به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

کنترل دیجیتال

تمرین شماره ۳

نام و نام خانوادگی	محیا شهشهانی
شماره دانشجویی	۸۱۰۱۹۹۵۹۸
تاریخ ارسال گزارش	۱۵. اردیبهشت.۱۴۰۳

Table of Contents

سوال ۱

تمرین سوم کنترل دیجیتال.

مهیا [illegible] - ۸۱۰۱۹۹۵۹۸

الف)

$$G_{(s)} = \frac{s+2}{s^2+3s} \qquad s \to \infty \quad G(s) = 0 \longrightarrow$$ صفر در بی‌نهایت $\downarrow$ $Z=-1$ صفر در

برای هر صفر متناهی در $S = Z_i \longrightarrow Z = e^{TZ_i}$

$S = -2 \qquad * \; Z = e^{-2T}$

برای هر قطب متناهی $S = P_i \longrightarrow Z = e^{TP_i}$

$S = 0 \longrightarrow * \; Z = 1$

$S = -3 \longrightarrow * \; e^{-3T}$

$$G_D = k_D \cdot \frac{(z+1)(z-e^{-2T})}{(z-e^{-3T})(z-1)}$$

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \frac{2}{3} = \lim_{z\to 1} G_D(z) = \frac{2\cdot(1-e^{-2T})}{(1-e^{-3T})} \cdot k_D$$

با صرف‌نظر از قطب در صفر

با صرف‌نظر از قطب $z=1$

$$\Longrightarrow k_D = \frac{(1-e^{-3T})}{(1-e^{-2T})}\cdot\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \boxed{G_D = \frac{(1-e^{-3T})}{3(1-e^{-2T})}\cdot\frac{(z+1)(z-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-3T})}}$$

ب) حفظ پاسخ ضربه:

$$G_D(z) = Z\{G_c(s)\}$$

$$\to G_c(s) = \frac{s}{(s+2)(s+4)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4} = \frac{-1}{1-e^{-2T}z^{-1}} + \frac{2}{1-e^{-4T}z^{-1}}$$

$$= \boxed{\frac{1-2e^{-2T}z^{-1}+e^{-4T}z^{-1}}{(1-e^{-2T}z^{-1})(1-e^{-4T}z^{-1})}}$$

ج)

$$G(s) = \frac{10}{s+10}$$

$$s \to \frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad G_D(z) = \frac{10}{\frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+10}$$

$$= \boxed{\frac{10(z+1)\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}{\omega_0(z-1)+10\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)(1+z)}}$$

ت) [illegible] پاسخ پله

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)(s+5)} \rightarrow G_D(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,G(s)\right\}$$

$$\rightarrow Z\left\{\frac{(1-e^{-Ts})}{s}\cdot\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+5}\right\}=(1-z^{-1})\,Z\left\{\frac{1/10}{s}+\frac{-1/6}{s+2}+\frac{1/15}{s+5}\right\}$$

$$=(1-z^{-1})\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-e^{-5T}z^{-1}}\right)$$

$$=(z-1)\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-e^{-2T})}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{(z-e^{-5T})}\right)$$

$$=\frac{z-1}{30}\left(\frac{3}{z-1}-\frac{5}{(z-e^{-2T})}+\frac{2}{z-e^{-5T}}\right)$$

$$=\frac{(z-1)\left(3(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})-5(z-1)(z-e^{-5T})+2(z-1)(z-e^{-2T})\right)}{30(z-1)(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

$$=\frac{3(z^2+e^{-7T}-ze^{-2T}-ze^{-5T})-5(z^2+e^{-5T}-ze^{-5T}-z)+2(z^2+e^{-2T}-z-ze^{-2T})}{30(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

$$\boxed{=\frac{3e^{-7T}-5ze^{-2T}+2ze^{-5T}-5e^{-5T}+2e^{-2T}+3z}{30(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}}$$

ث) تفاضل معکوس.

$$s\rightarrow\frac{1-z^{-1}}{T}\qquad G(s)=\frac{s+1}{(s+3)(s+4)}$$

$$\rightarrow G_D(z)=\frac{(1-z^{-1})/T}{\left(\frac{(1-z^{-1})}{T}+3\right)\left(\frac{(1-z^{-1})}{T}+4\right)}=\frac{(1-z^{-1})}{(1-z^{-1}+3T)(1-z^{-1}+4T)}$$

$$\boxed{=\frac{(z-1)}{(z+3Tz-1)(z+4Tz-1)}}$$

سوال ۲

۲ـ الف)

تفاضل مستقیم $\longrightarrow s \to \frac{z-1}{T}$

" معکوس $\longrightarrow s \to \frac{z-1}{Tz}$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

تطبیق یافته: صفر در بی‌نهایت $\quad s\to\infty, G(s)\to 0$

قطب: $\quad P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

$$e^{(-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})T} \;,\; e^{(-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})T}$$

