Charles

SEIFE

ZERO

LA STORIA DI UN'IDEA PERICOLOSA

**Da Pitagora e Zenone
ad Albert Einstein e i buchi neri
La fantastica e appassionante storia
del numero zero**

Bollati Boringhieri

Presentazione

Inventato dai babilonesi, venerato dagli indù, bandito dai greci, il numero zero per secoli è stato circondato da un'aura di ambiguità finché, finalmente imbrigliato, è diventato il più importante e potente strumento della matematica. Charles Seife ci offre una brillante descrizione del modo in cui la nozione di zero, con quella gemella di infinito, ha più volte rivoluzionato i fondamenti della civiltà e del pensiero filosofico. Dalla sua nascita come concetto filosofico orientale alla sua combattuta accettazione in Europa e alla sua apoteosi nel quadro della teoria dei buchi neri. Da Aristotele a Einstein e oltre, viene qui presentata la ricca e complessa storia della semplice idea di «nulla» sulla quale si confrontarono scienziati e mistici, cosmologi e religiosi, ogni volta mettendo in crisi le basi della filosofia, della scienza, della teologia

Charles Seife, laureato in matematica alla Yale University, insegna Giornalismo alla New York University. È corrispondente della rivista «New Scientist» e collabora con il «New York Times», «Wired», «The Economist», «New Scientist», «Science» e «Scientific American». Presso Bollati Boringhieri sono apparsi: *Alfa e Omega. La ricerca dell'inizio e la fine dell'universo* (2005, in edizione tascabile 2015) e *La scoperta dell'universo. I misteri del cosmo alla luce della teoria dell'informazione* (2011). Il suo ultimo libro è *Le menzogne del Web. Internet e il lato sbagliato dell'informazione* (2015).

I Grandi Pensatori
65

Charles Seife

Zero

La storia di un'idea pericolosa

Traduzione di Gabriele Castellani

Bollati Boringhieri

Bollati Boringhieri
www.bollatiboringhieri.it

www.facebook.com/bollatiboringhierieditore

IL LIBRAIO
www.illibraio.it

Questa edizione è pubblicata in accordo con Viking / Penguin Group (USA) Inc.

Titolo originale *Zero. The Biography of a Dangerous Idea*

Torino, corso Vittorio Emanuele II, 86
Gruppo editoriale Mauri Spagnol

ISBN 978-88-339-7552-8

Prima edizione digitale giugno 2017

Introduzione

Nullo e inefficace

Lo zero investì la USS Yorktown come un siluro.

Il 21 settembre 1997, in navigazione al largo della Virginia, l'incrociatore lanciamissili da un miliardo di dollari si arrestò con un sussulto: in avaria, la nave rimase immobile.

I vascelli da guerra sono progettati per resistere all'impatto di una torpedine o all'esplosione di una mina, ma benché la Yorktown fosse adeguatamente corazzata nei confronti delle armi convenzionali, nessuno aveva pensato a proteggerla contro lo zero. Fu un grave errore.

I calcolatori di bordo erano stati appena aggiornati con nuovo software per il governo dei motori, e della bomba a tempo che vi si annidava – uno zero da rimuovere in fase di installazione – i tecnici, malauguratamente, non si erano accorti. Per qualche ragione lo zero fu trascurato e restò dov'era, celato nei meandri del codice, per manifestarsi però non appena un'istruzione lo richiamò in memoria… mandando in blocco il programma.

Nel momento stesso in cui il sistema di calcolo della Yorktown cercò di dividere per zero, 80 000 cavalli vapore si resero inservibili, e ci vollero quasi tre ore per collegare ai motori i comandi di emergenza, consentendo così alla nave di arrancare in porto. I tecnici impiegarono due giorni per sbarazzarsi dello zero, riparare il sistema di propulsione e rimettere il vascello in assetto di combattimento.

Nessun altro numero può causare altrettanto danno. Malfunzionamenti informatici come quello che folgorò la Yorktown non danno che una pallida idea del potere dello zero. Intere culture hanno eretto baluardi contro di lui e sistemi filosofici sono crollati sotto la sua azione, poiché lo zero è diverso dagli altri numeri: consente di spingere lo sguardo sull'ineffabile e sull'infinito. Per questo motivo è stato temuto e odiato, e anche posto fuorilegge.

Questo libro narra la storia dello zero, dalla nascita, in tempi remoti, fino alla sua crescita e sviluppo in Oriente, alla lotta per l'accettazione in Europa, all'ascesa in Occidente, e all'onnipresente minaccia nei confronti della fisica moderna. Narra la storia di coloro che si batterono per il significato da dare al numero misterioso, degli eruditi, dei mistici, degli uomini di scienza e di fede che cercarono ognuno di comprendere lo zero. La storia dei tentativi, vani e talvolta violenti, fatti in Occidente per isolare quel concetto venuto dall'Est. La storia, infine, dei paradossi sollevati da un numero in apparenza innocente: veri rompicapo anche per i più brillanti ingegni contemporanei, che minacciano di smantellare l'impalcatura stessa del pensiero scientifico.

Lo zero è così potente perché è l'*alter ego* dell'infinito. I due sono eguali e opposti, *yin* e *yang*; sono paradossali e inquietanti entrambi. I maggiori interrogativi della scienza e della fede riguardano l'assenza o l'eternità dell'essere, il nulla e il tutto, lo zero e l'infinito. I conflitti d'idee riguardanti lo zero hanno scosso alle fondamenta filosofia, scienza, matematica e religione, al punto tale che alla base di ogni rivolgimento si trova uno zero, e con lui l'infinito.

Lo zero costituì il nocciolo dello scontro tra Oriente e Occidente. Lo zero fu al centro della contesa tra religione e scienza. Lo zero è divenuto il linguaggio della natura e il principale strumento matematico. E le più profonde questioni della fisica, dal cuore tenebroso di un buco nero allo sprazzo sfolgorante del *Big Bang*, non sono che tentativi per averne ragione.

Ma per tutto il corso della propria esistenza, e a dispetto di ripulse e proscrizione, lo zero ha costantemente trionfato sugli oppositori. Mentre il genere umano non poté mai costringerlo a conformarsi a questa o quella filosofia, fu viceversa lui a plasmare la visione che gli uomini hanno dell’Universo e, quindi, di Dio.

Zero

RINGRAZIAMENTI

A molte persone della mia vita va, per una ragione o per l’altra, in parte il merito di questo libro. I miei insegnanti delle scuole superiori mi instillarono l’amore per la scienza e per lo scrivere, e i miei professori del *college* mi mostrarono la bellezza della matematica. Jeremy Bernstein e Kenneth Goldstein mi hanno avviato alla carriera di giornalista scientifico. I miei amici e colleghi del «New Scientist»... be’, mi hanno sopportato, che è impresa non da poco.

Uno speciale ringraziamento lo devo al mio agente, Kerry Nugent-Wells; all’illustratore, Matt Zimet; e al curatore della redazione, Wendy Wolf. Ringrazio pure coloro che mi hanno aiutato a mettere a posto il testo, Dawn Drzal, Faye Flam, e, naturalmente, mamma e papà. (Teneri genitori ma critici severi!)

Capitolo 1

Niente da fare

L’origine dello zero

> Non era in quel tempo né inesistenza né esistenza; non v’era il regno dello spazio né il cielo più oltre. Che cosa si agitò? Dove?
>
> *Rig Veda, Nasadiya*

La storia dello zero è molto antica. Affonda le proprie radici negli albori della matematica, quando la civiltà era millenni a venire e lungo tempo prima che l’uomo imparasse a leggere e scrivere. Ma per quanto lo zero ci appaia oggi naturale, i popoli antichi lo videro come un concetto estraneo, perfino terrificante. Sorto in Oriente nella cosiddetta Mezzaluna Fertile qualche secolo prima di Cristo, il concetto di zero non solo evocava l’idea di un nulla primordiale, ma a esso si associavano anche pericolose proprietà matematiche. Nello zero risiedono forze capaci di sconvolgere i fondamenti della logica.

L’origine del pensiero matematico è fatto risalire a desiderio e necessità di tenere il conto delle pecore, la nota della proprietà terriera e la traccia del passare del tempo. Sono tutte attività che non hanno bisogno dello zero, e difatti la civiltà procedette a meraviglia per migliaia di anni prima della sua scoperta. Non solo: lo zero ripugnava talmente ad alcune culture che esse scelsero di farne completamente a meno.

La vita senza lo zero

Il nocciolo della questione è che per le normali attività quotidiane lo zero non ci serve affatto. Nessuno va al mercato a comprare zero pesci. Lo zero è in un certo senso il più civilizzato di tutti i numeri cardinali, e il suo impiego ci viene imposto dalle esigenze legate all'esercizio di una raffinata razionalità.

Alfred North Whitehead

Al giorno d'oggi non è facile immaginare come sarebbe la vita senza lo zero, così come sarebbe difficile immaginarla senza il sette o il numero 31. Eppure è esistito un tempo in cui lo zero non c'era, così come non c'erano né il sette né il 31. Quel periodo è antecedente l'inizio della storia, cosicché i paleontologi hanno dovuto ricostruire la vicenda della nascita della matematica partendo da frammenti di pietra e d'osso. Questi resti hanno svelato ai ricercatori che i matematici delle caverne erano un tantino più rudi dei moderni: al posto delle lavagne usavano i lupi.

Un indizio chiave sulla natura della matematica nell'Età della Pietra fu dissotterrato verso la fine degli anni trenta dall'archeologo Karl Absolon, che setacciando il terreno in Moravia rinvenne un radio di lupo vecchio di 30 000 anni e recante una serie di tacche incise. Non è possibile sapere se Gog il cavernicolo si servisse di quell'osso per conteggiare i cervi uccisi o le pitture rupestri, piuttosto che i giorni trascorsi dall'ultimo bagno, ma resta comunque evidente che i primi uomini tenevano il conto di qualche cosa.

L'osso di lupo era l'equivalente preistorico del supercomputer. Gli antenati di Gog non arrivavano a contare nemmeno fino a due, e certamente dello zero non avrebbero saputo che farsene. Pare che ai primordi della matematica si riuscisse a distinguere solamente tra «uno» e «molti»; quindi un uomo delle caverne possedeva una punta di lancia o molte punte di lancia, e aveva mangiato una o molte lucertole spappolate: non c'era modo di esprimere quantità diverse. L'evoluzione nel tempo delle lingue primitive consentì, poi, di distinguere tra «uno», «due» e «molti», e successivamente tra «uno», «due», «tre» e «molti», ma restavano assenti i termini per quantità intermedie. Alcuni linguaggi presentano ancora oggi queste carenze: gli indigeni Siriona della Bolivia e gli Yanomamo brasiliani non possiedono parole per alcunché di più numeroso del tre, e in loro vece le due tribù fanno ricorso alle generiche espressioni di molteplicità o quantità.

Grazie all'intrinseca proprietà dei numeri di sommarsi tra loro generandone di nuovi, i sistemi di numerazione non si arrestarono al tre: non passò molto tempo che qualche sagace membro di tribù prese a mettere in fila le parole-numero per esprimere quantità maggiori. I linguaggi parlati dai Bakairi e Bororo amazzonici, con un metodo di numerazione che partendo da «uno» e «due» seguita con «due-uno», «due-due», «due-due-uno» e così via, mostrano questo processo all'opera ancora oggi. Quella gente usa un conteggio per due, e i matematici danno a questo sistema il nome di «binario».

Ma sono ben pochi quanti usano la numerazione dei Bakairi e dei Bororo, e più rappresentativo dei metodi di conteggio primitivi appare l'antico osso di lupo del nostro Gog. Vi sono incise in profondità 55 tacche disposte in gruppi di cinque, le prime 25 separate dalle altre da una tacca aggiuntiva di lunghezza doppia; c'è quindi il sospetto che Gog contasse per cinquine e poi contrassegnasse i gruppi di cinque cinquine. Tutto ciò è alquanto ragionevole; infatti si fa molto prima a fare un segno per ogni gruppo che non a contare le tacche una per una. Gli odierni matematici danno al sistema di numerazione usato da Gog, l'intagliatore di lupi, il nome di «quinario», o a base cinque.

Ma perché cinque? Al dunque, è una scelta arbitraria. Se Gog avesse riunito le tacche per quattro e avesse contato per quattro e per 16, il suo sistema di numerazione avrebbe funzionato altrettanto bene, così come con gruppi di sei e 36. Il modo in cui i segni sull'osso sono distribuiti non altera il loro numero, ma incide solo sulla modalità utilizzata da Gog, alla fine, per contrassegnarli; e comunque avvenga il conteggio, il risultato è sempre lo stesso. Però Gog preferiva contare in gruppi di cinque anziché, per dire, di quattro, e la sua predilezione fu condivisa in ogni parte del mondo. Il medesimo accidente di natura che fornì all'uomo cinque dita per mano fece, a quanto pare, del cinque una delle basi di numerazione maggiormente in voga presso tantissime culture. Per esempio, i Greci chiamavano *πεμπάζειν* («contare per cinque») l'utilizzo della tavola per i conteggi (suddivisa originariamente in colonne di cinque).

I linguisti hanno scorto i germogli di un sistema quinario perfino negli schemi binari di numerazione in uso nel Sud America. In lingua Bororo, «due-due-uno» si può anche dire «tutta quanta la mano», ed evidentemente i popoli antichi amavano contare basandosi sulle parti del corpo, delle quali la mano (cinque), le due mani (dieci), e mani e piedi (venti) erano le più gettonate. Nelle lingue indoeuropee i vocaboli che esprimono i numeri dopo il 10 combinano additivamente il dieci o un suo multiplo; così accade in italiano con «undici», «dodici» fino a «ventuno» e così via, e lo stesso, per esempio, in inglese, a parte *eleven* («uno oltre») e *twelve* («due oltre»), dove il dieci è sottinteso. Da questo i glottologi possono concludere che il numero dieci era l'unità di riferimento dei protolinguaggi da cui discesero gli idiomi europei e, di conseguenza, che i popoli che li parlavano impiegavano un sistema di numerazione a base 10. D'altra parte, vi sono lingue europee come il francese (*quatre-vingt*: ottanta, *quatre-vingt-dix:* novanta) che mostrano tracce di numerazione *vigesimale* (a base 20), ciò che comporterebbe l'uso di un tale sistema da parte degli antichi abitanti dell'odierna Francia. Numeri quali il sette o il 31 rientravano tranquillamente in ognuno di questi sistemi, quinari, decimali o vigesimali che fossero, nessuno dei quali, tuttavia, disponeva di un nome per lo zero. Il concetto corrispondente, semplicemente, non esisteva.

Non c'è mai stato bisogno di tenere il conto di zero pecore o di fare l'appello dei propri zero figlioli; né il fruttivendolo dice «mi sono rimaste zero banane», ma risponde invece che le ha finite. Siccome non serve un numero per esprimere l'assenza di qualche cosa, non viene in mente di collegare un simbolo alla mancanza di oggetti, e questa è la ragione per cui la gente ha fatto tranquillamente a meno dello zero per tanto tempo. Non è mai comparso sulla scena perché non se ne avvertiva la necessità.

In effetti, in epoca preistorica anche solo la cognizione dei numeri era un talento di tutto riguardo. La semplice capacità di far di conto era tenuta per facoltà mistica e arcana, come il pronunciare incantesimi o chiamare gli dèi per nome. Nel Libro dei Morti dell'antico Egitto il Caronte locale affronta le anime dei trapassati al guado che mena nell'aldilà, e non ammette a bordo del traghetto «chi non sappia quante siano le proprie dita». Il defunto deve allora recitare una formula che lo aiuta a contarle, per la soddisfazione dell'esigente navalestro. (Più prosaicamente, il suo collega greco pretendeva invece contanti, opportunamente deposti in forma di moneta sotto la lingua dell'estinto.)

Nonostante che nell'antichità il saper fare di conto fosse dote assai poco diffusa, i numerali e i fondamenti del contare apparvero invariabilmente prima della scrittura. Quando le nascenti civiltà calcarono la punta di una canna sulle prime tavole di argilla, e iniziarono a sbozzare figure nella pietra e a segnare d'inchiostro papiro e pergamena, i sistemi di numerazione si erano già bene affermati. A quel punto, la trasposizione in forma scritta di un sistema numerico orale era facilmente realizzabile: bastava escogitare un criterio di codifica secondo il quale gli scribi potessero registrare i numeri in forma permanente. E alcune società fecero questo senza nemmeno conoscere la scrittura: gli Incas fra tutti, popolo illetterato, tenevano i conti impiegando un sistema di nodi su funicelle di vari colori attaccate a una corda principale e chiamate *quipu*.

Quegli scribi che per primi vergarono numeri dovettero procedere in accordo con la propria base di numerazione e, com'è ovvio, lo fecero nel modo più conciso che riuscirono a immaginare (la società aveva progredito dai tempi di Gog). Invece di ripetere gruppi di segni consecutivi, costoro crearono simboli per ogni ordine di raggruppamento; in un sistema quinario, per esempio, lo scriba avrebbe tracciato un segno per l'unità, uno diverso per la cinquina, un altro ancora per un gruppo di 25, e via di questo passo.

Così fecero gli Egizi. Più di 5000 anni or sono, prima ancora della costruzione delle Piramidi, quel popolo elaborò un metodo di trascrizione del proprio sistema decimale in cui i numerali erano rappresentati da pittogrammi. Un segno verticale designava l'unità, un tratto di fune (od osso di calcagno) il 10, un laccio arrotolato il 100, e così via. In questo modo, per scrivere un qualunque numero, allo scriba egiziano bastava disegnare una sequenza dei simboli suddetti. Per indicare «centoventitré», invece di 123 aste erano sufficienti sei pittogrammi: un laccio, due calcagni, tre aste. Era questo il metodo più tipico di notazione aritmetica nei tempi antichi, e al pari di molte altre civiltà quella egiziana non possedeva né abbisognava dello zero.

Eppure gli Egizi erano dei raffinati matematici; erano maestri nell'astronomia e nella misura del tempo, per cui, a causa della natura ondivaga del calendario, dovevano per forza usare progrediti metodi matematici.

La creazione di un calendario stabile costituiva un serio problema per la gran parte dei popoli antichi, i quali di solito ne adottavano inizialmente uno lunare, con il mese corrispondente all'intervallo tra successive lune piene. La scelta veniva naturale: le alterne fasi in cielo dell'astro notturno si imponevano all’attenzione e offrivano un metodo molto comodo per scandire cicli temporali. Sfortunatamente, la durata del mese lunare è compresa tra 29 e 30 giorni, e quindi con 12 lunazioni si arriva poco oltre 354 giorni, mancandone quasi 11 per fare un anno astronomico, mentre con 13 lunazioni ne risultano circa 19 di troppo. In una maniera o nell’altra, mesi lunari e anno solare non combaciano, e siccome i tempi del raccolto e della semina sono regolati da quest’ultimo, se si fa affidamento su un calendario lunare privo di correzioni, le stagioni si presentano in date progressivamente sfasate.

Correggere il calendario lunare è un’impresa complessa. Parecchie nazioni moderne, tra le quali Israele e Arabia Saudita, si servono ancora oggi di un calendario lunare modificato, ma già 6000 anni fa gli Egiziani avevano escogitato un sistema migliore. Il loro era un modo molto più semplice di tenere il conto dei dì, e il risultante calendario serbava il sincronismo con le stagioni per un periodo di molti anni: come si fa oggi in quasi tutto il mondo, essi registravano il passare del tempo utilizzando il Sole anziché la Luna.

Così come quello lunare, il calendario egizio contava 12 mesi, però composti ognuno di 30 giorni (essendo un popolo «a base 10», la loro settimana, o «decade», ne durava dieci). A fine anno venivano aggiunti cinque giorni supplementari, portando così il totale ai 365 canonici. Antenato del nostro calendario, il sistema egizio venne adottato in Grecia e poi da Roma (dove fu modificato con l’aggiunta dell’anno bisestile), per divenire infine il comune riferimento cronologico del mondo occidentale. Tuttavia, siccome presso Egizi, Greci e Romani lo zero non esisteva, pure il calendario occidentale ne è privo, omissione foriera di guai pochissimi millenni più tardi.

Benché l’avanzamento introdotto dagli Egizi a riguardo del calendario già fosse senza precedenti, quel popolo influì ancor più sulla storia del mondo attraverso l’invenzione dell’arte della geometria. Grazie, infatti, alle intemperanze di un fiume, essi erano rapidamente divenuti maestri della matematica, e senza ricorrere allo zero. Puntualmente ogni anno il Nilo straripava allagando il proprio delta, e, se da una parte l’inondazione lasciava dietro di sé grasso limo alluvionale trasformando la regione nella terra più ferace e ricca del mondo antico, dall’altra faceva piazza pulita di cippi e segni confinari e sottraeva agli agricoltori ogni punto di riferimento per riconoscere e delimitare i propri campi. Ora, leggi e consuetudini degli Egizi prendevano molto sul serio il diritto di proprietà. Si racconta nel Libro dei Morti come il novello estinto debba giurare sugli dèi di non avere sottratto con l’inganno la terra al vicino, colpa che vedrebbe il cuore del reo dato in pasto a un’entità mostruosa, chiamata «divoratore». Parimenti, allungare le mani sui campi limitrofi era considerato reato altrettanto grave che infrangere il giuramento, commettere omicidio o masturbarsi in luogo sacro.

Così i faraoni davano incarico a degli agrimensori di valutare i danni e ripristinare i confini, ed ecco nata la geometria. Costoro, detti dai Greci «*ἁρπεδονάπται*» («savi» e, letteralmente, «tenditori di corde»), per via dei loro strumenti di misura e delle funi annodate impiegate per tracciare angoli e figure, appresero poi a calcolare l’area degli appezzamenti suddividendoli in triangoli e rettangoli. Gli Egizi trovarono anche come misurare il volume dei solidi, per esempio quello delle Piramidi; la fama della loro scienza si sparse in tutto il bacino del mediterraneo, ed è probabile che i primi matematici greci, geometri capiscuola quali Talete e Pitagora, studiassero in Egitto. Eppure, nonostante la brillante opera svolta in quel Paese, ancora non vi si trovava traccia dello zero.

Questo in parte accadeva perché gli Egizi, nutrendo un orientamento pratico, non giunsero mai oltre la misura dei volumi e il conteggio di giorni e ore, e, con l’eccezione dell’astrologia, non si servivano della matematica per alcunché di meno prosaico. Di conseguenza, nemmeno i migliori matematici niloti furono mai in grado di applicare i princìpi geometrici se non ai tangibili problemi del mondo reale. In altre parole, essi mantennero la matematica a un livello tecnico senza saperla trasformare in un sistema di logica astratta. Gli Egizi, a differenza dei Greci, non inclinavano neppure a sposare la matematica con la filosofia, e furono così questi ultimi a volgersi all'astrazione e al pensiero puro, toccando le più alte vette matematiche di tutti i tempi antichi. Ma ancora non furono i Greci a introdurre lo zero: quel concetto doveva venire da Oriente.

Nasce lo zero

> Nella storia della cultura, la scoperta dello zero si ergerà sempre come una della più grandi conquiste individuali del genere umano.
>
> Tobias Dantzig

I Greci compresero la matematica meglio degli Egizi e, una volta impadronitisi dell'arte geometrica, in breve i discepoli sopravanzarono i maestri.

In un primo tempo il sistema ellenico di numerazione rimase assai simile a quello egiziano e inoltre, essendo entrambi a base 10, non variava granché da una cultura all'altra neanche la maniera di scrivere i numeri. Per rappresentarli i Greci usavano lettere dell'alfabeto anziché ideogrammi: «H» (eta) stava per *ἑκατόν* o 100, «M» (mi) indicava *μύριοι* o 10 000 ovvero «miriade», la più grande numerosità simbolizzabile in quel sistema. Esisteva anche un segno per il 5, indicante una commistione quinario-decimale, ma nel complesso i due criteri di rappresentazione numerica rimasero quasi identici – o almeno così fu per un certo periodo, poiché, a differenza della controparte, in seguito i Greci superarono quel modo primitivo di scrittura sviluppandone uno più sofisticato.

Invece di due tratti per rappresentare il due o di tre «H» per il 300 secondo lo stile egizio, il nuovo metodo greco di notazione numerica, apparso prima del 500 a. C., comprendeva lettere dedicate per il 2, 3, 300 e molti altri numeri (vedi fig. 1.1), e così facendo i Greci evitavano di dovere allineare uno dopo l’altro simboli identici. Per esempio, il numero 87 avrebbe richiesto 15 ideogrammi egizi (otto calcagni e sette aste), mentre con il nuovo metodo ne bastavano due soli: π per 80 e ζ per il 7. Benché poi soppiantasse l’ellenico, il sistema dei Romani costituì, di fatto, un passo indietro in direzione della meno raffinata rappresentazione egizia: l’87 romano (LXXXVII) richiede sette simboli, di cui alcuni ripetuti.

Sebbene più perfezionato dell’egiziano, il sistema greco non fu tuttavia il più evoluto del mondo antico. Quella palma spetta ancora una volta a un’invenzione orientale, grazie alla quale finalmente lo zero fece la propria comparsa in Oriente, nella Mezzaluna Fertile dell’odierno Iraq: il metodo babilonese di numerazione.

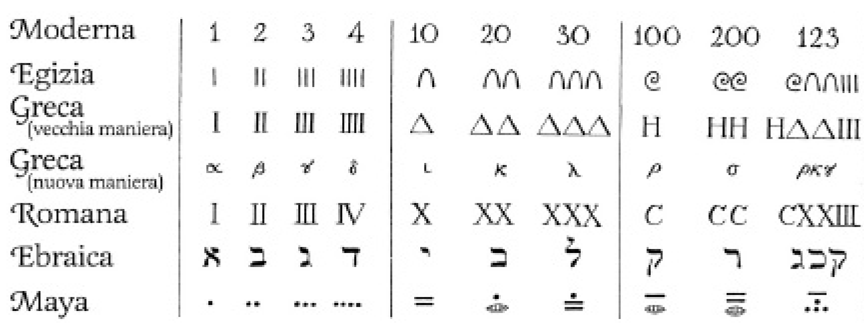


Figura 1.1
I numerali di diverse culture.

Di primo acchito, esso appare intrattabile. Intanto è sessagesimale, a base 60, e già questa è una caratteristica bizzarra, specialmente perché la gran parte delle società scelse, invece, le basi 5, 10 o 20; per di più, i Babilonesi rappresentavano i numeri impiegando solamente due segni cuneiformi: uno semplice per l’unità (*as*) e uno doppio per la decina (*u*). Le «cifre» elementari erano costituite da sequenze di codesti simboli raggruppati a formare additivamente valori fino a 59, così come il sistema greco impiegava lettere e quello egizio pittogrammi. Ma l'aspetto realmente peculiare del sistema sumerico risiedeva nella possibilità di utilizzare il medesimo simbolo per rappresentare quantità diverse, a differenza delle notazioni greca o egiziana, che disponevano invece di simboli specifici per ognuno di molti numeri. Lo stesso cuneo, per esempio, poteva indicare 1, 60, 3600 e le altre potenze della base 60.

Per singolare che appaia al giudizio contemporaneo, il metodo era per gli antichi assolutamente sensato; lo si può considerare l'equivalente Età del Bronzo dei linguaggi di programmazione. Come molte altre culture, quella babilonese aveva inventato strumenti meccanici per aiutare a fare di conto, tra i quali il più famoso era l'abaco. Nota sotto il nome di *soroban* in Giappone, *suan-pan* in Cina, *sciot* in Russia, *coulba* in Turchia, *choreb* in Armenia, e variamente designata presso altre culture, la tavola per contare impiega sassolini mobili per annotare le quantità (da cui i termini «calcolo» e «calcolare», che vengono – come «calcio» – dal latino *calculus*, «ciottolo»).

Per addizionare numeri in questo modo basta spostare le pietruzze da una posizione all'altra; il loro valore dipende, infatti, dalla colonna che occupano e così, manipolandole, un utente esperto può procedere molto velocemente a sommare numeri anche molto grandi. Completata l'operazione, non resta che esaminare la collocazione finale dei sassolini e trasporla in numero, procedimento che risulta immediato.

Il sistema di numerazione sumerico imitava l'abaco, simbolicamente traslato sulla tavoletta d'argilla. Ogni raggruppamento cuneiforme rappresentava una corrispondente quantità di pallottole in una delle sue colonne, e analogamente a quelle aveva un valore diverso a seconda della posizione occupata. A questo riguardo, quel metodo non era tanto diverso dal nostro attuale: come la medesima cifra 1 del numero 111 rappresenta, da destra a sinistra, rispettivamente le quantità «uno», «dieci», «cento», così il simbolo cuneiforme 𒁹 del numero 𒁹𒁹𒁹 assumeva, nelle tre diverse posizioni, il valore «uno», «sessanta», «tremilaseicento». Proprio come nell’abaco, eccetto per un particolare: come avrebbe scritto il 60 un abitante di Babilonia? L’1 era facile: 𒁹; purtroppo, però, anche 60 usava lo stesso segno, differente solo nella posizione, la seconda anziché la prima. Con l’abaco, un sassolino nella prima colonna è facilmente distinguibile da un sassolino nella seconda, ma nello scritto non è così, e i Babilonesi non avevano modo di indicare la «colonna» cui appartenesse un simbolo scritto; il numero 𒁹 poteva rappresentare indifferentemente 1, 60 o 3600. E la situazione peggiorava con numeri composti: 𒁹𒁹 poteva infatti significare 61 (60 + 1), 3601 (3600 + 1), 3660 (3600 + 60) o quantità ancora maggiori.

La soluzione del problema fu lo zero. Già intorno al 200 a. C. i Babilonesi avevano preso a usare due cunei obliqui (𒑲) per rappresentare uno spazio, corrispondente a una colonna vuota nell’abaco. Codesto «segnaposto» rese agevole riconoscere la posizione realmente occupata da un simbolo; prima dell’introduzione dello zero, 𒁹𒁹 era interpretabile sia come 61 sia come 3601; dopo poteva significare solamente 61, poiché 3601 andava scritto 𒁹𒑲𒁹 (vedi fig. 1.2). Lo zero originava in tal modo dalla necessità di conferire significato univoco alle sequenze dei numerali babilonesi.

Per quanto utile, lo zero non era però altro che un segnaposto; rappresentava lo spazio vuoto dell’abaco, la colonna con tutte le pallottole abbassate. Serviva a fare in modo che le cifre cadessero al posto giusto, o poco più di questo; non possedeva un valore numerico proprio. Tutto sommato, 000002148 è lo stesso che 2148; uno zero in una fila di cifre acquista significato solo se vi sono cifre alla sua sinistra, e di per sé non vale… niente. Zero era una cifra, non un numero: non aveva un valore.

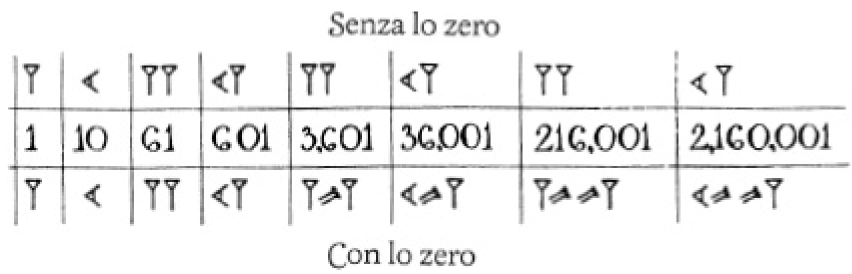


Figura 1.2
I numeri babilonesi.

Il valore di un numero dipende dal posto che occupa nell'insieme ordinato, ovvero dalla sua posizione in relazione agli altri numeri; per esempio, il due viene dopo l'uno e prima del tre, non ha senso inserirlo altrove. Tuttavia il segno 0 non possedeva inizialmente un *ubi consistam*; era, appunto, solamente un segno privo di collocazione propria nella sequenza numerica. Ancora oggi trattiamo alle volte lo zero come un non-numero – nonostante ci sia noto che a esso è associato uno specifico valore numerico –, impiegando la cifra 0 da semplice segnaposto privo di relazione con lo zero inteso come numero. Basta osservare la pulsantiera del telefono o la seconda fila dall'alto nella tastiera del PC: lo 0 segue il 9 anziché precedere l'1, come dovrebbe. Dove si trovi lo 0 segnaposto non ha alcuna importanza, ed esso può stare ovunque nella successione dei numeri naturali. Ma oggi tutti sanno ormai che lo zero numerico non può realmente collocarsi in modo arbitrario, poiché a esso corrisponde un valore preciso: è il numero che separa l'insieme positivo da quello negativo, è pari, ed è l'intero che precede l'uno. Zero non può che occupare il posto che tra gli interi legittimamente gli spetta, prima dell'unità e dopo l'unità negativa; non ha senso inserirlo altrove. Eppure, siccome iniziamo sempre a contare da uno, è posizionato in fine di tastiera e in basso nel telefono.

Il punto giusto per cominciare un conteggio appare in effetti l'uno, ma in questo modo obblighiamo lo zero a una collocazione innaturale. Ad altre culture, come i Maya del Messico e America centrale, iniziare da uno non sembrò la scelta più razionale, e infatti quel popolo aveva un sistema di numerazione – e un calendario – più di buon senso che non il nostro. Analogamente ai Sumeri, i Maya sfruttavano il «valore posizionale» delle cifre, l'unica sostanziale diversità essendo il metodo impiegato, che per questi ultimi era vigesimale (a base 20) con residui di una precedente base 10, contro la base 60 vigente a Babilonia. E gli uni come gli altri necessitavano dello zero per conservare a ogni cifra il giusto significato. Per poi vivacizzare le cose, i Maya possedevano due ordini di cifre: il tipo semplice, rappresentato con punti e linee, e il tipo complesso, fondato sui glifi, sorta di grotteschi profili antropomorfi dai quali risulta una scrittura geroglifica con l'aspetto più alieno che si possa immaginare (vedi fig. 1.3).

Come gli Egizi, i Maya disponevano pure di un eccellente calendario. Conformemente alla loro base 20 di conteggio, dividevano gli anni in 18 mesi di 20 dì ciascuno, raggiungendo un totale di 360 giorni, portato a 365 da uno speciale periodo finale di cinque, detto *Uayeb*. Ma, a differenza degli Egizi, i Maya avevano uno zero nel proprio sistema di conteggio, per cui nel numerare i giorni si comportarono nel modo ovvio, iniziando da zero. Il primo giorno del mese di Zip, per fare un esempio, era detto di solito dell'«insediamento» o dell'«assise» di Zip. Il giorno seguente era l'1 Zip, quello dopo il 2 Zip, e di questo passo fino al 19 Zip. Poi veniva l'insediamento di Zotz (0 Zotz seguito da 1 Zotz e così via); i mesi erano di 20 giorni numerati da 0 a 19, non da 1 a 20 come avremmo fatto noi oggi. (Il calendario di questo popolo era magnificamente complesso: a fianco dell’anno solare – o civile – ve n’era uno rituale composto da 20 mesi di 13 dì, e insieme i due determinavano un «ciclo di calendario» di 52 anni solari, riportandosi in fase ogni 18 980 giorni – ognuno dei quali era fornito di un proprio nome.)

Il calendario maya era più sensato di quello occidentale. Siccome quest’ultimo venne definito in un’epoca che non conosceva lo zero, noi non abbiamo mai un anno o un giorno zero. Codesta assenza apparentemente irrilevante era destinata a procurare una grande quantità d’inconvenienti, fomentando la controversia a riguardo della data di inizio del millennio. Ai Maya non sarebbe toccato di perdersi in discussioni se fosse l’anno 2000 o 2001 il primo del terzo millennio; ma non furono loro a stabilire il nostro modo di registrare il tempo, furono invece gli Egizi e più tardi i Romani, e noi, di conseguenza, ci ritroviamo impelagati in un problematico calendario privo di zeri.

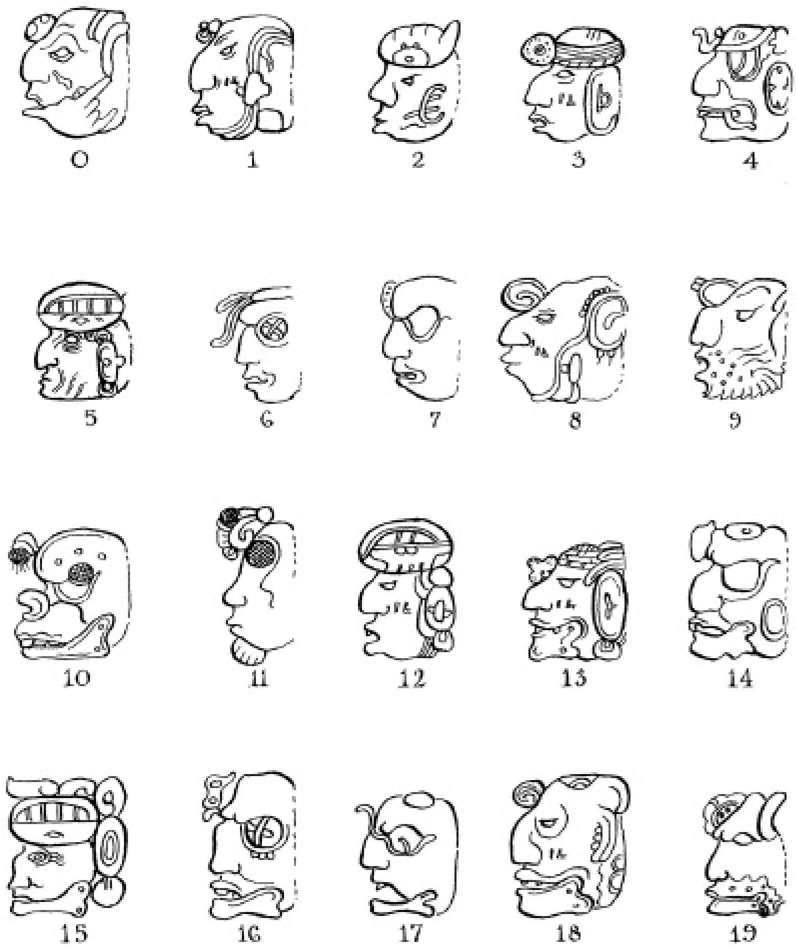


Figura 1.3
I numeri Maya.

Come l'assenza dello zero presso l'antica civiltà nilotica non favorì il calendario, così non doveva giovare alle matematiche in Occidente, le cui successive difficoltà non dipesero peraltro solo dallo zero, ma originarono da più di una influenza negativa ascrivibile a quella cultura. Tra le altre cose, infatti, gli Egizi manipolavano le frazioni in modo estremamente macchinoso, con la sola eccezione di 2/3, scrivendole tutte come somma di frazioni unitarie (ovvero degli inversi di numeri interi, 1/*n*). Per esempio, essi non concepivano, alla nostra maniera, 3/4 come il rapporto di tre con quattro, ma come 1/2 + 1/4, cosicché le lunghe sequenze di addendi che si generavano normalmente rendevano assai difficoltosa (nel sistema di numerazione egiziano come in quello greco) l'esecuzione dei calcoli frazionari.

In presenza dello zero tutte queste complicazioni divengono sorpassate. Con la numerazione babilonese, che fa uso di zero, rappresentare i numeri frazionari è facile: così come noi scriviamo 0,5 per 1/2 e 0,75 per 3/4, i Sumeri rispettivamente scrivevano l'equivalente di 030 (0 [× 1 +] 30 [× 1/60]) e 045 (0 [× 1 +] 45 [× 1/60]). In effetti, la loro numerazione sessagesimale – per via della grandezza della base e dei molti fattori primi in cui questa si scompone – era anche meglio adatta a esprimere le frazioni che non la nostra attuale a base 10.

Malauguratamente, Greci e Romani detestavano talmente lo zero che preferirono restare abbarbicati alla propria notazione pseudoegizia piuttosto che adottare il ben più semplice sistema babilonese. Negli intricati computi astronomici, necessari per esempio per compilare le effemeridi degli astri, il metodo greco si rivelava così involuto e complesso da indurre i matematici ellenici a tradurre le loro catene di frazioni unitarie nella rappresentazione sessagesimale, eseguire i calcoli e nuovamente trasporre risultati secondo lo stile domestico. Tanto valeva risparmiarsi i laboriosi passaggi intermedi (è nota a tutti l'amenità del convertire e riconvertire le frazioni), e tuttavia i Greci sdegnavano lo zero al punto da bandirlo dai propri scritti nonostante ne riconoscessero l'utilità. Il perché di questo comportamento? Lo zero era pericoloso.

Le paurose proprietà del Nulla

> Viveva Ymir nel tempo primordiale: non pelago né sabbia o salso flutto erano ancor, né l'erba o vegetale, né l'Orbe o 'l Ciel, ma il Nulla dappertutto.

È difficile da concepire la paura di un numero. Eppure, essendo lo zero inesorabilmente connesso al vuoto e al nulla, ecco sorgere, per via dell’atavico sgomento dinanzi al niente e al caos, il timore dello zero.

Le credenze di gran parte dei popoli antichi contemplavano una caotica mancanza di alcunché prima che l’Universo cominciasse a esistere. I Greci sostenevano che fosse la Tenebra madre di ogni cosa e che il Caos ne fosse scaturito – dall’unione dei due avrebbe poi proliferato il resto della creazione. La narrazione ebraica della Genesi afferma come il mondo non fosse che un nulla amorfo prima che Iddio lo irraggiasse di luce e ne costituisse le forme. [Il termine ebraico è תהו ובהו (*tohu vavohu*,[1] Gn, 1,2), e Robert Graves ha collegato *tohu* al Tehemot, un primevo drago semitico che assistette alla nascita dell’Universo e il cui corpo divenne il cielo e la terra, mentre *vavohu* sarebbe associato a Behomot, il leggendario mostro Behemoth della tradizione ebraica.] Dal canto loro, la più antica tradizione indù dice di un Creatore che manteca la materia informe per plasmarne la terra, mentre i miti scandinavi raccontano dell’insondabile abisso del nulla che separa la regione del ghiaccio da quella del fuoco, e del primordiale gigante Ymir sorto da una magmatica miscela di gelo e calore. In definitiva, la condizione naturale all’inizio dei tempi essendo costituita da cosmico vuoto e disordine, rimaneva il tarlo dell’inquietudine che un giorno, alla fine dei tempi, l’ansiogena situazione si ripresentasse. E non era forse lo zero il simbolo di quel vuoto?

Ma il timore suscitato dallo zero scendeva più in profondità rispetto a una semplice angoscia a riguardo del nulla. Agli occhi degli antichi le proprietà matematiche dello zero erano inesplicabili, ammantate di mistero al pari della nascita dell’Universo. Quel particolare numero è, infatti, differente da tutti gli altri. Nella notazione babilonese lo zero era il solo a non rimanere mai scompagnato, e per buoni motivi: uno zero da solo opera invariabilmente misfatti, o come minimo si comporta in maniera diversa dagli altri numeri.

Aggiungiamo un numero a se medesimo e la somma è un numero diverso: uno più uno fa due e due più due fa quattro; zero più zero, però, rimane zero. Questo risultato è in disaccordo con un principio fondamentale sui numeri, l'assioma di Archimede, secondo il quale addizionando una quantità con se stessa tante volte quanto basta è possibile eccedere qualsiasi altra quantità (l'assioma è originariamente formulato in termini di aree, e la quantità in parola vi è definita come differenza di due superfici diseguali). Lo zero si rifiuta di aumentare, e del pari rifiuta di fare aumentare ogni altro numero: addizioniamo due con zero e il risultato è sempre due; non importa nemmeno prendersi la briga di fare la somma. Idem con la sottrazione: togliendo zero da due si riottiene due. Lo zero non ha consistenza, ma seppure ne sia privo, codesto numero mina alle fondamenta le più semplici operazioni matematiche quali moltiplicazione e divisione.

Nel dominio dei numeri la moltiplicazione è, in senso letterale, uno stiramento. Immaginiamo la retta di rappresentazione dei numeri come una bandella elastica graduata a intervalli uguali (vedi fig. 1.4). La moltiplicazione per due equivale, allora, ad allungare l'elastico di un fattore due, in modo che la tacca dell'uno venga a trovarsi dov'era il due, quella del tre si trovi sul sei e così via. Analogamente, moltiplicare per un mezzo è come rilasciare un poco la bandella, quanto basta perché il contrassegno del due si porti dov'era l'uno e quello del tre in corrispondenza di uno e mezzo. Ma che cosa succede se si moltiplica per 0?

N volte zero fa sempre zero, cosicché dopo l'operazione tutte le tacche sono su zero.

L'elastico si è rotto, l'intero regolo ha collassato.

Sfortunatamente non c’è modo di aggirare lo spiacevole dato di fatto: zero volte qualsiasi quantità deve dare zero, è una caratteristica del nostro sistema di numerazione. Perché i numeri che usiamo tutti i giorni abbiano un senso, occorre che valga una proprietà chiamata «distributiva», meglio esposta con un esempio. Immaginiamo che un negozio di giocattoli venda palle in confezioni da due e cubi in confezioni da tre, e che il negozio vicino offra, invece, un pacco assortito di due palle e tre cubi. Un articolo-palle più un articolo-cubi da una parte equivale all’articolo assortito dall’altra, ma congruenza richiede che un acquisto di sette confezioni di palle e sette di cubi nel primo esercizio sia lo stesso che un acquisto di sette pacchi assortiti nel secondo. Questa è la proprietà distributiva; in notazione numerica diciamo che $7 \times 2 + 7 \times 3 = = 7 \times (2 + 3)$, e i conti tornano regolarmente.

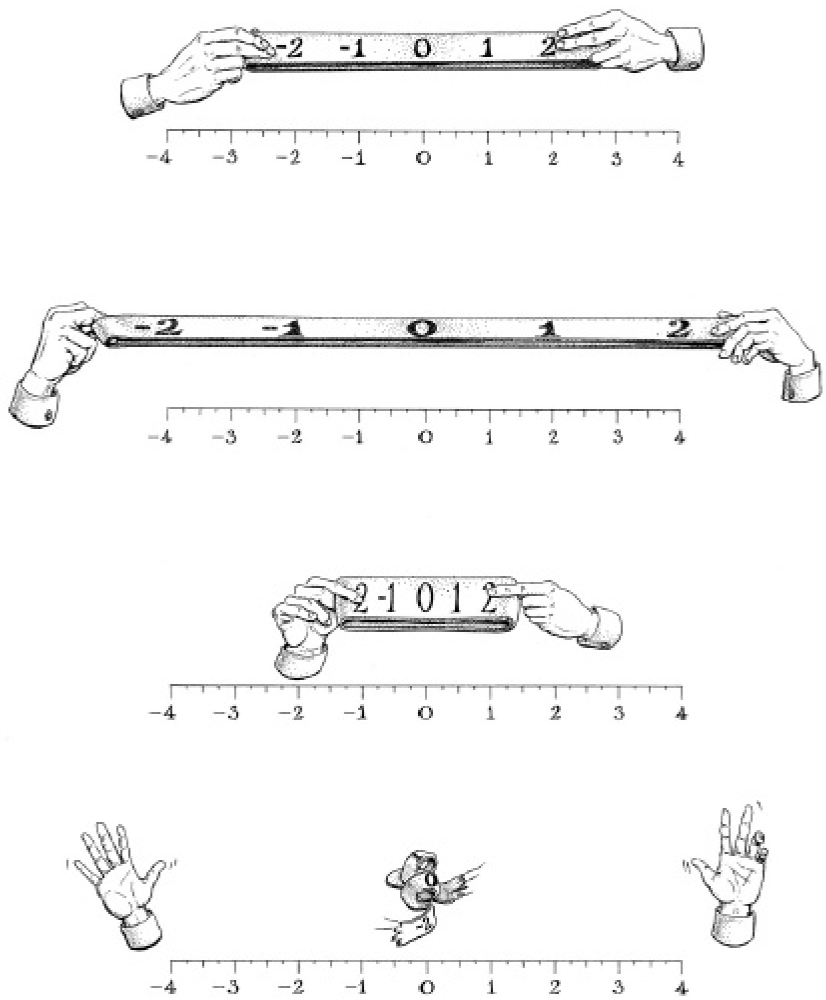


Figura 1.4
Moltiplicazione e metafora dell’elastico.

Applicando ora la medesima proprietà allo zero, si vede accadere qualche cosa di strano. Sappiamo che $0 + 0 = 0$, e dunque moltiplicare per $(0 + 0)$ un qualunque numero è lo stesso che moltiplicarlo per zero. Prendendo per esempio il due, si ha che $2 \times (0 + 0) = = 2 \times 0$; ma dalla proprietà distributiva sappiamo che $2 \times (0 + 0)$ è uguale a $2 \times 0 + 2 \times 0$, ovvero $2 \times 0 + 2 \times 0 = 2 \times 0$. Qualunque cosa sia il prodotto 2×0, quand’è sommato a se stesso conserva il medesimo valore, il che lo rende assai simile a zero. E di zero, in effetti, si tratta, come si vede sottraendo 2×0 da entrambi i membri dell’equazione precedente: rimane, appunto, $2 \times 0 = 0$. Siccome qualunque numero può andare al posto di due, ecco dimostrato che, si faccia come si vuole, la moltiplicazione per zero produce sempre zero. Codesto numero piantagrane fa implodere la retta dei numeri in un unico punto, ma per importuna che sia questa proprietà, la reale potenza dello zero si manifesta nella divisione.

Così come moltiplicare stira la retta dei numeri, dividere la restringe. Nell’un caso si estende la retta di un fattore pari al moltiplicatore, e nell’altro la si riduce di un fattore pari al divisore, di fatto ripristinando la situazione iniziale. La divisione per un numero annulla gli effetti della moltiplicazione: una tacca «stirata» su una nuova posizione ritorna al punto di partenza.

Abbiamo constatato quello che succede nel moltiplicare per zero: la retta dei numeri ne viene distrutta. Con la divisione si dovrebbe ottenere l’effetto opposto e cancellare l’esito distruttivo, ma per disdetta non è precisamente questo ciò che si verifica.

Nell’esempio appena fatto si è visto che il prodotto 2×0 è uguale a 0, cosicché dobbiamo assumere che $2 \times 0/0$ ci restituisca 2 annullando l’effetto della moltiplicazione, così come $3 \times 0/0$ ci riporti a 3 e $4 \times 0/0$ ripristini il 4. Ma, avendo appena concluso che 2×0, 3×0, 4×0 sono tutte quantità eguali a 0, risulta che $2 \times \times 0/0$ equivale a $0/0$ come pure $3 \times 0/0$ e $4 \times 0/0$. Ahimè, ciò significherebbe che $0/0$ è contemporaneamente uguale a 2, a 3 e a 4, un risultato del tutto incoerente.

Analoghe stranezze si verificano considerando $1/0$ per altro verso. Se la moltiplicazione per zero neutralizza la divisione per zero, allora $1/0 \times 0$ deve dare 1; ma allo stesso tempo sappiamo che qualunque prodotto con fattore zero deve dare zero! Non esiste un numero che, moltiplicato per zero, produca uno, almeno non uno dei numeri incontrati fino a qui.

Il peggio, però, avviene se perversamente si procede a dividere per zero: vengono scardinati gli stessi princìpi logici e matematici. La divisione per zero – e basta compierla una volta sola – consente di dimostrare, conti alla mano, letteralmente ogni proposizione al mondo. Possiamo provare che 1 + 1 = 42, e di qui che J. Edgar Hoover era un extraterrestre, che William Shakespeare era originario dell'Uzbekistan, e perfino che il cielo è fatto a *pois* (si veda in Appendice A la dimostrazione che Winston Churchill era una carota).

Se la moltiplicazione per zero riduce al collasso la retta dei numeri, la divisione fa crollare l'intera impalcatura della matematica.

Nel nostro piccolo numero è concentrato un potere enorme. Era destinato a divenire il più importante strumento dell'analisi matematica, ma, a causa delle singolarità anche filosofiche insite in lui, doveva parimenti entrare in conflitto con i pilastri del pensiero occidentale.

Capitolo 2

Con niente si fa niente

L'Occidente respinge lo zero

Nulla nasce dal nulla.

Lucrezio

Lo zero si scontrò con uno dei principali assunti della filosofia occidentale, una proposizione che affondava radici nella numerologia pitagorica e la cui importanza derivava dal paradosso di Zenone: il vuoto non esiste.

La visione greca della realtà fisica, foggiata da Pitagora, Aristotele e Tolomeo, sopravvisse a lungo al crollo della civiltà che l'aveva creata. In quell'Universo non esisteva il niente; lo zero non vi era contemplato. Fu per questa ragione che l'Occidente per quasi duemila anni non poté accettarne il concetto; e le conseguenze furono tremende. La mancanza dello zero avrebbe frenato lo sviluppo delle matematiche, soffocato l'innovazione scientifica, e fatto strame, *en passant*, del calendario. Prima di essere pronti ad accogliere lo zero, i pensatori occidentali avrebbero dovuto smantellare il proprio mondo.

L'origine della filosofia greca basata sui numeri

In principio era la Ragione, la Ragione era con Dio, e la Ragione era Dio.[2]

Gv, 1,1

Pure essendo gli inventori della geometria, gli Egizi non tenevano in gran conto la matematica; non la consideravano più di uno strumento per registrare il passaggio dei giorni e manutenere gli appezzamenti di terreno. Ma l'atteggiamento dei Greci era completamente diverso. Per essi numeri e filosofia erano inseparabili, e degni entrambi di essere presi molto sul serio. In buona sostanza, ai numeri ci tenevano da morire, letteralmente.

Ippaso di Metaponto era in piedi sul ponte, preparandosi a venire giustiziato. Attorno a lui erano raccolti gli adepti di una setta, la confraternita occulta che egli aveva tradito: Ippaso aveva rivelato un segreto esiziale per la mentalità dei suoi compatrioti, e che minacciava di sovvertire l'intera base filosofica elaborata dai proseliti con tanto impegno. Per questa trasgressione il grande Pitagora in persona aveva condannato il reo alla pena capitale per annegamento – pur di tutelare la propria filosofia dei numeri, l'accolita non esitava evidentemente a uccidere. Ma per micidiale che fosse il segreto divulgato, era ancora poca cosa dinanzi ai pericoli insiti nello zero.

Pitagora, il capo della setta, era un estremista dei suoi tempi. Stando alla maggior parte delle cronache, era nato nel VI secolo a. C. a Samo, isola greca posta al largo della Turchia e rinomata per il tempio di Era (Giunone) e per il vino eccellente. I suoi convincimenti erano eccentrici anche agli occhi superstiziosi degli antichi suoi connazionali; egli si credeva, infatti, la reincarnazione dell'eroe troiano Euforbo, e di qui a persuadersi che tutte le anime indistintamente, animali compresi, trasmigrassero dopo la morte in altri corpi, il passo era stato breve. Per questo motivo Pitagora era un assoluto vegetariano, che respingeva però i fagioli, posti al bando quali generatori di flatulenza e per la somiglianza con i genitali.

L'originale geometra aveva magari un che da pensatore new age ante litteram, ma resta il fatto che fosse un travolgente oratore, un erudito di fama, un carismatico insegnante. Gli era attribuita la stesura dello statuto della Magna Grecia, gli studenti accorrevano a lui a gara, e in breve egli acquistò un seguito di discepoli desiderosi di apprendere dalle labbra del maestro.

I pitagorici vivevano in conformità al dettame del loro leader: ritenevano – tra le altre cose – che per i rapporti sessuali con donne si dovesse preferire l'inverno all'estate, che ogni infermità derivasse da indigestione, che si dovesse consumare cibo crudo e bere solo acqua, che gli indumenti di lana fossero da evitare. Ma la loro filosofia ruotava attorno a un dogma fondamentale: tutto è numero.

I numeri adottati dagli Ellenici erano un retaggio egizio, ossia di un popolo volto alla geometria. Di conseguenza, la matematica greca non faceva grande distinzione tra forme e numeri; per quei filosofi-matematici si trattava più o meno della stessa cosa (per via della loro influenza abbiamo ancora oggi numeri triangolari, quadrati e così via – vedi fig. 2.1). In quel tempo la dimostrazione di un teorema matematico equivaleva sovente al semplice tracciato di un elegante disegno geometrico, e gli strumenti anticamente utilizzati non erano carta e matita, ma riga e compasso. Per Pitagora, poi, il collegamento tra forma e numero era intimo e di natura misterica; ogni forma-numero possedeva un significato nascosto e quelle più armoniose erano sacre.

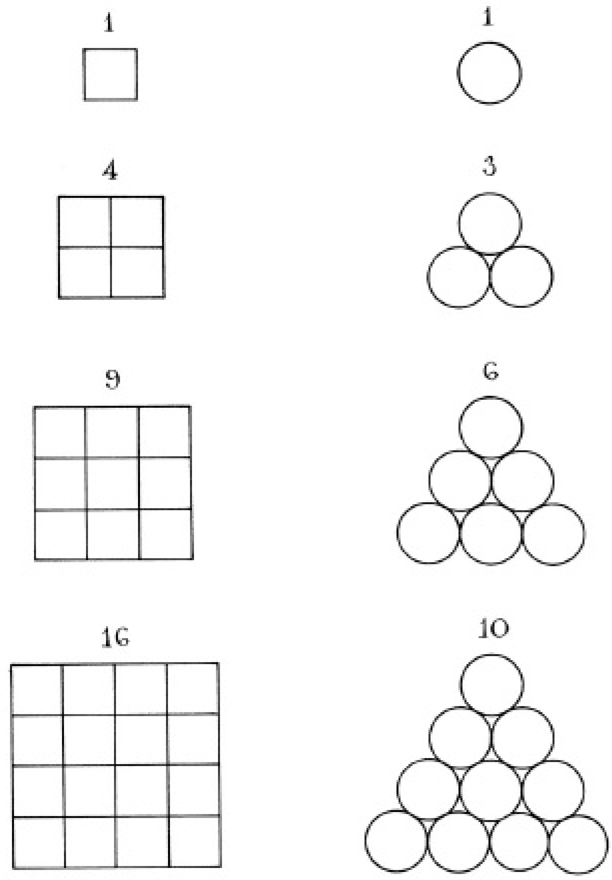


Figura 2.1
Numeri quadrati e triangolari.

L'allegoria simboleggiante la setta pitagorica era naturalmente una forma-numero: il pentacolo, semplice figura di stella a cinque punte che tuttavia lascia intravedere l'infinito. Inscritto nelle linee della stella si trova un pentagono i cui vertici, collegati da linee, disegnano a loro volta una stella, più piccola, capovolta, e con le medesime proporzioni della prima. Di qui pentagoni e stelle sono iterabili indefinitamente, in dimensioni via via più ridotte (vedi fig. 2.2). Per interessanti che fossero tali particolarità, per i pitagorici la proprietà principale del pentagono stellato non stava nell'auto-replicazione ma era nascosta nelle linee della stella, che celavano una forma-numero essenza ultima della loro visione dell'Universo: la sezione aurea.

L’importanza di quella proporzione deriva da una scoperta, ancora di Pitagora, ormai semidimenticata. Egli viene ricordato nelle scuole d’oggi quando i ragazzi vi apprendono il famoso teorema che porta il suo nome (il quadrato costruito sull’ipotenusa di un triangolo rettangolo equivale ai due quadrati costruiti sui cateti), ma che tutto era tranne che una novità, essendo conosciuto da oltre un millennio prima di allora. Nell’antica Grecia Pitagora era ricordato per tutt’altra cosa: la scala musicale.

Secondo la leggenda, Pitagora giocherellava un giorno con un monocordo, una cassa armonica con un’unica corda (vedi fig. 2.3), variandone la nota con il muovere un ponticello scorrevole su e giù per la lunghezza dello strumento. In breve aveva scoperto che la corda si comportava in maniera particolare ma predicibile: pizzicata senza il ponte, emetteva una nota distinta, il tono detto «fondamentale», mentre l’appoggiarvelo in un punto cambiava le note prodotte. Con il ponte posto nel mezzo ognuna delle due metà del monocordo suonava una stessa nota, più alta della fondamentale esattamente di un’ottava. Spostandolo un poco si poteva fare in modo di lasciare, per esempio, tre quinti di corda da una parte e due quinti dall’altra, e Pitagora osservò che in questo caso le note generate dai due segmenti formavano un perfetto *accordo di quinta*, ritenuta la relazione musicale più intensa ed evocativa. Rapporti numerici diversi davano poi consonanze diverse, alcune rilassanti, altre fastidiose (tra queste ultime, il dissonante tritono era detto nel XIV secolo «*diabolus in musica*» e fu messo al bando dai musici di allora). Stranamente, allorché la posizione del ponticello non metteva i due segmenti in un rapporto semplice, le note corrispondenti non legavano tra loro; si generavano delle disarmonie, per non dire di peggio, e alle volte un tremolo vagolante come ubriaco per l’intera scala tonale.

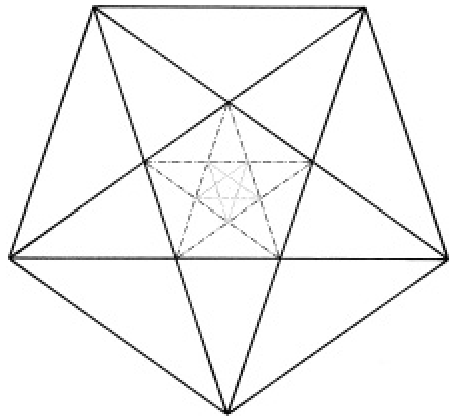


Figura 2.2
Pentacolo.

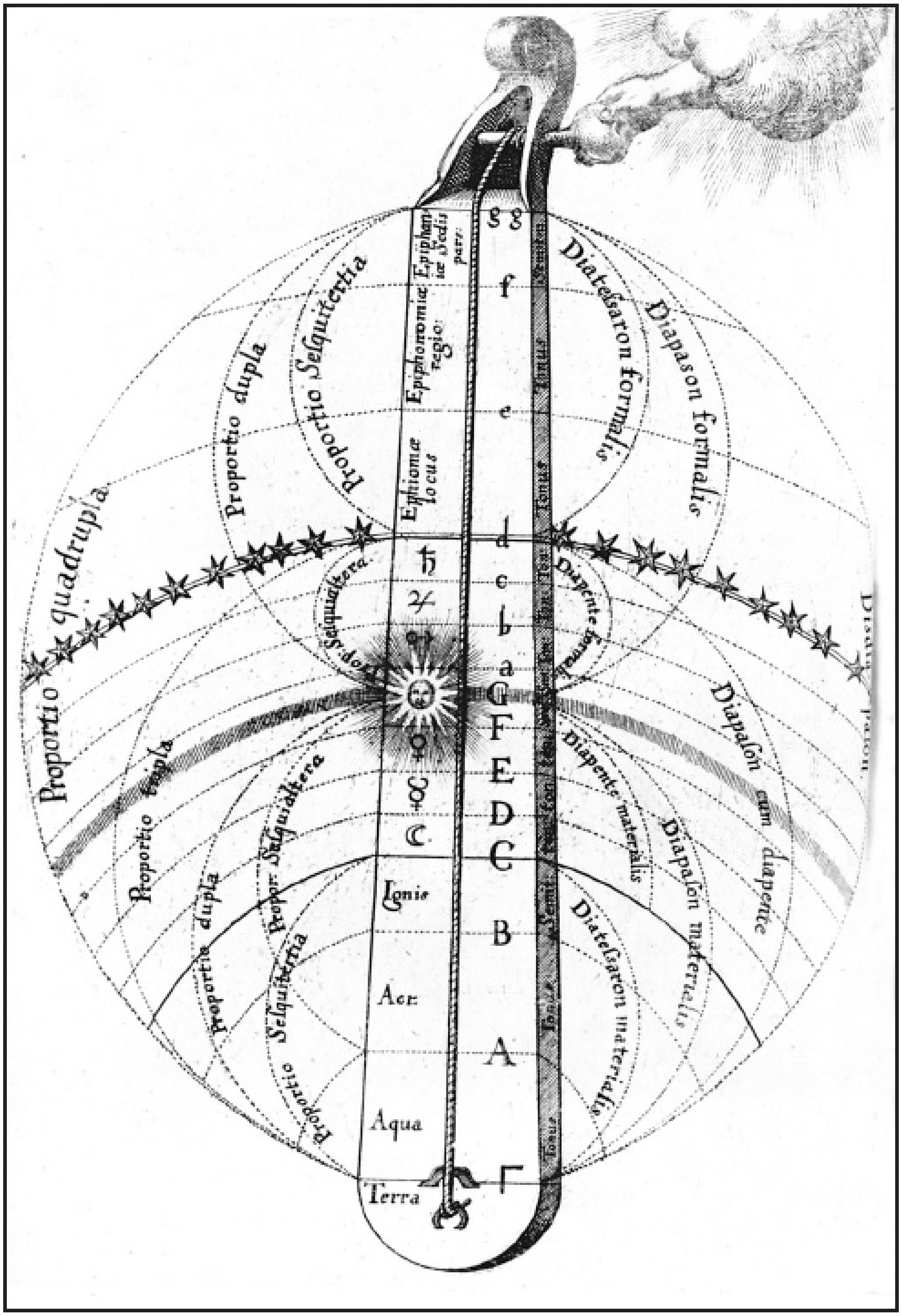


Figura 2.3
Il mistico monocordo.

Per Pitagora suonare era un atto matematico e le linee, le corde di uno strumento, erano forme-numero come i quadrati e i triangoli, cosicché dividerle in due era lo stesso che mettere due numeri in rapporto tra loro. L’armonia del monocordo era l’armonia della matematica, e dunque l’armonia dell’Universo. La conclusione fu che i rapporti governano non solamente la musica, ma ogni altra forma di bellezza. Agli occhi dei pitagorici i rapporti e le proporzioni erano alla base di euritmia, vaghezza ed eleganza; per intendere la natura bastava, dunque, afferrarne le sottostanti proporzioni numeriche.

Questa linea filosofica – l’intercambiabilità tra musica, aritmetica e natura – condusse al più antico modello pitagorico della struttura celeste, nel quale la Terra – argomentava Pitagora – stazionava immobile al centro dell’Universo con Sole, Luna, pianeti e stelle che le giravano intorno, affissi ognuno all’interno di sfere concentriche (vedi fig. 2.4). Le sfere stavano tra loro in rapporti dimensionali armonici e regolarmente distribuiti, e nel ruotare producevano musica. I pianeti più esterni, Giove e Saturno, si muovevano più rapidamente e generavano le note più alte, e i più interni, come la Luna, le note più basse; nel loro insieme tutti suonavano la «musica delle sfere», e i cieli altro non erano che una leggiadra orchestra matematica. Questo significava Pitagora quando insisteva nell’affermare che «tutto è numero».

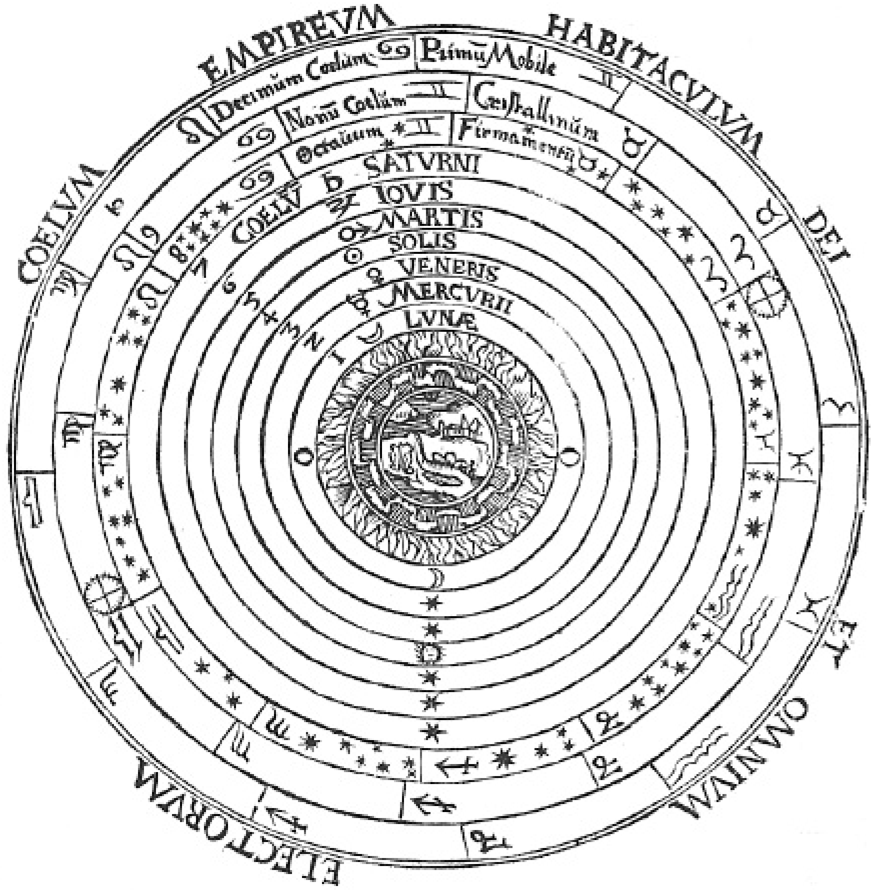


Figura 2.4
L'Universo dei Greci antichi.

Essendo i rapporti la chiave per la comprensione della natura, i pitagorici e, più tardi, i matematici greci compirono ogni sforzo per investigarne le proprietà, pervenendo infine a suddividere le proporzioni in dieci categorie, chiamate con nomi quali «medio armonico». Una di queste mediocrità fruttò il numero più bello del mondo: il «numero aureo».

Per giungere alla beatifica proporzione occorre ripartire un segmento in un modo particolare: facendo sì che il rapporto tra la parte minore e la maggiore sia uguale al rapporto tra quest'ultima e l'intero (vedi l'Appendice B). Detto così non sembra questa gran meraviglia, ma si dà il caso che le figure in rapporto aureo informino di sé gli oggetti più belli. Anche oggi, artisti e architetti sanno intuitivamente che le forme esteticamente più appaganti mantengono larghezza e lunghezza in questo rapporto, il quale governa le proporzioni di molte opere d'arte e architettoniche. Alcuni storici e matematici sostengono che la costruzione del Partenone, il maestoso tempio ateniese, manifesti il rapporto aureo in ogni particolare della sua struttura. La natura stessa dimostra di utilizzarlo per i propri progetti: nella conchiglia del nautilo il rapporto tra le dimensioni della spira approssima il numero aureo in progressione crescente dall'interno verso l'esterno, e così pure, dalla base in su, per il rapporto tra il numero di scaglie conteggiabili rispettivamente in senso orario e antiorario intorno al frutto dell'ananas (vedi fig. 2.5).

Il pentacolo divenne il sacro simbolo del sodalizio pitagorico proprio perché anche i segmenti della stella si intersecano due volte l'uno con l'altro secondo quel rapporto speciale. La figura trabocca di sezioni e ragioni auree, e per Pitagora il «medio aureo» era re tra i numeri; privilegiato sia dalla natura sia dagli artisti, appariva dimostrare l'asserzione dello scolarca secondo cui musica, bellezza, architettura, natura sono tutte entità inseparabilmente intrecciate sia tra loro sia con la struttura medesima dell'Universo.

Nel giudizio dei pitagorici i rapporti reggevano l'Universo, e ciò che essi davano per assodato ben presto divenne vangelo per l'intero Occidente. La relazione soprannaturale tra l'estetica, i rapporti e l'Universo fu uno dei canoni principali e più duraturi della civiltà occidentale; ancora ai tempi di Shakespeare gli uomini di scienza parlavano della rivoluzione di sfere di diverse proporzioni e discutevano della musica celeste risonante per il cosmo.

Nel contesto pitagorico non c'era posto per lo zero. L'equipollenza tra numeri e forme aveva reso i Greci maestri di geometria, ma comportava un grave inconveniente: impediva di trattare lo zero da numero. Dopotutto, quale forma avrebbe potuto mai corrispondervi?

Un quadrato di lato due è immediatamente visualizzabile, ma che cos’è un quadrato di lato zero? È ben difficile immaginare un qualche cosa privo di dimensioni, senza alcuna sostanza, come un quadrato. Ciò significava, inoltre, che la moltiplicazione per zero era senza senso: se moltiplicare equivaleva a calcolare l’area di un rettangolo, che poteva mai essere l’area di un rettangolo di altezza o larghezza zero?

