معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان کاویتاسیونی را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\Gamma\frac{\partial Q}{\partial \tau}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=G$$

که:

$$Q=\begin{Bmatrix} p \\ u \\ v \\ \alpha_l \end{Bmatrix},\ E=\begin{Bmatrix} u \\ \rho_m u^2+p \\ \rho_m uv \\ \alpha_l u \end{Bmatrix},\ F=\begin{Bmatrix} v \\ \rho_m uv \\ \rho_m v^2+p \\ \alpha_l v \end{Bmatrix},\ G=\left(\dot{m}^{+}+\dot{m}^{-}\right)\begin{Bmatrix} 1-\dfrac{1}{\rho_v} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\rho_m\beta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & 0 & u\Delta\rho_l \\ 0 & 0 & \rho_m & v\Delta\rho_l \\ \dfrac{\alpha_l}{\rho_m\beta^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پارامترهای ثابت در این معادلات به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho_l=1$$

$$\rho_v=0.01$$

$$p_\infty=1$$

$$p_v=p_\infty-\sigma/2$$

$$u=1$$

$$\beta=1.4$$

$$\rho_m=\alpha_l+(1-\alpha_l)\rho_v$$

$$\Delta\rho_l=\rho_l-\rho_v$$

و عبارات چشمه نیز می توانند با استفاده از روابط زیر به دست آیند:

Merkle:

$$C_{dest}=1$$

$$C_{prod}=80$$

$$\dot{m}^{-}=C_{dest}\alpha_l\frac{min(0,p-p_v)}{\rho_v}$$

$$\dot{m}^{+} = C_{prod}(1-\alpha_l)\,max(0, p-p_v)$$

Kunz:

$$C_{dest} = 1e5$$

$$C_{prod} = 200$$

$$\dot{m}^{-} = C_{dest}\rho_v\alpha_l\,min(0, p-p_v)$$

$$\dot{m}^{+} = C_{prod}\rho_v(1-\alpha_l)\alpha_l^2$$

همچنین ماتریس معکوس Γ به صورت زیر می باشد:

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_m\beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u\,\Delta\rho_l\,\alpha_l}{\rho_m} & \frac{1}{\rho_m} & 0 & -\frac{u\,\Delta\rho_l}{\rho_m} \\ \frac{v\,\Delta\rho_l\,\alpha_l}{\rho_m} & 0 & \frac{1}{\rho_m} & -\frac{v\,\Delta\rho_l}{\rho_m} \\ -\alpha_l & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

روش FV

$$\iint \left(\Gamma\frac{\partial Q}{\partial \tau}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}-G\right)dxdy=0$$

$$A_j\frac{\partial Q_j}{\partial \tau}=-R_j$$

که در این رابطه A_j مساحت المان j ام می باشد.

$$R_j={\Gamma^{-1}}_{ji}\left[\left(\sum_{k=1}^{3}H_k^{*}\Delta l\right)_i-G_iA_j\right]$$

که H_k^{*} در واقع شار عددی بردار شار H_k می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$H=En_x+Fn_y$$

شار عددی رو

این شار عددی به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_k^* = \frac{1}{2}(h_L + h_R - D)$$

$$h_L = E_L n_x + F_L n_y$$

$$h_R = E_R n_x + F_R n_y$$

متغیرهای متوسط روش رو به صورت زیر محاسبه می شود:

$${}^{*} = \frac{{}_{R} + {}_{L}}{2}$$

و بنابراین به صورت زیر می باشند:

$$u^* = \frac{u_L + u_R}{2}$$

$$v^* = \frac{v_L + v_R}{2}$$

$$p^* = \frac{p_L + p_R}{2}$$

$$\alpha_l{}^* = \frac{\alpha_{l_L} + \alpha_{l_R}}{2}$$

حال برای محاسبه عبارت D از متغیرهای رو استفاده می شود. این عبارت به صورت زیر نوشته می شود:

$$D = \Gamma\left|\hat{A}^{Roe}\right|(Q_R - Q_L)$$

$$\left|\hat{A}^{Roe}\right| = R|\Lambda|R^{-1}$$

که در این روابط R ماتریس بردارهای ویژه راست ماتریس $\Gamma^{-1}\frac{\partial H}{\partial Q}$ می باشد و Λ نیز مقادیر ویژه ماتریس $\Gamma^{-1}\frac{\partial H}{\partial Q}$ می باشد.

