = M_6 + M_7$$
$$C_{22} = M_2 - M_3 + M_5 - M_7$$

נבדוק את הנוסחה הראשונה:

$$A_{12}B_{21} - A_{22}B_{21} + A_{12}B_{22} - A_{22}B_{22} \quad (= M_1)$$
$$+ A_{11}B_{11} + A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11} + A_{22}B_{22} \quad (= M_2)$$
$$- A_{11}B_{22} - A_{12}B_{22} \quad (= M_4)$$
$$+ A_{22}B_{21} - A_{22}B_{11} \quad (= M_6)$$
$$= C_{11}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

תרגיל: בידקו נכונות שאר הנוסחאות.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

<u>אלגוריתם שטרסן (רקורסיבי)</u>

1. "רפד" את שתי המטריצות. באפסים עד שמימדן יגיע לחזקה של 2 הגדולה מ-n והקרובה אליו ביותר.
2. **אם** $n=1$ הכפל A ב-B (כפל סקלארי)
4. **אחרת**
   4.1 חלק כל מטריצה לארבע.
   4.2 חשב את **שבע** המכפלות (בעזרת רקורסיה).
   4.3 בצע 17 פעולות חיבור.
   4.4 מזג התוצאות למטריצה הנדרשת.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

הפעלת שיטת Strassen כחלק מן האלגוריתם הרקורסיבי, מניבה אלגוריתם להכפלת מטריצות. משוואות הרקורסיה של האלגוריתם המתקבל הן:

$$T(n)=7T\left(\frac{n}{2}\right)+17\left(\frac{n}{2}\right)^2=$$

$$7T\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{17}{4}\right)n^2$$

שהסיבוכיות שלו היא:

$$\Theta\left(n^{\log_2 7}\right)=\Theta\left(n^{2.81\ldots}\right).$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

<u>סיבוכיות אלגוריתם Strassen:</u>

סיבוכיות הזמן נתונה על ידי המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$T(n)=7T\left(\frac{n}{2}\right)+18\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$T(1)=c$$

נשתמש במשפט האב ונקבל:

$a=7$, $b=2$, $f(n)=n^2$.

פרמטרים אלה מקיימים:

$$f(2)=4<a$$

ולכן

$$T(n)=\Theta\left(n^{\log_2 7}\right)=O(n^{2,81\ldots})$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

<u>סיכום</u>

בהרצאה זו חזרנו על **משפט האב (Master Theorem)**, המאפשר לנו לקבוע סיבוכיות של מגוון רחב של אלגוריתמים רקורסיביים.
פתחנו את ההרצאה בהצגה פרמטרית של מערכת משוואות רקורסיבית כך שתשקף את סיבוכיות הזמן של אלגוריתמים רקורסיביים המקיימים דרישה מסוימת.
לאחר מכן הצגנו את משפט האב המאפשר חישוב הסיבוכיות של אלגוריתמים כאלה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

סיכום (המשך)

כדי להדגים את השיטה, טיפלנו בבעית כפל המטריצות הריבועיות מסדר n.
בתחילה הצגנו את האלגוריתם הישיר שסיבוכיותו היא $\Theta\left(n^3\right)$ (יש לזכור כי גודל הקלט הוא: $\Theta\left(n^2\right)$).
המשכנו בהצגת אלגוריתם הפרד ופתור פשוט פותר את הבעיה על ידי **חלוקת מטריצות הקלט ל4**. כתוצאה, הבעיה המקורית מחולקת ל**8 תת בעיות הנפתרות באופן רקורסיבי.**

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

סיכום (המשך)

האלגוריתם הזה, לא שיפר את סיבוכיות האלגוריתם המקורי אך פתח את הדלת ל**אלגוריתם** Strassen אשר שיפר את הסיבוכיות על ידי מציאת דרך מתוחכמת ל**חישוב 8 תוצאות המכפלות הנדרשות** על ידי ביצוע בפועל של **7 מכפלות בלבד.**
מספר הפעמים בהן חישבנו **סכום של מטריצות עלה מ 4 ל 18**. ניתוח סיבוכיות הזמן של אלגוריתם Strassen, התקבל כתוצאה מיידית של משפט האב (Master Theorem).
סיבוכיות אלגוריתם Strassen היא $\Theta\left(n^{2.81...}\right)$.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

סיכום (המשך)

אלגוריתם Strassen מראה את הדרך לשיפורים נוספים על ידי הורדת מספר המכפלות הנדרש והעלאת מספר הסכומים.
היום משתמשים בשיטות דומות אך מסובכות יותר, מחלקים כל בעיה למספר רב יותר של חלקים, במקום 4 בלבד, ומגיעים לאלגוריתמים למכפלת מטריצות בסיבוכיות זמן $O\left(n^{2.3...}\right)$.

שימו לב: אלה אלגוריתמים בעלי **ערך תיאורטי בלבד**, שכן **קבוע הפרופורציה** עולה לערכים בלתי אפשריים.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

סיכום (המשך)

מה צריך לזכור מהרצאה זו?