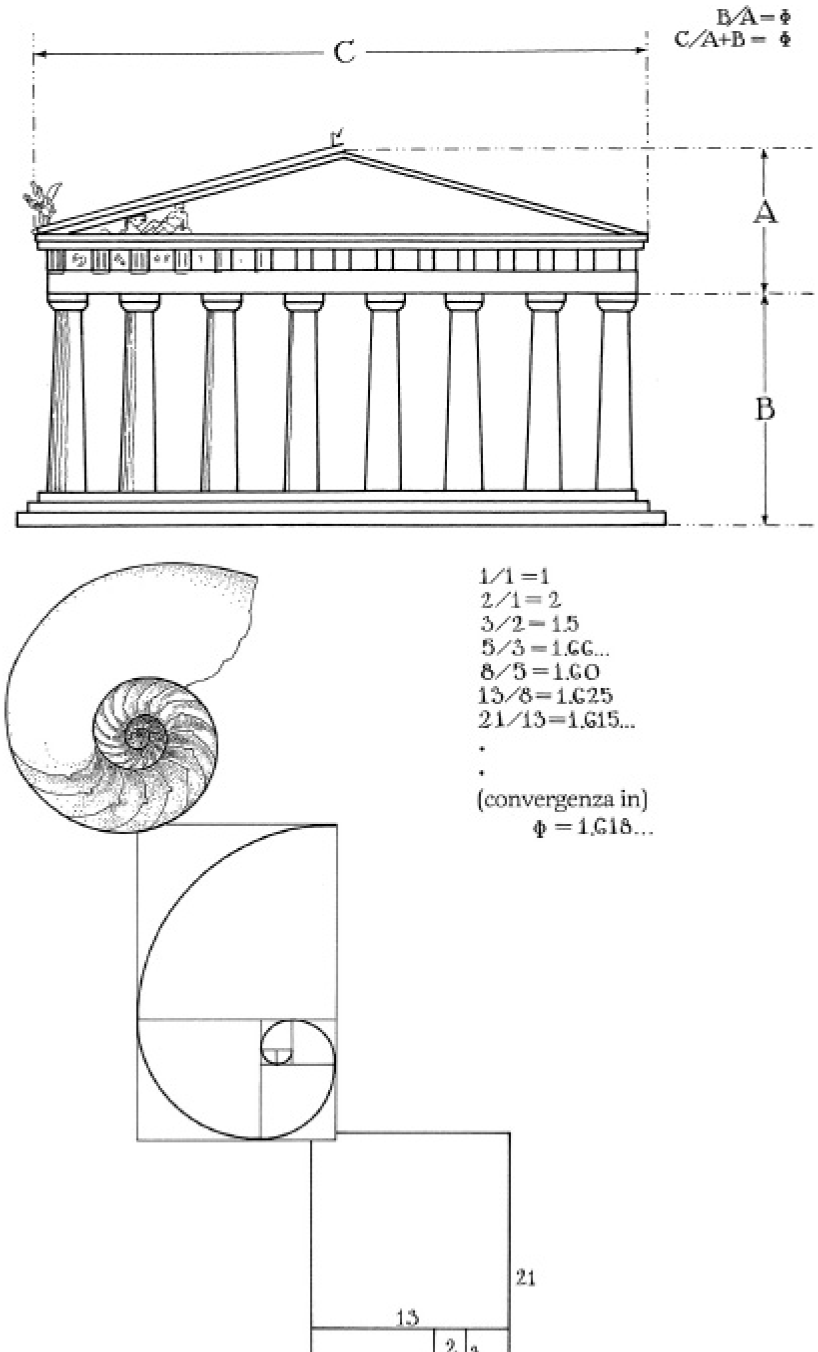


Figura 2.5
Il Partenone, la spirale del nautilo e la ragione aurea.

Al giorno d’oggi i grandi problemi irrisolti della matematica sono enunciati in termini di congetture che gli addetti ai lavori non sono in grado di dimostrare. Ma le forme-numero dell'antica Grecia inducevano un diverso modo di vedere le cose. I celebri problemi irrisolti di allora erano geometrici: è possibile costruire un quadrato di area uguale a quella di un cerchio assegnato servendosi solamente di riga e compasso? E come eseguire, con i medesimi strumenti, la trisezione dell'angolo?[3] Se forma e costruzione geometrica erano la stessa cosa e se zero come numero appariva senza significato geometrico, per considerarlo tale i Greci avrebbero dovuto rivisitare tutto quanto il loro approccio alle matematiche. Scelsero di lasciare le cose come stavano.

Pure ammettendo che zero fosse un numero nel senso inteso dai Greci, il solo introdurlo in una frazione aritmetica sarebbe apparsa una sfida alla natura. Una proporzione avrebbe cessato di essere la relazione tra due oggetti: zero fratto una quantità qualsiasi dà sempre zero, il divisore ne viene completamente assorbito, e una quantità qualsiasi fratto zero è in grado di demolire ogni logica. Lo zero avrebbe aperto una falla nel nitido ordinamento pitagorico delle cose, e per questo andava assolutamente rigettato.

A dire il vero, la scuola pitagorica aveva già cercato di mettere a tacere un'altra idea scomoda: l'irrazionalità. La scoperta dei numeri irrazionali aveva rappresentato la prima sfida alle posizioni filosofiche del sodalizio, che si era adoperato per mantenerla segreta e che, quando la notizia comunque trapelò, ricorse alla violenza.

Il concetto di irrazionalità era una bomba a tempo celata nella matematica greca. Come conseguenza del dualismo tra forme e numeri, per essa il contare corrispondeva a misurare una linea, e quindi il rapporto tra due numeri non era altro che il confronto tra le lunghezze di due segmenti. Ma per eseguire una qualunque misura occorre un campione di riferimento, in questo caso un regolo da confrontare con la dimensione dei segmenti. Immaginiamo, per esempio, di avere una riga lunga esattamente dieci centimetri, e di farvi un segno a distanza, mettiamo, di quattro centimetri e mezzo da un'estremità, dividendola così in due parti diseguali. I Greci ne avrebbero determinato il rapporto dividendole a loro volta in tratti più piccoli tramite un regolo campione lungo, per dire, mezzo centimetro; in questo modo il regolo sta 9 volte nell'una e 11 volte nell'altra, e il rapporto è dunque 9/11.

Perché – come si auguravano i pitagorici – i rapporti reggano ogni aspetto dell'Universo, occorre che qualunque cosa vi abbia un senso sia riferibile alla sua brava, chiara proporzione – e sia quindi «razionale», alla lettera. Per la precisione, i rapporti in questione devono potersi scrivere nella forma *a/b*, dove *a* e *b* sono numeri cardinali, quei bei numeri precisi e definiti che conteggiano gli elementi di un insieme, come 1, 2 o 47 (i matematici si affrettano a segnalare che *b* non può essere uguale a zero, perché ciò comporterebbe una divisione che, come sappiamo, avrebbe esito rovinoso). Ma va da sé che l'Universo si guarda bene dall'essere tanto pulitamente ordinato, e viceversa contiene quantità che non possono essere espresse da una semplice frazione, o «ragione», *a/b*. Codesti numeri «irrazionali» erano inevitabile conseguenza della matematica greca.

Il quadrato è una figura geometrica elementare, in quanto tale debitamente onorata dai pitagorici (ha quattro lati, corrispondenti ai quattro elementi, e simbolizza la perfezione numerica). Ma in quella semplicità si acquatta l'irrazionale, che emerge non appena, da un angolo a quello opposto, si traccia la diagonale. Per fare un esempio concreto, immaginiamo un quadrato di dieci centimetri di lato, disegnamone la diagonale, e – da bravi greci maniaci dei rapporti – osserviamo l'uno e l'altra e domandiamoci quanto valga il loro quoziente.

Di nuovo, la prima cosa da fare è munirsi di un regolo campione, per esempio lo stesso di prima, lungo mezzo centimetro. Poi bisogna impiegarlo per suddividere i due segmenti in parti uguali, e con il lato di 10 centimetri non abbiamo difficoltà: il regolo da mezzo centimetro vi è contenuto esattamente 20 volte. Ma che accade quando proviamo a misurare allo stesso modo la diagonale? I tratti di lunghezza uguale al regolo sono 28, ma… ne avanza un poco, il vertice del quadrato si trova appena oltre l'estremità del 28° tratto. Fortunatamente possiamo fare meglio. Proviamo a ripartire i due segmenti in tratti più piccoli, usando, per esempio, un regolo non da 5 ma da 2 millimetri. Questa volta il lato risulta suddiviso, sempre esattamente, in 50 parti, mentre nella diagonale il regolo sta più di 70 ma meno di 71 volte: ancora una volta la misura non è precisa. E se ricorressimo a delle suddivisioni non piccole ma veramente minuscole, da un milionesimo di centimetro? Così facendo il lato del quadrato viene diviso in 10 milioni di parti, e la diagonale in 14 142 135 più un'inezia: il nostro regolo continua a non coincidere perfettamente con entrambi, e non solo, ma indipendentemente da come lo scegliamo la misurazione sembra non riuscire mai esatta.

Di fatto, per microscopiche che siano le suddivisioni, non è possibile trovare un campione che consenta la misura precisa sia del lato sia della diagonale: le due lunghezze sono «incommensurabili». Ma, in mancanza di un riferimento comune, è pure impossibile esprimerle in forma frazionaria finita, il che significa che, dato un quadrato di lato unitario, non esistono quei due numeri cardinali *a* e *b* il cui rapporto *a/b* eguagli la lunghezza della diagonale. In altre parole, la misura della diagonale di quel quadrato è data da un numero «irrazionale», quello che identifichiamo modernamente nella radice quadrata di due.

Per l'ideologia pitagorica era un duro colpo. Come poteva la natura essere fondata sui rapporti e le proporzioni quando un'entità elementare come il quadrato già bastava a scombinare il loro linguaggio? Ma, anche se difficile da accettare, si trattava di un fatto inconfutabile, diretta conseguenza dei teoremi tanto amati dai membri della setta. Una delle prime dimostrazioni geometriche della storia fu proprio quella dell'incommensurabilità (o irrazionalità) della diagonale rispetto al lato del quadrato.

Non solo l'irrazionalità era pericolosa in quanto minava le basi di quell'universo fatto di ragioni come concepito dai pitagorici, ma alla beffa si aggiunse lo scherno non appena la confraternita si rese conto che perfino il numero aureo, simbolo eletto di bellezza e raziocinio, era… irrazionale. Per impedire a queste ributtevoli quantità di fare scempio della propria dottrina, l'accolita le occultò. Già alquanto abbottonato in partenza – agli adepti era perfino proibito di prendere note scritte –, l'ordine pitagorico adottò così l'incommensurabilità della radice di due come il proprio più recondito e inconfessabile segreto.

A differenza, però, dello zero, i numeri irrazionali non potevano essere ignorati tanto facilmente. Essi spuntano da ogni parte in ogni sorta di costruzione geometrica, e passarli sotto silenzio, per di più con gente come i Greci, patiti per la geometria e i rapporti, era veramente un'impresa. Prima o poi qualcuno avrebbe inevitabilmente vuotato il sacco, e quel qualcuno fu Ippaso di Metaponto, un matematico membro del sodalizio: il segreto degli irrazionali sarebbe stato la sua rovina.

La leggenda è in proposito assai nebulosa, e comporta versioni contrastanti di come si consumassero tradimento e fato in Ippaso. I matematici parlano ancora oggi dello sventurato che svelò al mondo il segreto degli irrazionali; alcuni narrano che Pitagora lo annegasse facendolo gettare fuori bordo – meritato castigo per avere guastato una bella teoria con l'ostinata realtà dei fatti. Antiche fonti dicono che perisse in mare a cagione della propria empietà, ovvero che venisse cacciato dalla confraternita, la quale gli costruì pure la tomba per aggiuntivamente espellerlo dal consorzio umano. Ma quale che fosse il suo destino, restano pochi dubbi che Ippaso divenisse il vituperio degli stessi confratelli. La divulgazione scosse alle fondamenta la scuola pitagorica, ma, pretendendo che le inquietanti grandezze costituissero un'anomalia, essa poté fare argine e serbare incontaminata la propria visione dell'Universo, mentre, con l'andare del tempo, i riluttanti Greci finirono per ammettere nel dominio dei numeri anche gli irrazionali. Quanto a Pitagora, non furono le odiate quantità ad averne ragione, furono piuttosto i fagioli.

Se sono vaghe le leggende sull'uccisione di Ippaso, non è meno incerto ciò che si sa sulla fine di Pitagora, anche se pare assodato che avvenisse in ogni caso in maniera singolare. Dicono alcune fonti che il grande geometra si lasciasse morire d'inedia, ma le versioni più comuni additano nelle leguminose la cagione della sua perdita. Stando a una di quelle, i suoi avversari (irati per non essere stati ritenuti degni di ammissione alla presenza del maestro) gli misero a fuoco la casa, e quando i discepoli cercarono scampo con un fuggifuggi in tutte le direzioni, la turba scatenata prese a linciarli uno dopo l'altro. Mentre la confraternita veniva così liquidata, anche Pitagora cercò di salvare la vita, e gli sarebbe forse riuscito di scamparla se la fuga non l'avesse condotto dritto a un campo di fagioli. Lì egli si arrestò dichiarando di preferire la morte all'attraversamento dell'ingrato coltivo; nel tagliargli la gola, gli inseguitori lo accontentarono volentieri.

La scuola dispersa e lo scolarca defunto, il nucleo dell'insegnamento pitagorico tuttavia non scomparve; al contrario, esso doveva divenire il fondamento dello schema di pensiero che maggiormente avrebbe influenzato storia e società occidentali: la filosofia aristotelica, destinata a rimanere in auge per due millenni. Lo zero non poteva non entrare in conflitto con quella dottrina, ma, a differenza degli irrazionali, poteva venire ignorato. L'ellenica corrispondenza tra numeri e forme lo consentiva agevolmente: non possedendo forma, lo zero non era un numero.

Ma, nonostante questo, non fu il sistema greco di numerazione a impedire l'accettazione dello zero, né fu la mancanza di cognizioni. I Greci erano, infatti, venuti a conoscenza dello zero a causa del forte interesse per il cielo notturno, essendo, come la gran parte dei popoli antichi, grandi osservatori celesti. Ma in campo astronomico gli incontrastati maestri erano i Babilonesi, che avevano imparato a predire le eclissi e dai quali – forse indirettamente attraverso gli Egizi – Talete, il primo astronomo greco, aveva appreso il metodo a propria volta (tant'è vero che ebbe fama di avere anticipato un'eclissi solare, nel 585 a. C.).

Al seguito della scienza astronomica babilonese vennero i numeri di quella civiltà, cosicché ai fini astronomici i Greci adottarono il sistema sessagesimale, anche suddividendo le ore in 60 minuti e i minuti in 60 secondi, e quando, attorno al 500 a. C., lo zero iniziò a comparire negli scritti cuneiformi in funzione di segnaposto, fu naturale che di lì si diffondesse nella loro comunità astronomica. Nel periodo di massimo sviluppo dell'astronomia antica le tavole greche delle posizioni celesti facevano uso regolare dello zero, il cui simbolo era la lettera omicron minuscola, o, che graficamente assomiglia molto alla corrispondente cifra moderna, ma probabilmente per semplice coincidenza (forse la omicron era stata adottata in quanto iniziale della parola *οὐδέν*, che significa «niente»). Ai Greci, però, lo zero non garbava affatto, ed essi lo impiegavano il meno possibile; una volta eseguiti i calcoli con la notazione sumerica, di solito si affrettavano a riconvertire i numeri secondo il loro stile di rappresentazione, macchinoso ma privo di zeri. Lo zero non riuscì mai a farsi strada nell'ambito dei numerali dell'antico Occidente, sicché è improbabile che a tenerlo a battesimo presso di noi sia stata la omicron; semplicemente, i Greci ne scorsero l'utilità per il computo astronomico, ma non per questo vollero accettarlo.

In fin dei conti, non fu l'ignoranza a indurre l'Ellade a respingere lo zero, e nemmeno le limitazioni insite nel principio delle forme-numero: furono ragioni di ordine filosofico. Lo zero si scontrava con le basilari posizioni ideologiche occidentali perché racchiudeva in sé due concetti funesti per quello schema di pensiero, quei medesimi concetti che, difatti, avrebbero portato al crollo della dottrina aristotelica dopo un lunghissimo regno. Tali insidiosissime idee erano quelle di vuoto e di infinito.

L'Infinito, il Vuoto e l'Occidente

> Sulla pulce, osservano i naturalisti, vivono pulci minuscole che la rodono, e queste son rose da altre più piccole ancora e così via *ad infinitum*.
>
> Jonathan Swift

L'infinito e il vuoto possedevano poteri terrificanti per i Greci: l'uno tramava per rendere ogni movimento impossibile, l'altro minacciava di mandare in minuti frantumi il loro Universo racchiuso in un guscio. Nel rigettare lo zero, i filosofi ellenici regalarono alla propria concezione del mondo la capacità di sopravvivere per venti secoli.

L'insegnamento pitagorico divenne il fulcro della filosofia occidentale: i rapporti controllavano ogni aspetto dell'Universo; i pianeti si muovevano incastonati nelle sfere celesti, che nel ruotare generavano musica. Ma che c'era al di là delle sfere? Forse delle altre ancora, ognuna più grande della precedente, oppure ne esisteva un'ultima esterna, come termine dell'Universo? Aristotele e altri pensatori dopo di lui avrebbero fermamente sostenuto l'impossibilità di un'illimitata *matrioska* di sfere, e nell'adottare tale concezione il mondo occidentale non avrebbe lasciato più alcuno spazio a infinito e infinità. Quei concetti furono ripudiati da cima a fondo, e a maggior ragione in quanto la loro opera di erosione alle radici del pensiero occidentale era già iniziata con Zenone di Elea, un filosofo che i contemporanei stimavano il più grande importuno da questa parte dell'Ellesponto.

Zenone era nato nel 490 a. C., all'inizio delle guerre persiane, il grande conflitto tra l'Est e l'Ovest nel corso del quale i Greci con le armi sconfissero i re Dario e Serse, anche se con la filosofia non la spuntarono mai realmente su Zenone. Infatti suo era un paradosso – un sofisma intrattabile secondo i criteri di ragionamento dei pensatori greci – che costituiva il più sconvolgente assunto dell'epoca: Zenone aveva dimostrato che l'impossibile era necessariamente vero.

Secondo la sua tesi, nessun oggetto nell'Universo era in grado di muoversi. Si tratta, naturalmente, di un'affermazione ridicola, facilmente contraddetta anche solo spostandosi da una parte all'altra della stanza; ma se pure tutti riconoscevano la proposizione come falsa, non per questo era possibile trovare il punto debole del ragionamento fatto da Zenone. L'Eleate aveva escogitato un paradosso, un funambolismo logico destinato a tenere in scacco tanto i filosofi greci che quelli che vennero dopo di loro. In effetti, questo e altri dilemmi da lui posti costituirono la bestia nera dei matematici per quasi duemila anni.

Nel suo più celebre rompicapo, «Achille e la tartaruga», l'originale pensatore dimostra che Achille piè veloce non potrà mai raggiungere una tartaruga che, se pure dal passo pesante, abbia su di lui un vantaggio iniziale. Facciamo un esempio concreto introducendo direttamente dei numeri, e immaginiamo che il famoso eroe proceda a un metro al secondo, mentre il suo antagonista arranchi solo a un mezzo di quella velocità, essendo però partito un metro avanti a lui.

Achille scatta spedito e dopo appena un secondo è già arrivato dove si trovava la tartaruga al momento del via; però nemmeno la testuggine sta ferma, e nel frattempo ha percorso mezzo metro. Poco male, Achille è più svelto e gli basta mezzo secondo per coprire quella distanza; peccato, però, che di nuovo la tartaruga si sia mossa, questa volta di un quarto di metro. In un baleno – un quarto di secondo – Achille ha recuperato, ma la tartaruga non è più lì; anche se tarda nel suo incedere, si trova ormai un ottavo di metro più oltre. Il generoso Pelide corre a perdifiato, ma il testudinato gli sfugge ogni volta, e per quanto gli si avvicini, nell'istante in cui raggiunge il punto dov'era, quello si è spostato un poco più in là. Un ottavo di metro… un sedicesimo… un trentaduesimo… un intervallo sempre più piccolo, ma Achille non riesce mai a colmare lo svantaggio, e la tartaruga rimane sempre in testa (vedi fig. 2.6).

Nel mondo reale – lo sanno tutti – Achille supererebbe in poco tempo la tartaruga, ma il ragionamento di Zenone sembra provare il contrario, e i filosofi dell'epoca non erano in grado di confutare il paradosso: benché sapessero bene che la conclusione era sbagliata, non riuscirono mai a scovare l'errore insito nella dimostrazione matematica del collega. Essi usavano principalmente le armi della logica, però le deduzioni tratte con quei mezzi nulla potevano nei confronti delle sue argomentazioni, ogni passo delle quali appariva manifestamente inossidabile. E se ogni singolo passaggio era corretto, come poteva la conclusione risultare sbagliata?

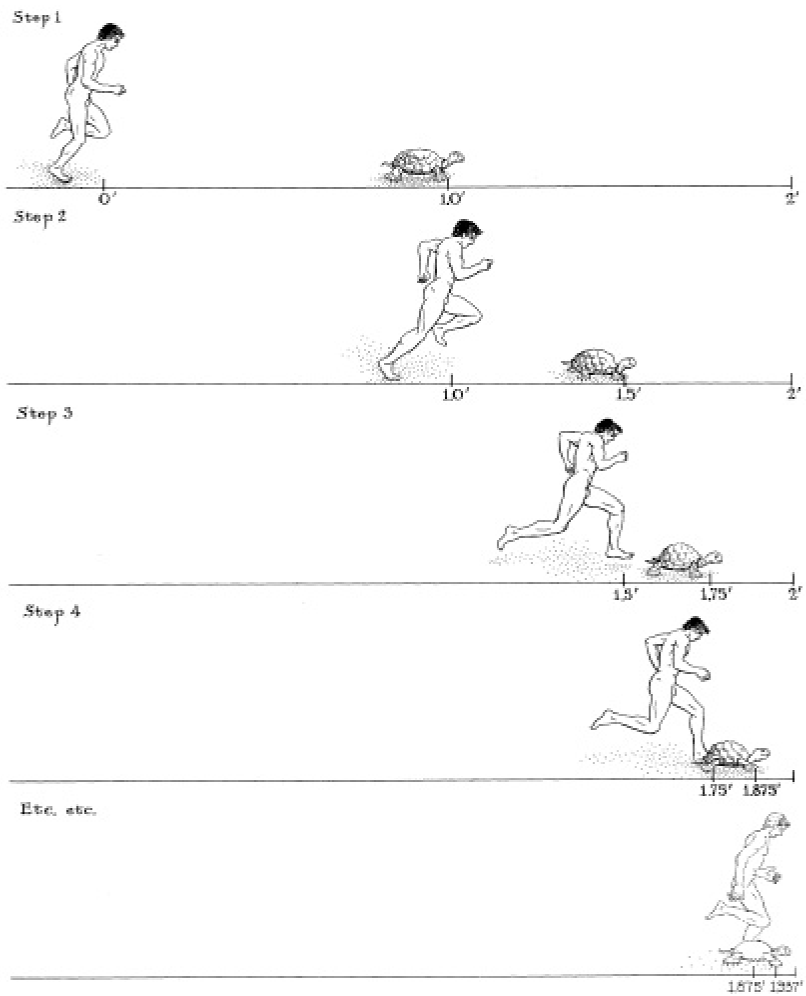


Figura 2.6
Achille e la tartaruga.

Il problema era tale da disorientare e confondere i Greci, che tuttavia identificarono nell'infinito la sorgente di tutti i guai. Al cuore del paradosso di Zenone si trova infatti quell'entità: egli aveva preso in esame il moto continuo dividendolo in un numero infinito di minuscoli intervalli, e per via di questa infinità i pensatori greci ritenevano che la gara dovesse continuare in eterno, anche se gli intervalli (come i tempi di percorrenza) divenivano progressivamente più piccoli. La corsa non poteva terminare in un periodo finito di tempo, o così almeno credevano. A differenza dei matematici moderni, che hanno imparato a manipolarlo, gli antichi non erano tecnicamente equipaggiati per trattare con l’infinito. Benché a esso ci si debba accostare con grande cautela, è tuttavia possibile ridurlo alla ragione… con l’aiuto dello zero. Per noi, forti di un corso integrativo in matematica durato 2400 anni, non è difficile guardare indietro e individuare il tallone dell’Achille zenonico.

I Greci non disponevano dello zero, ma noi sì, ed è esattamente questa la chiave del dilemma: qualche volta l’addizione di infiniti addendi dà un risultato finito, ma perché questo accada bisogna che i termini sommati tendano a zero,[4] e con Achille e la sua tartaruga la situazione è proprio questa. Nel sommare le distanze successivamente coperte dal corridore, si parte con 1 e si continua con 1/2, 1/4, 1/8 e così di seguito, con quantità progressivamente più piccole e sempre più prossime a zero; ogni addendo della somma è simile a un passo di un viaggio con destinazione zero. Sfortunatamente, i Greci avevano messo quel numero al bando, e non sapevano così capacitarsi che quel viaggio potesse avere una fine; per loro le quantità 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ecc. non tendevano ad alcunché: la destinazione non esisteva. Viceversa, semplicemente le vedevano rimpicciolire sempre più e aggirarsi al confine del dominio dei numeri fino svanire.

I matematici contemporanei sanno che tutti quei termini possiedono un «limite»; e il limite cui tendono i numeri 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ecc. è per l’appunto zero. Il viaggio ha quindi una destinazione, e una volta che sia così è immediato chiedersi quanto essa sia distante e quanto tempo occorra per raggiungerla. Ottenere la somma delle distanze percorse da Achille non è tanto difficile; la somma è $1 + (1/2)^1 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + (1/2)^4 + \ldots + (1/2)^n$ e allo stesso modo in cui le falcate di Achille si riducono in ampiezza e approssimano sempre più la lunghezza zero, la loro somma approssima il valore 2. Come lo sappiamo? Be’, basta procedere al contrario, partendo da 2 e sottraendovi uno dopo l’altro i termini della somma. Cominciamo da 2 −

1, che naturalmente fa 1; quindi togliamo 1/2, lasciando 1/2; e ancora il termine successivo, 1/4, dopo di che rimane 1/4; poi togliamo 1/8, e resta 1/8: riconosciamo ormai nel risultato della sottrazione la nostra familiare successione 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,... che sappiamo avere per limite zero, il che equivale a dire che se da 2 si sottraggono i termini della successione non rimane nulla, e quindi che il limite della somma 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... è uguale a 2 (vedi fig. 2.7). Ad Achille bastano dunque 2 metri per raggiungere la tartaruga, anche se per farlo gli occorrono un numero infinito di falcate. Ma c'è di più: siccome egli corre a un metro al secondo, il tempo che impiega è numericamente pari alla somma in metri degli intervalli di distanza successivamente coperti, dunque ancora 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = 2 secondi. Non solamente Achille deve compiere infinite falcate per coprire la distanza finita di due metri, ma per farlo non gli servono più di due secondi.

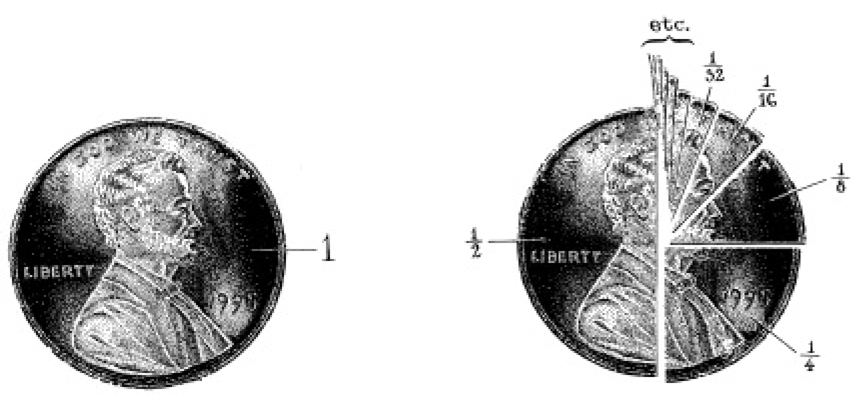


Figura 2.7
1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = 2.

Siccome non possedevano il concetto di limite, i Greci non avevano modo di applicare l'elegante, piccolo artificio matematico, e il concetto mancava loro perché non credevano nello zero come numero. Ai loro occhi, gli elementi dell'illimitata successione mancavano di un valore terminale o di una destinazione, bensì apparivano via via ridursi senza un particolare punto di arrivo. Di conseguenza, i Greci non erano in grado di manipolare l'infinito. Avevano meditato e rimeditato sul concetto di vuoto pure rifiutando allo zero la qualità di numero, e avevano cincischiato con il concetto di infinito senza ammettere l'infinità – ovvero una quantità grande o piccola a piacere – nemmeno nell'anticamera del regno dei numeri. Fu questo il principale insuccesso della matematica ellenica, e fu per questo solo motivo che le sfuggì la scoperta dell'analisi infinitesimale.

Infinito, zero e l'idea di limite sono strettamente interconnessi, i logici greci non avevano modo di dipanarne l'intreccio, e dunque mancavano della dotazione concettuale necessaria a risolvere il problema di Zenone. Eppure, quel paradosso era talmente pervasivo che essi seguitarono nel tempo a cercare di dare una spiegazione degli infiniti e infinitesimi che vi comparivano; ma, privi com'erano degli strumenti adeguati, i loro sforzi erano condannati in partenza al fallimento.

Lo stesso Zenone non aveva alcuna pertinente soluzione da offrire, e si guardava bene dal cercarla. Come appartenente alla scuola eleatica – il cui fondatore, Parmenide, teneva per certa la natura immobile e immutabile dell'essere –, la sua linea di pensiero trovava nel busillis una perfetta aderenza. Anzi, sembra che egli escogitasse le proprie argomentazioni proprio per portare acqua al mulino parmenideo, e nel mostrare la contradditorietà di moto e cambiamento intendeva persuadere del fatto che tutte le cose al mondo fossero in realtà un *unicum* indifferenziato e sempre uguale a se stesso. Zenone credeva effettivamente che il movimento fosse illusorio, e sosteneva la propria teoria principalmente attraverso i celebri paradossi.[5]

Ma non mancavano altre scuole. Gli atomisti, per esempio, ritenevano che l'universo fosse costituito da microscopiche particelle dette atomi, indivisibili e indistruttibili. A loro modo di vedere, ogni movimento era prodotto dal moto di tali particelle, ma perché il moto fosse possibile occorreva la presenza di uno spazio vuoto all'intorno, entro cui quelle potessero migrare. Dopotutto, i minuscoli atomi dovevano pure spostarsi in qualche maniera: in mancanza, infatti, di alcunché di assimilabile al vuoto pneumatico, essi avrebbero fatto corpo unico costantemente addossati uno all'altro, e ogni cosa sarebbe rimasta bloccata nella propria posizione per l'eternità, intrinsecamente incapace di muoversi. La teoria atomistica postulava così un Universo colmo di niente, un nulla infinito, e questa fu effettivamente la concezione sposata dagli atomisti – lo zero e l'infinito abbinati in confezione unica. Benché la conclusione fosse piuttosto sconvolgente, la presenza dei nuclei indivisibili di materia pura aveva il pregio di aggirare la problematica sollevata dai paradossi di Zenone. Se, infatti, gli atomi non sono suddivisibili, esiste una dimensione sotto la quale non è consentito scendere, e dunque Zenone non può continuare a spaccare il capello in eterno. Coperta una sufficiente distanza, le falcate di Achille sono così piccole che non possono più dimezzarsi, e a un certo punto egli si troverà a scavalcare un atomo che la tartaruga non ha ancora superato. Ecco allora che l'elusivo battistrada sarà finalmente raggiunto.

Un'altra filosofia, in competizione con la teoria atomistica, invece di proporre concetti bizzarri quali il vuoto infinito, trasformava l'Universo in un'accogliente casa di bambola. Non esistevano né infinito né vuoto, ma più semplicemente delle sfere armoniose che circondavano la Terra, collocata naturalmente nel punto più centrale dell'Universo. Questo affermava la cosmogonia aristotelica, successivamente perfezionata dall'astronomo alessandrino Claudio Tolomeo, e il corrispondente schema filosofico divenne il riferimento dominante nell’intero Occidente. Aristotele, inoltre, con il respingere sia lo zero sia l’infinito, spiegava, liquidandoli, i paradossi eleatici.

Egli si limitò a dichiarare che i matematici «non hanno bisogno dell’infinito e non se ne servono».[6] Benché nelle loro menti possano dimorare «potenziali» infinità quali l’illimitata suddivisione in parti di un segmento, in realtà nessuno può compiere una simile operazione, e dunque l’infinito in attualità non esiste. Achille supera senza sforzo la tartaruga perché gli infiniti punti intermedi non sono che un parto della fantasia di Zenone, e non certamente un costrutto del mondo reale. Lo Stagirita esorcizzava così l’infinità semplicemente dichiarandola un artefatto della mente umana.[7]

Questa concezione porta a una rivelazione sorprendente, conseguenza della derivazione pitagorica dell’Universo aristotelico, il quale (più tardi perfezionato da Tolomeo) considerava i pianeti in moto al seguito della rotazione di sfere cristalline. Siccome non esiste l’infinito, le sfere dovevano essere in numero limitato. Una di esse, l’ultima e più esterna, era un globo blu notte incrostato di minuscoli punti di viva luce: le stelle; qui il cosmo aveva fine d’un tratto, e l’idea dell’«oltre» questa cerchia estrema era senza significato. L’Universo era dunque tutto contenuto in un guscio, comodamente alloggiato entro la sfera delle stelle fisse, era finito in estensione e completamente saturo di materia. Non esisteva né l’infinito né il vuoto; non esisteva alcuna infinità, non esisteva lo zero.

Un’altra caratteristica di questo schema di pensiero – e il motivo per cui la filosofia aristotelica dominò tanto a lungo – era il suo prestarsi a dimostrare l’esistenza di Dio.

Le sfere celesti ruotano lentamente attorno al loro immobile centro comune e soffondono il cosmo della loro musica. Tuttavia la rotazione deve avere una causa, e l’energia motoria non può provenire dalla Terra, di per sé stazionaria. Occorre, dunque, che la sfera più interna sia trascinata da quella immediatamente successiva, la quale sia mossa, a sua volta, dalla sorella maggiore, e così di seguito. Però, se non esistono infinità, le sfere sono in numero finito e così pure gli oggetti che l'uno con l'altro si pongono in movimento, la cui causa ultima, il motore che agisce sul cielo delle stelle fisse, va ricercata altrove. Ed è questo il Primo Mobile, Dio. Il cristianesimo dilagante in Occidente stabilì una stretta associazione con la visione aristotelica dell'Universo e la prova dell'esistenza di Dio; l'atomismo divenne sinonimo di ateismo, mentre l'avanzare riserve sul verbo filosofico imperante equivaleva a porre in dubbio l'Essere supremo.

Il sistema aristotelico ebbe straordinario successo, e il più celebre peripatetico, Alessandro il Grande, lo diffuse nell'Oriente fino in India prima della sua morte, avvenuta prematuramente nel 323 a. C. Ma la dottrina di Aristotele doveva sopravvivere alla caduta dell'Impero alessandrino, e in effetti restò in auge per tutto il XVI secolo, fino alla Controriforma. Un'accettazione di così lunga durata radicò il rifiuto dell'infinito, al quale tenne dietro, come conseguenza della negazione aristotelica dell'infinito, anche il rigetto del vuoto, poiché dall'esistenza del secondo discenderebbe quella del primo. A ben vedere, si presentavano infatti due sole possibilità logiche riguardanti la natura del vuoto, entrambe implicanti la realtà dell'infinito: o il vuoto è in quantità infinita, ed ecco subito presentarsi un'istanza di infinità; oppure il vuoto è in quantità finita, e allora, altro non essendo il vuoto che l'assenza di materia, per consentire tale sua limitatezza, di materia ne deve esistere un'infinità. Nell'uno e nell'altro caso, ammettere il vuoto comporta la necessità dell'infinito. Il vuoto, ovvero lo zero, demolisce il limpido argomentare di Aristotele, la sua confutazione di Zenone, la sua prova dell'esistenza di Dio. Cosicché le proposizioni del grande allievo di Platone vennero accolte, e i Greci furono costretti a ripudiare zero, vuoto, infinito e infinità.

Ma un problema rimaneva: ricusare tanto l'infinito che lo zero è tutt'altro che facile. Basta guardare indietro nel tempo per riconoscere che vari avvenimenti si sono succeduti lungo il corso della storia, ma se non può esistere alcuna infinità essi devono essere in numero finito, e di conseguenza uno deve essere stato il primo di tutti: la creazione. E prima ancora che cosa esisteva? Non evidentemente il vuoto, inammissibile per assunto; però, in mancanza di un evento iniziale, torniamo a dovere ammettere un Universo esistente da sempre e che sempre esisterà. O si accetta l'infinità o si accetta lo zero: un Universo privo di entrambi è senza significato.

Lo Stagirita odiava talmente l'idea del vuoto che, piuttosto che introdurlo nel proprio Universo, preferì rendere quest'ultimo eterno e infinito, per poi sostenere che l'eternità temporale fosse un'infinità solo «potenziale», analoga alle infinite suddivisioni del paradosso di Zenone. (Una vera e propria forzatura che tanti studiosi presero però per buona, alcuni eleggendo addirittura la faccenda della creazione a prova ulteriore dell'esistenza di Dio. In ogni caso, i filosofi e teologi medioevali venivano da quel momento avviati a secoli e secoli di contese attorno a questo rebus.)

Per quanto completamente errata, la visione aristotelica della realtà fisica ebbe un'influenza così profonda da eclissare per oltre un millennio ogni impostazione contrastante, comprese le teorie più realistiche. Il progresso scientifico doveva rimanere al palo fino a che non ci si decise a mettere Aristotele in soffitta, desistendo allo stesso tempo dalla ripulsa delle infinità di Zenone.

Quanto a costui, con tutto il proprio acume riuscì ugualmente a cacciarsi in grossi guai, nel cospirare, attorno al 435 a.C., per abbattere Nearco, tiranno di Elea. A sostegno della causa Zenone faceva entrare nascostamente delle armi in città, ma Nearco venne a conoscenza del complotto e fece arrestare e sottoporre a tortura il filosofo, nell'intento di estorcergli i nomi dei congiurati. In breve questi invocò la cessazione dei tormenti indicando che avrebbe parlato, e, come il tiranno si fece avanti, insistette perché gli si accostasse maggiormente in modo che quanto aveva da dire restasse tra loro due. Nearco si protese inclinando il capo verso Zenone, che prontamente gli azzannò l'orecchio mantenendo salda la presa, nonostante le grida dell'inopinata vittima, e che solo trafitto a morte poté essere indotto a rilasciarla. Fu questa la fine del caposcuola dell'infinito.

Occorse molto tempo prima che qualcuno sopravanzasse l'Eleate in questioni riguardanti l'infinito, e fu costui Archimede, l'eccentrico matematico siracusano; tra i contemporanei, fu l'unico che pervenne a gettarvi uno sguardo.

Siracusa era la città più ricca della Sicilia, e Archimede ne era il più famoso abitante. Non molto si conosce della sua giovinezza, se non – forse – che nacque circa nel 287 a. C. a Samo, la stessa isola che aveva dato i natali a Pitagora. In seguito si trasferì a Siracusa, dove risolse alcuni problemi di ingegneria per il tiranno Gerone, il quale gli chiese anche di stabilire se la sua corona fosse fusa in oro puro o legato con piombo, compito che superava le capacità dei sapienti dell'epoca. Archimede ne trovò la soluzione durante il bagno, osservando che, nell'immergersi nell'acqua della vasca, questa ne traboccava, e realizzando così la possibilità di determinare il volume, e di lì la densità, del regale manufatto immergendolo a sua volta e misurando il volume dell'acqua spostata. Nell'euforia della scoperta balzò dal lavacro e prese a correre per le vie della città al grido di «*Εὕρηκα! Εὕρηκα!*» («Ho trovato!»), naturalmente dimentico di essere in costume adamitico.

L’ingegno di Archimede ebbe anche importanti applicazioni militari. Nel III secolo a. C. il periodo dell’egemonia ellenica era oramai giunto al termine; l’impero di Alessandro si era frantumato in satrapie costantemente ai ferri corti fra loro, e, a ovest, una nuova potenza mostrava i muscoli: Roma, che aveva per l’appunto indirizzato le proprie mire su Siracusa. Racconta la leggenda come il grande matematico e ingegnere fornisse ai concittadini armi prodigiose a difesa della città contro i Romani: catapulte che lanciavano pietre; gru gigantesche in grado di afferrare le galere nemiche, sollevarle e farle ricadere in acqua di prua; grandi specchi riflettori di fattura così perfetta che, concentrando sulle navi i raggi solari, riuscivano a incendiarle da grande distanza. Queste macchine da guerra spaventavano i soldati romani al punto da metterli in fuga alla semplice vista di un legno o di un canapo che sporgessero dalle mura, nel timore di essere presi di mira da un qualche marchingegno straordinario e letale.

Archimede intravide per la prima volta l’infinito nella politura dei propri specchi ustori. I Greci erano da secoli affascinati dalle sezioni coniche, ottenute dall’intersezione di un cono con un piano e risultanti in circonferenze, ellissi, parabole, iperboli, a seconda della reciproca inclinazione delle due figure geometriche. Tra tutte queste sezioni, la parabola gode di una proprietà particolare: uno dei suoi due fuochi è il punto all’infinito del suo asse. Di conseguenza, una superficie riflettente a forma di segmento di paraboloide (ottenuto dalla parabola per rotazione attorno all’asse medesimo) farà convergere nel punto corrispondente all’altro fuoco i raggi luminosi provenienti da una sorgente molto distante, come per esempio il Sole. Nella pratica, l’energia radiante che ne investe la sezione trasversale verrà concentrata entro un’area assai più ristretta, situata tanto più lontano quant’è minore la curvatura della superficie, cosicché, per mettere a fuoco (alla lettera) una trireme, occorre uno specchio parabolico. Archimede studiò le proprietà della curva generatrice di quello, e fu lì che prese contatto con l'infinito.

Per comprendere la parabola gli era indispensabile imparare a misurarla, mentre nessuno sapeva allora come calcolare, per esempio, l'area del segmento di quella curva. Triangoli e circonferenze erano facilmente trattabili, mentre figure poco meno regolari o simmetriche, come appunto la parabola, andavano oltre le possibilità dei matematici greci dell'epoca. Ciò nonostante Archimede trovò il modo di risolvere il problema – con il ricorso all'infinito. Il primo passo del procedimento consisteva nell'inscrivere un triangolo entro il segmento parabolico; nei due interstizi restanti egli inscrisse altrettanti triangoli; nei quattro interstizi risultanti altri triangoli ancora, e così via (vedi fig. 2.8). La situazione è analoga a quella di Achille alle prese con la tartaruga: una successione illimitata di passi ognuno più piccolo del precedente e con l'area dei triangoli «di riempimento» che converge rapidamente a zero. Dopo un'involuta lunga serie di calcoli, dalla somma delle aree così trovate il grande geometra antivide l'area della parabola. Ma qualunque matematico del suo tempo avrebbe irriso a un tale ragionamento, che impiegava quegli strumenti basati sull'infinito, tanto esplicitamente al bando della comunità scientifica. Allo scopo di tacitare i colleghi, Archimede produsse allora una prova ulteriore, fondata su princìpi per allora ortodossi, e che impiegava l'«assioma di Archimede», cosiddetto nonostante che egli stesso ne attribuisse il merito ad autori precedenti. (Come già accennato, esso afferma che il valore ottenuto addizionando ripetutamente qualunque numero a se medesimo è potenzialmente maggiore di ogni quantità arbitrariamente grande prefissata. Lo zero, molto evidentemente, non è preso in considerazione.)

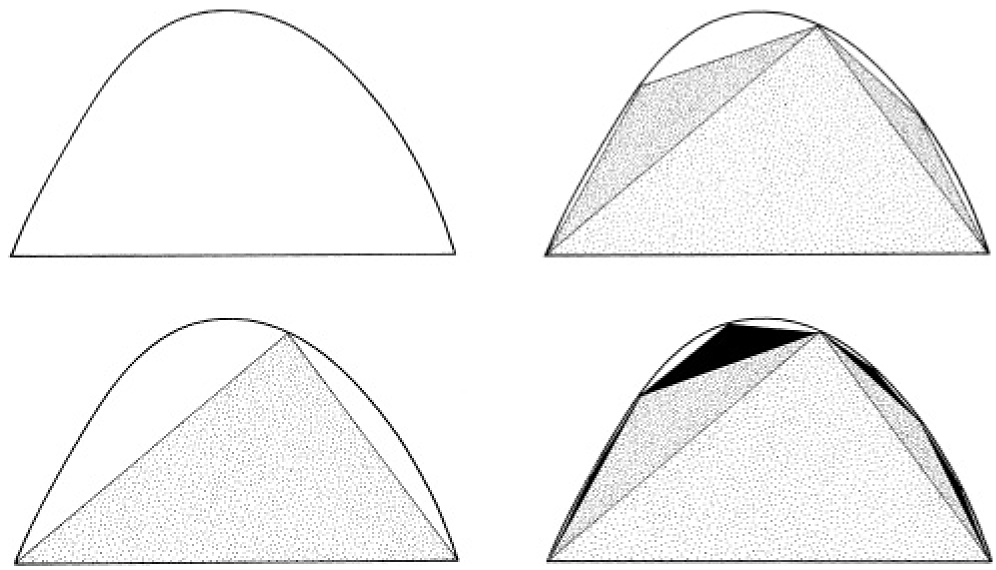


Figura 2.8
La parabola di Archimede.

Il metodo del siracusano, basato sui triangoli, si spingeva per quanto possibile alle soglie del concetto di limite (e del calcolo infinitesimale), senza arrivare a farne la vera e propria scoperta. In alcune successive opere del maestro veniva risolto il problema della determinazione del volume dei solidi di rotazione a sezione parabolica e circolare, problema che gli studenti di matematica ritrovano oggi proprio nei primi esercizi del corso di analisi; tuttavia l’assioma di Archimede non contemplava lo zero, concetto che fa da ponte tra i domini del finito e dell’infinito e che è assolutamente necessario per l’analisi infinitesimale e la matematica avanzata.

Nonostante il proprio grande talento, anche Archimede si univa alle volte ai contemporanei nello sdegnare l’infinito. Egli credeva nell’Universo come concepito da Aristotele, ossia tutto quanto contenuto in un’enorme sfera. D’impulso, decise di determinare quanti granelli di sabbia potessero trovarvi posto, e, nell’*Arenario*, iniziò con il calcolare quanti ve ne fossero da un’estremità all’altra di un seme di papavero, poi quanti nella larghezza di un dito, di lì ne trovò il numero occorrente a coprire uno stadio (l’unità ellenica di riferimento per le lunghe distanze), per giungere infine alla dimensione dell’Universo. La quantità da lui stimata necessaria a colmare fino all’orlo tutto il volume di un «Universo» di diametro medio proporzionale tra il diametro della Terra e quello dell’estrema sfera delle stelle fisse fu di 10^{51} granelli di sabbia; un numero veramente molto, molto grande. Per fare un esempio, occorrerebbero 150 000 anni perché tutti gli uomini, donne e bambini viventi, bevendo acqua al ritmo di mille litri al secondo, esaurissero la quantità corrispondente a 10^{51} molecole di H_2O. Il numero era così elevato da risultare ingestibile da parte del sistema greco di numerazione, cosicché Archimede dovette inventare un sistema interamente nuovo in grado di rappresentare i grandissimi numeri.

Il più grande numero connotabile individualmente nella notazione ellenica era la miriade, e contando per miriadi i Greci potevano arrivare al massimo a una miriade di miriadi (100 000 000) o poco più oltre. Per superare questa limitazione il Nostro pigiò il pulsante di *reset*, e molto semplicemente ricominciò da capo, ponendo 100 000 000 («ottade», nella denominazione archimedea) uguale a uno, riprendendo a contare da lì, e qualificando «del secondo ordine» i nuovi numeri. (Si noti che, a differenza di quanto avrebbe fatto un matematico moderno, egli non pose 100 000 001 pari a uno e 100 000 000 pari a zero; non gli venne mai in mente che ripartire da zero sarebbe stato assai più sensato.) I numeri del secondo ordine andavano da una miriade di miriadi a una miriade di miriadi di miriadi di miriadi, quelli del terzo ordine giungevano a una miriade di miriadi di miriadi di miriadi di miriadi di miriadi (1 000 000 000 000 000 000 000 000, o 10^{24}) e avanti di questo passo, fino a raggiungere il miriade di miriadi-esimo ordine, i cui numeri (fino a $10^{800\ 000\ 000}$) erano detti «del primo periodo».[8] Era un modo di operare alquanto macchinoso, che aveva però il pregio di dare risultati, anche se arrivava molto più in là di quanto bastasse ad Archimede per portare a termine il proprio esperimento concettuale. Ma, per quanto grandi e bastevoli a fare traboccare di sabbia l'intero Universo, anche questi erano numeri finiti – ancora una volta, il mondo ellenico non avvertiva necessità dell'infinito.

Se avesse avuto altro tempo gli si sarebbero forse palesate le lusinghe dell'infinito, ma il valente computista di spiagge e deserti era destinato a incontrare il proprio destino mentre precisamente eseguiva calcoli nella rena. Siracusa non era in grado di resistere alla forza dei Romani, i quali, approfittando di una torre di guardia scarsamente presidiata e di una muraglia agevolmente scalabile, riuscirono a fare entrare dei soldati in città. Presi dal panico al rendersi conto che gli assedianti erano penetrati entro le mura, i siracusani non organizzarono alcuna difesa e i Romani si riversarono allora in massa per le strade. Sordo al tumulto che infuriava all'intorno, Archimede sedeva per terra tracciando circonferenze nella sabbia, intento a ricercare la prova di un qualche teorema. Avendolo scorto, un soldato invasore non ravvisò nell'inzaccherato settantacinquenne il celebre scienziato e gli intimò di seguirlo, ma, non essendo completa la dimostrazione matematica, ne ricevette un rifiuto e, furente, replicò colpendolo a morte. Fu questa la fine del più grande ingegno del mondo antico, gratuitamente trucidato dai Romani.

L'uccisione di Archimede costituì uno dei più eminenti contributi offerti alle matematiche dalla civiltà di Roma, che durò ancora sette secoli senza che si registrassero significativi avanzamenti in quel campo. La Storia seguitò oltre: il cristianesimo si diffuse a macchia d'olio in Europa, crollò l'Impero romano, arse la biblioteca di Alessandria, iniziarono i Secoli Bui; sarebbero occorsi altri settecento anni prima che lo zero ricomparisse in Occidente. E nel frattempo due monaci crearono un calendario privo di zeri, consegnandoci a una confusione che dura tutt'oggi.

Date allo sbaraglio

> È argomentare stolido e infantile, che solamente la dissennatezza disvela di que' che opinano diversamente da quanto già ebbimo a statuire.
>
> «The Times» (London), 26 dicembre 1799

Codesto «argomentare stolido e infantile» (se il nuovo secolo inizi con l'anno – 00 o con l'anno – 01) riemerge con puntualità cronometrica a intervalli di cento anni; ma, se soltanto i conventuali del Medioevo avessero conosciuto lo zero, il nostro calendario non si troverebbe in un tale imbroglio.

Non sarebbe onesto dare la croce addosso ai monaci cristiani per via della loro ignoranza. Nei fatti, durante il Medioevo gli unici in Europa a studiare matematica erano proprio loro, i soli eruditi rimasti. Nei conventi la matematica serviva per due cose: le preghiere e il denaro. Per contare soldi bisognava sapere – per l'appunto – contare, e a quello scopo veniva usato l'abaco o una tavola per i conteggi (un dispositivo, simile al pallottoliere, dove sassolini o altri contrassegni erano mobili su un piano orizzontale); non era un compito particolarmente impegnativo, ma con il metro di allora risultava pur sempre tecnologia avanzata. Per pregare, ai cenobiti occorreva conoscere data e ora del dì, e di conseguenza la misura del tempo era essenziale per la liturgia religiosa. Giorno dopo giorno le varie devozioni dovevano recitarsi in momenti determinati (tanto che le ore canoniche, da mattutino a compieta, scandivano la giornata anche fuori dal monastero), e senza un conto esatto del tempo come avrebbe saputo il guardiano di notte quando riscuotere i confratelli dai confortevoli pagliericci per dare inizio all’ufficio divino? E in mancanza di un calendario abbastanza preciso, come sapere quando celebrare la Pasqua? Era quest’ultimo un serio problema, poiché, grazie a un conflitto di calendari, il relativo calcolo non era impresa di poco conto. Essendo Roma la sede della Chiesa, il mondo cristiano impiegava il calendario solare romano, il cui anno era di 365 giorni (più un tot), a differenza del calendario ebraico, che era lunare e con un anno di soli 354 giorni (più un tot). Gesù era giudeo, e quindi accadeva che, mentre le date dell’esistenza quotidiana erano determinate in base al Sole, i principali avvenimenti della vita del Cristo fossero riferiti alla Luna. I due sistemi di computo del tempo erano sfalsati in maniera variabile, rendendo assai difficile stabilire quando cadessero le festività religiose. Pasqua era (ed è) un esempio di codeste ricorrenze mobili, cosicché ogni qualche generazione si assegnava a un monaco il compito di calcolarne la data per alcuni secoli a venire.

Dionigi detto il Piccolo (*Dionysius Exiguus*) era uno di questi: nel sesto secolo, papa Giovanni I l’incaricò di compilare l’estensione delle tavole della Pasqua. *A latere* del proprio lavoro di trasposizione e ricalcolo, il religioso compì qualche ricerca per conto proprio che lo mise in grado di determinare l’anno del primo Natale, e in seguito a cui, fatti un po’ di conti, stabilì che l’anno allora in corso era il 525-esimo dalla nascita di Cristo. Dionigi decise anche di battezzare l’anno di quell’evento *Anno Domini I*, ovvero primo anno di Nostro Signore (tecnicamente, pure affermando che la natività risaliva al precedente 25 dicembre, egli fece iniziare il calendario il 1° gennaio, in modo da allinearsi al calendario romano). Venivano poi il 2 d. C. (o a. D.), il 3 d. C. e così via, sostituendo i due metodi più comunemente in uso.[9] Ma c’era un «ma», o piuttosto due.

In primo luogo, il Piccolo si era sbagliato nel calcolare la data della nascita di Gesù. Le fonti concordano sulla fuga di Maria e Giuseppe dalla ferocia di Erode (che aveva udito una profezia riguardante il nascituro Messia), ma la morte del re di Galilea avvenne non oltre il 3 a. C., alcuni anni prima dell'asserita natività. Oggi gli studiosi ne collocano per lo più la data al 4 a. C.; Dionigi aveva preso un evidente granchio ed era andato qualche anno troppo avanti.

Tutto sommato, la svista non era poi così grave. Nel designare il riferimento iniziale di un calendario non conta tanto «quale» anno si scelga, ma piuttosto che la coerenza con quella scelta sia dipoi mantenuta; un errore di quattro o più anni non crea difficoltà se tutti quanti sono d'accordo nel commetterlo. Il vero problema era un altro, e riguardava lo zero.

Nella cronologia di Dionigi l'anno zero non esisteva. Da principio si poteva non farne gran caso; i calendari esistenti cominciavano già quasi tutti dall'anno 1 e, d'altra parte – vissuto dopo il declino dell'Impero romano e ignorando il concetto stesso di zero –, egli non poteva fare altrimenti. Già la civiltà di Roma nemmeno al proprio culmine poteva dirsi la culla delle matematiche, e nell'anno 525, alla soglia dei Secoli Bui, l'unico sistema di numerazione che circolasse in Occidente era naturalmente la contorta notazione dei Romani, ove non compariva ombra di zero. Per il nostro monaco, l'anno primo di Nostro Signore era dunque l'anno I, seguito dal II, fino al DXXV che lo vide trarre le presenti conclusioni. Nella situazione allora corrente, la nominata carenza non era suscettibile di produrre particolari complicazioni, considerando anche che il nuovo calendario non prese subito piede e che in quegli anni gli intellettuali della corte pontificia avevano ben altro di cui preoccuparsi. Morto in carcere papa Giovanni I, nel susseguente passaggio di poteri tutti quanti i filosofi e matematici come Dionigi persero uffici e prebende; anzi, furono fortunati se portarono a casa la pelle. (Non tutti la passarono così liscia, e tra questi Anicio Boezio, potente cortigiano annoverato tra i migliori matematici dell'Occidente medioevale, ciò che lo rende degno di nota. Quasi contemporaneamente al licenziamento di Dionigi, anch'egli cadde in disgrazia, venne imprigionato e poco dopo sottoposto a tormenti e finito con un bastone. Boezio non è però ricordato per gli studi di matematica, ma per il suo *De consolatione philosophiae*, un trattatello di grande affinità con l'etica cristiana, scritto durante la prigionia e in cui egli allevia le proprie cure per il tramite della filosofia aristotelica.) Sia come sia, l'innovazione giacque in disparte per lunghi anni.

L'assenza di un anno zero si fece sentire solamente dopo un paio di secoli. Nel 731 a. D., più o meno allo scadere delle tabelle pasquali calcolate da Dionigi, Beda, un benedettino originario, questa volta, dell'Inghilterra settentrionale e che di lì a poco sarebbe assurto a Venerabile, le estese di bel nuovo. Fu probabilmente per questa via che conobbe il lavoro del predecessore e, nello scrivere la sua *Historia ecclesiastica gentis Anglorum* (una storia d'Inghilterra vista attraverso la Chiesa), ne utilizzò il calendario.

Il libro fu un successo clamoroso, ma conteneva un difetto d'origine. Beda iniziò le proprie cronache dal 60 a. C., al tempo della conquista romana e, dunque, 60 anni prima dell'anno di riferimento della cronologia cristiana di Dionigi, e, desiderando mantenerla, la prolungò all'indietro. Per il futuro Venerabile, anch'egli all'oscuro del numero zero, l'anno precedente l'1 a. D. era l'1 a. C.: ancora una volta non esisteva alcun anno zero.

Sulle prime, quel modo di contare gli anni può sembrare ragionevole, ma nei fatti era fonte certa di guai. Se pensiamo agli anni d. C. (o a. D.) come numeri positivi e a quelli a. C. come numeri negativi, la successione cronologica del religioso anglico sarebbe scritta …, − 3, − 2, − 1, 1, 2, 3,…, con la vistosa assenza dello zero dalla collocazione naturale tra − 1 e 1. Basta questo a mandare nel pallone. Un articolo riguardante il calendario, apparso nel 1996 sul «Washington Post», spiegava «come ragionare» circa la controversia sul nuovo millennio e, accennando all'età che Gesù Cristo (nato nel 4 a. C.) avrebbe avuto nell'anno in corso, la calcolava disinvoltamente in 2000 anni; questo risultato, che in base all'aritmetica moderna è perfettamente corretto (1996 − (− 4) = 1996 + 4 = 2000), risulta in realtà errato per eccesso, essendo l'età giusta 1999 anni.

Immaginiamo, infatti, che un bambino sia nato l'1 Gennaio del 4 a. C. Il 3 a. C. compirebbe un anno, il 2 a. C. due anni, l' 1 a. C. tre, l'1 a. D. quattro e il 2 a. D. ne avrebbe cinque; ma al 1° gennaio del 2 a. D. quanti anni sono passati dalla sua nascita? Ovviamente cinque, l'età stessa del bambino, ma non è questo il valore che si ottiene sottraendo l'anno di nascita dall'anno in corso: 2 − (− 4) = 2 + 4 fa infatti 6: il calcolo è sbagliato perché applica a un sistema di numerazione privo dello zero le regole valide per un altro dove, viceversa, lo zero è contemplato.

A rigore, il nostro ragazzino avrebbe dovuto festeggiare il quarto compleanno il 1° gennaio dello 0 a. D., il quinto l'1 a. D., il sesto il 2 a. D. e così via; in questo modo i conti tornerebbero, e per saperne l'età basterebbe in effetti sottrarre − 4 da 2; però le cose non stanno così, e se l'intervallo di tempo considerato va da una data a. C. a una data d. C. (e solo in quel caso) occorre sempre togliere aggiuntivamente una unità. Dunque nel 1996 Gesù avrebbe avuto non 2000 anni, ma solo 1999: già si fatica a raccapezzarsi, e in più altre complicazioni ci aspettano.

Immaginiamo, infatti, che un bambino sia nato esattamente allo scoccare del 1° gennaio dell' 1 a. D. Il 2 a.D. compirebbe un anno, il 3 a. D. due anni, e così di seguito fino a raggiungere nel 99 a. D. l'età di 98 anni e nel 100 a. D. di 99 anni. Se, per avventura, fosse stato chiamato Secolo, allora Secolo avrebbe 99 anni nell'anno

100 e diverrebbe centenario il 1° gennaio 101, iniziando soltanto allora il proprio secondo secolo. Analogamente, come il secondo secolo del calendario comincia nel 101, così il terzo comincia nel 201 e via di seguito fino al ventesimo, iniziato nel 1901, e dopo ancora il ventunesimo secolo – e il millennio con lui – che parte in effetti dal 1° gennaio 2001. Ma non ce ne siamo accorti.

Alberghi e ristoranti in ogni parte del mondo erano prenotati al completo per il 31 dicembre 1999, ma non così per l'anno seguente: la gente ha festeggiato il nuovo millennio alla data sbagliata. Perfino il Royal Greenwich Observatory, custode ufficiale della data e ora internazionali e arbitro in ogni materia cronologica, si predispose a un'invasione di festaioli. Mentre sull'altura dove sorge l'osservatorio speciali apparecchiature scandivano il tempo con la precisione dei nuclei atomici, dabbasso i londinesi si preparavano a una *Millennium Experience* organizzata sotto il patrocinio pubblico con tanto di «spettacolare cerimonia di apertura» pianificata – c'era da giurarlo – per l'ultimo dell'anno del 1999! L'esposizione chiuse i battenti il 31 dicembre 2000, proprio mentre gli astronomi in cima alla collina stappavano lo champagne per celebrare il nuovo millennio (nell'ipotesi, naturalmente, che a questi scienziati importi qualche cosa della data).

Gli astronomi non possono prendere il tempo così alla leggera come si fa normalmente; dopotutto essi contemplano l'orologio celeste, un meccanismo che non perde colpi a ogni anno bisestile né si riazzera ogniqualvolta agli umani salti in testa di mettere mano al calendario. Tanto che, a suo tempo, decisero di ignorarlo del tutto, contando i giorni non dalla nascita di Cristo ma dal mezzogiorno del 1° gennaio 4713 a. C., data sostanzialmente arbitraria proposta nel 1583 dall'umanista Joseph Justus Scaliger. La «data giuliana» (cosiddetta dal nome del padre di costui, Julius, e da non confondere con quella del calendario di Giulio Cesare) divenne poi il normale riferimento cronologico per gli eventi astronomici, in quanto mette al riparo dalle bizzarrie di calendari costantemente in corso di elaborazione, conteggiando tra l’altro non gli anni ma solamente i giorni. Questo metodo cronologico fu in seguito leggermente modificato, sottraendo alla data giuliana originale 2 400 000 giorni e 12 ore, e spostando così l’ora zero a mezzanotte del 17 novembre 1858 – altra data più o meno arbitraria.[10] Può anche darsi che gli astronomi evitino di festeggiare il 51542 (data giuliana modificata), che gli israeliti ignorino il כג טבת התשס (23 Tevet 5760, data dalla creazione del mondo), e che i Musulmani si scordino del 23 Ramadan 1420 (data dell’Egira), ma a ben guardare è più probabile di no. Ognuno di loro saprà a tempo debito che quel giorno corrisponde al 31 dicembre 1999 (data dell’Era Cristiana), e l’anno 2000 ha un che di molto particolare.

Non si sa bene perché, ma noialtri umani prediligiamo quei bei numeri tondi con una coda di zeri. Molti si ricorderanno di avere fatto un giro in macchina, da piccoli, con il contachilometri prossimo a indicare 10 o più mila: ognuno dei passeggeri attende in silenzio mentre l’ultimo 9 decimale scorre lentamente… un leggero scatto, ed ecco, X0 000! I bambini prorompono in un’acclamazione.

La notte del 31 dicembre 1999 è quella in cui il grande odometro dei cieli scatta in avanti.

Lo zeresimo numero

> Waclaw Sierpinski, il grande matematico polacco (…) temeva di aver perso un collo del proprio bagaglio. «Ma no, caro!» esclamò la moglie «Ci sono tutti e sei». «Non è possibile,» rispose Sierpinski «li ho contati e ricontati: zero, uno, due, tre, quattro e cinque!»
>
> John H. Conway e Richard Guy

L’idea che Dionigi e Beda abbiano fatto uno sbaglio a tenere fuori lo zero dai loro calendari può apparire peregrina; dopotutto i bambini contano «uno, due, tre, …», non «zero, uno, due, …», e, a eccezione dei Maya, nessuno si è mai inventato un anno zero o ha fatto iniziare i mesi dall’omonimo giorno. Se un simile procedimento sembra innaturale, per altro verso, nel contare all’indietro, viene invece spontaneo.

…Cinque. Quattro. Tre. Due. Uno. Contatto!

Lo Space Shuttle attende sempre lo zero per sollevarsi sotto la spinta dei razzi. Un evento atteso si verifica all’« ora zero», non all’«ora uno». Nel procedere verso l’epicentro di una catastrofe si dice che ci si avvicina al «punto zero».

Se facciamo mente locale, possiamo constatare che molto spesso si conta effettivamente a partire da zero. Il cronografo mostra 0:00.00 al momento in cui viene avviato, e raggiunge 0:01.00 non prima che sia trascorso un secondo. Alla consegna dalla fabbrica, il contachilometri di un’autovettura indica 00000, anche se, dopo che il concessionario l’avrà usata per qualche commissione, il numero sarà diverso. La giornata dei ferrovieri inizia alle 00:00. Ma a contare si comincia sempre con «uno», a meno di essere un matematico o un programmatore software,[11] e il motivo ha a che vedere con l’ordinamento.

Avendo a che fare con i numeri con cui contiamo (1, 2, 3 ecc.), non è difficile disporli in ordine. Uno è il primo, due il secondo, tre il terzo; non dobbiamo temere di confondere il valore di numerosità che un numero esprime (la sua «cardinalità») con il posto che occupa (la sua «ordinalità»), poiché le due essenzialmente coincidono. Per lungo tempo, e con generale soddisfazione, la situazione è stata questa, ma entrando in gioco lo zero l’immediata corrispondenza tra le due qualità fu compromessa; con la sequenza dei numeri divenuta 0, 1, 2, 3 ecc., era lo zero a venire ora per primo, mentre l'uno era al secondo posto, due al terzo e così via. Cardinalità e ordinalità non erano più numericamente intercambiabili, e qui sta il nocciolo del problema posto dal calendario.

La prima ora del giorno inizia allo scoccare della (zero secondi dopo la) mezzanotte, la seconda alle ore 1, la terza alle ore 2: contiamo per ordinali (prima, seconda, terza) ma indichiamo il tempo per cardinali (0, 1, 2); che ci vada a genio o meno, si tratta di un'impostazione mentale oramai universalmente radicata. Quando il neonato giunge al termine del 12° mese diciamo che ha un anno, che ha completato i primi 12 mesi di vita; ma se è vero che il bebè compie un anno dopo che ha già vissuto 12 mesi, l'unica affermazione coerente al riguardo non è forse che fino a quel momento la sua età è zero (anni)? Diciamo, invece, che ha qualche settimana o mese, un modo diplomatico di aggirare il fatto dell'età zero.

Dionigi, che non sapeva di zeri, fece partire il proprio calendario dall'anno 1 così come gli antichi avevano fatto prima di lui. A quei tempi si ragionava in termini di equivalenza «vecchia maniera» tra ordinali e cardinali, ciò che andava benissimo… per la gente di allora: se lo zero non fosse loro passato per la mente, non sarebbe sorto mai alcun problema.

Vuoto a perdizione

> E tuttavia non è che non ci fosse assolutamente nulla: c'era una sorta di caos, privo di definite sembianze. (…) e la vera ragione tentava sì di convincermi a far del tutto a meno di qualunque residuo di forma, se volevo concepire l'assolutamente informe: e però questo non mi riusciva.
>
> Sant'Agostino

Ma non sarebbe ragionevole biasimare l’ignoranza dei monaci. Il mondo di Dionigi il Piccolo, di Boezio e di Beda non offriva tanti spiragli culturali: crollato l’Impero romano, la civiltà occidentale si era ridotta a un relitto delle glorie passate, mentre il futuro pareva riserbare tempi ancor più cupi. Nessuna meraviglia che nei loro itinerari di ricerca della saggezza i dotti del Medioevo non contemplassero di attingere dai contemporanei, ma si rivolgessero invece agli antichi, quali Aristotele e i Neoplatonici; talché, nell’adottare scienza e filosofia dei loro lontani predecessori, quei pensatori ne ereditarono pure i pregiudizi, tra cui la paura dell’infinito e la repulsione per il vuoto.

Essi dunque bollarono il vuoto di maligno, e definirono il male come un vuoto. Satana venne del tutto letteralmente assimilato al nulla, del che Boezio diede la dimostrazione con il seguente sillogismo: essendo Dio onnipotente, non v’è alcunché ch’Egli non possa compiere; tuttavia, nella sua infinita bontà Dio non può perpetrare il Male; *ergo*, il Male è il Niente. Nella concezione medioevale, l’argomentazione non fa una grinza.

In agguato sotto il pallio della dottrina scolastica troviamo, però, un conflitto. Il sistema aristotelico nasce in Grecia, ma la leggenda giudeo-cristiana della Genesi ha origini semitiche, e presso i Semiti il vuoto non possedeva connotazioni ansiogene; addirittura, l’opera stessa della creazione vi prende le mosse da un caotico nulla. Teologi come sant’Agostino, che visse nel quarto secolo, si sforzarono di darne giustificazione riferendosi allo stato delle cose prima della Creazione in termini di «un niente che è qualche cosa» privo di forma, ma che pur sempre «è e non è».[12] La paura del vuoto era tale e tanta che gli eruditi cristiani vollero porre mano alla Bibbia per conciliarla con Aristotele, anziché tentare il contrario.

Per buona sorte, non a tutte le civiltà lo zero incuteva pari timore.

Capitolo 3

Nulla da perdere

Lo zero migra a Oriente

> Dov’è l’Infinito è allegrezza. Non c’è allegrezza nel finito.
>
> *Chandogya Upanishad*

Contrariamente all’Occidente che lo temeva, l’Oriente riservò allo zero una buona accoglienza; trattato in Europa da paria, in India e in Arabia esso invece prosperò.

Abbiamo lasciato lo zero nelle vesti di semplice segnaposto, uno spazio in bianco nella notazione babilonese dei numeri. In quell’ambito si rendeva utile, però senza rappresentare di per sé una quantità; non gli era associato alcun valore e doveva il proprio significato unicamente alle cifre poste alla sua sinistra: come simbolo preso isolatamente non voleva dire assolutamente nulla. In India questa situazione mutò radicalmente.

Con le sue truppe persiane, Alessandro il Grande aveva marciato nel IV secolo a. C. da Babilonia fino in India, e fu grazie all’invasione macedone che i matematici indiani vennero a conoscenza del sistema di numerazione sumerico... e dello zero. Alla morte del condottiero, nel 323 a. C., le contese tra i suoi generali ne spezzettarono l’impero; Roma affermò la propria egemonia a partire dal II secolo a. C. e inghiottì la Grecia, ma la sua potenza non arrivò fino in India. Come conseguenza, quella terra lontana non venne interessata né dall’ascesa del cristianesimo né dalla caduta dell’Impero romano nei secoli IV e V d. C.

L’India non fu parimenti esposta all’influenza aristotelica. Nonostante che Alessandro fosse stato allievo dello Stagirita e che certamente ne introducesse le idee in quel Paese, pure la filosofia ellenica non vi attecchì: a differenza della Grecia, l’India non vide mai con timore l’infinito e il vuoto, e, anzi, ne fece propri i concetti.

