

Dynamique d'opinion

1. Introduction

1.1. Contexte général

Dans notre société connectée, les opinions individuelles ne se forment plus uniquement à partir d'expériences personnelles, mais de plus en plus par interactions sociales à grande échelle, en particulier via les réseaux sociaux numériques. La manière dont les idées se propagent, se transforment, fusionnent ou se polarisent est un phénomène complexe qui attire l'intérêt de nombreuses disciplines : sociologie, mathématiques, informatique, sciences politiques...

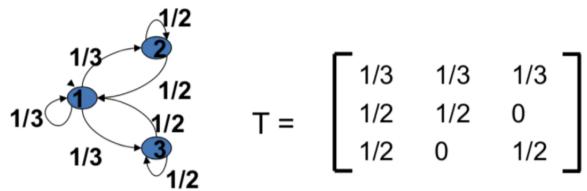
1.2. Objectifs du projet

- **Analyse théorique** : nous étudions plusieurs modèles bien connus de dynamique d'opinion :
 - Le modèle de **DeGroot**, linéaire, basé sur la moyenne pondérée.
 - Le modèle de **Bounded Confidence**, qui introduit une notion de seuil de tolérance.
 - L'impact de **leaders charismatiques** ou radicaux sur l'évolution collective.
 - Des stratégies de **contrôle optimal** et de **transport optimal** pour influencer le système.
- **Implémentation sur données réelles** : nous appliquons ces modèles à un graphe construit à partir de données **WVS (World Values Survey)**.
- **Implémenter une stratégie optimale** pour manipuler l'opinion d'une société.

1.3. Problématique

Comment les opinions évoluent-elles dans un réseau d'agents interconnectés ?

Comment peut-on modéliser, prédire, or influencer cette dynamique en s'appuyant à la fois sur des modèles mathématiques et des données sociales réelles ?



2. Modèles théoriques de la dynamique d'opinion

2.1. Modèle classique de DeGroot

Le modèle de DeGroot est basé sur l'idée que chaque agent ajuste son opinion en fonction des opinions des autres, en pondérant leur influence. Ce modèle linéaire est l'un des plus simples et les plus étudiés dans la littérature sur la dynamique d'opinion.

Dans ce cadre, l'opinion de chaque agent à l'instant $t + 1$ est une moyenne pondérée des opinions des autres agents à l'instant t , selon une matrice de poids A représentant les influences sociales fixes :

$$x(t+1) = Ax(t)$$

où $x(t) \in [0, 1]^n$ est le vecteur des opinions à l'instant t et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice stochastique telle que $\sum_j A_{ij} = 1$ pour tout i .

Si la matrice A est dite *primitive* (c'est-à-dire que le graphe d'influence est fortement connexe et apériodique), alors les opinions convergent vers un consensus unique c , indépendamment des opinions initiales :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = c, \quad \forall i$$

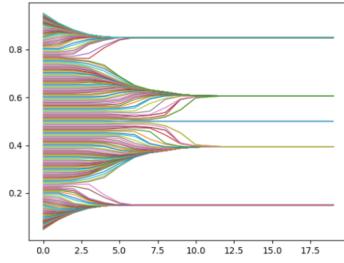
où c est une moyenne pondérée des opinions initiales.

2.1.1 Exemple

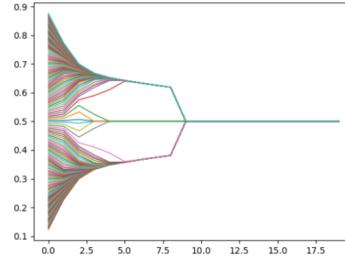
- Nœuds 1, 2 et 3 représentent trois agents.
- Flèches dirigées : elles montrent qui influence qui.
- Poids sur les flèches : c'est la force de l'influence exercée par l'agent cible sur l'agent source.

Limites du modèle DeGroot :

- Le modèle tend systématiquement vers un **consensus**, ce qui est rarement observé dans la réalité sociale où l'on constate souvent des *désaccords persistants*, des *clivages*, voire une *polarisation*.
- L'évolution des opinions est modélisée par une **formule linéaire**, ce qui limite la diversité des dynamiques possibles et ne prend pas en compte des comportements



$n = 200$, $\epsilon = 0.1$



$n = 200$, $\epsilon = 0.25$

non linéaires ou adaptatifs.