مقادیر ویژه این ماتریس به صورت زیر می باشد:

$$|\Lambda|=\begin{bmatrix}|\lambda_1| & 0 & 0 & 0\\ 0 & |\lambda_2| & 0 & 0\\ 0 & 0 & |\lambda_3| & 0\\ 0 & 0 & 0 & |\lambda_4|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|V_\perp| & 0 & 0 & 0\\ 0 & |V_\perp+C| & 0 & 0\\ 0 & 0 & |V_\perp-C| & 0\\ 0 & 0 & 0 & |V_\perp|\end{bmatrix},\ C=\sqrt{V_\perp{}^2+\beta^2}$$

$$R=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\rho_m\beta^2C}{\beta^2n_y+v\left(V_\perp+C\right)} & \dfrac{\rho_m\beta^2C}{-\beta^2n_y+v\left(-V_\perp+C\right)} & 0\\ -\dfrac{n_y}{n_x} & \dfrac{n_x\left(-V_\perp+C\right)+u}{n_y\left(-V_\perp+C\right)+v} & \dfrac{n_x\left(V_\perp+C\right)-u}{n_y\left(V_\perp+C\right)-v} & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

به دست آوردن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه با استفاده از روش پیشنهاد شده توسط مرکل:

$$R=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{C\rho_m\left(C-V_\perp\right)}{v+\left(C-V_\perp\right)n_y} & \dfrac{C\rho_m\left(C+V_\perp\right)}{v-\left(C+V_\perp\right)n_y} & 0\\ -\dfrac{n_y}{n_x} & \dfrac{u+n_x\left(C-V_\perp\right)}{v+\left(C-V_\perp\right)n_y} & \dfrac{u-n_x\left(C+V_\perp\right)}{v-\left(C+V_\perp\right)n_y} & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R^{-1}=\frac{1}{2\rho_mC^2}\begin{bmatrix}2\left(-v+V_\perp n_y\right) & 2\rho_m\left(-n_xn_y-V_\perp n_x\left(v-V_\perp n_y\right)\right) & 2\rho_m\left[C^2n_x{}^2-V_\perp n_y\left(v-V_\perp n_y\right)\right] & 0\\ v+\left(C-V_\perp\right)n_y & \rho_m\left(n_xv+n_xn_y\left(C-V_\perp\right)\right)\left(C+V_\perp\right) & \rho_m\left[\left(C-V_\perp\right)n_y{}^2+n_yv\right]\left(C+V_\perp\right) & 0\\ v-\left(C+V_\perp\right)n_y & \rho_m\left(n_xv-n_xn_y\left(C+V_\perp\right)\right)\left(C-V_\perp\right) & \rho_m\left[\left(C+V_\perp\right)n_y{}^2-n_yv\right]\left(C-V_\perp\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\rho_mC^2\end{bmatrix}$$

توسعه روش FV به دقت مرتبه دو

در روش FV گسسته سازی مکانی به صورت شار عددی خود را نشان می دهد. شار کلی به صورت مجموع شارهای عبوری از سه لبه المان نشان داده می شود. در هر لبه، وضعیت سمت چپ (خود المان) و راست (المان همسایه) با q_L و q_R نشان داده می شود. چنانچه مقدار درون المان jام را با q_j نشان داد، در روش مرتبه اول q_L برای سه لبه مثلث به صورت زیر می باشد:

$$q_{L_1} = q_j$$

$$q_{L_2} = q_j$$

$$q_{L_3} = q_j$$

به طور کلی دو روش برای افزایش دقت روش وجود دارد، روش MUSCL و Frink می باشد که در اینجا از Frink استفاده شده است. در این در این روش مقادیر سمت چپ سلول به صورت زیر تعریف می شوند:

$$q_{L_1} = q_j + \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(q_{n_1} + q_{n_2}) - q_{n_3}]$$

$$q_{L_2} = q_j + \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(q_{n_2} + q_{n_3}) - q_{n_1}]$$

$$q_{L_3} = q_j + \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(q_{n_1} + q_{n_3}) - q_{n_2}]$$