Il vuoto occupava un posto importante nella religione indù. L’induismo era da principio un credo politeistico fondato su un ciclo leggendario di battaglie e divinità guerriere, simile, per molti aspetti, alla mitologia ellenica, e i cui dèi nel corso del tempo – e secoli prima dell’arrivo dei Macedoni – avevano iniziato a sfumare l’uno nell’altro. Benché i riti tradizionali e il culto del pantheon originale venissero conservati, esso acquisì la sostanza di religione monoteistica e introspettiva, e i molteplici numi divennero le diverse manifestazioni di un onnicomprensivo unico dio, Brahama. Più o meno nel periodo dell’affermarsi a ovest della civiltà ellenica, l’induismo perdeva i caratteri di similitudine con i miti occidentali, le distinzioni tra le singole divinità si facevano incerte, mentre le connotazioni mistiche si accentuavano sempre più. Il misticismo era un manifesto prodotto dell’Oriente.

Così come altre religioni orientali, l’induismo era impregnato del simbolismo della dualità. (Concezione, questa, emersa occasionalmente anche nel mondo occidentale, dove veniva prontamente stigmatizzata come eretica; un esempio è dato dal manicheismo, il cui universo si trovava sotto l’influenza di due regni nemici, fonti eguali e opposte di Luce e di Tenebra.) Alla stregua dei principi *yin* e *yang* dell’Estremo Oriente e, in Medio Oriente, del dualismo etico del Bene e del Male di Zoroastro, nella religione indù creazione e distruzione si intrecciano; il dio Shiva è agente a un tempo dell’una e dell’altra, tanto che viene rappresentato con il tamburo della creazione in una mano e la fiamma della distruzione in un’altra (vedi fig. 3.1). Shiva rappresentava, comunque, anche il nulla, essendo uno dei volti della divinità, Nishkala Shiva, letteralmente Shiva «indivisibile» e «trascendente la forma»; egli era l'estremo vuoto, il supremo niente, l'incarnazione dell'assenza di vita. Però dal vuoto era scaturito l'Universo, e così parimenti l'infinito. A differenza dell'Universo come concepito in Occidente, il cosmo indù è sconfinato, con innumerevoli altri universi esistenti oltre i limiti di quello noto agli umani.

Al tempo stesso, però, questo cosmo mantenne sempre qualche cosa dell'originale vacuità; dal niente il mondo era venuto, e il rinnovato conseguimento del niente diveniva il fine ultimo dell'umanità. Si narra come la Morte racconti dell'anima a un discepolo: «Nel profondo del cuore di ogni creatura è l'*Atman*, lo Spirito, il Sé» dice. «Più piccolo del più piccolo atomo, più grande dello spazio immenso». Codesta entità, che abita in ogni cosa, è parte dell'essenza universale ed è immortale; quando una persona muore, l'*atman* ne abbandona il corpo accedendo ben presto a un'altra creatura, cosicché l'anima trasmigra e determina la reincarnazione del defunto. Meta degli indù è svincolare completamente l'*atman* dal ciclo della rinascita, arrestandone il *samsara* da un decesso al successivo, e la via per ottenere la definitiva emancipazione attraverso la negazione dell'esistenza consiste nel distacco dall'illusoria realtà materiale. «Il corpo, casa dello spirito, è in balia del piacere e del dolore», spiega un dio «e se uno è governato dal proprio corpo, costui non potrà mai essere libero». Ma nel momento in cui si pervenga a separare se stessi dalle velleità della carne e a volgersi al silenzio e al non-essere della propria anima, allora il *moksha*, la liberazione, sarà raggiunto; librandosi sopra le panie dei desideri umani, l'*atman* individuale potrà unirsi alla coscienza collettiva o *brahman*, anima cosmica onnipervasiva e realtà presente ovunque e in nessun luogo al medesimo tempo.

Figura 3.1
La danza di Shiva.

Ecco, dunque, l'infinità ed ecco il nulla. La cultura indiana era già dedita all'investigazione attiva del vuoto e dell'infinito, e come tale accettò lo zero.

La reincarnazione dello zero

> All'epoca primordiale degli dèi, l'esistenza sorse dalla non-esistenza.
>
> *Rig Veda*

Ma i matematici indiani non si limitarono a recepire lo zero: lo trasformarono, mutandone il ruolo di mero segnaposto in quello di numero in piena regola. Fu questa la reincarnazione che fornì allo zero il suo potere.

Le radici della conoscenza matematica indiana si perdono nel passato. Un testo risalente all'anno stesso della caduta di Roma (il 476 a. D.) rivela l'influenza delle cognizioni elleniche, egizie e babilonesi, introdotte da Alessandro Magno allorché si spinse fino a traversare l'Indo e penetrò nel Paese. Come in Egitto, vi esistevano «tenditori di corde» in funzione di topografi dei terreni e dei templi, e, disponendo di un sofisticato sistema di misura dei corpi celesti, al pari dei Greci gli astronomi locali avevano intrapreso il calcolo della distanza del Sole. Il problema richiede l'impiego della trigonometria, la cui versione indiana derivava probabilmente dalle tecniche sviluppate dai Greci.

A un certo momento, attorno al V secolo d. C., i matematici indiani cambiarono la propria maniera di rappresentazione dei numeri, passando da un sistema simile a quello greco alla notazione in stile babilonese; un'importante differenza risiedeva, tuttavia, nella base di numerazione, che con il nuovo metodo era decimale invece di sessagesimale. L'attuale forma grafica delle cifre numeriche deriva dai simboli usati dagli indiani, e queste dovrebbero a buon diritto chiamarsi «indiane» anziché «arabe» (vedi fig. 3.2).

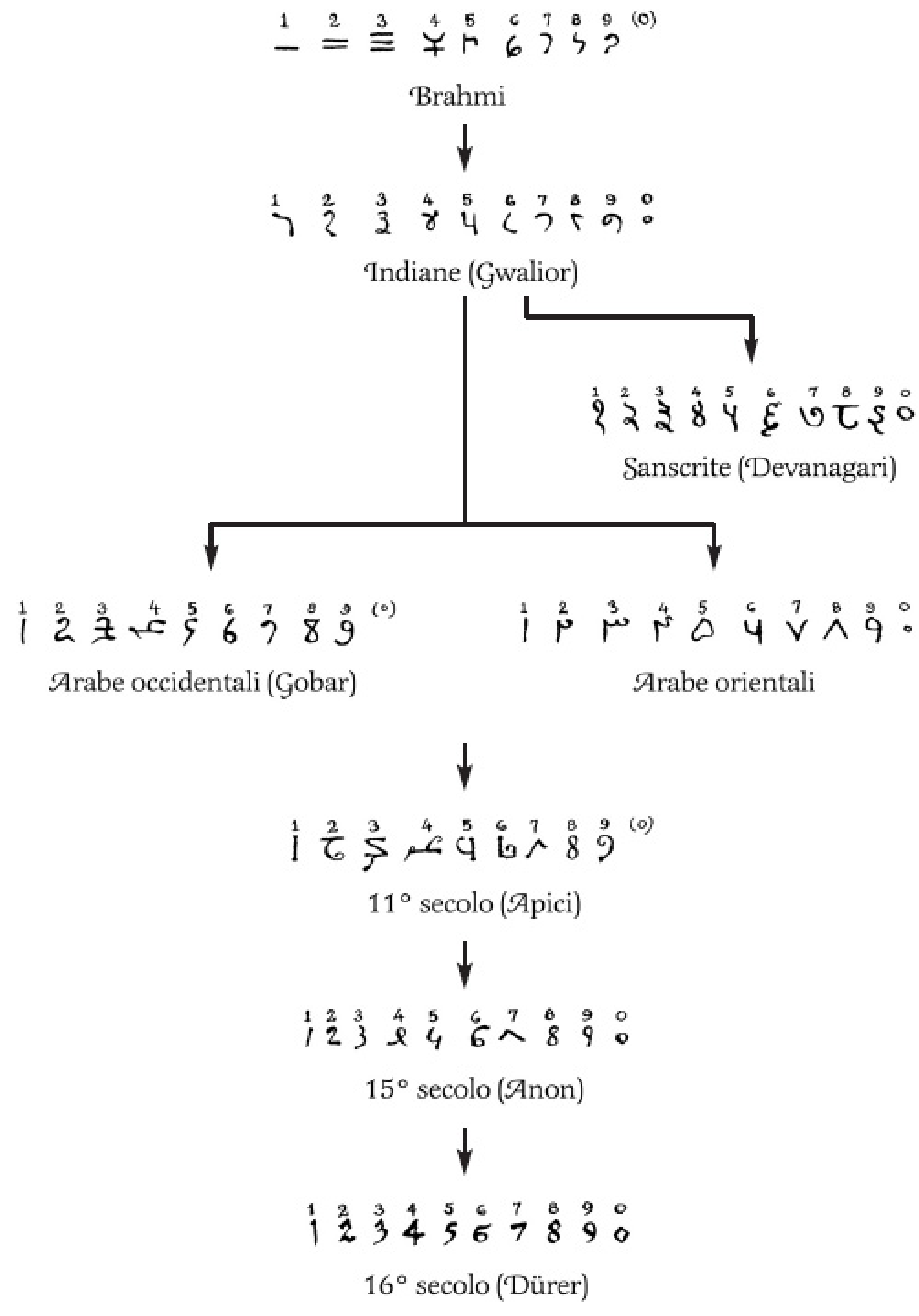


Figura 3.2
L’evoluzione delle cifre numeriche.

Non si conosce quando esattamente avvenisse il passaggio al sistema di numerazione posizionale di tipo babilonese; la più antica menzione delle cifre usate dagli

Indiani è opera di un vescovo siriano che scriveva, nel 662, di come essi eseguissero i calcoli «pel tramite di nove segni». Nove, e non dieci – evidentemente lo zero non era ancora della partita. Ma è difficile pronunciarsi, sebbene risulti abbastanza chiaro che quei numeri erano in uso da prima che il presule ne riferisse, e vi siano indicazioni della presenza dello zero in alcune varianti del sistema indù già all'epoca, benché quegli non ne avesse sentito parlare. In ogni caso, nel nono secolo era già certamente impiegato un simbolo per lo zero, il segnaposto del sistema di numerazione in base 10; a quel momento i matematici indiani avevano compiuto un passo da gigante.

Gli Indiani non avevano mutuato granché dalla geometria dei Greci. Evidentemente non nutrivano particolare interesse per quelle figure piane che quel popolo amava tanto; non si preoccuparono mai del fatto che la diagonale del quadrato fosse o non fosse irrazionale rispetto al lato, né investigarono le sezioni coniche come aveva fatto Archimede. Ma appresero – eccome – a manipolare i numeri.

Grazie al loro metodo di numerazione essi potevano valersi di ingegnosi espedienti per addizionare, sottrarre, moltiplicare e dividere senza ausilio dell'abaco, e, grazie alla notazione posizionale, potevano addizionare e sottrarre grandi numeri all'incirca come si fa oggi. Usando la rappresentazione numerica indiana, una persona opportunamente addestrata era in grado di eseguire moltiplicazioni più rapidamente di un operatore all'abaco. Le gare tra abacisti e i cosiddetti algoritmisti (che si servivano di quel sistema) erano l'equivalente medioevale della sfida scacchistica tra Kasparov e il programma Deep Blue (vedi fig. 3.3), e, come in quel caso, il metodo algoritmico risultava alla fine vincente.[13]

Figura 3.3
Un algoritmista contrapposto a un abacista.

Benché il sistema di numerazione indiano fosse utilmente applicabile alle operazioni aritmetiche più comuni, l’influsso assai più profondo che esercitò fu di rendere finalmente entità distinte oggetti geometrici e numeri, utilizzando questi ultimi per scopi diversi dalla pura e semplice misura dimensionale. A differenza dei Greci, gli Indiani non scorgevano nei numeri quadrati dei quadrati come figura, né nella moltiplicazione il calcolo dell’area di un rettangolo; al contrario, vedendovi l’interazione di numeri come tali, indipendenti dalle possibili associazioni geometriche, essi diedero origine alla moderna algebra. Se da una parte codesta impostazione mentale sbarrò ovviamente la strada a un significativo contributo alla scienza geometrica, dall'altra svincolò gli Indiani dagli inconvenienti degli schemi logici ellenici, ivi compreso il rifiuto dello zero.

Perduto che ebbero i numeri il significato geometrico, i matematici non dovettero più preoccuparsi di dare un senso geometrico alle operazioni con essi eseguite. Se non è possibile falciare tre iugeri di grano da un campo di due, niente tuttavia impedisce di sottrarre tre da due; e oggi, per esempio, riconosciamo che $2 - 3$ è uguale a -1, l'unità negativa. Questo appariva tutt'altro che ovvio agli antichi, per i quali era comune concludere che la soluzione di un'equazione fosse priva di senso quando forniva un risultato minore di zero; se infatti si ragiona in termini geometrici, che cosa mai rappresenta un'area negativa? Per i Greci si trattava di un concetto assurdo.

Ma per gli Indiani i numeri negativi erano perfettamente sensati; e difatti fu in India (e in Cina) che essi fecero la loro comparsa. Brahmagupta, matematico indiano del settimo secolo, nel dettare le regole della divisione dei numeri tra loro vi incluse i negativi, scrivendo che «un avere moltiplicato o diviso per un avere è un avere. Un debito moltiplicato o diviso per un debito è un avere» e «un avere moltiplicato o diviso per un debito è un debito. Un debito moltiplicato o diviso per un avere è un debito».[14] Si tratta del medesimo criterio modernamente adottato: il quoziente è positivo se dividendo e divisore hanno lo stesso segno, e lo stesso vale per la moltiplicazione e i suoi fattori.

Se $2 - 3$ era divenuto un numero, lo stesso valeva per $2 - 2 = 0$, lo zero. Non più un semplice segnaposto per contrassegnare l'assenza di una cifra sull'abaco, ma un numero vero e proprio, con uno specifico valore assegnato e una precisa posizione nella sequenza degli interi. Siccome zero è dato, per esempio, da $2 - 2$, allora deve trovarsi tra $2 - 3 = -1$ e $2 - 1 = 1$, tra l'unità negativa e l'unità positiva, e non può ragionevolmente essere altrimenti; zero non può più trovarsi dopo il nove, come nella tastiera delle macchine per ufficio, bensì nella collocazione sua propria. Non solo, ma la successione numerica non può ragionevolmente esistere senza lo zero, non più di quanto potrebbe esistere se vi mancasse il due: questo fatto segnava finalmente l'avvento dello zero.

A ogni buon conto, e per i motivi già visti, non è che gli Indiani mancassero di giudicare alquanto bizzarro il comportamento di questo numero; dopotutto, zero come fattore della moltiplicazione produce sempre il risultato nullo, riassorbendo in tal modo ogni cosa in sé, e se zero diventa invece un divisore, si scatena il finimondo. Brahmagupta cercò di determinare che cosa risultasse da 0/0 e da 1/0, ma senza successo. «Cifra diviso per cifra è nulla» lasciò scritto, e «un numero positivo o negativo diviso per cifra è una ragione a quel denominatore».[15] In altre parole, egli riteneva $0/0 = 0$ (e si sbagliava, come si vedrà), e 1/0 uguale a… be', in realtà non sappiamo a che cosa, perché ciò che afferma in proposito non ha molto senso; sostanzialmente faceva cenno al problema di togliersi di torno e sperava che quello gli desse retta.

L'errore di Brahmagupta fu ben presto corretto; a tempo debito i suoi colleghi si resero conto che 1/0 è una quantità infinita. «(…) una ragione che ha cifra per denominatore. Questa ragione dicesi quantità infinita» scriveva Bhaskaracharya, matematico del dodicesimo secolo, spiegando anche che cosa accade se a 1/0 si aggiunge alcunché: «non havvi verun cangiamento, per grande la quantità che aggiungasi o cavasi, ché niuna chosa può alterare l'infinito e immutabile Iddio».[16]

Nell'infinito – e nello zero – era stato riconosciuto Dio.

I numeri arabi

Non si ricorda l'uomo che fummo Noi a crearlo
quando ancora non era nulla?

Corano, XIX, 67

Con il VII secolo, caduta ormai Roma da tempo, l'Occidente era in piena crisi, mentre l'Oriente invece prosperava. La crescita dell'India veniva eclissata dall'affermarsi di un'altra civiltà; mentre tramontava la stella dell'Ovest, l'astro nascente era quello dell'Islam. Questa cultura avrebbe preso lo zero dall'India, e per suo tramite esso sarebbe alla fine giunto in Occidente; l'ascesa dello zero alla posizione di VIP doveva in ogni caso avere inizio a est.

Una sera del 610 a. D., Mohammed, nativo della Mecca e allora trentenne, cadde in trance sul monte Hira, ove la leggenda narra di come l'arcangelo Gabriele lo inducesse a «recitare» (*iqra*). Maometto così fece. Le sue rivelazioni divine appiccarono un incendio inarrestabile, e già dieci anni dopo la morte, avvenuta nel 632, Egitto, Siria, Mesopotamia e Persia erano in mano ai suoi seguaci, e anche Gerusalemme, città santa di israeliti e cristiani, era caduta. Nel 700 l'Islam si estendeva fino al fiume Indo a est e ad Algeri a ovest; nel 711 i musulmani si impadronirono della penisola iberica, giungendo fino ai Pirenei; in Oriente sconfissero i cinesi nel 751; il loro Impero era ormai più vasto di quanto lo stesso Alessandro avrebbe potuto immaginare, e nella spinta verso la Cina conquistarono l'India. Fu lì che appresero della notazione numerica in uso sul posto.

I musulmani incorporavano rapidamente il sapere dei popoli conquistati; gli eruditi ne volgevano i testi in arabo, e nel nono secolo il califfo al-Mamun poté creare a Baghdad una grande biblioteca: la Casa della Saggezza. L'istituzione doveva diventare il centro di apprendimento del mondo orientale, e uno dei suoi primi studiosi fu il matematico Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi.

Costui produsse parecchie opere importanti, quali *Kitab al-giabr wa’ l-muqabala*, trattato sulla risoluzione delle equazioni elementari da cui (e precisamente dall’*al-giabr* del titolo, che sta per «completamento», «mettere a posto») derivò il termine «algebra». Egli scrisse anche un libro sul sistema di numerazione indù, che aprì la strada a una rapida diffusione nei paesi arabi sia delle nuove cifre sia degli «algoritmi», gli espedienti per moltiplicare e dividere rapidamente utilizzando quel sistema, tanto che la parola stessa non è che una corruzione dell’appellativo «al-Khuwarizmi». Alla fine, nel resto del mondo la notazione indiana sarebbe stata designata come «numeri arabi», nonostante che gli arabi l’avessero trovata pronta e solamente divulgata.

«Zero» sa di indù e arabo anche nell’etimologia. L’adozione dei numeri indoarabici comportò pure quella dello zero, la cui denominazione indiana *sunya* (che significa «vuoto») presso gli arabi divenne *sifr*; nella descrizione del nuovo numero fatta da alcuni dotti occidentali essa mutò nel termine assonante latinizzato *zephirum*, che è la radice della parola corrente, mentre altri matematici occidentali la modificarono meno radicalmente e chiamarono lo zero «cifra». La fondamentale importanza dello zero nella decade dei nuovi simboli numerici è rivelata dal fatto che proprio quest’ultimo termine venne usato anche per designarli genericamente, com’è tuttora in alcune lingue neolatine.

Comunque, all’epoca in cui al-Khuwarizmi si occupava del sistema numerico indù, l’Occidente era ancora ben lontano dal recepire lo zero, e anche il mondo musulmano rimaneva pesantemente influenzato dalla dottrina aristotelica, introdotta nelle tradizioni orientali dalle conquiste di Alessandro Magno. Ma come avevano esaurientemente chiarito i matematici indiani, lo zero era l'incarnazione del vuoto, per cui, se i musulmani intendevano accettarlo, occorreva che ripudiassero Aristotele. E questo precisamente fecero.

Il filosofo e medico ebreo del XII secolo Mosè Maimonide de scrisse con ripugnanza il credo dei teologi speculativi islamici, il *Kalam*, osservando che costoro, lungi dall'accettare la prova aristotelica dell'esistenza di Dio, si volgevano, viceversa, agli antichi rivali dello Stagirita, gli atomisti, il cui pensiero era sì in discredito, ma aveva trovato modo di superare i guasti del tempo. Si rammenti che codesta scuola riteneva la materia composta di particelle singole chiamate atomi, i quali necessitavano del vuoto per muoversi, pena l'incappare continuamente l'uno nell'altro, incapaci di togliersi reciprocamente dai piedi.

Ora che lo zero era accettato e, di conseguenza, il vuoto era ridiventato un concetto perbene, i musulmani fecero tesoro delle idee atomistiche. Aristotele odiava il vuoto e gli atomisti lo tenevano per necessario, e se la Bibbia raccontava della creazione a partire dal nulla, la filosofia greca ne scartava la possibilità, tanto che i cristiani, soggiogati dall'autorità di quella, avevano anteposto Aristotele agli stessi propri libri sacri. Ma i musulmani fecero la scelta opposta.

Sono ciò che sono: niente

> Il nulla è e rimane il nulla (…). La nostra mente limitata non è in grado di afferrare o scandagliarne il concetto, poiché esso si connette con l'infinito.
>
> Azrael di Gerona

Così lo zero era emblematico delle nuove dottrine, della ripulsa di Aristotele e dell'accoglimento del vuoto e dell'infinito. Lo zero si diffuse nei Paesi sotto il dominio islamico seguendo l'ampliarsi delle conquiste, ovunque in conflitto con le concezioni aristoteliche e mentre gli eruditi arabi a varie riprese si accapigliavano sull’argomento. Finalmente, nell’xi secolo, il filosofo musulmano Abu Hamid al-Ghazali proclamò il perseverare nella dottrina aristotelica meritevole della pena capitale, con ciò esaurendo in breve il dibattito.

Non desta meraviglia che lo zero suscitasse tanto disaccordo; con il loro retroterra semitico e orientale, i musulmani credevano, infatti, nella creazione dell’Universo a partire dal nulla, visione inaccettabile dai popoli che condividevano l’avversione aristotelica per il vuoto e l’infinito. Con il diffondersi dello zero nei territori in mano agli arabi, questi lo adottavano gettando nel contempo Aristotele alle ortiche. I successivi nella lista del rivolgimento culturale erano gli ebrei.

Il centro millenario della vita dei giudei era saldamente stabilito nel Medio Oriente, ma nel x secolo si presentò loro un’occasione nella Spagna islamica, dove il visir ebreo del califfo Abd al-Rahman III aveva fatto venire da Babilonia parecchi intellettuali suoi correligionari, e dove in breve sorse una fiorente comunità israelitica.

Le basi culturali di quel popolo erano saldamente connesse alle dottrine aristoteliche tanto in Spagna che in Mesopotamia e, al pari della controparte cristiana, esso rifiutava il vuoto e l’infinito. Ma quell’impostazione filosofica entrava in conflitto con la teologia israelita altrettanto che con gli insegnamenti islamici, al punto che Maimonide, il già ricordato erudito e rabbino del xii secolo, sentì la necessità di scrivere un volume per riconciliare la Bibbia orientale, semitica, con quella filosofia occidentale, greca, che informava di sé tutta Europa.

Egli aveva appreso da Aristotele la dimostrazione dell’esistenza di Dio attraverso la negazione dell’infinito e, fedelmente ricalcando le argomentazioni mutuate dal Greco, asserì che le sfere cave mulinanti attorno alla Terra dovevano essere poste in moto da qualche cosa, per esempio ognuna da quella immediatamente più esterna. Ma non potendosi iterare illimitatamente la spiegazione (in quanto sarebbe occorso un numero infinito di sfere e l'infinità era impossibile), ecco che si rendeva necessario un agente diverso sulla sfera esterna a tutte, e codesto Primo Mobile non poteva che essere Iddio.

Il ragionamento di Maimonide costituiva, in effetti, una «prova» dell'esistenza di Dio, inestimabile pietra angolare di qualsiasi costruzione teologica; allo stesso tempo, però, la Bibbia e altri componenti della tradizione semitica erano pieni di riferimenti all'infinito e al vuoto, quei medesimi concetti già sottoscritti dai musulmani. Come già sant'Agostino ottocento anni prima, il filosofo cordovano cercò di rimaneggiare la Bibbia semitica in modo da renderla compatibile con il razionalismo greco e la sua irragionevole fobia del vuoto, ma, a differenza di quei primi cristiani che avevano rivendicato la libertà di interpretazione in chiave metaforica di alcune parti del Vecchio Testamento, egli non desiderava ellenizzare completamente la propria religione. La tradizione rabbinica lo vincolava ad accettare la narrazione biblica della creazione dell'Universo operata a partire dal vuoto, ciò che comportava, a sua volta, il contraddire Aristotele.

Maimonide ne concluse che la prova aristotelica dell'esistenza *ab aeterno* dell'Universo fosse da rivedere; dopotutto, era in contrasto con le Scritture. Se poi questo implicava il dare ad Aristotele il benservito, pazienza: egli stabilì che l'atto della creazione era stato compiuto dal nulla, che si trattava di *creatio ex nihilo*, a dispetto del bando posto dallo Stagirita sulla completa assenza di materia. Con tale presa di posizione il vuoto passò dalla polvere del sacrilegio agli altari della santità.

Gli anni seguenti la morte del grande filosofo religioso divennero per gli ebrei l'era del nulla. Nel XIII secolo si affermò una nuova linea speculativa: la Cabala, o mistica ebraica, uno dei cui cardini di pensiero è la Gematria, ovvero la ricerca di messaggi codificati nei testi biblici.

Come i Greci, gli ebrei avevano adottato le lettere dell’alfabeto per rappresentare i numeri, cosicché a ogni lettera era associabile una quantità numerica; questa proprietà è utilizzabile come mezzo per divinare l’eventuale significato nascosto di parole o proposizioni calcolandone per via additiva il valore corrispondente. Per fare un esempio di metodo, agli intervenuti nella Guerra del Golfo sarà capitato di osservare come la codifica di «Saddam» scritto in ebraico risulterebbe in *sàmekh* (ס = 60) + *àlef* (א = 1) + *dàleth* (ד = 4) + *àlef* (א = 1) + *mem finale* (ם = 600) = 666, numero riferito dall’escatologia cristiana alla Bestia del male destinata a comparire sulla terra con l’Apocalisse. (Che poi il nome del dittatore iracheno si scriva con una o due «ד» importerebbe poco ai cabalisti, i quali ricorrevano sovente a grafie alternative, utili per fare tornare i conti.) Altro credo di questa teosofia esoterica era il legame mistico tra le espressioni caratterizzate dal medesimo valore numerico. Nel versetto «Lo Scettro non sarà rimosso da Giuda, né il bastone del comando d’infra i piedi di esso, finché non sia venuto Scilo»[17] (Gn, 49,10) troviamo che «ובא שׁולה» («finché non sia venuto Scilo») vale 358, in coincidenza con quello della parola משׁיח (Messia); quindi il passaggio anticiperebbe la venuta finale del Liberatore. Secondo i dottori cabalisti vi erano numeri del bene e numeri del male, e alla loro ricerca essi spulciavano la Torah, analizzandola con questo e quel criterio per rinvenirvi ogni possibile recondito significato. La pratica è corrente, e ancora un recente best seller, *The Bible Code*,[18] ha preteso di identificare delle profezie per questa via.

La *Qabbalah* va molto oltre il macinare numeri. Stabilitasi come tradizione intensamente mistica, alcuni studiosi vi ravvisano una somiglianza impressionante con l’induismo; per fare un esempio, essa specula sopra il concetto della natura bina di Dio, attraverso due dei suoi attributi in ebraico: il termine «איו סוף», letteralmente «senza fine» e che rappresenta il lato creativo della divinità, quella sua parte che ha generato l'Universo e ne permea ogni più remoto angolo; e il termine «אין», ovverosia «niente in assoluto» o «inesistenza». Il vuoto e l'infinito si danno la mano, ed entrambi si riconoscono nel divino creatore; ma non basta: אין è l'anagramma (e in virtù della proprietà commutativa della somma possiede il medesimo valore gematrico) di אני, che significa «io». Non si può essere più chiari di così: in cifra, Dio proclama «Io sono il niente» – e, contemporaneamente, l'infinito.

Mentre gli ebrei contrapponevano alla propria forma mentis occidentaleggiante la propria Bibbia orientale, il medesimo contrasto era in atto nel mondo cristiano. Allorché da una parte esso si batteva contro i Mori (durante il regno di Carlo Magno nel nono secolo, e con le Crociate per duecento anni a partire dalla fine dell'undicesimo secolo), dall'altra i frati guerrieri, gli uomini di studi, i mercanti riportavano con sé in Europa idee e concetti islamici. I monaci scopersero che l'astrolabio, un'invenzione araba,[19] era un pratico strumento per misurare il tempo dopo il calare del sole, un valido aiuto per recitare le devozioni con puntualità; e gli esemplari in circolazione recavano spesso iscrizioni in numeri arabi.

La nuova notazione non prese tuttavia piede, sebbene nel X secolo trovasse un estimatore addirittura in un papa. Silvestro II aveva probabilmente appreso al riguardo nel corso di un viaggio in Spagna, e al ritorno aveva recato la nuova nozione con sé in Italia, però in una versione ancora mancante dello zero e che, se ne fosse stata provvista, avrebbe goduto di ancora minore popolarità. Aristotele manteneva salda la presa sulla Chiesa, i cui più raffinati pensatori seguitavano a rigettare l'infinitamente grande, l'infinitamente piccolo e il vuoto. Perfino quando già volgeva al termine l'epoca delle Crociate, alla fine del XIII secolo, san Tommaso d'Aquino dichiarava che Iddio non era in grado di creare alcunché di infinito più di quanto potesse fare un cavallo sapiente, ciò che però comportava negare l’onnipotenza del Signore, una deduzione inammissibile dalla teologia cristiana.

Nel 1277 il vescovo di Parigi, Étienne Tempier, convocò un concilio di dotti per discutere dell’aristotelismo, o piuttosto per esporne i vizi. Ne conseguì il rigetto di molte proposizioni aristoteliche contradditorie dell’onnipotenza divina, quali «Dio non può fare muovere i cieli in linea retta, perché in tale modo lascerebbero il vuoto dietro di sé». (Viceversa, se le sfere celesti erano in moto attorno al proprio centro, venivano a occupare sempre lo stesso spazio e non creavano, quindi, problemi; è solo quando il centro si sposta che il solido necessita di nuovo spazio da occupare nella direzione di avanzamento, e necessariamente si lascia uno spazio alle spalle.) Nossignore – appurò Tempier –; se così vuole, Dio può benissimo generare il vuoto, vuoto che da un momento all’altro diveniva lecito in quanto un essere onnipotente non è tenuto a seguire i princìpi della Scolastica qualora non gli vadano a genio.

Le dichiarazioni del consesso parigino non infersero certo alla fi losofia di Aristotele il colpo di grazia, ma misero comunque in luce che i suoi fondamenti si stavano oramai sgretolando. La Chiesa vi si sarebbe attenuta per qualche secolo ancora, ma il collasso di quello schema di pensiero e la conseguente affermazione del vuoto e dell’infinito erano chiaramente iniziati. Era il momento giusto per lo sbarco dello zero in Occidente, e alla metà del XII secolo i primi adattamenti dell’*Al-giabr* di al-Khuwarizmi già si facevano largo in Spagna, in Inghilterra e nel resto d’Europa; lo zero era per strada, e mentre la Chiesa si liberava dalle pastoie dell’aristotelismo, giunse finalmente.

Il trionfo dello zero

> (…) un’idea profonda e importante, che ci appare ora così semplice che ne ignoriamo gli autentici meriti. Ma proprio la sua semplicità e la grande facilità da essa consentita a ogni sorta di calcolo posero la nostra aritmetica ai primi posti tra le invenzioni utili.
>
> Pierre-Simon de Laplace

Se la cristianità inizialmente respinse lo zero, il commercio lo reclamò ben presto. Chi ne reintrodusse il concetto in Occidente fu Leonardo da Pisa. Figlio di mercante, era stato da giovane in Nord Africa apprendendo le matematiche dai musulmani e presto divenendo per il proprio ingegno un valido matematico, come tale meglio conosciuto sotto l’appellativo di Fibonacci.

Egli è principalmente ricordato per il suo *Liber abaci*, pubblicato nel 1202, e per un indovinello che vi viene proposto: si immagini una coppia di conigli appena nati; essi impiegano due mesi a raggiungere la maturità, e da quel momento generano altri due coniglietti al principio di ogni mese; considerando che la nuova popolazione via via diviene adulta e si riproduce con la medesima cadenza, quante coppie di conigli vi saranno a ogni dato mese?

Il primo mese la coppia è una, e tale rimane perché i conigli non possono ancora riprodursi.

Il secondo mese la situazione è inalterata, ma al terzo si ha la prima figliata, e le coppie diventano due.

Al quarto mese la prima coppia si riproduce, ma la seconda è ancora immatura, e siamo a tre coppie.

Il mese successivo la prima e la seconda coppia figliano una coppia ciascuna, mentre la terza è ancora troppo giovane: cinque coppie in tutto.

Il numero di coppie di conigli aumenta quindi nella sequenza 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …, e a ogni mese risulta uguale alla somma delle coppie presenti nei due mesi precedenti. I matematici riconobbero subito l’importanza di questa particolare successione, prendendo ogni elemento della quale e dividendolo per il precedente è ottenibile la serie 1/1 = 1, …, 8/5 = 1,6, 13/8 = 1,625, 21/13 = 1,61538, …, che converge a un valore di particolare interesse: il rapporto aureo (1,61803…)

Pitagora aveva osservato come la natura apparisse governata dalla sezione aurea, e Fibonacci ne identificò la sequenza numerica generatrice; le progressive dimensioni della spira del nautilo e il numero di scaglie dell’ananas in senso orario e antiorario risultano infatti secondo la successione citata, e questo è il motivo per cui la serie dei loro rapporti approssima il numero aureo.

Benché la successione dei «numeri di Fibonacci» sia all’origine della fama del matematico pisano, l’intento del *Liber abaci* era tutt’altro e più importante che non la cunicoltura; l’autore, che aveva appreso le matematiche dai musulmani e conosceva, dunque, i numeri arabi, zero compreso, incorporò nell’opera la nuova notazione, introducendo lo «zefiro» in Europa. Il libro dimostrava la grande utilità di quel sistema nell’esecuzione di calcoli complessi, cosicché i banchieri e i mercanti italiani ne fecero rapidamente tesoro, e lo zero cominciò a venire impiegato in qualità di numero.

Prima della comparsa del metodo arabo i cambiavalute dovevano arrangiarsi con l’abaco o la tavola per i conteggi, dalla quale, chiamata in Germania *Rechenbank*, derivò il nome di «banca» degli odierni istituti di credito. In quell’epoca le tecniche bancarie erano tuttavia rudimentali, utilizzando oltre alla tavola suddetta la «taglia», che serviva a registrare i prestiti: l’ammontare veniva stilato su un righetto di legno diviso longitudinalmente in due parti, in modo che l’iscrizione venisse ricomposta quando queste combaciavano (vedi fig. 3.4); quella più grande, sagomata a «L» e detta in Inghilterra *stock*, andava all’erogatore del credito, che difatti si chiamò *stockholder* (azionista).[20]

Dando modo ai banchi di sbarazzarsi delle poco pratiche tavole di conteggio, agli operatori mercantili italiani i numeri arabi piacquero notevolmente; ma se gli uomini d'affari ne scorsero l'utilità, i reggitori locali li ebbero, viceversa, in uggia. Nel 1299 Firenze li mise al bando, con la motivazione ufficiale che altrimenti i numeri avrebbero potuto essere redatti in maniera ambigua o agevolmente falsificati (uno svolazzo della penna, ed ecco che, per esempio, 0 si trasformava in 6). Ma fare a meno dei vantaggi offerti da zero e compagnia non era poi tanto facile; i mercanti seguitarono a farne uso, perfino per comunicare in codice, ed è da codesta pratica che proviene il termine «cifra» nel senso di «codice segreto».

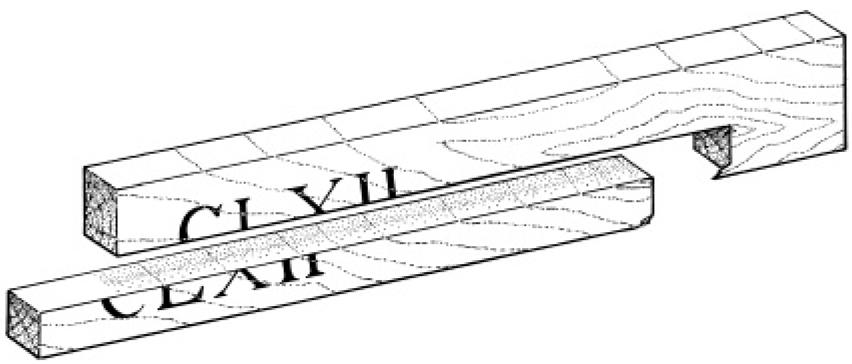


Figura 3.4
Taglia.

Alla fine le pressioni commerciali ebbero partita vinta, i vari Governi lasciarono campo libero alla rappresentazione araba dei numeri, che dall'Italia si diffuse con rapidità nel resto d'Europa: lo zero era giunto, e il vuoto con lui. Grazie all'influenza di musulmani e indù, il bastione aristotelico si stava sgretolando, e in capo al Quattrocento anche nei suoi più fidi sostenitori europei si instillava il dubbio. Il futuro arcivescovo di Canterbury, Thomas Bradwardine («*Doctor profundus* »), si provò a confutare l'atomismo, da sempre nemesi di Aristotele, ma si chiese allo stesso tempo se non fosse viziata la stessa logica di cui si serviva per farlo; egli, infatti, basò la propria tesi su considerazioni geometriche, disciplina che, con le sue linee infinitamente suddivisibili, già automaticamente escludeva in partenza quanto si voleva arrivare a dimostrare erroneo. A ogni buon conto, la battaglia contro Aristotele era lungi dall'essere conclusa; se quegli infatti fosse venuto meno, avrebbe perso validità la prova dell'esistenza di Dio, uno dei baluardi della Chiesa; una nuova dimostrazione si rendeva così necessaria.

Ma peggio ancora: un eventuale Universo infinito non poteva possedere un centro, e dove allora collocare la Terra? La risposta fu trovata nello zero.

Capitolo 4

L’infinito Dio del nulla

Teologia dello zero

> Mercé la scienza nova tutto dal dubbio è attinto, del foco e di elementi l’ordine è affatto estinto; perduto è il sole, e terra, né già la mente umana additare il potrà: tutta ricerca è vana.
> […] Ogni cosa è in frantumi, scompaion coesione, relazioni, rapporti, equa distribuzione: Il prence ed il soggetto, il padre ed il figliolo, fur obliati.
>
> John Donne

Zero e infinito furono in senso stretto al centro del Rinascimento. Allorché l’Europa si riscuoteva dal sonno dei Secoli Bui, questi concetti – il nulla e il tutto – avrebbero demolito le fondamenta aristoteliche della Chiesa e aperto la strada alla rivoluzione scientifica.

Sulle prime la Curia romana non avvertì l’insidia, e alti dignitari ecclesiastici si cimentarono con le pericolose idee, benché queste minassero il fulcro medesimo di quella filosofia tanto grata alla Chiesa; lo zero fece capolino al centro di ogni dipinto rinascimentale, e un cardinale dichiarò che l’Universo era infinito, senza limiti. Ma d’infatuazione si trattava, e non era destinata a durare.

Come la Chiesa si sentì minacciata, si trincerò nuovamente dietro la vecchia dottrina filosofica che così bene l’aveva affiancata per tanto tempo. Ma era troppo tardi: lo zero aveva ormai preso piede in Occidente e, nonostante le pontificie obiezioni, la sua forza era tale da non consentire più un nuovo esilio – Aristotele dovette piegarsi di fronte all'infinito e al vuoto, e con lui si sfilacciò la prova dell'esistenza di Dio.

Alla Chiesa restava aperta un'unica via: accettare lo zero e l'infinito; i credenti, a ogni buon conto, avrebbero sempre potuto trovare Iddio anche celato dentro l'uno e l'altro.

La rottura del guscio

> O Dio, io potrei esser confinato in un guscio, e tenermi re dello spazio infinito, se non fosse che ho cattivi sogni.
>
> William Shakespeare

Nei primi tempi del Rinascimento non risultava evidente che lo zero avrebbe posto una minaccia nei confronti della Chiesa; esso appariva uno strumento pittorico, un infinito nulla che annunciava lo straordinario rifiorire delle arti figurative.

Prima del XV secolo i dipinti e i disegni erano sostanzialmente immobili e privi di rilievo; le immagini vi erano rappresentate fuori proporzione e costrette in due dimensioni, con piatti cavalieri che spuntavano da deformati castelli in miniatura (vedi fig. 4.1). Nemmeno i migliori artisti sapevano ritrarre con verosimiglianza – non conoscevano il potere dello zero.

Fu un architetto italiano, Filippo Brunelleschi, che per primo mostrò le possibilità di uno zero infinito, usando un punto di fuga per creare un dipinto realistico.

Considerato dal punto di vista dimensionale, un punto è uno zero geometrico per definizione. Nella vita di tutti i giorni abbiamo a che fare con oggetti tridimensionali (per la verità, Einstein ha rivelato la tetradimensionalità del mondo in cui viviamo, come si vedrà in un successivo capitolo); l'orologio che teniamo sul cassettone, la tazza di caffè che prendiamo ogni mattina, lo stesso libro che stiamo leggendo ora, sono tutti oggetti a tre dimensioni.

Ma immaginiamo che una mano possente cali a schiacciare il libro fino a ridurlo perfettamente piatto; non più simile a un parallelepipedo, esso è divenuto un rettangolo floscio, ha perso una dimensione ed è rimasto bidimensionale, con larghezza e lunghezza ma nessuna profondità. Assumiamo, ora, di appoggiarlo su un lato e che la medesima mano gigante vi calchi nuovamente: il libro non è più un rettangolo, bensì un segmento, ha perso un'altra dimensione ed è rimasto unidimensionale per la sola lunghezza, senza larghezza né profondità. Ma è possibile pensare di togliergli anche l'ultima delle sue dimensioni: compresso nel senso della lunghezza, il libro da segmento si fa punto, un nonnulla infinitesimo privo di profondità, larghezza e lunghezza: un oggetto zerodimensionale.

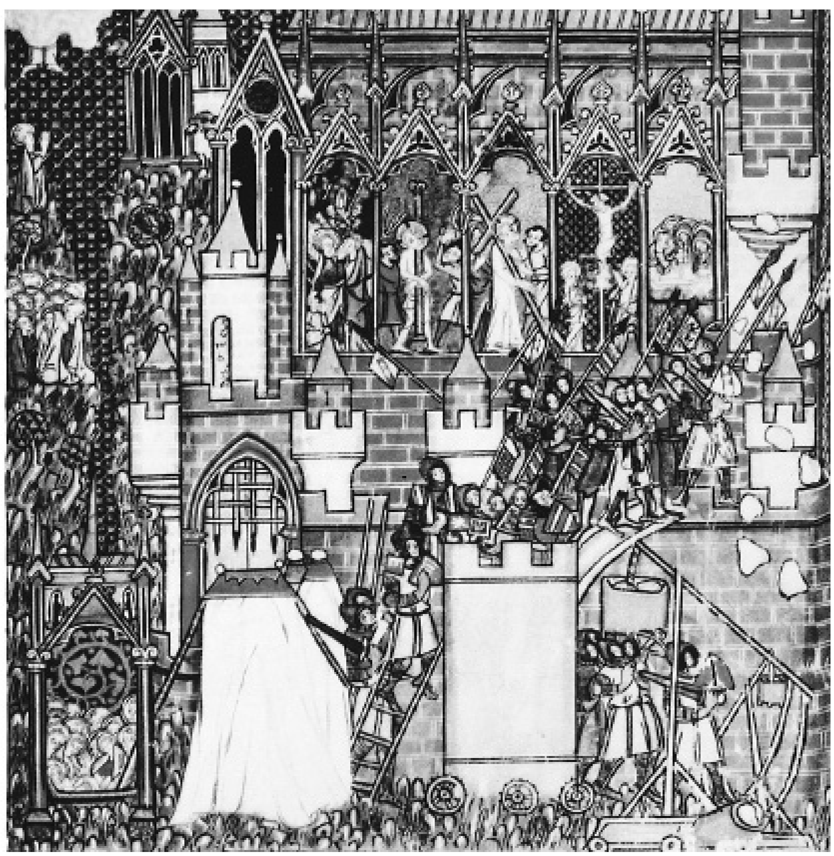


Figura 4.1
Cavalieri piatti e castelli deformati.

Nel 1425 Brunelleschi collocò un tale oggetto al centro del disegno di un famoso edificio fiorentino, il Battistero. Questa entità di dimensioni nulle, il punto di fuga, è un'impercettibile macchiolina sulla tela che rappresenta un punto infinitamente lontano lungo la direzione di osservazione (vedi fig. 4.2). Più gli oggetti raffigurati sono distanti da chi guarda, più sono prossimi al punto all'infinito e risultano, quindi, progressivamente ridotti in proporzione, fino a che ogni figura sufficientemente remota – persone, alberi, edifici – finisce in pratica per collassare in un punto a zero dimensioni e scomparire con esso. Lo zero al centro del dipinto contiene un'infinità di spazio.

Questo oggetto in apparenza contraddittorio conferì, come per magia, al disegno del Brunelleschi una così perfetta aderenza al tridimensionale edificio sacro da renderlo indistinguibile dall'originale. Tant'è vero che, quando l'autore mise a confronto la propria opera con l'autentica costruzione architettonica (traguardando quest'ultima da dietro la tavola del dipinto attraverso un foro, e interponendo o meno uno specchio), l'immagine riflessa si sovrappose esattamente ai contorni geometrici dell'edificio. La tecnica della fuga prospettica aveva trasformato un disegno bidimensionale nella perfetta simulazione di un corpo a tre dimensioni.

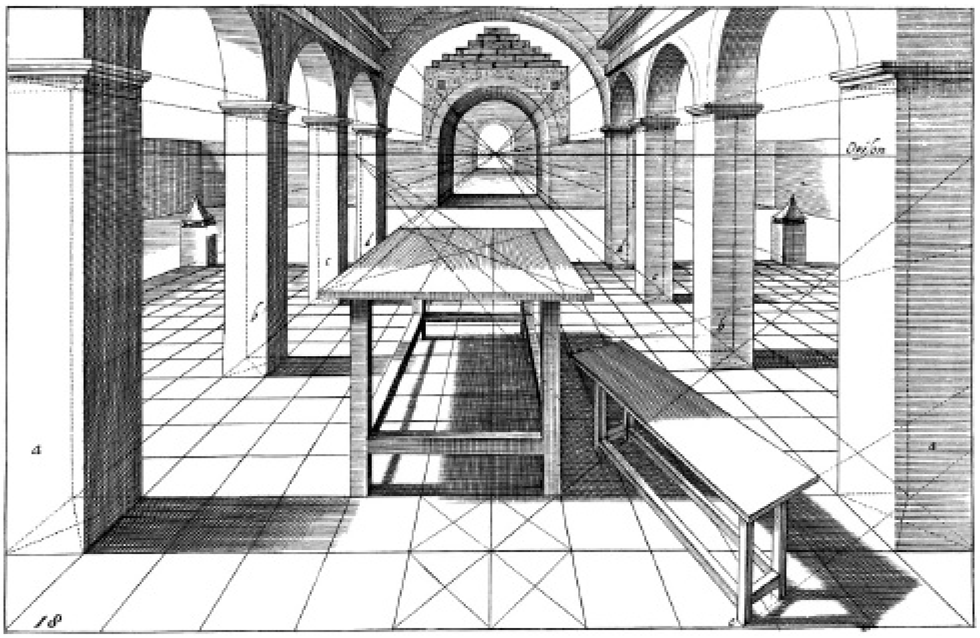


Figura 4.2
Il punto di fuga.

Non è per caso che zero e infinito sono tra loro legati nel punto di fuga; come la moltiplicazione per zero determina il collasso della retta di rappresentazione dei numeri sulla posizione 0, così esso fa sì che la gran parte dell'universo si addensi in un minuscolo puntolino. È ciò che accade in una «singolarità», concetto che diverrà assai importante in un successivo momento della storia della scienza, mentre a questo precoce stadio di sviluppo i matematici non sapevano, delle proprietà dello zero, granché di più degli artisti. Nel XV secolo infatti, questi ultimi erano matematici dilettanti; Leonardo da Vinci scrisse una guida al disegno prospettico, e in un aforisma confluito nel *Trattato della pittura* ammoniva: «Non mi legga chi non è matematico nelli mia princìpi». Questi matematici-artisti perfezionarono la tecnica della prospettiva e acquisirono in breve la capacità di rappresentare in tre dimensioni qualunque oggetto; con loro le arti non sarebbero più state vincolate a raffigurazioni prive di profondità. Lo zero aveva rivoluzionato il campo artistico.

Lo zero si trovava affatto letteralmente al centro del dipinto del maestro fiorentino; analogamente la Chiesa, il cui magistero era ancora fondato sulle idee aristoteliche, prese in esame zero e infinito, e un prelato tedesco al servizio della Curia romana, Nicola da Cusa, considerato il concetto di un universo senza confini, dichiarò prontamente che «*terra non est centrum mundi*»,[21] la Terra non costituisce il centro del mondo. La struttura ecclesiastica ancora non si rendeva conto di quanto pericoloso e rivoluzionario fosse quel concetto.

Uno degli antichi postulati della scolastica medioevale – un'asserzione altrettanto radicata della ripulsa del vuoto – riguardava l'unicità e centralità della Terra, la cui speciale collocazione nel punto mediano dell'Universo ne faceva l'unico luogo in grado di ospitare la vita, in accordo con il principio aristotelico del tendere di tutte le cose verso la regione di spazio a loro naturalmente consona. I corpi pesanti, quali i sassi e le persone, occupavano il mondo sublunare mentre quelli leggeri, come per esempio l'aria, appartenevano al cielo; questo non solamente implicava che i pianeti, in quanto oggetti celesti, fossero necessariamente costituiti di impalpabile sostanza aerea (la «quintessenza»), ma significava, per converso, che gli eventuali esseri viventi stanziati in cielo dovessero comunque ricadere sulla Terra. Se l'Universo era dunque racchiuso in un guscio, le creature non potevano che abitarne la mandorla centrale, e pensare che vi fosse vita sugli altri pianeti era da stolti quanto l'immaginarsi una sfera con due centri.

Nel dichiarare come Iddio onnipotente potesse senz'altro creare il vuoto ove lo ritenesse opportuno, Tempier generalizzò la capacità del Signore di infrangere ad arbitrio la fisica di Aristotele: generare la vita in altri mondi, produrre una moltitudine di altre Terre, fare sì che ognuna pullulasse di creature, rientrava certamente nei Suoi poteri, a dispetto di qualunque *Ipse dixit*.

Il Cusano spinse la temerità ad affermare che non soltanto Dio *poteva* farlo, ma che *doveva* averlo fatto. «Le contrade delle altre stelle sono affini a questa nostra,» sostenne «giacché crediamo che niuna è tra quelle orba d'abitatori».[22] Il firmamento sparso di un infinito polverio di stelle, i pianeti risplendenti nei cieli, il Sole e la Luna sfolgoranti ognuno di luce facevano credere – perché no? – che le stelle non fossero in definitiva che altri pianeti e soli e lune a pieno titolo, sulla cui volta celeste reciprocamente spiccasse fulgida la Terra. Nicola era certo che Dio avesse creato un infinito numero di mondi, per cui non era più la Terra il centro dell'Universo; tuttavia egli non venne dichiarato eretico, né la Chiesa reagì a tali innovative idee.

Un omonimo del futuro cardinale germanico aveva nel frattempo volto in teoria scientifica le speculazioni di questi. Niccolò Copernico dimostrò che la Terra, anziché trovarsi al centro dell'Universo, ruotava, viceversa, intorno al Sole.

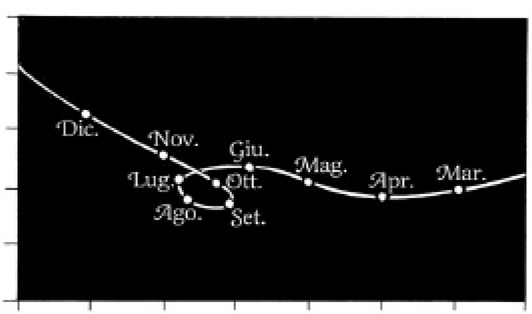
Canonico e medico originario dell'odierna Polonia, aveva appreso le matematiche come strumento per stendere le tavole astrologiche, quanto di meglio per la cura dei propri pazienti; tuttavia, nel corso delle proprie frequentazioni di stelle e pianeti si rese conto di quanto fosse complicato l'antico sistema ellenico per tracciare il moto degli astri; l'orologeria geostatica dei cieli tolemaici era estremamente accurata, però terribilmente involuta. I pianeti seguono durante l'anno la propria rotta celeste, ma alcuni di tanto in tanto paiono arrestarsi, retrocedere, per poi nuovamente lanciarsi in avanti. Per dare conto del bizzarro comportamento, Tolomeo aveva integrato il proprio meccanismo astrale con gli «epicicli», aggiuntive orbite circolari piccole rispetto a quelle principali («deferenti») di rivoluzione geocentrica e percorse contemporaneamente a essa, in maniera tale da fornire una spiegazione per il moto all’indietro o «retrogrado» di Marte, Giove e Saturno (vedi fig. 4.3).

La forza dell’idea copernicana stava, invece, nella semplicità. Anziché situare la Terra al centro di un Universo regolato da tanti ideali ingranaggi a loro volta disseminati di epicicli, il cosmologo polacco concepì un sistema in cui fosse il Sole a occupare la posizione centrale, con i pianeti in moto lungo mere orbite circolari; quelli esterni alla Terra sarebbero in tal modo apparsi retrocedere come questa li sorpassasse angolarmente, e di epicicli non vi sarebbe più stata necessità. Nonostante il modello non si accordasse del tutto con i dati dell’osservazione – pure essendone perfettamente corretto l’impianto eliocentrico, era inesatta l’ipotesi delle orbite puramente circolari –, era tuttavia molto più lineare che non la costruzione tolemaica. La Terra girava intorno al Sole – *terra non est centrum mundi*.

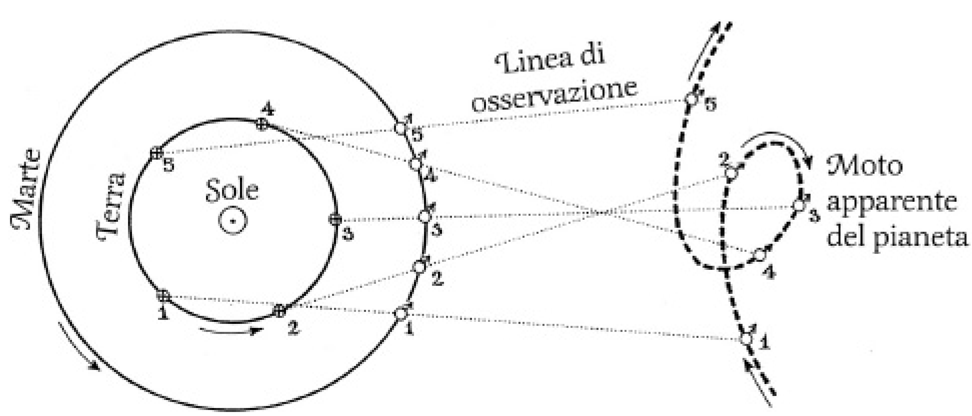
Nicola Cusano e Niccolò Copernico ruppero il guscio del circoscritto Universo di Aristotele e Tolomeo; con la Terra non più confortevolmente adagiata al centro di tutte le cose e il cosmo non più ristretto entro un involucro, l’Universo si stendeva ora fino all’infinito, punteggiato di innumerevoli stelle-mondo popolata ognuna di misteriose creature. Ma come poteva il Soglio di Roma rivendicare a sé la sede dell’unica vera Chiesa, non avendo modo di estendere la propria autorità agli altri sistemi solari? Forse altri papi regnavano nei diversi pianeti? Si aprivano alla Cattedra di Pietro funeste prospettive, considerando, in particolare, che il suo gregge aveva cominciato a dare parecchio filo da torcere già solamente nel mondo di immediata competenza.

Copernico pubblicò la propria opera magna dal letto di morte nel 1543, appena prima che la Chiesa iniziasse a stringere i freni sulle nuove idee, tanto che il suo *De revolutionibus orbium cœlestium* era perfino dedicato a papa Paolo III. In ogni modo, il magistero cattolico era ormai sotto attacco e, di conseguenza, la messa in discussione di Aristotele non poteva più venire tollerata.

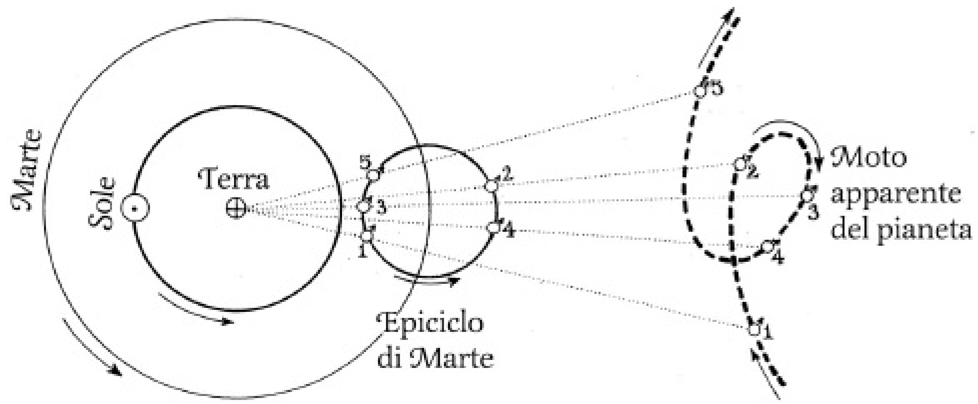
L’offensiva a tutto campo contro la Chiesa aveva preso le mosse nel 1517, allorché un religioso germanico sofferente di costipazione affisse un elenco di tesi riformatrici alla porta della cattedrale di Wittenberg. (La stitichezza di Lutero fu leggendaria, e alcuni studiosi ritengono che le grandi rivelazioni sulla fede gli balenassero durante le lunghe sedute sulla comoda. «L’allentamento in Lutero del soffocante vincolo della paura corrispondeva al rilascio dei suoi intestini», osserva un testo nell’esaminare tale teoria.) Con questo si avviò la Riforma protestante; intellettuali d’ogni dove presero a contestare l’autorità del Pontefice e, già ben prima della metà del Cinquecento, Enrico VIII d’Inghilterra, nell’intento di assicurare la regolare successione al trono, aveva disconosciuto l’autorità del papa, dichiarandosi a capo del clero britannico e sancendone il distacco da Roma.



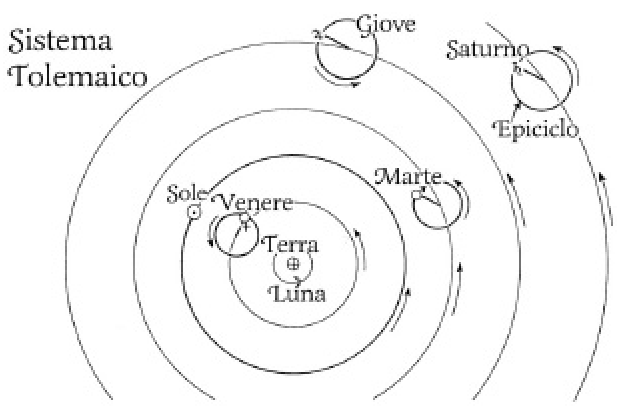
il moto retrogrado di CWarte (traiettoria dal vero)



Spiegazione Copernicana del moto retrogrado



Spiegazione Tolemaica del moto retrogrado



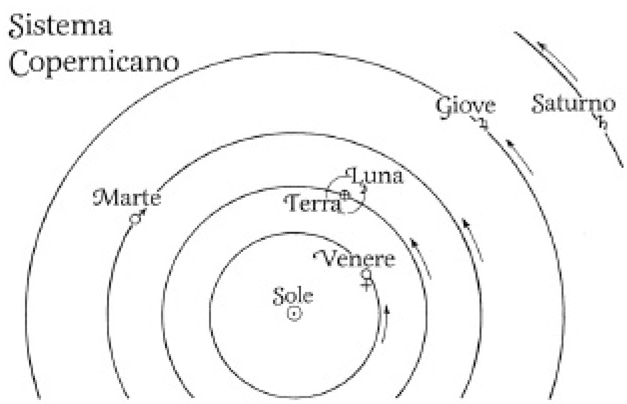


Figura 4.3
Epicicli, moto retrogrado, ed eliocentrismo.

La Chiesa cattolica non poteva che passare al contrattacco. Benché reduce da secoli di sperimentazioni con diverse filosofie, di fronte alla minaccia dello scisma essa ritrovò tutta la propria ortodossia e ripiegò sugli schemi di sempre: il pensiero d'impronta aristotelica di filosofi quali sant'Agostino e Boezio, la prova dell'esistenza di Dio di medesima estrazione. Dai prelati ai semplici ecclesiastici, porre in dubbio le antiche dottrine non fu più consentito; lo zero ritornò eretico; l'Universo a scatole cinesi andava accettato com'era, e il vuoto e l'infinito respinti. Una delle organizzazioni chiave nella diffusione di questi insegnamenti venne fondata l'anno stesso dello scisma anglicano: la Compagnia di Gesù, un ordine di intellettuali di grande cultura, particolarmente adatti a fare argine al protestantesimo. Ma per combattere l'eresia la Chiesa non disdegnava l'impiego di altri mezzi, e l'Inquisizione spagnola prese a mandare al rogo anche i protestanti nel 1543, l'anno della morte di Copernico e dell'emanazione dell'Indice dei libri proibiti da parte di papa Paolo III. Alla Controriforma si accompagnava il tentativo di ricostruire l'antico ordinamento attraverso l'eradicamento delle idee nuove – talché un concetto propugnato dal vescovo Étienne Tempier nel XIII secolo o da Nicola Cusano nel XV poteva comportare nel XVI la pena capitale.

Fu ciò che accadde allo sfortunato Giordano Bruno. Filosofo ex domenicano, aveva pubblicato nel 1584 *La cena de le ceneri* e *De l'infinito universo et mondi*, opere in cui difendeva il sistema copernicano e, come già Nicola Cusano, esponeva la tesi dell'infinità dei mondi; nel 1600 fu arso a Roma come eretico. Nel 1616 il Sant'Uffizio intimò niente meno che a Galileo Galilei, altro fautore delle teorie eliocentriche, di ripudiare le proprie teorie sul moto della Terra, e lo stesso anno il *De revolutionibus* di Copernico veniva posto all'Indice – un attacco ad Aristotele era considerato atto ostile nei confronti della Chiesa.

Nonostante lo zelo controriformatore, la nuova filosofia naturale non poteva più venire agevolmente soppressa; al contrario, grazie alle ricerche compiute dagli scienziati epigoni del cosmologo polacco, con l'andare del tempo essa si rafforzò. All'inizio del XVII secolo un altro religioso-astrologo, Johannes Kepler, perfezionò la teoria di Copernico rendendola più accurata di quella geostazionaria. Secondo l'astronomo e matematico tedesco, i pianeti, Terra compresa, seguivano orbite non circolari ma ellittiche; siccome i calcoli basati su questa ipotesi riuscivano a interpretare i movimenti planetari con esattezza mai raggiunta prima, non era più possibile sostenere per questa via la superiorità del sistema classico: il modello kepleriano era più semplice di quello tolemaico e, allo stesso tempo, più preciso. Nonostante le obiezioni ecclesiastiche, il primo alla fine avrebbe prevalso, e per un motivo molto semplice: Keplero aveva ragione e Aristotele torto.

La Chiesa tentò di rappezzare le falle della vecchia ideologia, ma il pensiero scolastico, il mondo geocentrico, il feudalesimo, erano oramai tutti feriti a morte, e ciò che i filosofi davano da millenni per scontato veniva ora posto in serio dubbio. Il sistema aristotelico non era più affidabile, ma al tempo stesso non c'era modo di rifiutarlo; che cosa allora si poteva tenere per certo? Letteralmente nulla.

Lo zero e il vuoto

> Sono come una via di mezzo tra Dio e il niente.
>
> Cartesio

Zero e infinito costituirono proprio il nucleo della guerra filosofica che infuriò nel XVI e XVII secolo. L'idea del vuoto aveva indebolito la dottrina aristotelica, e quella di un cosmo infinitamente grande aveva contribuito a demolire la concezione dell'Universo circoscritto da un guscio di sfere;

la Terra non poteva essere al centro della creazione divina. Sentendo venire meno il controllo sul proprio gregge, la Chiesa cattolica moltiplicò gli sforzi per proscrivere lo zero e il vuoto, ma ormai essi avevano messo radici; perfino i gesuiti, i più fidati tra gli uomini di cultura, erano combattuti tra le consolidate logiche aristoteliche e i nuovi schemi di pensiero incorporanti lo zero, il vuoto, l’illimitato e l’infinità.

Renato Cartesio aveva studiato presso i gesuiti, e come loro era diviso tra il vecchio e il nuovo; respinse il vuoto, ma lo pose al centro della propria concezione del mondo. Nato nel 1596 in una regione al centro dell’Esagono, egli avrebbe condotto lo zero alla sua posizione centrale nella successione dei numeri, e nel vuoto e nell’infinito avrebbe ricercato l’esistenza di Dio. Tuttavia non fu in grado di rigettare Aristotele completamente, ed ebbe tanto timore del vuoto da negarne la realtà.

Come già Pitagora, Cartesio era insieme filosofo e matematico. Probabilmente il suo lascito più duraturo è un ritrovato matematico, chiamato appunto «coordinate cartesiane» e noto a chiunque abbia studiato geometria alle superiori: sono quei gruppi di numeri in parentesi che descrivono la posizione di un punto in uno spazio; per esempio, la scrittura (4, 2) rappresenta il punto di un piano posto quattro unità di misura a destra e due unità sopra, ma a destra e sopra di che cosa? Dell’Origine, lo Zero (vedi fig. 4.4).

Lo scienziato francese comprese di non potere collocare l’1 all’intersezione delle sue rette di riferimento, o «assi coordinati», perché ciò avrebbe portato a un errore analogo a quello commesso dal monaco Beda nel riformare, estendendolo all’indietro, il calendario; ma, vivendo, a differenza di quegli, in un’Europa nella quale i numeri arabi erano comunemente noti, iniziò a contare da zero. All’esatto centro del sistema di coordinate, dove i due (nel caso del piano) assi si incrociano, siede lo zero, e tale origine – il punto (0, 0) – è il fondamento del riferimento cartesiano. (La notazione effettivamente usata dal suo inventore era un poco diversa da quella modernamente adottata; per esempio, egli non lo aveva allargato ai numeri negativi, ciò che presto fecero per lui i suoi colleghi.)

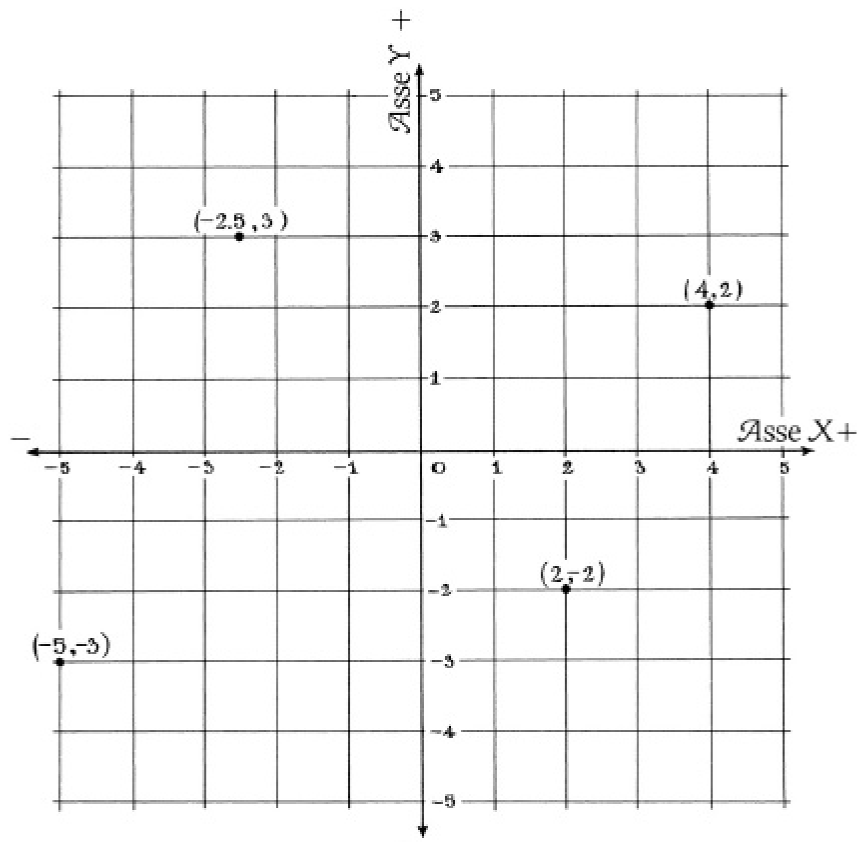


Figura 4.4
Coordinate cartesiane.

Cartesio si rese rapidamente conto della potenza del nuovo strumento, e se ne servì per tradurre forme e figure in equazioni e numeri. Tramite le coordinate cartesiane ogni oggetto geometrico – quadrati, triangoli, curve sinuose, per dire solo del piano – può venire rappresentato da un'equazione, vale a dire una relazione matematica. Se, per esempio, gli assi di riferimento sono ortogonali, una circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario non è che il luogo dei punti le cui coordinate *x* e *y* siano legate dall'eguaglianza $x^2 + y^2 - 1 = 0$, mentre in $y - x^2 = 0$ si riconosce una parabola con vertice nell'origine e fuoco sull'asse delle y nel punto $y = 1/4$. Venivano così gettate le basi della geometria analitica; l'arte occidentale della geometria e quella orientale dell'algebra non operavano più in campi separati, ma riguardavano i medesimi oggetti, poiché, per esempio, ogni figura bidimensionale diveniva esprimibile con un'equazione $f(x, y) = 0$ (vedi fig. 4.5). Ed essendo al centro del sistema di coordinate, lo zero risultava intrinseco a ogni forma geometrica.

Per il filosofo del dualismo, lo zero era implicito nella sfera di Dio, e l'infinito altrettanto. Essendo la vecchia dottrina di Aristotele in via di disgregazione, fedele alla propria formazione gesuitica, egli cercò di fare ricorso al nulla e all'infinito in sostituzione dell'obsoleta prova dell'esistenza di Dio. Al pari degli antichi, presuppose che non vi possa essere alcunché creato dal niente, neppure la conoscenza, il che significa che tutte le idee, filosofie, nozioni, tutte le scoperte a venire già esistano nella mente degli individui al momento della nascita, e che l'apprendimento sia semplicemente il processo di riscoperta del corpus di leggi sul funzionamento dell'Universo in precedenza instillato. Poiché nella mente degli uomini esiste il concetto di un essere infinito e perfetto, Cartesio dedusse che un'entità dotata di quelle caratteristiche – Dio – debba esistere; tutti gli altri esseri sono, invece, finiti e inferiori alla divinità; essi si collocano a una certa distanza tra Dio e il nulla e hanno sia dello zero sia dell'infinito.

Però, nonostante lo zero non facesse che apparire e riapparire in tutta l'opera del grande pensatore francese, egli riaffermò fin sul letto di morte che il vuoto – lo zero per eccellenza – non esistesse. Figlio della Controriforma, aveva studiato Aristotele proprio nel periodo in cui la Chiesa si stava maggiormente appoggiando ai princìpi della scolastica, e così di conseguenza indottrinato, negò sempre la possibilità della completa assenza di materia.

