به نام خدا

محاسبات عددی

تمرین سوم

بهار ۹۹

فرشته فرقانی ۹۶۱۰۲۱۰۴

۱-

الف) برای محاسبه چند جمله‌ای درونیاب لاگرانژ داریم:

0	0.6	0.9
1	0.8253	0.6216

$$L_0 = \frac{(x-0.6)(x-0.9}{(0-0.6)(0-0.9)}$$
$$L_1 = \frac{(x-0)(x-0.9}{(0.6-0)(0.6-0.9)}$$
$$L_2 = \frac{(x-0)(x-0.6}{(0.9-0)(0.9-0.6)}$$
$$\implies p_2(x) = 1L_0 + 0.8253L_1 + 0.6216L_2$$
$$\implies p_2(x) = -0.430926x^2 - 0.0326111x + 1$$

حال با جایگذاری ۰.۴۵ در معادله داریم:

$$f(0.45) = p_2(0.45) = 0.90008749$$

ب) برای محاسبه خطای مطلق عبارت مقابل را با عبارت $|cos(0.45) - p_2(0.45)|$ محاسبه می‌کنیم.

$$|cos(0.45) - p_2(0.45)| = 0.00035961235$$

ج) برای محاسبه کران بالای خطا داریم:

$$\epsilon_n \leq (x-x_0)\ldots(x-x_n)\frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}$$

حال باید t مناسب را با این شرط که $t = minimize|f^{n+1}(x_i)|$ به دست آوریم. با توجه به آنکه n = 2:

$$f(x) = cos(x) \implies f^3(x) = sin(x)$$
$$\implies t = 0.9$$

پس کران بالای خطا برابر است با:

$$\epsilon_n \leq (0.45-0)(0.45-0.6)(0.45-0.9)\frac{sin(0.9)}{3!} = 0.030375 \times \frac{0.78332690962}{6} = 0.00396559247$$

۲-

الف) با استفاده از ستون‌های دوم و سوم و چهارم داده‌ها ضرایب L_0, L_1, L_2 را حساب کرده و در فرمول جایگذاری می‌کنیم. به دست می‌آید:

$p_2(x) = 0.3766x^2 + 17.733x + 12.05$

حال با جایگذاری ۱۶ در عبارت بالا داریم:

$p_5(16) = v(16) = 392.1877$

ب) در روش تفاضلات تقسیم شده نیوتون p(x) به صورت زیر به دست می‌آید:

$p(x) = a_0 + a_1(x - x0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + [a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n - 1)]$

حال a_i ها را حساب می‌کنیم:

$f[x_0] = 0 = a_0$			
$f[x_1] = -2.5$	$f[x_0, x_1] = -2.5 = a_1$		
$f[x_2] = -2$	$f[x_1, x_2] = 0.5$	$f[x_0, x_1, x_2] = 1.5 = a_2$	
$f[x_3] = 13.5$	$f[x_2, x_3] = 15.5$	$f[x_1, x_2, x_3] = 7.5$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 2 = a_3$

پس داریم:

$p(x) = 0 - 2.5x + 1.5x(x - 1) + 2x(x - 1)(x - 2) = (-2.5)x + 1.5x^2 - 1.5x + 2x^3 - 6x^2 + 4x$
$= 2x^3 - 4.5x^2$

برای به دست آوردن مینیمم f(x)، عبارت p'(x) را محاسبه کرده و ریشه‌های آن را در می‌آوریم:

$p'(x) = 6x^2 - 9x$

$p'(x) = 0 \implies x = 0, x = 1.5$

$p(0) = 0\ ,\quad p(1.5) = -\dfrac{27}{8}$

پس مینیمم f(x) در بازه [0,3] در x = 1.5 اتفاق میوفتد که مقدار آن $(-3.375) = -\dfrac{27}{8}$ است.

-۳

الف) P_c و P_d را دو چند جمله‌ای در نظر می‌گیریم به طوری که P_c چند جمله‌ای درونیاب برای f در $x_0, \ldots, x_n$ و P_d چند جمله‌ای درونیاب برای f در $x_{i0}, \ldots, x_{in}$. به عبارتی:

$$P_c = c_0 + c_1(x - x_0) \ldots . + [c_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})]$$
$$P_d = d_0 + d_1(x - x_{i0}) \ldots . + [d_n(x - x_{i0})) \ldots (x - x_{in-1}]$$
$$\implies P_c = c_n x^n + lower\ order\ terms$$
$$P_d = d_n x^n + lower\ order\ terms$$

