بسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف

- مشخصات : عطیه جمشیدپور
- شماره دانشجویی:۹۴۱۰۳۸۳۵

تمرین چهارم محاسبات عددی

موعد تحویل :۰۲/۳۱

تمرین اول

الف)

در صورتیکه الگوریتم آنلاین را الگوریتمی تعریف کنیم که با دریافت نقطه جدید، محاسبات را از ابتدا شروع کند، بلکه به تکمیل آن محاسبات بپردازد داریم :

- روش نقطه میانی : آنلاین، چون با اضافه شدن نقطه جدید، می‌توان از محاسبات صورت گرفته بر ای X های کوچکتر و بزرگتر از آن استفاده کرد و با اندک محاسبه‌ای آن را به روز رسانی کرد.
- روش تفاضلات پیشرو و پسرو : آنلاین، چرا که با اضافه شدن نقطه جدید، از محاسبات قبلی استفاده کرده و به تکمیل محاسبات لازم می‌پردازد و چندجمله‌ای مورد نظر را بهبود می‌دهد.
- روش مشتق گیری با لاگرانژ : آفلاین، چرا که در محاسبه ضرایب لاگرانژ، در صورت ورود نقطه جدید کلیه محاسبات می‌بایست از اول انجام شود[۴].

ب)

در مورد زیر خطای روش ذوزنقه‌ای کمتر از خطای روش نقطه میانی است[۳].

$$Consider[a,b], h=b-a, c=(a+b)/2; b-c=c-a=(b-a)/2=h/2$$

$$E_M=f(c)h-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(c)-f(x)dx$$

اگر از تقریب تیلور مرتبه دو استفاده کنیم، داریم :

$$f(c)=f(x)+f'(x)(c-x)+1/2f''(\Im_x)(x-c)^2$$

در خطای روش نقطه میانی داریم :

$$E_M=-\int_a^b f'(x)(x-c)dx+1/2\int_a^b f''(\Im_x)(x-c)^2dx$$

در محاسبه انتگرال جزئی داریم :

$$\int_a^b f'(x)(x-c)dx=f(x)(x-c)[a\rightarrow b]-\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]-\int_a^b f(x)dx$$

بنابراین :

$$E_M=-E_T+1/2\int_a^b f''(\Im_x)(x-c)^2dx$$

برای آن که خطای روش میانی از خطای روش ذوزنقه‌ای بیشتر باشد میبایست شرایط زیر برقرار شود.

$$If\ E_M>0\wedge E_T<0,$$

و در یک منطقه محدود انحنای بالایی داشته باشیم به عنوان مثال تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x)=0.25+0.75\exp(-200x^2);\ if\ -1\le x\le 0$$

$$f(x)=0.99+0.01\cos(\pi x);\ if\ 0<x\le 1$$

مقدار دقیق انتگرال و خطاها برابر است با

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\approx 1.2870, M\approx 2, T\approx 1.2300;\ E_M\approx 0.7130, E_T\approx 0.0570\rightarrow E_M>E_T$$

پ)

برای آنکه خطای روش نقطه میانی کمتر از روش ذوزنقه‌ای باشد، کافیست تابعی به صورت زیر داشته باشیم.

$$if\ x=0;\ f(x)=0$$

$$if\ 0<x\le 1:\ f(x)=10$$

مساحت زیر سطح این نمودار که یک مستطیل ۱ × ۱۰ است برابر است با ۱۰

درصورتی که بازه را ۱ در نظر بگیریم، داریم :

$$M:\int_0^1 f(x)=1*10=10, E_M=10-10=0$$

$$T:\int_0^1 f(x)=\frac{0+10}{2}=10, E_T=10-5=5$$

$$\rightarrow E_T>E_M$$

تمرین دوم

الف)

با استفاده از روش تیلور مرکزی داریم :

$$f(x_{i+1})=f(x_i+h)=f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\dots$$

$$f(x_{i-1})=f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\dots$$

قاعده سه نقطه‌ای :

$$\rightarrow f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}+\frac{h^2}{6}f'''(x_i)+\frac{h^4}{240}f^{(5)}(z), where\ z\in[x_{i-1},x_{i+1}]$$

در صورتی که از معیار سه نفطه‌ای برای مشتق گیری استفاده کنیم و h را برابر با مقادیر ۰.۱ و ۰.۲ در نظر بگیریم داریم :

$$if\ h=0.1;\ f'(0.3)=\frac{f(0.4)-f(0.2)}{2*0.1}=-0.285,$$

$$if\ h=0.2;\ f'(0.3)=\frac{f(0.4)-f(0.1)}{2*0.2}=-0.2825$$

ب)

$$G=\frac{(\frac{h_1}{h_2})^2 g(h_2)-g(h_1)}{(\frac{h_1}{h_2})^2-1}\rightarrow$$

$$TV=\frac{4(AV)_{(h/2)}-(AV)_h}{3}=-0.285+\frac{-0.285+-2825}{3}=-0.2858$$

پ)

