শূন্য কি মৌলিক সংখ্যা?

আব্দুল্যাহ আদিল মাহমুদ

ছোটবেলার একটি কথা মনে পড়লে বড্ড হাসি পায়। মনে করতাম ০ থেকে ৯ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোকে মৌলিক সংখ্যা বলে। আর আরও বড় সংখ্যাগুলোকে বলে যৌগিক সংখ্যা। ভাবনাটা ভুল হলেও অবশ্য কিছুটা হলেও সৃজনশীল ছিল। বিজ্ঞানের রসায়ন অংশে মৌলিক আর যৌগিক পদার্থের ধারণা থেকেই ভাবনাটার জন্ম। কিংবা বাংলা ব্যাকরণের মৌলিক আর যৌগিক শব্দ। তবে গণিতে আসলে এই ভাবনাটি সরাসরি কোনো কাজে আসে না।

গণিতে মৌলিক সংখ্যার সংজ্ঞা ভিন্ন। ছোটবেলায় পাঠ্যবইয়ে পড়েছি, যে সংখ্যাকে ১ ও ঐ সংখ্যা ছাড়া অন্য কোনো সংখ্যা দ্বারা নিঃশেষে ভাগ করা যায় না তাকে মৌলিক সংখ্যা বলে। যেমন ২, ৩, ৫, ১১, ১৩ ইত্যাদি। তবে মৌলিক সংখ্যার আরও আনুষ্ঠানিক সংজ্ঞা একটু ভিন্ন। সেটা বলে ফেললে অবশ্য আজকের আলোচনাই অর্থহীন হয়ে যাবে। কারণ, সংজ্ঞার প্রথম কথাই হলো মৌলিক সংখ্যা হবে ১ এর চেয়ে বড়। তার মানে ১ বা তার চেয়ে ছোট সংখ্যা কখনোই মৌলিক হবে না। আমাদের আলোচনাকে সার্থক করতে তাই এমন সংজ্ঞা কেন দেওয়া সেটা নিয়ে কথা বলা যায়।

আনুষ্ঠানিক সংজ্ঞায় আবার আসি। আগেই বললাম, মৌলিক সংখ্যার সংজ্ঞার শুরুতেই বলা আছে, এ সংখ্যারা হবে ১ এর বড়। আরেকটি শর্ত হলো স্বাভাবিক সংখ্যা নিয়ে। মানে ১, ২, ৩, ... অর্থাৎ ১ থেকে শুরু করে ক্রমাগত ১ বেশি করে সংখ্যার সেট। মৌলিক সংখ্যাদেরকে এদের চেয়ে ছোট দুটি স্বাভাবিক সংখ্যাকে গুণ করে গঠন করা যাবে না। যেমন ৫ এর কথা ভাবি। ৫ এর চেয়ে ছোট এমন দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা পাওয়া যাবে না যাদেরকে গুণ করে ৫ বানানো যাবে। একই কথা খাটবে ৭, ১১, ১৩, কিংবা ১৭ এর ক্ষেত্রেও।

আসলে আনুষ্ঠানিক সংজ্ঞা একটু বেশি সুসংজ্ঞায়িত এই যা। সংখ্যা মৌলিক কিনা সেটা প্রথাগত সংজ্ঞা দিয়েও বোঝা যায়। তবে আনুষ্ঠানিক সংজ্ঞায় ০ বা ১ নিয়ে কোনো বিভ্রান্তির সুযোগ থাকেনি। অন্যথায় দুটো সংজ্ঞা আসলে সমতুল্য। যেমন ৫ মৌলিক কি না যাচাই করে দেখা যাক। ৫ এর চেয়ে ছোট স্বাভাবিক সংখ্যা হলো ১, ২, ৩ ও ৪। এদের মধ্যে এমন দুটি সংখ্যা নেই যাদেরকে গুণ করে ৫ বানানো যাবে। ফলে ৫ গঠন করার একমাত্র উপায় ৫ × ১। এবার প্রথাগত সংজ্ঞাটার কথা ভাবুন। সেখানেও ফল এটাই দাঁড়াবে।

তাহলে শূন্যকে কেন সংজ্ঞার শুরুতেই মৌলিক সংখ্যার খাতা থেকে বাদ দেওয়া হলো?