تطبیق:
$$G_D = K_p \frac{(z+1)}{\underbrace{(z-e^{(-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})T})}_{P_1}\underbrace{(z-e^{(-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})T})}_{P_2}}$$

$$\lim_{z\to1} G_D = \frac{K_p \cdot 2}{(1-P_1)(1-P_2)} = \lim_{s\to0} G(s) = 1$$

$$\Longrightarrow K_p = \frac{(1-P_1)(1-P_2)}{2}$$

تفاضل مستقیم:
$$G_D(z) = \frac{\omega_n^2}{\left(\frac{z-1}{T}\right)^2 + 2\zeta\omega_n\left(\frac{z-1}{T}\right)+\omega_n^2}$$

تفاضل معکوس:
$$G_D(z) = \frac{\omega_n^2}{\left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 + 2\zeta\omega_n\left(\frac{z-1}{Tz}\right)+\omega_n^2}$$

تطبیق یافته:
$$G_D(z) = \frac{\left(1-e^{T(-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right)\left(1-e^{T(-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right)(z+1)}{2\left(z-e^{T(-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right)\left(z-e^{T(-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right)}$$

ب) روش تفاضل مستقیم لزوماً پایداری رو حفظ نمی‌کنه.

پایداری $\longrightarrow Re(s)<0 \Longrightarrow Re\left(\frac{z-1}{T}\right) \xleftrightarrow{T>0} Re(z-1)<0 \longrightarrow Re(z)<1$

$z=\sigma+j\omega \Longrightarrow Re(\sigma+j\omega)<1 \longrightarrow Re(\sigma)<1 \longrightarrow$ قطب به ازای این مقادیر پایداره

$$G_D(z) = \frac{\omega_n^2}{\frac{(z-1)^2}{T^2}+2\zeta\omega_n\left(\frac{z-1}{T}\right)+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\frac{z^2-2z+1}{T}+\frac{2\zeta\omega_n}{T}z-\frac{2\zeta\omega_n}{T}+\omega_n^2}$$

$$z = \frac{-\left(\frac{2\zeta\omega_n}{T}-\frac{2}{T}\right)}{2\left(\frac{1}{T}\right)} \pm \sqrt{x^2-\left(\frac{1}{T}-\frac{2\zeta\omega_n}{T}+\omega_n^2\right)}\Big/\tfrac{1}{T}$$

$$= 1-\zeta\omega_n \pm \sqrt{(1+\zeta^2\omega_n^2-2\zeta\omega_n-1+2\zeta\omega_n-\omega_n^2T}$$

$$\boxed{z = 1-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-T}} \longrightarrow$$ ریشه‌های تابع تبدیل گسسته

برای پایداری لازم است که ریشه داخل دایره واحد باشند. اگر دوره نمونه‌برداری را از حدی زیادتر کنیم ریشه خارج دایره واحد می‌افتد. که به معنی ناپایداری خود این فیلتر یا کنترل‌کننده ماست.
چه روی اندازه T بحث می‌کنیم

ادامه ۲-ب) روش تفاضل معکوس:

$\mathrm{Re}(s) < 0$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0 \xrightarrow{z=\sigma+j\omega} \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma+j\omega-1}{T\sigma+Tj\omega}\right) \xrightarrow{T>0}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left\{\frac{(\sigma+j\omega-1)(\sigma-j\omega)}{\sigma^2+\omega^2}\right\} \overset{\mathrm{Re}}{=} \left\{\frac{\sigma^2+\omega^2-\sigma+j\omega}{\sigma^2+\omega^2}\right\} < 0$$

$$\Rightarrow (\sigma^2+\omega^2-\sigma) < 0 \xrightarrow{+1/4 \; +1/4} \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2+\omega^2 < 1/4 \rightarrow$$ یک دایره در صفحه z

با شعاع ۱/۲ و مرکز ۱/۲.

⇐ خود این دایره همیشه درون دایره واحد قرار می‌گیرد ⇐ مستقل پایداری داریم.

پس با روش تفاضل معکوس اگر $G(s)$ پایدار باشد، حتماً $G(z)$ پایدار است.

پ)

$\zeta = 0.5$

$\omega_n = 5 \; rad/sec$

$T = 0.2$

$$\rightarrow G(s) = \frac{25}{s^2+5s+25} \rightarrow -2.5 \pm \sqrt{6.25-25} = -2.5 \pm 4.33j$$

$$\xrightarrow[\text{تطبیق}]{} G_D(z) = \frac{\left(1-e^{0.2(-2.5+4.33j)}\right)\left(1-e^{0.2(-2.5-4.33j)}\right)(z+1)}{2\left(z-e^{0.2(-2.5+4.33j)}\right)\left(z-e^{0.2(-2.5-4.33j)}\right)}$$

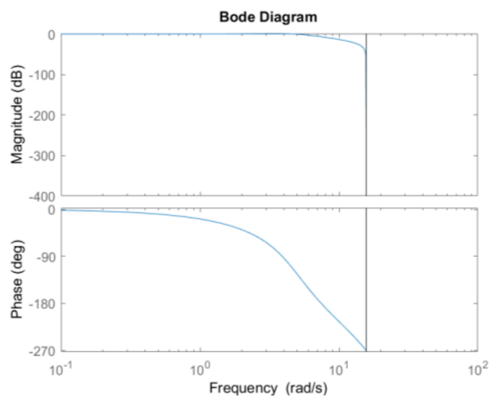
```
num = [25];
den = [1 5 25];
Gs = tf(num, den);

Ts = 0.2;
Gz = c2d(Gs, Ts, 'matched');
plot(Gz);
```