2.2. Modèle du Bounded confidence

Dans ce modèle, les agents ne tiennent compte que des opinions qui ne sont pas trop éloignées de la leur. Chaque agent a un seuil de confiance ϵ , et n'influence que les agents dont l'opinion diffère de moins de ϵ :

Soit l'ensemble suivant représentant l'**intervalle de confiance** de l'agent i :

$$I(i, x(t)) = \{j \mid |x_i(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon\}$$

L'opinion de l'agent i à l'instant $t+1$ est alors mise à jour par la moyenne des opinions des agents appartenant à cet intervalle :

$$x_i(t+1) = \frac{1}{|I(i, x(t))|} \sum_{j \in I(i, x(t))} x_j(t)$$

2.2.1 Résultats

- Si ϵ est grand, tous les agents s'influencent et un consensus est atteint.
- Si ϵ est petit, les agents ne prennent en compte que des opinions très proches, ce qui crée des groupes séparés et une fragmentation.
- Si ϵ est intermédiaire, on observe un phénomène de polarisation, où deux grands groupes opposés émergent.

2.3. Leaders charismatiques et signaux radicaux

Dans une version étendue du modèle Bounded Confidence, on peut introduire un ou plusieurs agents dits *radicaux*, qui influencent les autres sans jamais changer eux-mêmes d'opinion. Ces agents jouent le rôle de **sources de signal fixes** représentant, par exemple, une campagne publicitaire, un discours politique extrême, ou une personnalité médiatique influente.

Un leader charismatique est modélisé comme un agent ayant une opinion constante R (par exemple $R = 1$) et dont l'influence est amplifiée par un facteur de pondération $\#R$. Ce signal n'est perçu que par les agents dont l'opinion est suffisamment proche, c'est-à-dire ceux pour qui $|x_i(t) - R| \leq \varepsilon$. Dans ce cas, le leader est inclus dans le calcul de moyenne de l'agent i , mais pondéré $\#R$ fois.

La mise à jour de l'opinion de l'agent i devient alors :

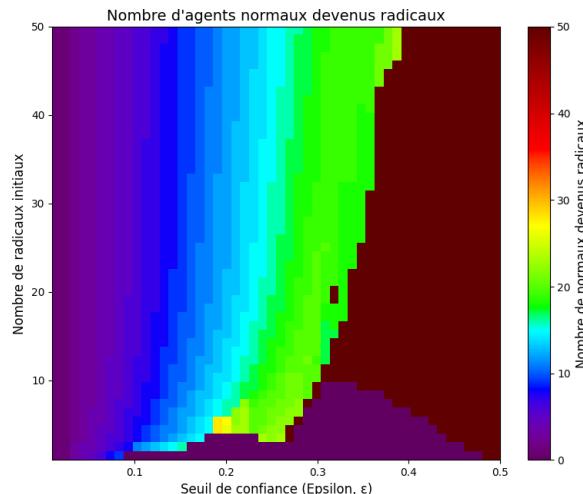
$$x_i(t+1) = \alpha_i R + (1 - \alpha_i) \cdot \frac{1}{|I(i, x(t))|} \sum_{j \in I(i, x(t))} x_j(t)$$

où α_i dépend du poids accordé au leader charismatique par rapport à l'environnement social immédiat.

Cette approche permet de simuler des phénomènes de radicalisation, où une minorité stable peut orienter l'opinion d'une partie du groupe, selon la configuration du réseau et le paramètre ε .

Le comportement global du système montre des effets complexes et parfois contre-intuitifs. Par exemple :

- Augmenter le nombre de radicaux peut parfois réduire le taux de conversion.
- Une légère variation du seuil de confiance ε peut entraîner une transition brutale entre influence forte et influence nulle.



2.4. Transport optimal

Le transport optimal est une théorie mathématique visant à déterminer la manière la plus économique de transformer une distribution de masse (ou de probabilité) initiale en une distribution cible. Dans notre contexte, on modélise une société comme une population d'agents ayant chacun une opinion, représentée par une valeur réelle. L'objectif est de manipuler cette société, c'est-à-dire de changer les opinions des agents de manière collective pour atteindre une configuration cible.