که در این روابط q_{n_1}، q_{n_2} و q_{n_3} به ترتیب مقادیر در گره های شماره ۱، ۲ و ۳ المان مثلثی می باشند. توجه شود که سطح (face) (در حالت دو بعدی لبه) اول شامل نقاط ۱ و ۲، لبه دوم شامل نقاط ۲ و ۳ و نهایتا لبه ۳ شامل نقاط ۱ و ۳ می باشد. با استفاده از این روابط بدیهی است که دقت محاسبه شارها و نتیجتا گسسته سازی مکانی افزایش می یابد. نکته مهم در این رابطه چگونگی به دست آوردن مقادیر گره ها می باشد. معمولا دو روش برای این کار وجود دارد. روش اول استفاده از میانگین گیری وزنی بر اساس حجم سلول های درگیر با نقطه nام و روش دوم بر اساس معکوس فاصله مرکز ثقل هر سلول درگیر با گره تا گره مورد نظر می باشد. در اینجا از روش حجمی استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$q_n = \frac{\sum_{j=1}^{N} q_j V_j}{\sum_{j=1}^{N} V_j}$$

که در حالت دو بعدی به جای حجم از مساحت A_j استفاده می شود. در عبارت فوق مقصود از N تعداد کل المان درگیر با گره j می باشد.

ترم اضمحلال عددی

به منظور پایدار سازی حل از مشتق های مرتبه دو و چهار به ترتیب برای حذف نواسانات فرکانس پایین و بالا استفاده می شود. این مشتقات مرتبه دو به صورت صریح به سمت راست معادلات اضاف می شوند، یعنی چنانچه معادلات را به صورت زیر نشان دهیم:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial \tau} = G_j - \frac{\partial E_j}{\partial x} - \frac{\partial F_j}{\partial y} = R_j$$

آنگاه ترم اضمحلالی به صورت زیر برای المان j ام به معادلات اضافه می شود:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial \tau} = R_j + D_j$$

که در آن D_j به صورت زیر می باشد:

$$D_j = \sum_{k=1}^{3} d_{j_k}$$

که در اینجا k اندیسی برای نشان دادن شماره لبه المان می باشد که هر مثلث سه لبه خواهد داشت. چنانچه مقدار متغیر در همسایه المان j ام از طریق لبه kام آن را با Q_j^k نشان دهیم، آنگاه داریم:

$$d_{j_k} = \left(\frac{A_j}{\Delta t_j} + \frac{A_j^k}{\Delta t_j^k}\right)\left[\frac{\varepsilon_{j_k}^{(4)}}{2}\left(\nabla^2 Q_j - \nabla^2 Q_j^k\right) - \frac{\varepsilon_{j_k}^{(2)}}{2}\left(Q_j - Q_j^k\right)\right]$$

که در این روابط:

$$\nabla^2 Q_i = \sum_{m=1}^{3} (Q_i^m - Q_i)$$

می باشد. سایر پارامتر ها نیز به صورت زیر به دست می آیند:

$$\varepsilon_{j_k}^{(2)} = \kappa_p^{(2)} \nu_{j_k} + \kappa_\rho^{(2)} \gamma_{j_k}$$

$$\nu_{j_k} = \left|\frac{p_j - p_j^k}{p_j + p_j^k}\right|$$

$$\gamma_{j_k} = \left|\frac{\rho_j - \rho_j^k}{\rho_j + \rho_j^k}\right|$$

$$\varepsilon_{j_k}^{(4)} = \max\left(0, \kappa^{(4)} - \varepsilon_{j_k}^{(2)}\right)$$