আবার একটু রসায়ন বা ব্যাকরণের মৌলিকত্বের ধারণা চিন্তা করি। অন্য জিনিস দিয়ে গড়া জিনিস মৌলিক নয়। একটু চিন্তা করলেই বোঝা যাবে গণিতেও আসলে ধারণাটা এমনই। ৬ মৌলিক সংখ্যা, কারণ ৬-কে ভাঙলে পাওয়া যায় ২ ও ৩। ৩ মৌলিক সংখ্যা, কারণ ৩-কে ভাঙ্গলে নতুন কোনো সংখ্যা পাওয়া যায় না। অনেকে বলতে পারেন ১ তো পাওয়া যাচ্ছে। আসলে ১ এখানে কোনো গুরুত্ব পায় না। কারণ ৩-কে ভেঙে নতুন সংখ্যা হিসবে ১ কে নিতে গেলে আরেক সংখ্যা নিতে গেলে সেই আরেক সংখ্যা হয় ৩ নিজেই। ফলে ৩ কি আদৌ ভাঙল? একদম না। ৩ যে কথা ৩ × ১ তো সেই কথাই।

এখানে ১ নিয়ে আরও একটু কথা তাই না বললেই নয়। ১ কে বলা হয় গুণজ অভেদক (multiplicative identity)। আমরা অনেক সময় বলি, কিছু নেই মানে শূন্য। কথাটা আংশিক সত্য। আসলে যোগ-বিয়োগের সময় কিছু নেই মানে শূন্য। কিন্তু গুণ-ভাগের সময় কিছু নেই মানে ১। যেমন একটি ভগ্নাংশ কাটাকাটি করতে করতে ওপরে ও নীচে ৩ করে বাকি থাকলে সর্বশেষ কাটায় দুটো ৩-ই কাটাকাটি যাবে। এখন আর কিছুই নেই। তার মানে এই নয় যে উত্তর ০। উত্তর আসলে ১।

এজন্যেই শূন্য ফ্যাক্টোরিয়ালের (0!) মান ১ হয়। আমরা জানি, ৩! মানে ৩ × ২ × ১। ২! মানে ২ × ১। ১! হবে ১। মনে হতে পারে তাহলে ০! নিশ্চয়ই ০। কিন্তু আসলে তা নয়। ০! মানে এখনও কিছুই গুণ করা হয়নি। তার মানে পরে যা গুণ হবে তাদের সাথে ১ গুণ করতে হবে, শূন্য নয়। এজন্যই গুণ-ভাগের ক্ষেত্রে কিছু নেই মানে ১। ০ ফ্যাক্টোরিয়ালকে ০ ধরলে ফ্যাক্টোরিয়ালের ধারণা কোনো কাজে আসত না। সব ফ্যাক্টোরিয়ালের মান হয়ে যেত শূন্য।

অতএব, বোঝা গেল ৩ কে ৩ × ১ করে ভেঙে লিখে দেখানো গেলেও আসলে এখানে ৩ ভেঙেছে এমন দাবি করা যাচ্ছে না। তাই ৩কে যৌগিক সংখ্যাও বলা যাচ্ছে না। একই যুক্তিতে ১-কেও মৌলিক সংখ্যার খাতা থেকে বাদ দেওয়া যায়। সব সংখ্যাকেই ভাঙলে ১ পাওয়া যায়। অন্তত আপাত দৃষ্টিতে। তাহলে ১-কে ভাঙার কথা তোলা খুবই হাস্যকর। ব্যাপারটা অনেকটা এমন: এক ফুট দৈর্ঘ্যের মাপকাঠি দিয়ে একটি টেবিলের দৈর্ঘ্য মাপা হলো। এবার জিজ্ঞেস করা হলো আচ্ছা, মাপকাঠির দৈর্ঘ্যটা কত ফুট? মাপকাঠি নিজেই তো এক ফুট। এক্ষেত্রে একে বলা যায় দৈর্ঘ্যের মৌলিক একক। একে যৌগিক হিসেবে চিন্তা করা অর্থহীন। এই দৈর্ঘ্য দিয়েই অন্য দৈর্ঘ্য মাপা হয়েছে। তাই এটা একটি মৌলিক দৈর্ঘ্য। একইভাবে ১-কে ভেঙ্গে অন্য কিছু পাওয়া যাবে না। এটা হলো ভিত্তি বা মাপকাঠি সংখ্যা।

