Contrôle Unifié
Analyse 1

Durée : 2h

Epreuve d'Analyse 1– Session Normale

- ▶ Commencer par inscrire votre numéro de table sur la copie.
- ▶ Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
- ▶ La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction.
- ⊗ Documents et téléphones portables non autorisés.

Exercice 1 (6 pts)**.** Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Énoncer la caractérisation de la borne supérieure.
2. Soient A et B des sous-ensembles <u>non vides</u> et <u>bornés</u> de $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$,
$$E(x+p) = E(x) + p,$$
où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
4. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (3 pts)**.**

1. Vérifier que, pour tous $x_i, x_j > 0$,
$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2.$$
2. Soit $n \geq 1$. Déterminer
$$\inf\left\{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Exercice 3 (4 pts)**.** Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. Si (u_n^2) converge, alors (u_n) converge.
2. Si (a_n) est bornée et $(b_n) \to 0$, alors $a_n b_n \to 0$.
3. Si (a_n) est majorée et (b_n) non majorée, alors $a_n b_n$ n'est pas majorée.
4. Si (u_n) converge, alors $(u_{n+1} - u_n) \to 0$.

Exercice 4 (7 pts)**.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln(1 + e^{-k}).$$

1. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.
2. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$.
3. Montrer que (u_n) est bornée.
4. Montrer que (u_n) est de Cauchy.
5. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont-elles adjacentes ?