Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques
Fès

Année Universitaire 2024/2025
Filière: MIP-S4
Responsable: M. Bekkali

TD: Série N°1

Exercice 1 (Convergence simple).
Étudier la convergence simple des séries de fonctions de termes généraux:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n-x}, \quad h_n(x) = nx^n\ln(x).$$

Exercice 2 (Convergence simple et uniforme).
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions de termes généraux:

$$f_n(x) = (-1)^n\frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}, \quad g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}, \quad h_n(x) = \frac{x^2\sin(nx)}{x^2+n^2}.$$

Exercice 3 (Convergence simple et uniforme).
On considère la séries des fonctions définies sur $[0,1]$ par:

$$f_n(x) = nx^{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $[0,1[$. Déterminer sa fonction somme S.
2. La série $\sum f_n(x)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1[$?

Exercice 4 (Convergence simple, uniforme et normale).
Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonction donnée sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n+x}.$$

Exercice 5 (Convergence simple, uniforme et normale).
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) = \frac{(x\ln(x))^n}{n!} \text{ si } x \neq 0.$$

1. Montrer que $\sum f_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$.
2. En déduire que $\int_0^1 x^x dx = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.