حال چون این چند جمله‌ای ها با روش تفاضلات تقسیم شده نیوتون حساب شده اند پس :

$$P_c = f[x_0, \ldots, x_n]x^n + lower\ order\ terms$$
$$P_d = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]x^n + lower\ order\ terms$$

حال از آنجایی که دو چند جمله‌ای برابرند پس:

$$c_n = d_n$$
$$\implies f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$$

ب) می‌دانیم:

$$f[x_0, \ldots, x_n, x] = f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x, x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_0, \ldots, x_n]}{x - x_n}$$
$$\implies f[x, x_0, \ldots, x_{n-1}] = f[x_0, \ldots, x_n] + (x - x_n)f[x_0, \ldots, x_n, x]$$

به طور مشابه داریم:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x, x_0]$$
$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x x_1)f[x, x_0, x_1]$$
$$\implies f(x) = p_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1]$$

اگر همین روال را ادامه دهیم داریم:

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0) \ldots (x - x_n)f[x, x_0, \ldots, x_n]$$
$$\implies f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0) \ldots (x - x_n)}$$

می‌دانیم که طبق قضیه‌ای $f(x) - p(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$ پس می‌توان نوشت:

$$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

ج) با استقرا این عبارت را اثبات می‌کنیم:

پایه استقرا:

$$n = 0 \implies f[x_0, x] = f[x, x_0]$$

فرض استقرا:

$$n = k - 1 \implies f[x_0, \ldots, x_{k-1}, x] = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f[x, x_i]}{\prod_{j=0, i \neq j}^{k-1}(x_i - x_j)}$$

حکم استقرا: n = k. با توجه قسمت الف این سوال می‌توانیم بنویسیم:

$$f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_k,x]=f[x_0,\ldots,x_{k-1},x,x_k]=\frac{f[x_0,\ldots,x_{k-1},x]-f[x_1,\ldots,x,x_k]}{x_0-x_k}$$

$$=\frac{f[x_1,\ldots,x_k,x]-f[x_0,\ldots,x_{k-1},x]}{x_k-x_0}(*)$$

با توجه به فرض استقرا هر یک از عبارات صورت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{f[x_1,\ldots,x_k,x]-f[x_0,\ldots,x_{k-1},x]}{x_k-x_0}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\frac{f[x,x_i]}{\prod_{j=1,i\neq j}^{k}(x_i-x_j)}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f[x,x_i]}{\prod_{j=0,i\neq j}^{k-1}(x_i-x_j)}}{x_k-x_0}$$

$$=\frac{\frac{f[x,x_1]}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_k)}+\ldots+\frac{f[x,x_k]}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})}-(\frac{f[x,x_0]}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{k-1})}+\ldots+\frac{f[x,x_{k-1}]}{(x_{k-1}-x_0)\ldots(x_{k-1}-x_{k-2})})}{x_k-x_0}$$

با ساده کردن صورت داریم:

$$\frac{f[x_1,\ldots,x_k,x]-f[x_0,\ldots,x_{k-1},x]}{x_k-x_0}=\frac{\sum_{i=1}^{k-1}[\frac{(x_k-x_0)f[x,x_i]}{\prod_{j=0,i\neq j}^{k}(x_i-x_j)}]-\frac{f[x,x_0]}{\prod_{j=1}^{k-1}(x_0-x_j)}+\frac{f[x,x_k]}{\prod_{j=1}^{k-1}(x_k-x_j)}}{x_k-x_0}$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}[\frac{(f[x,x_i]}{\prod_{j=0,i\neq j}^{k}(x_i-x_j)}]+\frac{f[x,x_0]}{\prod_{j=1}^{k}(x_0-x_j)}+\frac{f[x,x_k]}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k-x_j)}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{f[x,x_i]}{\prod_{j=0,i\neq j}^{k}(x_i-x_j)}$$

حکم استقرا ثابت شد.

-۴

x	1	3	4	5	7	8
y	14	11	7	10	15	13
x^2	1	9	16	25	49	64
x^3	1	27	64	125	343	512
x^4	1	81	256	625	2401	4096
xy	14	33	28	50	105	104
x^2y	14	99	112	250	735	832

حال سه معادله را طبق فرمول کمترین مربعات با $m = 2$ را می‌نویسیم:

$$6a_0 + 28a_1 + 164a_2 = 70$$
$$28a_0 + 164a_1 + 1072a_2 = 334$$
$$164a_0 + 1072a_1 + 7460a_2 = 2042$$
$$\implies a_0 = 16.76 \ , \quad a_1 = -3.3892 \ , \quad a_2 = 0.3923$$
$$\implies p(x) = 0.3923x^2 - 3.3892x + 16.76$$

