微分積分学入門

まい.

概要

本資料では，高校数学までの知識を前提に，理系大学生が最初に学ぶ微分積分学の概要について述べる．なるべく平素な言葉を使うことを心がけ厳密な定義や定理を理論的に構築するよりも雰囲気を感じ取ってもらうことを優先した．微分と積分の話を軽く述べたあと，微分と積分を語る上で欠かせない極限について述べる．ε - δ 論法についても資料に入れ，微分積分の中で特に重要かつ応用がある事項について記載する．この資料を読んだ人たちが，微分積分学についてざっくりと雰囲気を感じ取ってもらい，さらに勉強してみようと意欲的になってもらえたら何よりも嬉しいです．

目次

1　微分積分学とは

微分積分学とは，接線を求める微分と面積を求める積分に関する理論である．これらが互いに逆操作であることは定義ではなく，定理として導かれる．つまり，高校生のときに学んだ

積分は微分の逆として定義する

というものは一般の数学ではあまりしない．微分も積分も各々独立に定義した上で，関数に条件をつけることでそれらが逆演算の関係であることを示すことができる．

また，微分の定義式にも登場する

極限

に関しては ε - δ 論法において厳密に定義することができる．高校生で学んだ極限は，直感的でわかりやすいが厳密かと言われればそうではない．「限りなく近づく」とはわかりやすく聞き馴染みもある言葉であるが，誰にとっての限りなくなのか，そもそも定量的ではないので本当の意味で「近い」を定義できていない．この曖昧さを全て取り除いたものが ε - δ 論法である．

このように数学は厳密さを求める学問ですが，

大体合ってて使えたらええやん

なんて声が聞こえそうですが，微分積分学は専門の数学のお話なので，専門で学んできた身として完全に蔑ろにすることはしません．噛み砕いて説明するつもりなのでどうぞお付き合いいただければと思います．また，数学科の人たちからすると逆にあまり厳密でないお話もいくつか出てくるかもしれませんが，これは入門的な話なんだなぁと温かい目でご覧いただければと思います．

1.1　微分とは

微分とは，関数のある点における接線の傾きを求める操作である．中学生や高校生のときに学んだ変化の割合や平均変化率において「幅」を 0 にする極限を取ったものがいわゆる微分である．初めて高校の授業で学ぶときは接線の方程式を求める問題や，1 次近似式を使うときに学ぶ．これは今から学ぶ高校レベルを超えたものでも同様であり，関数の接空間 (接線の一般化) を求めたり関数を 2,3 次などで近似することができる．[*1]

[*1] 無限次まで扱うことである条件を満たす一般の関数を多項式のように扱えるようになる

1.2 積分とは

積分とは，関数に囲まれた図形の面積を求める操作である．高校生で学ぶ積分とは異なり，微分の逆の演算として定義しない．微分と独立に定義し，そこから関数に条件を設けることで初めて微分の逆操作であることが示される．

本来，積分は曲線で囲まれた図形をたくさんの長方形などで近似し，その長方形たちの面積の総和 (の極限) として定義される．今から学ぶ積分についても主に図形の面積を求める操作として学ぶ．また，面積だけでなく超体積[*2]を求める操作としても積分は使われる．

1.3 微分積分とは

つまり，微分積分学とは，高校数学では逆操作として定義されていた微分と積分を別の理論として定義し，逆操作であることを定理として理論を再構築しそれらを用いてさまざまな応用を行う学問である．また，微分と積分の定義で使われる極限についても ε - δ 論法により厳密に定義し，微分積分の構築の手助けをする．

1.4 微分積分学に必要な道具

微分積分学に必要な道具はなんといっても「極限」である．まず，微分の定義式は

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である．積分の定義式は (詳しいことは後で書く)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to +0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

である．両者ともに極限を扱っており，微分・積分を理論から厳密に理解しようとすれば極限の習熟は避けては通れないということである．ただ，微分や積分の定理などの証明を厳密にしようとするとどうしてもこの極限を扱わないとできないだけであり，ただ単に定理などを使えれば良いというスタンスの人たちからすれば不要なことかもしれない．

極限とは単純には，限りなく近づくときのことを調べているのだが，この「限りなく」という言葉が直感的かつ非論理的であり扱いが難しい．極限を真面目に見つめ直すことで見えてくる理論も多く存在するので，微分積分学を語る上で極限は外せない．

[*2] 4 次元以上の図形の体積のようなもの

2　極限

さて，必要だと何度も言ってきたその極限について話を始める．現実世界では,「無限大」ということは実現できない．しかし，数学の理論としてはそれを考えることは可能であり，様々な数学の分野において非常に重要な役割を果たす.