Command Window

```
      Numerator: {[0 0.2910 0.2910]}
    Denominator: {[1 -0.7859 0.3679]}
       Variable: 'z'
        IODelay: 0
     InputDelay: 0
    OutputDelay: 0
             Ts: 0.2000
       TimeUnit: 'seconds'
      InputName: {''}
      InputUnit: {''}
     InputGroup: [1×1 struct]
     OutputName: {''}
     OutputUnit: {''}
    OutputGroup: [1×1 struct]
```

بررسی تابع تبدیل با روش صفر و قطب تطبیق یافته در متلب:



پاسخ فرکانسی فیلتر

سوال ۳

-۳

$$H(s)=\frac{s+1}{0,1s+1}$$ الف) تفاضل مستقیم $\;s\to\frac{z-1}{T}\;\Rightarrow\;\dfrac{\frac{z-1}{T}+1}{0,1\left(\frac{z-1}{T}\right)+1}$

$$G_{D(z)}=\frac{z-1+T}{0,1z-0,1+T}$$

صفر $\to z=1-T \xrightarrow{T=0,25} z=0,75$

قطب $\to z=1-10T \longrightarrow z=-1,5$

خارج دایره واحد.

$(T+1)z-1=0$

ب) تفاضل معکوس $\to s\to\frac{z-1}{Tz}\qquad \dfrac{\frac{z-1}{Tz}+1}{0,1\left(\frac{z-1}{Tz}\right)+1}=\dfrac{z-1+Tz}{0,1z-0,1+Tz}$

صفر $\to z=\frac{1}{T+1}\xrightarrow{T=0,25}\frac{1}{1,25}=0,8$

قطب $\to z=\frac{0,1}{T+0,1}\xrightarrow{T=0,25}\frac{1}{0,35}=0,29$

ج) تطبیق یافته صفر و قطب $\quad s\to\infty \quad H(s)=10\quad$ صفر یا قطب در بی نهایت ندارد.

الان $\to P_1\Rightarrow s=-\frac{1}{0,1}=-10 \rightsquigarrow z=e^{-10T}$

$z_1\Rightarrow s=-1 \rightsquigarrow z=e^{-T}$

$$G_D=K_p\frac{(z-e^{-T})}{(z-e^{-10T})}\qquad \lim_{z\to1}=\lim_{s\to0}H(s)=10$$

$$=K_p\frac{(1-e^{-T})}{(1-e^{-10T})}=10\longrightarrow K_p=10\frac{(1-e^{-10T})}{(1-e^{-T})}$$

$$\Rightarrow G_D=10\frac{(1-e^{-10T})}{(1-e^{-T})}\cdot\frac{(z-e^{-T})}{(z-e^{-10T})}\overset{T=0,25}{=}\frac{10(1-0,08)}{(1-0,78)}\cdot\frac{(z-0,78)}{(z-0,08)}$$

$$=\boxed{\frac{9,2}{0,22}\cdot\frac{(z-0,78)}{(z-0,08)}}\quad (41,8)$$

ت) تبدیل دوخطی $S \rightarrow \frac{2}{T}\ \frac{z-1}{z+1}\ ,\ H_D(z)=\dfrac{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+1}{0.1\cdot\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}+1}=\dfrac{2z-2+Tz+T}{0.2z-0.2+Tz+T}$

$$\xrightarrow{\text{صفر}} z=\frac{2-T}{T+2}\overset{T=0.25}{=}\frac{1.75}{2.25}=0.\overline{7}$$

$$\xrightarrow{\text{قطب}} z=\frac{0.2-T}{T+0.2}=\frac{-0.05}{0.45}=-0.\overline{1}$$

ث) پیش‌تاب $S \rightarrow \overset{A}{\frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}}\ \frac{z-1}{z+1}\qquad H_D(z)=\dfrac{A\,\frac{z-1}{z+1}+1}{0.1\cdot A\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+1}$

$$=\frac{Az-A+z+1}{0.1\cdot A\cdot z-0.1\cdot A+z+1}$$

$$\xrightarrow{\text{صفر}} z=\frac{1-A}{A+1}$$

$$\xrightarrow{\text{قطب}} z=\frac{0.1A-1}{1+0.1A}$$

ج) نگهدار مرتبه صفر $\equiv$ حفظ پاسخ پله $\qquad H_D(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-TS}}{S}H(s)\right\}$ $\qquad \frac{10(S+1)}{S+10}\rightarrow$ ۴