1. פיתוח מערכת המשוואות הרקורסיביות.
2. הגדרת כפל מטריצות והאלגוריתם הישיר.
3. האלגוריתם הרקורסיבי הפשוט.
4. רעיון אלגוריתם Strassen (אין צורך לזכור את מטריצות הביניים ואת הפיתוח בעל פה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

נספח 1: חישוב מדויק של סיבוכיות האלגוריתם הרקורסיבי הראשון

מציאת נוסחה סגורה

כדי לחשב את סיבוכיות האלגוריתם, עלינו למצוא **נוסחה סגורה** לחישוב $T(n)$.

טענה: נתון

$$T(n)=8T\left(\frac{n}{2}\right)+n^2\ ,\ T(1)=1$$

אזי (ניחוש): לכל $n=2^i$

$$T(n)=2n^3-n^2$$

הוכחה

עבור $n=2^i$ ההוכחה באינדוקציה על i. כלומר, יש להניח נכונות לגבי n ולהוכיח לגבי $2n$. נשתמש בנוסחה הרקורסיבית לחישוב $T(2n)$ בעזרת $T(n)$:

$$T(2n)=8T(n)+(2n)^2=$$

בתוך נוסחה זו נציב את פתרוננו עבור $T(n)$:

$$T(2n)=8\cdot(2n^3-n^2)+4n^2$$

ונפשט כדי לקבל:

$$=16n^3-4n^2=$$

$$=2(2n)^3-(2n)^2$$

מש״ל

נספח 2: הוכחת משפט האב

הוכחת משפט ה-Master מתקבלת על ידי פתרון המשוואות הרקורסיביות. אנו נטפל במשוואה פשוטה יותר:

$$T(n)=aT\left(\frac{n}{b}\right)+f(n)$$

נציב בנוסחה את $T\left(\frac{n}{b}\right)$ ונקבל:

$$T(n)=a\left[aT\left(\frac{n}{b^2}\right)+f\left(\frac{n}{b}\right)\right]+f(n)$$

נפשט ונקבל:

$$T(n)=a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right)+af\left(\frac{n}{b}\right)+f(n)$$

פתרון המשוואות הרקורסיביות

נמשיך להציב את $T\left(\frac{n}{b^2}\right)$ ונקבל:

$$T(n)=a^2\left[aT\left(\frac{n}{b^3}\right)+f\left(\frac{n}{b^2}\right)\right]+ af\left(\frac{n}{b}\right)+f(n))$$

נפשט ונקבל:

$$T(n)=a^3T\left(\frac{n}{b^3}\right)+a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right) +af\left(\frac{n}{b}\right)+f(n))$$

$$=a^3T\left(\frac{n}{b^3}\right)+\sum_{i=0}^{2}a^if\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

פתרון המשוואות הרקורסיביות

כדי שהרקורסיה תיגמר יש להגיע עד למקרה הקצה כלומר $T(1)$. כדי להשיג זאת, על הקריאה הרקורסיבית להתבצע לעומק i, המקיים $n=b^i$ כלומר $i=\log_b n$.

המשך ההצבה $\log_b n$ פעמים מניב:

$$T(n)=a^{\log_b n}T\left(\frac{n}{b^{\log_b n}}\right)+\sum^{(\log_b n)-1}a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

אם נציב $n=b^{\log_b n}$ ונזכור כי $T(1)=c$ נקבל:

$$T(n)=a^{\log_b n}\,T(1)+\sum_{i=0}^{(\log_b n)-1}a^i f\left(\frac{b^{\log_b n}}{b^i}\right)$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

פתרון המשוואות הרקורסיביות

כעת נשים לב כי:

$$a^{\log_b n}=\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b n}=$$

$$=\left(b^{\log_b n}\right)^{\log_b a}=n^{\log_b a}$$

אם נציב שני ביטויים אלה ונקבל כי

$$T(n)=\underbrace{cn^{\log_b a}}_{*}+\underbrace{\sum_{i=0}^{(\log_b n)-1}a^i f\left(b^{\log_b n-i}\right)}_{**}$$

המחובר הראשון, $(*)$, מתנהג כמו $\Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ וזהו פתרון הבעיה כאשר $f(n)=0$, אולם אין זה ברור כלל וכלל איך אפשר לטפל במחובר השני $(**)$.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

פונקציות כפליות

כדי לטפל במחובר השני נניח כי f היא **פונקציה כפלית**.

פונקציה $f(x)$ היא **פונקציה כפלית** אם לכל x ו y f מקיימת: $f(xy)=f(x)f(y)$.

דוגמא: הפונקציה הפולינומית $f(x)=x^d$ (d קבוע) היא כפלית שכן

$$f(xy)=(xy)^d=x^d y^d=f(x)f(y)$$

שימו לב: באופן מעשי, רוב הפונקציות המתקבלות בשימוש במשפט האב הן כפליות.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

תכונות פונקציות כפליות

תהי f פונקציה כפלית כלשהי. אזי $f(1)$ מקיים:

$$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)=1$$

נחשב כעת את ערך $f\left(\frac{a}{b}\right)$ עבור מנה כלשהי $\frac{a}{b}$:

$$f(1)=1=f\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=f(b)\cdot f\left(\frac{1}{b}\right)\Rightarrow$$

נחלק את שני האגפים ב $f(b)$ ונקבל:

$$f\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{f(1)}{f(b)}$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)\cdot f\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{f(a)}{f(b)}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

פתרון המשוואות הרקורסיביות

עבור פונקציה כפלית f

נניח כעת כי הפונקציה f היא **כפלית**.