Cadre discret

On considère un ensemble de n agents, dont les opinions initiales suivent une distribution

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i},$$

et que l'on souhaite transformer en une distribution cible

$$\nu = \sum_{j=1}^n b_j \delta_{y_j},$$

où x_i et y_j sont les opinions des agents dans la distribution initiale et cible respectivement, sachant que a_i, b_j représentent les poids.

Le problème consiste à déterminer un plan de transport optimal ou le mapping $\gamma = (\gamma_{ij})$ ou T , qui décrit la quantité d'opinion transférée de x_i vers y_j , de façon à minimiser le coût total de la transformation.

Le Coût

Le coût $C(x, y)$ pour changer l'opinion d'un agent de x vers y est mesuré par une fonction (qu'on prendra convexe) $\theta(x - y)$. Typiquement, on choisit :

$$\theta(t) = \|t\|_p \quad (\text{avec } p = 1 \text{ ou } 2).$$

Le coût total du transport est alors donné par :

$$\text{Coût total} = \sum_{i,j} \gamma_{ij} C(x_i, y_j) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \theta(y_j - x_i).$$

Problème de transport optimal

Le problème d'optimisation consiste donc à minimiser ce coût total sous les contraintes :

$$\sum_j \gamma_{ij} = a_i \quad \forall i, \quad \sum_i \gamma_{ij} = b_j \quad \forall j, \quad \gamma_{ij} \geq 0.$$

Ce plan optimal γ^* représente la stratégie de manipulation minimale pour changer la configuration sociale actuelle μ en la configuration désirée ν , avec le moindre effort.

Cas continu et mapping

Dans le cadre continu (population continue), le transport optimal vise à trouver un mapping optimal $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui minimise :

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(T(x) - x) d\mu(x),$$

sous la contrainte $T_\# \mu = \nu$ (image directe de μ par T).

Implémentation – Bibliothèque Python utilisée

Pour résoudre numériquement le problème de transport optimal, on utilise la bibliothèque **POT (Python Optimal Transport)**. C'est une bibliothèque puissante et bien documentée pour résoudre divers problèmes de transport optimal, aussi bien en version discrète que continue.

Fonction principale : `ot.emd()`

La fonction `ot.emd` permet de résoudre le problème de transport optimal discret via l'algorithme du flot minimum. Elle retourne un plan de transport optimal γ^* minimisant le coût total :

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} M_{ij},$$

où M est la matrice de coût avec $M_{ij} = \theta(y_j - x_i)$.

3. Contrôle optimal

Dans notre modèle, le **contrôle optimal** consiste à déterminer la meilleure manière d'influencer l'évolution d'un système dynamique composé d'agents dits « normaux », dont les opinions évoluent au cours du temps. L'influence est exercée de façon indirecte par l'introduction d'agents « radicaux », dont les opinions sont fixées à chaque instant comme des **variables de contrôle**. À chaque pas de temps t , chaque radical r adopte une opinion $u_t^r \in [0, 1]$. L'ensemble des opinions des radicaux sur tout l'horizon temporel T forme le vecteur de contrôle

$$u = \{u_t^r\}_{t=1, \dots, T^{r=1, \dots, n_{\text{rad}}}} \in [0, 1]^{T \times n_{\text{rad}}}.$$

Les agents normaux, notés $x_i(t) \in [0, 1]$, interagissent avec les autres agents (y compris les radicaux) selon une dynamique sociale déterministe, influencée par des paramètres tels

que l'ouverture au changement et l'intensité d'influence. À l'issue des T étapes d'évolution, on obtient un ensemble d'opinions finales

$$X(T) = \{x_1(T), \dots, x_N(T)\}.$$

L'objectif est alors de choisir le contrôle u de sorte que la distribution empirique des opinions finales des agents normaux soit la plus proche possible d'une **distribution cible** P_{target} — dans notre cas, une distribution gaussienne centrée vers la droite du spectre d'opinions.