$$=\left(1-z^{-1}\right)Z\left\{H(s)\right\}$$

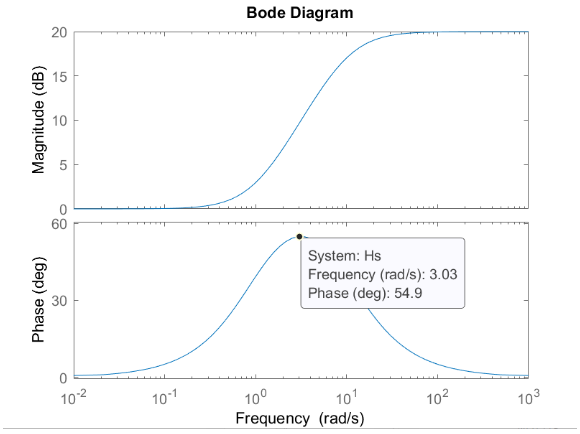
$$H^*(s)=\sum_{P_i}\mathrm{Res}\ X_P\ \frac{1}{1-e^{-T(S-P)}}=\lim_{P\to -10}(10)(P+1)\cdot\cancel{(P+10)}\cdot\frac{1}{\cancel{P+10}}\cdot\frac{1}{1-e^{-T(S-P)}}$$

$$\Rightarrow 10(-9)\frac{1}{1-e^{-T(S+10)}}\Bigg|_{s=\frac{1}{T}\ln(z)}=\frac{-90}{1-z^{-1}e^{-10T}}$$

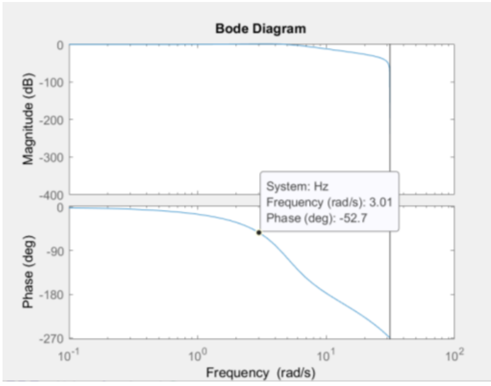
$$\Rightarrow H_D(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(\frac{-90}{1-z^{-1}e^{-10T}}\right)\xrightarrow{\text{قطب}} z=e^{-10T}=e^{-2.5}=0.08$$

$$\xrightarrow{\text{صفر}} z=1$$

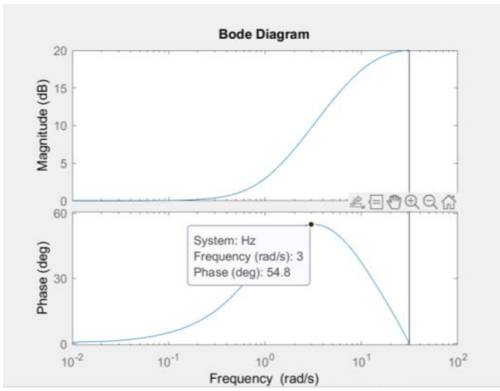
خود تابع تبدیل کنترل کننده پیش فاز حدود ۵۵ درجه در فرکانس ۳ رادیان تزریق میکند.



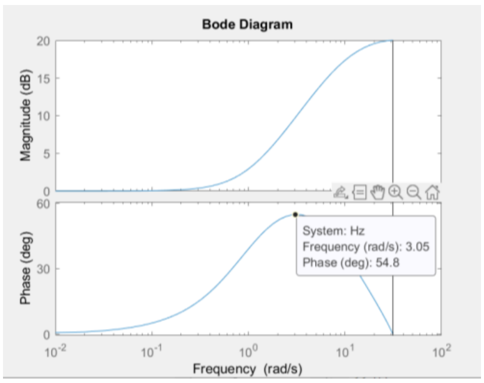
روش صفر و قطب تطبیق یافته:



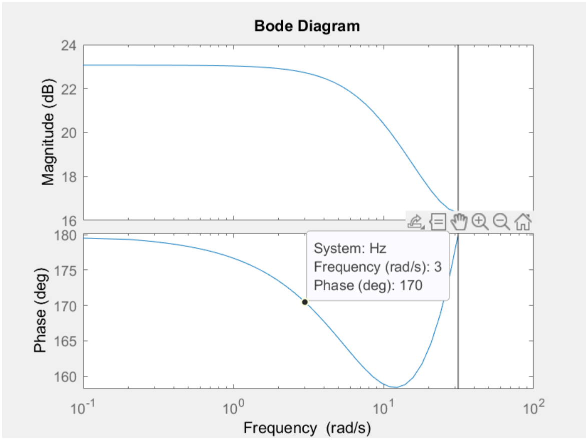
روش تبدیل دو خطی:



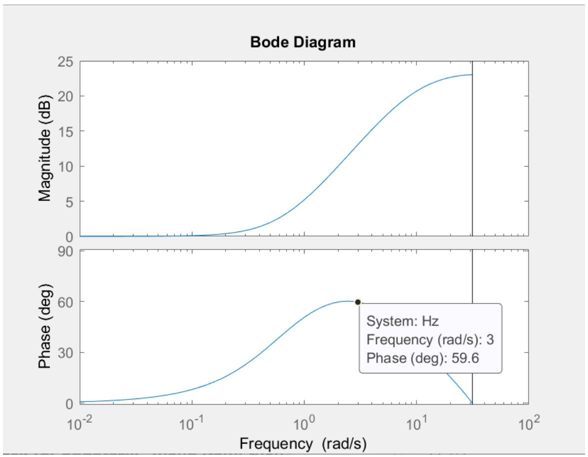
روش پیشتاب فرکانسی:



روش حفظ پاسخ ضربه فیلتر:

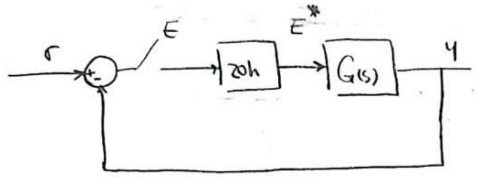


روش حفظ پاسخ پله فیلتر:



سوال ٤

-۴



$$E_{(s)} = r_{(s)} - Y_{(s)} \longrightarrow E(s) = r(s) - E^*(s)\,G(s) \longrightarrow E^*(s) = r^*(s) - E^*(s)\,G^*(s)$$

$$E^*_{(s)}\,G(s) = Y_{(s)} \qquad \Longrightarrow E^*(s) = \frac{r^*(s)}{1+G^*(s)} \quad (I)$$

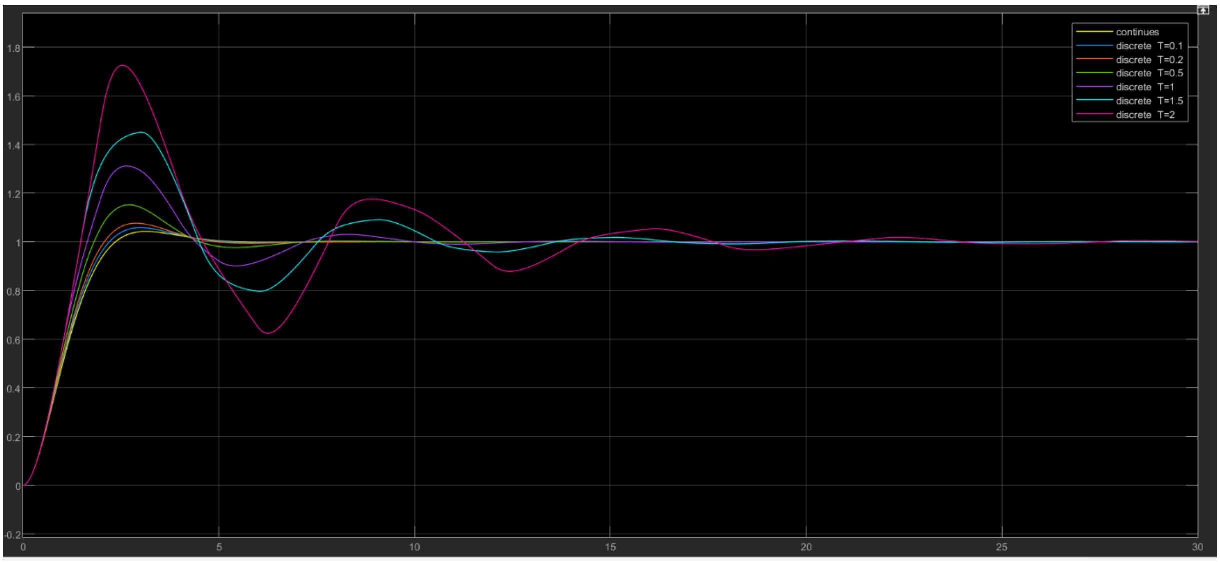
$$\Longrightarrow E^*(s)\,G^*(s) = Y^*(s)$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} Y^*(s) = \frac{r^*(s)}{1+G^*(s)} \cdot G^*(s) \Longrightarrow \frac{Y^*(s)}{r^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1+G^*(s)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{Y(z)}{r(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}}$$

زمان گسسته

$$\longrightarrow Z\{G(s)\} = Z\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s} + \frac{-1}{s+2}\right\} \Longrightarrow \boxed{\overbrace{\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}}^{G(z)}}$$



مشاهده میکنیم که با افزایش زمان نمونه برداری، مدت زمان رسیدن به حالت پایدار و همچنین میزان فراجهش افزایش می یابد.

فراجهش	زمان نشست	زمان نمونه برداری
۴.۳٪	۴.۲	پیوسته
۵.۸٪	۴.۳	0.1
۷.۷٪	۴.۳	0.2
۱۵.۳٪	۵.۹	0.5
۳۱.۲٪	۹	1
۴۵٪	۱۳	1.5
۷۲.۴٪	۱۹.۸	2

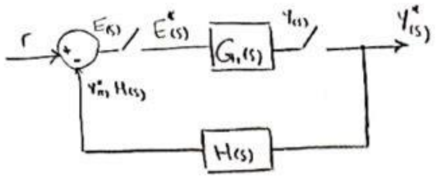
در ابتدا تغییرات زمان نشست و فراجهش به نسبت کم است اما پس از آنکه زمان نمونه برداری را از ۰.۵ افزایش میدهیم هر دو پارامتر به میزان قابل توجهی تغییر میکنند.