আরও অনেকগুলো কারণে ১ অমৌলিক সংখ্যা। সেটা সংক্ষেপে বলার আগে এটা বলে রাখা ভাল যে ইতিহাস ঘাঁটলে দেখা যায় ১-কে বহু সময় পর্যন্ত সংখ্যাই মনে করা হত না। ১-কে বলা হত সংখ্যার উৎস। অতএব, মৌলিক হবার তো প্রশ্নই আসে না।

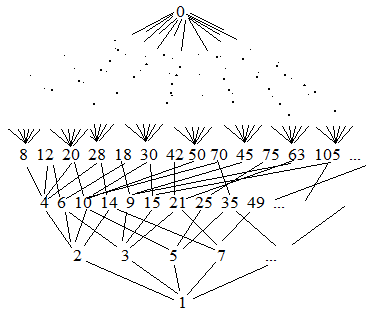
মৌলিক সংখ্যার আনুষ্ঠানিক সংজ্ঞার সূচনা করেন ইউক্লিড। তাঁর বিখ্যাত এলিমেন্টস বইয়ে তিনি কাজটি করেন। তিনি আসলে দেখতে চেয়েছিলেন কোন পূর্ণ সংখ্যারা অন্য ক্ষুদ্রতর পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে গঠিত। মৌলিক সংখ্যার সংজ্ঞার মাধ্যমেই তিনি প্রমাণ করেন পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্যটি।

*১-এর চেয়ে বড় যে-কোনো পূর্নাঙ্গ সংখ্যাকে স্বতন্ত্র উপায়ে মৌলিক সংখ্যার গুণফল আকারে লেখা যায়।*

মৌলিক সংখ্যার দারুণ একটি ব্যবহার দেখা গেল। এরা হলো পূর্ণ সংখ্যাদের গুণের উপাদান। যুদ্ধের সময় অনেক ক্ষেত্রে বলতে শোনা যায়, ডিভাইড অ্যান্ড কনকার বা ভাগ করো ও জয় করো। একই কথা খাটে গণিতেও। পূর্ণ সংখ্যার বহু বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায় এদের মৌলিক উৎপাদকের মধ্য থেকে। ফলে বিভাজনের মাধ্যমে বড় সমস্যা ছোট সমস্যায় পরিণত হয়। এক্ষেত্রে ১ কোনো কাজে আসে না। কারণ যে কোনো সংখ্যা = যে কোনো সংখ্যা × ১। ফলে ১ দিয়ে ডিভাইড হয়ত করা যাচ্ছে। কিন্তু কনকার করা যাচ্ছে না। আগের সংখ্যাটাই তো থেকে গেল। লাভ তো কিছুই হল না। তাই ১-কে মৌলিক বলা ঠিক হবে না।

০-এর মৌলিকত্ব নিয়ে ভাবার আগে আরও একটু কথা না বলে নিলেই নয়। মৌলিক সংখ্যার সংজ্ঞায় '১ এর বড়' কথাটা উল্লেখ করায় ঋণাত্মক সংখ্যারাও কিন্তু বাদ পড়ে গেল।

ধরা যাক, আমরা জানতে চাই (-১১) মৌলিক কি না। সংজ্ঞার মধ্যে ফেলে দেখা গেল (-১১) কে (-১১) × ১ ছাড়া ভেঙে লেখার আর কোনো উপায় নেই। অতএব, হয়ত আমরা বলব, হ্যাঁ (-১১) মৌলিক সংখ্যা। আবার (-১২) ভেঙে হয়ত পাব (-৩) × ৪ বা ধরুন (-৬) × ২। এবার হয়ত বলব, হ্যাঁ (-১২) অমৌলিক। কিত্নু একটু ভাবুন। ১১ বা ১২ থেকে এদের ঋণাত্মক সংখ্যাগুলো কি মৌলিকত্বের বিচারে আলাদা হতে পারল? আমরা যখনি ১১ এর মৌলিকত্ব জানব, ঠিক তখনি বলে দিতে পারব (-১১)ও মৌলিক হবে। তার মানে, মৌলিক সংখ্যা নিয়ে কাজ করতে গেলে ঋণাত্মক সংখ্যা বাড়তি কোনো কাজে আসে না। তাই শুধু শুধু সময় নষ্টের কোনো মানে নেই।

