



لطفا توجه فرمایید که:

\* مهلت ارسال تمرین ساعت ۱۱:۵۹ روز ۲۴ اردیبهشت ماه است .

\* لطفا تمرین های تئوری و عملی را در یک فایل فشرده قرار داده و با نام  $HW4\_StudentID$  آپلود کنید .

\* لطفا تمرین ها را از یکدیگر کپی نکنید. در صورت وقوع چنین مواردی مطابق با سیاست درس رفتار می‌شود.

### مسئله‌ی ۱: ۱۲ نمره

الف. الگوریتم‌های آنالین به الگوریتم‌هایی گفته می‌شود که ورودی‌های آن‌ها یک‌باره در اختیار برنامه قرار نمی‌گیرند و به مرور داده‌ها به برنامه داده می‌شوند. به کدام یک از روش‌های انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری زیر میتوان نگاه آنالین بودن داشت:

روش نقطه میانی  
روش تفاضل پیشرو  
روش تفاضل پسرو  
مشتق‌گیری با درونیابی لاگرانژ

ب. یک تابع مثال بزنید که مستقل از نحوه انتخاب  $x_i$  ها، روش دوزنقه‌ای اندازه‌گیری دقیق تری از روش نقطه میانی دارد.

### مسئله‌ی ۲: ۱۲ نمره

مقادیر تابع  $f(x)$  را در نظر بگیرید:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	0.995	0.980	0.956	0.923	0.882

الف. مشتق تابع در نقطه 0.3 را بوسیله مشتق چندجمله‌ای درونیاب تقریب بزنید. (از فرمول سه نقطه‌ای استفاده کنید).

ب. مشتق تابع در نقطه 0.3 را بوسیله برونابی ریچاردسون بدست آورید. خطای این روش را بطور کلی بدست آورید. خطای مشتق در این نقطه را به روش ب بدست آورید و با خطای روش الف مقایسه کنید.

### مسئله‌ی ۳: ۱۸ نمره

الف. با استفاده از روش مستطیلی روشی برای محاسبه عدد  $\pi$  پیشنهاد کنید.

- ب. با استفاده از  $\pi = 5$  عدد  $\pi$  را حساب کنید.
- ج. با استفاده از روش رامبرگ (تا ۳ مرحله) عدد  $\pi$  و مرتبه خطای عملیات را حساب کنید.
- د. با صرف نظر کردن از خطاهایی از قبیل گرد کردن خطای انتگرال گیری با هر دو روش را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. (تا ۴ رقم اعشار)

### مسئله ۴: ۱۸ نمره

الف. ضرایب  $w_1, w_2, w_3$  را طوری تعیین کنید تا فرمول انتگرال گیری زیر برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.

$$\int_0^\pi \cos(\cdot x) f(x) dx = w_1 f(\cdot) + w_2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + w_3 f(\pi)$$

ب. با استفاده از فرمول بالا تقریبی برای انتگرال زیر ارائه دهید.

$$\int_0^1 \cos(\cdot \pi x) e^{-x^2} dx$$

### مسئله ۵: ۲۰ نمره

برای متد زیر مقدار بهینه  $h$  را با شرایط گفته شده بیابید:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\sigma), \quad x_0 < \sigma < x_2$$

الف.

$$|\text{Roundoff Error}| = |\text{Truncation Error}|$$

ب.

$$|\text{Roundoff Error}| + |\text{Truncation Error}| = \text{minimum}$$

### مسئله ۶: ۲۰ نمره

الف. فرمول‌های دستور دوزنقه‌ای و سیمپسون برای تقریب انتگرال  $\int_a^b f(x) dx$  را در نظر بگیرید و نشان دهید می‌توان قاعده سیمپسون را به وسیله برون‌یابی ریچاردسون از قاعده دوزنقه‌ای بدست آورد.

ب. در چه صورت سیمپسون  $\frac{3}{8}$  و در چه صورت سیمپسون  $\frac{1}{3}$  بدست می‌آید.

### مسئله ۷: ۲۵ نمره

فرض کنید  $f(x)$  در بازه  $x_{n-1} \leq x \leq x_{n+1}$  یک مینیمم دارد.  $x_k = x_0 + kh$  نشان دهید درون‌یابی تابع  $f(x)$  توسط چندجمله‌ای درجه دو تقریب زیر را می‌دهد.

$$f_n - \frac{\frac{1}{8}(f_{n+1} - f_{n-1})^2}{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}, f_k = f(x_k)$$

### مسئله ۸: برنامه نویسی ، ۲۵ نمره

برنامه ای بنویسید که با گرفتن  $x, n$  عدد  $\ln(x)$  را به روش های سیمپسون  $\frac{3}{8}$  و سیمپسون  $\frac{1}{3}$  و سیمپسون سفارشی محاسبه کند.  
(ابتدا برای هر روش باید بررسی شود که امکان پذیر است یا نه و برای سیمپسون سفارشی از بین حالت های ممکن محاسبه یکی کافی است.)