La qualité du contrôle est mesurée à l'aide d'une fonction de coût $W(X(T; u), P_{\text{target}})$, représentant ici la **distance de Wasserstein** entre la distribution finale simulée et la distribution cible. Le problème de contrôle optimal revient donc à **minimiser cette distance** sur l'ensemble admissible des contrôles, c'est-à-dire :

$$\min_{u \in [0,1]^{T \times n_{\text{rad}}}} W(X(T; u), P_{\text{target}})$$

donc la formule qui donne l'opinion de chaque agent est :

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \alpha \cdot \frac{\sum_{j \neq i} \phi(x_i(t) - x_j(t)) \cdot (x_j(t) - x_i(t)) + \sum_k \phi(x_i(t) - u_k(t)) \cdot (u_k(t) - x_i(t))}{\sum_{j \neq i} \phi(x_i(t) - x_j(t)) + \sum_k \phi(x_i(t) - u_k(t))}$$

avec k est le nombre des radicaux

Il est aussi possible d'opter pour la minimisation de $\sum x_i(T)$ ou $-\sum x_i(T)$ au lieu de la distance de Wasserstein pour faire shifter les agents à droite ou à gauche.

Pour résoudre ce problème de contrôle optimal, nous devons déterminer le vecteur de contrôle optimal u qui minimise la distance de Wasserstein entre la distribution finale des opinions normales et la distribution cible. Cela revient à résoudre un problème d'optimisation global sur un espace de dimension $T \times n_{\text{radicaux}}$.

Plusieurs algorithmes d'optimisation peuvent être utilisés pour cette tâche :`basinhopping(func, x0, ...)`, `brute(func, ranges, ...)`, `differential_evolution(func, bounds, ...)`.

Parmi ces options, nous avons choisi l'algorithme `differential_evolution` car il offre un bon compromis entre rapidité et qualité des solutions.

3.1. Objectif du Contrôle Optimal

L'objectif est de trouver une séquence temporelle d'opinions pour les agents radicaux, $R(t)$, telle que la somme des opinions finales des agents normaux, $\sum x_i(T)$, soit maximisée. La solution est obtenue en utilisant une approche séquentielle sur des périodes de temps . L'algorithme de **differential evolution** est appliqué pour trouver les opinions optimales

des radicaux.

3.2. Paramètres Clés

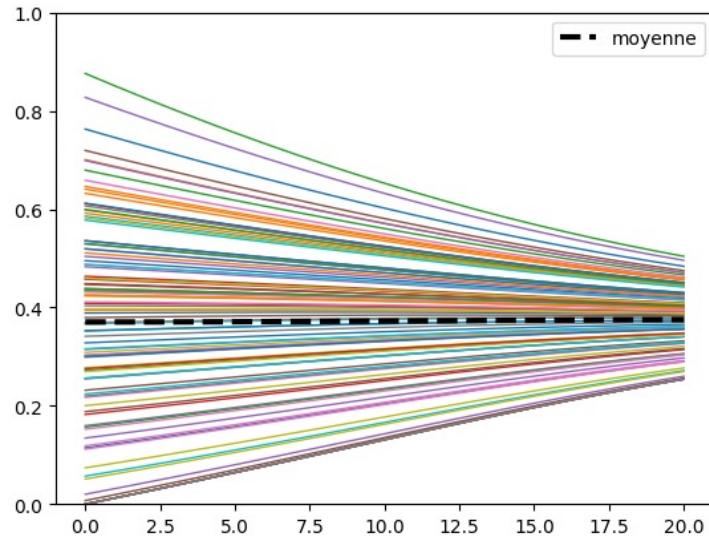
- $T = 20$: Durée totale de la simulation .
- $n_{\text{normals}} = 100$: Nombre d'agents normaux .
- $n_{\text{radicals}} = 5$: Nombre d'agents radicaux .
- $\beta = 10, \epsilon = 0.1$: Paramètres de la fonction d'influence ϕ .
- $\alpha = 0.1$: Taux d'ajustement des opinions.
- $\text{radical_weight} = 10$: Amplification de l'influence des radicaux.
- initial_opinions : Distribution initiale des opinions des agents normaux (normale centrée sur 0.4).

3.3. Résultats des Simulations

Nous comparons l'évolution des opinions de la population normale sous trois scénarios différents pour illustrer l'impact de l'optimisation.