במקרה כזה נפתח את $(**)$ ונקבל:

$$(**) = \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f\left(\frac{b^{\log_b n}}{b^i}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i \frac{f\left(b^{\log_b n}\right)}{f\left(b^i\right)} =$$

$$= f(b^{\log_b n}) \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} \frac{a^i}{f(b)^i} =$$

$$= \left(f(b)\right)^{\log_b n} \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} \left(\frac{a}{f(b)}\right)^i =$$

וזהו טור גיאומטרי עם מנה $q = \frac{a}{f(b)}$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

פתרון המשוואות הרקורסיביות

עבור פונקציה כפלית f (המשך)

אם נניח כי $a \neq f(b)$ ונשתמש

בנוסחת הטור הגיאומטרי עבור

$q = \frac{a}{f(b)}$ נקבל:

$$(**) = \left(f(b)\right)^{\log_b n} \frac{\left(\frac{a}{f(b)}\right)^{\log_b n} - 1}{\frac{a}{f(b)} - 1} =$$

ולאחר פישוט נוסף נגיע ל

$$(**) = \frac{a^{\log_b n} - \left(f(b)\right)^{\log_b n}}{\frac{a}{f(b)} - 1}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

פתרון המשוואות הרקורסיביות

עבור פונקציה כפלית f (המשך):

נתבונן ב $(**)$

$$(**) = \frac{a^{\log_b n} - \left(f(b)\right)^{\log_b n}}{\frac{a}{f(b)} - 1}$$

בביטוי זה, המכנה הוא קבוע ולכן ערכו

של הביטוי תלוי ביחס בין a לבין $f(b)$

כמתואר בניתוח הבא:

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

מקרה 1

$a > f(b)$ - במקרה זה, ערך $(**)$

המונה מתנהג כמו $\Theta\left(a^{\log_b n}\right)$ והמכנה

הוא קבוע ולכן במקרה זה נקבל:

$$(**) = \Theta\left(a^{\log_b n}\right) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

מאחר שערך $(*)$ גם הוא $\Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

נקבל כי במקרה זה מתקיים:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right).$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

מקרה 2

$a < f(b)$ - במקרה זה, ערך המונה הוא $\Theta\left(f\left(b^{\log_b n}\right)\right) = \Theta(f(n))$ וסימנו שלילי. מאחר שגם סימן המכנה הוא שלילי נקבל:

$$(**) = \Theta\left(f\left(b^{\log_b n}\right)\right) = \Theta(f(n))$$

מאחר שערך $(*)$ הוא $\Theta\left(a^{\log_b n}\right)$ ו $a < f(b)$, במקרה זה, ערך $(*)$ קטן מערך $(**)$ ומתקיים כי $T(n) = \Theta(f(n))$.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

מקרה 3

$a = f(b)$

במקרה זה, נוסחת הטור הגיאומטרי אינה שמישה, שכן ערך המכנה בנוסחה הוא 0. אולם, במקרה זה מתקיים:

$$(**) = \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i \frac{f\left(b^{\log_b n}\right)}{f\left(b^i\right)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_b n-1} f(n) = \log_b n \cdot f(n)$$

ומאחר שמתקיים:

$$f(n) = f\left(b^{\log_b n}\right) = (f(b))^{\log_b n} =$$

$$= a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

מקבלים כי במקרה זה:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log_b n\right)$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

פתרון המשוואות הרקורסיביות עבור פונקציה כפלית f (סיכום):

לכל פונקציה כפלית f, ערך הפונקציה T המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + df(n)$$

$$T(1) = c$$

הוא

1. עבור $a > f(b)$ $\Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.
2. עבור $a < f(b)$ $\Theta(f(n))$.
3. עבור $a = f(b)$ $\Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$.

תרגיל: אפשר (וצריך) לבדוק כי הוספת הקבוע d אינה משנה את הפיתוח.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

דרכים לשיפור אלגוריתם הפרד ופתור

יהי A אלגוריתם הפרד ופתור שסיבוכיותו מקיימת את מערכת המשוואות המופיעה במשפט האב. מהן הדרכים האפשריות לשיפור הסיבוכיות של A?

1. אם ש$a > f(b)$, נסה להקטין את $\log_b a$ על ידי הקטנת a או הגדלת b.
2. אם $f(b) \ge a$ נסה להקטין את סיבוכיות הפעולות שאינן כלולות בקריאות הרקורסיביות.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי

3. הקבועים c ו-d אינם מתבטאים בפתרון ולכן הקטנתם לא תשנה את הסיבוכיות.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור עמוס ישראלי