که در این روابط $\kappa_p^{(2)}$، $\kappa_\rho^{(2)}$ و $\kappa^{(4)}$ سه ضریب ثابت می باشند که در اینجا به صورت زیر تعیین شده است:

$$\kappa_p^{(2)} = 0$$

$$\kappa_\rho^{(2)} = \frac{1}{10}$$

$$\kappa^{(4)} = \frac{1}{32}$$

شرایط مرزی:

شرط مرزی ورودی:

$$u_R = u_\infty$$

$$v_R = v_\infty$$

$$\alpha_{l_R} = \alpha_{l_\infty}$$

$$p_R = p_L$$

شرط مرزی خروجی:

$$u_R = u_L$$

$$v_R = v_L$$

$$\alpha_{l_R} = \alpha_{l_L}$$

$$p_R = p_\infty$$

شرط مرزی دیواره:

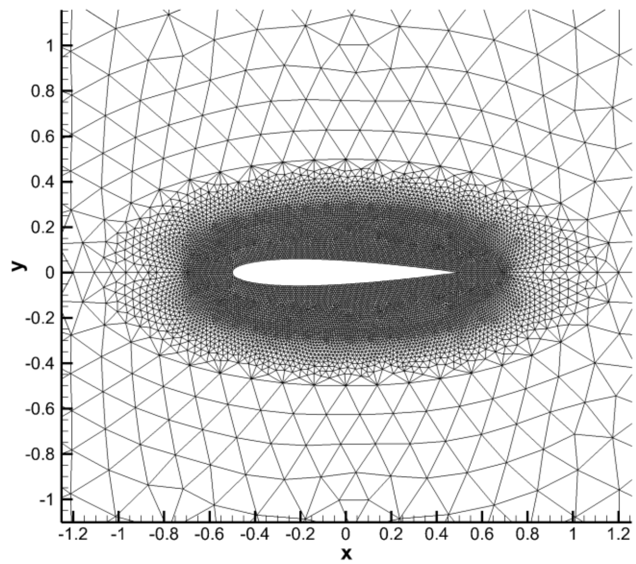
$$u_R = u_L - 2(u_L\, n_x + v_L\, n_y)n_x$$

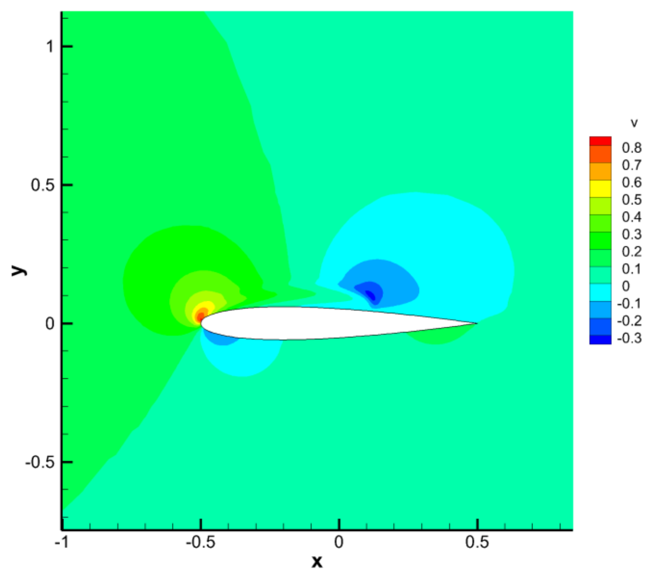
$$v_R = v_L - 2(u_L\, n_x + v_L\, n_y)n_y$$

