Obligatorisk innlevering 2

IN1150 – Logiske metoder

Våren 2018

Dette er den andre av tre obligatoriske oppgaver. For at oppgaven skal bestås, **må alle oppgaver være besvart** og du må vise at du behersker stoffet som er gjennomgått så langt. Dersom du ikke finner svaret på en oppgave, må du skrive minst én setning som sier hva du synes er vanskelig med den.

Innleveringsfrist: Tirsdag 3. april, kl. 23:59.

Oppgave 1 - Rekursive funksjoner og induksjon

(a) Definer en rekursiv funksjon f på bitstrenger som bytter ut alle $\mathtt{1}$-ere i en bitstreng med $\mathtt{0}$-er, og alle $\mathtt{0}$-er med $\mathtt{1}$-ere. (Husk at mengden av bitstrenger er induktivt definert som den minste mengden som er slik at $\mathtt{0}$ og $\mathtt{1}$ er bitstrenger, og hvis b er en bitstreng, er $\mathsf{b}\mathtt{0}$ og $\mathsf{b}\mathtt{1}$ bitstrenger.)

Eksempler:

$\mathsf{f}(\mathtt{101}) = \mathtt{010}$
$\mathsf{f}(\mathtt{0100111}) = \mathtt{1011000}$

(b) Definer en rekursiv funksjon g fra bitstrenger til heltall som gir differansen mellom antall $\mathtt{1}$-ere og antall $\mathtt{0}$-er i en bitstreng b. Hvis b inneholder m $\mathtt{1}$-ere og n $\mathtt{0}$-er, så skal $\mathsf{g}(\mathsf{b}) = m - n$.

Eksempler:

$\mathsf{g}(\mathtt{1011}) = 2$
$\mathsf{g}(\mathtt{00000}) = -5$

(c) Vis ved strukturell induksjon at $\mathsf{g}(\mathsf{b}) + \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{b})) = 0$ for alle bitstrenger b.

(d) **Frivillig ekstraoppgave.** Vis ved matematisk induksjon at $n^2 - 1$ er delelig med 8 dersom n er et oddetall.

Oppgave 2 - Representasjon med førsteordens formler

(Her er oppgavene hentet fra oppgave 14.8 i læreboka.)

Anta at S, E, F og L er relasjonssymboler slik at Sx tolkes som «x er en student», Exy tolkes som «x elsker y», Fxy tolkes som «x er forelsket i y» og Lxy tolkes som «x liker y». Anta at a, b og c er konstantsymboler som representerer Anna, Bernt og Carl. Finn førsteordens formler for følgende setninger:

(a) Alle elsker Bernt.

(b) Anna elsker Bernt, men Bernt elsker ikke Anna.

(c) Carl liker alle studenter.

(d) Carl liker bare studenter.

(e) Bernt elsker Anna og liker ikke de som er forelsket i henne.

(f) Alle som elsker en person, både liker og er forelsket i denne personen.

(g) Det finnes noen som ikke er forelsket i noen.

(h) Noen er forelsket i noen som de ikke liker.

(i) Noen er forelsket i noen som ikke er forelsket tilbake.

(j) Anna liker ikke de som liker alle.

Oppgave 3 - Førsteordens logikk og modeller

Vi ser på et enkelt førsteordens språk med relasjonssymboler P og Q, begge med aritet 1. La en modell $\mathcal{M}$ for dette språket være gitt ved $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathsf{P}^{\mathcal{M}} = \{2, 3, 4, 5\}$ og $\mathsf{Q}^{\mathcal{M}} = \{3, 4\}$.

(a) Gi en førsteordens formel på formen $\exists x\ldots$ som er sann i denne modellen, og som ikke er en tautologi.

(b) Gi en førsteordens formel på formen $\forall x\ldots$ som er sann i denne modellen, og som ikke er en tautologi.

(c) Gi en førsteordens formel på formen $\neg\exists x\ldots$ som er sann i denne modellen, og som ikke er en tautologi.