3.3.1 Scénario 1 : Simulation sans radicaux

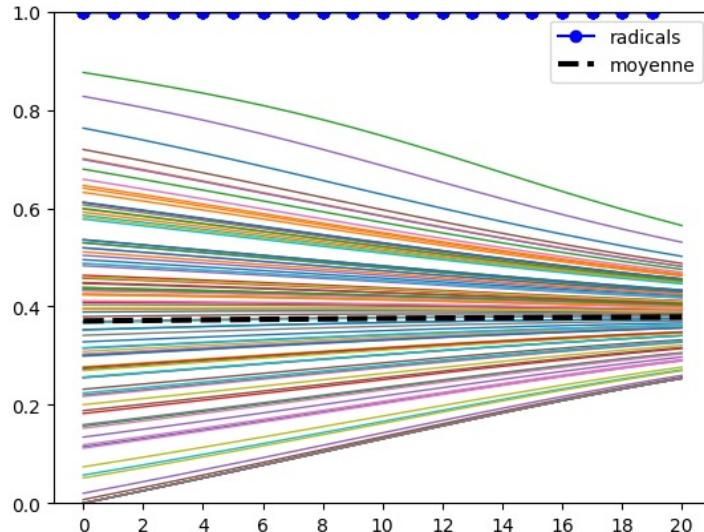
Dans ce scénario, aucun agent radical n'est présent dans le système. Les opinions des agents normaux évoluent uniquement sous l'influence mutuelle et celle des contre-radicaux (si présents et actifs).



En l'absence de radicaux, les opinions des individus évoluent de manière relativement libre, avec une légère tendance à la convergence. La moyenne générale des opinions reste stable, indiquant un équilibre naturel au sein du groupe.

3.3.2 Scénario 2 : Simulation avec stratégie radicale non-optimisée

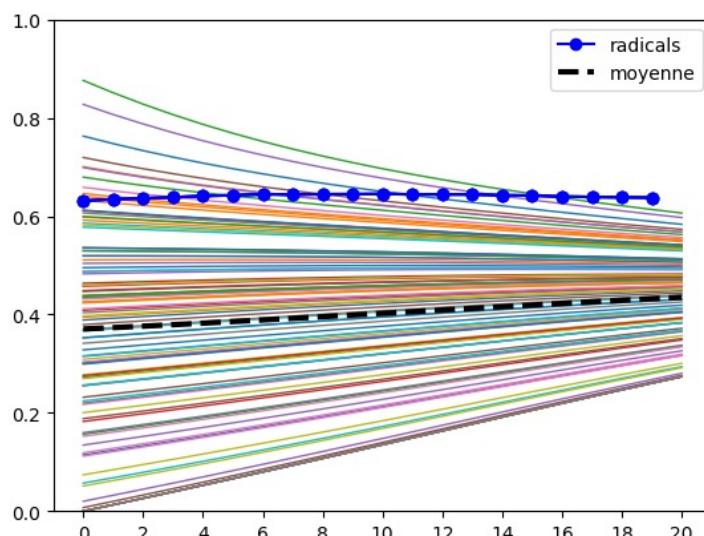
Pour ce scénario, les opinions des agents radicaux sont posés à l'extrême gauche pour attirer des agents, sans aucune optimisation.



Les radicaux adoptent une stratégie stable mais passive, en maintenant une opinion constante et peu extrême. Cette approche est "non optimisée" car elle s'avère peu efficace pour influencer la majorité, ne ralliant que les quelques opinions déjà très proches de la leur.

3.3.3 Scénario 3 : Simulation avec stratégie radicale optimisée

Dans ce scénario, les opinions des agents radicaux ont été déterminées par l'algorithme de contrôle optimal pour maximiser la somme finale des opinions des agents normaux et ainsi tirer les gens à gauche au maximum.



Les radicaux emploient une stratégie "optimisée" de rupture, en alternant agressivement entre des opinions extrêmes. Cette tactique volatile réussit à déstabiliser l'ensemble du groupe, empêchant la convergence naturelle des opinions et créant une forte polarisation.