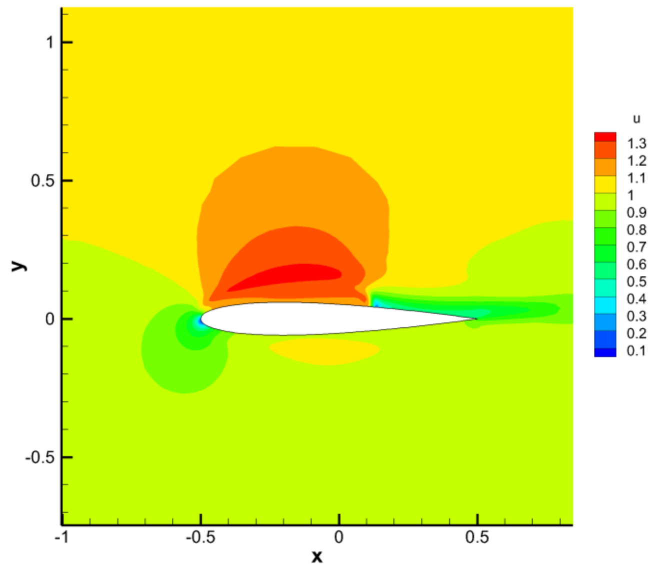
$$\alpha_{l_R} = \alpha_{l_L}$$

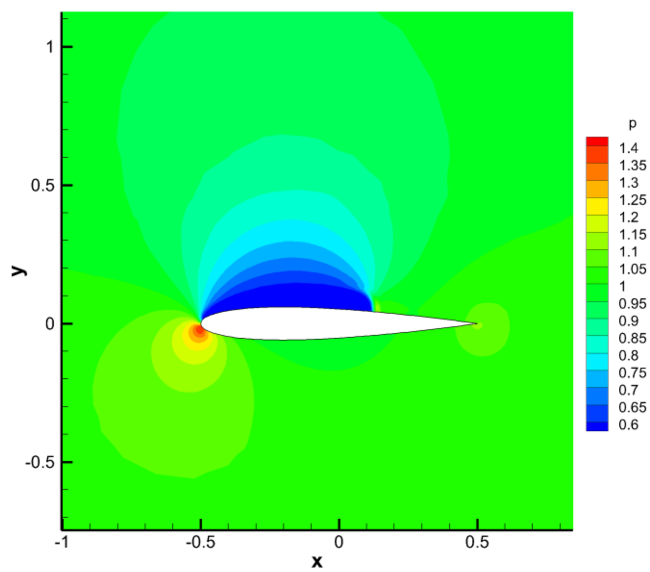
$$p_R = p_L$$

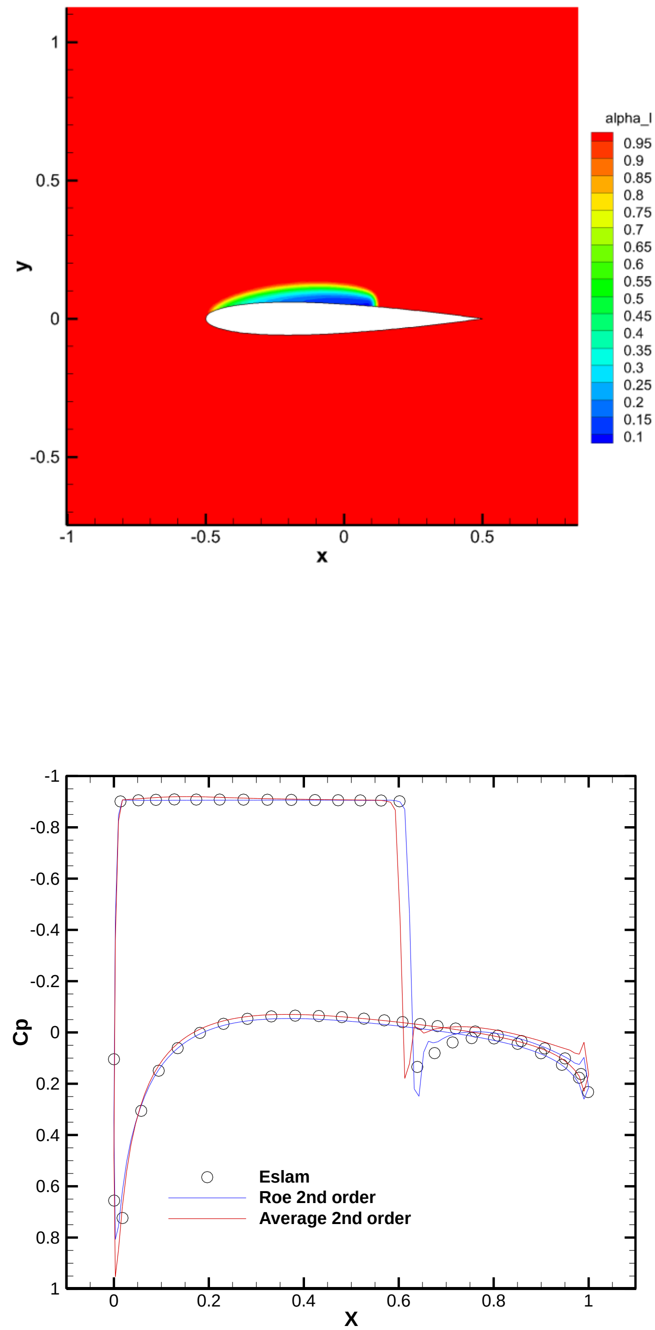
نتایج روش FV:





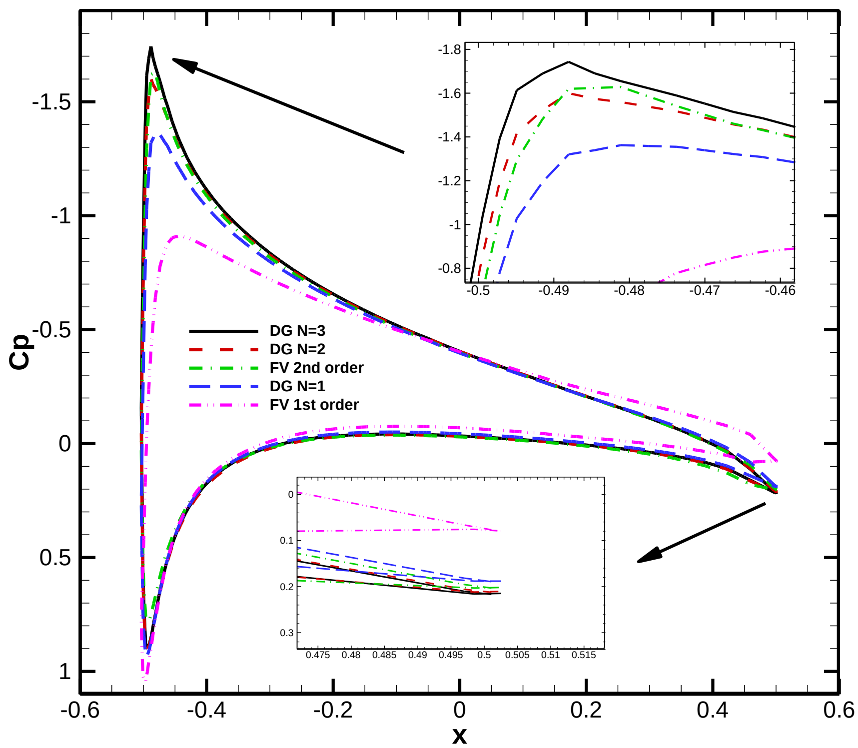

u
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
y
x
1
0.5
0
-0.5
-1
0.5


p
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
y
x
1
0.5
0
-0.5
-1
0.5



شکل: نتایج به دست آمده از حل دو فاز با استفاده از روش FV

نتایج تک فاز DG با دقت های مختلف



شکل: مقایسه پروفیل های DG و FV برای دقت های مختلف در حالت فرمولاسیون تراکم ناپذیر تک فاز