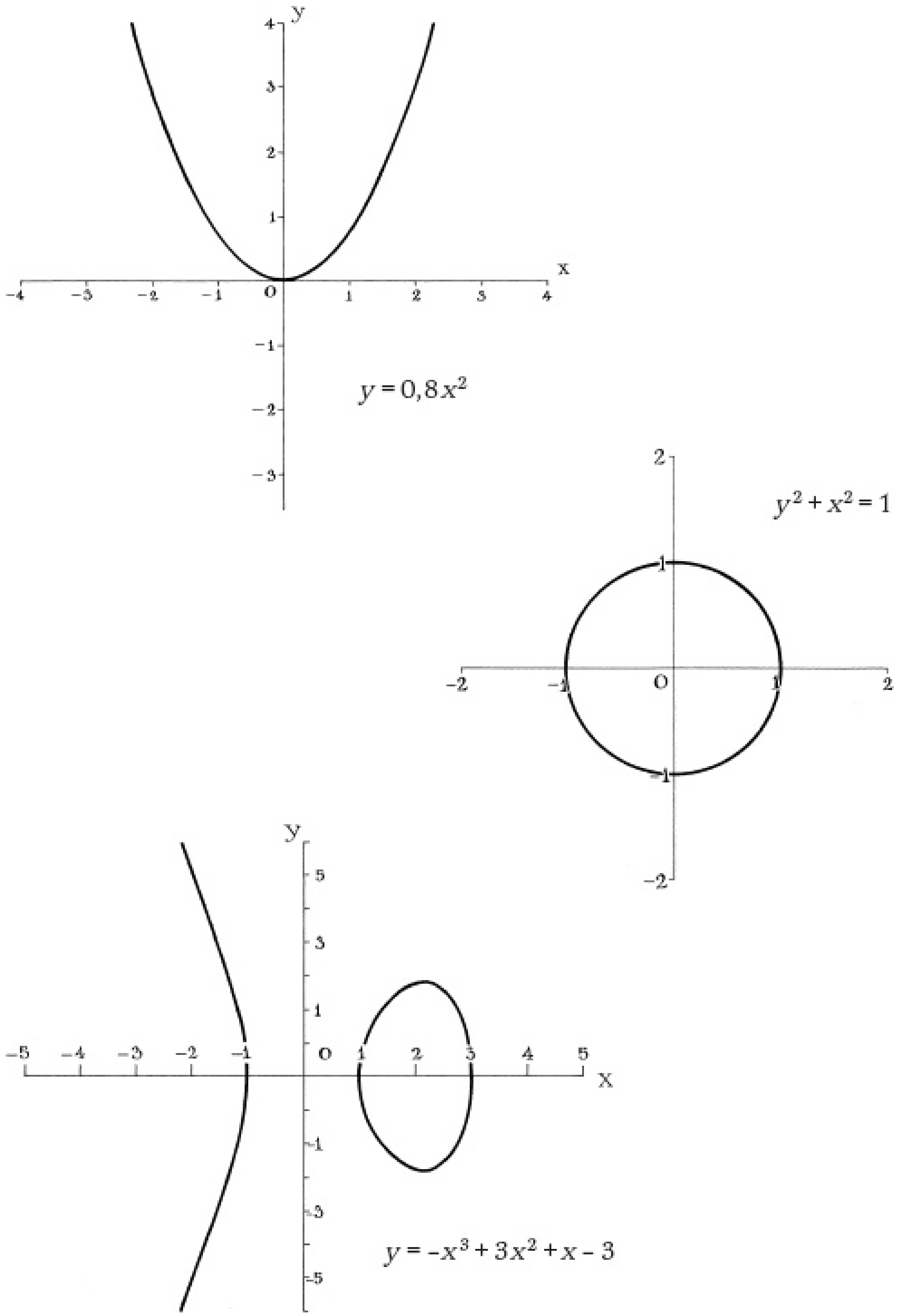


Figura 4.5
Esempi di parabola, circonferenza e curva polinomiale.

Mantenere una simile posizione non era facile, e Cartesio era certamente conscio dei problemi metafisici posti dalla totale ripulsa del vuoto pneumatico; più avanti negli anni doveva scrivere in proposito e in riferimento agli atomi: «Di codeste cose che recano contradizione bisogna assolutamente dire che non posson darsi. Tuttavia non si deve nemmeno negare che Dio possa farle, ove s’intenda che risolvesse Egli di mutare le leggi della natura». Però egli credeva – così come gli eruditi medioevali prima di lui – che nulla si muovesse realmente in linea retta, poiché, così facendo, avrebbe lasciato uno spazio vuoto dietro di sé; viceversa, tutto quanto al mondo doveva seguire percorsi circolari: un modo di pensare aristotelico a tutti gli effetti, ma ciò non toglie che il vuoto si apprestasse a scalzare il filosofo stagirita una volta per tutte.

Si insegna ancora oggi agli scolari «la natura ha orrore del vuoto», da parte di insegnanti privi di una vera cognizione dell’origine di tale sentenza, che rappresenta un’estensione di uno dei princìpi della filosofia di Aristotele: non esistono spazi privi di materia; se qualcuno tentasse di realizzarli, la natura vi si opporrebbe con tutti i mezzi a disposizione. Toccò al segretario e assistente di Galileo, Evangelista Torricelli, dimostrare, creando per la prima volta il vuoto pneumatico, la falsità dell’assunto.

Per sollevare l’acqua da pozzi e canali veniva impiegata una specie di pompa funzionante più o meno come una siringa gigante e costituita da un pistone scorrevole con minimo gioco entro un tubo; l’estremità inferiore veniva immersa e, alzando lo stantuffo, il liquido veniva aspirato verso l’alto. Come dichiara egli stesso nei *Dialoghi*, Galileo aveva appreso dai fontanieri italiani di un problema che si presentava: l’apparecchio riusciva a sollevare l’acqua non oltre i 10 metri circa, dopodiché il livello non seguiva più lo stantuffo, anche se questo continuava a salire. Lo scienziato pisano diede incarico di indagare il curioso fenomeno al proprio aiutante, il quale iniziò a condurre esperimenti per scoprire la ragione dell’imprevisto comportamento della pompa. Nel 1643 Torricelli riempì di mercurio un lungo tubo a fondo chiuso e, capovolgendolo, ne immerse verticalmente l’estremità aperta in un recipiente contenente la stessa sostanza. Se la manovra fosse stata fatta in aria, questa l’avrebbe rimpiazzato all’interno del tubo e l’argento vivo avrebbe confermato le aspettative versandosi semplicemente a terra; ma con il tubo sospeso sopra altro mercurio l’aria che avrebbe dovuto prenderne il posto veniva a mancare. Qualora la natura avesse avuto veramente orrore del vuoto, il contenuto del tubo avrebbe dovuto restare dov’era, in modo tale da non crearne. Il mercurio, però, non rimase dov’era; il suo livello discese un poco verso il basso, lasciando dello spazio in cima al tubo. Che cosa c’era in quello spazio? Niente, se non minime tracce di vapori di mercurio; per la prima volta nella storia il vuoto pneumatico era stato fatto e mantenuto a tutti gli effetti.

Indipendentemente dalla sezione del tubo usato da Torricelli, il mercurio scendeva sempre fino a che il menisco non si trovasse a 760 millimetri sopra il pelo libero del recipiente, o, al contrario, il liquido non saliva oltre tale altezza per opporsi al vuoto sovrastante. La natura rifuggiva sì il vuoto, ma non più in là di 760 millimetri; sarebbe stato un anti-Cartesio a spiegarne il motivo.

Nel 1623 Cartesio aveva ventisette anni e Blaise Pascal, il futuro suo avversario, ne aveva zero. Figlio di Étienne, abile scienziato e matematico, già da giovane dimostrò una genialità non inferiore a quella paterna, inventando, diciannovenne, una calcolatrice meccanica, chiamata «Pascalina», concettualmente simile ad alcuni di quegli apparecchi ancora in uso prima del diffondersi dei modelli elettronici.

Quando il futuro scienziato, matematico e filosofo aveva ventitré anni, suo padre si fratturò il femore scivolando sul ghiaccio e venne curato e assistito da alcuni novizi giansenisti, cattolici appartenenti a un movimento impostato principalmente sull'avversione nei confronti dei gesuiti; di lì a poco l'intera famiglia ne fu conquistata, e il giovane Pascal divenne, così, antigesuita e contro-controriformatore. Il mutamento di osservanza religiosa non fu per lui rose e fiori; il vescovo Jansen, promotore della dottrina in questione, aveva dichiarato la scienza peccaminosa e la curiosità dei fenomeni naturali assimilabile alla concupiscenza. Per buona sorte, la lussuria di Blaise ne sopravanzò per un certo periodo il fervore religioso, poiché egli doveva impiegare la scienza per venire a capo dell'enigma del vuoto.

All'incirca nel periodo della crisi di coscienza dei Pascal, un amico del capofamiglia – militare del genio – venne in visita e ripeté davanti a loro l'esperimento di Torricelli. Il figlio ne restò affascinato e prese a condurre esperienze in proprio con acqua, vino e ogni sorta di liquido; ne risultò *Nuovi esperimenti concernenti il vuoto*, pubblicato nel 1647. Quest'opera lasciava tuttavia irrisolto il principale quesito: perché il mercurio salisse solo fino a 76 centimetri e l'acqua non oltre i 10 metri. Le teorie del tempo si studiavano di preservare almeno in parte la filosofia di Aristotele, interpretando l'orrore della natura per il vuoto come «limitato», in grado, vale a dire, di neutralizzarne non più di una certa quantità – ma Pascal la pensava diversamente.

Nell'autunno del 1648, dando retta a un presentimento, egli inviò il cognato sul Puy de Dôme, in Alvernia, munito di un tubo a mercurio; sulla cima il livello della colonnina si mantenne notevolmente sotto i 760 millimetri (vedi fig. 4.6), ciò che gli permise di ironizzare: «Forse che la natura aborre maggiormente il vuoto nelle vallate che non sulle montagne?».[23]

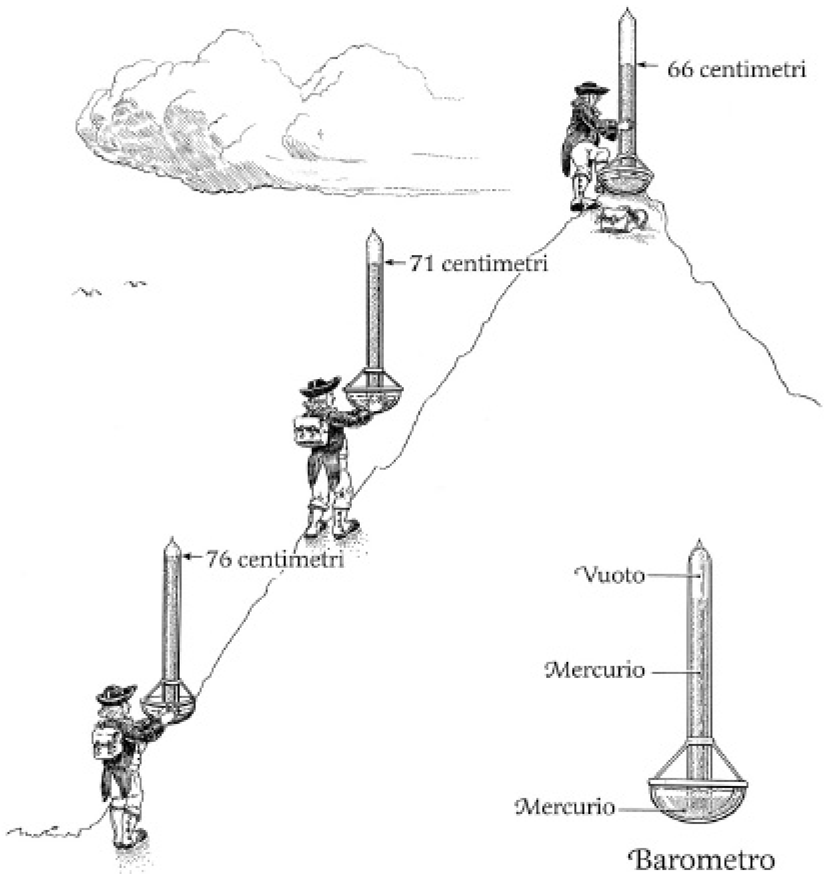


Figura 4.6
L’esperimento di Pascal.

Per il giovane scienziato questo risultato, in apparenza incongruo, dimostrava che non era l’orrore del vuoto a fare salire il mercurio, bensì la forza esercitata dal peso dell’aria sulla superficie esposta del mercurio nel recipiente, la quale lo spingeva in su lungo il tubo. La *pressione atmosferica* esercita sul pelo libero di un liquido (mercurio, acqua o quant’altro) una forza diretta verso il basso e ne provoca l’innalzamento laddove tale forza non agisca, nella fattispecie in corrispondenza della sezione del tubo chiuso all’estremità superiore; analogamente, basta premere leggermente sul fondo del tubetto di dentifricio perché un cilindro di pasta schizzi dall’apertura superiore. Ma l’atmosfera non esercita una forza illimitata, e riesce a innalzare la colonna di liquido fino a che il suo peso non bilanci la spinta verso l’alto (760 millimetri il mercurio e 10,33 metri l’acqua, in proporzione inversa alla minore densità); siccome, poi, in cima a un monte la pressione dell’aria è inferiore, tali sono pure la spinta e l’altezza raggiunta dalla colonna.

Si tratta di una sottile differenza concettuale: non è il vuoto che risucchia, è l’atmosfera che sospinge. In ogni maniera, l’esperimento di Blaise Pascal demolì l’asserzione di Aristotele secondo cui la natura ha orrore del vuoto; scrisse lo scienziato clermontese: «ha sovvertito questa credenza universale, secondo la quale la natura aborrisce il vuoto, e ha permesso di giungere a questa scoperta che non potrà mai venir confutata, che cioè la natura non prova alcun orrore del vuoto; che non fa assolutamente nulla per evitarlo, e inoltre che il peso della massa dell’aria è la vera causa».[24] Lo Stagirita era servito, e gli uomini di scienza smisero di temere il vuoto e cominciarono a studiarlo.

Fu pure nello zero e nell’infinito che Pascal, il fervente giansenista, ricercò la prova dell’esistenza di Dio – ma lo fece in maniera alquanto profana.

La scommessa su Dio

> In fondo, che cos’è l’uomo nella natura? Un niente a confronto dell’infinito, un tutto a confronto con il nulla, una via di mezzo tra niente e tutto.
>
> Blaise Pascal

Pascal fu un matematico oltre che uno scienziato; in campo scientifico compì indagini sull’assenza di materia – la natura del vuoto – e in matematica contribuì a creare una branca di studio interamente nuova: la teoria delle probabilità. Nel combinarla con lo zero e l’infinito, egli trovò Dio.

La teoria delle probabilità venne inventata per aiutare i ricchi aristocratici a vincere al gioco; con essa Pascal ebbe grande successo, ma la sua carriera di matematico non era destinata a durare. Attraversata il 23 novembre 1654 un’intensa esperienza spirituale, il suo credo – forse a causa delle convinzioni antiscientifiche del giansenismo maturate in lui a distanza di tempo, o forse per altre ragioni – lo indusse a un radicale abbandono della matematica e delle scienze (con una breve parentesi quattro anni più tardi, allorché, insonne per via di un’infermità, scoprì che il cimentarsi con la matematica lo faceva sentire meglio; ritenne, allora, che si trattasse di un segno della benevolenza divina per i propri studi). Si fece teologo, ma non poté tradire un passato profano, e anche nell’argomentare dell’esistenza di Dio seguitò a rifarsi al prosaico ambiente del gioco d’azzardo; egli sostenne che convenisse credere in Dio perché – alla lettera – la fede era una buona scommessa.

Così come avrebbe stimato il valore atteso, o speranza matematica, di un azzardo, Pascal analizzò il merito statistico dell’accettazione di Cristo come Salvatore, e grazie alla matematica dello zero e dell’infinito accertò la vantaggiosità della fede in Dio.

Prima di prendere in esame la scommessa in sé, analizziamo un semplice gioco poco diverso. Immaginiamo di potere prendere una di due buste contrassegnate «A» e «B», il cui contenuto sia poi stabilito dal lancio di una moneta; se viene testa, A contiene una bella banconota da 100 € nuova di zecca e B è vuota; se viene croce, A è vuota e B contiene denaro, ma questa volta ben 1 000 000 €. Quale busta scegliere?

B, naturalmente! Il suo valore è assai maggiore di A, e non è difficile mostrare perché, impiegando uno strumento del calcolo probabilistico, detto «speranza», che nel nostro caso quantifica l’aspettativa sul valore delle due buste.

Nella busta A possono o meno trovarsi 100 €; siccome può contenere la somma di denaro, essa ha un certo valore, ma non pari a 100 €, perché può anche essere vuota. In effetti, per stabilirne il valore lo statistico calcolerebbe la somma dei possibili contenuti pesati in base alle corrispondenti probabilità:

1 probabilità su 2 di trovare 0 €	0,5 × 0 €	= 0 €
1 probabilità su 2 di trovare 100 €	0,5 × 100 €	= 50 €
	Speranza	= 50 €

La conclusione sarebbe che il valore atteso della busta A è pari a 50 €; analogamente per la B:

1 probabilità su 2 di trovare 0 €	0,5 × 0 €	= 0 €
1 probabilità su 2 di trovare 1 000 000 €	0,5 × 1 000 000 €	= 500 000 €
	Speranza	= 500 000 €

Il valore atteso della busta B è dunque 500 000 €, diecimila volte più grande di quello di A; potendo scegliere, è quindi evidente che la decisione giusta è in favore di B.

La scommessa immaginata da Pascal non è diversa da questo gioco; solamente, vi si fa uso di una diversa coppia di buste: la fede cristiana e l’ateismo (di fatto, il grande giansenista vagliò solamente l’opzione cristiana, ma l’altra ne rappresenta il logico complemento). Per amore di tesi, supponiamo per il momento che l’esistenza di Dio (naturalmente Pascal tenne conto della sola divinità cristiana) sia data 1 a 1 (il 50%). Optare per la busta della fede equivale ad adottare una condotta di vita devota e osservante, e se la giocata è questa, comportandosi da buoni cristiani si presentano dopo la morte due possibilità: se non c’è alcun Dio, svanire nel nulla, ma se Dio esiste, andare in Paradiso e godere dell’eterna beatitudine.

Cosicché il valore atteso del vivere cristianamente ammonta a:

1 probabilità su 2 di svanire nel nulla	$0{,}5 \times 0$	$= 0$
1 probabilità su 2 di andare in Paradiso	$0{,}5 \times \infty$	$= \infty$
	Speranza	$= \infty$

Mezza infinità è infatti ancora l'infinità, quindi il valore di essere cristiani è infinito. Che accade, ora, se si punta invece sull'ateismo? Avendo visto giusto – se Dio non esiste –, non si guadagna niente dall'avere avuto ragione: se infatti Dio non c'è, non c'è nemmeno il Paradiso; ma se la scelta è sbagliata, allora Dio esiste, e la conseguenza è l'Inferno per l'eternità: infinità negativa. Cosicché il valore atteso dell'essere ateo risulta:

1 probabilità su 2 di svanire nel nulla	$0{,}5 \times 0$	$= 0$
1 probabilità su 2 di andare all'Inferno	$0{,}5 \times -\infty$	$= -\infty$
	Speranza	$= -\infty$

Infinità negativa, peggio di così non si può. La persona sensata non potrà che scommettere sulla vita da cristiano anziché da ateo.

Tuttavia, abbiamo fatto in precedenza la supposizione che la probabilità dell'esistenza di Dio sia il 50%; che cosa accadrebbe se fosse diversa, per esempio solo una su mille? Il valore atteso del vivere cristianamente sarebbe:

999 probabilità su 1000 di svanire nel nulla	$0{,}999 \times 0$	$= 0$
1 probabilità su 1000 di andare in Paradiso	$0{,}001 \times \infty$	$= \infty$
	Speranza	$= \infty$

Non cambia nulla: la vincita resta l'infinità positiva, così come l'infinità negativa resta quanto paga l'ateismo. È sempre indiscutibilmente preferibile essere buoni fedeli, indipendentemente dal fatto che l'esistenza divina sia equiprobabile o più, così come sia una su mille, su un milione o su mille fantastilioni. L'unica eccezione è che sia uguale a zero.

Ove Dio certamente non esistesse, la «scommessa di Pascal» (come fu chiamata) perderebbe significato; la speranza matematica del premio della fede diverrebbe uguale a $0 \times \infty$, un'espressione priva di senso e di valore. Sull'assoluta impossibilità dell'esistenza di Dio nessuno, però, avrebbe messo la mano sul fuoco, per cui, quale che sia il modo di vedere le cose e grazie alla magia di zero e infinito, credere in Dio è sempre meglio. Di certo Pascal sapeva come piazzare la propria puntata, anche se dovette abbandonare la matematica per vincere la scommessa.

Capitolo 5

Infiniti zeri e matematici miscredenti

Lo zero e la rivoluzione scientifica

> Con l'introduzione (…) dell'infinitamente piccolo e infinitamente grande, i matematici, soggetti solitamente di grande rigore etico, persero lo stato di grazia (…). Il mondo edenico delle validità assolute e delle prove irrefutabili svanì per sempre; ebbe inizio il regno della controversia, nel quale siamo al punto in cui la più parte di noi integra e deriva non perché sappia ciò che sta facendo, ma per atto di fede, perché fino a ora i risultati sono sempre stati giusti.
>
> Friedrich Engels, *La scienza sovvertita dal signor Eugenio Dühring*

Zero e infinito avevano smantellato la filosofia aristotelica; il vuoto e l'illimitatezza del cosmo avevano liquidato l'Universo in scatola nonché il concetto dell'orrore della natura per l'assenza di materia. Il sapere degli antichi fu messo da parte, e gli scienziati iniziarono a penetrare le leggi che presiedono ai fenomeni naturali. Alla rivoluzione scientifica si poneva però ancora un problema: lo zero.

Al fondo del nuovo e formidabile strumento della scienza – l'analisi infinitesimale – risiedeva, infatti, una contraddizione. I suoi inventori, Isaac Newton e Wilhelm Leibniz, crearono il metodo di calcolo più potente di tutti i tempi con il dividere per zero e l'addizionare zeri in quantità infinita, procedimenti altrettanto assurdi che non sommare 1 + 1 per ottenere 3 e che, in essenza, sfidavano la stessa logica della matematica. Accettarne la metodologia equivaleva a compiere un atto di fede, ma gli scienziati quell’atto lo fecero, perché l’analisi è il linguaggio della natura. Per comprendere a fondo quel linguaggio, la scienza doveva prima soggiogare gli infiniti zeri.

Gli infiniti zeri

> Quando, dopo mille anni di letargo, il pensiero europeo si scosse dall’effetto dei sonniferi che i padri della chiesa gli avevano somministrato, il problema dell’infinito fu uno dei primi ad essere riesumato.
>
> Tobias Dantzig

La malia di Zenone tenne in ostaggio la matematica per duemila anni. Achille pareva condannato per sempre a inseguire la tartaruga senza riuscire a raggiungerla. Nel semplice enigma si annidava l’infinito, e i passi senza fine di Achille sconcertavano gli ellenici, che non pensarono mai di sommare tra loro un numero illimitato di elementi, anche se le falcate del pelide si avvicinavano vieppiù alla lunghezza nulla. Non si vede, infatti, come potessero addizionare incrementi di dimensione virtuale zero senza dello zero possedere il concetto. Ma in ogni modo, non appena in Occidente esso fu recepito, i matematici iniziarono ad ammansire l’infinito e misero fine alla bimillenaria competizione.

Nonostante la successione immaginata da Zenone sia composta di infiniti termini, siamo in grado di sommare tutti i passi tra loro pur rimanendo nei limiti del finito: 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + … = 2. Il primo cui riuscì questo gioco di prestigio – addizionare un numero infinito di addendi per ottenere una somma finita – fu un logicomatematico britannico del XIV secolo, Richard Swineshead (o Suiseth, detto «Il calcolatore»). Costui prese in esame la successione infinita 1/2, 2/4, 3/8, 4/16, …, $n/2^n$,

… e ne sommò gli elementi, ottenendo come risultato due. Dopotutto, i numeri della sequenza si avvicinano sempre più allo zero, e ingenuamente si potrebbe credere che questo basti a fare sì che il valore della loro somma resti finito; ma, ahimè, l'infinito non è affatto così banale.

Più o meno nel periodo in cui Suiseth scriveva la propria opera, un altro matematico, il francese Nicolas Oresme, nelle sue *Quaestiones super Geometriam Euclidis*, si cimentò nella somma di un'altra sequenza illimitata di numeri, la serie cosiddetta «armonica»:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

Come già nella serie di Zenone e in quella di Suiseth, i singoli addendi sono sempre più prossimi a zero; però, quando Oresme cercò di addizionarli, si rese conto che il risultato continuava a crescere: sebbene essi tendano a zero, la loro somma va all'infinito. Il matematico lo dimostrò raggruppandoli come segue (senza contare il primo termine unitario): 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + … Il primo gruppo vale 1/2, il secondo è maggiore di (1/4 + 1/4) = 1/2, il terzo è maggiore di (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) = 1/2, e di questo passo la somma continua a crescere ogni volta di una quantità superiore a 1/2, divergendo in tal modo a infinito. Anche se gli addendi si avvicinano di per sé a zero, non lo fanno con sufficiente rapidità, e così una somma di infiniti termini può essere infinita nonostante che quelli tendano a zero. Ma non è questo ancora il lato più singolare delle somme illimitate; lo zero medesimo non sfugge alla bizzarra natura dell'infinità.

Consideriamo la serie seguente: 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + + 1 − …; non è così difficile mostrare che vale zero, infatti

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

è lo stesso che

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

che dà evidentemente zero. Ma attenzione! Facciamo il raggruppamento in questo altro modo,

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots,$$

che equivale a

$$1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

e manifestamente otteniamo come risultato uno. La medesima infinita somma di zeri può produrre tanto 0 che 1, e un monaco camaldolese matematico alla corte di Cosimo III de' Medici, padre Luigi Guido Grandi, perfino se ne servì allo scopo di dimostrare come Dio potesse creare l'Universo (1) dal niente (0). Infatti, la serie può essere resa uguale alla quantità che si vuole; per esempio, per farle produrre il risultato 5 basta sostituire gli addendi 1 e − 1 con 5 e − 5, e subitamente siamo in grado di dimostrare come 0 + 0 + 0 + + 0 + … sia uguale, per l'appunto, a 5.

Addizionando un'infinità di addendi si possono ottenere le cose più strane e contraddittorie. Se i termini tendono a zero, certe volte la serie è convergente, rappresentata da un bel numero finito e ordinario come 2 o 53, e certe altre diverge, invece, verso l'infinito; allo stesso tempo, un'infinita somma di zeri può eguagliare un valore qualsiasi – che può mutare arbitrariamente. Stava succedendo qualche cosa di parecchio bizzarro, e nessuno sapeva come davvero maneggiare l'infinito.

Per fortuna il mondo della realtà fisica mostrava maggiore buon senso che non il regno della matematica. Le somme infinite sembrano funzionare il più delle volte, fintanto che si ha a che fare con problemi concreti come stabilire il volume di una botte da vino – e il 1612 per il vino fu un'annata eccezionale.

Johannes Kepler – colui che concepì il moto dei pianeti in orbite ellittiche – passò, per l'appunto, quell'anno tra fusti e barili, poiché, da figlio di vinaio qual era, si era reso conto che i metodi impiegati da vinai e bottai per stimarne la capacità erano estremamente rozzi. Per cavare d'impiccio gli operatori enologici, lo scienziato tedesco tranciò (concettualmente) le botti in un numero infinito di pezzi infinitamente piccoli, per poi nuovamente ricomporli in modo da ricavare, per somma, il volume cercato. Al fine della misura dei recipienti potrà forse sembrare un modo di procedere primitivo, ma si trattò, in realtà, di un'idea luminosa.

Per semplificare un poco il problema, invece che un oggetto a tre dimensioni prendiamo in considerazione un oggetto bidimensionale, quale un triangolo. Quello in figura 5.1 ha, per esempio, la base di 8 unità e l'altezza pure di 8 unità, e siccome l'area del triangolo è la metà della base moltiplicata per l'altezza, in questo caso essa è numericamente uguale a 32.

Cerchiamo adesso di valutare la dimensione superficiale del triangolo inscrivendovi all'interno dei rettangoli. Al primo tentativo otteniamo un'area di 16, alquanto al di sotto del valore effettivo suddetto; ma la seconda volta già va meglio: con tre rettangoli essa risulta uguale a 24, un valore più vicino ma non ancora accettabile; e la terza prova fornisce 28, ancora più vicino. Si vede allora che, rendendo i rettangoli via via più piccoli (con il fare tendere a zero la loro larghezza di base, indicata con il simbolo Δx), il risultato approssima sempre meglio 32, il valore vero cercato.

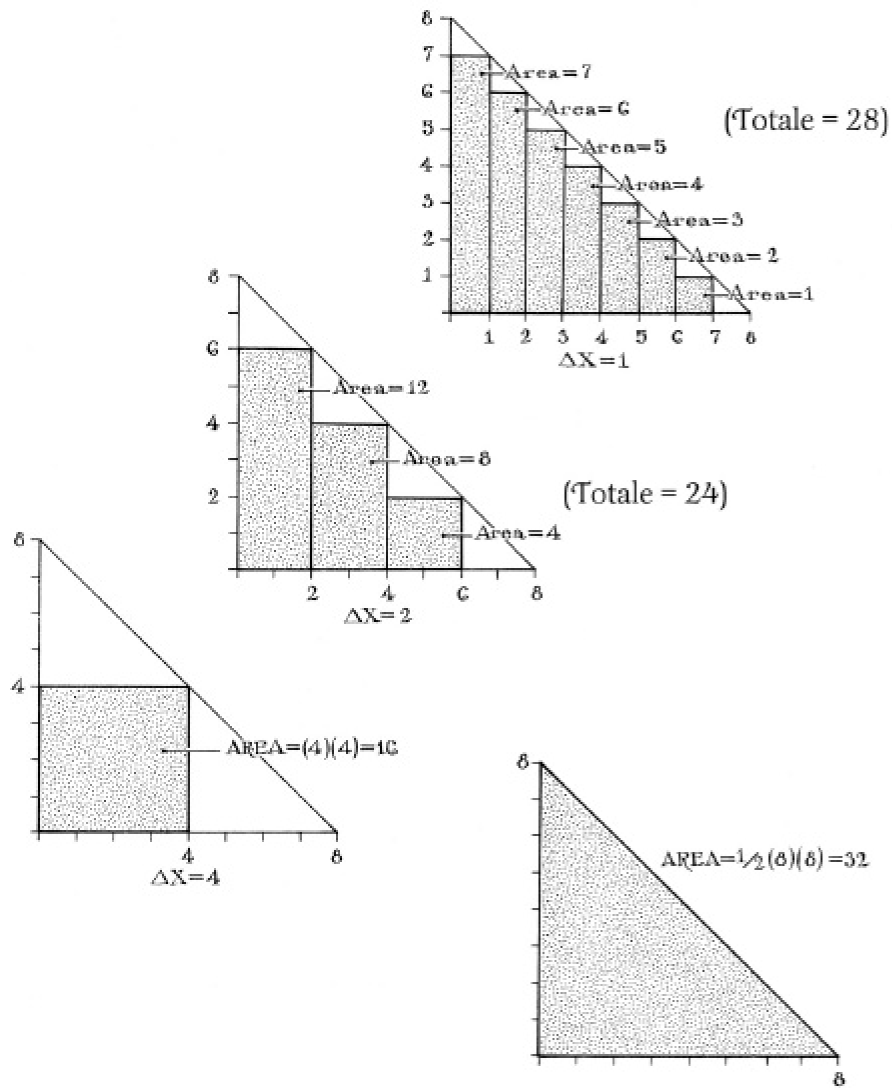


Figura 5.1
Approssimazione dell’area del triangolo.

Generalizzando per una curva di equazione $y = f(x)$, l’area complessiva dei rettangoli nell’intervallo da a a b è data da $\sum_{1}^{N}{}_i f(x_i)\Delta x$, dove $f(x_i)$ è il valore della curva in corrispondenza del rettangolo i-esimo (l’altezza variabile del rettangolo), Δx la dimensione degli intervalli sull’asse x (la base dei rettangoli, uguale per tutti), e $\sum_{1}^{N}{}_i$ sta a indicare la somma di ogni area rettangolare dal primo all'ultimo degli $N = (b - a)/\Delta x$ elementi i considerati. In notazione corrente, al tendere di Δx a 0 il simbolo $\sum$ viene sostituito da $\int$ e Δx da dx, porgendo così $\int_a^b f(x)dx$ per l'espressione della somma integrale.

In una delle sue opere meno conosciute, *Nova stereometria doliorum vinariorum*,[25] Keplero mette in opera il procedimento nelle tre dimensioni, suddividendo i barili in fette circolari piane per poi sommarne i volumi. Come minimo, egli non si fece intimidire da un pure macroscopico problema: con l'andare a zero di Δx, viene in sostanza eseguita l'addizione di un'infinita quantità di zeri, un'operazione che non ha alcun senso. Piuttosto, ignorò la difficoltà – benché da un punto di vista logico il procedimento seguito fosse insostenibile, la risposta che forniva era quella giusta.

L'astronomo tedesco non fu il solo eminente scienziato a fare gli oggetti a fette infinitamente sottili. Anche Galileo ebbe a meditare su queste porzioni elementari di volume e sulla loro illimitata numerosità, e scrisse: «ma ricordiamoci che siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la lor grandezza, e questi per la lor piccolezza»; pure di fronte al profondo arcano degli infiniti zeri egli ne intuì la potenza come strumento: «or pensate quel che saranno congiunti insieme»,[26] e a questo interrogativo del maestro l'allievo Bonaventura Cavalieri avrebbe dato una parziale risposta.

Invece delle botti, egli tagliuzzò figure geometriche. Riteneva che ogni superficie, come, per esempio, quella di un triangolo, fosse composta di segmenti unidimensionali affiancati in numero infinito l'uno all'altro, e che similmente un solido fosse costituito da una eguale quantità di superfici di spessore nullo; codesti segmenti e superfici, indivisibili nella dimensione loro mancante, corrispondevano a un livello di dettaglio sotto cui non era possibile scendere: «atomi» di area e di volume. Così, poi, come Keplero con le proprie minutissime sezioni aveva misurato la capacità delle botti, Cavalieri sommò questi infiniti atomici zeri per determinare area e volume degli oggetti geometrici.

Dal punto di vista geometrico la formulazione del problema in quei termini era affatto incresciosa: sommare segmenti di area nulla, seppure in numero infinito, non significa ottenere una figura a due dimensioni, né da infinite superfici a volume zero si può cavare un solido. La questione era sempre la stessa: infiniti zeri non hanno senso logico. Epperó il procedimento di Cavalieri forniva puntualmente la risposta corretta, e a riguardo delle difficoltà di logica e filosofia i matematici finirono per fare spallucce, particolarmente in quanto gli indivisibili – o «infinitesimi», come poi furono detti – risolvevano un rompicapo di sempre: il problema della tangente.

La tangente è una retta osculante una curva, che esiste per ogni punto di continuità di una curva che si sviluppa nello spazio o nel piano; lì la retta la sfiora soltanto, scompartendo con essa quell'unico punto. Così definita, i matematici si resero conto della sua fondamentale importanza nello studio dei moti. Immaginiamo, per esempio di roteare una palla trattenuta da uno spago; essa segue una traiettoria circolare, ma se il veicolo viene di colpo reciso la palla partirà lungo una linea tangente. Allo stesso modo, la mano del lanciatore di baseball descrive un arco al momento del lancio, e come lascia andare la palla quella parte lungo la tangente nel punto di rilascio (vedi fig. 5.2); come diverso esempio, se vogliamo trovare dove esattamente la palla si fermerà ai piedi di un'altura, dovremo cercare un punto dove la tangente sia orizzontale. L'inclinazione, o *pendenza*, della retta tangente possiede in fisica importanti proprietà: se, per esempio, una curva rappresenta la posizione nel tempo di una bicicletta in moto, allora la pendenza della tangente ne fornisce in ogni dato punto la velocità al momento in cui vi transita.

Fu per questa ragione che più di un matematico del XVII secolo – Evangelista Torricelli, i francesi René Descartes (Cartesio) e Pierre Fermat (noto per il suo celebre «ultimo teorema»), l'inglese Isaac Barrow, e altri – idearono diversi metodi di calcolo della retta tangente a un assegnato punto di una curva; e, al pari di Cavalieri, ognuno di loro si trovò di fronte gli infinitesimi.

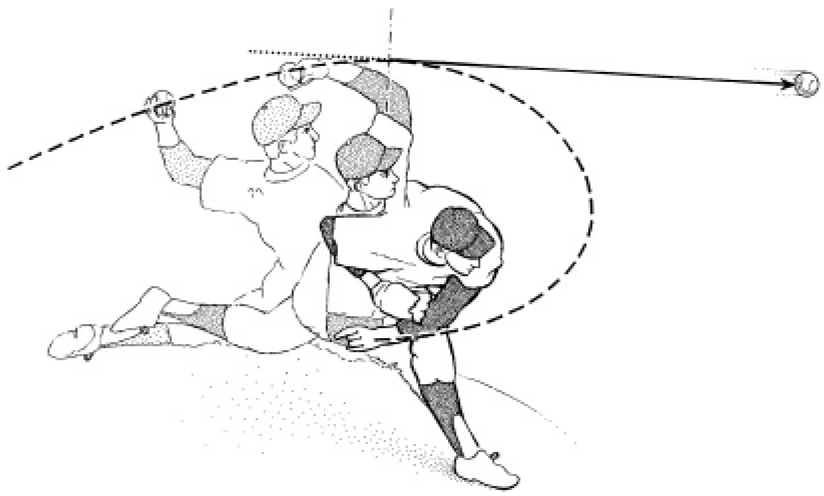


Figura 5.2
L'uscita per la tangente.

Per tracciare la tangente in un punto la cosa migliore è andare per approssimazione. Si individui un altro punto della curva abbastanza vicino, e, se questa non ha andamento troppo accidentato, la retta che passa per i due somiglierà abbastanza alla tangente. L'approssimazione migliora via via che si riduce la distanza tra la coppia di punti, per lasciare il posto all'esatta individuazione non appena essa giunga a zero (vedi fig. 5.3). Ma naturalmente c'è un problema.

La proprietà principale di una retta è la sua pendenza, e per misurarla i matematici tengono conto di quanto essa progredisca in un determinato intervallo. Supponiamo, per esempio, di procedere in automobile verso la cima di un'altura in direzione est, e di guadagnare 100 metri di quota per ogni chilometro di spostamento a est; la pendenza, o coefficiente angolare, non è altro che il rapporto tra la variazione di altitudine (100 metri) e la distanza percorsa in orizzontale (1000 metri, valore diverso dalla distanza su strada, che è maggiore), quindi 100 : 1000 = 10%. Per una retta è lo stesso: in un riferimento cartesiano, indicato con il simbolo Δy la differenza di «quota» tra due punti e con Δx la loro distanza «orizzontale», per conoscerne la pendenza basterà calcolare il valore di $\Delta y/\Delta x$.

Ma nella determinazione della tangente attraverso quella della sua pendenza, alla fine del descritto procedimento interviene a mandarlo all'aria lo zero. Via via che la retta tangente viene sempre meglio approssimata, i punti della curva usati per definirla si fanno più vicini l'uno all'altro, il che significa che tanto la distanza Δx che la differenza Δy tendono a zero, e nel momento in cui si perviene alla pendenza effettiva essa varrebbe dunque 0/0. Ma zero diviso per zero può indifferentemente assumere ogni possibile valore numerico, e allora che significato avrà mai una tangente trovata in questo modo?

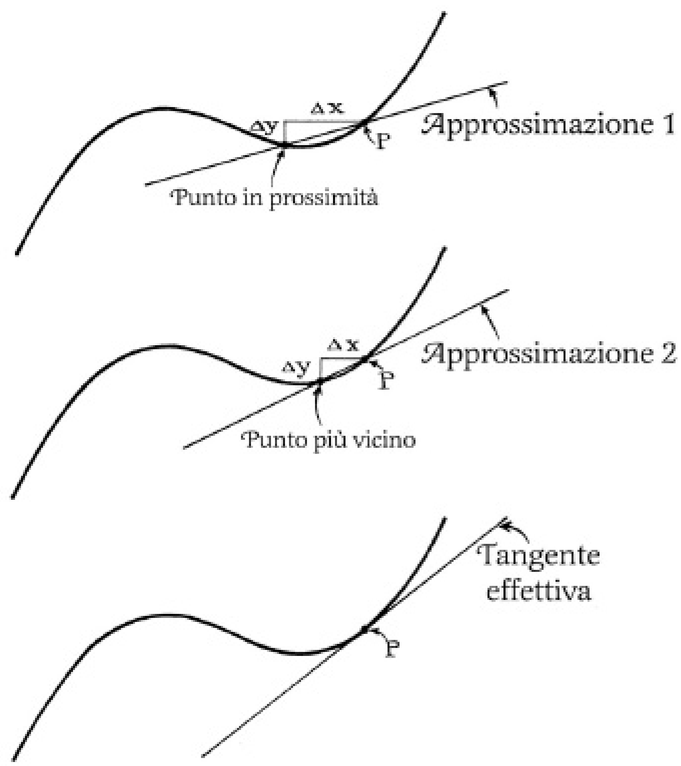


Figura 5.3
L'approssimazione della tangente.

Ogni volta che i matematici provavano a trattare con l'infinito o con lo zero incontravano incoerenze di ordine logico. Per determinare il volume di una botte o l'area di un segmento di parabola sommavano un infinito numero di zeri, per calcolare la tangente di una curva dividevano zero per se stesso; queste due quantità estreme facevano apparire intrinsecamente contraddittorie le semplici azioni di tracciare una tangente o assegnare a un'area la sua misura. Ma questi inconvenienti sarebbero stati relegati a un'interessante nota a piè di pagina, se non fosse stato per un piccolo particolare: zeri e infiniti costituivano la chiave per la comprensione della natura.

Lo zero e il calcolo mistico

Se alziamo il velo e vi guardiamo sotto (...) scopriamo vuotaggine, oscurità e confusione alquante, per non dire, se non mi sbaglio, dirette impossibilità e contraddizioni addirittura. (...) Non sono [gli incrementi tendenti a zero] né quantità finite, né quantità infinitamente piccole, e neppure nulle. Non potremmo forse chiamarle fantasmi di quantità svanite?

George Berkeley

Tanto il problema della tangente che quello dell'area si scontrarono con le medesime difficoltà riguardanti zero e infinito, ma non bisogna stupirsene, perché si tratta in entrambi i casi della stessa cosa. Sono le due facce dell'analisi infinitesimale, uno strumento d'indagine scientifica di gran lunga più potente di qualunque altro mai visto prima. Il telescopio, per esempio, aveva dato modo agli scienziati di individuare corpi celesti mai in precedenza osservati; ma, d'altra parte, l'analisi fornì loro la possibilità di formulare le leggi che ne governano il moto – e a tempo debito anche le leggi che di quegli astri avrebbero svelato il segreto della formazione. Il calcolo degli infinitesimi costituiva il vero e proprio linguaggio della natura, eppure la sua stessa intima struttura è intessuta di zeri e di infinità che minacciavano di disgregarlo.

Il primo scopritore dell'analisi quasi non arrivò a tirare il fiato. Nato prematuro il giorno di Natale del 1642, Isaac Newton venne al mondo a fatica, così minuto da trovare posto in una brocca da un litro. Il padre, piccolo possidente, era morto due mesi prima.

Nonostante un'infanzia traumatica e una madre che voleva indirizzarlo alla gestione del fondo di famiglia, Newton entrò nel 1661 a Cambridge, dove fiorì il suo genio. In capo a pochi anni aveva messo a punto un procedimento sistematico per la risoluzione del problema della tangente con il quale era in grado di calcolarla per qualsiasi punto di una curva continua; esso è ora noto sotto il nome di «derivazione», ma formalmente il metodo del fisico e matematico inglese somiglia poco a quello in uso oggi.

Il suo modo di calcolare la derivata si basava sulle cosiddette «flussioni», o flussi, di espressioni matematiche da lui dette «fluenti». Per fare un esempio, si consideri la funzione $y = f(x)$, dove

$$y = x^2 + x + 1 \qquad [1]$$

I fluenti sono qui y e x, e Newton fece conto che entrambi varino linearmente – «fluiscano» – nel tempo e ne indicò la velocità di variazione – la flussione – con $\dot{y}$ e $\dot{x}$ rispettivamente. A questo punto egli ricorse a un artificio notazionale, facendo sì variare i fluenti, ma solo di quantità infinitesime; in pratica, non diede loro il tempo di cambiare. In notazione newtoniana, y diviene così $(y + o\dot{y})$ e x diviene $(x + o\dot{x})$, dove o rappresenta l'intervallo di tempo trascorso, che, moltiplicato per la velocità di variazione, fornisce l'entità della variazione medesima; come vedremo, o è quasi, ma non proprio, uguale a zero. Sostituendo nella [1] i valori incrementati porge

$$(y + o\,\dot{y}) = (x + o\,\dot{x})^2 + (x + o\,\dot{x}) + 1 \qquad [2]$$

da cui, espandendo il termine quadratico, si ottiene

$$y + o\,\dot{y} = x^2 + 2x(o\,\dot{x}) + (o\,\dot{x})^2 + x + o\,\dot{x} + 1 \qquad [3]$$

e, riordinando i termini,

$$y + o\,\dot{y} = (x^2 + x + 1) + 2x(o\,\dot{x}) + 1(o\,\dot{x}) + (o\,\dot{x})^2 \qquad [4]$$

Sottraendo ora membro a membro la [1] dalla [4] risulta

$$o\,\dot{y} = 2x(o\,\dot{x}) + 1(o\,\dot{x}) + (o\,\dot{x})^2 \qquad [5]$$

Ed è qui che Newton compie il tiro mancino, dichiarando che, siccome $o\dot{x}$ è tanto piccolo, $(o\dot{x})^2$ lo è ancor più, al punto tale da scomparire del tutto;[27] in buona sostanza, il termine era assimilabile a zero e poteva essere ignorato. Detto fatto, lo eliminò dalla [5], lasciando così per il valore incrementale di y:

$$o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + 1(o\dot{x}) \qquad [6]$$

ovvero, dividendo entrambi i membri per $o\dot{x}$,

$$o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + 1o\dot{x} \qquad [7]$$

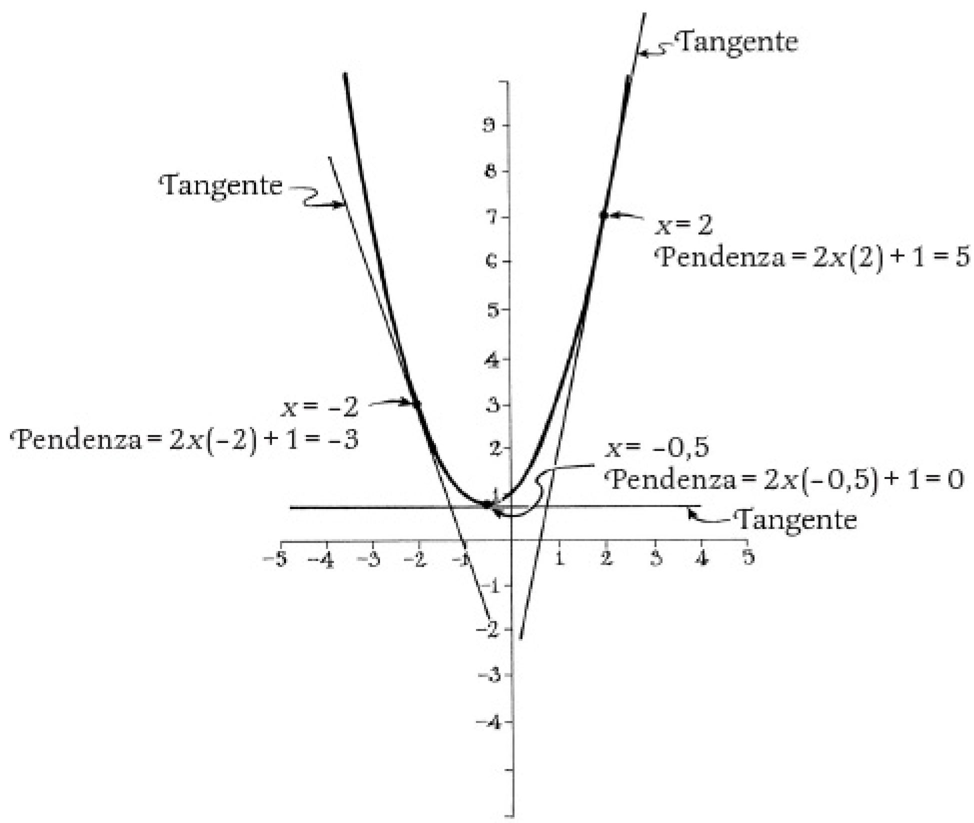


Figura 5.4
La formula $2x + 1$ fornisce la pendenza nel punto di ascissa x della parabola $y = x^2 + x + 1$.

Ma la [7] equivale al rapporto incrementale $\Delta y/\Delta x$ della curva espressa dalla [1] al tendere a zero degli incrementi, che – come da quanto discusso in precedenza e risultante dalla fig. 5.3 – rappresenta proprio il coefficiente angolare della tangente nel generico punto di ascissa x (vedi fig. 5.4). E, quanto più conta, l'intervallo elementare o a secondo membro non compare, e dunque non importa più darsene pensiero.

Il metodo forniva la risposta giusta, ma il gioco di prestigio inscenato da Newton era parecchio sconcertante; se, come egli ribadiva, $(o\dot{x})^2$, $(o\dot{x})^3$ e le altre maggiori potenze di $o\dot{x}$ erano uguali a zero, allora anche $o\dot{x}$ doveva esserlo.[28] Ma, d'altra parte, dividere per $o\dot{x}$ come viene fatto alla fine del procedimento per passare dalla [6] alla [7] e sbarazzarsi della variabile o, equivale in tale caso a dividere per zero – e secondo la logica matematica questo non è permesso.

Il metodo delle flussioni era dunque assai dubbio; faceva affidamento su un'operazione matematica illegale, ma presentava un vantaggio fenomenale: funzionava. E non solo risolveva il problema della tangente, ma anche quello dell'area. Calcolare la misura dell'area compresa tra un segmento di curva (o di retta, che è un caso particolare di curva) e l'asse del sistema di riferimento – operazione modernamente detta «integrazione» – non è altro che l'inverso della derivazione. Così come la derivata della parabola [1] fornisce l'espressione [7] della pendenza della sua tangente, l'integrazione della [7] fornisce l'espressione per l'area sottesa dalla parabola, che è appunto data dalla [1], talché nell'intervallo compreso tra $x = a$ e $x = b$ essa risulta semplicemente (vedi fig. 5.5):

$$Area\Big|_a^b = (b^2 + b + 1) - (a^2 + a + 1). \qquad [8]$$

(Tecnicamente l'espressione per l'area non è esattamente la [1], ma $x^2 + x + C$ dove C è una qualunque costante. La derivazione distrugge infatti informazione, cosicché il procedimento inverso di integrazione non può da solo restituirla, ma per venire completato necessita di un dato – una costante – provvisto dall'esterno.)

L'analisi infinitesimale è l'insieme dei due strumenti, il calcolo differenziale e il calcolo integrale, in un unico pacchetto. Benché Newton, nel giocherellare con l'infinito e le potenze di zero, infrangesse alcune regole matematiche di primaria importanza, l'analisi era di potenza tale che nessun matematico poteva permettersi di respingerla.

La natura parla per equazioni. È una singolare coincidenza: le regole matematiche furono costruite a partire dal conteggio delle pecore e dall'agrimensura, eppure queste stesse governano il funzionamento dell'Universo. Le leggi fisiche sono espresse con equazioni, e queste, in un certo senso, non sono altro che meccanismi nei quali si introducono dei numeri per estrarne degli altri. Nell'Antichità erano già note alcune di codeste relazioni-leggi, come quella della leva, ma fin dagli inizi della rivoluzione scientifica esse fecero capolino ovunque. Con la propria terza legge, $r^3/t^2 = k$, Keplero mise in rapporto la distanza media r di un pianeta dal Sole con il periodo t dell'orbita, secondo una costante k; nel 1662 Robert Boyle dimostrò che, facendo variare il volume occupato da un gas ermeticamente contenuto, la pressione del fluido segue la relazione $pv = k$, dove p è la pressione, v la capacità del recipiente e k è una costante; nel 1676 Robert Hooke trovò, per la forza f esercitata da una molla in tensione, $f = -kx$, dove x misura l'allungamento e $-k$ è una costante, che con il suo segno indica come la forza abbia senso tale da opporsi alla deformazione della molla. Queste prime relazioni-leggi esprimono egregiamente dei collegamenti quantitativi semplici tra grandezze fisiche, ma le equazioni algebriche sono intrinsecamente ristrette a descrivere relazioni formalmente statiche tra quantità numeriche, ciò che impedisce loro di generalizzarsi in leggi universali.

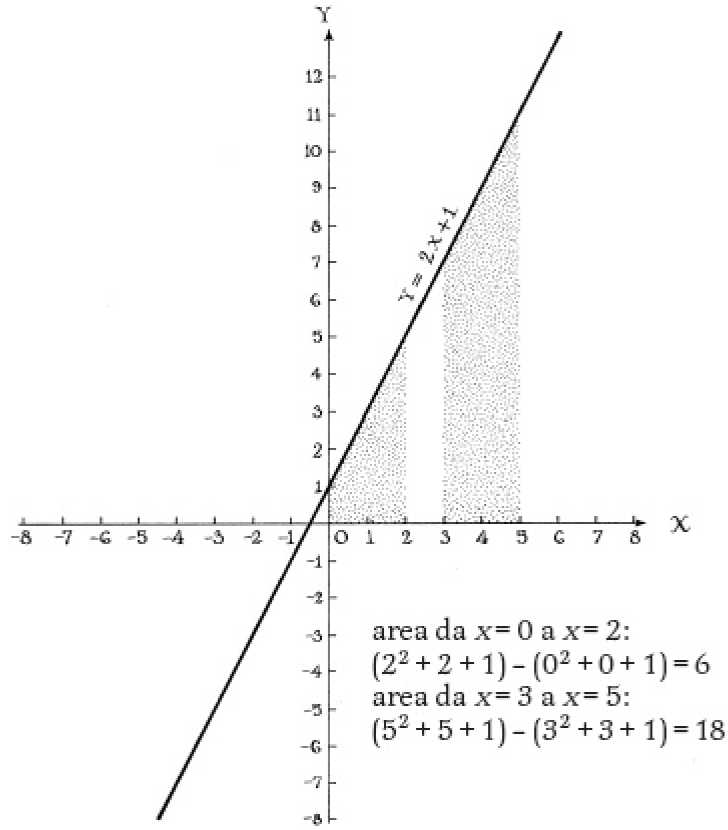


Figura 5.5
La formula $x^2 + x + 1$ fornisce l'area sottesa dalla retta $2x + 1$.

Prendiamo, per esempio, la ben nota equazione che si insegna nelle scuole medie superiori: spazio uguale a velocità per il tempo. Essa può dirci quanta strada x facciamo (in chilometri) procedendo a una determinata velocità v (in chilometri/ora) per il tempo t (in ore): $x = vt$; difatti, dei chilometri/ora moltiplicati per delle ore daranno dei chilometri. Questa equazione va benissimo per sapere quanto tempo occorre per andare da New York a Chicago con un treno che corra esattamente a 200 chilometri/ora, ma quanti sono gli oggetti reali che si spostano a velocità costante, come il treno di un problema di aritmetica? Lasciata cadere, una palla si muove verso terra sempre più in fretta, e già in questo caso applicare $x = vt$ sarebbe puramente e semplicemente sbagliato; serve, invece, $x = gt^2/2$, dove g rappresenta l'accelerazione di gravità; se, poi, la forza agente sulla palla non rimane costante, l’equazione cambia ancora, e x potrebbe, per esempio, valere un’espressione del tipo: $t^3/3$. Velocità per tempo non è valida in ogni situazione, e non è dunque una legge universale.

Il calcolo infinitesimale permise a Newton di esprimere una serie generale di leggi che restavano applicabili in tutti i casi e sotto ogni condizione, e che si esplicavano volta per volta in una particolare relazione come quelle appena viste. Per la prima volta la scienza era in grado di scorgere le grandi leggi universali sottostanti i piccoli canoni locali, e anche se sapevano che l’analisi mancava di una teoria di base (e secondo la matematica di zero e infinito risultava, anzi, sbagliata), i matematici adottarono rapidamente il nuovo strumento. Perché le cose stanno in questi termini: la natura parla per «equazioni differenziali», e l’analisi è il mezzo necessario per impostarle e risolverle.

Le equazioni differenziali sono tutt’altro dalle equazioni algebriche comunemente note. Queste ultime sono come macchine che inghiottono dei numeri e ne danno fuori altri, e le prime sono pure come macchine, ma invece di numeri macinano e producono equazioni. Si immette una relazione che descrive le particolarità del problema (la palla si muove a velocità costante, sulla palla agisce una forza ecc.) e si estrae l’equazione che fornisce la risposta cercata (il moto avviene in linea retta, la palla descrive una parabola ecc.). Un’unica equazione differenziale dà conto di tutte le innumerevoli relazioni-leggi, e a differenza di queste, che certe volte sono valide e certe altre meno, essa, in quanto legge universale, è sempre verificata; è uno sguardo gettato sul meccanismo della natura.

L’analisi infinitesimale di Newton – il suo metodo delle flussioni – realizzò precisamente questo, mettendo in reciproco collegamento concetti quali posizione, velocità e accelerazione. Nel denotare la posizione con la variabile x, egli si rese conto che la velocità non è altro che la flussione (in termini moderni, la derivata) di x : $\dot{x}$; e che, a propria volta, l'accelerazione è semplicemente la flussione della velocità, ovvero la derivata seconda di x : $\ddot{x}$. In notazione, passare da posizione a velocità ad accelerazione e viceversa diviene facile quanto derivare (aggiungere un punto sopra la variabile) o integrare (togliere il punto); in possesso di tale simbolismo, lo scopritore della gravitazione universale fu in grado di scrivere un'equazione differenziale che pure nella sua semplicità descrive il moto di tutti i corpi dell'universo: $F = m\ddot{x}$, dove F indica la forza agente ed m la massa dell'oggetto. (In realtà non è questa l'espressione della legge universale, perché l'equazione è valida nel solo caso di massa costante; la forma generale della seconda legge di Newton è $F = m\dot{p}$, dove p rappresenta la quantità di moto. Naturalmente, le leggi classiche della meccanica vennero poi ulteriormente generalizzate da Einstein.) Se si conosce l'equazione che descrive la forza applicata a un corpo, l'equazione differenziale del moto rivela come avvenga lo spostamento di quel corpo. Per esempio, la palla in caduta libera percorre una parabola, mentre, se è trattenuta da una molla, a seconda che l'attrito sia presente o meno oscilla su e giù in eterno oppure si porta esponenzialmente a riposo[29] (vedi fig. 5.6); per quanto siano diversi i risultanti andamenti, tutti discendono dalla medesima equazione differenziale.

Analogamente, se si conoscono le caratteristiche del movimento di un corpo – da una palla da gioco a un pianeta gigante – la medesima equazione differenziale rivela la natura della forza a esso applicata. Il culmine trionfale dell'opera di Newton fu la determinazione della geometria delle orbite dei pianeti a partire dalla relazione assegnante la forza di gravità; già si sospettava che tale forza fosse di tipo centrale (diretta verso il Sole) e di intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza *r* da esso ($1/r^2$); non appena dalle equazioni dell'autore dei *Principia* vennero fuori proprio delle ellissi, si cominciò a pensare che egli avesse ragione. Ma, nonostante la potenza dell'analisi, restava la principale perplessità: il lavoro del grande filosofo naturale poggiava su labili fondamenta – la divisione di zero per se medesimo. E il lavoro del suo rivale aveva la stessa pecca.

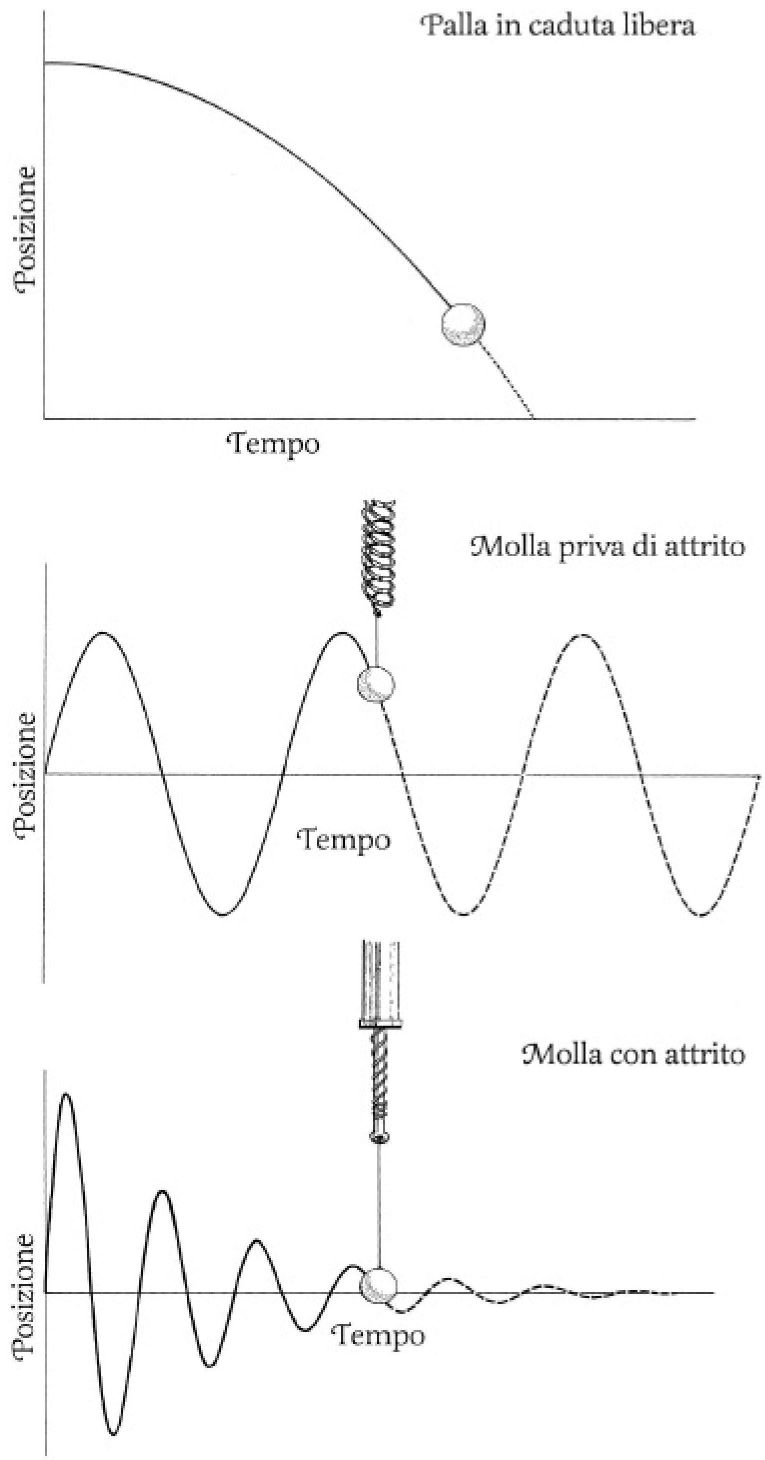


Figura 5.6
Moti diversi governati dalla stessa equazione differenziale.

Nel 1673 un apprezzato giurista e filosofo tedesco venne in visita a Londra. Aveva nome Gottfried Wilhelm Leibniz, e assieme a Newton avrebbe scompaginato l'intero mondo scientifico, benché né l'uno né l'altro venisse a capo del dilemma degli zeri costellanti l'analisi.

Non è noto se il trentatreenne pensatore tedesco si imbattesse, durante il proprio soggiorno, nell'opera non pubblicata del collega, ma sta di fatto che tra il 1673 e il 1676, allorché si recò nuovamente nella capitale britannica, aveva sviluppato anch'egli l'analisi infinitesimale, se pure in una forma un poco diversa.

Risulta in retrospettiva che Leibniz ne formulasse indipendentemente da Newton la propria versione, ma la materia è tuttora oggetto di discussione. I due intrattennero una corrispondenza nel corso degli anni Settanta del secolo, in modo tale che non è facile capire come reciprocamente si influenzassero; a ogni buon conto, se le rispettive metodologie provvedevano le medesime risposte, le notazioni usate (e le sottostanti filosofie) erano assai dissimili.

L'inglese non amava gli infinitesimi, quei piccoli *o* che comparivano nelle equazioni di flusso e che si comportavano ora come zeri e ora come numeri diversi da zero; in un certo senso quelle quantità elementari erano infinitamente piccole, più di qualunque numero positivo arbitrariamente scelto, eppure restavano, in qualche modo, ancora maggiori di zero. Per i matematici del tempo il concetto era risibile, e l'imbarazzato Newton cercava nervosamente di nascondere sotto il tappeto gli infinitesimali *o* presenti nei propri calcoli, considerandoli non più che intermediari, supporti che miracolosamente si toglievano di mezzo una volta arrivati in fondo. Al contrario, il tedesco negli infinitesimi diguazzava. Dove l'altro scriveva $o\dot{x}$, egli apertamente notava dx, intendendo con quel simbolo un frammento infinitamente piccolo di x, e tali quantità elementari godevano, invariate, di cittadinanza in tutte le sue computazioni; tant'è che la derivata di y rispetto a x vi era espressa non già attraverso il rapporto di flussioni $\dot{y}/\dot{x}$, dove non compaiono infinitesimi, bensì con il rapporto differenziale dy/dx.[30]

In questa versione i dy e dx sono manipolabili al pari delle normali quantità algebriche, motivo per cui i matematici e fisici moderni impiegano di regola questa seconda notazione anziché quella delle flussioni; l'analisi di Leibniz ha la medesima valenza di quella di Newton, e così formalizzata anche un poco di più. Ciò non toglie che alla radice dei differenziali del primo stesse la medesima illegittima struttura 0/0 che affliggeva le flussioni del secondo, e che l'analisi infinitesimale, stante la magagna, avrebbe seguitato a fondarsi sulla fede piuttosto che sulla logica. (Difatti Leibniz pensava proprio alla fede nell'inventare nuove branche della matematica, quali la numerazione binaria, dove i numeri sono rappresentati con sequenze di 1 e di 0, e per lui ciò costituiva *creatio ex nihilo*, il sorgere dell'Universo a opera di Dio/1 a partire dal Nulla/0. Cercò perfino di equipaggiare con questa cognizione i gesuiti perché meglio convertissero i cinesi al cristianesimo.)

Sarebbero occorsi parecchi anni prima che i matematici pensassero a liberare l'analisi dai puntelli mistagogici, perché nel frattempo l'ambiente delle matematiche era preso dalla controversia su chi ne fosse l'inventore.

È certa la precedenza di Newton, che concepì l'idea già prima del 1665 senza però pubblicare in proposito alcunché per oltre vent'anni. Oltre che di scienza, egli si occupava di magia, teologia e alchimia (si rifece, per esempio, ai testi biblici per concludere che il secondo Avvento si sarebbe verificato attorno al 1948), e nutriva molte opinioni da eretico; di conseguenza, era assai riservato e poco incline a divulgare il proprio lavoro. Così, mentre il *fellow* di Cambridge teneva per sé le proprie scoperte, il filosofo delle monadi sviluppava la propria metodologia di calcolo differenziale. A tempo debito entrambi accusarono l'altro di plagio, e la comunità scientifica britannica, schierata dietro il proprio concittadino, si isolò dai matematici continentali che sostenevano, invece, Leibniz. Il risultato fu che gli inglesi si diedero la zappa sui piedi rimanendo legati alla notazione newtoniana delle flussioni in luogo di adottare quella superiore di Leibniz, e quando venne il momento di sviluppare la teoria dell'analisi infinitesimale rimasero indietro rispetto ai colleghi d'oltre Manica.

Doveva essere ricordato un francese, e non un inglese, per avere aperto il primo spiraglio nel mistero degli zeri e delle infinità che pervadevano l'analisi; gli studenti sentono citare la regola dell'Hôpital nel primo corso di analisi. Strano è che non fu costui a pervenire alla regola che porta il suo nome.

Nato nel 1661, Guillaume-François-Antoine de l'Hôpital era conte e marchese, e quindi molto ricco; nutriva un precoce interesse per le matematiche e, benché attendesse per qualche tempo alla carriera militare divenendo capitano di cavalleria, presto si volse nuovamente alla propria passione originale.

Si procurò il migliore insegnante che il denaro potesse consentirgli, Johann Bernoulli, matematico svizzero tra i primi maestri dell'analisi infinitesimale di Leibniz, il quale nel 1692 l'insegnò al dovizioso allievo. L'Hôpital rimase affascinato dalla nuova matematica, al punto che persuase Bernoulli a rivelargli, per farne uso a piacimento e sempre in cambio di quattrini, tutto quanto aveva scoperto con i propri studi; ne risultò un trattato completo di calcolo differenziale e integrale, *Analyse des infiniment petits*.[31] Pubblicata dal dotto aristocratico nel 1696, l'opera divenne il primo libro di testo di analisi, di cui diffuse la versione leibniziana nella maggior parte d'Europa; oltre a esporre i fondamenti dell'analisi, l'autore vi includeva anche alcuni risultati originali e di grande interesse, il più noto dei quali va sotto il nome di «regola dell'Hôpital».

La regola gettò un primo raggio di luce sull'inquietante rapporto 0/0, ovunque affiorante nei calcoli infinitesimali, fornendo un metodo per determinare il valore di un limite che si presenti nella forma «indeterminata» 0/0. Essa afferma che il rapporto tra due funzioni derivabili nulle in un dato punto è uguale al rapporto delle rispettive derivate in quel punto. Prendiamo, per esempio, l'espressione $f(x) = x/\sin x$; nel punto $x = 0$ sia il numeratore sia il denominatore della frazione sono nulli, per cui questa diviene uguale a 0/0; dall'applicazione della regola dell'Hôpital si ottiene però:

$$f(x)\Big|_{x\to 0} = \frac{x'}{\sin'(x)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

essendo 1 la derivata di x e $\cos x$ quella di $\sin x$, che è uguale a 1 nel punto $x = 0$. In questo caso, dunque, l'espressione 0/0 si risolve nell'unità.[32] Con qualche manipolazione è possibile impiegare il criterio in questione per risolvere altre indeterminatezze che assumano la forma ∞/∞, 0^0, 0^∞, e ∞^0.

Espressioni di questo tipo, e 0/0 in particolare, possono assumere qualunque valore si voglia, a seconda del tipo di funzione posta a numeratore o denominatore, mantissa o esponente; ed è per questa ragione che tali forme si dicono «indeterminate». Il mistero non era più così fitto: era ormai possibile ottenere qualche informazione sul rapporto 0/0, a patto di accostarvisi con grande cautela. Da avversario cui sfuggire, lo zero era divenuto un oggetto di indagine.

Poco tempo dopo la morte del marchese, avvenuta nel 1704, Johann Bernoulli lasciò intendere che, a suo tempo, il defunto si era appropriato del suo lavoro. La comunità scientifica dell'epoca respinse le rivendicazioni del matematico svizzero: non soltanto l'Hôpital si era dimostrato abile analista, ma l'accusatore non godeva di una reputazione immacolata, perché già in precedenza aveva tentato di attribuirsi il merito di un'altra riuscita dimostrazione (riguardante le aree isoperimetriche, e a detrimento di un collega che si dà il caso fosse il fratello Jakob). In questo caso, però, la pretesa era giustificata, e il carteggio passato tra i due depone a favore di Bernoulli; purtroppo per lui, la regola conservò la denominazione originale.

Nonostante che venissero in questo modo superate alcune delle difficoltà legate al rapporto 0/0, il problema che ne stava alla base rimaneva insoluto: l'analisi di Newton e Leibniz dipende dalla divisione per zero, oltre che da quantità che miracolosamente scompaiono quando le si elevi a potenza. Il criterio dell'Hôpital tratta 0/0 innanzitutto con strumenti basati sulla medesima ambiguità su cui quelli operano, e così facendo si morde la coda. Come i matematici e i fisici in tutto il mondo presero a servirsi del calcolo infinitesimale per interpretare la natura, e del concetto di spazio assoluto per spiegare il movimento, la Chiesa levò alto il proprio dissenso.