$$G=\frac{4g(h/2)-g(h)}{3}$$

$$\rightarrow G=\frac{4[\hat{g}(h/2)+\frac{(h/2)^2}{6}f'''(x_i)+\frac{(h/2)^4}{240}f^{(5)}(z)]-[\hat{g}(h)+\frac{(h)^2}{6}f'''(x_i)+\frac{(h)^4}{240}f^{(5)}(z)]}{3}$$

$$\rightarrow if\ \hat{G}=\frac{4\hat{g}(h/2)-\hat{g}(h)}{3};G=\hat{G}-\frac{h^4}{768}f^{(5)}(z)\rightarrow E_G=\frac{h^4}{768}f^{(5)}(z),where\, z\in[x_{i-1},x_{i+1}]$$

$$E_{g(h)}=\frac{h^2}{6}f'''(z')=0.1667*10^{(-2)}f'''(z'),E_{G(h)}=\frac{h^4}{768}f^{(5)}(z)=0.2083*10^{(-5)}f^{(5)}(z)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، خطای روش ریچارسون بسیار کمتر است.

تمرین سوم

الف)

از آنجا که انتگرال تابع زیر در بازه -۱ تا ۱ برابر با نصف مساحت دایره به شعاع یک است، می‌توانیم به محاسبه آن بپردازیم.

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\int_{-1}^{1}f(x)=\pi/2$$

ب)

x	f(x)
-1	0
-0.6	0.8
-0.2	0.9798
0.2	0.9798
0.6	0.8
1	0
delta x * sum f(x)	1.4238

بنابراین عدد پی برابر است با دوبرابر مقدار حاصل شده، یعنی ۲.۸۴۷۶

پ)

x	f(x)
-1	0
-0.5	0.866
0	1
0.5	0.866
1	0

و برای محاسبه R۳,۳ داریم[۱] :

R1,1	0				
R2,1	1	R2,2	1.3333		
R3,1	1.433	R3,2	1.5773	R3,3	1.5936

از فرمول‌های زیر برای روش رامبرگ استفاده شده است.

$$R1{,}1=\frac{u-l}{2}*(f(l)+f(u))$$

$$R2{,}1=\frac{u-l}{4}*(f(l)+2f((l+u)/2)+f(u))$$

$$R3{,}1=\frac{u-l}{8}*(f(l)+2[f((l+u)/4)+f(2(l+u)/4)+f(3(l+u)/4)]+f(u))$$

$$R2{,}2=R2{,}1+\frac{R2{,}1-R1{,}1}{3}$$

$$R3{,}2=R3{,}1+\frac{R3{,}1-R2{,}1}{3}$$

$$R3{,}3=R3{,}2+\frac{R3{,}2-R2{,}2}{15}$$

همان طور که مشاهده می‌شود مقدار تخمین زده شده برای پی توسط روش رامبرگ برابر است با دو برابر ۱.۵۹۳۶ یعنی ۳.۱۸۷۲

د)

همان طور که در جدول زیر مشخص است، خطای روش رامبرگ به مراتب کمتر از روش مستطیلی است. در واقع اردر خطا در روش رامبرگ پس از سه مرحله در $O(h^4)$ است.

method	error
rectangular	0.294
romberg	0.0456

تمرین چهارم

الف)

$$\int_0^{\pi} \cos(10x) f(x) = w_1 f(0) + w_2 f(\pi/2) + w_3 f(\pi)$$

$$if\, f(x)=1\,;\, 0 = w1 + w2 + w3$$

$$if\, f(x)=x\,;\int_0^{\pi} x\cos(10x) = 0.1x\sin(10x) + 0.01\cos(10x)[0 \rightarrow \pi] = 0.01 - 0.01 = 0 + \frac{\pi w_2}{2} + \pi w_3$$

$$if\, f(x)=x^2\,;\int_0^{\pi} x^2\cos(10x) = 0.001(100x^2-2)\sin(10x) + 0.02\cos(10x)[0 \rightarrow \pi] = 0.063 - 0$$

$$0.063 = 0 + \frac{\pi^2 w_2}{4} + \pi^2 w_3$$

$$\rightarrow w_1 = 0.0128, w_2 = -0.025, w_3 = 0.0128$$

ب)

از بسط سری تیلور e-x² داریم.

$$\int_{-1}^{1} \cos(10\pi x) e^{(-x^2)} dx = 2\int_0^1 \cos(10\pi x) e^{(-x^2)} dx = 2\int_0^1 \cos(10\pi x)[1-x^2]\, dx$$

$$\pi x = t\; x=0 \rightarrow t=0, x=1 \rightarrow t=\pi, dx = dt * \pi$$

$$2\int_0^{\pi} \cos(10t)(1-\frac{t^2}{\pi^2}) * (\pi)\, dt = 2\pi[w_1 f(0) + w_2 f(\pi/2) + w_3 f(\pi)] = -0.0396$$

تمرین پنجم

الف)[۲]

$$By\ the\ laws\ of\ Floating\ Point\ Arithmetic: fl\left(\frac{-3f_i + 4f_{(i+1)} - f_{(i+2)}}{2h}\right) = \frac{-3f_i + 4f_{(i+1)} - f_{(i+2)}}{2h} * |1+\delta|$$

$$|\delta| < 2\wp\,,\ where\ \wp\ is\ the\ machine\ precision \rightarrow |round-off\ error| \le \frac{\wp}{h}$$

$$if\,\left|f^{(3)}(x)\right| \le M\,;\, |truncation\ error| \le \frac{Mh^2}{3}$$

$$\frac{\wp}{h} = \frac{Mh^2}{3} \rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3\wp}{M}}$$