جدول: مقایسه مقادیر ضریب فشار در نقطه ای که کمترین ضریب فشار را دارد و در حالت فرمولاسیون تراکم ناپذیر تک فاز

	Cp
DG N=3	-2.1
DG N=2	-1.8
FV 2nd order	-1.75
DG N=1	-1.44
FV 1st order	-0.93

نحوه اعمال لیمیتر در دو بعد

۱- به دست آوردن ماتریس متوسط گیری به صورت زیر:

$$Ave = \frac{1}{2}\iint \quad l_j drds$$

۲- محاسبه موقعیت مرکز المان

۳- محاسبه فاصله هر گره تا مرکز المان dx و dy

۴- محاسبه موقعیت مرکز المان های مجازی

۵- چنانچه دو راس ضلع را به مرکز دو المان همسایه آن وصل کنیم، چهار ضلعی ایجاد خواهد شد که آن ها را A1 و A2 و A3 متناظر با سه ضلع مثلث می نامیم که این ها را به عنوان توابعی وزنی برای تخمین شیب در هر ضلع در نظر خواهیم گرفت

۶- محاسبه مقادیر متوسط متغیرها در المان ها ($\bar{V}$)

۷- اعمال شرط مرزی برای المان های مجازی

۸- محاسبه متوسط گیری متغیرها در نقاط شاری

۹- آنگاه شیب ها در مرکز هر ضلع به صورت زیر به دست می آید:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_1^f, y_1^f\right)} = \frac{1}{2A^1}\left[(V_1^c - V_0^c)(y_2^v - y_1^v) + (V_1^v - V_2^v)(y_1^c - y_0^c)\right]$$

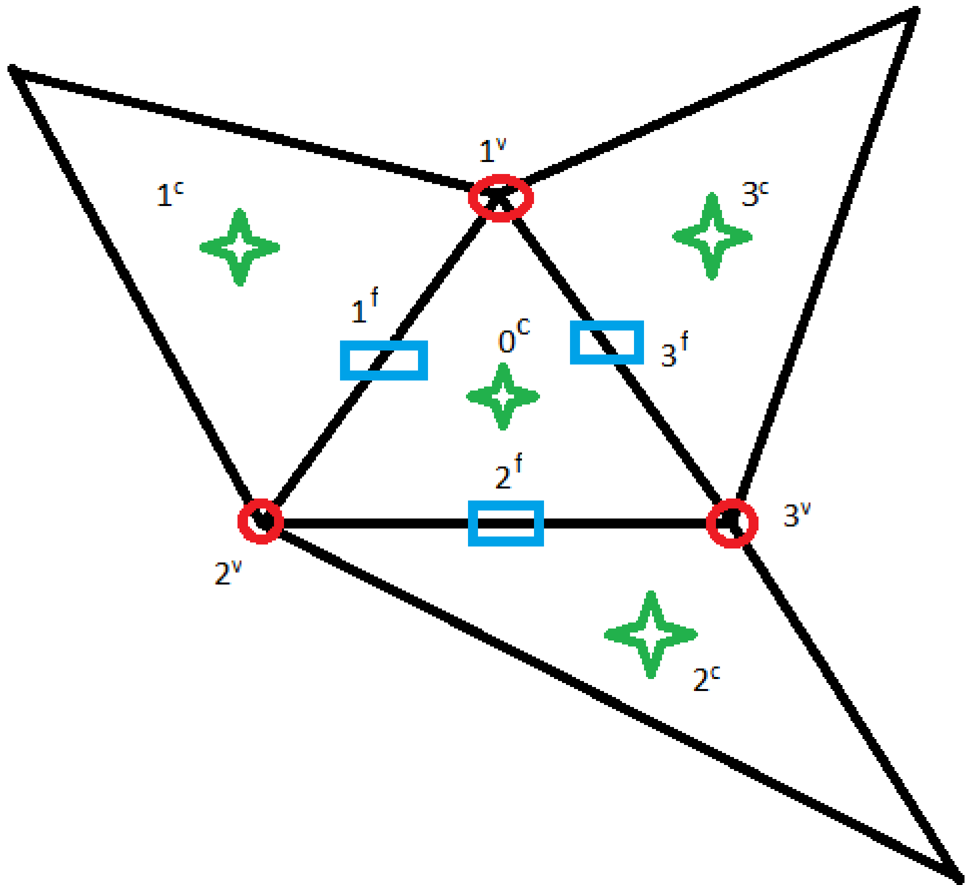
$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\left(x_1^f, y_1^f\right)} = \frac{-1}{2A^1}\left[(V_1^c - V_0^c)(x_2^v - x_1^v) + (V_1^v - V_2^v)(x_1^c - x_0^c)\right]$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_2^f, y_2^f\right)} = \frac{1}{2A^2}\left[(V_2^c - V_0^c)(y_3^v - y_2^v) + (V_2^v - V_3^v)(y_2^c - y_0^c)\right]$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\left(x_2^f, y_2^f\right)} = \frac{-1}{2A^2}\left[(V_2^c - V_0^c)(x_3^v - x_2^v) + (V_2^v - V_3^v)(x_2^c - x_0^c)\right]$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_3^f, y_3^f\right)} = \frac{1}{2A^3}\left[(V_3^c - V_0^c)(y_1^v - y_3^v) + (V_1^v - V_3^v)(y_3^c - y_0^c)\right]$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\left(x_3^f, y_3^f\right)} = \frac{-1}{2A^3}\left[(V_3^c - V_0^c)(x_1^v - x_3^v) + (V_1^v - V_3^v)(x_3^c - x_0^c)\right]$$