4. Contre-stratégie :

4.1. Contexte de la Simulation

Cette section présente les résultats d'une simulation modélisant la dynamique des opinions au sein d'une population soumise à des influences contradictoires. Le modèle met en scène trois types d'agents :

- Une **population générale** (agents "normaux"), dont les opinions évoluent par interaction.
- Un groupe d' **agents d'influence** ("radicaux"), avec une stratégie d'opinion pré-définie visant à déstabiliser le consensus.
- Un groupe d' **agents de contre-influence** ("contre-radicaux"), dont la stratégie est optimisée en temps réel pour contrer l'influence des radicaux et maintenir la stabilité des opinions initiales de la population.

L'objectif est d'observer l'efficacité d'une stratégie de contre-influence optimisée face à une tentative de polarisation.

4.2. Réalisation de la Simulation :

4.2.1 Paramètres clé :

- $T = 20$: Durée totale de la simulation .
- $\tau = 2$: Période réduite
- $n_{\text{normals}} = 100$: Nombre d'agents normaux .
- $n_{\text{radicals}} = 5$: Nombre d'agents radicaux .
- $n_{\text{counters}} = 10$: Nombre de contre-radicaux .
- $\beta = 10, \epsilon = 0.1$: Paramètres de la fonction d'influence ϕ .
- $\alpha = 0.1$: Taux d'ajustement des opinions.
- $\text{radical_weight} = 10$: Amplification de l'influence des radicaux.
- initial_opinions : Distribution initiale des opinions des agents normaux (normale centrée sur 0.4).

4.2.2 Protocole :

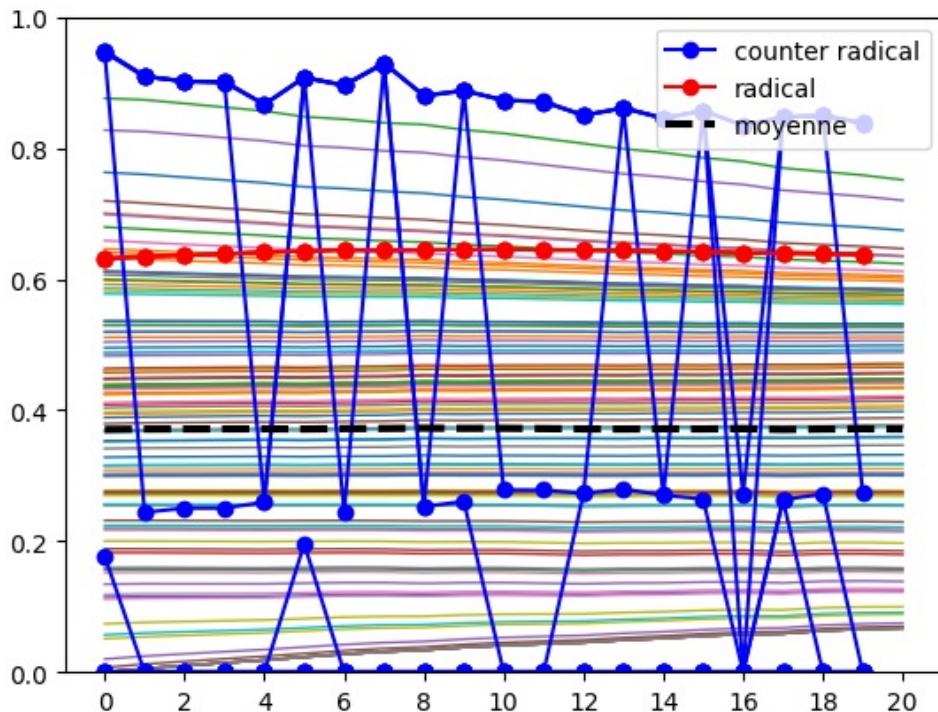
L'idée est, à chaque période τ , d'appliquer le contrôle optimal pour minimiser la distance de Wasserstein entre la distribution à l'instant même avec la distribution initiale

pour essayer d'y revenir pour ainsi obtenir le comportement des contre-radicaux entre $n\tau$ et $(n + 1)\tau$. Puis ensuite combiner le tout pour trouver la stratégie globale.

4.3. Résultats et Analyse Visuelle

4.3.1 Contrer une stratégie prédéfinie :

Le graphique ci-dessous illustre l'évolution des opinions de chaque agent au cours de la simulation. Avec les radicaux optimisés de la partie 3.3.3, et des radicaux qui contrent leur effet.