ب)

$$E(h)=\frac{\wp}{h}+\frac{Mh^2}{3},E'(h)=\frac{-\wp}{h^2}+\frac{2Mh}{3}=0\rightarrow h=\sqrt[3]{\frac{3\wp}{2M}}$$

تمرین ششم

الف)

Trapezoidal method

$$if\ h=2h;\int_a^b f(x)=h[f_0+2f_2+2f_4+\ldots+2f_{(2n-2)}+f(2n)]$$

$$if\ h=h;\int_a^b f(x)=h/2[f_0+2f_1+2f_2+\ldots+2f_{(2n-1)}+f(2n)]$$

Richardson extrapolation

$$\frac{2^2T(h)-T(2h)}{2^2-1}=2\frac{h}{3}*[2f_1+2f_3+..+2f_{(2n-1)}]+2\frac{h}{3}*[f_2+f_4+\ldots+f_{(2n-2)}]+\frac{h}{3}*[f_0+f_{(2n)}]$$

$$\rightarrow\frac{h}{3}*[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\ldots+4f_{(2n-1)}+f_{(2n)}]\rightarrow simpson\ 1/3\ rule$$

ب)

در قسمت قبل مشاهده کردیم چگونه با اعمال ریچاردسون با p=۲ به سیمسون با قاعده ۱/۳ میرسیم. برای رسیدن به سیمسون با قاعده ۳/۸ کافیست ریچاردسون را با p=۳ اعمال کنیم.

Trapezoidal method

$$if\ h=3h;\int_a^b f(x)=\frac{3h}{2}[f_0+2f_3+2f_6+\ldots+2f_{(3n-3)}+f(3n)]$$

$$if\ h=h;\int_a^b f(x)=h/2[f_0+2f_1+2f_2+\ldots+2f_{(3n-1)}+f(3n)]$$

Richardson extrapolation

$$\frac{3^2T(h)-T(3h)}{3^2-1}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{9h}{8}*[f_1+f_2+f_4+f_5+..+f_{(3n-1)}+f_{(3n-2)}]+\frac{6h}{8}*[f_3+f_6+\ldots+f_{(3n-3)}]+\frac{3h}{8}*[f_0+f_{(3n)}]$$

$$\rightarrow\frac{3h}{8}*[f_0+3f_1+3f_2+2f_3+3f_4+\ldots+3f_{(3n-1)}+f_{(3n)}]\rightarrow simpson\ 3/8\ rule$$

تمرین هفتم

$$f(x)\approx a(x-x_n)^2+b(x-x_n)+c\,;\,x_{min}-x_n=\frac{-b}{2a},f_{min}=\frac{-b^2}{4a}+c$$

$$f(x_{n-1})=ah^2-bh+c$$

$$f(x_n)=c$$

$$f(x_{n+1})=ah^2+bh+c$$

$$c=f_n,b=\frac{f_{n+1}-f_{n-1}}{2h},a=\frac{f_{n+1}-f_n-\frac{f_{n+1}-f_{n-1}}{2}}{h^2}\rightarrow\frac{f_{n+1}-2f_n+f_{n-1}}{2h^2}$$

$$f_{min}=\frac{-\frac{(f_{n+1}-f_{n-1})^2}{8h^2}}{\frac{f_{n+1}-2f_n+f_{n-1}}{h^2}}+f_n=\frac{-\frac{1}{8}(f_{n+1}-f_{n-1})^2}{f_{n+1}-2f_n+f_{n-1}}+f_n$$

تمرین هشتم

کد مربوطه پیاده سازی شده و درضمیمه این سند در attachments/codes/8.py آمده است. لازم به ذکر است که برای پیاده سازی سیمسون سفارشی سیاست زیر را در نظر گرفته‌ام.

- در صورتی که تعداد زیربازه‌ها زوج باشد از روش سیمسون ۱/۳ محاسبات انجام می‌شود.
- در صورتی که تعداد زیربازه‌ها مضرب ۳ باشد از روش سیمسون ۳/۸ محاسبات انجام می‌شود.
- درغیر این صورت باتوجه به اینکه عدد قطعا فرد است، سه زیربازه ابتدایی را به روش سیمسون ۳/۸ و بقیه زیربازه‌ها که قطعا تعدادی طوج دارند را به روش سیمپسون ۱/ ۳ محاسبه می‌کنم.

منابع

[1] : https://www.youtube.com/watch?v=nWhqkZp0fxw

[2] :http://www.math.niu.edu/~dattab/MATH435.2013/NUMERICAL_DIFFERENTIATIONandINTEGRATION.pdf

[3] : https://math.stackexchange.com/questions/1771002/riemann-sum-approximations-when-are-trapezoids-more-accurate-than-the-middle-su

[۴] : محاسبات عددی نیکوکار، صفحه ۵۵