شکل: زیر نویس ها و بالانویس های استفاده شده در روابط

۱۰- محاسبه شیب در مرکز المان ها

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0^c,y_0^c)} = \frac{A^1\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_1^f,y_1^f\right)} + A^2\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_2^f,y_2^f\right)} + A^3\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_3^f,y_3^f\right)}}{A^1 + A^2 + A^3}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0^c,y_0^c)} = \frac{A^1\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\left(x_1^f,y_1^f\right)} + A^2\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\left(x_2^f,y_2^f\right)} + A^3\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\left(x_3^f,y_3^f\right)}}{A^1 + A^2 + A^3}$$

۱۱- محاسبه شیب لیمیت شده با استفاده از روابط زیر:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0^c,y_0^c)}^{limited} = w_1\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_1^c,y_1^c)} + w_2\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_2^c,y_2^c)} + w_3\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_3^c,y_3^c)}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0^c,y_0^c)}^{limited} = w_1 \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_1^c,y_1^c)} + w_2 \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_2^c,y_2^c)} + w_3 \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_3^c,y_3^c)}$$

$$w_1 = \frac{g_2 g_3 + \epsilon}{(g_1)^2 + (g_2)^2 + (g_3)^2 + 3\epsilon}$$

$$w_2 = \frac{g_1 g_3 + \epsilon}{(g_1)^2 + (g_2)^2 + (g_3)^2 + 3\epsilon}$$

$$w_3 = \frac{g_1 g_2 + \epsilon}{(g_1)^2 + (g_2)^2 + (g_3)^2 + 3\epsilon}$$

$$g_1 = \left(\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_1^c,y_1^c)}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_1^c,y_1^c)}\right)^2$$

$$g_2 = \left(\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_2^c,y_2^c)}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_2^c,y_2^c)}\right)^2$$

$$g_3 = \left(\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_3^c,y_3^c)}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_3^c,y_3^c)}\right)^2$$

۱۲- محاسبه مقادیر لیمیت شده متغیرها در هر گره به صورت زیر:

$$V^{limited} = \bar{V} + dx \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0^c,y_0^c)}^{limited} + dy \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0^c,y_0^c)}^{limited}$$