L'analyse de ce graphique révèle plusieurs dynamiques clés :

La Stratégie des Radicaux : Le groupe des radicaux adopte une stratégie optimale pour attirer le maximum d'agents vers des opinions plus à gauche.

La Stratégie Optimisée des Contre-Radicaux : En réponse, la stratégie des contre-radicaux est bien plus dynamique, car elle est optimisée pour neutraliser l'offensive. On observe une défense sur deux fronts :

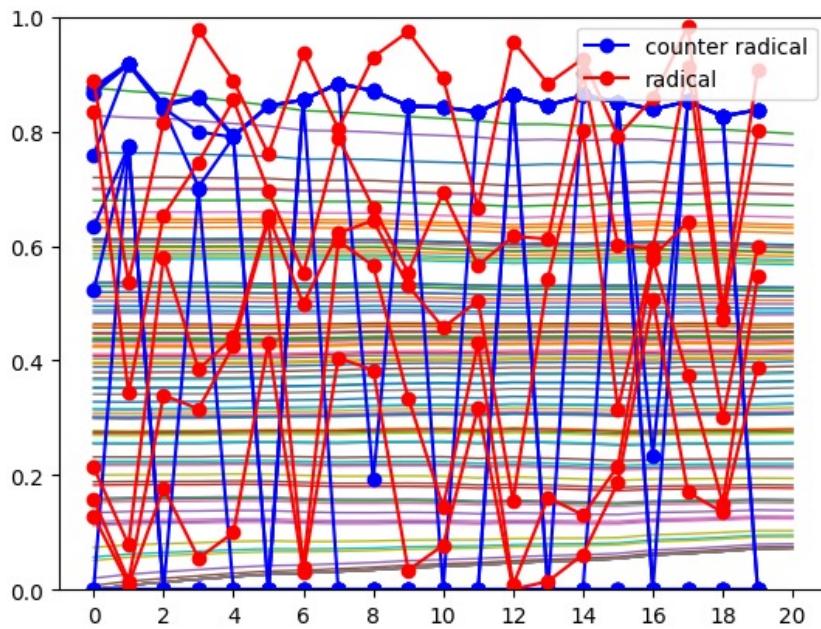
Une partie des agents maintient une opinion très élevée (autour de 0.9), se plaçant au-delà des rouges. Cela sert probablement à intercepter l'influence des radicaux et à isoler les agents déjà sous l'emprise des radicaux rouges.

L'autre partie des agents bleus mène une action volatile à la baisse. Les chutes brutales et périodiques à une opinion de 0 agissent comme des chocs puissants qui tirent activement la moyenne vers le bas, empêchant toute dérive vers la droite.

L'Évolution de la Population Générale (lignes fines) : L'efficacité de la contre-influence est visible dans le comportement de la population. Malgré la forte tension exercée par les radicaux aux deux extrêmes, la majorité des agents maintient ses opinions dans une zone de convergence centrale. La population n'est pas significativement entraînée vers les pôles, ce qui démontre le succès de la stratégie de contre-influence optimisée pour préserver la cohésion du groupe.

4.3.2 Contrer une stratégie arbitraire :

Le graphique ci-dessous illustre l'évolution des opinions de chaque agent au cours de la simulation. Avec des radicaux disposés d'une manière aléatoire.



Les contre-radicaux s'adaptent pour contrer les radicaux peu importe la stratégie/disposition des radicaux rouges. On remarque que les agents normaux ne subissent pas de changements majeurs et ainsi ne sont pas influencés par les radicaux. La stratégie de contre-réaction est ainsi effective.

4.4. Travail d'extraction et d'exploitation des données WVS

Le *World Values Survey* (WVS) fournit des données d'enquête issues de **sept vagues successives** (V1 à V7), couvrant une période allant de 1981 à 2020. Pour garantir une cohérence temporelle, nous avons extrait les données d'une même question présente dans toutes les vagues :

« *A quel point vous sentez-vous libre dans vos choix de vie ?* »

Les réponses à cette question sont exprimées sur une échelle ordinaire (par exemple de 1 à 10), et traduisent le degré de liberté perçue par les individus dans leur vie quotidienne.