এবার ফিরে আসি শূন্যের মৌলিকত্বে। মৌলিক সংখ্যারা অন্য সংখ্যা গড়তে সহায়তা করে। ৩ আর ৫ মৌলিক সংখ্যা দুটি গুণ করে আমরা পেয়ে যাই ১৫, যা একটি যৌগিক সংখ্যা। তার মানে, মৌলিক সংখ্যারা ভিত গড়ে দেয়। এবার ভেবে দেখুন, শূন্য এই কাজটি পারে কি না। পারে কি না সেটা যাচাই করার উপায় হলো ০-এর সাথে অন্য কোনো মৌলিক বা অমৌলিক সংখ্যা গুণ করে দেখা। দেখা যাক। ০ × ৩ = ০। না, নতুন কোনো সংখ্যা পাওয়া গেল না। আবার দেখা যাক। ০ × ৫ = ০। বোঝাই যাচ্ছে, সেটা কখনোই হবে না। নতুন কোনো সংখ্যা গড়ার ক্ষমতা শূন্যের নেই।

ওপরের চিত্রে বিষয়টা আরও ভাল করে দেখা যাচ্ছে। নীচ থেকে ২য় সারিতে মৌলিক সংখ্যাদেরকে দেখা যাচ্ছে। ওপরের দিকের সংখ্যারা যৌগিক। ব্যতিক্রম শুধু শূন্য। শূন্যকে আরেকভাবেও চিন্তা করা যায়।

১২ যৌগিক সংখ্যা, কারণ ১২ = ৩ × ৪ বা অন্য কিছু। ১২ এর উৎপাদক ২, ৩, ৪ ও ৬। এবার ভাবুন, শূন্যের কি উৎপাদক আছে? প্রথমে মনে হবে, না তো, নেই। কিন্তু আবার ভাবুন। ০ = ৩ × ০। তার মানে ৩-কে শূন্যের উৎপাদক হিসেবে বিবেচনা করা যায়। একইভাবে যে-কোনো সংখ্যাকেই শূন্যের উৎপাদক হিসেবে দেখানো যায়। ফলে শূন্য মৌলিক থাকছে না।

আরেকভাবে দেখি। পাটগণিতের মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যাকে স্বতন্ত্র উপায়ে মৌলিক সংখ্যার গুণফল আকারে লেখা যায়। কাজটি করা যাবে শুধু একটি নির্দিষ্ট উপায়েই। যেমন ৬ = ৩ × ২। অন্য কোনো মৌলিক সংখ্যা দিয়ে ৬ বানানো যাবে না। কিন্তু শূন্যের অবস্থা দেখুন। ০ বানানোর কত শত পথ। ০ × ২ = ০, ০ × ৫ = ০, ০ × যে-কোনো কিছু = ০।

শূন্যকে মৌলিক ধরলে তাই পাটগণিতের মৌলিক উপপাদ্যটিও অর্থহীন হয়ে যেত।

মৌলিক সংখ্যাকেও আরও একভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। যে সংখ্যাদের উৎপাদকের সংখ্যা ঠিক দুটি (১ সহ) তারা হলো মৌলিক। শূন্যের উৎপাদক তো সবাই। মানে উৎপাদকের সংখ্যা অসীম। এই সরল সংজ্ঞা গ্রহণ করলে কিন্তু শূন্য এবং ১ একই সাথে বাদ পড়ে যায়। এ কারণে এটা আমার বিশেষ পছন্দের। তাছাড়া প্রোগ্রামিং করতে গেলেও এই সরল সংজ্ঞাটা কাজে লাগে। অবশ্য এই সংজ্ঞা দিয়ে ঋণাত্মক সংখ্যাদেরকেও মৌলিক থেকে বাদ দিতে গেলে সংজ্ঞায় 'অঋণাত্মক' কথাটা যোগ করে নিতে হবে।

সূত্র

https://math.stackexchange.com/questions/539174/is-zero-a-prime-number

<https://primes.utm.edu/notes/faq/negative_primes.html>