Nel 1734, a sette anni dalla morte di Newton, il vescovo irlandese George Berkeley pubblicò *The Analyst, Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*[33] (il destinatario dell'apologo era molto probabilmente Edmund Halley,[34] inveterato sostenitore del grande ermetista-scienziato), in cui attaccava i bassi espedienti usati da Newton (e da Leibniz) nel trattare con gli zeri.

Chiamando gli infinitesimi «fantasmi di quantità svanite», il presule gaelico evidenziò come il farli impunemente scomparire potesse portare a una contraddizione, e concluse che «chi può digerire una seconda e una terza flussione, una seconda e una terza differenza non dovrebbe, mi sembra, far tanto lo schizzinoso su un qualsiasi punto relativo alla divinità».

I matematici del tempo spararono a zero sulle argomentazioni del libro, ma il buon prelato era assolutamente nel giusto. L'analisi era allora molto diversa dagli altri campi delle matematiche. Ogni singolo teorema di geometria era stato rigorosamente provato, e a partire dai pochi assiomi euclidei era stato possibile procedere, con cautela e passo passo, fino a dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo è pari a due retti, così come ogni altra proposizione geometrica; l'analisi, invece, si reggeva sulla fede.

Nessuno era in grado di spiegare perché mai quei benedetti infinitesimi dovessero eclissarsi una volta elevati al quadrato; ci si limitava ad accettare il fatto per il semplice motivo che azzerarli al momento giusto procurava la soluzione esatta. Nessuno si preoccupava granché della divisione per zero allorché l'ignorare le regole della matematica consentisse di interpretare i fenomeni fisici, dalla caduta di una mela al corso dei pianeti. Ma, per corrette che fossero le risposte, affidarsi all'analisi restava un atto di fede non dissimile dal dichiarare il proprio credo in Dio.

La fine del misticismo

> Una quantità è qualche cosa oppure non è niente; nel primo caso non è ancora svanita, e nel secondo lo è invece letteralmente. L'ipotesi che esista uno stato intermedio è pura chimera.
>
> Jean Le Rond d'Alembert

All'ombra della Rivoluzione francese l'analisi si sbarazzò dei propri tratti fideistici.

Nonostante le labili fondamenta del calcolo infinitesimale, per la fine del XVIII secolo i matematici di tutta Europa impiegavano lo strumento con straordinario successo. Colin Maclaurin e Brook Taylor, forse i migliori studiosi inglesi della materia in quel periodo di isolazionismo matematico dal continente, scoprirono come servirsene per esprimere le funzioni in una forma tutt'affatto diversa. Per fare un esempio, i matematici trovarono che la funzione $1/(1 - x)$, usando qualche artificio, poteva scriversi

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \qquad [10]$$

Benché appaiano totalmente diverse, le due espressioni sono, in realtà, del tutto equivalenti, seppure a qualche condizione.

E queste condizioni – che originano dalle proprietà di zero e di infinito – possono diventare molto importanti, tanto che lo svizzero Leonhard Euler, trasportato dalle agevoli manipolazioni dello zero e degli infiniti consentite dal calcolo differenziale, «dimostrò», con un *modus operandi* simile a quello di Maclaurin e Taylor, che la serie

$$\dots + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad [11]$$

è uguale a zero (per convincersi che gatta ci cova basta sostituire 1 a x e vedere che cosa capita).[35] Eulero era un eccellente matematico, di fatto tra i maggiori di tutti i tempi per l'abbondanza della produzione scientifica e l'influsso esercitato, ma in questo caso la disinvolta manipolazione di zeri e infinità lo condusse fuori strada.

Ad ammansire finalmente le trasgressive quantità dell'analisi – contestualmente sbarazzandola dalle connotazioni mistiche – fu un trovatello. Nel novembre del 1717 sugli scalini della chiesa di Saint-Jean-le-Rond a Parigi fu esposto un neonato, che da quella circostanza prese il nome di Jean le Rond al quale, in seguito, egli aggiunse «d'Alembert». Affidato alle cure della moglie di un vetraio, venne allevato da quella modesta famiglia, nonostante, a quanto pare, i genitori carnali fossero un commissario d'artiglieria e una nobildonna e scrittrice.

D’Alembert è principalmente noto per la collaborazione alla famosa *Encyclopédie* di arti, scienze e mestieri, imponente impresa ventennale condotta a quattro mani con Denis Diderot; tuttavia egli fu più che un enciclopedista, e in particolare fu lui che in campo matematico, riconoscendo l’importanza del percorso oltre che della destinazione, originò il concetto di «limite» e venne a capo delle difficoltà teoretiche dell’analisi al riguardo dello zero.

Prendiamo nuovamente in esame la vicenda di Achille e della tartaruga, che si risolve in una somma infinita di passi sempre più prossimi alla lunghezza nulla. L’elaborazione di una serie – che si tratti di risolvere il problema di Zenone, piuttosto che trovare l’area delimitata da una curva, o piuttosto che esprimere una funzione sotto diversa forma – faceva sì alle volte che i matematici si ritrovassero con risultati contraddittori.

D’Alembert vide che ogni difficoltà viene meno se si considera il «limite» della gara. Nell’esempio fatto a p. 46, a ogni passo i due antagonisti si avvicinano al traguardo dei due metri; pure senza mai superarlo, essi a ogni istante vi si approssimano sempre di più. È dunque lecito arguire che il limite dell’agone, la meta finale, si trovi in corrispondenza della distanza di due metri: è in quel punto che l’eroe raggiunge lo scaglioso avversario.

Ma come provare che il limite di arrivo sia effettivamente quello? In questo modo: vi sfido a citarmi una distanza maggiore di zero, non importa quanto piccola, e io vi dirò quand’è che l’uno e l’altro corridore si trovano – con Achille ancora all’inseguimento – lontani dal limite meno di quel tanto.

Per fare un esempio, supponiamo che mi buttiate là un millimetro: basterà qualche calcolo per ribattere allora che al compimento dell’11ª falcata il figlio di Teti è giunto a poco meno di 0,977 millimetri dal termine stabilito, mentre la testuggine ne dista la metà; avrò risposto alla sfida con un margine di 23 e passa millesimi di millimetro. Controbattete con un nanometro (un milionesimo di millimetro)? Fatti 31 passi, l'inseguitore è a poco più di 931 miliardesimi di millimetro dalla meta – quasi 69 miliardesimi oltre il necessario – e l'inseguito ancora si mantiene alla metà di quella distanza. Sfidatemi come volete: sarò sempre in grado di trovare quando Achille sarà arrivato a minore distanza dal traguardo di quanto vogliate voi, e questo dimostra che la lunghezza coperta lo porterà arbitrariamente vicino ai 2 metri: tale è il limite della competizione.

Invece di concepire la corsa come somma di infiniti termini, pensiamola, ora, come limite di un numero finito di corse parziali progressivamente più lunghe. Nella prima Achille corre

$$1$$

un metro in tutto; nella seconda corre prima il metro e poi il mezzo metro, complessivamente

$$1+\frac{1}{2}$$

pari a 1,5 metri; poi egli arriva a

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

1,75 metri in tutto, e così via. Ogni corsa parziale è finita e precisamente definita, e di infiniti non si trova traccia.

Ciò che fece informalmente d'Alembert (e che il francese Augustin Cauchy, il ceco Bernhard Bolzano, il tedesco Karl Weierstrass avrebbero in seguito formalizzato) fu di riscrivere la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

come

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

dove l’assenza dell’ellissi finale evidenzia che il numero di addendi è finito; la nuova notazione è sottilmente diversa, ma cambia le cose dalla notte al giorno.

Quando in un’espressione compare una quantità infinita, o quando si divide per zero, tutte le operazioni matematiche, comprese quelle semplici dell’aritmetica, vanno a farsi benedire; non c’è più niente che abbia un senso. Per questo motivo anche il significato del segno +, laddove operi l’addizione degli infiniti addendi di una serie, non sembra più così immediato; ecco perché la somma infinita di + 1 e − 1 vista all’inizio del capitolo dà come risultato 0 e 1 allo stesso tempo.

Ma premettendo alla serie il segno di limite, finalità e procedimento vengono logicamente distinti, ed è possibile evitare di maneggiare zeri e infiniti. Ogni «somma parziale» sotto il segno di limite è di per sé finita, allo stesso modo in cui lo sono le corse parziali di Achille; è quindi lecito sommarla, dividerla, elevarla a potenza, farne ciò che si vuole: trattandosi di quantità finita, le regole e gli operatori matematici si applicano inalterati. Soltanto dopo, alla fine delle varie elaborazioni, viene effettuato il passaggio al limite, determinando per estrapolazione dov’è che la risultante espressione va a parare.

Può capitare che il limite non esista, ed è così, per esempio, nel caso della somma infinita di + 1 e − 1, il valore delle cui somme parziali si alterna discontinuamente tra 0 e 1 senza effettivamente puntare a un predicibile punto di arrivo. Viceversa, le somme parziali del paradosso di Zenone valgono 1 e poi 1,5 e 1,75, 1,875, 1,9375, …, sempre più avvicinandosi a due: esse mostrano una destinazione ovvero, in termini matematici, possiedono un limite.

Lo stesso accade nell’operazione di derivazione, dove i matematici moderni – invece di dividere per zero alla maniera di Newton e Leibniz – dividono per un numero «piccolo quanto si vuole» che fanno «tendere» a zero; fanno la divisione (cosa perfettamente lecita, in quanto il divisore non è zero) e poi passano al limite. Per ricavare la derivata non c’è più alcun bisogno di «tiri mancini» come fare sparire gli infinitesimi al quadrato e poi dividere per zero (cfr. l’Appendice C).

Questa razionalizzazione può apparire come spaccare il capello in quattro, un ragionamento altrettanto mistico dei «fantasmi» di Newton e Berkeley, ma in realtà non è così; per suo tramite vengono soddisfatti i severi requisiti di rigore logico indispensabili al matematico. Il concetto di limite poggia su una base assai solida e coerente, al punto che si può anche fare a meno dell’argomento della «sfida» all’arbitrariamente piccolo, essendovi altre maniere di definirlo: per esempio, indicandolo nell’identità dei valori a cui convergono due successioni minoranti e maggioranti di quello, *lim inf* e *lim sup* rispettivamente. (Dispongo in proposito di una splendida dimostrazione, ma questo libro è, ahimè, insufficiente a contenerla.) Siccome dal punto di vista logico i limiti sono a prova di bomba, definendo la derivata in termini di limite la si rende parimenti tale – e si danno all’analisi dei solidi fondamenti concettuali.

Dividere per zero non serviva più; la mistica abbandonò il regno della matematica e la logica vi tornò sovrana. Questa pace si mantenne fino al Terrore.

Capitolo 6

Il gemello dell'infinito

La natura infinita dello zero

> Dio creò i numeri interi; tutto il resto è opera dell'uomo.
>
> Leopold Kronecker

Zero e infinito sono sempre apparsi ambiguamente simili. Moltiplicando zero per una qualunque quantità si ottiene zero, moltiplicando infinito per una qualunque quantità si ottiene infinito. La divisione per zero porge infinito, la divisione per infinito porge zero. Aggiungere zero a un numero lo lascia inalterato, aggiungere un numero a infinito lascia l'infinito tale e quale.

Tali somiglianze e reciprocità erano ovvie fin dal Rinascimento, ma i matematici dovettero attendere la fine della Rivoluzione francese per giungere a dipanare il grande segreto dello zero.

Zero e infinito sono le due facce della stessa medaglia; uguali e opposti, *yin* e *yang*, avversari con equivalenti poteri situati ai due estremi del dominio dei numeri. La trasgressiva natura dello zero risiede negli inconsueti poteri dell'infinito, il quale può, a sua volta, venire compreso attraverso lo studio della propria controparte. Per comprendere questo i matematici dovettero avventurarsi nel mondo dell'immaginario, un ambiente bizzarro dove le circonferenze sono rette, le rette sono circonferenze e lo zero si trova ai poli opposti.

L'immaginario

> [...] un perfetto e meraviglioso ricetto dello spirito divino, anfibio quasi tra essere e non-essere.
>
> Gottfried Wilhelm Leibniz

Lo zero non fu per secoli e secoli l'unico paria della matematica; se esso fu vittima dei pregiudizi ellenici, altri numeri, privi di significato dal punto di vista geometrico, vennero parimenti ignorati. Uno di questi, *i*, deteneva la chiave delle singolari proprietà dello zero.

L'algebra offriva un diverso modo di considerare i numeri, del tutto slegato dall'approccio geometrico dei Greci; diversamente da loro, i primi algebristi non cercavano, per dire, l'area racchiusa da un segmento di parabola, bensì le soluzioni delle «equazioni», eguaglianze che legano tra loro determinate quantità numeriche. Per esempio, la semplice equazione $4x - 12 = 0$ specifica la relazione che un numero incognito x intrattiene con 4, 12 e 0. Compito dello studente di algebra al primo anno è di trovare quale sia quel numero, che nell'esempio specifico è 3; con una banale sostituzione si vede, infatti, che 3 soddisfa l'eguaglianza ed è, dunque, una soluzione (che in questo caso è l'unica) dell'equazione $4x - 12 = 0$; in altre parole, 3 è uno «zero», o «radice», dell'espressione $4x - 12$.

Ma nel mettere in fila dei simboli per ottenere equazioni si possono fare incontri inaspettati. Prendiamo l'equazione precedente e cambiamo il segno $-$ in $+$; il risultato è un'altra relazione dall'aria innocente, $4x + 12 = 0$, che si rivela però un'acqua cheta: la sua soluzione è, questa volta, -3, un numero negativo.

Come gli Indiani accettarono lo zero mentre gli europei per lunghi secoli non ne vollero sapere, così l'Oriente accolse i numeri negativi mentre l'Occidente si sforzava di volgere loro le spalle. Ancora nel XVII secolo Cartesio si rifiutava di accettare come tali le radici negative delle equazioni; le chiamava «fittizie»,[36] ciò che spiega perché non estese mai il proprio sistema di coordinate all'intero dominio dei numeri relativi; egli era a quel punto un sopravvissuto, vittima del proprio successo nello sposare algebra e geometria. Viceversa, i numeri negativi erano da molto tempo utili agli algebristi – occidentali compresi –, facendo continuamente capolino nella soluzione delle equazioni, per esempio le quadratiche.

Un'equazione lineare, o «di primo grado», come $4x + 12 = 0$ è di risoluzione immediata,[37] e la relativa problematica non impegnò a lungo gli studiosi di algebra, che difatti fecero ben presto il passo successivo, affrontando le equazioni quadratiche, o «di secondo grado», nelle quali l'incognita compare elevata alla potenza 2: per esempio, $x^2 - 1 = 0$. Queste sono più complesse, se non altro perché possiedono due radici; nel caso in parola $+ 1$ e $- 1$ (e la corrispondente verifica è ancora fattibile sostituendo tali valori al posto di x). Entrambi i valori soddisfano l'eguaglianza, e in effetti l'espressione $x^2 - 1$ si scompone (si «fattorializza») in $(x - 1)(x + 1)$, rendendo tale soddisfacimento evidente – l'espressione si annulla sia per x che vale 1 sia per x uguale a $- 1$.

Nonostante la loro maggiore complessità rispetto alle relazioni lineari, le equazioni di secondo grado consentono di determinarne in modo diretto le radici, tramite la corrispondente formula risolutiva, punto di arrivo del corso di algebra del biennio di scuola superiore.[38] Le radici dell'equazione nella forma canonica $ax^2 + bx + c = 0$ sono date dalla:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad [1]$$

e si ottengono applicando rispettivamente i segni + e − al secondo termine del numeratore. La formula quadratica è nota da molti secoli; al-Khuwarizmi, il matematico della prima metà dell’800 d. C., indicò nel suo trattato di algebra, tra l’altro, come risolvere quasi ogni forma di equazione di secondo grado, sebbene non paresse accettare come radici i numeri negativi. Non mancò molto che già gli algebristi apprendevano a considerarli soluzioni valide; ma per i numeri immaginari fu tutt’altra faccenda.

Questi numeri non nascono dalle equazioni di primo grado, ma cominciarono a spuntare da quelle di secondo. Consideriamo, per esempio, $x^2 + 1 = 0$, un’equazione della quale non si intravedono soluzioni; sostituendo a x, infatti, − 1, 3, − 750, 235,23, 0 o qualunque altra quantità positiva o negativa, la relazione non è mai soddisfatta; molto semplicemente, l’espressione a primo membro non si scompone. Ma peggio ancora, il tentativo di applicare la formula risolutiva [1] produce risultati che sembrano insulsaggini:

$$+\sqrt{-1}, -\sqrt{-1} \qquad [2]$$

I radicali [2] appaiono non avere alcun senso; come, infatti, scrisse nel XII secolo il matematico bramino Bhaskara, «non havvi radice quadra di numero negativo, ché non è desso un quadrato». Egli e altri ancora avevano compreso che l’elevazione al quadrato di un numero positivo restituisce un altro numero positivo (per esempio, 2 per 2 fa 4), che se il numero è negativo ancora si ottiene un risultato positivo (− 2 per − 2 fa 4 di bel nuovo), e che 0 al quadrato dà comunque 0: ogni numero positivo, negativo o nullo che sia, ha come proprio quadrato un numero non negativo, e le tre possibilità elencate esauriscono l’intero dominio reale. Ciò significa che non vi esiste alcun numero che, elevato al quadrato, produca un valore negativo, e di conseguenza la radice quadrata di − 1, come di ogni altra quantità minore di zero, si dimostrava un concetto risibile.

Cartesio riteneva tali ipotetiche radici peggiori ancora dei numeri negativi, e rispolverò per loro l'appellativo sprezzante di numeri «immaginari»,[39] nome che prese piede e la cui iniziale i divenne, a suo tempo, il simbolo della radice quadrata di − 1.

I praticanti l'algebra avevano caro i, e quasi tutti gli altri non lo potevano soffrire. Ma tale quantità era ciò che serviva per trovare gli zeri dei polinomi, espressioni quali $x^3 + 3x + 1$ contenenti varie potenze della variabile x. Infatti, una volta ammesso i nel dominio dei numeri, ogni espressione polinomiale diventa risolvibile: $x^2 + 1$ si riduce d'un tratto a $(x - i)(x + i)$, e mostra che le sue radici sono $+ i$ e $- i$. Le espressioni cubiche si scompongono in tre fattori di primo grado, come in $x^3 + x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + i)(x - i)$, le biquadratiche (dove la variabile compare alla quarta potenza) in quattro fattori, quelle di quinto grado in cinque fattori e così via. In altre parole, i polinomi di grado n (in cui x^n è la massima potenza) si possono ridurre al prodotto di n binomi di primo grado, che equivale a dire che ogni equazione algebrica di grado n ammette (nel corpo complesso) precisamente n radici distinte o coincidenti. È questo il «teorema fondamentale dell'algebra».

Già dal XVI secolo i matematici facevano uso di quantità comprendenti l'unità immaginaria i, i cosiddetti «numeri complessi», per risolvere equazioni polinomiali di terzo e quarto grado; e mentre molti di loro non vi vedevano altro che un'utile convenzione formale, altri vi scorsero Dio.

Leibniz pensava i come una bizzarra via di mezzo tra esistenza e non-esistenza. Considerato l'ideatore del calcolo binario, in quei termini egli lo assimilò a un incrocio tra 1 (Dio) e 0 (il vuoto), equiparandolo allo Spirito Santo in quanto entrambi qualificabili di una sostanzialità a malapena accennata. Ma nemmeno lui comprese che i avrebbe infine messo in luce la relazione tra zero e infinito

– prima che l'autentico collegamento fosse svelato dovevano attendersi due importanti sviluppi.

Punto e contrappunto

> Si paleserà allora la semplicità con la quale codesti concetti conducono a delle proprietà già note così come a una moltitudine d'altre, che l'ordinaria geometria non appare toccare agevolmente.
>
> Jean-Victor Poncelet

Il primo dei due, la geometria proiettiva, venne alla luce tra gli sconquassi della guerra. Nel XVIII secolo Francia, Inghilterra, Austria, Prussia, Spagna, Paesi Bassi e altri ancora rivaleggiavano per accrescere il proprio potere; una dopo l'altra si formavano e scioglievano alleanze, sorgevano nuove dispute sui territori coloniali, si lottava per il dominio delle vie commerciali da e per il Nuovo Mondo. Praticamente tutte le potenze europee guerreggiarono tra loro durante la prima metà del secolo, fino a che, una trentina d'anni dopo la morte di Newton, tra Francia, Austria, Spagna e Russia da una parte e Gran Bretagna e Prussia dall'altra, si accese una guerra a tutti gli effetti che doveva durare nove anni.

Nel 1763 la Francia capitolò, ponendo termine alla Guerra dei Sette Anni (c'erano voluti due anni di battaglie prima che il conflitto venisse ufficialmente dichiarato) e facendo della vittoriosa Inghilterra la maggiore potenza mondiale, ma lo scotto fu pesante per l'una e l'altra nazione. Entrambe erano stremate e indebitate pesantemente, ed entrambe erano destinate a patirne le conseguenze: la rivoluzione.

A tredici anni di distanza dalla ritrovata pace in Europa ebbe inizio la Rivoluzione americana; la rivolta avrebbe privato la Corona britannica delle sue più ricche colonie. Nel 1789, poi, con Washington da poco insediato alla carica di primo presidente della nuova Federazione, scoppiò la Rivoluzione francese, e quattro anni più tardi cadde la testa di re Luigi.

Il verbale dell'esecuzione del sovrano da parte del Governo rivoluzionario fu controfirmato da un matematico, Gaspard Monge. Geometra di lungo corso e studioso dei metodi di proiezione delle figure tridimensionali, a costui si deve, con la «geometria descrittiva», il modo in cui ingegneri e architetti disegnano i macchinari e gli edifici che progettano: proiettando l'oggetto su piani ortogonali e conservando così tutte le informazioni necessarie a realizzarlo materialmente. Il suo lavoro era talmente importante per l'esercito da venire coperto dal segreto di Stato, mantenuto anche dopo il *putsch* bonapartista che doveva, di lì a poco, rovesciare il Direttorio.

Jean-Victor Poncelet era allievo di Monge e fu sedotto dalla sua geometria descrittiva in tre dimensioni mentre frequentava l'*Ecole Polytechnique* per entrare nel genio militare; sfortunatamente per lui, si aggregò all'armata napoleonica proprio allorché il condottiero-imperatore si accingeva alla campagna di Russia del 1812.

Nel corso della famosa ritirata da Mosca in fiamme, la *Grande Armée* francese fu ridotta al lumicino dalle asprezze pariteticamente inflitte dall'inverno e dall'esercito russi; nella battaglia di Krasnoe il nostro ingegnere fu lasciato per morto sul campo, ma in realtà sopravvisse e venne catturato e tradotto prigioniero. Fu mentre languiva in dura detenzione che Poncelet fondò una nuova branca della matematica: la «geometria proiettiva».

La nuova disciplina culminava l'opera iniziata dagli artisti e architetti del XV secolo quali Filippo Brunelleschi e Leonardo da Vinci, che scoprirono il modo di disegnare con realismo attraverso la rappresentazione prospettica. Laddove le linee «parallele» convergono nel punto di fuga di un dipinto, l'osservatore riporta l'impressione che esse non s'incontrino mai; l'impiantito a scacchi diventa a trapezi, ogni forma viene garbatamente distorta per mantenere un'apparenza perfettamente naturale (vedi fig. 4.2). Questa è la proprietà che caratterizza il punto infinitamente distante – uno zero all'infinito.

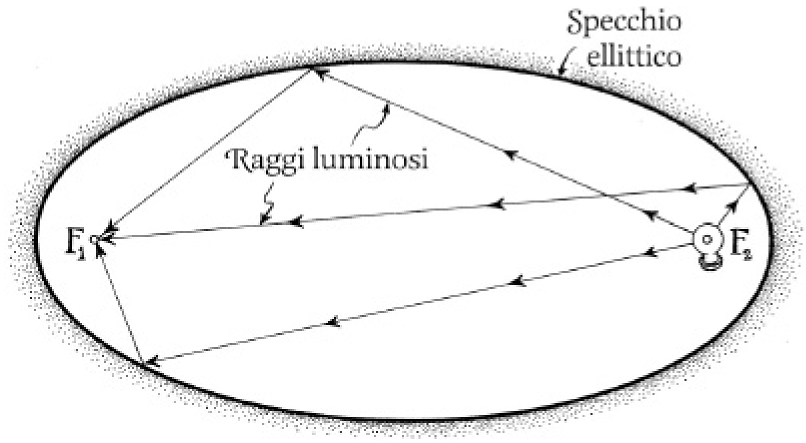


Figura 6.1
Raggi di luce entro un'ellisse.

Johannes Kepler, lo scopritore della forma ellittica delle orbite planetarie, aggiunse un tassello al concetto di punto all'infinito. Le ellissi possiedono due centri, i «fuochi», la cui distanza è tanto maggiore quanto più elongata è la curva, mentre un'altra loro proprietà può descriversi in questo modo: se una sorgente luminosa fosse posta nel fuoco di uno specchio ellittico, non importa quanto schiacciato, tutti i raggi di luce convergerebbero nell'altro fuoco (vedi fig. 6.1).

Presa idealmente un'ellisse, il cosmologo tedesco immaginò di stirarla, distanziandone i fuochi l'uno dall'altro sempre più e finché uno dei due si allontanasse illimitatamente divenendo un punto all'infinito. L'ellisse si fa allora parabola, e tutte le linee dei raggi che convergevano nel fuoco remoto divengono parallele; la parabola non è che un'ellisse con un fuoco all'infinito (vedi fig. 6.2).

La trasformazione può essere verificata assai bene con l'aiuto di una torcia elettrica. Accendendola in una stanza buia, la si punti perpendicolarmente contro la parete, ottenendo un bel circolo luminoso; inclinandola ora piano piano verso l'alto (vedi fig. 6.3) si osserverà il contorno del cerchio assumere forma ellittica, progressivamente sempre più allungata, fino a che, all'improvviso, eccola aprirsi in una parabola. I punti all'infinito di Keplero mostrarono che ellissi e parabola sono di fatto la stessa cosa, e ciò diede inizio alla geometria proiettiva come disciplina matematica, i cui studiosi indagano ombre e proiezioni delle figure geometriche alla ricerca di verità nascoste di momento anche maggiore dell'equivalenza suddetta. Ma premessa di tutto rimane l'accettazione del concetto di punto all'infinito.

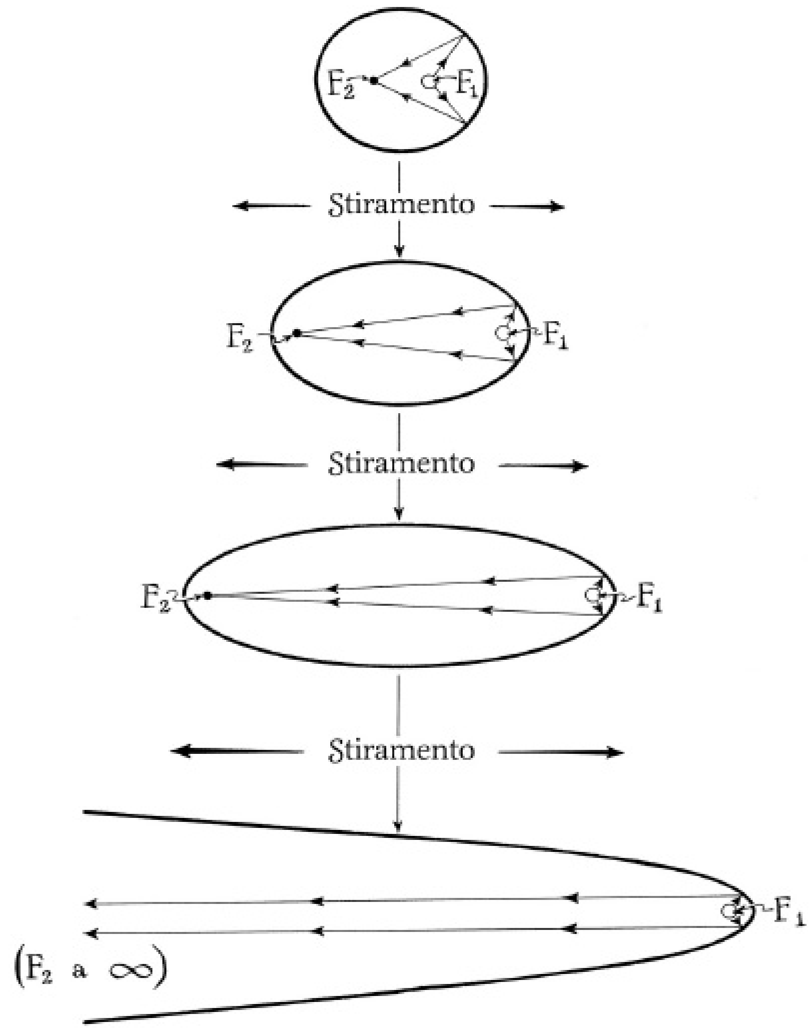


Figura 6.2
L’allungamento di un’ellisse produce una parabola.

Gérard Desargues, architetto, geometra e musicista francese del XVII secolo, ne fu uno dei precursori; egli impiegò il punto all’infinito per dimostrare un buon numero di importanti nuovi teoremi, ma l’eccentricità della terminologia adottata nei suoi lavori ne ritardò la comprensione, inducendo i matematici suoi contemporanei a ritenerlo piuttosto uno svitato. Nonostante che alcuni, tra i quali Blaise Pascal, vi si soffermassero, per circa duecento anni l’opera di Desargues venne in generale dimenticata.

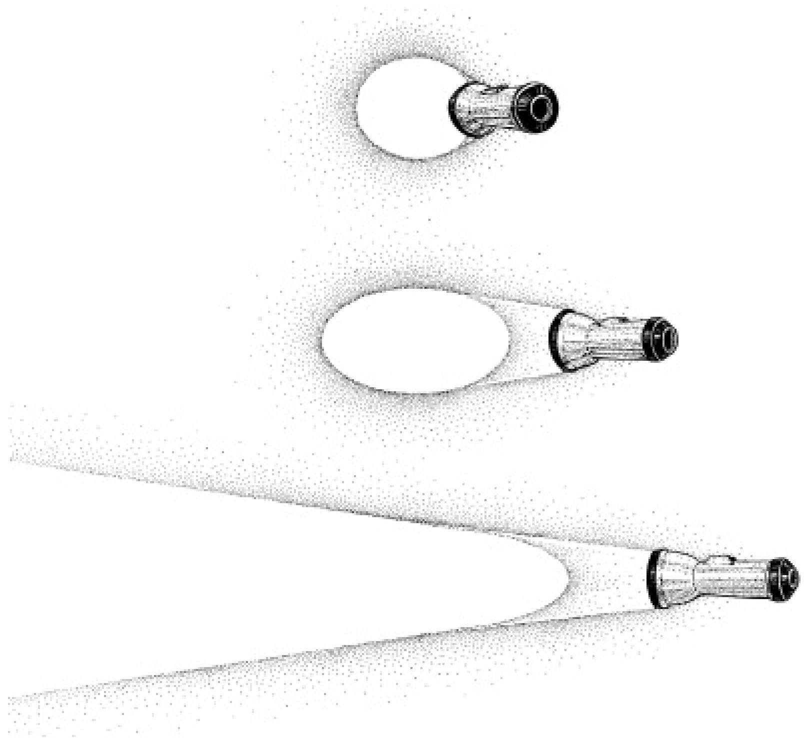


Figura 6.3
Ellisse e parabola alla torcia elettrica.

A Jean-Victor Poncelet questo non importava. Studente, aveva appreso da Monge le tecniche di proiezione in piano, e siccome da prigioniero di guerra aveva tempo da vendere, impiegò il soggiorno forzato per reinventare il concetto di punto all'infinito e per combinarlo con l'opera del proprio maestro, divenendo così il primo vero e proprio geometra proiettivo. Al ritorno in patria (recando con sé un abaco russo, ormai un'arcaica curiosità) elevò quella disciplina al rango di pura arte,[40] ma non immaginò che proprio essa avrebbe svelato la misteriosa natura dello zero, perché ancora mancava il secondo dei due importanti sviluppi: il piano complesso. Per sistemare l'ultimo tassello occorre spostarsi in Germania.

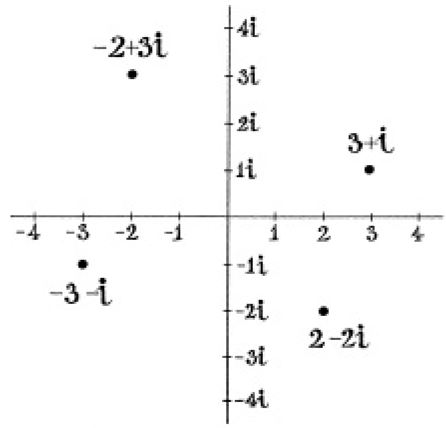


Figura 6.4
Il piano complesso.

Carl Friedrich Gauss, nato a Brunswick nel 1777, diede prova giovanissimo di straordinario talento e iniziò la propria carriera di matematico con lo studio dei numeri complessi. Nella tesi di laurea fornì, infatti, una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, che afferma come un polinomio di grado n (quadratico per $n = 2$, cubico per $n = 3$, biquadratico per $n = 4$ e così via) abbia corrispondentemente n radici, il che è vero solo se dal dominio dei reali si passa a quello dei numeri complessi.

Il grande matematico e fisico tedesco si interessò per tutta la vita a un'incredibile varietà di argomenti – tanto che il suo lavoro sulle curvature divenne un elemento base della teoria della relatività generale sviluppata da Einstein –, ma fu il modo da lui ideato per rappresentare i numeri complessi che aprì alla matematica un nuovo orizzonte.

Già sulla sessantina, egli realizzò come i numeri complessi – quantità composte da una parte reale e una immaginaria, quale $1 - 2i$ – si possano rappresentare in un piano cartesiano, dove il coefficiente reale sia riportato in ascissa e quello immaginario in ordinata (vedi fig. 6.4).[41] Questa costruzione, tutto sommato semplice, detta «piano complesso», svelò molte cose sul comportamento dei numeri. Prendiamo, per esempio, il numero $i^1 = i$, che forma con l'asse reale un angolo di 90° (vedi fig. 6.5); che cosa succede se si passa alla potenza intera successiva? Essendo per definizione $i^2 = -1$, si ottiene un numero ruotato di 180° rispetto all'asse reale e il cui «argomento» (l'angolo suddetto) è dunque raddoppiato, mentre il «modulo» (la distanza dall'origine) è rimasto unitario; analogamente, per $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$ l'argomento è triplicato (270°), e per $i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times (-1) = 1$ l'argomento è quadruplicato (360°), e si può anche dire che è stato fatto un giro completo a partire da 1, essendo, per definizione di esponente, $i^0 = 1$ e, dunque, $i^4 = i^0 = 1$ (vedi fig. 6.6). Non si tratta di coincidenza, ma di una precisa proprietà della rappresentazione gaussiana: elevare un numero complesso all'*n*-esima potenza significa ruotarlo in senso antiorario moltiplicandone l'argomento per *n*, cosicché al crescere dell'esponente *n* il numero descrive una spirale allontanandosi o avvicinandosi all'origine, a seconda che il modulo originale sia maggiore o minore dell'unità (o, in altre parole, che il punto corrispondente si trovi all'esterno o all'interno della circonferenza centrata sull'origine e di raggio unitario; vedi fig. 6.7).[42] La moltiplicazione e l'elevazione a potenza divengono, nel piano complesso, delle operazioni geometriche raffigurabili graficamente.[43] Fu questo il secondo grande progresso.

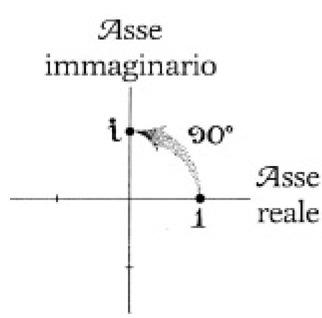


Figura 6.5
i è a 90°.

A mettere insieme le due idee provvide un allievo di Gauss, Georg Friedrich Bernhard Riemann. Combinando geometria proiettiva e numeri nel piano complesso egli fece sì che d'un tratto le rette si trasformassero in circonferenze, le circonferenze in rette, e zero e infinito in punti polari di un globo fatto di numeri.

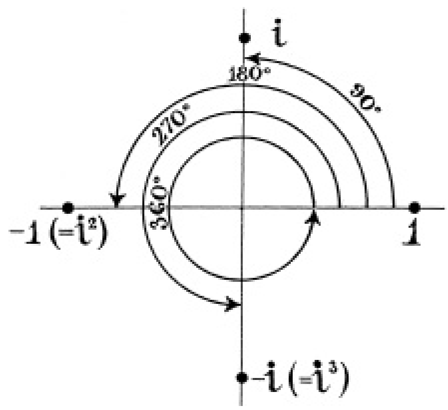


Figura 6.6
Potenze di *i*.

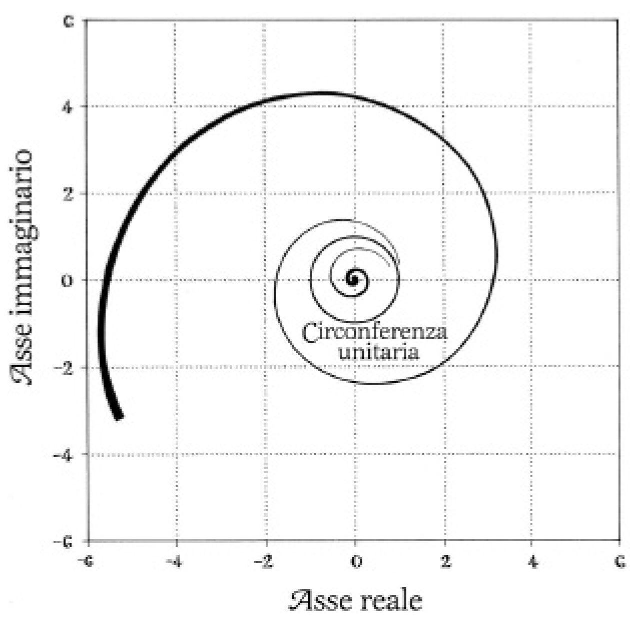


Figura 6.7
Spirali interne ed esterne alla circonferenza unitaria.

Riemann immaginò un globo sferico traslucido posato sopra il piano complesso, il polo sud coincidente con l’origine; un punto di luce posto al polo nord farebbe allora sì che ogni sagoma tracciata sulla superficie della sfera getti un’ombra sul piano. L’ombra dell’equatore sarebbe una circonferenza centrata nell’origine e contenente la proiezione di tutto l’emisfero meridionale, mentre la proiezione dell’emisfero settentrionale ne starebbe fuori (vedi fig. 6.8); l’origine – zero – sarebbe la proiezione del polo sud e coincidente con quello. A ogni punto del globo corrisponde un punto in proiezione sul piano complesso e viceversa; ogni curva chiusa sul piano è la proiezione di una curva chiusa sulla superficie della sfera e viceversa… con una eccezione.

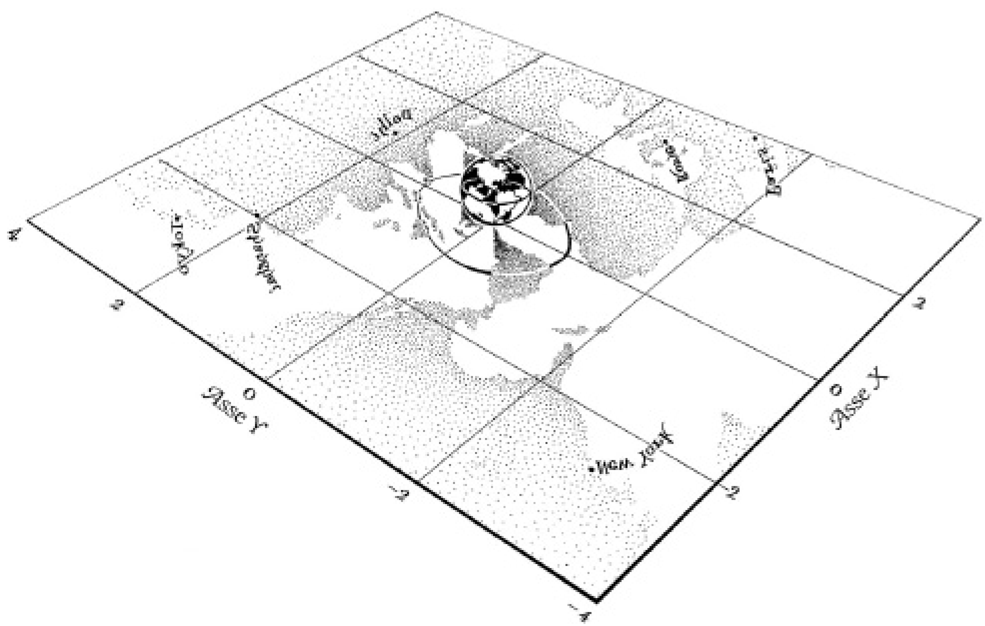


Figura 6.8
Proiezione stereografica del globo.

Nel caso dei cerchi meridiani, che passano per entrambi i poli, la curva proiettata sul piano non è più chiusa: è una retta. Il polo nord è come il punto all’infinito immaginato da Keplero e Poncelet; le rette del piano corrispondono ai circoli massimi della sfera passanti per il polo nord, il punto all’infinito (vedi fig. 6.9).

Una volta stabilita da parte di Riemann la corrispondenza tra il piano complesso (con un punto all’infinito) e la sfera, i matematici furono in grado di interpretare moltiplicazione, divisione e altre più elaborate operazioni esaminando il modo in cui quest’ultima venisse deformata e ruotata. Per esempio, moltiplicare per i equivale a girarla in senso orario di 90° attorno all’asse verticale, in modo che dove era 1 si porti i (trasformazione del generico numero x in ix), e trasformare x in $(x - 1)/(x + 1)$ equivale a imporre una rotazione, sempre di 90°, ma in senso antiorario e attorno all’asse equatoriale parallelo all’asse immaginario del piano, in modo tale che i poli vengano a trovarsi sull’equatore e i punti i e $-i$ rimangano al loro posto (vedi figg. 6.10, 6.11, 6.12).[44] Più interessante di tutto è la trasformazione di x nel reciproco $1/x$, che equivale a ruotare la sfera di 180° attorno all’asse equatoriale parallelo all’asse reale del piano, in modo che alla fine risulti capovolta; il polo nord diventa sud e il polo sud diventa nord, zero diviene l’infinito e l’infinito zero: è implicito nella geometria della sfera: $1/0 = \infty$ e $1/\infty = = 0$.[45] Zero e infinito non sono che i poli opposti della sfera di Riemann; possono scambiarsi di posto in un batter d’occhio e sono dotati di poteri uguali e opposti.

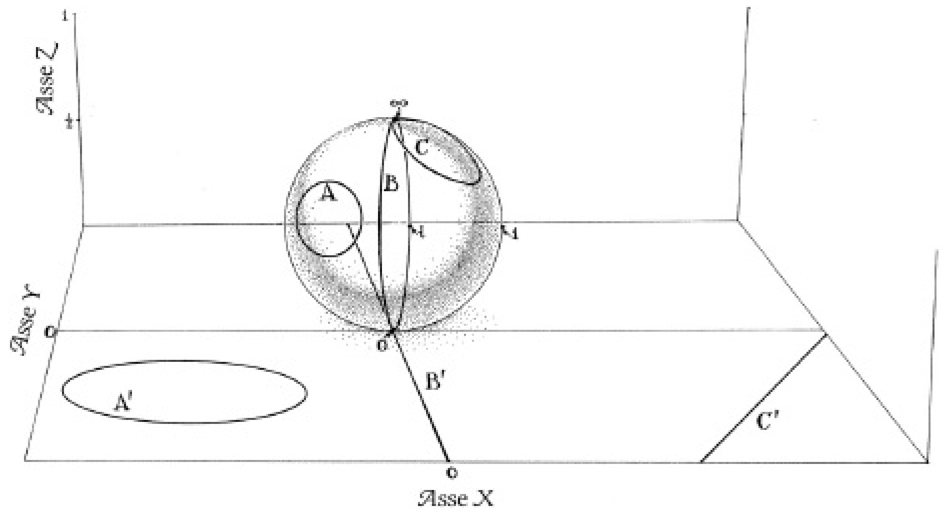


Figura 6.9
Rette e circonferenze sono intercambiabili.

Moltiplichiamo, per esempio, per due tutti i numeri del piano complesso, e vediamo che ciò equivale a stirare un ideale rivestimento di gomma tirandolo dal polo sud verso il nord in modo che, salendo a settentrione i punti sulla sfera, le loro proiezioni si allontanino dall'origine. Inversamente, moltiplicare per un mezzo ha l'effetto opposto di stendere da nord verso sud il rivestimento aderente alla superficie sferica: le proiezioni dei medesimi numeri si allontanano dall'origine. La moltiplicazione per infinito ha lo stesso effetto che forare con un ago il polo sud, talché il foglio di gomma si lacera e viene proiettato al polo nord: una quantità qualsiasi moltiplicata per infinito dà infinito. Moltiplicare per zero è, invece, come forare il polo nord, con il foglio che finisce tutto quanto allo zero del polo sud: una quantità qualsiasi moltiplicata per zero dà zero. Infinito e zero sono uguali e opposti… e parimenti distruttivi.

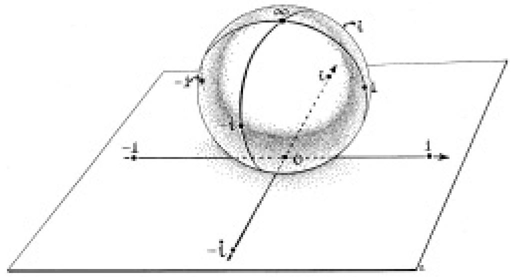


Figura 6.10
La sfera di Riemann.

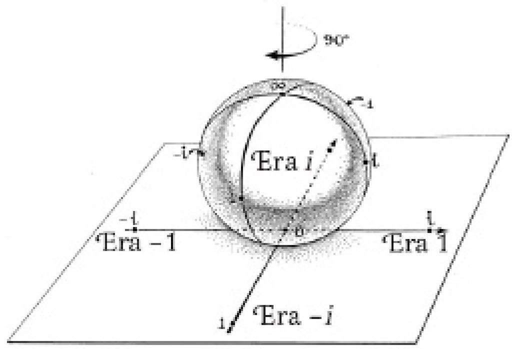


Figura 6.11
La sfera trasformata da i.

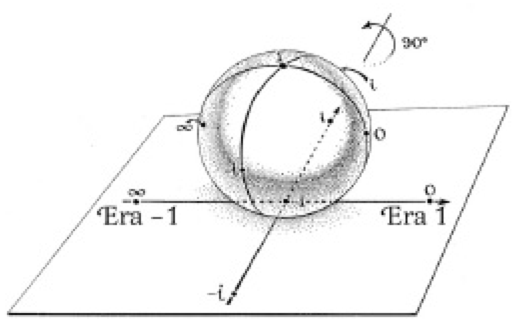


Figura 6.12
La sfera trasformata da $(x - \mathrm{l})/(x + 1)$.

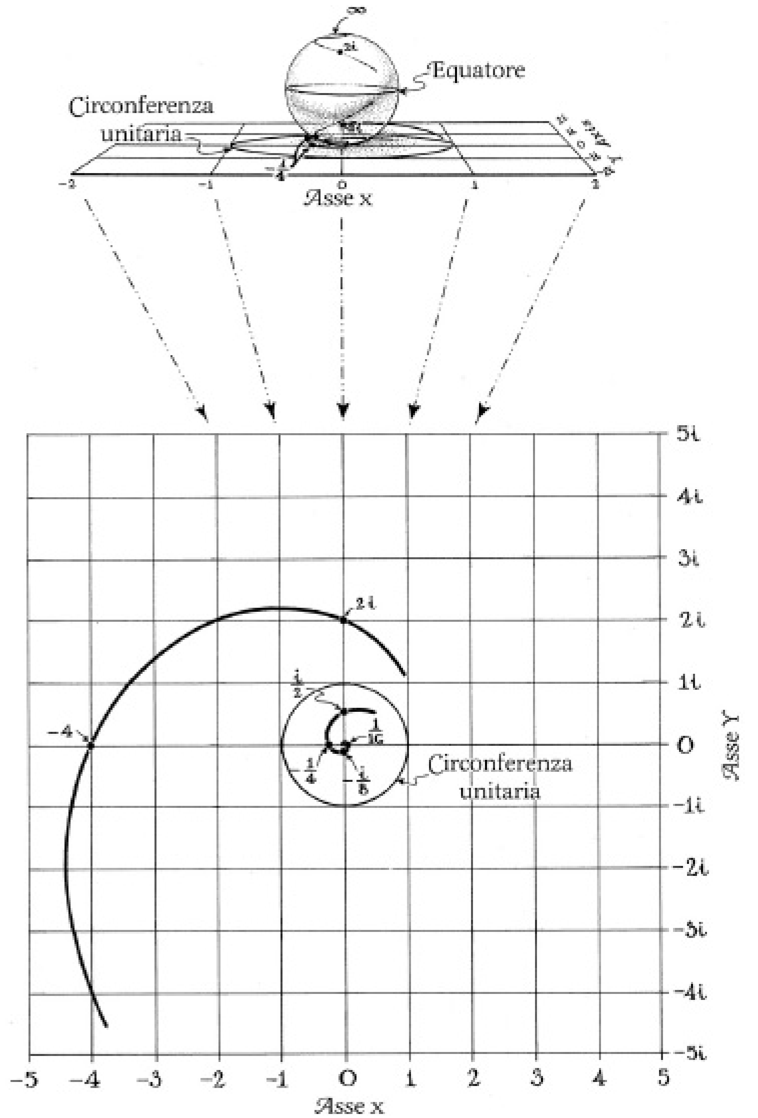


Figura 6.13
Spiraleggianti da o verso l’origine del piano complesso…

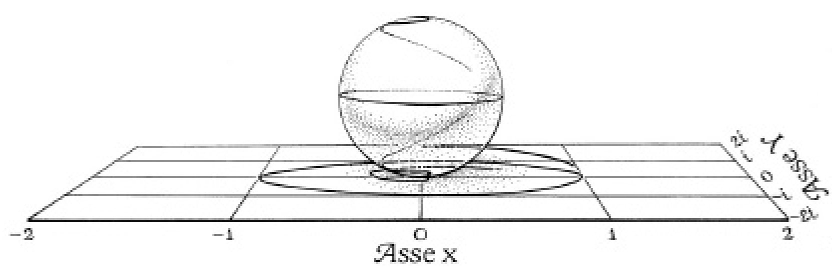


Figura 6.14
…sono immagini speculari sulla sfera.

I due estremi sono per sempre avvinghiati in una lotta per inghiottire tutti i numeri; in un incubo manicheistico, essi siedono ai poli opposti della sfera che li contiene e li risucchiano come minuscoli buchi neri. Prendiamo un numero qualsiasi sul piano complesso, per fissare le idee, $i/2$; eleviamolo al quadrato, al cubo, alla quarta potenza, alla quinta, alla sesta o alla settima, seguitiamo a moltiplicarlo per se stesso: lentamente, orbiterà a spirale verso lo zero come l'acqua nello scarico del lavandino. E $2i$ come si comporta? Fa esattamente il contrario; eleviamolo al quadrato, al cubo, alla quarta potenza, si allontanerà spiraleggiando dall'origine degli assi (vedi fig. 6.13). Ma sulla sfera dei numeri le due curve così descritte sono identiche, immagini speculari una dell'altra (vedi fig. 6.14). Non c'è quantità nel piano complesso che non subisca il fato inesorabile dell'attrazione verso 0 o ∞, se si eccettuano quelle situate all'equatore (come 1, -1, i, $-i$) e che sono, quindi, equidistanti dai due rivali. Sotto l'attrazione di entrambi, esse percorrono quel cerchio massimo in eterno, per sempre incapaci di sfuggire all'una o all'altra presa. (Un fatto analogo è verificabile con la semplice calcolatrice palmare: impostiamo un numero, qualsiasi numero, ed eleviamolo al quadrato, e poi ancora al quadrato, e ancora e ancora: il risultato si avvierà in direzione di zero o di infinito a seconda che il valore di partenza sia rispettivamente minore o maggiore dell'unità, e rimarrà invece invariato se quello fosse esattamente 1: non c'è alternativa.)

Lo zero infinito

> La mia teoria è solida come una roccia, e ogni freccia rivolta contro di essa tornerà indietro verso chi l'ha scagliata. Come faccio a saperlo? Perché l'ho studiata (…), perché sono risalito alle sue radici, per così dire, fino alla causa prima e infallibile di tutte le cose create.

Perduta la connotazione mistica, l'infinito divenne un numero come gli altri, uno *specimen* infilzato su uno spillo, pronto per venire studiato, e i matematici non se lo fecero dire due volte. Ma nel più profondo dell'infinito, in seno al vasto *continuum* dei numeri, ancora occhieggiava lo zero. Orribile a dirsi, addirittura l'infinito poteva esso stesso rivelarsi uno zero.

A suo tempo, prima che Riemann mostrasse come il piano complesso fosse in realtà una sfera, funzioni quali $1/x$ erano in grado di sconcertare i matematici; essa, infatti, assume valori sempre maggiori via via che x si avvicina a 0, fino a dilatarsi oltremisura e dirigersi all'infinito. Riemann rese assolutamente plausibile questo passaggio, riducendo un'entità che destava inquietudine a un punto sulla sfera per nulla diverso da tutti gli altri, tanto che i matematici iniziarono ad analizzare e classificare i punti in cui una funzione assume quel comportamento: le «singolarità».

$1/x$ possiede una singolarità per $x = 0$, una di tipo molto semplice, detta «polo»; ma ne esistono anche di altro genere, una delle quali, cosiddetta «essenziale», esibisce la funzione $\sin(1/x)$ sempre nel punto $x = 0$. Le singolarità essenziali sono delle inusitate diavolerie, vicino alle quali il grafico di una funzione fa il diavolo a quattro, nel caso specifico oscillando su e giù sempre più rapidamente nell'accostarvisi, e serpeggiando nel rimbalzare da 1 a -1 e ritorno; perfino nell'intorno più infinitesimo della singolarità la curva assume e riassume ogni valore ammissibile nel proprio campo di variazione. Ma, per quanto fosse astruso il comportamento alle singolarità, queste non apparivano più oggetti imperscrutabili a degli studiosi che stavano ormai imparando a dissezionare l'infinito.

Il maestro dell'anatomia dell'infinito fu Georg Cantor. Nato in Russia da famiglia danese nel 1845, dai dieci anni in poi egli visse in Germania; e fu lì – nella terra di Gauss e di Riemann – che vennero svelati i segreti dell’infinito. Ma, sfortunatamente per Cantor, quella terra era anche patria di Leopold Kronecker, il matematico che l’avrebbe ridotto al manicomio.

Alla base del conflitto tra i due stava una particolare concezione dell’infinito, concezione che può venire descritta con un semplice problemino. Immaginiamo un grande stadio pieno di gente, del quale si vuole sapere se contenga più o meno persone che posti a sedere o un eguale numero di entrambi; si possono contare le persone e poi i posti e confrontare i risultati, ma ci vorrebbe molto molto tempo, per cui conviene usare un modo assai più ingegnoso: basta fare sedere tutti quanti e poi vedere se rimangono posti vuoti o persone in piedi: nel primo caso sono di più i posti, nel secondo le persone, e se nessuno è in piedi né restano posti vuoti le due quantità sono uguali.

Il matematico e logico naturalizzato tedesco generalizzò lo stratagemma, affermando che due gruppi di numeri hanno la stessa numerosità se il primo dei due può «sedere» sopra l’altro – in corrispondenza 1 a 1 – senza che niente avanzi. Il gruppo $\{1, 2, 3\}$ ha, per esempio, la stessa numerosità di $\{2, 4, 6\}$, in quanto possiamo creare per loro un piano di assegnazione dei posti ideale, in cui tutti i numeri sono «seduti» e tutte le «sedie» sono occupate:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ | & | & | \\ 2 & 4 & 6 \end{array}$$

mentre non si può dire altrettanto per $\{2, 4, 6, 8\}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ | & | & | & | \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}$$

perché 8 è una «sedia» vuota.

Ma è quando il numero dei posti a sedere è illimitato che le cose si fanno interessanti. Consideriamo l'insieme degli interi non negativi { 0, 1, 2, 3, 4, 5, …} ; va da sé che esso è uguale a se medesimo, poiché possiamo certamente fare sì che ogni numero «sieda» sopra di sé:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ | & | & | & | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Fino a qui non c'è trucco e non c'è inganno – ogni insieme è ovviamente uguale a se stesso. Ma che cosa accade se togliamo elementi da uno degli insiemi, per esempio se togliamo 0? Stranamente, ciò non ne modifica affatto la numerosità; semplicemente risistemando lo schema di assegnazione possiamo ancora provvedere un posto per ognuno senza che ne rimangano di liberi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ | & | & | & | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

L'insieme ha conservato lo stesso numero di elementi nonostante ne siano stati sottratti alcuni; nei fatti, dall'insieme degli interi possiamo anche portarne via in numero infinito – possiamo, per esempio, eliminare tutti i numeri dispari – senza che cambi la sua estensione. Tutti hanno da sedere e tutte le sedie sono occupate:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \\ | & | & | & | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Proprio questa è la definizione di infinito: ciò che mantiene la stessa dimensione dopo che ne sia stata asportata una parte.[46]

I numeri pari, i dispari, i naturali, gli interi, sono tutti gruppi egualmente estesi, un'estensione (o «cardinalità», od «ordine di infinito») che presto Cantor designò «$\aleph_0$»

(«*àlef* indice 0», dal nome della prima lettera dell'alfabeto ebraico), e siccome tutti hanno la stessa estensione dell'insieme N dei numeri cardinali, gli insiemi di cardinalità $\aleph_0$ sono detti «numerabili» (ma, naturalmente, non si possono veramente contare, a meno di disporre di tempo illimitato). Anche i razionali (quelli che possono scriversi in forma frazionaria *a*/*b*, con *a* e *b* interi)[47] sono numerabili, e assegnando in maniera accorta ognuno di essi al suo posto a sedere, il nostro contabile dell'infinito mostrò come il loro insieme avesse pure cardinalità $\aleph_0$ (cfr. l'Appendice D).

Ma come, suo malgrado, ben sapeva Pitagora, i razionali non sono tutto, tanto che occorrono anche gli irrazionali per completare l'insieme **R** dei cosiddetti numeri reali, il quale, come mise in luce Cantor, è molto ma molto maggiore di quello (**Z**) costituito dai soli razionali. La dimostrazione che egli ne fece è molto semplice.

Immaginiamo di avere già messo a punto il piano ideale di assegnazione dei posti per i numeri reali: ognuno di essi ha un posto a sedere, e ogni sedia è occupata. Questo significa che possiamo anche compilare una distinta che associ ogni numero all'ordinale del posto che occupa, una lista fatta, per esempio, come segue:

Posto	Numero reale
1	0,3125123...
2	0,7843122...
3	0,9999999...
4	0,6261000...
5	0,3671123...
...	...

Il bello venne quando Cantor creò un numero che non era in elenco.

Per sapere come fece, prendiamo la prima cifra significativa del primo numero della lista, che nel nostro caso è 3; se il nuovo numero fosse uguale a quel primo numero, avrebbe anch’esso 3 come prima cifra, ciò che può facilmente evitarsi: basta assegnargli come prima cifra, per esempio, 2. Siccome il primo della lista inizia con 3 mentre il nostro nuovo inizia con 2, siamo certi che i due numeri sono diversi. (A rigore non sarebbe così, poiché, essendovi due modi di scrivere molti razionali, il numero 0,300000… è in realtà uguale a 0,299999… Ma si tratta di un dettaglio agevolmente superabile, e per amore di chiarezza metteremo da parte l’eccezione.)

Passiamo al confronto con il secondo numero in lista; come possiamo accertarci che il nuovo numero sia differente anche da quello? Be’, avendo già deciso quale debba esserne la prima cifra, non possiamo ripetere il machiavello negli identici termini, però possiamo fare una cosa del tutto equivalente, osservando che il secondo numero dell’elenco ha 8 come seconda cifra significativa, e che se il nuovo avesse in quella posizione, per esempio, 7 potremmo positivamente stabilire che non sarebbe uguale al secondo numero dell’elenco: diverse tra loro le seconde cifre, i due numeri non potrebbero in alcun modo coincidere. Iteriamo ora scelta e confronto scendendo lungo la lista e passando ogni volta alla cifra successiva, guardiamo la terza cifra del terzo numero e la cambiamo, poi la quarta del quarto, e così di seguito.

Posto	Numero reale	
1	0,3125123…	La 1ª cifra del nuovo numero è 2 (diversa da 3)
2	0,7843122…	La 1ª cifra del nuovo numero è 7 (diversa da 8)
3	0,9999999…	La 1ª cifra del nuovo numero è 8 (diversa da 9)
4	0,6261000…	La 1ª cifra del nuovo numero è 0 (diversa da 1)
5	0,3671123…	La 1ª cifra del nuovo numero è 0 (diversa da 1)
…	…	…

Viene generato così il nuovo numero 0,27800…, che

– è differente dal primo in elenco (la 1ª cifra dell’uno è diversa dalla 1ª cifra dell’altro);

– è differente dal secondo in elenco (la 2ª cifra dell’uno è diversa dalla 2ª cifra dell’altro);

– è differente dal terzo in elenco (la 3ª cifra dell’uno è diversa dalla 3ª cifra dell’altro);

– è differente dal quarto in elenco (la 4ª cifra dell’uno è diversa dalla 4ª cifra dell’altro);

– è differente…

Traversando la lista in diagonale veniamo effettivamente a individuare un nuovo numero, del quale il procedimento seguito garantisce la diversità da tutti i colleghi presenti nella lista. Ma, essendo diverso da tutti, allora non può rientrare nell’elenco, mentre noi siamo partiti dal presupposto che in esso si esaurisse, invece, tutto l’insieme **R** (ricordiamo che avrebbe dovuto trattarsi di uno schema di assegnazione ideale), e dunque siamo giunti a una contraddizione. Quindi non può esistere uno schema ideale di corrispondenza biunivoca basato sugli ordinali.

L’insieme **R** dei reali ha un ordine di infinito maggiore di quello di **N** o di **Z**, ordine designato con $\aleph_1$ e che rappresenta la prima «infinità non numerabile».

(Tecnicamente, il simbolo per l’infinità della retta dei reali è C, o «continuo». Per lunghi anni i matematici si sono spremuti le meningi per stabilire se C fosse effettivamente di ordine $\aleph_1$, fino a che uno di loro, Paul Cohen, dimostrò nel 1936 come il dilemma, la cosiddetta «ipotesi del continuo», sia indecidibile in forza del teorema di incompletezza di Gödel. Oggi come oggi la gran parte degli studiosi la accetta per vera, mentre altri prendono in esame i «numeri transfiniti non-Cantoriani», per i quali l’ipotesi è assunta falsa.) Nella mente del loro primo indagatore vivevano infinità in quantità illimitata – i numeri transfiniti – racchiuse una nell’altra; $\aleph_0$ è più piccola di $\aleph_1$, che è contenuta in $\aleph_2$, a sua volta minore di $\aleph_3$, e così di seguito. Al culmine della gerarchia risiede la somma infinità di Dio, che è tale da rintuzzare ogni sforzo di comprensione.

Ma per la malasorte del matematico dalle molteplici origini nazionali, non tutti ne condividevano la visione della divinità. Leopold Kronecker, eminente professore dell’Università di Berlino e uno dei suoi insegnanti, riteneva che Iddio non potesse permettere la bruttura degli irrazionali e tanto meno delle infinità-*matrioska* a estensione indefinita; gli interi costituivano per lui la purezza del Signore, mentre irrazionali e consimili strampalate consorterie andavano annoverati tra le abominazioni, fantasmi emananti dall’imperfezione della mente umana. Quanto a Cantor e ai suoi transcomesichiama…

Disgustato dall’allievo, il cattedratico tutto d’un pezzo bersagliò di critiche al vetriolo la sua «teoria positiva dell’infinito» e gli rese estremamente difficile il pubblicare. Quando, poi, nel 1883 Cantor si vide respinta la domanda di entrare nel Corpo accademico della propria *alma mater* e dovette accontentarsi di una cattedra presso l’assai meno prestigiosa Università di Halle, è probabile che nella vicenda entrasse lo zampino di Kronecker, che a Berlino godeva di molta influenza. L’anno stesso il novello professore scrisse una difesa contro gli attacchi dell’ex maestro, ma, ormai prostrato e avvilito, soffrì di lì a breve di una prima crisi depressiva.

Magra consolazione sarebbe stata per lui sapere che la propria opera doveva costituire il fondamento di una branca interamente nuova della matematica: la «teoria degli insiemi». Servendosi del nuovo strumento, calcarono le sue orme coloro che avrebbero creato dal nulla non soltanto le tipologie di numeri già note, ma anche quantità mai fino ad allora immaginate, infinite infinità sulle quali si possono eseguire le quattro operazioni alla stregua di numeri ordinari – il cantorismo spalancò le porte su un intero e nuovo universo di numeri. Il matematico tedesco David Hilbert avrebbe commentato, riferendosi alla propria categoria: «Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi»; ma per il sensibile professore era ormai tardi: dentro e fuori, per il resto della vita, dalle case di cura per malattie nervose, egli morì a Halle nel 1918.

Nello scontro tra Kronecker e Cantor alla fine quest’ultimo avrebbe prevalso; la sua teoria avrebbe mostrato che gli interi tanto cari all’avversario – e quanto a questo, anche i numeri razionali – non assommano ad alcunché; sono un infinito zero.

L’insieme **R** conta infiniti elementi, e non solo, ma tra due qualsiasi di quegli elementi, anche arbitrariamente vicini, si trovano altri numeri razionali in quantità ancora illimitata. Essi sono ovunque, e tuttavia la gerarchia cantoriana delle infinità l’avrebbe messa giù del tutto diversamente, svelando quanto poco spazio nel corpo reale occupino i razionali.

Per condurre in porto la complessa dimostrazione serve finezza d’ingegno. Le superfici di forma irregolare possono rivelarsi assai difficili da misurare; pensiamo, per esempio, a una chiazza sul parquet, e chiediamoci quale sia la sua area. La risposta non è tanto ovvia: se la macchia avesse forma circolare, quadrata, o triangolare il calcolo sarebbe semplice e richiederebbe solo di mettere mano al doppio decimetro e misurarne il diametro o piuttosto il lato o la base e l'altezza, ma per trovare l'area di una patacca a forma di ameba non c'è formula che tenga. C'è, però, un altro modo.

Stendiamo un tappeto rettangolare sopra la macchia: se la nasconde per intero significa che l'area del tappeto è maggiore e, nell'ipotesi che questa sia 10 decimetri quadrati, la superficie da misurare dovrà essere meno di quel tanto. Usando allora più pedane e più piccole, l'approssimazione migliorerà via via; se, per esempio, con cinque da 1,5 decimetri quadrati la macchia viene ancora del tutto coperta, significa che misura almeno 7,5 decimetri quadrati, un valore più vicino al vero di quello ottenuto con il singolo tappeto. Al diminuire dell'area delle stuoie-campione la sovrapposizione diviene sempre più precisa, e la misura cumulativa della loro superficie si approssima a quella effettiva della chiazza, tanto che essa è definibile in termini di limite al tendere a zero dell'area dei tappeti (vedi fig. 6.15).

Ripetiamo ora il procedimento sui numeri razionali, usando gruppi numerici al posto dei tappeti; per fare un esempio, il numero 2,5 è «coperto» dall'insieme comprendente i numeri dal 2 al 3, un «tappeto» di dimensione 1. L'impiego di tappezzeria di tal fatta produce, però, delle conseguenze assolutamente *sui generis*, come evidenziò Cantor per mezzo ancora della metafora dei posti a sedere. Con quel sistema è possibile dare conto di tutti i numeri razionali assegnando a ciascuno un posto, in maniera da defalcarli uno dopo l'altro in ordine di sedia. Consideriamo allora il primo razionale collocandolo idealmente su una retta, e stendiamogli sopra un tappeto di lunghezza 1; molti altri numeri verranno coperti insieme con esso, ma questo non ci riguarda: fino a che il primo numero rimane coperto a noi basta e avanza.

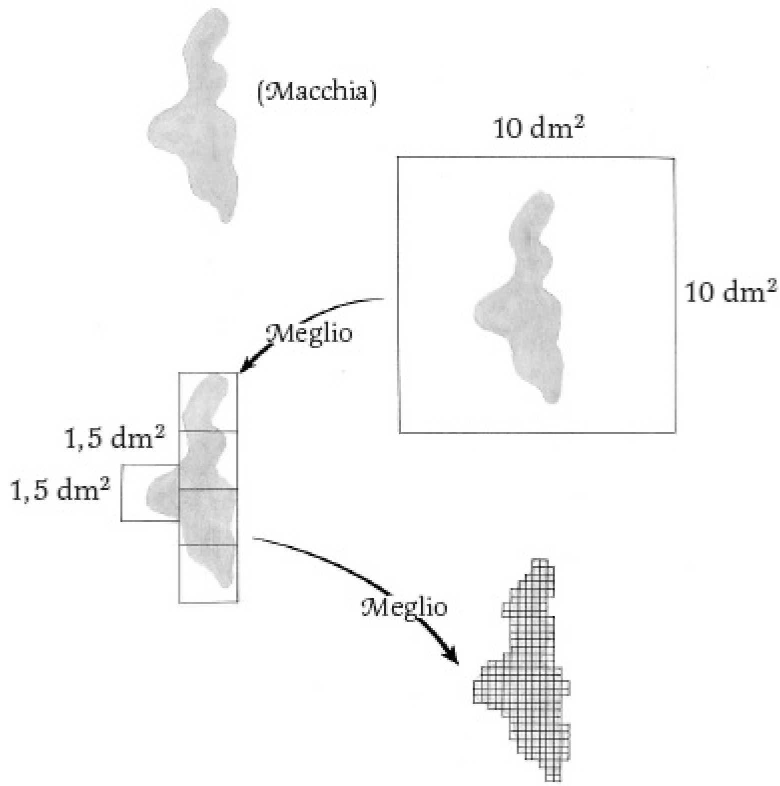


Figura 6.15
Nascondere una macchia.

Passiamo ora al secondo e celiamolo sotto un tappeto di lunghezza 1/2, ricopriamo il terzo con un tappeto da 1/4, e via via dimezzando proseguiamo di questo passo fino all'infinito. Come si è visto, ogni numero razionale compare nella lista dei posti a sedere, per cui tutti quanti alla fine avranno ottenuto la loro brava gualdrappa. Qual è, dunque, la dimensione totale dei tappeti? Ce lo dice una vecchia conoscenza, la serie di Achille – la somma delle loro aree è data, infatti, da $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + (1/2)^n$, che è uguale a 2 al tendere di n all'infinito. Le infinite legioni dei razionali sulla retta dei numeri si possono dunque ricoprire con un insieme di tappeti, la cui dimensione complessiva è

2, e questo significa che i razionali occupano meno di due unità di lunghezza.

Analogamente a quanto fatto con la macchia sul pavimento, riduciamo ora la dimensione dei tappeti, in modo da calcolare con migliore approssimazione la lunghezza dei razionali, e invece di partire con un tappeto di dimensione unitaria prendiamolo lungo solo 1/2. Questo rende la dimensione totale dei tappeti pari a 1; ovvero i numeri razionali occupano meno di una unità di lunghezza. Se il primo tappeto è lungo 1/1000, tutti i tappeti sono complessivamente lunghi 1/500 di unità di lunghezza e l'occupazione di spazio da parte dei numeri razionali è inferiore a tale valore; se è lungo quanto mezzo atomo, l'insieme di tutti i tappeti avrà la lunghezza di un atomo, e ancora sarà più che sufficiente a ricoprire tutti i razionali sulla retta dei numeri (vedi fig. 6.16).