Nettoyage et sélection des données

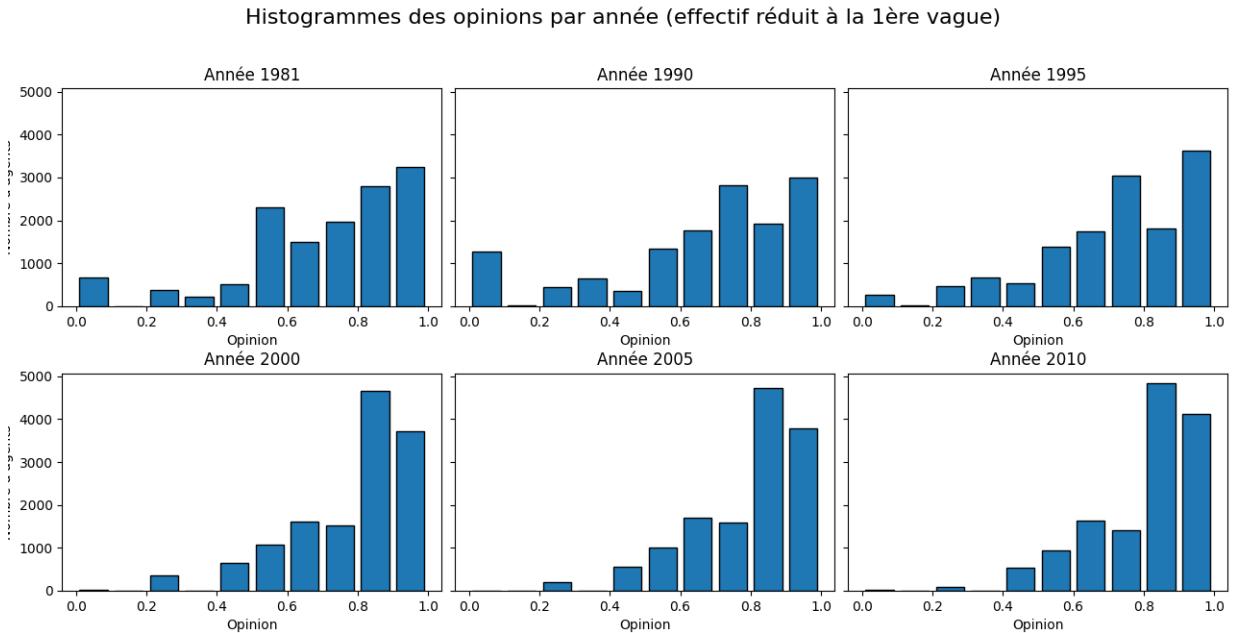
Parmi les 7 vagues disponibles, la **deuxième vague** a été exclue du traitement en raison d'un **nombre important de valeurs manquantes** pour cette variable. Nous avons donc conservé les vagues V1, V3, V4, V5, V6 et V7.

Prétraitement des opinions

Pour chaque vague :

- Nous avons extrait la colonne correspondant à la question ciblée.
- Nous avons éliminé les valeurs manquantes ou invalides.
- Nous avons **normalisé les réponses** sur l'intervalle $[0, 1]$.
- Nous avons ensuite réduit chaque vague à un **effectif commun**, en échantillonnant aléatoirement N individus, avec N étant le **nombre minimal de réponses valides** parmi les vagues sélectionnées. Cette étape garantit une comparabilité entre distributions.

Visualisation des distributions



Implémentation d'un contrôle optimal

Sur la base de ces distributions empiriques, nous avons formulé un problème de **contrôle optimal** : comment influencer la distribution initiale (celle observée dans la **vague 1**) pour qu'elle évolue vers une distribution cible (celle de la **vague 7**) ?

Le but est de minimiser le coût d'intervention (ex : ajout de leaders, signaux externes) tout en réduisant la distance entre l'opinion finale simulée et la distribution réelle de la

dernière vague. Nous avons formulé ce problème à l'aide d'un critère de distance (comme la distance de Wasserstein ou l'erreur quadratique moyenne) et implémenté la dynamique avec contraintes sur les actions possibles.

Les résultats montrent qu'une stratégie d'intervention bien calibrée permet d'obtenir une approximation efficace de la distribution cible, tout en minimisant les perturbations dans les opinions initiales.