سوال ۵

۵ - الف)

سوال ۱۵ بالا :

$H(s) = ۲$



$$E(s) = R(s) - Y^*(s) H(s) \longrightarrow E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s) H^*(s) \xrightarrow{(1)} E^*(s) = R^*(s) - E^*(s) G_1^*(s) H^*(s)$$

$$E^*(s) G_1(s) = Y(s) \longrightarrow E^*(s) G_1^*(s) = Y^*(s) \quad (1)$$

$$\Longrightarrow E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G_1^*(s) H^*(s)}$$

$$\Longrightarrow E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_1(z) H(z)}$$

$$\rightsquigarrow K_p = \lim_{z \to 1} G_1(z) H(z) = ۱۰$$

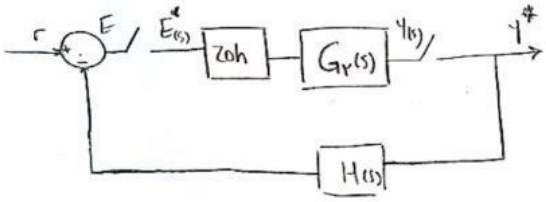
$$G_1(s) = \left(\frac{-۱/۳}{s} + \frac{-۱/۳}{s+۳}\right)۵ = \frac{۵}{۳}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+۳}\right) \xrightarrow{z} \frac{۵}{۳}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-۳T}z^{-1}}\right)$$

$$\Longrightarrow K_p = \lim_{z \to 1} \frac{۵ \times ۲}{۳}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-۳T}z^{-1}}\right) = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \to 1} \frac{(1-z^{-1})}{T} \frac{۱۰}{۳}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-۳T}z^{-1}}\right) = \frac{۱۰}{۳} T \overset{T=۰/۱}{=} \frac{۱}{۳}$$

$$K_a = \lim_{z \to 1} \frac{(1-z^{-1})^۲}{T^۲} \cdot \frac{۱۰}{۳} \cdot \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-۳T}z^{-1}}\right) = ۰$$

سوال ۱۵ پایین .



$$E(s) = R(s) - Y^*(s) H(s)$$

$$E^*(s)\, zoh\, G_2(s) = Y(s) \longrightarrow Y^*(s) = E^*(s) (zoh\, G_2)^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s) H^*(s) = R^*(s) - E^*(s) (zoh\, G_2)^* H^*(s)$$

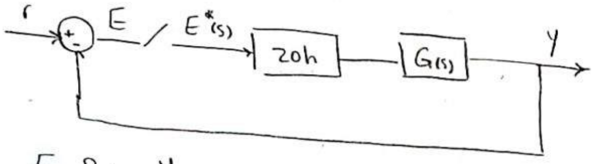
$$\Longrightarrow E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + (zoh\, G_2)^* H^*(s)}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s}\right\}=(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=(1-z^{-1})\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{Tz\,(1-z^{-1})}{z^2(1-z^{-1})^2}=\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow K_p=\lim_{z\to1}\frac{2Tz^{-1}}{1-z^{-1}}=\infty \qquad K_a=\lim\frac{(1-z^{-1})^2}{T^2}\cdot\frac{2Tz^{-1}}{1-z^{-1}}=0$$

$$K_v=\lim_{z\to1}\frac{2T(1-z^{-1})}{T}\cdot\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=2$$

ب)



$H(s)=1$

برای پیوسته:

$$K_p=\lim_{s\to0}G(s)=\infty$$

$$K_v=\lim_{s\to0}s\,\frac{10}{s+1}=10$$

$$K_a=\lim s^2\,\frac{10}{s+1}=0$$

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

$$E^*(s)\,Zoh(s)\,G(s)=Y(s)\longrightarrow E(s)=R(s)-E^*(s)\,Zoh(s)\,G(s)$$

$$\Rightarrow E^*(s)=R^*(s)-E^*(s)\,(Zoh\,G)^*(s)$$

$$\Rightarrow E(s)=\frac{R(s)}{1+(Zoh\,G(s))^*}$$

برای گسسته:

$$\rightsquigarrow \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10}{s(s+1)}\right\}$$

$$=(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{10}{s^2(s+1)}\right\}=10(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$=10(1-z^{-1})\left(\frac{-1}{1-z^{-1}}+\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right)$$

$$K_p=\lim_{z\to1}\left(-10+\frac{10Tz^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{10(1-z^{-1})}{1-e^{-T}z^{-1}}\right)=\infty$$

$$K_v=\lim_{z\to1}\frac{(1-z^{-1})}{T}\left(-10+\frac{10Tz^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{10(1-z^{-1})}{1-e^{-T}z^{-1}}\right)=10z^{-1}=\boxed{10}\xrightarrow{T}$$ فارغ از مقدار

$$K_a=\lim_{z\to1}\frac{(1-z^{-1})^2}{T^2}\left(-10+\frac{10Tz^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{10(1-z^{-1})}{1-e^{-T}z^{-1}}\right)=\boxed{0}$$

سوال ۶

۶- حداکثر بالازدگی ٪۳۰ $\longleftarrow \frac{3}{10} > \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \longleftarrow$ برای 0.5 ٪۲۰ $\longleftarrow$ می‌دهیم $\underline{\zeta = 0.45}$