Possiamo ridurre sempre più tale lunghezza; la copertura resta assicurata iniziando da qualunque valore piccolo quanto si voglia e proseguendo progressivamente dimezzandolo: mezzo atomo, un neutrone, un quark, una lunghezza minuscola ai confini dell'immaginazione.

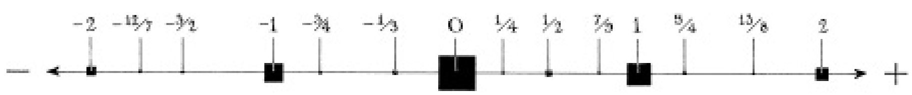


Figura 6.16
La ricopertura dei razionali.

Ma allora qual è la lunghezza dei numeri razionali? Abbiamo testé definito la dimensione come limite, la somma della dimensione dei tappeti quando la dimensione individuale tende a zero, e abbiamo appena visto che nel caso specifico essa tende a valori sempre più piccoli, più piccoli di un atomo, di un quark o di un milionesimo di miliardesimo di quark, e sempre consentendoci di ricoprire tutti i razionali. E qual è il limite di una quantità che diviene incessantemente sempre più piccola?

Zero.

Quanto spazio occupano i numeri razionali? Non occupano assolutamente alcuno spazio; è un concetto difficile da mandare giù, ma è vero. Anche se sono ovunque sulla retta dei numeri, essi non vi occupano assolutamente spazio alcuno. Se dovessimo bersagliare la retta di freccette tirate a caso, la probabilità di colpire un razionale sarebbe nulla, non riusciremmo a colpirlo mai e poi *mai*. E mentre i numeri razionali sono a tal punto minuscoli, gli irrazionali non lo sono affatto, dato che non è possibile compilare per loro uno schema di assegnazione dei posti e, dunque, non li si può ricoprire uno a uno in maniera discreta: ne rimarrebbero sempre fuori un'infinità. Herr Professor Kronecker odiava gli irrazionali, ma sono loro che reclamano tutta la lunghezza della retta dei numeri.

L'infinità dei razionali non assomma che a zero.

Capitolo 7

Gli zeri assoluti

La fisica dello zero

> Se fatta con criterio, la matematica comporta trascurare una quantità quando è piccola, non tralasciarla perché è infinitamente grande e non la si vuole tra i piedi!
>
> Paul A. M. Dirac

Alla fine fu a tutti evidente: zero e infinito sono inseparabili e fondamentali per la matematica. I matematici non ebbero altra scelta che imparare a convivere con le due entità, ma ai fisici esse parvero ancora irrilevanti per il funzionamento dell'Universo. Poteva anche darsi che addizionare infinità e dividere per zero rientrasse negli interessi della matematica, ma certamente non tra le vie della natura.

O almeno così avevano sperato gli scienziati. Ma, in parallelo al progressivo venire in luce dei collegamenti tra le opposte quantità, costoro presero a imbattersi nello zero anche nel mondo reale – a quanto pareva, esso sconfinava dalla matematica nella fisica. In termodinamica, uno zero divenne la barriera insuperabile, la più bassa temperatura possibile; nella teoria della relatività generale di Einstein, uno zero divenne il buco nero, mostruosa degenerazione stellare in grado di inghiottire interi sistemi solari; in meccanica quantistica, uno zero è all'origine di una inverosimile sorgente di energia – infinita e diffusa ovunque, presente anche nel vuoto siderale – e di una forza fantasma esercitata dal nulla assoluto.

Calore zero

> Quando puoi misurare ciò di cui parli, ed esprimerlo in numeri, puoi affermare di saperne alcunché. Se però non puoi misurarlo, se non puoi esprimerlo in numeri, la tua conoscenza sarà povera cosa, e insoddisfacente: forse un inizio di conoscenza, ma non abbastanza da fare progredire il tuo pensiero fino allo stadio di *scienza*.
>
> William Thomson (Lord Kelvin)

Il primo ineludibile zero della fisica emerse da una legge già in uso da mezzo secolo. Essa era stata scoperta nel 1787 da Jacques-Alexandre-César Charles, un fisico francese allora famoso per avere compiuto la prima ascensione in pallone a idrogeno, e ricordato tuttavia non per le imprese aerostatiche ma per la legge fisica che porta il suo nome.[48]

Come molti altri filosofi naturali del tempo, Charles era affascinato dall’eclettismo mostrato dai gas nelle loro caratteristiche: l’ossigeno ravviva la fiamma sulle braci mentre l’anidride carbonica la soffoca; il cloro è verdastro e mortale e il protossido di azoto è incolore ed esilarante. Eppure tutti questi gas condividono delle proprietà di base; per esempio, se li si riscalda si espandono, e refrigerandoli riducono il proprio volume.

Lo studioso e aeronauta scoprì come tale comportamento fosse del tutto ripetitivo e quantitativamente predicibile. Due identici palloni riempiti da eguali volumi di gas differenti si dilatano della stessa quantità se viene loro somministrata la medesima quantità di calore, e parimenti si contraggono di conserva se raffreddati con uguale modalità; ma non basta: a ogni grado di temperatura guadagnato o perso corrisponde la stessa percentuale volumetrica in più o in meno. La legge di Charles stabilisce la relazione tra il volume e la temperatura del gas.

Poco oltre la metà del secolo seguente, il matematico e fisico britannico William Thomson notò qualche cosa di strano nella legge in questione: lo spettro dello zero. Via via che si abbassa la temperatura del pallone di gas, questo progressivamente si riduce in volume con la medesima cadenza secondo cui quella cala; però questo processo non può proseguire indefinitamente. La legge di Charles consente al gas di ridursi fino al volume nullo, un punto in cui esso non occupa più alcuno spazio, e questo è naturalmente il valore minimo possibile anche teoricamente, poiché il gas non può certamente proseguire oltre e occupare uno spazio negativo. Ma se il volume è legato alla temperatura ed è inferiormente limitato, ciò significa che anche la temperatura non potrà scendere sotto un valore minimo; non è possibile che un gas diventi illimitatamente sempre più freddo: una volta che il «pallone» non possa ulteriormente rimpicciolire, la temperatura non potrà ulteriormente ridursi. È questa la condizione dello «zero assoluto», la temperatura più bassa teoricamente raggiungibile, che equivale a poco più di 273 gradi centigradi al di sotto del punto di congelamento dell'acqua.

Thomson è meglio conosciuto come Lord Kelvin, e come tale ha dato il nome alla scala assoluta della temperatura. Lo zero in gradi Celsius (°C, la scala di uso comune) è la temperatura a cui l'acqua gela (o il ghiaccio fonde), in gradi Kelvin (°K) è il valore del limite fisico suddetto.

Portato allo zero assoluto, un gas è prosciugato di tutta la propria energia, ma una tale condizione è di fatto irraggiungibile. Non è possibile raffreddare un gas né qualunque altro oggetto fino allo zero assoluto; ci si può arrivare molto vicino – e in effetti, grazie a tecniche impieganti il laser, i fisici moderni sono in grado di raggelare gli atomi fino a pochi milionesimi di grado sopra il limite estremo –, ma tutto nell'Universo si coalizza per impedirne il raggiungimento. Ciò accade in quanto ogni oggetto fisico che possieda energia è in agitazione (a livello microscopico) e irradia onde elettromagnetiche; per esempio, le persone sono fatte di molecole d'acqua e di qualche impurità organica, e tutti i relativi atomi sono in oscillazione nello spazio a frequenza (e velocità) tanto maggiori quanto più alta è la temperatura; nel vibrare, essi urtano i loro vicini e li portano, così, a un regime di mobilità corrispondente al proprio.

Supponiamo di volere raffreddare uno zucchino fino allo zero assoluto, sbarazzarlo, in altre parole, di tutta l'energia che contiene. Per fare questo è necessario arrestare il moto di tutti gli atomi componenti, ovverosia mettere il vegetale in una scatola da cui cominciare a sottrarre calore; il contenitore, però, è a sua volta fatto di atomi, che oscillano avanti e indietro finendo per scontrarsi con quelli della cucurbitacea e restituirle parte almeno dell'energia perduta. Anche trovando modo di sospendere la cocuzza fluttuante nel vuoto assoluto al centro della scatola, non riusciremmo ad arrestarne del tutto le vibrazioni, perché l'agitarsi delle microscopiche particelle irradia energia elettromagnetica, che, proveniente dalle pareti del contenitore, andrebbe continuamente a incidere sulla superficie della zucca, rimettendo le sue molecole (parzialmente) in moto.

Tutti gli atomi costituenti un paio di presselle, una serpentina di refrigerazione, un recipiente di azoto liquido si muovono e irradiano in maniera tale che il prodotto orticolo assorbirà costantemente energia a spese del regime vibrazionale e/o delle radiazioni di quanto lo circondi, a partire dalle pinzette impugnate per manipolarlo e dal circuito del freddo impiegato per abbassarne la temperatura. Non è nemmeno possibile fermare questo scambio, per esempio, tramite uno schermo, perché anch'esso sarebbe fatto di materia radiante e a propria volta in vibrazione. Qualunque corpo, uno zucchino, come un cubetto di ghiaccio, come una cucchiaiata di elio liquido, viene in qualche modo influenzato dall'ambiente in cui è immerso (il quale costituisce un oggetto a propria volta immerso in un ambiente più grande), cosicché, per portarlo allo zero assoluto, occorrerebbe ricondurre a quella temperatura l'intero Universo insieme con esso. Si tratta, quindi, di una barriera irraggiungibile oltre che insuperabile.

La determinazione dello zero assoluto da parte di Kelvin ebbe un sapore alquanto diverso dalla scoperta delle leggi di Newton. Queste avevano conferito ai fisici un grado di potere sull'Universo, mettendoli in condizione di anticipare con grande precisione le orbite dei pianeti e, in generale, il moto dei corpi, ma quella lo tolse loro, specificando ciò che «non potevano» fare: non avrebbero mai potuto raggiungere quella temperatura. Benché frustrante per l'impostazione scientifica positivista dell'epoca, la barriera messa in luce dal fisico britannico fu all'origine di un nuovo ramo della fisica: la termodinamica.

Codesta disciplina studia il comportamento di calore ed energia. Analogamente a quanto fa lo zero della scala Kelvin, le leggi della termodinamica erigono barriere insuperabili da qualunque scienziato, per quanto accanitamente vi si cimenti. Esse affermano, per esempio, l'impossibilità del moto perpetuo, a dispetto di tutti gli inventori che bramosamente tempestano le facoltà di fisica e le redazioni delle riviste scientifiche armati dei loro progetti di macchine straordinarie, in grado di fornire lavoro in assenza di qualsiasi fonte di energia. Ma le suddette leggi ne escludono la fattibilità già a livello teorico; è questo un altro conseguimento irrealizzabile, non conta con quali tecniche e tecnologie e con quanta determinazione lo si persegua. È perfino impossibile fare funzionare una macchina senza sprecare energia, senza disperdere nel mondo esterno, sotto forma di calore, una parte di quella utilizzata. (La termodinamica è più svantaggiosa di un casinò: non si può vincere, per quanto ci si strologhi; e non si può nemmeno uscire pari.)

Dalla termodinamica germogliò la meccanica statistica, disciplina tramite la quale i fisici deducono il comportamento macroscopico della materia dallo studio del movimento collettivo delle particelle elementari. La descrizione statistica di un gas dà, per esempio, ragione della legge di Charles: al crescere della temperatura le singole molecole acquistano maggiore velocità e impattano con maggiore forza contro la superficie interna del loro contenitore; il gas, nel suo complesso, preme allora di più sulle pareti del recipiente e la pressione sale. La meccanica statistica – la teoria dell'agitazione materiale – diede la spiegazione di alcune tra le proprietà fondamentali della materia, e parve pure interpretare il fenomeno luminoso.

Sul problema della natura della luce gli studiosi si erano arrabattati per secoli. Isaac Newton la credeva costituita da corpuscoli irraggiati dagli oggetti brillanti, ma con il passare del tempo si giunse alla conclusione che non di particelle si trattasse, bensì di onde. Nel 1801 uno scienziato britannico[49] scoprì il fenomeno dell'interferenza della luce con se stessa, mandando in soffitta l'ipotesi corpuscolare, a quanto pareva, definitivamente.

L'interferenza si produce con ogni tipo di onda. Se lasciamo cadere un sasso in uno stagno, creiamo alla superficie una serie di increspature circolari che sono appunto onde; l'acqua sussulta in su e in giù, e creste e avvallamenti si allargano in cerchi concentrici. Se i sassi sono due, le increspature interagiscono tra loro determinando una figura di interferenza, meglio osservabile immergendo in una vasca d'acqua due pistoni in moto alternativo: una cresta in provenienza dall'uno e un avvallamento generato dall'altro si cancellano a vicenda nell'incontrarsi. Osservando, allora, con attenzione il disegno stazionario formato dalle onde, risultano, per conseguenza, visibili le corrispondenti «linee dei nodi» non interessate dal moto ondoso e dove l’acqua resta ferma (vedi fig. 7.1).

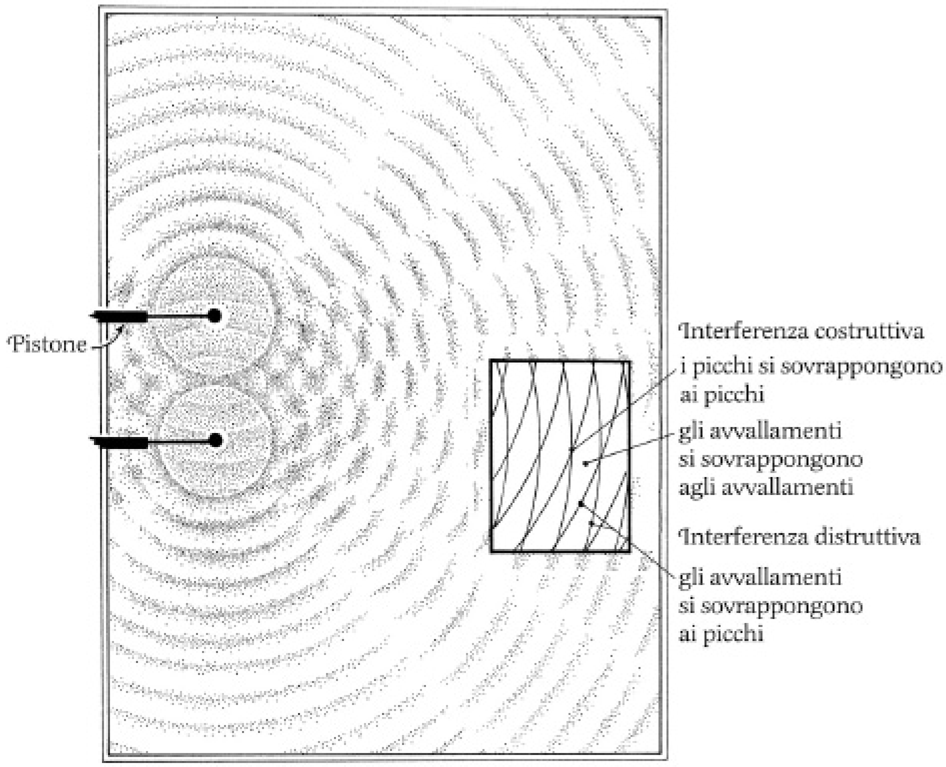


Figura 7.1
Figura di interferenza nell’acqua.

Lo stesso vale per la luce. Da due sottili fenditure in uno schermo illuminato dalla medesima sorgente si dipartono fronti d’onda sferici che proiettano su un altro schermo frange di interferenza, dove a zone chiare si alternano zone non interessate dalla perturbazione luminosa e che restano scure (vedi fig. 7.2). (Con un piccolo esperimento casalingo possiamo constatare un fenomeno correlato: tenendo unite le dita di una mano, vi si formano delle piccole fessure che lasciano passare un poco di luce; se ora fissiamo una lampadina attraverso una di esse, possiamo scorgervi, in particolare vicino ai lati, delle fievoli strisce scure pure dovute alla natura ondulatoria della luce.) Le onde interferiscono in questo modo, ma non così le particelle; dunque il fenomeno dell’interferenza parve regolare una volta per tutte la questione della natura della luce. I fisici conclusero che essa non era fatta di particelle, ma di campi elettrici e magnetici propagantisi in onde.

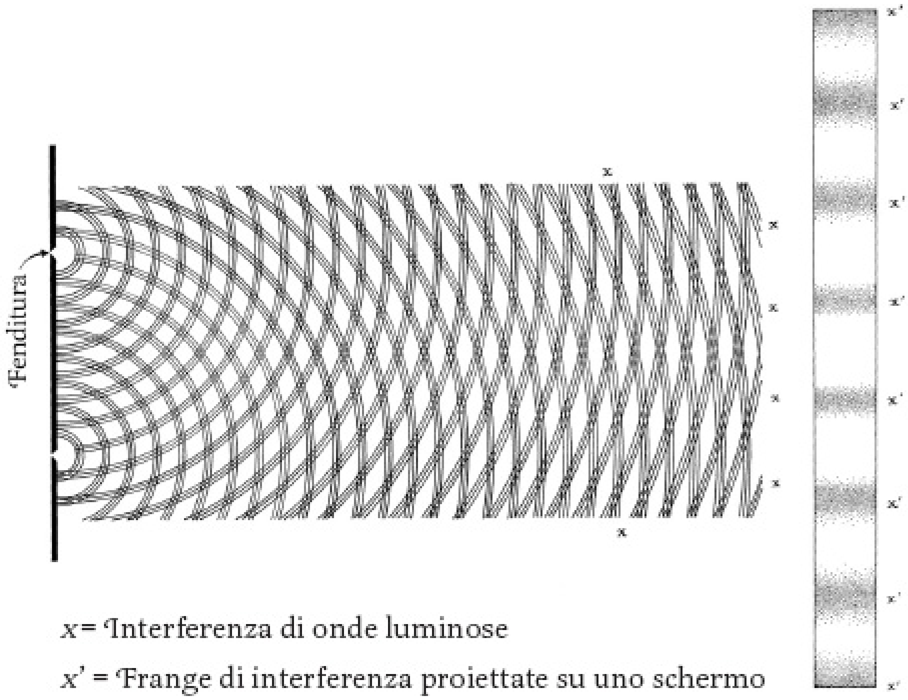


Figura 7.2
Interferenza luminosa. Avvicinando l’occhio al bordo sinistro dell’illustrazione e osservandola in modo radente si può meglio notare l’effetto del fenomeno.[50]

Era questo lo stato dell’arte a metà Ottocento, e si trovava apparentemente in perfetto accordo con le leggi della meccanica statistica, la branca della fisica che descrive a livello microscopico l’agitarsi della materia. La teoria ondulatoria della luce implicava che tali oscillazioni molecolari comportassero l’emissione di radiazione, ovvero di onde luminose. Ma c’è dell’altro; più è caldo l’oggetto in questione maggiore è la velocità delle sue molecole e maggiore, allo stesso tempo, è l’energia radiante emessa. Anche questo è in perfetta corrispondenza con la luce, la cui radiazione possiede più energia ove più rapidamente l’onda alterni l’intensità massima e minima (che equivale a dire ove sia più alta la sua frequenza ovvero più piccola la «lunghezza d’onda», la distanza spaziale tra due picchi successivi). Per la verità, una delle leggi termodinamiche più importanti, la cosiddetta equazione di Stefan-Boltzmann che pone in relazione la temperatura di un oggetto con la quantità totale di energia da esso irradiata, pare correlare l’agitazione molecolare all’oscillazione delle onde elettromagnetiche. Fu questo il maggiore conseguimento ottenuto dalla meccanica statistica e dalla teoria ondulatoria della luce. (La legge afferma che l’energia emessa da un oggetto nell’unità di tempo è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura,[51] e può essere utilizzata all’inverso per conoscere la sua temperatura di equilibrio termico quando è irradiato da un’assegnata quantità di energia. Applicando precisamente questo criterio, e con l’aiuto di un passaggio dal libro di Isaia, ignoti fisici stabilirono che la temperatura del Paradiso supera i 500 gradi Celsius.)[52]

Sfortunatamente, il conseguimento ebbe validità di breve durata. Sul volgere del secolo, due fisici britannici provarono a servirsi della teoria delle «agitazioni» per risolvere un semplice problema, richiedente un calcolo abbastanza immediato: quanto irradia una cavità? Tramite l’applicazione combinata delle relazioni fondamentali della meccanica statistica (che spiegano come oscillano le molecole) e di quelle che descrivono l’interazione tra campi elettrici e magnetici (che spiegano come oscillano i campi radianti), essi pervennero a un’equazione che descrive come la radiazione della cavità si distribuisca sulle diverse lunghezze d’onda e vari con la temperatura.

La cosiddetta formula di Rayleigh-Jeans, derivata da Lord Rayleigh e modificata da Sir James Jeans, funziona abbastanza bene per la determinazione della radiazione di grande lunghezza d'onda e bassa energia proveniente dai corpi caldi, ma procedendo verso la parte alta dello spettro elettromagnetico inizia a perdere colpi. Ne risulterebbe, infatti, un progressivo aumento d'intensità della radiazione al diminuire della lunghezza d'onda (e quindi per energie più elevate); per cui, in vicinanza della lunghezza zero, gli oggetti emetterebbero radiazioni altamente energetiche in quantità pressoché infinita.[53] Secondo tale modello, qualunque corpo fisico a qualunque temperatura irradierebbe continuamente una potenza illimitata; perfino un cubetto di ghiaccio produrrebbe raggi ultravioletti, X e gamma bastevoli a vaporizzare tutto quanto all'intorno – realizzando, così, la cosiddetta «catastrofe ultravioletta». La lunghezza d'onda zero corrisponde in tale modo a infinita energia, cosicché ancora una volta zero e infinito si alleavano per mandare un ben congegnato, armonioso corpus di leggi fisiche a carte quarantotto. La soluzione del paradosso divenne ben presto la principale priorità degli scienziati.

Ma né Rayleigh né Jeans avevano commesso errori; avevano, viceversa, utilizzato relazioni matematiche che gli studiosi ritenevano valide, manipolandole secondo criteri parimenti accettati, e tuttavia i risultati ottenuti si dimostravano incompatibili con la realtà fisica: i prodotti della ghiacciaia si astengono per solito dall'annichilire a suon di raggi gamma mondi e civiltà, a dispetto di ogni positiva indicazione del contrario proveniente dalle leggi scientifiche correntemente riconosciute. Una di quelle doveva essere sbagliata; ma quale?

Lo zero quantistico: energia infinita

> Agli occhi dei fisici, il vuoto contiene allo stato latente ogni forza e particella. Si tratta di una sostanza assai più ricca che non il nulla filosofico.

Fu la catastrofe ultravioletta che condusse alla rivoluzione quantistica. La meccanica dei quanti giunse a togliere di mezzo lo zero della teoria classica, cancellando così la dose illimitata di energia che accompagnerebbe ipoteticamente ogni grammo di materia dell’Universo; ma si trattò della vittoria di Pirro. Lo zero quantistico si riflette nel fatto che l’intero universo – spazio vuoto compreso – sia intriso di energia in quantità infinita, l’energia «di punto zero»,[54] la quale conduce a sua volta al più inaudito degli zeri: la forza fantomatica del nulla.

Nel 1900 i fisici sperimentali tedeschi cercavano di fare luce sulla catastrofe ultravioletta, e tramite attente misurazioni dell’intensità di radiazione generata dai corpi a diverse temperature mostrarono come la formula di Rayleigh-Jeans effettivamente non rispecchiasse del tutto la realtà. Un ricercatore che insegnava all’Università di Berlino, di nome Max Planck, nell’esaminare i dati dei recenti esperimenti elaborò empiricamente, nel giro di ore, un’equazione che sostituiva, modificandola, la relazione incriminata; e non solo essa dava pienamente conto dei risultati di misura, ma scioglieva anche il nodo della catastrofe ultravioletta. La «formula di Planck» non schizza all’infinito al diminuire della lunghezza d’onda; invece di aumentare senza limite, l’energia vi torna a calare dopo avere raggiunto un massimo (vedi fig. 7.3). La nuova formula, benché assolutamente corretta, comportava purtroppo ripercussioni addirittura più inquietanti del cataclisma che provvedeva a scongiurare.

La questione insorse in quanto non furono le ordinarie assunzioni della meccanica statistica, e dunque le leggi fisiche come allora note, a condurre lo scienziato tedesco alla giustificazione teorica di quel risultato; al contrario, come egli ipotizzò l’anno medesimo, esse dovevano venire modificate. In seguito l’autore definì «un atto disperato» la correzione da lui apportata; e difatti nulla di meno che l'estrema esasperazione avrebbe indotto un fisico ad alterare le leggi della fisica in maniera tanto apparentemente assurda: nella congettura di Planck, alle molecole non sono consentiti se non determinati modi di agitarsi, esse vibrano solamente a certi accettabili livelli energetici, cosiddetti «quanti», e risulta loro impossibile acquistare energie intermedie.

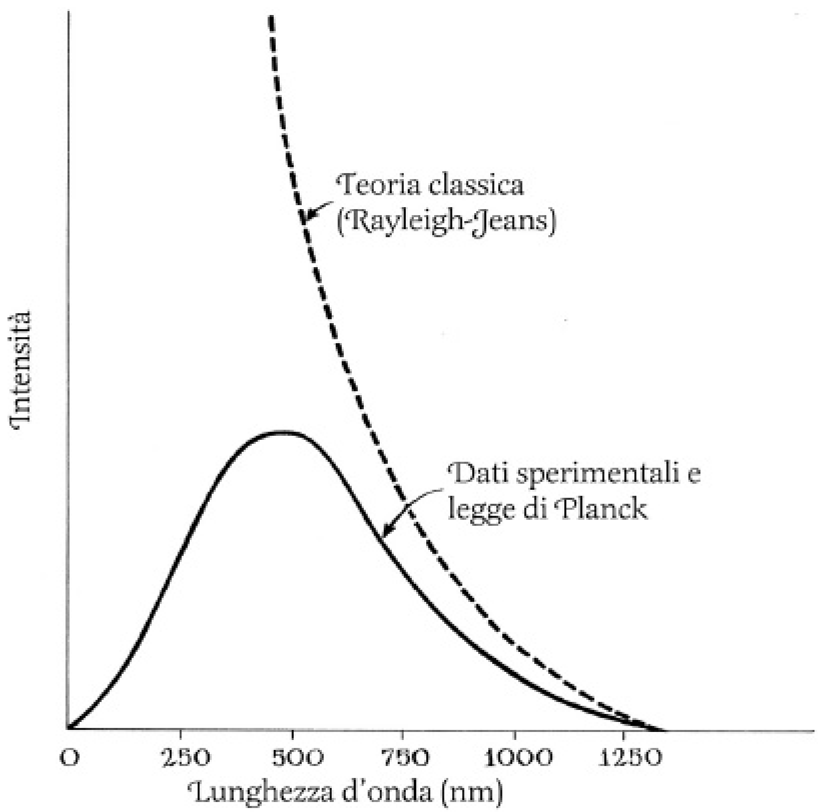


Figura 7.3
Rayleigh-Jeans si fionda all'infinito, ma Planck rimane limitato.

In prima battuta può non sembrare una supposizione così singolare, ma non è questo il modo di funzionare esibito dalla realtà che ci circonda. La natura non procede a salti; se ci fossero persone alte un metro e settanta, persone alte uno e ottanta, ma nessuno di statura intermedia, ci parrebbe uno scherzo, così come sarebbe ridicolo che i veicoli viaggiassero a 40 chilometri orari e a 60 chilometri orari ma mai, per esempio, a 43 o 57. Eppure un'automobile quantistica si comporterebbe precisamente così: voi siete alla sua guida a 40 chilometri orari, e come pigiate sull'acceleratore – *tac!* – istantaneamente il tachimetro segna 60 chilometri orari; non è permesso alcun regime intermedio, per cui l'unica maniera di passare dall'una all'altra velocità è di compiere un «salto quantico». Analogamente, gli individui quantistici accuserebbero disturbi della crescita, rimanendo in sospeso a 1,70 metri per un certo numero di anni, per poi – *zac!* – in un batter d'occhi ritrovarsi a 1,80. L'ipotesi dei quanti vìola tutto ciò che ci insegna la quotidiana esperienza.

Nonostante il disaccordo apparente con l'operato della natura, l'inusitata teoria di Planck, secondo la quale le oscillazioni molecolari sono «quantizzate», conduceva all'esatta espressione di come sia spettralmente distribuita la radiazione del corpo nero (e, di lì, degli oggetti fisici in generale). Ma, se pure gli scienziati ne riconobbero subito la congruenza tecnica, il concetto su cui si reggeva era troppo bizzarro perché potessero accettarlo.

Chi provvide a trasformare l'ipotesi quantistica da curiosità a fatto accertato si sarebbe detto un improbabile candidato a quel compito. Albert Einstein, allora ventiseienne impiegato dell'ufficio brevetti, dimostrò al mondo scientifico che la natura non opera senza soluzione di continuità, per poi divenire in età più inoltrata il principale oppositore della teoria che egli stesso aveva contribuito ad affermare.

Il giovane neolaureato non aveva l'*allure* del rivoluzionario. All'epoca in cui Max Planck rivoltava il mondo della fisica come un calzino, Einstein stava dandosi d'attorno per cercare lavoro, finendo poi, a corto di quattrini, con l'accettare un impiego temporaneo all'Ufficio Federale Svizzero dei Brevetti, tutt'altra cosa dal posto di assistente universitario cui aspirava. In capo al 1904 si era sposato, aveva un figlio neonato e lavorava all'Ufficio

Brevetti di Berna, una situazione che non pareva avviarlo sulla via della fama. Ma nel marzo del 1905 pubblicò, tra gli altri, uno studio che anni dopo gli avrebbe meritato il Premio Nobel, e che, interpretando in termini quantistici l'«effetto fotoelettrico», doveva ammettere la teoria di Planck nell'alveo della scienza ufficiale, dove, una volta accoltavi la meccanica dei quanti, altrettanto sarebbe stato per i misteriosi poteri dello zero.

L'effetto fotoelettrico era stato scoperto nel 1887, allorché il fisico tedesco Heinrich Hertz constatò che un fascio di luce ultravioletta era in grado di mettere elettricamente in attività l'anodo di un tubo a vuoto: in altre parole, di fare scaturire elettroni dal metallo dell'elettrodo così illuminato. Il fenomeno della corrente elettrica provocata da un raggio di luce – o piuttosto il suo modo di verificarsi – era alquanto oscuro per la fisica classica. La radiazione ultravioletta è altamente energetica, cosicché gli studiosi pensarono che per liberare un elettrone dal reticolo atomico metallico servisse, corrispondentemente, parecchia energia, per ottenere la quale, stando alla teoria ondulatoria della luce, era però possibile valersi anche di un altro metodo: rendere il fascio più luminoso. Una luce blu molto intensa può, per esempio, avere lo stesso contenuto energetico di una ultravioletta ma fievole, cosicché l'una e l'altra dovrebbero riuscire a espellere fotoelettroni con pari efficacia.

Ma neanche a parlarne. Come in breve gli esperimenti si incaricarono di dimostrare, anche un fascio ultravioletto (ad alta frequenza) di debole intensità determina la fuoriuscita di elettroni. Però, se la frequenza della radiazione incidente viene abbassata appena sotto una certa soglia critica (o «frequenza di taglio») – spostandola, per esempio, un pochino troppo verso il rosso –, la fotocorrente cessa di colpo; indipendentemente dalla sua intensità, se la luce non è del colore giusto, tutti gli elettroni presenti nel metallo restano dove sono, nessuno ha speranza di sfuggire. Questo non è di certo un comportamento da onda elettromagnetica.

Einstein trasse la fisica d'impaccio dando una soluzione all'enigma dell'effetto fotoelettrico, ma una soluzione anche più sconvolgente dell'ipotesi di Planck. Se quest'ultimo aveva proposto la quantizzazione delle vibrazioni molecolari, il futuro teorico della relatività avanzò l'idea che la luce viaggiasse per pacchetti elementari di energia, i fotoni, un concetto in assoluto contrasto con le cognizioni fisiche allora accettate a riguardo del fenomeno luminoso, perché ne implicava la natura non ondulatoria.

D'altra parte, se veramente l'energia luminosa è discretizzata, allora l'effetto fotoelettrico diveniva facilmente spiegabile. Illuminare l'anodo equivarrebbe a bersagliarlo di minuscoli proiettili che vi penetrano urtando gli elettroni che incontrano; se il quanto di luce possiede energia sufficiente (se la sua frequenza è abbastanza alta), riesce a sbalzare fuori l'elettrone, ma in caso contrario l'urto elettrone-fotone non è violento quanto serve, il primo resta vincolato al suo posto e il secondo rimbalza via.

Codesto meccanismo dava una spiegazione brillante dell'effetto fotoelettrico assumendo che la luce fosse quantizzata in fotoni, in diretta contraddizione con la teoria ondulatoria, mai messa in dubbio da più di un secolo. Risulta, tuttavia, che la luce ha in realtà carattere «duale», comportandosi da particella in talune circostanze e da onda in altre; si può pensare, in fin dei conti, che essa non sia né l'una né l'altra cosa, ma un'astrusa combinazione di entrambe; il concetto è difficile da afferrare e va preso com'è, ma si trova alla base della fisica quantistica.

Secondo tale teoria, ogni cosa al mondo – luce, elettroni, protoni, cuccioli di cane –, fonde in sé le caratteristiche sia di particella sia di onda e, analogamente alla luce, i corpi materiali sono sia particelle sia «onde di materia». Ma degli oggetti siffatti che accidenti sono mai? La meccanica ondulatoria, una delle formulazioni equivalenti della fisica quantistica, insegna a descriverli attraverso la «funzione d'onda», che costituisce la soluzione di un'equazione differenziale detta di Schrödinger e che, malauguratamente, non ha un significato intuitivo, cosicché appare del tutto impossibile volgerla in rappresentazione mentale.[55] In aggiunta, via via che i fisici si addentravano nelle complessità della meccanica quantistica emergevano ogni sorta di stranezze, delle quali la più misteriosa origina da uno zero nelle sue equazioni: l'energia di punto zero.

Un'arcana forza è insita nelle equazioni che descrivono l'Universo quantistico. Un altro fisico tedesco, Werner Heisenberg, annunciò nel 1927 una loro traumatica conseguenza: la teorizzazione dell'incertezza. La forza del nulla origina dal «principio di indeterminazione» di Heisenberg.

L'incertezza attiene la possibilità di descrivere sperimentalmente le caratteristiche di una particella; individuarle in particolare per una significa conoscere posizione e velocità di quello specifico corpuscolo, ovvero dove si trovi in un dato momento e quanto velocemente proceda in quale direzione. Il principio suddetto garantisce che non possiamo farlo; indipendentemente dagli sforzi compiuti e dalla bontà degli strumenti utilizzati, non è possibile sapere della particella contemporaneamente posizione e velocità con precisione arbitraria – l'atto medesimo del misurare distrugge, infatti, una parte dell'informazione cercata.[56]

Per compiere una misura su un oggetto si finisce sempre per stimolarlo in qualche modo, e per fare un esempio immaginiamo di volere conoscere quanto sia lunga una matita. Potremmo applicarvi direttamente la bandella metrica, ma così facendo certamente la urteremmo, disturbandone lo stato di moto. Un modo più accorto sarebbe di accostarvi un regolo, ma poi bisognerebbe eseguire un confronto, un'azione che parimenti ne influenzerebbe la velocità, anche se di poco; per confrontare la matita con checchessia è infatti necessario vederla, e questo è a sua volta possibile solo se della luce la colpisce e ne viene riflessa: d'accordo che l'alterazione prodotta dai fotoni che vi rimbalzano sopra è minima, ma pur sempre risulta in un cambiamento di velocità. In qualunque maniera si proceda, la misurazione disturba, poco o molto che sia, lo stato fisico della matita, e il principio di indeterminazione mostra come non vi sia modo di stabilirne la dimensione e la velocità – così come la posizione e velocità di un elettrone – con precisione a piacere; come, infatti, migliora la conoscenza della posizione, deve corrispondentemente peggiorare quella della velocità, e viceversa. Se misuriamo con errore nullo la posizione dell'elettrone (se sappiamo con assoluta esattezza dove si trovi a un dato istante), l'informazione che possiamo ricavare sulla sua velocità è precisamente zero; e se conosciamo con precisione infinita (con errore zero) la velocità della particella, allora è infinito l'errore che si commette rilevandone la posizione (non sappiamo alcunché su dove sia, essa può trovarsi ovunque nell'Universo).[57] Non si possono conoscere contemporaneamente entrambe: all'informazione sull'una corrisponde l'incertezza sull'altra, è un'altra legge inesorabile.

Il principio di Heisenberg non si applica solo all'ambito artificiale delle misurazioni, ma, al pari delle leggi della termodinamica, vale anche per quanto congegnato dalla natura medesima, e a causa dell'indeterminazione l'Universo ribolle di energia in quantità illimitata.[58] Immaginiamo un volume di spazio di minuscole dimensioni, una specie di scatola estremamente piccola; se ne esaminiamo l'interno possiamo determinare alcuni aspetti di ciò che vi accade. Tanto per cominciare, già conosciamo con una certa precisione la posizione delle particelle ivi contenute; esse non possono, infatti, trovarsi fuori della scatola, perché, se non fossero confinate in quella porzione di spazio non ci staremmo interessando a loro; se quindi disponiamo di un'informazione sulla localizzazione delle particelle, il principio di indeterminazione esige una corrispondente incertezza sulla loro velocità e, dunque, sull'energia che possiedono. Se rendiamo l'ideale contenitore progressivamente più piccolo, sappiamo sempre meno dell'energia che vi risiede.

Il ragionamento è valido in qualunque punto dell'Universo – al centro della Terra come nello spazio profondo – e, per conseguenza, in ogni porzione di spazio, vuoto compreso, l'energia all'interno è per un certo grado indeterminata. L'indeterminatezza a riguardo dell'energia nel vuoto è cosa risibile, perché il vuoto è per definizione l'assenza di tutto, particelle, luce e quant'altro, e quindi non dovrebbe contenere alcuna energia, ma d'altra parte il principio di Heisenberg ci impedisce di conoscere esattamente il contenuto energetico di un qualunque volume di vuoto in un qualunque dato momento, e questo significa che tale quantità non può essere zero – il livello di energia in ogni minima porzione di spazio deve fluttuare continuamente.

Com'è possibile che il vuoto, pure non contenendo nulla, abbia energia al proprio interno? La risposta è data da un'altra equazione della fisica: la famosa equivalenza einsteiniana $E = mc^2$, che molto semplicemente mette in relazione massa ed energia affermando come per gli oggetti materiali l'una corrisponda a un certo ammontare dell'altra. (E difatti i fisici nucleari non misurano la massa dell'elettrone, per esempio, in chilogrammi, libbre, o altre unità di massa o peso, ma gliela assegnano attraverso un grumo di energia di 0,511 MeV [milioni di elettronvolt],[59] corrispondente alla sua «massa a riposo».) Dire che nel vuoto fluttua l'energia è come dire che vi fluttua la massa, ovvero che delle particelle vi nascono e svaniscono senza sosta, simili a microscopici gatti di Alice. Il vuoto non è mai veramente vuoto, ma formicola bensì di codeste «particelle virtuali», che in numero illimitato e in ogni punto dello spazio appaiono e scompaiono come conigli. L'energia di punto zero, un infinito che compare nelle formule quantistiche, è a rigore senza confini; stando a un'interpretazione rigorosa dei risultati di meccanica ondulatoria, più di quanta sia immagazzinata in tutte le miniere di carbone, pozzi di petrolio e armi nucleari al mondo, se ne sta nel tostapane che adoperate ogni mattina.

Allorché un'equazione conduce a un'infinità, i fisici presuppongono solitamente che vi sia un errore da qualche parte; dopotutto, l'infinito non ha senso in natura. La più parte degli scienziati non si comporta diversamente con l'energia di punto zero e, pur conoscendone l'illimitatezza, la ignora completamente; fanno conto che sia nulla, anche se matematicamente devono concludere che è infinita; è un sotterfugio che torna comodo e che normalmente non cambia le cose. Ma non sempre è così.

Due fisici olandesi, H. B. G. Casimir e Dik Polder, si accorsero nel 1948 che l'energia di punto zero non può venire impunemente sempre trascurata; nello studiare le forze che si esercitano tra gli atomi, essi constatarono che i risultati di misura si discostavano dalle predizioni teoriche. Nel ricercare una spiegazione, Casimir comprese di avere avvertito la forza del nulla.

Il segreto di quella forza sta nella natura delle onde. Nell'antica Grecia, Pitagora osservò le particolarità dei moti oscillatori lungo la corda di uno strumento musicale, e il fatto che certe note fossero permesse e altre escluse. Se percuoteva la corda ne risultava una nota distinta, il tono detto «fondamentale», e se lo faceva dopo averla fermata con il dito a metà lunghezza, ancora ne otteneva un'altra bella limpida, questa volta un'ottava sopra. A un terzo dall'estremità si produceva un altro tono pulito, ma il grande geometra dovette constatare che non tutte le note sono ammesse; raramente, infatti, il suono tratto ponendo il dito a casaccio sulla corda corrispondeva a una nota precisa. Lo strumento poteva generare solo certe note, tutte le altre restavano escluse (vedi fig. 7.4).

Le onde materiali non sono poi tanto diverse dalle onde in una corda di chitarra; come questa non può suonare tutte le note e ad alcune è «proibito» di manifestarsi sulla corda in ragione della lunghezza di quella, così alcune onde-particelle non possono trovarsi all'interno di una scatola. Tra due placche metalliche affacciate, per esempio, non può stare indifferentemente ogni sorta di particella, ma solamente quelle le cui corrispondenti lunghezze d'onda sono sottomultipli interi della distanza tra le lamine (vedi fig. 7.5).

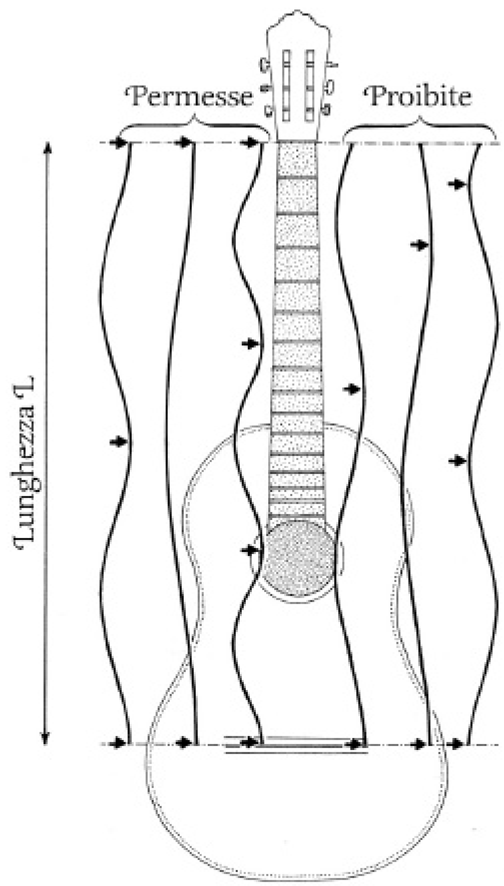


Figura 7.4

Note proibite di una corda di chitarra.

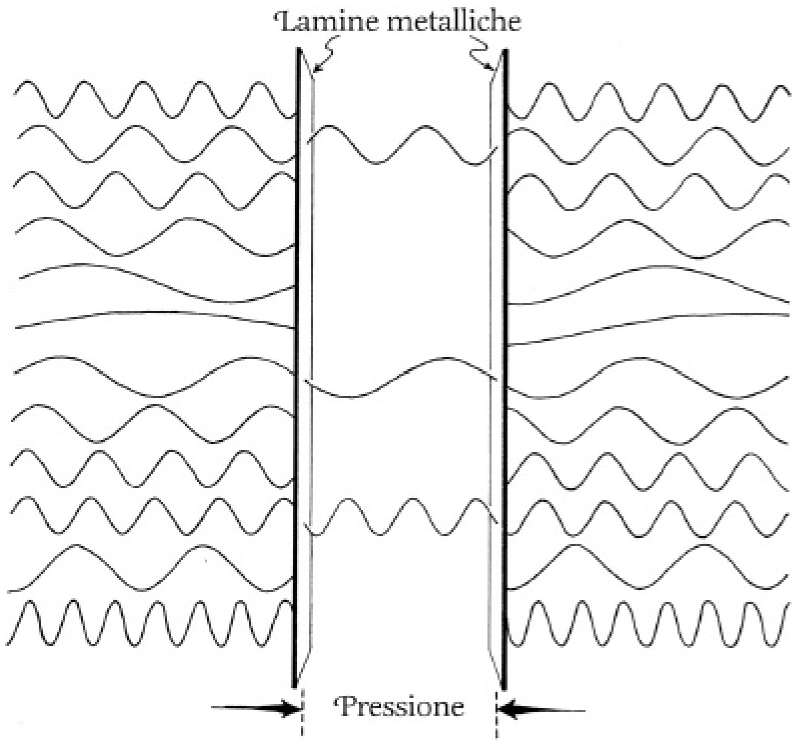


Figura 7.5
L’effetto Casimir.

Casimir si rese conto che l’assenza di onde materiali di determinate lunghezze d’onda, in un volume attorno al quale le particelle in ogni punto ammiccavano dentro e fuori dall’esistenza, avrebbe avuto effetto sull’energia di punto zero del vuoto. Se si pongono due piani metallici paralleli in stretta vicinanza tra loro, e alcuni di quei corpuscoli non hanno accesso nel volume così delimitato, significa che essi esistono in maggior numero all’esterno che non all’interno, cosicché il bestiario corpuscolare a ranghi completi preme da fuori sulle lamine senza essere del tutto controbilanciato da quello che succede internamente, e queste vengono spinte una contro l’altra anche se immerse nel vuoto più spinto. È questa la forza del vuoto, prodotta dal nulla assoluto, ed è questo l’effetto Casimir.

Nonostante sembri un prodotto di fantascienza, la misteriosa forza fantasma esercitata dal niente esiste davvero. La sua intensità è microscopica e assai difficile da mettere in evidenza, ma nel 1995, alla University of Washington, il fisico Steven K. Lamoreaux misurò direttamente l'effetto Casimir. Egli affacciò sotto una campana a vuoto due lamine di quarzo metallizzate in oro, una delle quali, sospesa a un sensibilissimo pendolo di torsione in grado di rilevarne il minimo spostamento, era mantenuta in posizione da un sistema elettronico in retroazione. La forza di Casimir risultava dalla variazione del segnale di retroazione necessario per compensarne l'effetto sulla lamina virtualmente mobile, e la sua intensità misurata, pari all'incirca al peso di un globulo rosso, si mostrò in buon accordo con il valore previsto dalla teoria di Casimir. Lamoreaux aveva quantificato la forza esercitata dallo spazio vuoto.

Lo zero relativistico: il buco nero

> Come il gatto di Alice [la stella] svanisce alla vista. L'uno lascia dietro di sé solamente un ghigno, l'altra solo la propria attrazione di gravità.
>
> John Wheeler

In meccanica quantistica lo zero satura il vuoto di infinita energia; in campo relativistico, invece, l'altra grande teoria contemporanea, lo zero replica il paradosso sotto forma del nulla infinito dei buchi neri.

Entrambe le teorie sono nate dalla luce, anche se nel caso della relatività il misfatto va imputato alla velocità di propagazione piuttosto che alla intensità della radiazione elettromagnetica. Gli oggetti che popolano l'universo non si muovono, in generale, a una velocità su cui tutti gli osservatori convengano. Immaginiamo, per esempio, un monello che tiri sassate in tutte le direzioni; il vigile che si avvicina per farlo smettere vedrà i ciottoli volare più veloci che non il coetaneo che scappa a mettersi al riparo, talché la velocità dei proiettili sembra dipendere da quella di chi guarda. Analogamente, la velocità della luce dovrebbe variare a seconda che ci si avvicini o allontani dalla lampada che illumina la stanza. Nel 1887 gli scienziati statunitensi Albert A. Michelson ed Edward W. Morley cercarono di misurare il fenomeno,[60] restando però sconcertati nel constatare che la velocità della luce non dipendeva affatto dal moto della sorgente. Com'era possibile?

Ancora una volta fu Einstein a venire puntualmente in soccorso della fisica fornendo nel 1905 la propria risposta; e ancora una volta ipotesi molto semplici produssero dirompenti conseguenze.

La prima ipotesi assunta dal padre della relatività appare piuttosto ovvia; egli stabilì che se un determinato fenomeno – diciamo il volo di un corvo verso un albero – si svolge in presenza di più osservatori (osservatori che si trovino in sistemi di riferimento inerziali, ovvero non accelerati e quindi in moto rettilineo uniforme), per ognuno di essi devono valere le medesime leggi fisiche: è questo il «principio di relatività». Confrontando le note sperimentali prese da un osservatore al suolo con quelle di uno a bordo di un treno in movimento parallelamente alla traiettoria del volatile, se ne constaterebbe la divergenza in ordine alla velocità del corvo e dell'albero, ma il risultato sarebbe il medesimo: dopo qualche secondo l'uccello si posa su un ramo. Gli osservatori sono d'accordo sull'esito finale, anche se possono dissentire sulle modalità di svolgimento. Nella teoria ristretta della relatività – che stiamo ora discutendo – le caratteristiche di moto degli osservatori sono soggette alla sopraddetta restrizione dell'assenza di accelerazione; invece nella teoria generale tale limitazione viene a cadere.

La seconda ipotesi è, viceversa, un tantino sconcertante, specialmente in quanto in apparente contraddizione con il principio testé enunciato. Einstein postulò che tutti gli osservatori inerziali, a qualunque velocità si muovano, debbano trovare per la velocità della luce nel vuoto lo stesso identico valore, circa 300 000 chilometri al secondo, una costante universale indicata con il simbolo c. Questo significa che, se vi puntano in faccia una torcia elettrica, la luce viene verso di voi alla velocità *c*, e non importa se chi regge la sorgente luminosa stia fermo, vi corra incontro o fugga via; il raggio di luce viaggia sempre e comunque a *c*, dal punto di vista vostro e di chiunque altro.

Il presupposto metteva in discussione tutta la cinematica classica, ciò che la scienza dava per assodato a riguardo del moto dei corpi. Se il corvo si fosse comportato come un fotone, tanto il viaggiatore che l'astante stazionario avrebbero dovuto convenire sulla sua velocità, per cui, risultando in movimento l'albero visto dal treno e quindi diversa la distanza coperta dal pennuto, i due osservatori si sarebbero necessariamente trovati in disaccordo «sull'istante» in cui esso giungesse a destino (vedi fig. 7.6). Einstein comprese che c'era un modo di risolvere il paradosso: ammettere che lo scorrere del tempo dipenda dalla velocità del sistema di riferimento dell'osservatore; l'orologio del treno doveva avanzare più lentamente di quello posto a terra, e dieci secondi per quest'ultimo dovevano sembrare – dal treno –, per esempio, solamente cinque. Lo stesso accade a una persona che si allontani a grande velocità: ogni scatto del suo cronometro richiede più di un secondo da un punto di vista stazionario. Un astronauta che compisse un viaggio di 20 anni (stando al proprio orologio) al 90% della velocità della luce, tornerebbe sulla Terra invecchiato naturalmente di altrettanto, ma per tutti i non partenti rimasti ad aspettarlo, di anni ne sarebbero trascorsi quasi 46.

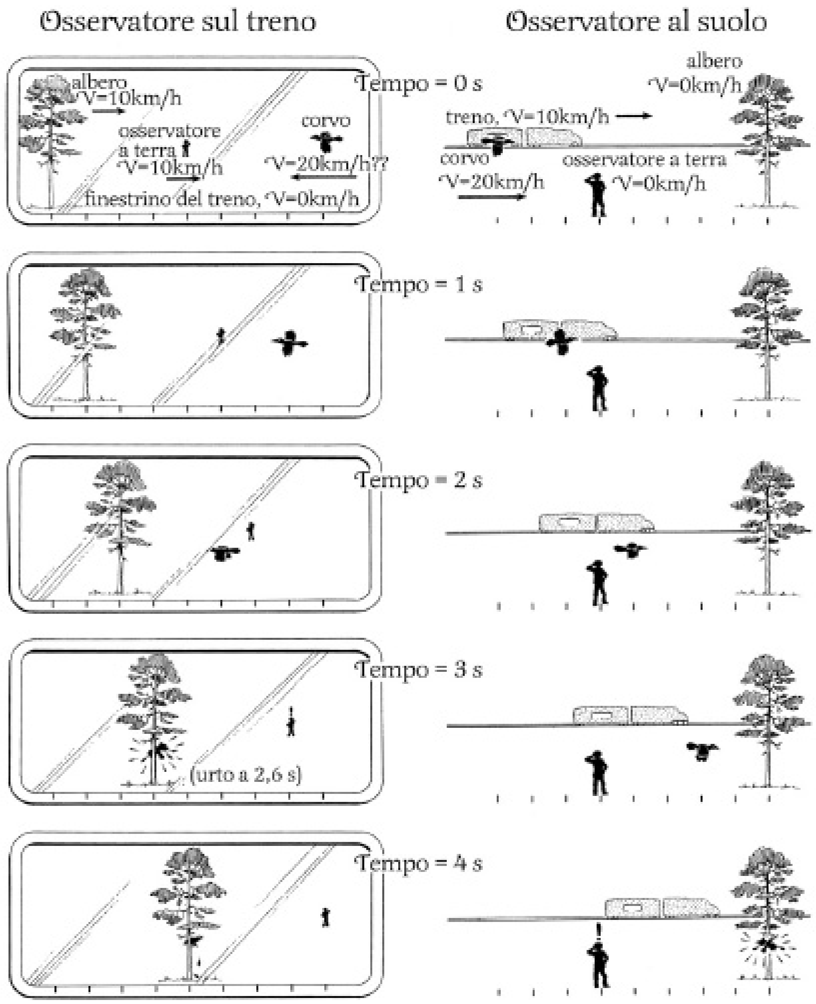


Figura 7.6
La velocità costante del corvo significa che il tempo deve essere relativo.

Con la velocità non cambia solamente il tempo, fanno altrettanto massa e lunghezza. Via via che prendono velocità, gli oggetti si raccorciano nella direzione del moto e la loro massa inerziale cresce; ai nove decimi di c, per esempio, un metro a sbarra è lungo meno di 44 centimetri, e un pacchetto di zucchero da chilo diventa di 2294 grammi… dal punto di vista di un osservatore stazionario. (Naturalmente ciò non consente di preparare il doppio di biscotti, perché nel proprio riferimento la massa dello zucchero resta uguale.)

Pure se difficile da credere, l’alterazione del flusso temporale è stata osservata. Quando una particella subatomica viaggia molto velocemente, se ne misura un tempo di decadimento maggiore di quello nominale, proprio perché il suo «orologio» interno è più lento; è stato inoltre verificato il rallentamento di un campione di tempo di altissima precisione in volo su un aereo molto veloce. La teoria di Einstein effettivamente funziona, anche se c’è un potenziale problema: lo zero.

Quando un’astronave si avvicina alla velocità della luce, lo scorrere del tempo rallenta costantemente sempre di più; se la raggiungesse, ogni secondo dell’orologio di bordo corrisponderebbe a un intervallo infinito sulla Terra. In meno di un attimo trascorrerebbero miliardi di miliardi di anni, l’Universo andrebbe incontro al proprio destino ultimo e consumerebbe ogni residua energia; ma per l’occupante della nave il tempo sarebbe fermo. Il flusso temporale viene moltiplicato per zero.

Per buona sorte, però, arrestare il tempo è prima detto che fatto. Il tempo sì rallenta seguendo l’aumento di velocità dell’astronave, ma in parallelo lievita la massa del veicolo, il cui sistema di propulsione si trova nella condizione di chi spinga una carrozzina dentro cui il neonato continui a crescere. Ben presto il malcapitato sospingerà un lottatore di «sumo», un’impresa vera e propria; ma se comunque arriva a farlo andare più svelto, avrà a che fare con la massa di un autocarro, e poi di un vascello militare … di un pianeta … una stella … una galassia. L’incongruo fantolino mette su chili su chili e la spinta si fa di conserva meno efficace, allo stesso modo in cui una nave spaziale accelerata in prossimità della velocità della luce si fa talmente massiva da divenire insensibile a qualunque forza applicata; la nave, e con lei qualunque oggetto dotato di massa, non raggiungerà mai quella velocità. Il limite fisico ultimo è c, non è possibile eguagliarlo e, a maggior ragione, superarlo; la natura si è premunita nei confronti di uno zero sovversivo.

Ma la potenza dello zero eccede perfino la natura. Nell'estendere la propria teoria per includervi i riferimenti non inerziali e la gravità, Einstein non sospettò che le nuove equazioni – quelle della relatività generale – avrebbero descritto lo zero definitivo e il più drastico degli infiniti: il buco nero.

Quelle equazioni trattano il tempo e lo spazio come diverse facce della stessa medaglia. Mentre ci è familiare la modifica del modo di spostamento nello spazio operata dall'accelerazione attraverso una variazione di velocità, esse mostrarono che l'accelerazione non produce solo quell'effetto, ma pure modifica il modo di spostamento nel tempo. Può fare sì che il suo scorrere proceda più o meno rapidamente, cosicché nell'accelerare un corpo – nell'assoggettarlo a una forza qualunque, dalla gravità alla spinta di un immenso elefante cosmico – ne viene alterato il moto attraverso lo spazio e attraverso il tempo, vale a dire attraverso lo «spazio-tempo».

Il concetto non è semplice da afferrare, e il modo più agevole per accostarvisi è forse quello analogico: lo spazio-tempo è come un immenso foglio di gomma. I corpi celesti e ogni altro oggetto vi appoggiano sopra, provocandone in varia misura una localizzata distorsione, una depressione che corrisponde alla gravità; maggiore è la massa del corpo, maggiore è la distorsione e più ampio e profondo l'infossamento all'intorno. L'attrazione gravitazionale equivale alla tendenza degli altri oggetti a rotolarvi dentro.

La curvatura del foglio di gomma non è confinata allo spazio, ma si estende anche al tempo; come l'uno viene distorto dalla prossimità della materia, così capita al tempo, che rallenta tanto più quanto maggiormente la curvatura (e la gravità) è elevata. In regioni di spazio a curvatura anormalmente elevata si verifica, poi, un aumento all’infinito della massa degli oggetti, detto «inflazione massica».[61]

Con la metafora della superficie elastica si può interpretare il moto orbitale dei pianeti; la Terra, per esempio, non farebbe che ruotare sul contorno della depressione con al centro il Sole (come una qualsiasi biglia sospinta tangenzialmente in un imbuto privo di attrito). Parimenti la luce seguirebbe una geodetica (la linea più breve tra due punti) dello spazio-tempo e, ove questo fosse curvo – come attorno a una stella –, il suo percorso subirebbe una deviazione dalla linea retta, un fenomeno effettivamente constatato nel 1919 dall’astronomo britannico Sir Arthur S. Eddington, che guidò in Africa Occidentale una spedizione scientifica appositamente organizzata, e durante la quale venne misurata la posizione di una stella osservabile durante un’eclisse di Sole. La variazione della posizione angolare in presenza del disco solare confermò la deviazione prevista da Einstein (vedi fig. 7.7).

Ma le equazioni della relatività generale pure anticipavano alcunché di assai più sinistro: il buco nero, una stella di tale densità che niente, nemmeno la luce, è in grado di evaderne l’abbraccio.

Un buco nero prende origine, come ogni altra stella, da una grande palla di gas caldi in gran parte costituita da idrogeno. Se lasciato a se stesso, un gas sufficientemente denso collasserebbe sotto il «peso» della propria gravità, riducendosi a un minuto coagulo, ma per nostra fortuna le stelle non si comportano immediatamente così, perché un’altra forza è in azione: la fusione nucleare. Quando una nube concentrata di idrogeno inizia a collassare, si riscalda e si addensa sempre più, e gli atomi che la compongono collidono gli uni con gli altri con forza parimenti crescente; a un certo punto, temperatura e densità si fanno smisuratamente elevate e i nuclei atomici tanto vicini da fondersi tra loro, mutandosi così in elio, con rilascio di grandi quantità di energia. Irradiandosi verso l'esterno della nube ormai divenuta stella, l'energia ne accresce la pressione termica interna e tende a provocarne l'espansione e, dunque, la riduzione di densità e temperatura, fino a che le due azioni contrapposte non si bilanciano. Durante la prima lunga fase della propria vita la stella rimane, dunque, in un instabile equilibrio dinamico, bruciando in una reazione nucleare il combustibile atomico nelle proprie regioni interne per contrastare il collasso gravitazionale dell'insieme.

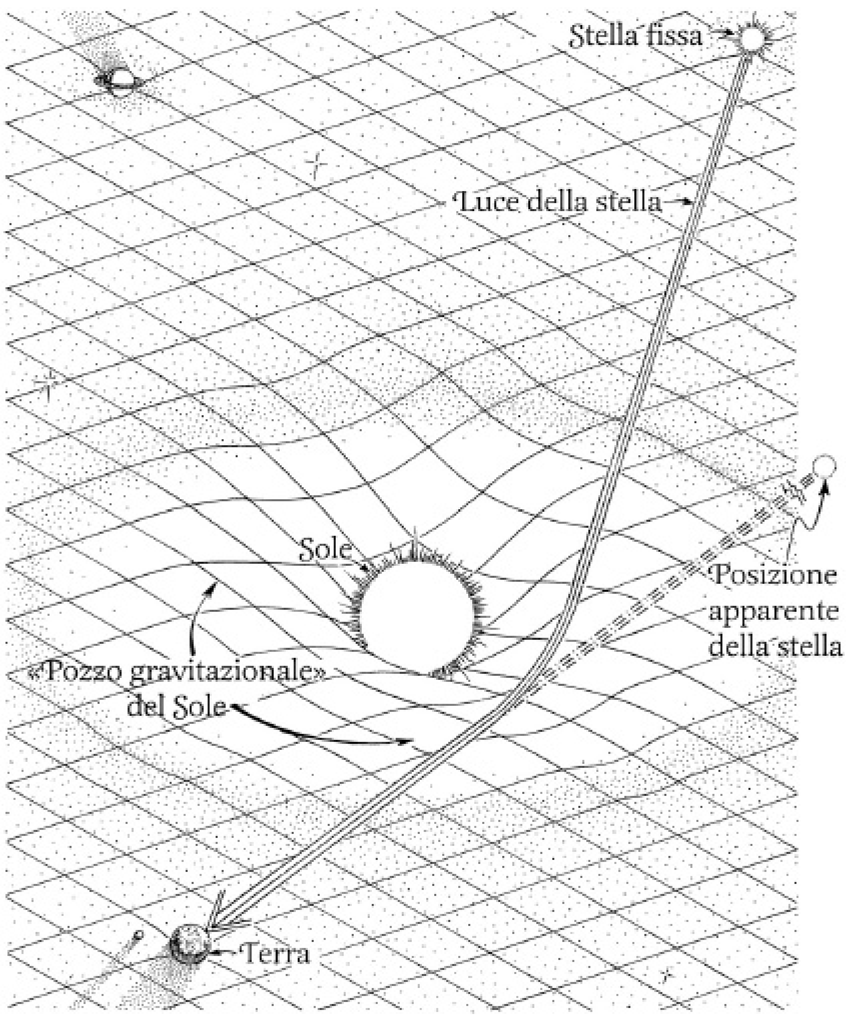


Figura 7.7
La gravità devia i raggi luminosi che transitano vicino al Sole.

Ma siccome la stella possiede idrogeno da bruciare in quantità limitata, la compensazione non può durare per sempre; a un certo momento la reazione termonucleare diminuisce in intensità e l'equilibrio viene alterato. (Quanto tempo sia necessario per arrivare a questo punto dipende dalla dimensione stellare, e – ironicamente – più essa è grande più idrogeno è presente e più violentemente viene consumato, talché è minore la durata della fase di vita in questione. Il Sole ha scorte di combustibile per circa cinque miliardi di anni, ma non per questo dobbiamo dare la stura all'autocompiacimento: la sua temperatura è destinata a crescere gradualmente già molto prima, facendo evaporare gli oceani e trasformando la Terra in un inferno desertico simile a Venere; potremo dirci fortunati se ci rimarranno non più di un milione di millenni da vivere sul nostro pianeta.) Dopo prolungati spasmi agonici – l'esatta sequenza degli avvenimenti dipendendo ancora dalla massa della stella –, il motore a fusione interna si arresta ed essa inizia a implodere sotto la propria attrazione gravitazionale.

Una legge di meccanica quantistica, detta «principio di esclusione di Pauli», impedisce alla materia di comprimersi alla dimensione di un punto materiale. Enunciato nel 1925 dal fisico statunitense di origine austriaca Wolfgang Pauli, esso in buona sostanza riafferma in ambito quantistico il vecchio assioma dell'impenetrabilità dei corpi; in particolare il principio stabilisce che in un atomo non possono esistere elettroni con il medesimo stato quantico.[62] Ma nel 1933 l'astrofisico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar concluse[63] che il principio di esclusione non era sempre sufficiente a contrastare la forza di compressione esercitata dalla gravità.

All'aumentare della pressione interna del nucleo di una stella, per via del principio di esclusione gli elettroni devono muoversi sempre più rapidamente per evitarsi, ma la velocità ha un limite: gli elettroni non possono raggiungere quella della luce, il che significa che, sotto un'azione implosiva abbastanza grande, neanche la pressione di degenerazione della materia[64] è in grado di impedirne il collasso. Il giovane *graduate* di Cambridge mostrò che il collasso di una stella di massa superiore a 1,4 volte quella del Sole non poteva più essere impedito dal principio di Pauli; sopra codesto «limite di Chandrasekhar» la gravità preme con tanta forza da vincere la resistenza degli elettroni, che cessano definitivamente di opporvisi e cadono sui protoni del nucleo dando luogo a neutroni. La stella di una tale massa finisce per divenire una enorme palla interamente composta di tali particelle: una «stella di neutroni».

Studi successivi protrattisi per un cinquantennio dalla fine degli anni trenta hanno dimostrato che il completo collasso di stelle di massa compresa tra il limite suddetto e 1,5 ÷ 3 volte la massa del Sole viene ancora scongiurato – similmente a quanto accade con gli elettroni – dalla pressione di degenerazione neutronica; è questo, appunto, il caso delle stelle di neutroni, un cui cucchiaino di materia peserebbe sulla Terra centinaia di milioni di tonnellate. Però esiste un limite anche per la forza di compressione che i neutroni sono in grado di reggere; alcuni fisici ritengono che poco oltre essi si frantumino nei propri componenti elementari originando una stella di quarks, ma è questa la linea del Piave, dopo la quale si scatena il finimondo.

Una stella ancor più massiva quando collassa scompare. L'attrazione gravitazionale diventa talmente astronomica che non si conosce in natura alcuna forza in grado di opporvisi: non la repulsione degli elettroni né dei neutroni né dei quarks – niente di niente; la dimensione della stella morente diminuisce sempre di più, fino a... zero. Stipata tutta quanta in uno spazio nullo, è ora un buco nero, un oggetto talmente paradossale che alcuni scienziati pensano si possa utilizzare per viaggiare più veloci della luce... o all'indietro nel tempo.

Il segreto delle straordinarie proprietà del buco nero sta nell'intensità della curvatura che imprime allo spazio-tempo, derivante dal fatto che, pure non occupando alcuno spazio, esso conserva la propria massa originale. Di regola ciò non darebbe problemi; per quanto grande sia la massa di una stella, nell'approssimarvisi la curvatura spaziotemporale progressivamente aumenta, per poi calare una volta superato il bordo esterno del corpo celeste, fino ad annullarsi al suo centro. Ma la massa del buco nero è concentrata in un singolo punto, di dimensione zero, e non esiste quindi un bordo esterno oltre il quale lo spazio ricominci a spianarsi; la curvatura, viceversa, aumenta sempre senza mai toccare il fondo, va all'infinito perché è infinita la densità della materia che la origina – la stella ha perforato lo spazio-tempo (vedi fig. 7.8). Lo zero al centro di un buco nero si dice «singolarità», ed è una lacerazione prodotta nel tessuto dell'Universo.

Il concetto è assai inquietante. L'uniforme, continua struttura dello spazio-tempo può recare degli strappi, senza che nessuno sappia che cosa realmente succeda in quelle regioni di anomalia? Einstein era tanto turbato alla sola idea delle singolarità che negò la possibile esistenza dei buchi neri, ma si sbagliava. Quegli oggetti esistono veramente, anche se le loro singolarità costituiscono una tale bruttura, e talmente pericolosa, che la natura fa in modo di mascherarle, operando in modo che nessuno, dopo averne incontrata una, possa mai fare ritorno a raccontare quello che ha visto. La natura mette in atto una «censura cosmica».

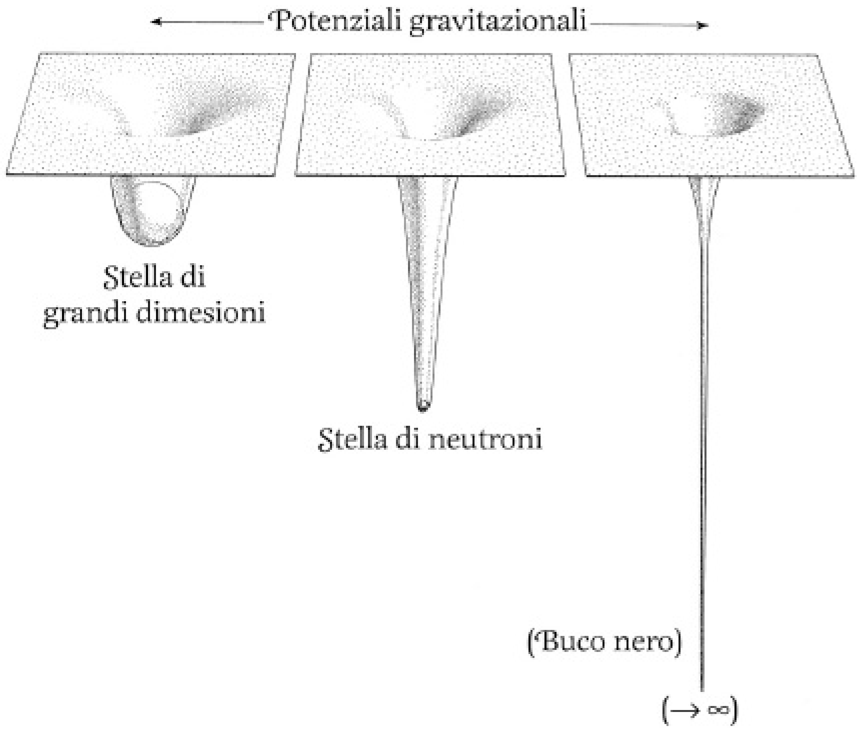


Figura 7.8
A differenza delle stelle normali, un buco nero perfora lo spazio-tempo.

È la stessa gravità che se ne assume l'incarico. Se sulla Terra tiriamo un sasso verso l'alto, la forza di gravità agisce normalmente per farlo ricadere; ma se la velocità di lancio è sufficientemente alta, esso non piega la propria traiettoria verso il suolo, sfrecciando viceversa fuori dell'atmosfera e sottraendosi all'attrazione terrestre – quando spedisce un veicolo su Marte, la NASA fa più o meno questo. La minima velocità che occorre imprimere al sasso per consentirgli di sfuggire si chiama scontatamente «velocità di fuga». I buchi neri sono tanto densi che in loro prossimità, oltre il cosiddetto «orizzonte degli eventi»,[65] la velocità di fuga è maggiore di quella della luce; passato quel limite, l'attrazione di gravità è così forte, e lo spazio così curvo, che niente e nessuno può più riemergerne, nemmeno la luce.

Benché il buco nero sia una stella, la radiazione che emette non ne oltrepassa l'orizzonte, ed è questo il motivo per cui appare, appunto, totalmente nero; l'unica maniera per scorgerne la singolarità centrale è di valicare il medesimo orizzonte e constatare di persona. Ma anche ammesso che l'incauto astronauta sia equipaggiato con una tuta spaziale impossibilmente resistente, che gli eviti di venire estruso a mo' di spaghetti dalle colossali forze di marea (dovute alla differenza tra le intensità della forza di attrazione agente nei diversi punti del suo corpo), egli non potrebbe comunque comunicare le proprie scoperte; i segnali trasmessi non riuscirebbero, infatti, a sfuggire all'attrazione del buco nero, né tantomeno potrebbe farlo lui. Attraversare l'orizzonte degli eventi equivale a varcare in uscita la soglia dell'Universo: la draconiana velina del censore cosmico impedisce per sempre ogni ritorno.

