Exercices de probabilité

Exercice1

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 16]

Un dé biaisé à quatre faces, dont les faces sont identifiées par 1, 2, 3 et 4, est lancé et le résultat obtenu est enregistré. Soit X le résultat obtenu lorsque le dé est lancé. La distribution de probabilité pour X est donnée dans le tableau suivant, où p et q sont des constantes.

x	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	p	0,3	q	0,1

Pour cette distribution de probabilité, on sait que $\mathrm{E}(X)=2$.

(a) Montrez que $p=0{,}4$ et $q=0{,}2$. [5]

(b) Trouvez $\mathrm{P}(X>2)$. [2]

Nicky joue à un jeu avec ce dé à quatre faces. Dans ce jeu, elle a droit à un maximum de cinq lancers. Son score est calculé en additionnant les résultats de chaque lancer. Nicky gagne si son score est d'au moins dix.

Après avoir lancé le dé trois fois, Nicky a un score de quatre.

(c) En supposant que les lancers du dé sont indépendants, trouvez la probabilité que Nicky gagne. [5]

David a deux paires de dés non biaisés à quatre faces : une paire jaune et une paire rouge. Les faces des deux dés jaunes sont identifiées par 1, 2, 3 et 4. Soit S la somme obtenue lorsque les deux dés jaunes sont lancés. La distribution de probabilité pour S est montrée ci-dessous.

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Les faces du premier dé rouge sont identifiées par 1, 2, 2 et 3. Les faces du deuxième dé rouge sont identifiées par 1, a, a et b, où $a<b$ et $a, b \in \mathbb{Z}^+$. La distribution de probabilité pour la somme obtenue lorsque la paire rouge est lancée est la même que la distribution de probabilité pour la somme obtenue lorsque la paire jaune est lancée.

(d) Déterminez la valeur de b. [2]

(e) Trouvez la valeur de a, en fournissant une preuve pour votre réponse. [2]

Exercice2

Rachel et Sophia participent à une compétition de lancer du javelot.

Les distances, R mètres, correspondant aux lancers de Rachel peuvent être modélisées par une distribution normale de moyenne $56{,}5$ et d'écart type 3.

Les distances, S mètres, correspondant aux lancers de Sophia peuvent être modélisées par une distribution normale de moyenne $57{,}5$ et d'écart type $1{,}8$.

Au premier tour de la compétition, chaque concurrent doit effectuer cinq lancers. Pour se qualifier pour le tour suivant de la compétition, un concurrent doit enregistrer, au premier tour, au moins un lancer de 60 mètres ou plus.

Trouvez la probabilité que seule Rachel ou Sophia se qualifie pour le prochain tour de la compétition.

Exercice3

Le temps qu'il faut à Suzi pour se rendre en voiture de sa maison au travail chaque matin est normalement distribué avec une moyenne de 35 minutes et un écart type de σ minutes.

Lors de 25% des jours, il faut plus de 40 minutes à Suzi pour se rendre au travail en voiture.

(a) Trouvez la valeur de σ. [4]

(b) Un jour choisi au hasard, trouvez la probabilité que le trajet de Suzi pour se rendre au travail en voiture prenne plus de 45 minutes. [2]

Suzi sera en retard au travail s'il lui faut plus de 45 minutes pour se rendre au travail en voiture. Le temps qu'il lui faut pour se rendre au travail en voiture chaque jour est indépendant de tout autre jour.

Suzi travaillera cinq jours la semaine prochaine.

(c) Trouvez la probabilité qu'elle soit en retard au travail au moins un jour la semaine prochaine. [3]

(d) Étant donné que Suzi sera en retard au travail au moins un jour la semaine prochaine, trouvez la probabilité qu'elle soit en retard moins de trois fois. [5]

Suzi travaillera 22 jours au cours du mois. Elle recevra un bonus si elle est à l'heure au moins 20 de ces jours.

Ce mois-ci, elle a travaillé 16 jours et a été à l'heure 15 de ces jours.

(e) Trouvez la probabilité que Suzi reçoive un bonus. [4]

Exercice4

Les temps de vol, T minutes, entre deux villes peuvent être modélisés par une distribution normale de moyenne 75 minutes et d'écart type σ minutes.

(a) Étant donné que 2% des temps de vol prennent plus de 82 minutes, trouvez la valeur de σ. [3]

(b) Trouvez la probabilité qu'un vol choisi au hasard ait un temps de vol supérieur à 80 minutes. [2]

(c) Étant donné qu'un vol entre les deux villes prend plus de 80 minutes, trouvez la probabilité qu'il prenne moins de 82 minutes. [4]

Un jour donné, 64 vols sont prévus entre ces deux villes.

(d) Trouvez le nombre espéré de vols qui auront un temps de vol supérieur à 80 minutes. [3]

(e) Trouvez la probabilité que plus de 6 des vols au cours de ce jour donné aient un temps de vol supérieur à 80 minutes. [3]

Exercice5

À l'aéroport de Penna, la probabilité, $\mathrm{P}(A)$, que tous les passagers arrivent à l'heure pour un vol est de $0{,}70$. La probabilité, $\mathrm{P}(D)$, qu'un vol parte à l'heure est de $0{,}85$. La probabilité que tous les passagers arrivent à l'heure pour un vol et que ce dernier parte à l'heure est de $0{,}65$.

(a) Montrez que l'événement A et l'événement D ne sont **pas** indépendants. [2]

(b) (i) Trouvez $\mathrm{P}(A \cap D')$.

(ii) Étant donné que tous les passagers d'un vol arrivent à l'heure, trouvez la probabilité que le vol ne parte **pas** à l'heure. [5]

Le nombre d'heures que les pilotes volent par semaine est normalement distribué avec une moyenne de 25 heures et un écart type σ. 90% des pilotes volent moins de 28 heures par semaine.

(c) Trouvez la valeur de σ. [3]

(d) Tous les vols ont deux pilotes. Trouvez le pourcentage de vols où les **deux** pilotes ont volé plus de 30 heures au cours de la semaine dernière. [4]

Exercice6

La masse M de pommes, en grammes, est normalement distribuée avec une moyenne μ.
Le tableau suivant montre les probabilités pour des valeurs de M.

Valeurs de M	$M < 93$	$93 \le M \le 119$	$M > 119$
$\mathbf{P}(X)$	k	0,98	0,01

(a) (i) Écrivez la valeur de k.

(ii) Montrez que $\mu = 106$.

(b) Trouvez $\mathrm{P}(M < 95)$.

Les pommes sont emballées dans des sacs de dix.

Toute pomme dont la masse est inférieure à $95\ \mathrm{g}$ est classée comme étant petite.

(c) Trouvez la probabilité qu'un sac de pommes choisi au hasard contienne au plus une petite pomme.

(d) Une caisse contient 50 sacs de pommes. Une caisse est choisie au hasard.

(i) Trouvez le nombre espéré de sacs de cette caisse qui contiennent au plus une petite pomme.

(ii) Trouvez la probabilité qu'au moins 48 sacs de cette caisse contiennent au plus une petite pomme.