(d) Vi legger til konstantsymbolet b i språket. Gi en tolkning av b i modellen slik at formelen $(\mathsf{Pb} \wedge \neg\mathsf{Qb})$ blir tolket som sann.

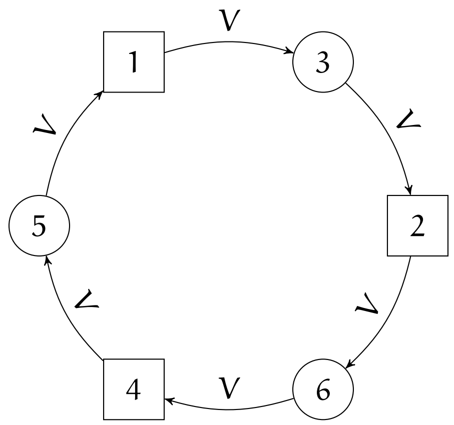
(e) Formelen $\forall x(\mathsf{P}x \vee \mathsf{Q}x)$ er ikke sann i denne modellen. Forklar hvorfor.

Oppgave 4 - Sirkler og firkanter

I forrige obligatoriske oppgave skulle du plassere tallene 1–6 i sirkler og firkanter slik at hver sirkel inneholdt tallet som var summen av dens to nabofirkanter, og hvert tall ble brukt nøyaktig én gang. Sirkelen står ferdig utfylt på neste side.

I denne oppgaven skal vi representere egenskaper ved sirkelen med førsteordens logikk. Signaturen er gitt ved $\langle\ ;\ +\ ;\ =, \mathsf{S}, \mathsf{F}, \mathsf{V}\,\rangle$ der du kan anta at $+$ og $=$ tolkes som vanlig. Vi skal tolke

- $\mathsf{S}x$ som «x er et sirkeltall»,
- $\mathsf{F}x$ som «x er et firkanttall» og
- $\mathsf{V}xy$ som «x står direkte til venstre for y».



(a) Gi en modell som gjenspeiler løsningen på sirkeloppgaven med tallene 1–6.

Til nå har vi jobbet med sirkeloppgaven med tallene 1–6, hvor det kun finnes én løsning dersom vi ikke teller med rotasjoner av ringen eller symmetriske løsninger (altså plasserer tallene fra høyere mot venstre). Dersom vi utvider ringen slik at vi skal plassere flere tall, kan vi få flere løsninger. For eksempel finnes det 578 forskjellige måter å plassere tallene 1–20 i en ring med 10 firkanter og 10 sirkler.

I de neste oppgavene skal vi prøve å lage en teori for sirkeloppgaven ved å gi en mengde av formler slik at en modell som oppfyller formlene også gir en løsning for sirkeloppgaven. Vi skal altså prøve å skrive egenskapene ved sirkeloppgaven i førsteordens logikk.

(b) Skriv en førsteordens formel som uttrykker at «alle elementer er enten et sirkeltall eller et firkanttall».

(c) Skriv en førsteordens formel som uttrykker at «alle sirkeltall er summen av sin venstre og høyre nabo».

(d) **Grubleoppgave.** Anta at formlene du oppgav i deloppgave **(b)** og **(c)** er korrekte. Det finnes fremdeles modeller som oppfyller formlene, men som ikke oppfyller kravene til sirkeloppgaven. Du skal prøve å finne formler som garanterer flere egenskaper ved sirkeloppgaven. Det beste svaret er å finne formler slik at alle modeller som oppfyller formlene også oppfyller kravene i sirkeloppgaven, men vi forventer ikke at du får til dette. Et godt svar er å gi formler som holder for modellen fra deloppgave **(a)**. Hvis du kan identifisere hva slags modeller som kan oppfylle formlene ovenfor, men ikke oppfylle kravene i sirkeloppgaven er dette også et godt svar.

Hvis du synes denne oppgaven er vanskelig, så fortvil ikke. Vi forventer ikke mye av løsningen din. På denne oppgaven oppfordrer vi til samarbeid, og det går nesten ikke an å jukse her (unntaket er å direkte skrive av noen andres innlevering).