Anche se la natura si sforza di velarne le singolarità, gli studiosi sanno dell'esistenza dei buchi neri. Presso il centro della Via Lattea, nella direzione della costellazione del Sagittario, si trova un buco nero supermassivo pesante quasi tre milioni di volte il nostro Sole, che gli astronomi hanno individuato scrutando in quella regione il volteggiare delle nubi di gas attorno a un primario invisibile. Il moto orbitale e le particolari emissioni radio rivelerebbero la presenza di un buco nero,[66] ovviamente celato all'osservazione; ma se pure gli scienziati sono in grado di scoprire tali oggetti, ancora non possono spiarne lo zero centrale, la turpe singolarità schermata dall'orizzonte degli eventi.

Non è un male che sia così, perché in assenza dell'orizzonte, del censore che mantiene la singolarità fuori della portata del restante Universo, potrebbero darsi circostanze assolutamente anomale. In teoria, infatti, una «singolarità nuda» (priva di orizzonte degli eventi) potrebbe consentire di viaggiare più velocemente della luce oppure indietro nel tempo, tramite una struttura nota come «cunicolo spaziotemporale».

Nell’analogia del foglio di gomma la singolarità è un punto a curvatura infinita, una perforazione nel tessuto dello spazio e del tempo, e in determinate circostanze quel foro può venire stirato e allungato. Per esempio, nel caso di buco nero in rotazione o elettricamente carico i matematici hanno dato dimostrazione che la singolarità non riesce puntiforme – una puntura di spillo nello spazio-tempo – ma toroidale, e i fisici hanno congetturato sulla possibilità che due siffatte singolarità stirate ad anello vengano a collegarsi tra loro a galleria,[67] creando appunto un cunicolo (vedi fig. 7.9). Chi transiti lungo di esso ne emerge in un punto che può trovarsi a qualunque distanza (nello spazio e magari nel tempo) dalla bocca di entrata; come i cunicoli possono – in teoria – spedire il viaggiatore all’altro capo dell’Universo in un battito di ciglia, così possono farlo arrivare avanti o indietro nel tempo (cfr. l’Appendice E). Costui potrebbe perfino rintracciare la propria madre e sopprimerla prima dell’incontro con il proprio padre, impedendo a se medesimo di nascere e generando una tremenda contraddizione.

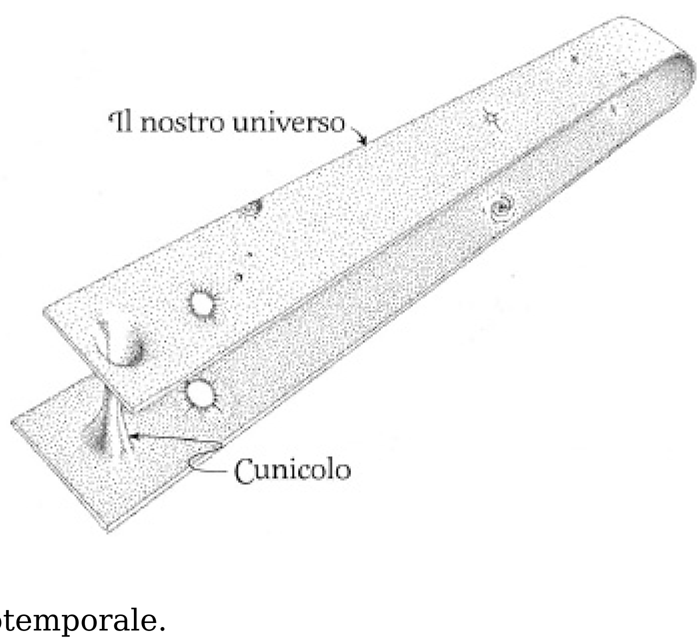


Figura 7.9
Cunicolo spaziotemporale.

Il cunicolo è un paradosso dovuto a uno zero risultante dalle equazioni di campo della relatività generale; nessuno sa per davvero se esso possa esistere, ma la NASA[68] spera di sì.

Avere qualcosa per niente?

Non esiste un pranzo gratis.
Seconda legge della termodinamica[69]

La NASA spera di trovare un giorno nello zero la chiave del viaggio interstellare. Nel 1998 l'ente organizzò il convegno «*Physics for the Third Millennium*» (Fisica per il terzo millennio), nel quale gli scienziati dibatterono qualità e demeriti di cunicoli, propulsione a distorsione spaziale,[70] motori a energia del vuoto, e simili idee futuribili.

Il problema del viaggio nello spazio è che non vi si trova niente contro cui spingere. Il nuotatore «si appoggia» all'acqua della piscina, e respingendola indietro procede in avanti; chi cammina «calcia» indietro il suolo, ricavando così per reazione la forza che gli serve per incedere; ma nel vuoto spaziale manca alcunché da spingere indietro, si può pagaiare e scalciare a piacimento senza cavare un ragno dal buco.

I razzi si portano dietro una provvista di materiale contro cui spingere, il propellente, che il motore a reazione brucia ed espelle posteriormente, fornendo così la spinta in avanti, esattamente come l'efflusso di aria da un palloncino bucato lo fa volare in giro per la stanza. Gettare via combustibile è però un metodo contorto e dispendioso per girare il mondo, e anche mettendo in conto le moderne migliorie apportate ai propulsori chimici, impieganti per esempio particelle elettricamente cariche (ioni) come massa di reazione, questi restano incapaci di raggiungere l'efficienza di combustione compatibile con l'invio di sonde su stelle remote in tempi ragionevoli. Per raggiungere anche la più vicina sarebbe necessaria una enorme quantità di combustibile – uno spreco senza misura.

Marc Millis, fisico a capo del Breakthrough Propulsion Physics Project[71] della NASA, spera di superare la difficoltà tramite la fisica dello zero. Purtroppo, però, gli zeri dei buchi neri – vale a dire le singolarità – almeno nel breve periodo si dimostrano improbabili candidati alla bisogna; oltre al fatto che la creazione della singolarità nuda necessaria alla formazione del cunicolo spaziotemporale risulta estremamente difficile, una volta in opera questa ridurrebbe a brandelli gli avventati viaggiatori spaziali. Nel 1998 due fisici dell'Università Ebraica di Gerusalemme evidenziarono come anche un buco nero in rotazione o dotato di carica elettrica – con la sua brava singolarità ad anello – è tale da disgregare fisicamente un'astronauta (come qualunque altra struttura fisica che gli si accosti); mentre un corpo cade verso la singolarità, la massa del buco nero appare crescente verso l'infinito, e le corrispondenti titaniche forze di marea lo smembrerebbero in una frazione di attimo. I cunicoli sono dannosi alla salute.

Se lo zero al centro di un buco nero non fornisce un agevole mezzo di trasporto interstellare, lo zero della meccanica quantistica offre, in compenso, un'alternativa: l'energia di punto zero potrebbe diventare la regina dei carburanti. Ma siamo ormai al confine tra fisica ufficiale e speculazione.

Millis ritiene che gli astronauti potrebbero raccogliere dal vuoto l'energia per la propulsione dell'astronave, così come i marinai imbrigliavano il vento per muovere una fregata a vela. «Faccio un'analogia con l'effetto Casimir, in cui le placche sono spinte una contro l'altra dalla pressione di radiazione del vuoto» dice. «Se ci fosse un modo per rendere asimmetriche le forze risultanti che premono nelle due direzioni, si otterrebbe un esito propulsivo.»

Sfortunatamente, l'effetto Casimir resta per ora stabilmente simmetrico; entrambe le lamine vengono sospinte e tendono a congiungersi, l'azione sull'una trova il proprio opposto corrispettivo sull'altra. Ma se ci fosse una specie di vela quantica, come uno specchio riflettente su un solo lato e sul quale le particelle virtuali rimbalzassero da una parte e transitassero indisturbate dall'altra, allora l'energia del vuoto spingerebbe l'intero marchingegno verso il lato non riflettente della vela. Millis ammette che nessuno ha una vaga idea di come si possa ottenere un tale effetto. «Non esiste base teorica per la realizzazione del dispositivo» conclude mestamente.

Il problema sta nelle leggi della fisica che affermano come non si possa avere niente per niente; come la fregata fa diminuire la velocità del vento, così la vela quantica dovrebbe ridurre l'energia del vuoto; ma com'è possibile modificare quello che non c'è?

Harold Puthoff, direttore dell'Institute for Advanced Studies ad Austin, in Texas, pensa che una vela siffatta si limiterebbe ad alterare le proprietà del vuoto. (Lo studioso è meglio noto come coautore di un articolo pubblicato nel 1974 su «Nature»,[72] in cui dava l'idea di dimostrare come Uri Geller e altri sensitivi fossero dotati di visione a distanza – senza impiego degli occhi. Una conclusione che non rientra tra i filoni consolidati della scienza.) «Il vuoto decade in uno stato di poco inferiore» afferma Puthoff. Se così fosse, le vele quantiche non sarebbero che l'inizio, e diverrebbe (teoricamente) possibile costruire un motore alimentato unicamente a energia di punto zero, rimanendo come solo inconveniente l'usura del tessuto spaziotemporale e il suo (lento) disgregarsi. «Ma non riusciremmo neanche a intaccarlo,» ribatte lo scientifico indagatore del paranormale «è come attingere dall'oceano con una tazza».

Forse. E forse si distrugge l'Universo.

Che il vuoto contenga energia è fuori di dubbio, e l'esperienza di Casimir lo testimonia; ma siamo certi che l'energia del vuoto sia veramente la minima possibile? Diversamente, nel nulla un pericolo sarebbe in agguato. Nel 1983 due scienziati suggerirono, sempre su «Nature», che armeggiare con l'energia del vuoto potesse innescare l'autodistruzione dell'Universo. Nella comunicazione si sosteneva che il vuoto, come lo conosciamo, potrebbe essere un «falso» vuoto, posto in realtà in uno stato energetico innaturalmente elevato quale, una palla in precario equilibrio sul fianco di una collina; urtato con forza sufficiente potrebbe rotolare in basso per portarsi a uno stato inferiore, senza che noi siamo in grado di fermarlo. Avremmo finito per liberare una smisurata bolla di energia in espansione alla velocità della luce, che lascia dietro di sé un'enorme scia di distruzione; e l'esito sarebbe disastroso, al punto da demolire nella conseguente apocalisse ogni singolo atomo del nostro mondo.

Ma per fortuna si tratta di uno scenario estremamente improbabile. L'Universo esiste da miliardi di anni, e non sembra ragionevole che in tutto questo tempo sia sopravvissuto in condizioni di forte precarietà; il solo bombardamento dei raggi cosmici avrebbe probabilmente di già «innescato» il vuoto con energia bastevole a detonare il disastro, se solo questo fosse fisicamente possibile. Il ragionamento non ha dissuaso certi infervorati – fisici compresi – dal picchettare alcuni laboratori delle alte energie quali il Fermilab,[73] nella convinzione che le collisioni subnucleari artificialmente provocate possano portare al collasso spontaneo del vuoto. Se anche tali ansietà fossero giustificate, resterebbe ogni apparente impossibilità di rifornire con carburante di punto zero il serbatoio di un veicolo spaziale, ma egualmente Puthoff ritiene di sapere come estrarre energia dal vuoto.

Gli scienziati potrebbero, in teoria, ricavare energia utile dall'effetto Casimir perfino allo zero assoluto e nella plaga più desolata dello spazio. Le due placche generano, infatti, calore nel momento in cui impattano una contro l'altra, e il calore può essere convertito in elettricità o forza meccanica; ma per chiudere il ciclo occorre poi allontanarle daccapo, e questo, ahimè, richiede un dispendio maggiore del ricavato, cosicché l'opinione predominante è che ogni velleità di macchina in moto perpetuo alimentata dal vuoto abbia la sorte segnata in partenza. Al contrario, Puthoff pensa che il dilemma sia risolvibile in più di una maniera, una delle quali fa uso di plasma al posto delle lamine conduttrici.

Il plasma, un gas di ioni ed elettroni liberi, per quanto riguarda l'effetto Casimir non differisce dalle lamine metalliche. Un volume cilindrico di materia in tale stato fisico, elettricamente conduttivo, verrebbe allora compresso dalle fluttuazioni di punto zero per la stessa ragione per cui le piastre sono forzate ad avvicinarsi; la compressione riscalda il plasma e rilascia, quindi, energia. Ma in questo caso la situazione di partenza, stando al Puthoff, potrebbe venire facilmente ripristinata ricreando il plasma con una scarica elettrica e, invece di dover agire sulle placche per ridistanziarle, basterebbe smaltire la «cenere» residua. Lo studioso asserisce, con qualche cautela, di avere ottenuto con questo metodo trenta volte l'energia impiegata, e dichiara: «Ci sono dei riscontri, e abbiamo anche ottenuto un brevetto». Il relativo apparecchio si inserisce comunque nella nutrita sequela di quei congegni che sfidano i princìpi della termodinamica, nessuno dei quali è a tutt'oggi uscito indenne da una verifica scientificamente condotta. Non è improbabile che anche questo, concepito per incanalare l'energia di punto zero, segua la stessa la sorte.

In base alla meccanica dei quanti e alla relatività generale, la potenza dello zero è illimitata, per cui non fa meraviglia che in molti si studino di attingervi; ma allo stato dell’arte rimane il fatto che «mulino non macina senz’acqua».

Capitolo 8

Ora zero al punto zero

Lo zero sul ciglio dello spazio e del tempo

> Sembravano estranei:
> nessun occhio mortale
> poteva percepire la saldatura della loro storia futura.
>
> Thomas Hardy

La fisica moderna è una contesa tra due titani. La relatività generale detta legge nel regno dell'assolutamente grande: i corpi più giganteschi dell'Universo quali stelle, sistemi solari, galassie; la meccanica quantistica governa il dominio dell'assolutamente piccolo: atomi, elettroni e particelle subatomiche. Parrebbe quindi, a prima vista, che le due teorie possano coesistere in armonia, definendo ognuna le leggi fisiche per i differenti aspetti dell'Universo.

Disgraziatamente, esistono oggetti con il piede in due staffe: i buchi neri hanno massa enorme e sono, dunque, soggetti alle leggi relativistiche, ma allo stesso tempo sono estremamente piccoli e rientrano nella sfera di competenza quantistica. E, lungi dal concordare, i due corrispondenti insiemi di leggi entrano in conflitto al centro dei buchi neri.

Dove meccanica dei quanti e relatività si giustappongono, lì dimora lo zero; esso vive nel punto del loro incontro ed è all'origine del loro scontrarsi. Il buco nero è uno zero nelle equazioni della relatività generale, l'energia del vuoto è uno zero nella matematica quantistica; il Big Bang, l'evento più sconcertante nella storia dell'Universo, è uno zero nell'una e nell'altra teoria; l'Universo è scaturito dal nulla, ed entrambe falliscono allorché tentano di spiegarne l'origine.

Per comprendere il Big Bang i fisici devono coniugare meccanica dei quanti e relatività, e da qualche anno a questa parte i loro sforzi hanno cominciato a produrre risultati, sotto forma di una teoria *monstre* che dà ragione della natura quantomeccanica della gravità e consente di spingere lo sguardo sull'istante medesimo della creazione. È bastato loro proscrivere lo zero, talché questa Teoria del Tutto[74] è, a vero dire, quella del Niente.

Lo zero al bando: la teoria delle corde

> Il fatto è che quando cerchiamo di eseguire i calcoli giù giù fino a distanza zero, l'equazione scoppia tra le mani e dà risultati senza significato, tipicamente degli infiniti. Questo ha creato un sacco di grattacapi quando la teoria dell'elettrodinamica quantistica era stata appena sviluppata: per ogni problema che si cercava di risolvere saltava fuori un infinito!
>
> Richard Feynman

La relatività generale e la meccanica quantistica erano destinate a non andare d'accordo. L'Universo della prima è un omogeneo foglio di gomma uniforme e scorrevole, mai uno spigolo o uno spuntone; l'altra, invece, descrive una realtà discontinua e tutta a sussulti. Ciò che hanno in comune – e su cui vengono ai ferri corti – è lo zero.

Lo zero infinito del buco nero – una massa costretta in uno spazio nullo, che impartisce allo spazio curvatura infinita – punzona la liscia superficie del *continuum*, e le equazioni di campo di Einstein non riescono a gestire la cuspide creata dallo zero; in quei dintorni lo spazio e il tempo perdono significato.

La meccanica quantistica è afflitta da un problema simile, legato all'energia di punto zero. Le sue leggi considerano le particelle come gli elettroni alla stregua di punti geometrici, tali da non occupare alcuno spazio; l'elettrone ne risulta un oggetto zerodimensionale, e questo suo impianto strutturale peculiarmente nullo fa sì che i fisici non ne possano conoscere nemmeno la massa o la carica.

L'affermazione appare avventata: è, infatti, da quasi un secolo che tali caratteristiche dell'elettrone sono state determinate. Come fanno gli scienziati a ignorare qualche cosa che è stato oggetto di misurazione? La risposta sta nello zero.

L'elettrone osservabile in laboratorio – quello che i fisici, i chimici, gli ingegneri conoscono e al quale sono affezionati da svariati decenni – è un impostore; non è la particella autentica. Il vero elettrone si cela in una caligine di altre particelle nascenti dalle fluttuazioni di punto zero e che in continuazione, come iniziano, così smettono di esistere. Mentre si trova nel vuoto, esso assorbe o emette di tanto in tanto una di tali particelle, come per esempio un fotone. Lo sciame che lo circonda interferisce con gli strumenti di misura, rende difficile ottenere un preciso valore della sua massa o della carica, e maschera così le sue effettive proprietà. Quello «vero» possiede una massa un tantino superiore e trasporta una carica anch'essa maggiore rispetto al collega tenuto sotto osservazione dai fisici di laboratorio.

Gli scienziati potrebbero farsi un'idea migliore delle vere massa e carica dell'elettrone se riuscissero mai ad avvicinarsi un poco; se potessero inventare un minuscolo dispositivo in grado di penetrare per una breve distanza la nube delle particelle, riuscirebbero a scrutare con maggiore chiarezza. Stando alla teoria dei *quanta*, come il misuratore superasse le prime particelle virtuali site al bordo della nube, i suoi mittenti constaterebbero l'aumento di massa e carica, e come esso seguitasse ad accostarsi all'elettrone e a lasciarsi alle spalle sempre più componenti dello smog subnucleare circostante, il valore delle grandezze osservate salirebbe ulteriormente. Fino a che, sul punto di raggiungere la distanza zero, il numero delle particelle incrociate schizza all'infinito – e altrettanto fanno la massa e la carica percepite dalla sonda, che, secondo le leggi quantistiche nell'elettrone zerodimensionale, sono illimitate.

Come già con l'energia di punto zero, i fisici hanno imparato ad aggirare questo risultato. Nel calcolarne massa e carica vere, non si spingono fino alla distanza zero dall'elettrone, viceversa si arrestano prima, a una distanza arbitraria maggiore di zero. Una volta scelta una distanza opportunamente piccola, tutti i calcoli impieganti le «vere» massa e carica concordano tra loro, e il metodo relativo è detto di «rinormalizzazione». «È ciò che chiamerei un procedimento privo di una qualche rotella» scrisse il fisico Richard Feynman, a dispetto di essersi egli stesso guadagnato il premio Nobel per averne perfezionato la tecnica.[75]

Come pratica un foro nella levigata superficie della relatività generale, così lo zero spiana e diffonde la discontinuità dovuta alla carica puntuale dell'elettrone, racchiudendola in una specie di nebbia; tuttavia, siccome la meccanica dei quanti ha a che fare con particelle zerodimensionali di quel tipo, ogni interazione quantomeccanica tra di esse coinvolge tecnicamente degli infiniti: si tratta di singolarità. Quando, per esempio, due particelle si uniscono, devono farlo in un punto, che rappresenta dunque una singolarità a zero dimensioni e che, tanto in meccanica quantistica che in relatività generale, non ha alcun senso. Lo zero costituisce la zeppa nell'ingranaggio dell'una e dell'altra grande teoria, cosicché i fisici non hanno fatto altro che sbarazzarsene.

Non è subito ovvio come fare ciò, dato che quantità nulle fanno continuamente capolino a ogni coordinata spaziale e temporale. I buchi neri sono zerodimensionali come lo sono particelle quali l'elettrone, però entrambi gli oggetti sono parte della realtà e, come tali, non obbedienti al pio desiderio degli scienziati; se questi ultimi non possono banalmente farli scomparire, possono tuttavia conferire loro una delle dimensioni mancanti.

Questa è la circostanza che presiede alla «teoria delle corde», creata all'inizio degli anni settanta, allorché gli studiosi si resero conto per la prima volta dei vantaggi insiti nel considerare le particelle non come punti ma come «stringhe» o corde in vibrazione.[76] Se le particelle fondamentali (e i buchi neri) vengono trattate come cappi di spago unidimensionali, anziché come punti a zero dimensioni, le infinità che affliggono la relatività generale e la meccanica quantistica scompaiono come per miracolo; viene meno, per esempio, il problema della rinormalizzazione, legato all'illimitatezza di massa e carica dell'elettrone altrimenti prevista dalla teoria. L'elettrone puntuale è una singolarità, e non può che presentare per tali suoi parametri dei valori progressivamente divergenti all'infinito via via che la misura viene eseguita sempre più vicina alla sua posizione; ma nel momento in cui diviene una stringa, cessa automaticamente la natura di singolarità della particella, e massa e carica cessano con essa di crescere indefinitamente, in quanto nell'accostarvisi non si attraversa più una nube di infiniti altri corpuscoli. Ma non basta: nel momento in cui due particelle si uniscono, non lo fanno più in una singolarità puntuale, ma formano una superficie spaziotemporale bella liscia e continua (vedi figg. 8.1 e 8.2).

Nella teoria delle corde le particelle si differenziano solamente in base ai loro modi vibrazionali quantizzati, e di stringhe incredibilmente piccole, che misurano circa 10^{-33} centimetri, è fatta ogni cosa nell'universo. Siccome tra la loro lunghezza e il diametro del neutrone intercorrono una ventina di ordini di grandezza a crescere (quella sta a questo come questo sta alla pianura Padana), le corde viste dalla nostra scala dimensionale sono talmente infinitesimali da risultare dei punti a tutti gli effetti. Distanze (e tempi) minori perdono non solamente ogni importanza, ma anche ogni significato fisico; nella teoria in questione lo zero viene espulso dall'universo, e un intervallo di distanza o di tempo pari a zero non esiste più, ciò che risolve ogni problema di infinità quantomeccanica.

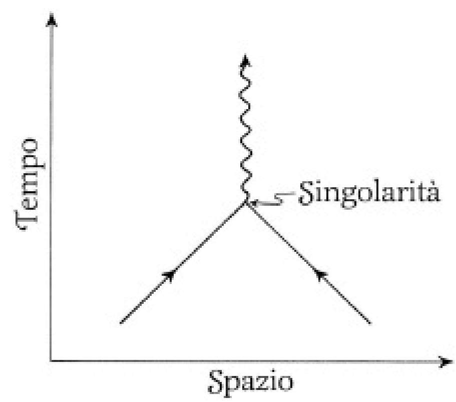


Figura 8.1
Particelle puntuali creano una singolarità…

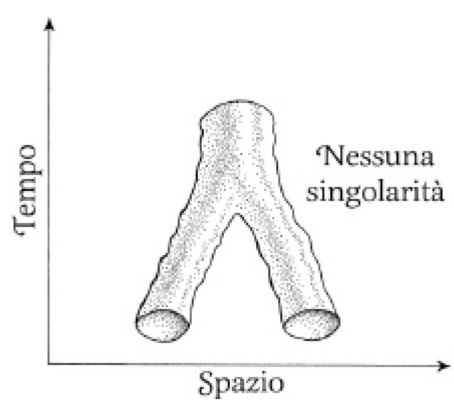


Figura 8.2
…e particelle-corda no.

La messa al bando dello zero risolve anche i problemi che la relatività generale incontra con l'infinito. Se immaginiamo che il buco nero sia in forma di corda, non accade più che gli oggetti cadano attraverso una lacerazione del tessuto spaziotemporale; al contrario, un cappio-particella che si avvicini a un cappio-buco nero si tende fino a toccarlo, e i due tremolano e si aprono a formare una stringa unica: un buco nero di massa appena maggiore. (Alcuni teorici ritengono che l'atto della fusione origini bizzarri prodotti quali i «tachioni», particelle caratterizzate da massa immaginaria e che viaggiano all'indietro nel tempo e più velocemente della luce; si tratta di oggetti ammissibili in certe versioni della teoria delle corde.)

Togliere di mezzo lo zero può apparire un'azione troppo drastica, ma resta il fatto che le stringhe sono assai più trattabili dei punti, e che con quel mezzo viene spianata la natura discontinua e corpuscolare della meccanica quantistica e vengono ricuciti gli strappi provocati dai buchi neri nella relatività generale. Rappezzati questi problemi, le due teorie non sono più incompatibili, e i fisici hanno cominciato a credere che la teoria delle corde potrebbe, oltre a unificarle, condurre anche alla teoria quantistica della gravitazione – la Teoria del Tutto, in grado di spiegare ogni fenomeno dell'Universo. Ma le corde non sono a loro volta esenti da qualche difficoltà: per esempio, richiedono, per funzionare, un superspazio a dieci dimensioni.

Per la maggior parte della gente, già con quattro una è di troppo. Di queste, le tre dimensioni spaziali sono facilmente avvertibili: destra-sinistra, avanti-indietro, su e giù costituiscono le tre direzioni nelle quali possiamo muoverci; la quarta comparve con Einstein, che dimostrò come anche il tempo sia concettualmente analogo, e che lungo di esso siamo costantemente in moto al pari di un'automobile che percorra un'autostrada. La teoria della relatività ci indica la possibilità di modificare la velocità con la quale avanziamo nel tempo così come già possiamo fare su una strada, alla guida di un'autovettura: più in fretta ci muoviamo nello spazio e altrettanto facciamo in ambito temporale. Per comprendere l’Universo einsteiniano dobbiamo accettare il tempo come quarta dimensione.

Vada allora per quattro, ma 10? Siccome possiamo fare misure solamente nello spazio tridimensionale e nel tempo, c’è da chiedersi dove siano finite le altre sei. In base alla teoria delle corde, esse sono compattate su se stesse, avvolte come gomitoli troppo minuscoli per essere rilevati. Un foglio di carta tenuto in mano ci sembra bidimensionale, fornito di lunghezza e larghezza ma privo, in apparenza, di profondità; nondimeno, se ne ispezioniamo lateralmente il bordo con l’aiuto di una lente d’ingrandimento, ci accorgiamo che un tantino di profondità in effetti c’è; per vederla serve uno strumento, ma una terza dimensione è presente, anche se troppo piccola per risultare evidente in condizioni ordinarie. Per quelle sei dimensioni extra vale lo stesso: sono di gran lunga troppo piccole per comparire, sia in situazioni di quotidiana normalità sia con le più potenti attrezzature concepibilmente disponibili nel prossimo futuro per rivelarle.

Ma allora quale significato hanno? Di fatto, nessuno; a esse non è riferibile alcuna nostra esperienza sensibile relativa a lunghezza, larghezza, profondità o tempo; si tratta di una mera costruzione analitica necessaria perché i procedimenti matematici della teoria operino come dovuto. Al pari dei numeri immaginari, servono per fare i calcoli, anche se non possiamo vederle né toccarle o annusarle. È vero che tale concetto è fisicamente astratto, ma agli scienziati interessa la capacità delle equazioni di predire i comportamenti, non la loro comprensibilità, e sei dimensioni in più non rappresentano, matematicamente, una difficoltà insormontabile. Può esserlo, invece, riuscire a vederle. (Oggi dieci sembrano già poche. Negli ultimi anni gli scienziati hanno compreso che le numerose versioni della teoria, in competizione tra loro, sono in un certo senso la stessa cosa, e – così come fece Poncelet con i punti e le rette – ne hanno, anzi, scoperto la dualità rispetto all’altra. La propensione corrente è per una teoria *monstre* delle «supercorde», che ricomprende tutte le altre contendenti: la cosiddetta «Teoria M», che abita in undici, e non dieci, dimensioni.)[77]

Le corde (o le loro controparti generalizzate indicate con il termine «brane», designante membrane multidimensionali – da cui il nome della teoria testé citata) sono ridicolmente minute, e non esiste strumento con cui si possa solo pensare di individuarle – almeno nello stato di avanzamento tecnico-scientifico di lungo periodo della nostra civiltà. I fisici delle particelle scandagliano la realtà subatomica per mezzo degli acceleratori, entro i quali, per mezzo di campi elettrici e magnetici, si fanno raggiungere alle particelle velocità elevatissime; quando queste entrano in collisione, si scindono nei propri componenti elementari, proiettati in varie direzioni. Gli acceleratori di particelle sono i microscopi del mondo subatomico, e maggiore è l’energia immessavi, più sono piccoli gli oggetti (indirettamente) osservabili.

Il Superconducting Super Collider,[78] progetto multimiliardario in dollari vissuto un solo triennio all’inizio degli anni novanta, avrebbe dovuto assicurare agli Stati Uniti il primato di dimensioni e potenza per tali apparecchi. La sua realizzazione prevedeva oltre 10 000 magneti disposti in un anello di 87 chilometri, più ampio del Grande Raccordo Anulare, ma anche così il collisionatore non era certo inteso a mettere in evidenza le stringhe o le dimensioni ripiegate, impresa che richiederebbe un acceleratore con una circonferenza di 10 milioni di miliardi di chilometri, pari a cinquanta volte quella del Sistema Solare. Per completarne il giro, una particella sia pure viaggiante alla velocità della luce impiegherebbe 1000 anni.

Nessuna strumentazione attualmente immaginabile può consentire agli scienziati di osservare le stringhe in via diretta; né parimenti è possibile concepire un esperimento teso ad accertare se particelle e buchi neri siano o non siano fatti in quel modo. Questa è la principale obiezione sollevata nei confronti della teoria delle corde; siccome la scienza si fonda sull'osservazione e la sperimentazione, alcuni sostengono che non di scienza si tratta, ma di filosofia. (In un insieme di teorie elaborate di recente si avanza l'ipotesi che alcune delle sei dimensioni avvolte su se stesse misurino ben 10^{-19} centimetri o anche di più, abbastanza per condurle a portata di esperimento. Per il momento sono comunque considerate teorie allo sbaraglio; idee interessanti ma per bene che vada alquanto azzardate.)

Le leggi newtoniane del moto e della gravitazione diedero ai fisici una spiegazione del modo in cui si muovono i corpi sulla terra e i pianeti in cielo, e la scoperta di ogni nuova cometa ne forniva ulteriore conferma; ma non tutto filava liscio. Per esempio, l'orbita di Mercurio precede in una maniera che non si accorda del tutto con la previsione classica, ma nel complesso la teoria di Newton fu verificata innumerevoli volte, con esito di regola soddisfacente.

La teoria di Einstein diede ragione degli errori presenti in quella dell'illustre predecessore, spiegando, per esempio, l'anomalia nello spostamento dell'orbita di Mercurio; la relatività fornì, inoltre, comprovabili previsioni su come agisca la gravitazione, una delle quali fu confermata da Eddington con l'osservazione, durante un'eclisse solare, della deviazione della luce stellare.

D'altra parte, anche la teoria delle corde accomuna una serie di altre esistenti teorie in maniera molto elegante e avanza predizioni sul comportamento dei buchi neri e delle particelle, ma nessuna di esse è osservabile né tantomeno verificabile; se pure tale teoria è matematicamente congrua, e perfino bella, non per questo può ancora dirsi scienza.[79]

A tutto il pronosticabile futuro, la messa al bando dello zero dall'Universo attraverso la teoria delle corde è un'operazione filosofica più che scientifica; può darsi certamente che la teoria sia giusta, ma i mezzi per accertarlo potrebbero mancare indefinitamente. Fino ad allora lo zero non va considerato proscritto, anche perché proprio da esso sembra scaturito il cosmo.

L'ora zero: il Big Bang

> Le osservazioni di Hubble indicano che ci fosse un tempo, detto il «Big Bang», in cui l'universo era infinitamente piccolo e infinitamente denso. In tali condizioni sarebbe saltata ogni legge scientifica, e dunque ogni capacità di predire il futuro.
>
> Stephen Hawking

L'Universo è nato nello zero.

Dal vuoto profondo, dal nulla assoluto, si produsse un cataclisma esplosivo da cui proruppe ogni materia ed energia che forma la struttura dell'Universo. Codesto evento, il «Big Bang», rappresentava per molti uomini di scienza e di pensiero un concetto repellente, e occorse parecchio tempo prima che gli astrofisici concordassero sulla finitezza dell'Universo in cui viviamo, sul fatto che esso avesse davvero avuto un principio.

Il pregiudizio nei confronti di un Universo limitato risale all'antichità. Aristotele aveva respinto una cosmogonia a partire dal vuoto perché riteneva che il vuoto non potesse in alcun modo esistere; però, così facendo, egli determinò un paradosso: se non era possibile che l'Universo fosse sprizzato dal nulla, allora c'era stato «un qualche cosa» fluttuante là fuori prima della sua nascita, un altro Universo *ante litteram*. Per il grande pensatore ellenico, il dilemma poteva risolversi solamente assumendo che il mondo fosse eterno, da sempre esistente nel passato e per sempre nel futuro.

A suo tempo, la civiltà occidentale dovette scegliere tra Aristotele e la Bibbia, la quale afferma che l'Universo è limitato ed è sorto dal vuoto, e ne predice la distruzione finale. Benché la cosmologia biblica della tradizione semitica ribalti la concezione aristotelica, l'attribuzione di eternità e immutabilità non venne interamente soppressa e durò, anzi, fino al XX secolo, inducendo Einstein nel più grande errore – come lo definì egli stesso – della sua vita.

Il padre della relatività riteneva la propria teoria generale affetta da una pecca sostanziale: quella di anticipare la fine dell'Universo. In base alle equazioni di campo, esso risulta instabile, e gli si offrono due sole possibilità evoluzionistiche – entrambe sgradevoli. Uno scenario vede l'Universo collassare sotto l'azione medesima della propria gravità, e durante la contrazione aumentare di temperatura, fino a mutarsi in una fornace radiante in cui sono annichiliti prima ogni vita e poi gli stessi atomi costituenti la materia. Sarebbe la morte per fuoco, dopo di che l'intero cosmo imploderebbe in un punto zerodimensionale[80] – un apocalittico buco nero – per scomparire infine per sempre.

L'alternativa è, se possibile, ancora più sinistra. L'Universo si espande indefinitamente, le galassie si distanziano sempre più l'una dall'altra, e si rarefà la materia stellare che alimenta tutte le reazioni esotermiche; i soli si spengono con l'esaurirsi del proprio combustibile nucleare, fino al progressivo oscurarsi delle galassie, che si fanno infine gelide e silenti. La fredda materia morta delle stelle decade e si decompone, non lasciando se non la reliquia di un pallido alone elettromagnetico isotropo per ogni dove. Tutto si ridurrebbe a una zuppa amorfa di radiazione agonizzante; sarebbe la morte per gelo.

Einstein non ne sopportava l'idea; come già Aristotele, egli implicitamente riteneva l'Universo statico,[81] immutabile ed eterno. La sola via di uscita stava nel «correggere» le equazioni della relatività generale, scongiurando così l'imminente catastrofe; vi provvide introducendo la cosiddetta «costante cosmologica», un parametro corrispondente a una forza ancora da scoprire e che si opponeva alla gravità. La relativa spinta veniva a bilanciare l'attrazione gravitazionale, cosicché l'Universo, invece di collassare, sarebbe rimasto in equilibrio, senza contrarsi né espandersi.[82] Postulare l'esistenza di una simile forza misteriosa fu un atto disperato: «Ho (...) di nuovo commesso nei confronti della teoria della gravità qualche cosa che mi espone bene o male al rischio di venire chiuso in manicomio» scrisse il grande teorico, talmente coinvolto dalla minacciata distruzione dell'Universo da sentirsi obbligato a un passo di quella portata.

Ma non ci finì, tra gli alienati; aveva avanzato congetture anche più ardite ed era sempre stato nel giusto. Quella volta, però, non gli andò altrettanto bene; le stelle medesime si incaricarono di smantellare la sua concezione di un cosmo statico ed eterno.

Nel 1900 l'Universo conosciuto si limitava alla Via Lattea; gli astronomi sapevano poco o nulla di ciò che poteva trovarsi oltre i confini del nostro lattiginoso disco di stelle, e, benché avessero individuato alcune brillanti nebulose a spirale, non esistevano particolari ragioni per ritenerle diverse da luminosi ammassi di gas posti all'interno della nostra galassia. Negli anni venti questa visione mutò completamente, per opera di un astronomo statunitense a nome Edwin P. Hubble.

Una classe particolare di stelle, le variabili Cefeidi, esibisce una proprietà che mise in grado Hubble di misurare la distanza di oggetti remoti. La luminosità delle Cefeidi è pulsante, e varia secondo una curva di luce sempre uguale e di periodo temporale precisamente legato alla quantità media di luce emessa; esse possono quindi considerarsi «candele standard», oggetti-testimone di brillantezza nota che in mano all’astronomo divennero uno strumento chiave, equiparabile, per certi versi, ai fari di un’automobile.

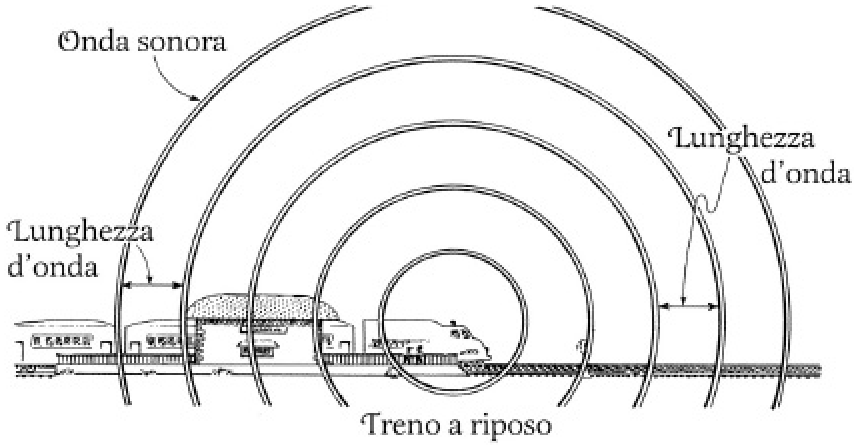
Se osserviamo di notte un’autovettura che ci viene incontro, notiamo subito che le sue luci frontali sembrano aumentare di intensità via via che si avvicinano; se ne conosciamo a priori la brillantezza intrinseca (ovvero se i fari sono una candela standard), siamo in grado di anticipare quale sarà quella che ci appare in ogni assegnata posizione del veicolo rispetto a noi. Ma se è vero che la distanza ci dice la luminosità, vale pure l’inverso, e misurando la brillantezza apparente possiamo calcolare la distanza.

Hubble applicò alle Cefeidi l’identico procedimento. Riuscendo a identificare il pulsare delle Cefeidi nelle mulinanti nebulose da lui esaminate, e di cui non si sapeva se fossero a decine o centinaia o migliaia di anni luce da noi, ne misurò la luminosità e di lì risalì a distanze di milioni di anni luce, provando – come nel caso della nebulosa (com’era detta allora) di Andromeda, che trovò posta a più di 900 000 anni luce – che non si trattava di semplici nubi di materia interstellare, ma di oggetti extragalattici, altri ammassi di stelle a tutti gli effetti, talmente lontani da non potersi risolvere in punti individuali di luce. Altre spiraleggianti galassie erano ancora più remote, tanto che oggi gli studiosi sospettano che l’Universo abbia diametro di circa 15 miliardi di anni luce e sia punteggiato di grappoli di galassie per tutta la sua estensione.

La scoperta era sbalorditiva, significando dimensioni milioni di volte maggiori di quanto non si pensasse fino ad allora; ma per quanto straordinario fosse il conseguimento, non è quello per cui il pioniere dell’osservazione extragalattica è principalmente ricordato. Il suo secondo contributo mandò all’aria la statica visione cosmologica di Einstein.

Con il metodo delle Cefeidi, Hubble seguitò a misurare una distanza galattica dopo l’altra, rilevando però ben presto un allarmante schema ripetitivo: tutte le galassie apparivano in fuga a grande velocità, allontanandosi dalla Via Lattea a migliaia e migliaia di chilometri al secondo, anche se in modo non direttamente quantificabile per via dell’abissale distanza.

Il solo metodo praticabile per cronometrare la velocità di una galassia è di ricorrere all’effetto Doppler, lo stesso principio di funzionamento dell’*Autovelox* della Polizia stradale. È comune notare che la tonalità del fischio del treno in corsa varia durante il transito della locomotiva; fino a che essa si avvicina, l’altezza del suono è elevata, ma dal momento che ci passa davanti si abbassa bruscamente e sensibilmente. La spiegazione sta nel fatto che, dal punto di vista dell’ascoltatore a terra, nel muoversi verso di lui la sirena della motrice «insegue» i fronti d’onda già emessi, facendoglieli percepire ravvicinati (quindi di maggiore frequenza), mentre nell’allontanarsi ne «fugge», facendoglieli per converso intendere più distanziati (quindi di minore frequenza, vedi fig. 8.3). È questo l’effetto suddetto, il quale si applica del tutto analogamente alle onde elettromagnetiche e, in particolare, alla luce visibile, nel qual caso, al posto della tonalità, la grandezza che viene alterata è il colore. La luce di una stella in moto verso la Terra ci appare di frequenza maggiore di quella con cui è emessa, e subisce dunque spettralmente uno «spostamento verso il blu»; se, viceversa, il corpo celeste è in allontanamento, la frequenza luminosa percepita diminuisce e si produce uno «spostamento verso il rosso».



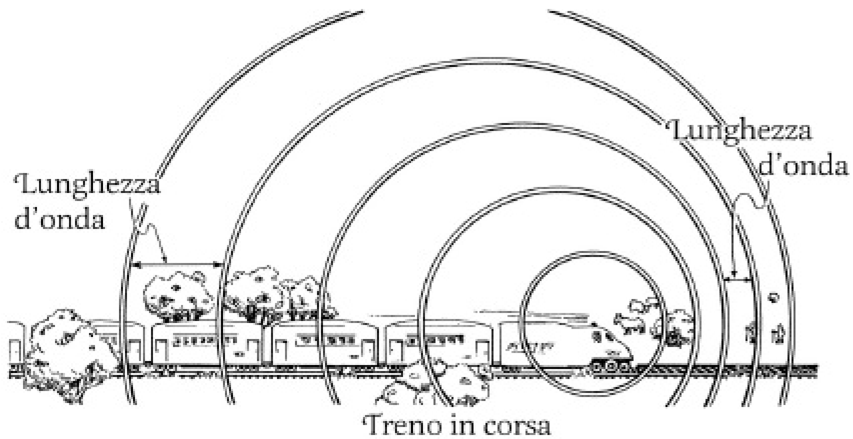


Figura 8.3
L'effetto Doppler.

Misurando l'entità dello spostamento in frequenza non della luce ma delle radioonde riflesse sugli autoveicoli in transito, lo strumento in dotazione agli agenti del traffico ne indica la velocità; in modo concettualmente simile (ma sfruttando l'emissione diretta dell'oggetto misurato), dall'esame dello scorrimento delle righe spettrali di una stella gli astrofisici deducono entità e senso della sua velocità rispetto alla Terra.

Confrontando i dati relativi alle distanze con quelli delle velocità di recessione, Hubble trovò una correlazione traumatizzante: non solamente tutte le altre galassie si stavano allontanando dalla nostra in ogni direzione, ma lo facevano a velocità tanto maggiore quanto più erano distanti.

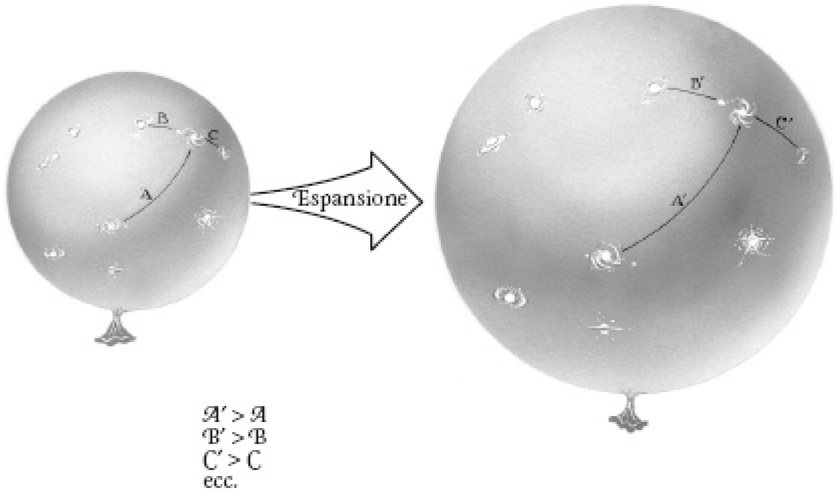


Figura 8.4
L'Universo in espansione.

Com'era possibile? Immaginiamo un palloncino punteggiato di *pois*; i punti sono le galassie e la membrana di gomma è il tessuto dello spazio-tempo. Al gonfiarsi del palloncino ogni *pois* si distanzia sempre di più da tutti gli altri, ma dal suo punto di osservazione sono questi che si allontanano da lui, e inoltre i più lontani lo fanno più rapidamente di quelli prossimi[83] (vedi fig. 8.4). Pareva proprio che l'Universo si espandesse come un pallone (se non si considera una carenza di questa analogia: a differenza dei *pois*, che si allargano assieme alla superficie che li ospita, le galassie, coese dalla forza di gravità, conservano all'incirca le proprie dimensioni).

Con il passare del tempo l'espansione prosegue senza posa; se però vi si guarda in altro modo, immaginando di avere il filmato dell'evoluzione cosmologica e di proiettarlo a rovescio, l'Universo seguiterebbe invece a contrarsi, e a un certo punto il palloncino si raggrinzirebbe perdendo turgore, rimpicciolendo sempre più per finalmente scomparire in un unico punto, la singolarità all’inizio dello spazio e del tempo. Si tratta dello zero primordiale, dell’atto di nascita dell’Universo, la furibonda esplosione del Big Bang che ha generato il cosmo. Da questo nucleo è sgorgata ogni materia ed energia dell’Universo, formando le galassie, le stelle, i pianeti mai esistiti e che mai esisteranno; l’evento iniziale si è verificato circa 15 miliardi di anni or sono, e da quel momento lo spazio non ha cessato di estendersi – la fede riposta da Einstein in un Universo stabile ed eterno era morta e sepolta.

Rimaneva un barlume di speranza, sola alternativa al Big Bang: la teoria dello «stato stazionario». Alcuni astronomi ipotizzarono la presenza di scaturigini di materia, dalle quali le galassie si allontanassero nell’andare incontro all’invecchiamento e alla morte. Nonostante il conseguente diradarsi e scomparire di materia, nell’insieme della propria densità il cosmo sarebbe rimasto mediamente invariato, in equilibrio dinamico tra rarefazione e reintegro; risorgeva, così, l’antica concezione aristotelica di un’eterna immutabilità.[84]

Per un certo periodo le due teorie rivali – Big Bang e stato stazionario – convissero fianco a fianco, adottate l’una da questo, l’altra da quel cosmologo in base alle personali inclinazioni filosofiche; ma a metà degli anni sessanta la situazione mutò radicalmente – la teoria dello stato stazionario fu affossata dallo sterco di piccione, o almeno da ciò che due ricercatori ritenevano tale.

Nel 1965 alcuni astrofisici della Princeton University si proposero di determinare per via matematica che cosa fosse accaduto immediatamente dopo il Big Bang. L’intero Universo doveva essere stato caldo e denso oltre ogni immaginazione, intensamente pervaso di radiazione ardente che non sarebbe scomparsa con l’espandersi del titanico palloncino. Viceversa, essa sarebbe stata «stirata» in tutte le lunghezze d’onda dalla dilatazione dell’elastico spaziotemporale, finendo al momento presente per cadere – come mostrarono calcoli successivi degli studiosi della prestigiosa istituzione americana – nella porzione dello spettro elettromagnetico corrispondente alle microonde, ove sarebbe risultata provenire da tutte le direzioni.[85] Codesta «radiazione cosmica di fondo» costituiva l’affievolito riverbero della catastrofe primigenia e, individuata, avrebbe fornito alla scienza la prima diretta evidenza di come fosse corretta la teoria del Big Bang e non quella dello stato stazionario.

Non passò molto prima che gli scienziati di Princeton avessero la loro conferma. Non lontano di lì, ai Bell Laboratories di Murray Hill, in New Jersey, due astrofisici interessati alla radioastronomia stavano predisponendo un’apparecchiatura ad alta sensibilità per compiere osservazioni in microonde, ma, per quanto si arrabattassero, non riuscivano a venirne a capo: persisteva il soffio di un rumore di fondo in banda centimetrica – un disturbo radio – di cui non c’era modo di sbarazzarsi. Sulle prime diedero la colpa ai piccioni che abitavano la grande antenna a tromba utilizzandola per i loro bisogni, ma anche dopo, scacciati i pennuti e fatta pulizia, l’inconveniente non accennò a scemare, e parimenti non ebbe esito alcunché di quanto poterono escogitare per scoprire la causa del fastidioso rumore. Finalmente, venuti a conoscenza del lavoro compiuto alla vicina università, i due sperimentatori compresero di essersi imbattuti nel fondo cosmico. Non erano cacche di volatile, ma il possente vagito elettromagnetico dell’Universo attenuato e distorto in un sibilante sussurro. (I ricercatori dei Bell Laboratories, Arno A. Penzias e Robert W. Wilson, ottennero nel 1978 il premio Nobel per la loro scoperta, e i fisici di Princeton, tra i quali principalmente Bob H. Dicke e P. J. E. «Jim» Peebles, non ebbero un bel nulla – un trattamento iniquo secondo l’opinione di molti scienziati, ma il comitato per il Nobel è difatti incline a ricompensare un'attenta e accurata ricerca sperimentale più che una pur importante elaborazione teorica a tavolino.)[86]

Positivamente tracciato il Big Bang, la chimera dell'Universo statico era ormai spacciata. Per quanto poco attraente l'idea di un Universo finito, gli scienziati gradualmente accettarono la teoria della deflagrazione primigenia e ammisero che ci fosse stato un inizio. Ma sussistevano problemi teorici. Da un lato, l'Universo è piuttosto raggrumato (fitti raggruppamenti galattici sono separati da smisurati abissi di spazio profondo), dall'altro non lo è abbastanza (la distribuzione media di materia è circa uguale in tutte le direzioni, ed essa non è dunque finita tutta in un immane coagulo). Se è vero che il cosmo ha preso origine dall'esplosione di una singolarità, le probabilità stanno dalla parte di un «pallone» dove l'energia così sprigionata sia quasi uniformemente diffusa in ogni sua parte, ovvero sia raccolta in un'unica bolla; nell'un caso l'ideale sfera sarebbe sfumata in tinta unita, nell'altro recherebbe una sola grande chiazza, e comunque il motivo a *pois* non dovrebbe esistere. Una domanda era dunque quale fosse la causa di un addensamento non troppo e non troppo poco; ma un'altra – più inquietante – era di dove mai venisse la cosmogonica singolarità. Le risposte stanno nello zero.

Lo «zero» del vuoto può spiegare il livello di grumosità dell'Universo. Siccome il vuoto ribolle ovunque di una schiuma quantica di particelle virtuali,[87] il tessuto spaziotemporale è intriso di infinita energia di punto zero, che, in grado sotto determinate condizioni di agire sugli oggetti materiali, potrebbe averlo fatto ai primordi dell'Universo, sospingendoli lontani gli uni dagli altri.

Negli anni ottanta i fisici avanzarono l'ipotesi che l'energia di punto zero fosse stata maggiore nel protouniverso di quanto non sia attualmente. L'eccedenza si sarebbe propagata in tutte le direzioni, sospingendo la struttura dello spazio-tempo in un'espansione a grande velocità; avrebbe, in un certo senso, «gonfiato il pallone» con uno scoppio di potenza irresistibile, spianando i grumi materiali cosmici nello stesso modo in cui l'aria soffiata in una vescica ne distende le grinze. La spiegazione della relativa omogeneità dell'Universo potrebbe essere questa. Ma il vuoto dei primi momenti era un falso vuoto, fornito di energia di punto zero innaturalmente elevata, un eccesso che lo rendeva intrinsecamente instabile e soggetto a decadere molto rapidamente – in meno di 1ys, un miliardesimo di miliardesimo di milionesimo di secondo – nella condizione di vuoto canonico, con la normale energia di punto zero riscontrabile costì. Analogamente a una pentola di liquido istantaneamente riscaldato da una vampata di calore, piccole bolle di «vero» vuoto si sarebbero formate per subito espandersi alla velocità della luce; l'Universo osservabile si troverebbe all'interno di una di queste, o di più di una venute in contatto tra loro. La spiegazione delle disuniformità dell'Universo potrebbe essere questa: la natura asimmetrica di tali bolle in espansione formatesi e amalgamatesi. Stando al «modello inflazionario dell'Universo»,[88] fu l'energia di punto zero a creare le stelle e le galassie.

Ma forse lo zero detiene anche il segreto della causa prima della creazione. Così come procreano particelle, il nulla del vuoto e le sue fluttuazioni energetiche possono anche generare universi; l'origine del nostro sta, quindi, forse nel fermento della schiuma cosmica e nell'insorgere e nell'annichilirsi spontaneo della materia. Forse il cosmo non è che una fluttuazione quantistica su una scala grandiosa,[89] una spropositata particella virtuale affacciatasi all'esistenza dal nulla totale; una sorta di uovo cosmico destinato a deflagrare, inflazionare, e creare così lo spazio-tempo con noi all'interno. O forse il nostro

Universo non è che una di tante fluttuazioni. Per esempio, alcuni fisici ritengono che le singolarità al centro dei buchi neri siano finestre sulla schiuma quantica primordiale antecedente il Big Bang, e che il suo ribollire in quella collocazione, dove spazio e tempo non hanno significato, generi senza posa innumeri nuovi universi, bolle che gorgogliano via, si espandono inflazionariamente, producono i propri firmamenti. Lo zero detiene forse il segreto della nostra esistenza – e dell'esistenza di un numero illimitato di altri universi.

È tanto potente, lo zero, perché sa scardinare le leggi della fisica: è infatti proprio all'ora zero del Big Bang e proprio al punto zero del buco nero che le equazioni che descrivono la realtà cessano di avere un senso. Tuttavia non lo si può ignorare, perché non solo tiene in pugno la chiave della nostra esistenza, ma sarà anche responsabile della fine dell'Universo.

Capitolo 9

La conclusiva vittoria dello zero

Ultimo atto

> In questo modo il mondo finisce non con un rombo ma con un lamento.
>
> Thomas Stearns Eliot

Mentre alcuni fisici cercano di farla in barba allo zero eliminandolo dalle proprie equazioni, altri argomentano che potrebbe invece essere lui a ridere per ultimo. Anche se non riuscisse a disvelare mai il mistero della nascita dell'Universo, la scienza è comunque in procinto di rivelarne la morte: il postremo destino dell'Universo è riposto nello zero.

Le equazioni di campo della relatività non ammettono un cosmo statico, immutabile; ma gli consentono, tuttavia, alcuni altri sviluppi, funzioni della quantità di materia che esso contiene (o meglio, della sua densità di massa).[90] Nel caso di maggiore «leggerezza», la palla spaziotemporale potrebbe continuare la propria dilatazione in eterno, facendosi illimitatamente più estesa; a lungo andare, stelle e galassie cesserebbero una a una di risplendere, e uno spettrale Universo andrebbe incontro alla «morte per gelo». Al contrario, se la densità della massa totale (comprendendo quella delle galassie, dei gruppi galattici e della cosiddetta, e ipotizzata, «materia oscura»)[91] fosse abbastanza elevata, l'abbrivio impresso dalla primordiale deflagrazione non basterebbe a contrastare il richiamo esercitato dalla gravità e a garantire la perpetua espansione; per via della reciproca attrazione, alla lunga le galassie ricompatterebbero il tessuto dello spazio-tempo, e la palla inizierebbe così a «sgonfiarsi». La velocità di contrazione sarebbe in continuo aumento, con essa la temperatura dell'Universo, e si andrebbe così a parare in un Big Bang alla rovescia: il «Big Crunch». Qual è dunque la sorte che ci attende, Big Crunch o morte per gelo? Il responso è dietro l'angolo.

Quando gli astronomi scrutano una lontana galassia, guardano in realtà all'indietro nel tempo. Una galassia vicina può distare dalla Via Lattea, per esempio, un milione di anni luce, per cui un segnale luminoso che se ne diparta ora impiegherà un milione di anni per raggiungere la Terra, e, per converso, l'immagine che di essa vediamo attualmente si riferisce a com'era quella galassia un milione di anni or sono – più sono distanti gli oggetti osservati, più indietro nel tempo si spinge lo sguardo.

Il fato dell'Universo è imperniato sulla cadenza di estensione della palla spaziotemporale. Nel caso che questa stia consistentemente rallentando la propria dilatazione, allora la spinta del Big Bang è quasi esaurita e l'Universo è indirizzato verso il Big Crunch;
se invece la velocità dell'allargamento non si sta riducendo in modo significativo, può voler dire che l'energia iniziale ha dato al tessuto dello spazio-tempo impulso sufficiente a farlo espandere di qui all'eternità.

Gli astronomi hanno cominciato a misurare la variazione della velocità di espansione dell'Universo. Una determinata tipologia di *supernovæ* (stelle in fase di esplosione), la «I-a», possiede, al pari delle Cefeidi di Hubble, le caratteristiche della candela standard; la loro esplosione avviene sempre più o meno allo stesso modo e con la stessa brillantezza intrinseca. Ma, a differenza delle deboli Cefeidi, una supernova è visibile a mezzo Universo di distanza.

Alla fine del 1997 gli astronomi annunciarono di avere determinato la distanza di alcune galassie molto deboli e molto antiche, sfruttando appunto il riferimento dato dalle I-a. Dalla lontananza di una galassia se ne ricava l'età, e dallo scorrimento Doppler la velocità di recessione; confrontando quest'ultima per diverse epoche del passato, gli studiosi sono stati in grado di rilevare l'andamento della velocità di espansione dell'Universo; ma il risultato è abbastanza singolare.

L'espansione non sta rallentando: al contrario, può perfino darsi che acceleri. Se i dati ricavati dalle *supernovæ* davvero indicano che l'Universo sta diventando sempre più grande a velocità sempre maggiore, le probabilità di un terminale pigia-pigia cosmico sono molto scarse, perché esiste, a quanto, pare un agente di contrasto alla forza di gravità. La costante cosmologica – il termine incognito aggiunto da Einstein alle proprie equazioni appunto per bilanciarne l'effetto – è ritornata a fare parlare di sé gli astrofisici, e il «più grande errore» del maggiore teorico del ventesimo secolo forse non era affatto tale.

La forza misteriosa potrebbe essere – ancora una volta – quella del vuoto. Le minuscole particelle in costante agitazione per tutto lo spazio-tempo esercitano una lieve pressione verso l'esterno, stirandone impercettibilmente la struttura, e l'effetto cumulativamente amplificato nel corso di miliardi di anni potrebbe condurre a una sempre più rapida dilatazione. In tal caso, il nostro destino cosmico non sarebbe il Big Crunch ma la continua espansione (da cui il raffreddamento e la morte per gelo) a causa dell'energia di punto zero, uno zero nelle equazioni della meccanica quantistica che permea lo spazio di un'infinità di corpuscoli.

Ancora tra gli astronomi la parola d'ordine è la cautela. I dati sono infatti provvisori, ma si fanno più probanti a ogni nuova osservazione e paiono confermati da altri studi, che prendono in esame pennacchi di gas o il numero di lenti gravitazionali[92] in un dato campo di osservazione. Ne deriva che il cosmo si espanderà per sempre, e che non perirà nel caldo, ma nel freddo.

Per effetto della potenza dello zero il responso è ghiaccio, non fuoco.

All'infinito e oltre

> Se tuttavia arriveremo davvero a scoprire una teoria globale, dovrà essere comprensibile per grandi linee a chiunque, non solo a pochi scienziati. Dopodiché dovremo tutti, filosofi, scienziati e persone comuni, essere in grado di dibattere il grande interrogativo sull'esistenza nostra e dell'Universo. Trovare a questo una risposta sarà il definitivo trionfo dell'umana ragione, perché avremo conosciuto la mente di Dio.
>
> Stephen Hawking

Dietro ogni grande questione aperta della fisica sta lo zero. La densità infinita del buco nero è una divisione per zero. Il Big Bang della creazione è una divisione per zero. L'infinita energia del nulla è una divisione per zero. Eppure la divisione per zero devasta l'ordito della matematica e la strutturazione della logica – e mina per sovramercato il fondamento stesso della scienza.

All'epoca di Pitagora, prima dell'affermarsi dello zero, la logica pura regnava incontrastata; l'Universo era ordinato e predicibile, ed era basato sui numeri razionali e implicava l'esistenza di Dio. L'inquietante paradosso di Zenone era stato spiegato e liquidato con il bandire zero e infinito dal dominio dei numeri.

Con la rivoluzione scientifica, il mondo dell'astratta ragione cedette il passo a un contesto di empirismo, fondato sull'osservazione piuttosto che sulla deduzione filosofica. Per spiegare le leggi universali Newton dovette distogliere lo sguardo dagli elementi di illogicità della propria analisi infinitesimale – insorti, peraltro, da una divisione per zero.

Non appena matematici e fisici vennero a capo del problema della divisione per zero nel calcolo differenziale e lo reinserirono in una struttura logicamente rigorosa, lo zero rispuntò fuori nelle equazioni quantomeccaniche e della relatività generale, di nuovo contaminando la scienza con l’infinito. Di fronte agli zeri dell’Universo la logica viene meno, la teoria quantistica e la relatività vanno a gambe all’aria, e per potere risolvere i problemi gli uomini di scienza si sono riproposti di ostracizzare lo zero punto e daccapo, e di unificare le leggi che reggono l’Universo.

Se avranno successo, le vie della natura saranno a portata del loro intelletto. Apprenderemo così l’ordinamento di ogni cosa fino ai margini dello spazio e del tempo, da un capo all’altro dell’Universo; gli uomini conosceranno quel capriccio cosmico che originò il Big Bang, leggeranno nella mente di Dio. Questa volta, però, lo zero potrebbe rivelarsi un osso molto più duro da rodere.

Le teorie dell’unificazione tra meccanica quantistica e relatività generale, che descrivono il centro dei buchi neri e interpretano la singolarità del Big Bang, sono talmente fuori della portata sperimentale che potrebbe risultare impossibile stabilire se siano o non siano corrette. Le argomentazioni dei teorici delle corde e quelle dei cosmologi potrebbero essere matematicamente esatte, e allo stesso tempo senza costrutto quanto la filosofia di Pitagora; le loro teorie a base matematica potrebbero essere armoniose e coerenti, potrebbero anche dare una spiegazione della natura dell’Universo… ed essere clamorosamente sbagliate.

Tutto quanto sanno gli scienziati è che il cosmo ebbe origine dal nulla, e che a quel nulla donde provenne farà ritorno.

L’Universo principia e termina nello zero.

Appendici

Appendice A

Animale, vegetale o primo ministro?

Siano *a* e *b* entrambi uguali a 1; siccome sono anche uguali tra loro, moltiplicarli l'uno per l'altro o elevarli al quadrato è lo stesso, per cui

$$b^2 = ab \tag{1}$$

Vale pure, ovviamente

$$a^2 = a^2 \tag{2}$$

Sottraendo membro a membro [1] da [2] si ha

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab \tag{3}$$

La scomposizione in fattori del primo membro e il raccoglimento a fattore comune del secondo membro della [3] porge

$$(a + b)(a - b) = a\,(a - b) \tag{4}$$

In queste manipolazioni non c'è trucco e non c'è inganno, le eguaglianze sono perfettamente valide; possiamo sostituire i numeri alle lettere e constatare di persona.

Fino dunque a questo punto, niente da dire. Ora dividiamo entrambi i membri della [4] per ($a - b$), ottenendo

$$a + b = a \tag{5}$$

e sottraiamo *b* da entrambi i membri della [5]; risulta

$$b = 0 \quad [6]$$

Ma proprio all'inizio avevamo posto che *b* fosse uguale a 1, per cui si ricava che

$$1 = 0 \quad [7]$$

Il risultato [7] è importante. Proseguendo, sappiamo che Winston Churchill ha una sola testa, ma se, in virtù della [7], uno è uguale a zero, ciò significa che il famoso uomo politico non ne ha alcuna. Analogamente, ci è noto che in testa ha zero ciuffi di verzura, per cui ne ha uno. Moltiplicando ora per 2 i membri della [7] constatiamo che

$$2 = 0 \quad [8]$$

Siccome Churchill ha due gambe, la [8] ci dice che non ne ha, e siccome ha parimenti due braccia, anche di quelle è privo. Moltiplichiamo ora la [7] per il giro di vita dello statista, in centimetri; risulta subito

$$\text{(Misura del giro di vita di Churchill)} = 0 \quad [9]$$

che equivale a dire che il suo corpo è perfettamente affusolato, riducendosi in niente. Chiediamoci ora quale sia il colore del popolarissimo Winnie. Da un qualunque raggio di luce emanante da lui isoliamo un fotone e moltiplichiamone la lunghezza d'onda, in nanometri, per entrambi i membri della [7]; si ricava

$$\text{(Lunghezza d'onda del fotone di Churchill)} = 0 \quad [10]$$

Ma se moltiplichiamo i membri della [7] per 640 nanometri, vediamo che è pure

$$640 = 0 \quad [11]$$

e sottraendo [11] da [9] appare chiaro che

$$(\text{Lunghezza d'onda del fotone di Churchill}) - 640 = 0 \quad [12]$$

ovvero la lunghezza d’onda di quel (e di ogni altro) fotone proveniente da Mr. Churchill è 640 nanometri, corrispondente a un bell’arancio vivo.

Riassumendo, abbiamo dimostrato matematicamente che Winston Churchill non ha braccia né gambe, possiede un cespuglietto verde al posto della testa, la sua sagoma è rastremata, ed è arancione: manifestamente, abbiamo a che fare con una carota. (La stessa conclusione si può trarre in modo più semplice. Sommando 1 a entrambi i membri della [7] si ottiene l’eguaglianza 2 = 1; se questa è vera, e se Churchill e una carota sono due cose diverse, allora sono una cosa sola. Stesso risultato, ma così è meno divertente.)

Dove si trova l’errore? Il passaggio fallato è uno solo, quello dalla [4] alla [5], dove si divide per $(a - b)$. Siccome a e b sono uguali, la divisione è in realtà per 0, e difatti di lì a poco si ottiene l’assurda eguaglianza 1 = 0; da quel punto in poi qualunque arbitraria affermazione diventa dimostrabile, vera o falsa che sia – l’intera impalcatura della matematica ci è crollata addosso.

Usato incautamente, lo zero ha il potere di stravolgere la logica.

Appendice B

Il rapporto aureo

Dividiamo in due parti un segmento, in maniera tale che il rapporto di lunghezza tra la parte maggiore e la minore sia uguale al rapporto tra la lunghezza dell'intero segmento e quella della parte maggiore.

Assumiamo, per semplicità, che la parte minore sia lunga 1 centimetro, e indichiamo quindi con x centimetri la lunghezza della parte maggiore; passando all'algebra, la lunghezza del segmento risulta, in centimetri, $1 + x$, e il rapporto tra le due parti è

$$x/1 = x$$

mentre il rapporto tra l'intero segmento e la parte maggiore è

$$(1 + x)/x$$

La ragione aurea è dunque espressa numericamente da x. In virtù dell'assunto iniziale di eguaglianza, si ottiene la relazione

$$x = \frac{1 + x}{x}$$

Moltiplicando per x entrambi i membri si ottiene

$$x^2 = 1 + x$$

ovverosia, sottraendo da entrambi i membri $1 + x$,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Si tratta di una equazione di secondo grado che, risolta, fornisce le radici $(1 + \sqrt{5})/2$ e $(1 — \sqrt{5})/2$, delle quali solo la prima, che vale 1,618..., è positiva e dunque significativa agli occhi degli antichi Greci. Il numero aureo è quindi 1,618...

Appendice C

La moderna definizione di derivata

Siccome la definiamo in termini di limite, al giorno d'oggi la derivata riposa oramai su solide basi logiche. Formalmente, la derivata della funzione $f(x)$, scontate alcune condizioni poste sia sulla funzione sia sul campo di variazione del suo argomento, è data dalla relazione seguente:

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

Per esaminare come la moderna definizione tolga di mezzo i «tiri mancini» di Newton rispolveriamo la medesima funzione già impiegata per la dimostrazione del metodo delle flussioni: $f(x) = x^2 + x + 1$; la sua derivata è uguale a

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[(x+\varepsilon)^2 + x + \varepsilon + 1] - [(x^2 + x + 1)]}{\varepsilon}$$

Sviluppando i quadrati otteniamo

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + x + \varepsilon + 1 - x^2 - x - 1}{\varepsilon}$$

e semplificando si ha

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\varepsilon x + \varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon}$$

Dividendo ora per ε (ricordiamo che ε non è nullo, perché ancora non siamo passati al limite), la precedente porge

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} (2x + 1 + \varepsilon)$$

Ora effettuiamo il passaggio al limite, facendo tendere ε a zero; risulta immediatamente

$$f'(x) = 2x + 1 + 0 = 2x + 1$$

l'espressione della derivata.

L'approccio concettuale non è molto diverso, ma cambia le cose dalla notte al giorno.

Appendice D

Cantor fa la conta dei numeri razionali

Per dimostrare che i numeri razionali sono tanti quanti i numeri naturali, a Cantor non serviva che un'ingegnosa disposizione a sedere. Trovata questa, fu subito a capo del problema.

Ricordiamo che i razionali sono quell'insieme di numeri esprimibili tramite il rapporto fra interi *a*/*b* (si capisce con *b* diverso da zero), e cominciamo dai razionali positivi.

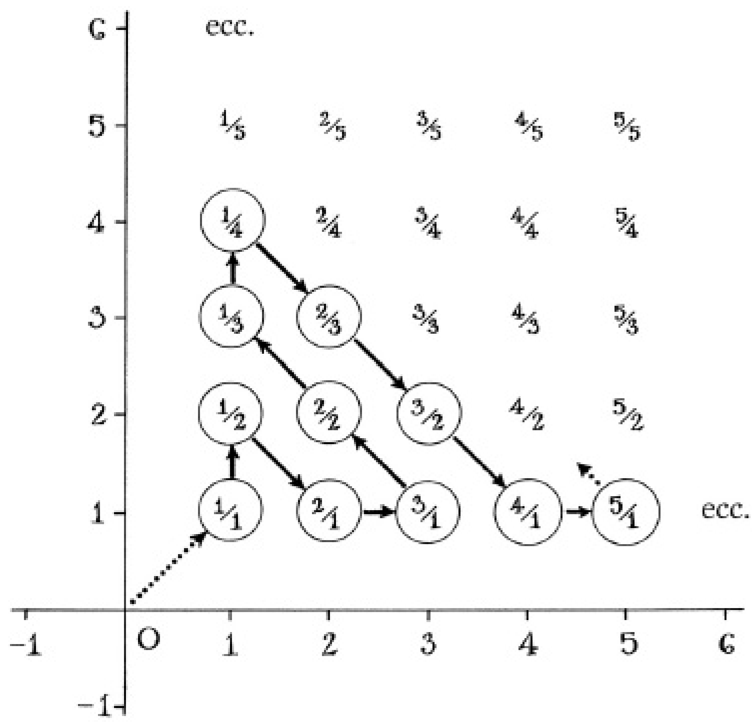


Figura A.1
Conteggio dei numeri razionali.

