

משתנים מקריים, תוחלת ושונות

1. אדם החליט לקנות מדי שבוע כרטיס להגרלה נושאת פרסים, ולהמשיך בקניות אלה עד שיזכה לראשונה בפרס או עד שיקנה 4 כרטיסי הגרלה בסך הכל. בכל שבוע ההסתברות לזכות בפרס היא 0.05. יהי X – מספר השבועות בהם קנה האיש כרטיס הגרלה. מצא את התפלגות X .
2. בכד 5 כדורים לבנים. מוציאים מהכד כדור באופן מקרי, מסמנים אותו ב- X ומחזירים לכד. חוזרים על התהליך המתואר עד שמוציאים כדור שכבר סומן ב- X . יהי Y – מספר הכדורים שהוצאו עד (וכולל) שהתקבל לראשונה כדור מסומן ב- X .
 - א. מהי פונקציית ההסתברות של Y ?
 - ב. מהן תוחלת ושונות Y ?
3. בכד 3 כדורים, אחד שחור ושניים לבנים. מוציאים כדור באקראי ומחזירים אותו לכד עם כדור נוסף מאותו צבע. חוזרים על הפעולה בכד "החדש". יהי X מספר הכדורים הלבנים בכד לאחר 3 פעולות כאלה.
 - א. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - ב. מהן התוחלת והשונות של X ?
4. במשחק מזל המבוסס על הטלת מטבע שבה ההסתברות ל"ראש" היא $2/3$. אתם מתחילים את המשחק כשברשותכם 10 ש"ח. בכל פעם שהמטבע מראה "זנב" סכום הכסף שבידיכם מוכפל, ואילו בכל פעם שהמטבע מראה "ראש" אתם מפסידים את מחצית הסכום של הכסף הנמצא ברשותכם.
 - א. מהי פונקציית ההסתברות של סכום הכסף שברשותכם לאחר 3 הטלות?
 - ב. אם השחקן משחק עד שסכום הכסף שברשותו הוא 20 שקלים, מה ההסתברות שידרשו לכך יותר מ- 3 הטלות?
5. כד מכיל 4 כדורים לבנים ו- 2 כדורים שחורים. מוציאים מין הכד באופן מקרי כדורים בזה אחר זה, עד שהוצאו כל הכדורים השחורים. יהי X מספר הכדורים הלבנים שהוצאו.
 - א. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - ב. אם ידוע ש- X אינו עולה על 1, מה ההסתברות לכך שהכדור הראשון שהוצא היה לבן?

6. תקליט מסוים נמצא למכירה באחת מכל חמש חנויות תקליטים. מיכל החליטה שתחפש בחנויות עד שתמצא את התקליט, אך בכל מקרה לא תנסה ביותר מאשר 4 חנויות.
- יהי X - מספר החנויות שבהן חיפשה מיכל.
- א. מצא את פונקציית ההסתברות של X .
- ב. מה התוחלת והשונות של X ?
- ג. אם משך החיפוש בכל חנות הוא חצי שעה, מהן תוחלת ושונות הזמן שתשקיע מיכל בחיפושים?
7. לאדם 5 מפתחות אשר רק אחד מהם מתאים לדלת שהוא מנסה לפתוח. הוא מנסה את המפתחות באופן מקרי ומסמן כל מפתח לאחר שניסה אותו (ואינו מנסה שוב מפתח שלא התאים).
- יהי X - מספר המפתחות שניסה עד שפתח את הדלת. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
8. בקומה אחת בבית מלון 3 חדרים. שלושת האורחים הגרים בחדרים אלה - אלי, אורן ותומר - הגיעו למלון שתויים ולקחו כל אחד מפתח לחדר בקומה זו באופן מקרי.
- יהי X - מספר האורחים (מבין השלושה) שישנו באותו לילה בחדרם הנכון.
- א. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
- ב. מהן תוחלת ושונות X ?
- ג. אם ידוע שלפחות אחד משלושת האורחים ישן בחדרו הנכון, מה ההסתברות שאלי הוא זה שישן בחדרו?
9. סכום הזכייה במשחק מזל מחושב על-ידי הכפלת תוצאת הטלה הקוביה ב- 100 ₪. דמי ההשתתפות במשחק הם 150 ₪. מה תוחלת ושונות הרווח במשחק?
10. יוסי קנה שני כרטיסי הגרלה, להגרלה שבה כל כרטיס מזכה את בעליו ב- 1,000 ₪ בהסתברות של 0.1 וב- 500 ₪ בהסתברות של 0.3.
- נגדיר: X = מספר הכרטיסים הזוכים שקנה יוסי.
- Y = סכום הזכייה הכולל של יוסי.
- א. מצא את פונקציית ההסתברות של X .
- ב. מצא את התוחלת והשונות של X .
- ג. מצא את פונקציית ההסתברות של Y .
- ד. מצא את התוחלת והשונות של Y .

תשובות:

1.

x	1	2	3	4
P(x)	0.05	0.0475	0.045	0.8575

3.5104 ב.

1.1875

2.

y	2	3	4	5	6
P(y)	1/5	8/25	36/125	96/625	24/625

16/27

4.

x	1.25	5	20	80
P(x)	8/27	12/27	6/27	1/27

1, 4

3.

x	2	3	4	5
P(x)	0.1	0.2	0.3	0.4

1/3

5.

x	0	1	2	3	4
P(x)	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

1.47 , 2.952 .II

0.3675 , 1.476 .III

6.

x	1	2	3	4
P(x)	0.2	0.16	0.128	0.512

$P(x=k)=1/5$; $k=1, 2, 3, 4, 5$ 7.

1, 1 ב.

1/2 ג.

8.

x	0	1	3
P(x)	1/3	1/2	1/6

0.48 , 0.8 ב.

29,166 $2/3$ ב. 200 .N 9.

10.

X	0	1	2
P(X)	0.36	0.48	0.16

225,000 , 500 .T

ב.

Y	0	500	1,000	1,500	2,000
P(Y)	0.36	0.36	0.21	0.06	0.01