۵-

الف) برای محاسبه تفاضلات پیش روی نیوتن ابتدا r را به روش زیر حساب می‌کنیم:

$$r = \frac{x - x_0}{h} \implies r = \frac{0.05 - 0}{0.2} = 0.25$$

سپس با ازr به دست آمده را در فرمول زیر جایگذاری می‌کنیم:

$$p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

حال مقادیر $\Delta^i f_0$ ها را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$f_0 = 1$				
$f_1 = 1.2240$	$\Delta f_0 = 0.2214$			
$f_2 = 1.49182$	$\Delta f_1 = 0.27042$	$\Delta^2 f_0 = 0.04902$		
$f_3 = 1.82212$	$\Delta f_2 = 0.3303$	$\Delta^2 f_1 = 0.05988$	$\Delta^3 f_0 = 0.01086$	
$f_4 = 2.22554$	$\Delta f_3 = 0.40342$	$\Delta^2 f_2 = 0.07312$	$\Delta^3 f_1 = 0.01324$	$\Delta^4 f_0 = 0.00238$

حال با جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$f(0.05) = p_n(0.05) = 1.0513$$

ب) برای محاسبه تفاضلات پس رو داریم:

$$r = \frac{x - x_n}{h} \implies r = \frac{0.65 - 0.8}{0.2} = (-0.75)$$

سپس با ازr به دست آمده را در فرمول زیر جایگذاری می‌کنیم:

$$p_n(x) = f_n + r\Delta f_n + \frac{r(r+1)}{2}\Delta^2 f_n + \ldots + \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!}\Delta^n f_n$$

حال مقادیر $\Delta^i f_0$ ها را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$f_0 = 1$	$\Delta f_1 = 0.2214$	$\Delta^2 f_2 = 0.04902$	$\Delta^3 f_3 = 0.01086$	$\Delta^4 f_4 = 0.00238$
$f_1 = 1.2240$	$\Delta f_2 = 0.27042$	$\Delta^2 f_3 = 0.05988$	$\Delta^3 f_4 = 0.01324$	
$f_2 = 1.49182$	$\Delta f_3 = 0.3303$	$\Delta^2 f_4 = 0.07312$		
$f_3 = 1.82212$	$\Delta f_4 = 0.40342$			
$f_4 = 2.22554$				

حال با جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$f(0.65) = p_n(0.65) = 1.9156$$

۶-

الف) می‌دانیم که p(x) به دست آمده از روش‌های مختلف درونیابی یکتاست. حال چون f(x) خود یک چند جمله‌ای از درجه k است پس$p(x_i) = f(x_i)$. حال در روش تفاضلات تقسیم‌شده داریم:

$p(x_i) = f(x_i) = c_0 + c_1(x_i - x_0) \ldots . + [c_n(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{n-1})]$

پس ضریب x_i^n در این چند جمله‌ای برابر با $f[x_0, \ldots, x_n]$است. حال چون p از درجه k است پس ضریب این جمله در p صفر است پس:

$f[x_0, \ldots, x_n] = 0 \quad for \;\; n > k$

ب)

.a

می‌دانیم که p(x) به دست آمده از روش‌های مختلف درونیابی یکتاست. حال چون f(x) خود یک چند جمله‌ای از درجه n+1 است پس $p(x_i) = f(x_i)$. حال در روش تفاضلات تقسیم‌شده داریم:

$p(x_i) = f(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) \ldots . + [a_n(x_i - x_0) \ldots (x - x_{n-1})]$

$\implies x_i^{n+1} = a_0 + a_1(x_i - x_0) \ldots . + [a_{n+1}(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_n)]$

پس ضریب x_i^{n+1} در این چند جمله‌ای برابر با $f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$است پس:

$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = 1$

.b

می‌دانیم:

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, \ldots, x_n] - f[x_1, \ldots, x_{n+1}]}{x_0 - x_n}$$

$$\implies f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_1, \ldots, x_{n+1}] + (x_0 - x_n)f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$$

به طور مشابه داریم:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x, x_0]$$
$$f[x, x_0] = f[x, x_0] + (x - x_1)f[x, x_0, x_1]$$
$$\implies f(x) = p_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1]$$

اگر همین روال را ادامه دهیم داریم:

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0) \ldots (x - x_n)f[x, x_0, \ldots, x_n]$$
$$\implies p_n(x) = f(x) - (x - x_0) \ldots (x - x_n)f[x, x_0, \ldots, x_n]$$
$$f(x) = x^{n+1} \quad and \quad f[x, x_0, \ldots, x_{n+1}] = 1$$
$$\implies p_{n+1}(x) = x^{n+1} - (x - x_0) \ldots (x - x_n)$$