Immaginiamo una griglia di numeri individuata da due rette perpendicolari graduate che si incrociano nel punto zero, come in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Poniamo zero nell’origine e associamo ogni punto del reticolo al numero razionale *x*/*y*, dove *x* è l’ascissa del punto e *y* la sua ordinata; siccome le due semirette del primo quadrante (in alto a destra, fig. A.1) si estendono all’infinito, è certo che ogni combinazione di interi positivi (e quindi ogni numero razionale maggiore o uguale a zero) ha la propria collocazione nella griglia.

Stabiliamo adesso la disposizione dei posti a sedere per i razionali positivi. Il primo posto va allo 0 della nostra griglia; passando poi a 1/1 assegnamogli il posto n. 2; spostandoci su 1/2 gli daremo il n. 3; arrivati a 2/1 (che è come dire 2) facciamolo accomodare al n. 4, e via serpeggiando: a ogni numero incontrato passiamo alla sedia successiva. Alla fine otteniamo la seguente ripartizione dei posti:

Posto	Numero razionale positivo
1	0
2	1
3	1/2
4	2
5	3
6	1
7	1/3
8	1/4
9	2/3
ecc.	ecc.

Alla fin fine tutti i numeri saranno sistemati a sedere, con alcuni che si troveranno assegnato più di un posto (tutti quelli che risultano da diverse coppie *x*, *y* il cui rapporto sia lo stesso, per esempio 2/1, 4/2 e così via); è facile, tuttavia, eliminare i duplicati: basta saltarli via via che li si incontra nel redigere il precedente prospetto. Nella fase successiva raddoppieremo la lista, intercalando ai razionali positivi (più 0) quelli negativi, ottenendo:

Posto	Numero razionale
1	0
2	1
3	− 1
4	1/2
5	− 1/2
6	2
7	− 2
8	3
9	− 3
ecc.	ecc.

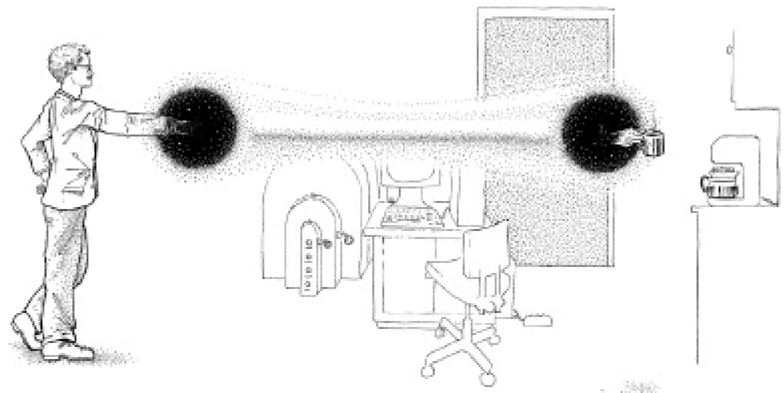
A questo punto tutti i numeri razionali – positivi, negativi e zero – hanno un posto assegnato. Siccome nessuno di loro è rimasto in piedi e tutti i posti sono occupati, si deduce che i razionali hanno la stessa numerosità degli interi relativi.

Appendice E

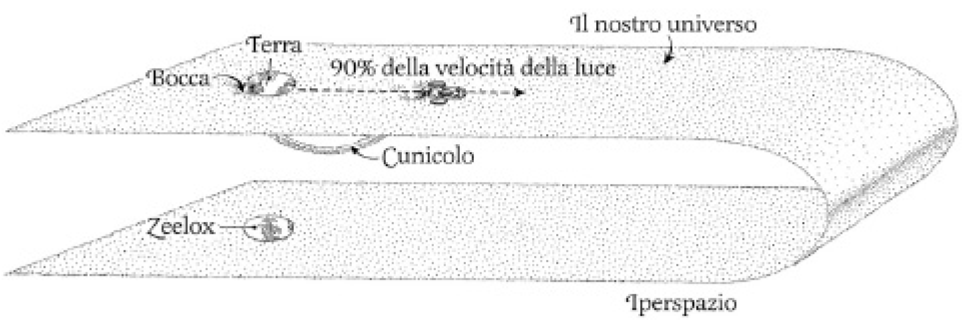
Fatevi la macchina del tempo a cunicolo

Non è difficile, basta seguire queste semplici quattro istruzioni.

1) Costruite un piccolo cunicolo, che avrà le estremità di entrata/uscita («bocche») allo stesso punto del tempo:



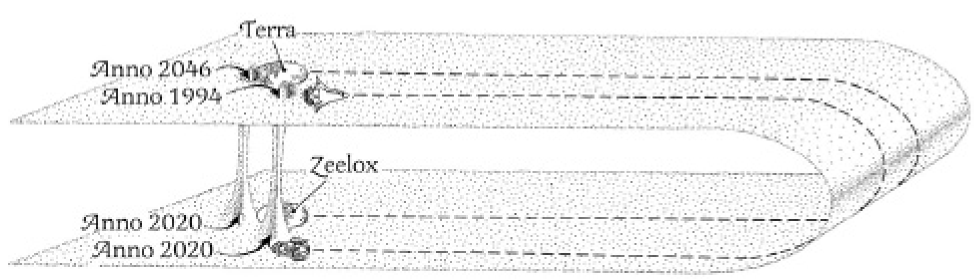
2) Unite un'estremità del cunicolo a qualche cosa di molto pesante, e l'altra a un'astronave, per esempio in partenza nell'anno 2000, che viaggi al 90% della velocità della luce. Un anno del veicolo spaziale equivale a quasi 2,3 anni terrestri, e gli orologi da una parte e dall'altra del cunicolo marciano con corrispondente diversa cadenza.



3) Mettetevi in attesa. Dopo 46 anni di tempo terrestre l'estremità viaggiante del cunicolo arriva su un pianeta

amico, dove, per l'equipaggio dell'astronave, l'anno è il 2020 (46/2,3 = 20). Attraversando il cunicolo è ora possibile andare dalla Terra dell'anno 2046 a Zeelox dell'anno 2020 e viceversa.

4) Se, dando prova di particolare accortezza, aveste pianificato per tempo la missione, avreste inviato un messaggio a Zeelox molto prima della partenza dell'astronave, prendendo accordi perché, partendo di là nel 1974 (tempo di Zeelox), un'altra astronave seguisse, con cunicolo a rimorchio, il percorso inverso, arrivando sulla Terra nel 1994 (tempo terrestre, corrispondente al 2020 di Zeelox). Ora dal medesimo punto dello spazio-tempo (Zeelox, 2020) si dipartono due cunicoli, che arrivano ai punti (Terra, 2046) e (Terra, 1994); partendo dalla Terra del 2046 e percorrendoli entrambi arrivereste alla Terra del 1994, avendo viaggiato indietro nel tempo più di mezzo secolo.



Bibliografia

Aczel, Amir

1996 *Fermat's Last Theorem*, Delta, New York [trad. it. *L'enigma di Fermat*, Il Saggiatore, Milano 1998].

Agostino, Aurelio, santo

2001 *Le Confessioni*, trad. it. di Giuliano Vigni, Edizioni San Paolo, Cinisello Balsamo.

Anselmo, Joseph

1998 *Controller Error Lost Soho*, in «Aviation Week & Space Technology», 7 luglio, 28.

Aristofane

1964 *The Wasps / The Poet and the Women / The Frogs*, traduzione di David Barret, Penguin Books, London.

1991 *Tutte le commedie*, Newton Compton, Milano.

Aristotele

2001 *Metafisica*, trad. it. di Antonio Russo, ivi, vol. VI.

2002 *Fisica*, trad. it. di Antonio Russo in *Opere*, Laterza, Roma-Bari, vol. III.

Artin, Emil

1947 *Modern Higher Algebra*, New York University, New York (note della conferenza).

Beckmann, Petr

1971 *A History of Pi*, St. Martin's Press, New York.

Beda

1955 *Ecclesiastical History of the English People*, trad. ingl. di Leo Sherley-Price, Penguin Books, London.

Bell, Eric Temple

1940 *The Development of Mathematics*, Dover Publications, New York.

Berkovits, Nathan

An Introduction to Superstring Theory and Its Duality Symmetries, in «Los Alamos National Labs Archive», hep-th/9707242.

Blay, Michel

1993 *Les raisons de l'infini: du monde clos à l'univers mathématique*, Gallimard, Paris [trad. ingl. di M. B. De Bevoise, *Reasoning with the Infinite*, University of Chicago Press, Chicago].

Boezio, Anicio Manlio Torquato Severino

1994 *La consolazione della filosofia*, trad. it. di Claudio Moreschini, Utet, Torino.

Book of the Dead, trad. ingl. di R. O. Faulkner, British Museum Publications, London 1972.

Boyer, Carl B.

1968 *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, New York [trad. it. *Storia della matematica*, Mondadori, Milano 1990].

Bradford, Ernle

1974 *The Sword and the Scimitar*, G. P. Putnam's Sons, Milano.

Bressoud, David

1989 *Factorization and Primality Testing*, Springer-Verlag, New York.

Browne, Malcolm

1997 *A Bet on a Cosmic Scale, and a Concession, Sort of*, in «New York Times», 12 febbraio, Al.

Bunt, Lucas, Jones, Phillip e Bedient, Jack

1976 *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover Publications, New York [trad. it. *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna 1983].

Cantor, Georg

1955 *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trad. ingl. di Philip E. B. Jourdain, Dover Publications, New York.

Carmo, Manfredo Perdigao, Do

1976 *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

Cartesio, Renato

2001 *Discorso sul metodo*, trad. it. di Maria Garin, Laterza, Roma-Bari.

2001 *Meditazioni metafisiche*, a cura di Sergio Landucci, Laterza, Roma-Bari.

Churchill, Ruel e Brown, James

1984 *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, New York.

Cipra, Barry

1997 *In Mao's China, Politically Correct Math*, in «Science», 28 febbraio, 1264.

Closs, Michael

1986 (a cura di), *Native American Mathematics*, University of Texas Press, Austin, Tex.

Conway, John H. e Guy, Richard

1996 *The Book of Numbers*, Copernicus, New York [trad. it. *Il libro dei numeri*, Hoepli, Milano 1999].

Copleston, Frederick

1994 *A History of Philosophy*, Image Books, New York [trad. it. *Storia della filosofia*, Paideia, Brescia 1966 sgg.].

Il Corano, a cura di Alessandro Bausani, Biblioteca universale Rizzoli, Milano 2001.

Dantzig, Tobias

1930 *Number: The Language of Science*, The Free Press, New York [trad. it. *Il numero, linguaggio della scienza*, La Nuova Italia, Firenze 1965].

David, Florence Nightingale

1962 *Games, Gods and Gambling*, Dover Publications, New York, 1998.

Davies, Paul

1998 *Paradox Lost*, in «New Scientist», 21 marzo, 26.

Dawson, John

1997 *Logical Dilemmas*, A. K. Peters, Wellesley, Mass. [trad. it. *Dilemmi logici: la vita e l'opera di Kurt Gödel*, Bollati Boringhieri, Torino 2001].

Diodoro Siculo

1986 *Biblioteca storica*, trad. it. di Gian Franco Gianotti, Sellerio, Palermo.

Diogene Laerzio

2002 *Vite dei filosofi*, 2 voll., a cura di Marcello Gigante, Laterza, Roma-Bari.

Dubrovin, Boris A., Fomenko, Anatolij T. e Novikov, Sergej P.

1984 *Modern Geometry-Method and Applications*, Springer-Verlag, New York [trad. it. *Geometria contemporanea: metodi e applicazioni*, Editori Riuniti, Roma s.d.].

Duhem, Pierre

1985 *Medieval Cosmology*, trad. ingl. di Roger Ariew, The University of Chicago Press, Chicago.

Dym, Harry e McKean, H. P.

1972 *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, San Diego.

Ebola: Ancient History of "New" Disease?, in «Science», 14 giugno 1996, 1591.

Einstein, Albert

1961 *Relativity*, Crown Publishers, New York [trad. it. *La relatività (esposizione divulgativa e altri saggi*), Newton Compton, Milano 1970].

Ekeland, Ivar

1991 *The Broken Dice*, trad. ingl. di Carol Volk, University of Chicago Press, Chicago.

The Epic of Gilgamesh, trad. ingl. di N. K. Sanders, Penguin Books, London 1960.

Erodoto

1996 *Le storie*, trad. it. di Aristide Colonna e Fiorenza Bevilacqua, Utet, Torino.

Esiodo

1999 *Teogonia*, a cura di Graziano Arrighetti, Biblioteca universale Rizzoli, Milano.

Feller, William

1950 *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley and Sons, New York.

Feynman, Richard

1985 *QED*, Princeton University Press, Princeton, N.J. [trad. it.

Qed: la strana teoria della luce e della materia, Mondadori-De Agostini 1996].

Feynman, Richard e altri

1963 *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. [trad. it. *La fisica di Feynman*, Masson Italia, Milano s.d.].

Folland, Gerald

1984 *Real Analysis*, John Wiley and Sons, New York.

Fulton, William

1969 *Algebraic Curves*, Addison-Wesley, Redwood City, Calif.

Fritzsch, Harald

1983 *Quarks*, Basic Books, New York [trad. it. *Quark: i mattoni del mondo*, Boringhieri, Torino 1983].

Garber, Daniel

1992 *Descartes' Metaphisical Physics*, University of Chicago Press, Chicago.

Gaukroger, Stephen

1995 *Descartes: An Intellectual Biography*, Clarendon Press, Oxford.

Gerdes, Paulus

1983 *Marks Demistifies Calcolus*, traduzione di Beatrice Lumpkin, MEP Publications, Minneapolis.

Giamblico

1984 *La vita pitagorica*, trad. it. di Luciano Montoneri, Laterza, Roma-Bari.

Gödel, Kurt

1999 *Proposizioni fondamentalmente indecidibili dei «Principia mathematica e di sistemi affini»* (1931), trad. it. in Id., *Opere*, vol. I: *1929-1936*.

Gould, Stephen Jay

1997 *Questioning the Millennium*, Harmony Books, New York [trad. it. *Il millennio che non c'è*, Il Saggiatore, Milano 1999].

Graves, Robert

1955 *The Greek Myths*, voll. I-II, Penguin Books, London [trad. it. *I miti greci*, Longanesi, Milano 1996].

Graves, Robert e Patai, Raphael

1963 *Hebrew Myths: The Book of Genesis*, Greenwich House, New York [trad. it. *I miti ebraici e critica alla Genesi*, Longanesi, Milano 1969].

Grun, Bernard

1979 *The Timetable of History*, Simon and Schuster, New York.

Guthrie, Kenneth Sylvan

1987 *The Pythagorean Sourcebook and Library*, Phanes Press, Grand Rapids, Mich.

Hawking, Stephen W.

1988 *A Brief History of Time*, Bantam Books, New York [trad. it. *Dal big bang ai buchi neri*, Rizzoli, Milano 2000].

Hawking, Stephen W. e Turok, Neil

Open Inflation Without False Vacua, in «Los Alamos National Labs Archive», hep-th/9802030.

Hayashi, Alden

1988 *Rough Sailing for Smart Ships*, in «Scientific American», novembre, p. 46.

Heath, Thomas Little

1981 *A History of Greek Mathematics*, voll. I-II, Dover Publications, New York 1921.

Heisenberg, Werner

1958 *Physics and Philosophy: The Revolution in Modern Science*, Harper and Row, New York [trad. it. *Fisica e filosofia*, Il Saggiatore, Milano 2000].

Hellemans, Alexander e Bunch, Bryan

1988 *The Timetables of Science*, Simon and Shuster, New York.

Hoffman, Paul

1987 *The Man Who Loved Only Numbers*, in «The Atlantic Monthly», novembre, p. 60.

1998 *The Man Who Loved Only Numbers*, Hyperion, New York [trad. it. *L'uomo che amava solo i numeri: la storia di Paul Erdos, un genio alla ricerca della verità matematica*, Mondadori, Milano 2000].

Hooper, Alfred

1948 *Makers of Mathematics*, Random House, New York.

Horgan, John

1996 *The End of Science*, Addison Wesley, Reading, Mass. [trad. it. *La fine della scienza*, Adelphi, Milano 1998].

Hungerford, Thomas

1974 *Algebra*, Springer-Verlag, New York.

Jacobson, Nathan

1985 *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, New York.

Jammer, Max

1993 *Concept of Space*, Dover Publication, New York [trad. it. *Storia del concetto di spazio*, Feltrinelli, Milano 1966].

Johnson, George

1998 *Phisical Laws Collide in a Black Hole Bet*, in «New York Times», 7 aprile, CI.

1998 *Useful Invention or Absolute Truth*, in «New York Times», 10 febbraio, CI.

Kak, Subhash

Early Theories on the Distance to the Sun, in «Los Alamos National Labs Archive», physics/9804020.

The Speed of Light and Puranic Cosmology, in «Los Alamos National Labs Archive», physics/9804021.

Katz, Victor

1993 *A History of Mathematics*, HarperCollins College Publishers, New York.

Kelly, Douglas

1994 *Introduction to Probability*, Macmillan Publishing Company, New York. Kestenbaum, David

1998 *Practical Tests for an «Untestable» Theory of Everything?*, in «Science», 7 agosto, 758.

Khayym, Omar

1992 *Rubaiyat of Omar Khayyám*, traduzione di Edward Fitzgerald, Branden Publishing, Boston.

Knopp, Konrad

1952 *Elements of the Theory of Functions*, trad. ingl. di Frederick Bagemihl, Dover Publications, New York.

1975 *Theory of Functions* (1947), trad. ingl. di Frederick

Bagemihl, Dover Publications, New York.

Koestler, Arthur

1960 *The Watershed*, Anchor Books, New York.

Lang, Serge

1987 *Undergraduate Algebra*, Springer-Verlag, New York.

1993 *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York.

Leibniz, Gottfried Wilhelm, von

1986 *Monadologia e Discorso di metafisica*, a cura di Vittorio Mathieu, edizione rivista da Massimo Mugnai, Laterza, Roma-Bari.

Lo, K. Y. e altri

Intrinsic Size of SGR A: 72 Schwarzschild Radii*, in «Los Alamos National Labs Archive», astro-ph/9809222.

Maimonides, Moses

1956 *The Guide for the Perplexed*, trad. ingl. di M. Friedlander, Dover Publications, New York.

Manchester, William

1993 *A World Lit Only By Fire*, Little, Brown and Company, Boston.

Maor, Eli

1987 *To Infinity and Beyond*, Princeton University Press, Princeton, N.J. [trad. it. *All'infinito e oltre: storia culturale del concetto di infinito*, Mursia, Milano 1993].

1994 *e: The Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Marius, Richard

1999 *Martin Luther*, Belknap Press, Cambridge, Mass.

Matt, Daniel C.

1996 *The Essential Kabbalah*, Harper San Francisco, San Francisco [trad. it. *L'essenza della Cabala*, Newton Compton, Roma 1999].

Morris, Richard

1997 *Achilles in the Quantum Universe*, Henry Holt and Company, New York.

Murray, Oswyn

1980 *Early Greece*, Stanford University Press, Stanford, Calif.

[trad. it. *La Grecia delle origini*, il Mulino, Bologna 1996].

Nagel, Ernest e Newman, James R.

1958 *Gödel's Proof*, New York University Press, New York [trad. it. *La prova di Gödel*, 2ª edizione accresciuta, Bollati Boringhieri, Torino 1992].

Neugebauer, O.

1969 *The Exact Science in Antiquity*, Dover Publications, New York.

Newman, James R.

1956 *The World of Mathematics*, voll. I-IV, Simon and Schuster, New York.

Oldach, David e altri

1764 *A Misterious Death*, in «The New England Journal of Medicine», 338, 11 giugno 1998.

Ovidio Nasone, Publio

1999-2000 *Opere*, edizione con testo a fronte a cura di Paolo Fedeli, trad. it. di Nicola Gardini e Gabriella Leto, 2 voll., Einaudi, Torino.

Oxtoby, David W. e Nachtrieb, Norman H.

1986 *Principles of Modern Chemistry*, Saunders College Publishing, Philadelphia [trad. it. *Chimica moderna*, Edises, Napoli 2001].

Pais, Abraham

1982 *Subtle Is the Lord*, Oxford University Press, Oxford [trad. it. *Sottile è il Signore...: la scienza e la vita di Albert Einstein*, Bollati Boringhieri, Torino 1991].

Pappas, Theoni

1997 *Mathematical Scandals*, Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, Calif.

Pascal, Blaise

2000 *Pensieri*, introduzione, a cura di Adriano Bausola, trad. it. di Adriano Bausola e Remo Tapella, Bompiani, Milano.

Pausania

1982-2000 *Guida della Grecia*, 7 voll., Fondazione Lorenzo Valla, Roma.

Perricone, Mike

1998 *The Universe Lives On*, in «FermiNews», 19 giugno, 5.

Pickover, Clifford

1997 *The Loom of God*, Plenum Press, New York.

Platone

1998 *Parmenide*, trad. it. di Attilio Zadro, in *Opere complete*, vol. II, Laterza, Roma-Bari.

Plaut, Gunther

1981 *The Torah: A Modern Commentary*, The Union of American Hebrew Congregations, New York.

Plutarco

Vite parallele, Biblioteca universale Rizzoli, Milano.

Plutarch on Sparta, trad. ingl. di Richard J. A. Talbert, Penguin Books, London 1988.

The Poetic Edda, trad. ingl. di Lee Hollander, University of Texas Press, Austin, Tex 1962.

Polchinski, Joseph

1996 *String Duality*, in «Reviews of Modern Physics», ottobre.

Pullman, Bernard

1996 (a cura di), *The Emergence of Complexity in Mathematics, Physics, Chemistry, and Biology*, Pontificia Academia Scientiarum, Città del Vaticano.

Randel, Don

1986 (a cura di), *The New Harvard Dictionary of Music*, Belknap Press, Cambridge, Mass.

Random Samples, in «Science», 23 gennaio 1998, 487.

Rensberger, Boyce

1996 *2001: A Calendar Odissey*, in «Washington Post», 11 dicembre, H01.

Resnikoff, Howard L. e Wells, R. O.

1973 *Mathematics in Civilisation*, Dover Publications, New York.

The Rig Vega, trad. ingl. di Wendy O’Flaherty, Penguin Books, London 1981.

Rigatelli, Laura Toti

1996 *Evariste Galois*, trad. di John Denton, Birkhauser Verlag, Basel.

Rothstein, Edward

1995 *Emblems of Mind*, Times Books, New York.

Rotman, Brian

1987 *Signifying Nothing*, Stanford University Press, Stanford, Calif. [trad. it. *Semiotica dello zero*, Spirali, Milano 1988].

Royden, H. L.

1988 *Real Analysis*, Macmillan, New York.

Rudin, Walter

1964 *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York [trad. it. *Principi di analisi matematica*, McGraw-Hill libri Italia, Milano 1993].

1987 *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York [trad. it. *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, Torino 1978].

Russell, Bertrand

1985 *The Philosophy of Logical Atomism*, Open Court Publishing, Chicago [trad. it. *La filosofia dell'atomismo logico*, in Id., *Logica e conoscenza*, Longanesi, Milano 1961].

1992 *The Philosophy of Leibniz*, Routledge, London [trad. it. *La filosofia di Leibniz*, Newton Compton, Milano 1972].

Schechter, Bruce

1988 *My Brain Is Open*, Simon and Schuster, New York.

Senofonte

1978 *Elleniche*, a cura di Giovanna Daverio Rocchi, Rusconi, Milano.

Sholem, Gershom

1974 *Kabbalah*, Meridian, New York.

Seife, Charles

1994 *Mathemagician*, in «The Sciences», maggio/giugno, 12.

1995 *Music and mathematics and their surprisingly harmonious relationship*, in «The Philadelphia Inquirer», 21 maggio, H3.

1997 *The Subtle Pull of Emptiness*, in «Science», 10 gennaio, 158.

1997 *Magic Roundabout*, in «New Scientist», 8 novembre, 5.

1998 *Ever Outword*, in «New Scientist», 3 gennaio, 19.

1998 *Final Summer*, in «New Scientist», 25 luglio, 40.

1998 *No Way Out*, in «New Scientist», 5 settembre, 20.

1998 *Running on Empty*, in «New Scientist», 25 aprile, 36.

1998 *Too Damned Hot*, in «New Scientist», 1° agosto, 21.

1998 *Unlucky for Some*, in «New Scientist», 4 luglio, 23.

Singh, Simon

1997 *Fermat's Enigma*, Walker and Company, New York.

Slakey, Francis

1997 *Something out of Nothing*, in «New Scientist», 23 agosto, 45.

Smith, David Eugene

1959 *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications, New York.

Sturluson, Snorri

1954 *The Prose Edda*, trad. ingl. di John I. Young, University of California Press, Berkeley, Calif.

Swetz, Frank

1994 *From Five Fingers to Infinity*, Open Court Publishing, Chicago.

Teresi, Dick

1997 *Zero*, in «The Atlantic Monthly», luglio, 88.

Thompson, Damian

1996 *The End of Time*, University Press of New England, Hanover, N. H.

Thorne, Kip

1994 *Black Holes and Time Warps*, W.W. Norton, New York.

Thorpe, John A.

1979 *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York.

Tommaso d'Aquino, santo

1989 *Opuscoli filosofici: l'ente e l'essenza, l'unità dell'intelletto, le sostanze separate*, a cura di Abelardo Lobato, Città Nuova.

Tucidide

1986 *La guerra del Peloponneso*, a cura di Luciano Canfora, Laterza, Roma-Bari.

Turok, Neil e Hawking, Stephen W.

in «Los Alamos National Labs Archive», hep-th/9803156 v4.

Urmson, James O. e Ree, Jonathan

1996 (a cura di), *The Concise Encyclopedia of Western Philosophy and Philosophers*, Routledge, London.

Upanisad vediche, a cura di Carlo della Casa, Tea, Milano 2000.

Valenkin, Naum Yakovlevich

1995 *In Search of Infinity*, trad. ingl. di Abe Shenitzer, Birkhauser, Boston.

Vilenkin, Alexander

The Quantum Cosmology Debate, in «Los Alamos National Labs Archive», gr-qc/9812027.

Voltaire, François-Marie Arouet, *detto*

1999 *Candido, o L'ottimismo*, a cura di Stella Gargantini, Feltrinelli, Milano.

Wang, Hao

1987 *Reflection on Kurt Gödel*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

White, Michael

1997 *The Last Sorcerer*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Siti Web

Papyrus of Ani; Egyptian Book of the Dead, traduzione di E. A. Wallis Budge.
http://www.sas.upenn.edu/African_Studies/Books/Papyrus_Ani.html

Clemente di Alessandria, *The Stromata*.
http://www.webcom.com/-gnosis/library/strom4.htm

The Life of Hypatia.
http://www.cosmopolis.com/alexandria/

Frequently Asked Question in Mathematics.

http://www.cs.unb.ca/-alopez-o/math-faq/

Oldenwald, Sten, *Beyond the Big Bang*.
http://www.itss.raytheon.com/cafe/cosm/beyondbb.html

Oldenwald, Sten, *The Decay of the False Vacuum*.
http://itss.raytheon.com/cafe/cosm/decary.html

Perseus Project.
http://hydra.perseus.tufts.edu/

Slabodkin, Gregory, *Software glitches leave Navy Smart Ship dead in the water*, in «Government Computer News», 13 luglio 1998.
http://www.gen.com/gen/1998/july13/cov2.htm

The MacTutor History of Mathematics archive.
http://history.math.csusb.edu/

Weisstein, Eric, *Eric’s treasure Trove of Astronomy*.
http://www.astronomy.net/atroguide/general/Eric’s_Treasure_Trove_of_Astronomy/

Indice analitico

I Grandi Pensatori

Charles Seife

La scoperta dell'universo

I misteri del cosmo alla luce della teoria dell'innovazione

Con la sua capacità di rendere accessibile anche la scienza più all'avanguardia, Charles Seife ci spiega in che modo la teoria dell'informazione è diventata la scienza cruciale dei nostri tempi. Nata con la decifrazione del codice Enigma nella Seconda Guerra mondiale e cresciuta con la rivoluzione dei computer, oggi la teoria dell'informazione è all'avanguardia della fisica teorica. Non solo. Le leggi dell'informazione stanno incominciando a rivelare le risposte ad alcune delle più importanti domande della scienza e stanno dando ai fisici un modo per comprendere i misteri più oscuri sui quali l'umanità abbia mai riflettuto.

Bollati Boringhieri

I Grandi Pensatori

Henri Poincaré

Geometria e caso

Scritti di matematica e fisica

Visto soprattutto come «l'ultimo matematico ottocentesco» o come paladino del convenzionalismo, Poincaré fu in realtà il maggiore esponente di quella scuola fisico-matematica francese le cui intuizioni penetrarono profondamente nel pensiero scientifico successivo, ma che fu travolta dall'incredibile sviluppo della fisica teorica, della relatività e della meccanica quantistica. Della sua sterminata produzione scientifica, Claudio Bartocci ha scelto i momenti più significativi, corredandoli di un ampio saggio introduttivo; ne emerge una figura di scienziato dalle intuizioni straordinarie, il cui ruolo fu essenziale nello sviluppo delle grandi teorie fisiche del Novecento.

Bollati Boringhieri

I Grandi Pensatori

Albert Einstein e Leopold Infeld

L'evoluzione della fisica

Pubblicato in inglese alla vigilia della Seconda guerra mondiale e subito proposto in traduzione, *L'evoluzione della fisica* dovette aspettare la fine del conflitto per vedere la sua pubblicazione in Italia. Da allora (1948) questo testo non ha più smesso di rappresentare un punto di riferimento obbligato per il concetto stesso di divulgazione scientifica e per la fisica in particolare. Scritto dai protagonisti assoluti della rivoluzione della fisica relativistica e quantistica, ma destinato a un pubblico di non specialisti, il libro che avete tra le mani è il testo fondativo della moderna divulgazione delle idee, la pietra di paragone di ogni altro libro di fisica, che permette di intuire la straordinaria importanza e il valore rivoluzionario della svolta della fisica del Novecento.

Bollati Boringhieri

I Grandi Pensatori

Albert Einstein

Relatività. Esposizione divulgativa

Nello stato magmatico della fisica novecentesca Albert Einstein è il nucleo solido, la roccia stabilmente configurata che sta al centro. Di qui la sua posizione di «classico», come testimonia al più alto livello questa esposizione della teoria della relatività. Una teoria che ha segnato un vero mutamento di paradigma, non solo in campo scientifico: la potenza teorica dell'equivalenza relativistica massa-energia ha trovato, come sappiamo, la sua tragica verifica a Hiroshima, nel terrificante potenziale distruttivo della bomba atomica.

Bollati Boringhieri

I Grandi Pensatori

Abraham Pais

Einstein

«Sottile è il Signore, ma non malevolo». Con questa frase, Einstein commentava nel 1921 alcuni dati (poi rivelatisi errati) che avrebbero potuto mettere in crisi la sua teoria della relatività. Guidato da un marcato senso estetico, oltre che da una logica stringente, il pensiero einsteiniano si opponeva naturalmente a ogni complicazione non necessaria, sempre teso a ricercare la più semplice ed elegante delle spiegazioni al più complesso dei problemi. Dotato di una tenacia fuori dal comune, Einstein visse da solitario nella vita come nella scienza, spesso contro corrente, giungendo così ad alcune delle più eclatanti scoperte del XX secolo. Questa biografia, scritta da un suo allievo e amico, resta a tutt'oggi insostituibile e insuperata per chi voglia ripercorrere il cammino scientifico e umano del grande fisico.

Bollati Boringhieri

I Grandi Pensatori

Niels Bohr

I quanti e la vita

Unità della natura. Unità della conoscenza

Quando Albert Einstein, in uno dei più famosi aforismi della storia, sostenne che Dio non poteva giocare a dadi, di fatto si riferiva a Niels Bohr. Persino Einstein, tuttavia, non poteva non riconoscere l'assoluta grandezza del fisico danese. A Bohr si devono infatti alcune delle più importanti intuizioni della fisica di ogni tempo, a partire dalla struttura dell'atomo e terminando col «principio di complementarità», che ha modificato radicalmente il concetto stesso di legge fisica.

Uomo notoriamente involuto nei suoi lavori tecnici, Bohr si avventurò in alcune occasioni al di fuori del proprio territorio con interventi di ampio respiro, divulgativi, persino visionari. Si tratta dei testi raccolti in questo prezioso volume: una finestra aperta su una delle menti più raffinate di ogni tempo.

Bollati Boringhieri

I Grandi Pensatori

Freeman Dyson

Origini della vita

Come ha avuto origine la vita sulla Terra? È venuta prima la riproduzione cellulare per replicazione o il metabolismo? A queste domande fondamentali risponde Freeman Dyson, spirito inquieto, eccezionalmente colto, e lontanissimo dallo stereotipo dello scienziato chiuso nella propria torre d'avorio. Benché di formazione sia un fisico teorico, e fra i più brillanti, in questo saggio Dyson esamina e discute le principali teorie sull'origine della vita, spaziando tra i lavori di fisici, chimici, matematici e biologi, riuscendo a compendiare con estrema naturalezza Schrödinger e von Neumann, Margulis e Kimura. Si arriva così a elaborare un vero e proprio modello matematico, basato sulla teoria della «duplice origine» della vita, con il quale osservare il comportamento delle popolazioni molecolari nel momento cruciale della transizione, svelando paesaggi estremi e interessanti simmetrie nei territori di confine fra ordine e disordine, fra vita e non vita. Un libro avvincente, dalla scrittura cristallina, che non mancherà di affascinare tutti coloro che vogliano esplorare il mistero della vita.

Bollati Boringhieri

[1] Passato nella lingua inglese come «*Tohu-bohu*», con il significato di «grande confusione», ciò che dà ragione del particolare interesse etimologico mostrato dal testo. [*N.d.T.*]

[2] Il termine greco per «ragione» è *λόγος* (*logos*), corrispondente anche a «parola», per cui la versione data è anche più razionale di quella della tradizione. [*N.d.A.*]

[3] Risulta che i più antichi Sumeri fossero inconsapevoli della difficoltà di dividere l'angolo in tre parti eguali. Nell'Epopea di Gilgamesh il narratore afferma che l'eroe era per due terzi divino e per un terzo umano, cosa impossibile quanto tripartire un angolo con riga e compasso… a meno che a dèi e umani non sia dato di seguitare ad accoppiarsi per un tempo infinito. [*N.d.A.*]

[4] La condizione è necessaria ma non sufficiente. Se i termini vanno a zero troppo lentamente, la loro somma non «converge» (a un valore finito). [*N.d.A.*]

[5] L'impossibilità del moto è per esempio argomentata dal paradosso della «Dicotomia» (analogo all'«Achille»), che sostiene come per coprire una qualunque distanza occorra prima percorrerne la metà, e prima ancora la metà della metà, e così via. Dovendosi completare infiniti tratti non nulli, occorrerebbe un tempo parimenti infinito. [*N.d.T.*]

[6] Aristotele, *Fisica*, III, 7. [*N.d.T.*]

[7] Nella *Fisica* (VI, 2 e VI, 9) Aristotele pronuncia una confutazione «di buon senso» dell'«Achille» e della «Dicotomia», affermando che è sempre possibile attraversare in un tempo finito uno spazio finito, rinunciando in partenza ad affrontarne l'aspetto matematico con l'affrettarsi a spostare la discussione sul piano della dialettica. [*N.d.T.*]

[8] La periodizzazione del sistema dei numeri operata da Archimede proseguiva fino al miriade di miriadesimo periodo (10^8 periodi di 10^8 ordini ciascuno); l'intervallo abbracciato dal generico ordine q del generico periodo p può indicarsi in notazione moderna:

$$R^{(p-1)} \times 10^{8 \times (q-1)} \div R^{(p-1)} \times 10^{8 \times q} \tag{1}$$

dove Q è il massimo numero esprimibile dal primo ordine del primo periodo ($Q = 10^8$) e R è il massimo numero esprimibile dall'ultimo (Q-esimo) ordine del primo periodo ($R = 10^{800\,000\,000} = Q^Q$).

Il massimo numero esprimibile dall'intero sistema (ultimo numero del Q-esimo ordine del Q-esimo periodo) vale dunque [ponendo nella (1) $p,q = Q$]:

$$R^{(Q-1)} \times 10^{8 \times Q} = R^{(Q-1)} \times Q^Q = R^{(Q-1)} \times R = R^Q = 10^{80\,000\,000\,000\,000\,000} \tag{2}$$

Ovvero 1 seguito da ottanta milioni di miliardi di zeri! (Tanto grande che difatti meno di mille unità del settimo ordine del primo periodo già bastano a conteggiare i granelli di sabbia che colmano l'Universo considerato dal siracusano). [*N.d.T.*]

9 Una cronologia adottava come anno 1 quello *ab Urbe condita*, l'altra quello dell'ascesa di Diocleziano al trono. Dal punto di vista di un monaco altomedioevale la nascita del Salvatore era un evento ben più importante che non la fondazione di una città già messa a sacco da Goti e Vandali più di una volta, e lo stesso dicasi dell'inizio del regno di un imperatore che aveva manifestato la disdicevole tendenza a mettere il proprio zoo di belve esotiche a dieta di cristiani. [*N.d.A.*]

10 Questo sistema di calendario evita le complicazioni legate all'indivisibilità del periodo di rivoluzione terrestre con quello di rotazione, facendo a meno di riferirsi al primo dei due, e dunque conteggiando unicamente i giorni. L'inizio è posto a mezzogiorno dell'1 gennaio 4713 a. C., e i giorni sono numerati progressivamente da tale data iniziando da 0. La data giuliana modificata è utile per ridurre le cifre normalmente necessarie alla numerazione. [*N.d.T.*]

11 Un programmatore che debba impostare un'azione ripetitiva molto probabilmente predisporrà un conteggio da zero a, per esempio, nove (se i cicli da eseguire sono dieci). Ma se è distratto, potrebbe invece iniziare da uno, realizzando nove cicli soltanto. È verosimile che sia stato un baco di questo genere a compromettere nel 1998 una lotteria in Arizona, nella quale il 9 si rifiutava sistematicamente di venire estratto. «L'uscita del numero non è stata programmata », dovette ammettere un'imbarazzatissima portavoce. [*N.d.A.*]

12 Sant'Agostino, *Confessioni*, XII, 6. [*N.d.T.*]

13 Garry Kasparov, ritenuto il maggiore scacchista di tutti i tempi, si impegnò ufficialmente per la prima volta contro un computer appositamente programmato – Deep Thought di IBM – nel 1994, riportando un'agevole vittoria. Un nuovo incontro (di sei partite) fu tenuto a Philadelphia nel febbraio 1996, tra il campione mondiale e un altro sistema di calcolo IBM, un processore RS/6000 a elevato parallelismo, chiamato questa volta Deep Blue; e nuovamente il risultato fu favorevole all'umano, che dovette impegnarsi maggiormente per la vittoria: 4 a 2. La rivincita, tenuta a New York nel maggio 1997, fu però appannaggio della macchina (equipaggiata, per l'occasione, di un *chess accelerator* integrato su singolo chip nonché di sofisticati algoritmi di ricerca e valutazione, e contestata alla fine dal suo avversario come programmata *ad personam*), che si aggiudicò l'incontro con due vittorie e tre patte, mentre IBM versava comunque al soccombente una borsa di $ 400 000. [*N.d.T.*]

14 Brahmagupta, *Brahmasphutasiddhanta* («Lo schiudersi dell'universo»), 628 d. C. [*N.d.T.*]

15 *Ibid*.

16 Bhaskaracharya, *Bijaganita* («Conta dei semi» o «Estrazione di radice»). [*N.d.T.*]

[17] L’appellativo «ובא שולה» (Scilo, Silo, *Shilo, Shiloh*) è stato oggetto – oltre che di profezia messianica – di una messe di differenti versioni e conseguenti interpretazioni, dovuta a più concause: il fatto che, come apparente nome proprio, esso compare solo in questo passo della Scrittura; l’omonimia con la viceversa pluricitata città santa di Scilo (sede dell’Arca dell’Alleanza dalla conquista di Canaan fino almeno alla morte di Samuele); i diversi significati assunti previe minime variazioni ortografiche. Si citano da diverse fonti alcune possibili varianti: «finché gli uomini verranno a Scilo», «finché egli non sia venuto a Scilo», «fino a che non verrà Scilo [il santuario]», «finché non sia venuto Colui che dà riposo», «fino a che non venga la pace», «finché non sia venuto colui al quale esso [il bastone del comando] appartiene», «talché gli venga dato tributo», «fino a che essi non gli diano tributo», «finché non sia venuto Colui al quale tributo è dovuto». *Pro bono pacis* in questa sede è riportata la versione letterale, adottata anche dalla trascrizione classica di re Giacomo. [*N.d.T.*]

[18] Cfr. Michael Drosnin, *The Bible Code*, Simon and Schuster, New York 1997 [trad. it. *Codice Genesi*, Rizzoli, Milano 1997]. L’autore si rifà agli extraterrestri per spiegare i contenuti profetici asseritamente messi in luce (con l’impiego dell’informatica); la sistematica confutazione delle tesi del libro, operata da un gruppo di matematici che con eguale gematrico successo ha preso in esame *Guerra e Pace*, non ne ha diminuito il seguito di pubblico (5 milioni di copie vendute). [*N.d.T.*]

[19] Né l’astrolabio astronomico (Ipparco, II secolo a. C.) né la sua applicazione alla navigazione in occidente (XV secolo) sono comunemente attribuiti agli arabi. Il testo si riferisce forse alla «balestriglia», strumento egualmente destinato alla misura dell’altezza degli astri, ma di fattura affatto diversa, già impiegato da gran tempo dai naviganti arabi e indiani allorché Vasco da Gama lo importò in Europa alla fine del Quattrocento. Ma quest’ultimo non avrebbe potuto essere di grande utilità ai monaci di alcuni secoli prima, i quali comunque – volendo – avrebbero avuto a disposizione l’astrolabio astronomico. [*N.d.T.*]

[20] Le taglie causarono un’infinità di guai. Fino al 1826 lo Scacchiere britannico teneva i conti impiegandone una variante. Charles Dickens raccontò in una conferenza quale fu la conseguenza di quella pratica da gran tempo obsoleta: «Nel 1834 si constatò che se n’era accumulata una grande quantità e sorse il problema: che cosa fare di tutti quei legnetti consunti, tarlati e marci? I righetti erano immagazzinati a Westminster, e chiunque dotato di buon senso avrebbe concluso che la cosa migliore fosse di permettere ai poveri delle vicinanze di portarli via come legna da ardere. Tuttavia quegli oggetti non erano mai serviti a nulla, ed era dunque ufficialmente di rigore che così seguitassero, cosicché fu dato l’ordine di bruciarli al riparo da sguardi indiscreti – e così fu fatto, per avventura, in una stufa della Camera dei Lords. Sovralimentata dell’assurdo combustibile, la stufa appiccò il fuoco alle *boiseries*, le quali lo propagarono a loro volta alla Camera dei Comuni, i due edifici furono ridotti in cenere, si chiamarono architetti per ricostruirli, e siamo ora nel secondo milione di sterline di spesa». [*N.d.A.*]

21 *Nicolai Cusani De Docta Ignorantia*, a cura di Paolo Rotta, Gius. Laterza & Figli, Bari 1913, libro secondo, cap. XI, p. 107. [*N.d.T.*]

22 *Hoc quidem opinamur* (...) *consimiliter de aliis stellarum regionibus, suspicantes inhabitatoribus carere, quasi tot sint partes particulares mundiales unius universi quot sunt stellae, quarum non est numerus. Ibid*., cap. XII, p. 114. [*N.d.T.*]

23 Blaise Pascal, *Traitez de l'Éqvilibre des Liqveurs et de la Pesanteur de la Masse de l'Air*, Guillaume Desprez, Paris 1663 [trad. it. *Trattati sull'equilibrio dei liquidi e sul peso della massa dell'aria*, Boringhieri, Torino 1958, *Conclusioni*, p. 140]. [*N.d.T.*]

24 *Ibid*.

25 *Nuova stereometria delle botti vinarie* (1615). [*N.d.T.*]

26 Nella prima giornata del dialogo *Discorsi e dimostrazioni*, Galileo fa compiere queste affermazioni all'interlocutore Salviati (Galilei, Galileo, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali*. [*N.d.T.*]

27 Un numero molto piccolo, o comunque inferiore all'unità, diviene più piccolo ancora se elevato a una potenza > 1 (per esempio 0,12 = 0,01). Noi diremmo oggi il termine che scompare dalla [5] un «infinitesimo di ordine superiore». [*N.d.T.*]

28 Se il prodotto di due quantità è uguale zero, significa che l'uno o l'altra (o entrambe) devono parimenti essere nulle. (In termini matematici, se è $a \times b = 0$ allora è $a = 0$ oppure $b = 0$). Quindi se $a^2 = a \times a = 0$ deve essere $a = 0$. [*N.d.A.*]

29 La forza applicata vale nei tre casi rispettivamente: $F = mg$ (costante vettorialmente; il testo presuppone il caso di campo gravitazionale uniforme); $F = mg - kx$; $F = mg - k_1x - k_2v$. Le grandezze sono indicate con il simbolismo dei vari esempi già portati. [*N.d.T.*]

30 Con riferimento alla fittizia variabilità nel tempo impiegata per le flussioni, se $y = f(x(t))$, è infatti:$f'(x) = dy/dx = f'(t)dt/x'(t)dt =$ y/x. [*N.d.T.*]

31 *Analisi degli infinitamente piccoli per la comprensione delle linee curve* (1696). [*N.d.T.*]

32 In altre parole, sin x tende a x per $x \to 0$, ovvero nel punto $x = 0$ le due funzioni hanno la stessa tangente e quindi tendono a zero con la stessa rapidità. Conta, dunque, non solo il valore nel punto $x = 0$, ma il comportamento delle funzioni in quell'intorno. [*N.d.T.*]

33 *L'analista, ovvero discorso indirizzato ad un matematico miscredente nel quale si esamina se l'oggetto, i principi e le inferenze della moderna analisi siano più distintamente concepiti o evidentemente dedotti che non i misteri della religione o gli oggetti della fede*. Il brano subito oltre è citato in Tobias Dantzig, *Number: The Language of Science*, The Free Press, New York 1930 [trad. it. *Il numero, linguaggio della scienza*, La Nuova Italia, Firenze 1965, p. 138]. [*N.d.T.*]

34 Si tratta dell’astronomo londinese scopritore dell’orbita delle comete, delle quali una – famosa – porta il suo nome. [*N.d.T.*]

35 La parte della [11] a sinistra di 1 si ricava come quoziente della divisione polinomiale $Q(x) = = 1/(x - 1)$. Sostituendo con $y = 1/x$ si ottiene immediatamente $Q(y) = 1/(y - 1) = (1/(1 - - x)) - 1$, ma siccome $1/(1 - x) = -Q(x)$, risulta $Q(1/x) + 1 + Q(x) = 0$, ovvero che la somma [11] è appunto nulla. Tuttavia $Q(x)$ converge solo per $x > 1$, e specularmente $Q(1/x)$ per $0 \leq x < 1$ (le «condizioni» di cui dice il testo), e dunque la convergenza della [11] è mutuamente esclusa. Impiegare serie non convergenti per ottenere un qualsiasi risultato è pericoloso… [*N.d.T.*]

36 R. Descartes, *La géométrie*, 1637: «*Mais souvent il arrive, que quelques unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d’une quantité*. (Bensì giugne sovente che talune coteste radici siano finte, o men che nulle, in guisa che *x* significhi il difetto d’una quantità). [*N.d.T.*]

37 Data la forma generale $ax + b = 0$ con $a \neq 0$, è sufficiente infatti sottrarre b a entrambi i membri: $\Rightarrow (ax = -b)$ e dividerli per a: $\Rightarrow \left(x = -\frac{b}{a}\right)$. [*N.d.T.*]

38 Come ricorda il testo originale, in USA la formula si studia invece l’ultimo anno di *high school*. [*N.d.T.*]

39 «*Nombre imaginaire*», termine coniato quasi un secolo prima dal matematico Raphaël Bombelli. [*N.d.T.*]

40 La geometria di Poncelet introdusse uno dei più singolari concetti matematici, il principio di «dualità»: così come apprendiamo alle superiori che due punti individuano una retta, accettando l’idea di punto all’infinito due rette – anche parallele – individuano sempre un punto. Punti e rette sono in tal senso «duali», e ogni teorema della geometria euclidea è «dualizzabile» in ambito proiettivo, originando in quel parallelo universo un insieme di teoremi interamente nuovo. [*N.d.A.*]

41 Il numero complesso risulta allora associato a un punto di quel piano (cfr. *supra*: «Lo zero e il vuoto», cap. 4 e fig. 4.4), e ai fini dell’esposizione che segue va visualizzato come un vettore, con applicazione nell’origine e terminato sul punto in questione. [*N.d.T.*]

42 Naturalmente se – come nell’esempio di *i* testé portato – il numero si trovasse in origine «sulla» circonferenza, esso vi rimarrebbe, ruotando senza spiraleggiare. [*N.d.T.*]

43 Il prodotto di due numeri è un numero di modulo uguale al prodotto dei moduli e argomento uguale alla somma degli argomenti; dell’elevazione (a numero reale) si è detto. [*N.d.T.*]

44 È facile vedere, per semplice sostituzione, che la trasformazione cambia 0 in -1, 1 in 0, -1 in ∞ e ∞ in 1, mentre per l’invarianza di i occorre considerare $(i - 1)$ e $(i + 1)$ come vettori (cfr. *supra*, nota 5) di modulo unitario e argomento 135° e 45° rispettivamente, per cui il loro rapporto (cfr. *supra*,

nota 7) è un numero ancora di modulo unitario e di argomento (135 − 45)° = = 90°, vale a dire appunto i. [*N.d.T.*]

[45] Geometricamente, i punti 1 e − 1 rimangono al loro posto (si trovano sull'asse di rotazione), mentre i e $-i$ si scambiano tra loro. Per via algebrica: 1 e − 1 sono ovviamente uguali al proprio inverso; mentre, ponendo nella trasformata $x = i$ e moltiplicando numeratore e denominatore per i, si ha: $1/i = i/i^2 = i/(-1) = -i$ e $1/(-i) = i$. [*N.d.T.*]

[46] Più rigorosamente, si dice insieme infinito quello i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di un suo sottoinsieme proprio. [*N.d.T.*]

[47] Cfr. *supra*, cap. 2. L'allargamento agli interi fa ricomprendere i numeri razionali negativi. [*N.d.T.*]

[48] Nota anche come «Legge di Gay-Lussac», $p \times V = kT$, dove p è la pressione di un gas (ideale), V il volume, T la temperatura (assoluta), k una costante. [*N.d.T.*]

[49] Si tratta del fisico, medico ed egittologo Thomas Young (1773-1829), altrettanto noto per gli studi sull'elasticità e il «modulo» che reca il suo nome. [*N.d.T.*]

[50] La figura riproduce un disegno originale di Thomas Young (Thomas Young, *Phil. Transactions*, 1803). [*N.d.T.*]

[51] Più precisamente, tale semplice relazione ($\mathfrak{R} = \sigma T^4$, ove T è la temperatura assoluta e σ una costante universale) si riferisce alla radianza del corpo nero, ovvero la potenza emessa per unità di superficie da un radiatore ideale in grado di assorbire tutta l'energia incidente, oggetto molto bene approssimato nella realtà da una cavità ove sia praticato un piccolo foro, oppure dal Sole. [*N.d.T.*]

[52] Le previsioni meteorologiche dell'aldilà si compiono applicando la chimica-fisica a passi del Vecchio e Nuovo Testamento. Se «la luce della luna sarà come la luce del sole, e la luce del sole sarà sette volte maggiore, come [sarebbe] la luce di sette giorni [insieme]; nel giorno che il Signore avrà fasciata la rottura del suo popolo» (*Is*, 26, 8), allora il Paradiso riceve dalla Luna tanta energia radiante quanta qui sulla Terra ne riceviamo dal Sole, oltre a sette volte la quantità di sette giorni; in tutto 1 + (7 × 7) = 50 volte. Considerando che all'equilibrio tanto è ricevuto quanto è emesso, e applicando comparativamente con la situazione terreste la legge di Stefan (cfr. *supra*, nota 4), si ha $(T_{Paradiso}/T_{Terra})^4 = 50$, che ponendo mediamente $T_{terra} \approx 27$ °C = 300 °K porge subito $T_{paradiso} \approx 798$ °K = 525 °C. (da *Journal of Applied Optics*, XI, Al4, 1972).

Si sa poi, a riguardo di ogni genia di peccatori, che all'Inferno «la loro parte sarà nello stagno ardente di fuoco e di zolfo, che è la morte seconda» (Ap, 21, 8). Se lo zolfo forma colà uno stagno, significa che si trova allo stato liquido, e dunque la temperatura ambiente deve esservi non superiore al punto di ebollizione della sostanza in parola, che è poco meno di 445 °C.

In conclusione, e per lo sconcerto dei buoni e degli umili, il clima infernale è più temperato di quello paradisiaco. [*N.d.T.*]

[53] La formula è $\Re_\lambda = 2\pi ckT/\lambda^4$, ove $\Re_\lambda$ è la radianza spettrale (cfr. *supra*, nota 4), π, *c, k*, sono note costanti fisiche, *T* è la temperatura assoluta, e λ è la lunghezza d'onda. Il comportamento secondo quest'ultima, di cui dice il testo, è evidente. [*N.d.T.*]

[54] Cosiddetta perché sarebbe presente anche se venisse meno ogni agitazione termica e l'Universo si portasse allo zero assoluto. [*N.d.T.*]

[55] Può essere di aiuto, nel concettualizzare la funzione d'onda Ψ, pensarla come misura della probabilità che l'oggetto si trovi in un dato punto (per l'esattezza, pensare che il suo quadrato costituisca la densità di probabilità di localizzazione dell'oggetto, in modo tale che la probabilità di trovarlo nel volume elementare d*V* sia data da $\Psi^2 dV$). Secondo questa interpretazione, per esempio, un elettrone va visto non come una particella definita, ma come una «nube di probabilità» distribuita nello spazio, la cui intensità varia con il punto a seconda che sia più o meno probabile trovarlo effettivamente lì eseguendo una misura. Appunto a questo mancato determinismo mosse obiezione Einstein con la famosa affermazione «Dio non gioca a dadi», concisa sintesi del rigetto dello stesso criterio operativo della meccanica ondulatoria. Ma, a dispetto del sommo teorico, le leggi quantistiche offrono risultati incredibilmente aderenti alla realtà, mentre la fisica tradizionale non è in grado di spiegare i fenomeni di natura quantistica. [*N.d.A.*]

[56] La formulazione matematica del principio è (nella forma spazio-momento e in una dimensione): $\Delta p_x \Delta x \approx h$, ovvero il prodotto dell'incertezza nella determinazione dell'impulso per l'incertezza della posizione è limitato dalla «costante di Planck», per cui se l'una cresce l'altra cala e viceversa. La costante è numericamente assai piccola, per cui la limitazione non ha conseguenze per oggetti macroscopici. [*N.d.T.*]

[57] Per la precisione (appunto) il principio di Heisenberg non ha a che fare con la velocità della particella, ma con il suo impulso, dato dal prodotto della massa e della velocità (vettoriale, quindi comprendente direzione e senso del moto). In questa sede, tuttavia, impulso, velocità e anche energia sono praticamente intercambiabili. [*N.d.A.*]

[58] Come la quantità di moto e la posizione (cfr. *supra*, nota 8), così energia e tempo sono legati dalla relazione di incertezza di Heisenberg. Quindi deve esistere energia residua nello spazio vuoto, o per essere certi che essa sia nulla occorrerebbe misurarla continuativamente per sempre. Tuttavia l'attuale posizione generale del mondo scientifico è che tale energia sia lungi da essere infinita. [*N.d.T.*]

[59] Un «elettronvolt» [eV] è pari al lavoro compiuto da un elettrone che cade attraverso la differenza di potenziale di 1 Volt. [*N.d.T.*]

[60] Il famoso esperimento, eseguito con lo speciale interferometro inventato da Michelson nel 1881, e ripetuto già prima della data indicata, utilizzò come «stanza» la Terra medesima ed evidenziò l'inesistenza dell'«etere» ipotizzato

fino ad allora come mezzo di propagazione delle onde elettromagnetiche. [*N.d.T.*]

61 Il fenomeno, assai complesso e comunque riferibile a gradi di curvatura da buco nero, è constatabile solo matematicamente, risultando dal comportamento della struttura spaziotemporale all'interno dell'orizzonte degli eventi di un collasso gravitazionale con presenza di rotazione o carica elettrica. [*N.d.T.*]

62 Il principio è applicabile alle particelle («fermioni», a differenza dei «bosoni») descritte dalla statistica di Fermi-Dirac (quali elettroni, protoni, neutroni); nel caso degli elettroni, esso per esempio stabilisce il loro numero massimo in funzione del livello energetico occupato («guscio» orbitale a distanza discretizzata dal nucleo). Al livello minimo (numero quantico principale 1), che è quello di interesse per il caso della materia superdensa del testo, possono trovarsi solo due elettroni, con momento angolare intrinseco (*spin*) opposto. [*N.d.T.*]

63 Il giovanissimo futuro premio Nobel pervenne in realtà a quel risultato durante il viaggio marittimo di trasferimento da Madras all'Inghilterra – ove era stato accettato a Cambridge – nel giugno-luglio 1930. La relativa pubblicazione (in USA) è dell'anno seguente, e la presentazione in forma completa, con riscontri riferiti a una serie di nane bianche esistenti fu fatta da Chandrasekhar alla Royal Astronomical Society nel 1935. [*N.d.T.*]

64 Il meccanismo che si sostituisce alla contropressione di origine termonucleare (cfr. *supra* nel testo) allorché una stella aumenta la propria densità fino a migliaia di volte quella della roccia, e giungendo allo stadio di «nana bianca», non ha origine termica, bensì quantistica. Esso si può interpretare in termini di dualismo onda-particella, considerando che all'elettrone confinato in un volume assai ristretto deve associarsi un'onda di lunghezza molto piccola, non superiore alle dimensioni lineari di quello, quindi una radiazione di frequenza molto elevata ed energetica, corrispondente a una velocità estremamente alta. A tale velocità (oltre metà di *c*) le collisioni elettroniche determinano appunto una enorme pressione in risposta alla sollecitazione esterna, fino a raggiungere un nuovo livello di equilibrio. In tali condizioni la materia e il moto degli elettroni si dicono «(relativisticamente) degeneri». [*N.d.T.*]

65 La superficie delimitante la regione di spazio-tempo dalla quale non è possibile alcuna fuga costituisce parimenti il bordo esterno del buco nero, ed è così chiamata in analogia con l'orizzonte terrestre, oltre il quale non si può spingere lo sguardo. [*N.d.T.*]

66 In realtà, dalle prove indiziarie si è passati alla pratica certezza solamente nel settembre 2001, allorché Chandra, osservatorio orbitante della NASA, ha registrato da quella zona un *flare* di raggi X durato pochi minuti, attribuito al fatale tuffo di materia nell'abisso. Il fenomeno ha consentito di valutare la massa del buco nero in 2,6 milioni di volte quella del Sole, la sua circonferenza come circa pari a quella dell'orbita di rivoluzione della Terra, e la sua distanza in 24 000 anniluce. (Cfr. Richard Stenger, *Milky Way black hole spotted, sized*, in www.CNN.com/Space, 5/9/01.) [*N.d.T.*]

[67] Occorre anche ipotizzare che lo spazio-tempo sia di fatto «sgualcito» in una dimensione spaziale superiore (l'iperspazio) come un foglio di carta appallottolato, in modo tale che i due punti dove si trovano le singolarità (anche molto distanti lungo un percorso normale) possano trovarsi affacciati attraverso l'iperspazio, come del resto mostra la stessa richiamata subito oltre. [*N.d.T.*]

[68] National Aeronautics and Space Administration; è l'ente statunitense preposto all'esplorazione e sfruttamento dello spazio. [*N.d.T.*]

[69] Il modo allegorico di espressione insieme della prima e seconda legge della termodinamica è più propriamente: «Non esiste un pranzo gratis [1ª legge], e restano sempre briciole sotto la tavola [2ª legge]». [*N.d.T.*]

[70] Idealmente basato su una bolla di distorsione relativistica circondante il vascello, in cui lo spazio è contratto a prua e dilatato a poppa. È il sistema superluminale («a curvatura» nella versione italiana) che muove l'Enterprise di *Star Trek*. [*N.d.T.*]

[71] Il progetto avviato nel 1996 dall'ente spaziale per lo studio di sistemi di propulsione non convenzionali avanzati, che indaga su come fare a meno della massa di reazione, come raggiungere la massima velocità fisicamente possibile, e come innovativamente produrre l'energia necessaria (http://www.grc.nasa.gov/www/bpp/). [*N.d.T.*]

[72] L'articolo di Puthoff e Targ, allora ricercatori allo Stanford Research Institute, fu pubblicato dalla prestigiosa rivista scientifica con le molle. (Harold E. Puthoff e Russell Targ, *Remote Perception at Stanford Research Institute*, in «Nature», CCLI, 18 ottobre 1974, p. 559.) [*N.d.T.*]

[73] Fermi National Accelerator Laboratory, situato a Batavia presso Chicago, Illinois. (http://www.fnal.gov). [*N.d.T.*]

[74] TOE (Theory Of Everything) è un apparato teorico – per il momento solo ipotizzato, e così chiamato con o senza ironia – che dovrebbe unificare in una coerente spiegazione le quattro forze, o interazioni, esistenti in natura (gravitazione, elettromagnetismo, la forza nucleare forte responsabile del legame tra nucleoni nei nuclei atomici, l'interazione debole che governa il decadimento radioattivo). La possibilità della sua esistenza è confortata dall'evoluzione storica della fisica moderna, che ha sempre visto l'accorpamento di teorie apparentemente slegate con generalizzazione in una teoria più ampia in grado di dare lo stesso nome a fenomeni diversi (orbite dei pianeti e caduta dei gravi unificati nella gravitazione newtoniana; ottica, elettricità e magnetismo unificati dall'elettromagnetismo di Faraday e Maxwell; energia e massa, gravità e spaziotempo unificati da Einstein). Allo stato, la cosiddetta «teoria elettrodebole» ha di fatto unificato elettromagnetismo e interazione debole, il prossimo passo essendo GUT («Grand Unification Theory»), che ricomprende la forza nucleare forte. L'attuale principale candidata a divenire TOE è la teoria delle superstringhe. [*N.d.T.*]

[75] Negli anni 1947-49 con Sin Itiro Tomonaga, Julian Schwinger e Freeman Dyson. [*N.d.T.*]

[76] Possiamo visualizzare una tale stringa come dei brevissimi fili privi di spessore, ma dotati di lunghezza che, come una corda di violino, vibrano nello spazio-tempo producendo ciò che noi percepiamo come una particella. Una stringa può essere aperta (con due estremità libere) o chiusa (come un elastico ad anello) e può trovarsi in un'infinità di modi vibratori possibili. L'idea è che una qualsiasi particella elementare non sia altro che un particolare stato vibratorio di una stringa la quale, osservata a una certa distanza, si presenta come un corpuscolo puntiforme. Il problema dell'osservazione dipende dall'eccessiva piccolezza di tali stringhe (lunghe circa quanto la lunghezza di Planck, cioè 10^{-33} cm) (da Tronci, C., *L'unificazione delle forze fondamentali*, in http://progetti.webscuola.tin.it/multilab/lecc02/lunifica.htm). [*N.d.T.*]

[77] Oggi si sta tentando di far rientrare la supersimmetria [teoria della ipotetica corrispondenza gemellare bosoni-fermioni] nella teoria delle stringhe in una teoria delle superstringhe che sembra, per ora, promettere grandi cose. In realtà, però, sebbene la teoria originale sia stata formulata da Michael Green e John Schwarz nel 1984, vi sono attualmente centinaia di teorie matematicamente coerenti che spiegano le stringhe in modi leggermente diversi, tuttavia (...) la sperimentazione di queste teorie risulta particolarmente complessa a causa delle altissime energie in gioco e stabilire quale tra le tante teorie sia esatta resta attualmente pressoché impossibile.

Tra le tante candidate si sta facendo strada, da un po' di tempo, una teoria, detta «Teoria M», che prevede stringhe formate da membrane bidimensionali che fluttuerebbero in uno spazio a undici dimensioni: nessuno può, a questo punto, fare distinzione tra fisica e metafisica. (da C. Tronci, *L'unificazione delle forze fondamentali*, in http://progetti.webscuola.tin.it/multilab/lecc02/lunifica.htm). [*N.d.T.*]

[78] Il «Supercollisionatore a superconduttività» doveva essere enorme, per un'energia di collisione di 20TeV (20 milioni di milioni eV). La sua realizzazione fu fermata nel 1993 da una decisione del Congresso in previsione di costi insostenibili. All'epoca, gran parte dell'anello era già stato scavato, a Waxahatchie, in Texas. La rinuncia al progetto ha dato ossigeno al più modesto (si fa per dire) collisionatore europeo del CERN, l'LHP (Large Hadron Collider), il cui allestimento è previsto in due tempi, entro il 2004 (9TeV) e 2008 (14TeV). [*N.d.T.*]

[79] Proprio così, la matematica può essere «bella» o «brutta». Così com'è difficile descrivere che cosa renda un dipinto o un brano musicale esteticamente piacevole, altrettanto vale per la bellezza di un teorema o di una costruzione della fisica. Una «bella» teoria deve essere semplice, compatta e snella; deve comunicare un'idea di completezza e sovente un senso inquietante di simmetria. La teoria di Einstein, e così pure le equazioni di Maxwell, sono particolarmente belle; ma per numerosi matematici una relazione scoperta da Eulero, $e^{i\Pi} + 1 = 0$, costituisce la pietra di paragone dell'armonia matematica, perché è appunto semplicissima e stringata e perché lega tra loro le più importanti costanti dell'analisi in modo del tutto inaspettato. [*N.d.A.*]

[80] È il cosiddetto «Big Crunch», la «grande pigiatura» speculare al Big Bang. [*N.d.T.*]

[81] Si intende a densità costante per effetto dell'assenza di espansione, mentre sarebbe «stazionario» l'universo espansionistico la cui rarefazione è compensata dalla continua creazione di nuova materia. [*N.d.T.*]

[82] Oltre a consentire una soluzione statica delle equazioni di campo di Einstein, la costante cosmologica rende ammissibili anche modelli dinamici dell'Universo, in cui la sua estensione è finita e l'espansione prosegue indefinitamente, o in cui l'estensione è infinita ma l'espansione a un certo punto termina e comincia la contrazione. Einstein dovette in seguito mutare avviso sull'introduzione della costante, senza la quale egli sarebbe stato in grado di anticipare la dimostrazione sperimentale dell'Universo espansionistico dovuta in gran parte alle scoperte di Hubble (cfr. *infra*, nel testo). [*N.d.T.*]

[83] Questo secondo fenomeno si interpreta immediatamente (per semplicità in una sola dimensione) pensando a tre punti *A*, *B*, *C* allineati lungo una bandella elastica. Se *B* e *C* si muovono autonomamente allontanandosi da *A*, possono benissimo farlo per esempio con la medesima velocità indipendente dalla distanza (nel qual caso si modifica la proporzione delle distanze *AB* e *AC*), ma se i punti sono fissati all'elastico ed è l'elastico che viene allungato e li trascina, allora *AB* e *AC* devono mantenere nel tempo la stessa proporzione, via via incrementandosi tanto più quanto più sono grandi. [*N.d.T.*]

[84] La teoria fu avanzata nel 1948 da Hermann Bondi, Thomas Gold e, indipendentemente, da Fred Hoyle. Per mantenere costante la densità dell'Universo essa richiedeva la creazione dal nulla di un solo atomo di idrogeno per chilometro cubo di spazio ogni dieci anni, una violazione del principio di conservazione comunque infinitesimale e inosservabile. [*N.d.T.*]

[85] La radiazione primordiale doveva essere in equilibrio con la materia, e dunque essere distribuita sullo spettro del corpo nero (cfr. *supra* cap. 7, p. 173 e fig. 7.3). Il crescere della lunghezza d'onda citato nel testo può essere interpretato in termini di raffreddamento dell'Universo, e dunque di un progressivo scorrimento della curva spettrale dell'energia radiante verso temperature più basse, con andamento che resta comunque associato alla temperatura di radiazione secondo la teoria di Planck. L'odierna emissione nella banda delle microonde si riferisce al picco di fig. 7.3, e la temperatura associata è 2,7 gradi Kelvin (pari a una lunghezza d'onda di circa 7 centimetri). [*N.d.T.*]

[86] Il gruppo di Dicke aveva già intrapreso a Princeton la ricerca sperimentale della radiazione fossile utilizzando una raffinata apparecchiatura dedicata (radiometro di Dicke), solo che fu preceduto da Penzias e Wilson, aiutati da un'antenna più grande e da un fortunato caso di *serendipity*. [*N.d.T.*]

[87] Più propriamente, la «schiuma quantica» (*quantum foam*) si riferisce alla struttura caotica e probabilistica dello spazio-tempo come prevista originalmente dal fisico statunitense John Archibald Wheeler (cui si deve il termine «buco nero») in una scala dimensionale comparabile con quella delle corde (cfr. *supra*, nota 3). Tale nano-distorsione spaziale sarebbe prodotta dalle

fluttuazioni di punto zero, tanto più violente quanto più piccola è la regione considerata, per via di un meccanismo concettualmente paragonabile a quello del moto elettronico nella materia degenere (cfr. cap. 7, nota 15). [*N.d.T.*]

88 Promettente teoria sviluppata nei primi anni ottanta dal fisico statunitense Alan Guth, per spiegare, tra l'altro, l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo secondo il meccanismo delineato nel testo. Essa prevede appunto una fase brevissima di espansione accelerata (10^{-32} secondi per un'«inflazione» di 10^{50} volte), e se ne possono dedurre l'esistenza di uno stato di antigravità della materia e una densità dell'Universo esattamente pari a quella che ne determina una geometria «piana» ed euclidea (cfr. *infra*, cap. 9, nota 1). [*N.d.T.*]

89 Ipotesi risultante dai lavori del fisico teorico britannico Stephen Hawking (forse il più noto scienziato puro vivente), basati sulla coniugazione di relatività generale e teoria dei quanti. [*N.d.T.*]

90 I modelli dinamici semplici dell'Universo portano il nome del matematico russo Alexander Alexandrovic Friedmann, che li elaborò come soluzioni delle equazioni di Einstein, e prevedono – in relazione alla densità di materia – un Universo «chiuso», di dimensioni finite e in cui all'espansione segue la contrazione, e uno «aperto», in cui le distanze intergalattiche aumentano indefinitamente. Nel primo caso la geometria dello spazio-tempo è «sferica» (π è minore del valore euclideo), nel secondo è «piatta» (vale la geometria di Euclide) oppure «iperbolica» (π è maggiore del valore euclideo). L'introduzione della costante cosmologica consente, oltre alla soluzione statica, anche modelli espansionistici finiti e modelli infiniti ma con collasso finale, studiati originalmente dall'abate belga Georges Lemaître e dal quale parimenti hanno nome. La densità critica che separa l'Universo chiuso da quello aperto e che corrisponde allo spazio euclideo secondo Friedmann, è stimata oggi in 5×10^{-30} grammi per centimetro cubo (circa 3 atomi di idrogeno per metro cubo di spazio), e risulta da cinque a dieci volte superiore a quella della materia osservabile. Sembrerebbe di qui che l'Universo debba essere aperto. [*N.d.T.*]

91 Materia in uno stato non elettromagneticamente emissivo e dunque non direttamente visibile, la cui esistenza è ipotizzata dietro considerazioni teoriche tra cui quella relativa all'Universo inflazionario (per colmare il deficit di massa; cfr. *supra*, cap. 8, nota 14). Candidati a costituire la materia oscura sono i neutrini, i buchi neri, altri particolari oggetti quasi-stellari, particelle subatomiche cosiddette «esotiche»; oppure essa potrebbe essere rimpiazzata da un ri-ripensamento sulla vecchia costante cosmologica di Einstein. [*N.d.T.*]

92 Alterazione apparente della posizione angolare di un oggetto per effetto della deviazione del percorso ottico della sua immagine operata dal campo gravitazionale, prevista dalla teoria generale di Einstein. Sono osservati casi di sdoppiamento e anche di alone circolare. [*N.d.T.*]

Sommario