خطای حالت ماندگار به شیب کمتر از ۱ $\longleftarrow$

صفحه قبل سوال $\Longrightarrow$

$$Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{k}{s(0.5s+1)}\right\} = (1-z^{-1})\,k\,Z\left\{\frac{1}{s^2(0.5s+1)}\right\} = (1-z^{-1}).k.Z\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{0.5}{s+2}-\frac{0.5}{s}\right\}$$

$$= k(1-z^{-1})\left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{0.5}{1-e^{-2T}z^{-1}}-\frac{0.5}{1-z^{-1}}\right)$$

$$\Rightarrow K_v = \lim_{z\to1}\frac{(1-z^{-1})}{T}\cdot k(1-z^{-1})\left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{0.5}{1-e^{-2T}z^{-1}}-\frac{0.5}{1-z^{-1}}\right)$$

$$\overset{\lim}{\underset{z\to1}{=}}\frac{kz^{-1}}{1} = \overset{\text{ثابت خطا}}{k} \rightsquigarrow \underset{\text{خطای حالت ماندگار}}{K_v > 1} \longrightarrow \boxed{K>1}$$

تعیین زمان نمونه‌برداری:

$$\frac{2\pi}{\omega_d} = 10T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{2.2\sqrt{0.7975}} = \frac{2\pi}{2.2\times0.89} = 10T = 3.2 \longrightarrow \boxed{T=0.32}$$

حلقه بسته $\Longrightarrow$

$$\frac{2k/s(s+2)}{1+2k/s(s+2)} = \frac{2k}{s^2+2s+2k} \longrightarrow \omega_n^2 = 2k \longrightarrow \frac{\omega_n^2}{2} = \boxed{2.42=K}$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \longrightarrow \zeta = 1$$

$$\zeta = 0.45 \qquad \underline{\omega_n = 2.2}$$

سوال ۷

۷- مثل سوالات قبل :

$$(ZohG)^* = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\left(\frac{z^{-1}T}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) \quad , \quad \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(ZohG)(z)}{1+(ZohG)z}$$

$$= \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} - 1 + \frac{(1-z^{-1})}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ زمان نشست معیار ۲٪ , مقدار $O.S \Rightarrow \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

به ازای

$$\to \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - 1 + \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - 1 + \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}}$$

$$= \frac{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - 1 + \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}}{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}} = \frac{z^{-1}(1-e^{-T}z^{-1}) + (1-z^{-1})^2 - (1-e^{-T}z^{-1})(1-z^{-1})}{z^{-1}(1-e^{-T}z^{-1}) + (1-z^{-1})^2}$$

$\Rightarrow$ اگر $T=1$: $\frac{-2+e+z}{-1+e-ez+z^2e}$ ریشه های این دو تا معادله رو حساب میکنیم،

اگر $T=0.5$: $\frac{2e^{1/2}-3+2z-e^{1/2}z}{-1+2e^{1/2}-3e^{1/2}z+2e^{1/2}z^2}$

با بررسی نمودار صفحه Z به ازای

$T=1 \leftarrow \zeta=0.2 \quad \omega_n=1.1$

$T=0.5 \leftarrow \zeta=0.4 \quad \omega_n=1$

ریشه ها

$T=1 \to z_{T=1} = 1/2 \pm j\sqrt{\frac{3e^2-4e}{4e^2}}$, $z_{T=0.5} = \frac{3}{4} \pm j\sqrt{\frac{14e-14e^{1/2}}{2e}} - 1/4$

$T=1$

$O.S \Rightarrow \exp\left(\frac{-0.2\pi}{\sqrt{1-0.2^2}}\right) = \exp\left(\frac{-0.2\times\pi}{0.98}\right) = 0.52 \to 52\%$, $t_{s_{0.02}} = \frac{4}{0.2\times0.52} = \boxed{18.18s}$

$T=\frac{1}{2}$

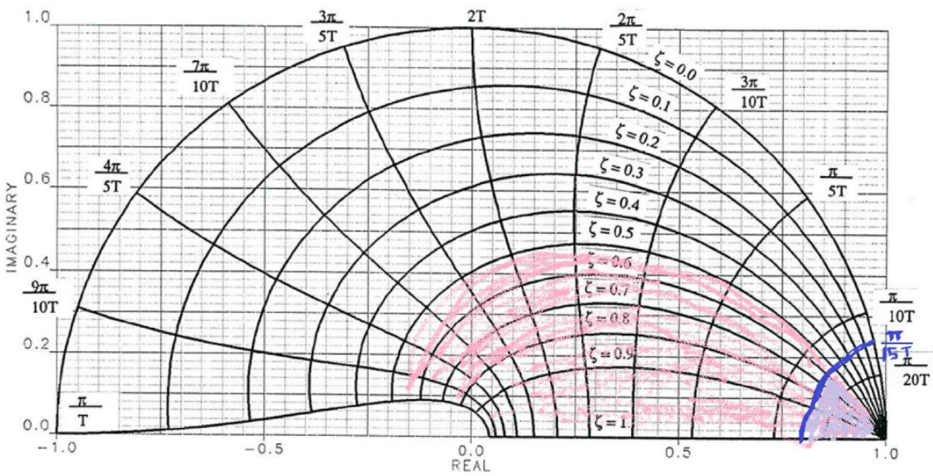
$O.S \Rightarrow \exp\left(\frac{-0.4\pi}{\sqrt{1-0.16}}\right) = \exp\left(\frac{-0.4\pi}{0.92}\right) = 0.255 \to 26\%$, $t_{s_{0.02}} = \frac{4}{0.4} = \boxed{10s}$

ب)

ناحیه معادل $\zeta \geq 0.5$, $\omega_n \leq \frac{\omega_s}{30}$

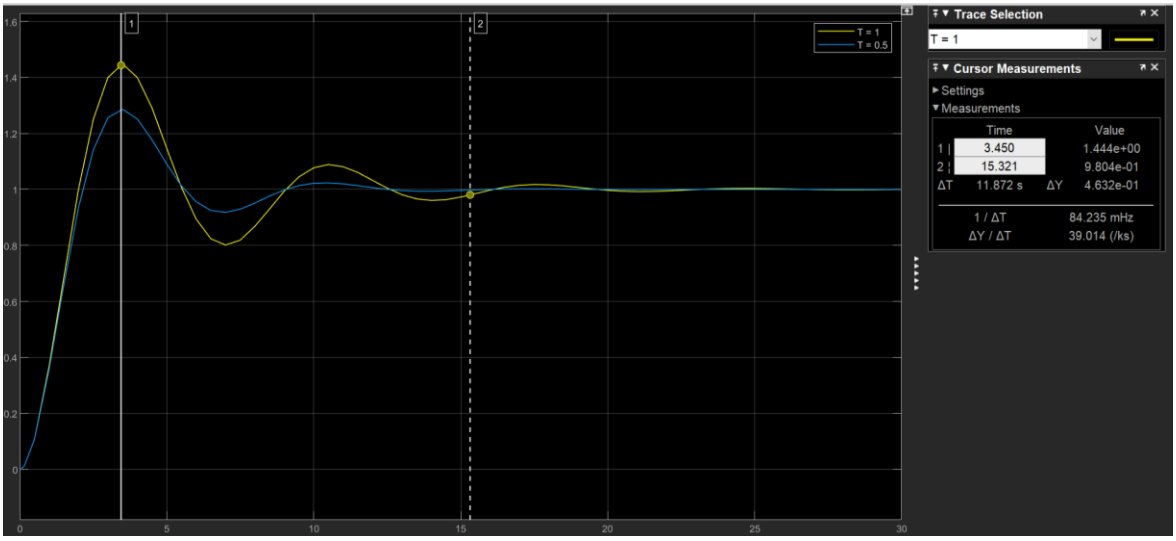
$$w_n \le \frac{w_s}{30}\,, w_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$w_n \le \frac{\pi}{15T}$$



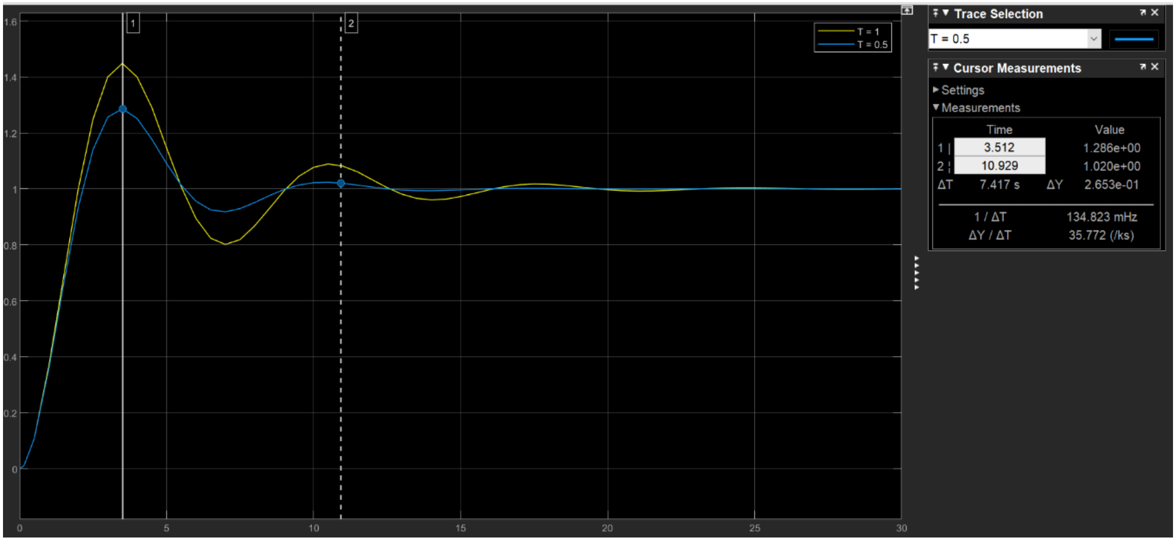
ناحیه صورتی رنگ مربوط به زتاهای کوچکتر از نیم و اشتراک آن با شرط روی امگا، ناحیه خواسته شده بنفش رنگ می باشد.

انجام شبیه سازی ها برای قسمت الف:



اورشوت: ۴۴ درصد. زمان نشست: ۱۵ ثانیه.

اورشوت: ۲۹ درصد. زمان نشست: حدود ۱۱ ثانیه.



میبینیم که محاسبات با شبیه سازی مطابقت خوبی دارد.