次のような数列を考える.

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\dots,\ \frac{1}{n},\dots$$

つまり，自然数の逆数の数が並ぶ列を考える．このとき，n をずっと大きくしていけば数列はどんな値になるだろうか.

$$\frac{1}{100000},\ \frac{1}{100000000000},\ \cdots$$

このように分母がどんどんと大きくなると分数としては小さな数になることが確認できる．もっと n を大きくすると，それはもう分数としては 0 にとてつもなく近い数になると予想できる．これを (ちょっと雑だが) 数式で表現すると

$$\frac{1}{10000\cdots000000} \fallingdotseq 0$$

となる.

他の例も紹介しておく．例えば,

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^1,\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^3,\dots,1-\left(\frac{2}{3}\right)^n,\dots$$

のような数列があったとき，n をずっと大きな数字にしていくとどうなるだろうか．例えば $n=10$ とすると $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \fallingdotseq 0.017$ となり，n を大きくすると n 乗されている数字は 0 に近い数字になっていくことがわかる．よって,

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10000\cdots00000} \fallingdotseq 1-0=1$$

となる.

この雑さをなくし明確に理論として定式化されたものがいわゆる極限である.「0 に近い」や「ずっと大きく」とはわかりやすく聞き馴染みもある言葉であるが誰にとってなのかが不明瞭であり，数学の理論としては「誰が見ても」が非常に重要なので，この辺りをしっかりと理論として詰める必要がある．ただ，いきなり大学の数学で扱う理論を学ぶと頭がショートするので，高校生で学ぶ極限から話を始める.

2.1　高校までの極限

高校生が学ぶ極限について述べる．先ほどの，自然数の逆数の数列が n を限りなく大きくすると $\dfrac{1}{n}$ が限りなく 0 に近づくことを，極限の英語の頭文字「lim」を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

と書く．他の例も同様で，例えば前ページの 2 つ目の例であれば

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=1-0=0$$

と書く．イメージとしてはそれぞれ，

$$\frac{1}{\infty}=0,$$
$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^\infty=1-0=0$$

である．∞ にはめちゃくちゃ大きな数字が入ったと思い，計算を進めれば良い．

一般的に数列 a_n を用いて次のように定義を記述する．

定義 2.1. 数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくしたとき，a_n が限りなく α に近づくことを

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

と定義する．また，このときの α を極限値という．

上記のように，必ず極限値をもつかというとそうではない．例えば数列 a_n が

$$a_n=n$$

であるとき，$n\to\infty$ とすると数列がどんどんと大きくなっていくことは想像に容易いと思う．このような場合，数列 a_n の $n\to\infty$ における極限値は存在しないという．まとめると次のようになる．

定義 2.2. 数列 a_n の極限値が存在するとき，数列 a_n は

収束する

といい，収束しない場合

発散する[*3]

[*3] 無限大になるものだけ発散すると表現をするという意見があるが，本文の定義がおそらく正しい．振動 (後で記載) も正確には発散に含まれる．

という．

数列を $a_n = (-1)^n$ と定義すると，この数列は 1，-1 を交互に取り続ける数列となる．このとき，$n \to \infty$ としても数列は収束しない．この数列は発散するが，特にある特定の値を行ったり来たりするような場合,「振動する」という．

2.2　数列の極限の例

ここでは，簡単な数列の極限の計算例を示す．

例題 2.3. $a_n = \dfrac{2n^2+n-1}{n^2-3n+9}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求める．

まず，そのまま数列に ∞ を入れてみると，

$$\frac{\infty}{\infty}$$

となり，計算ができない．このような形は不定形と呼ばれ，適切な計算をすることで極限値を計算できる場合がある．数列 a_n を次のように計算する．

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n^2+n-1}{n^2-3n+9} \\ &= \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}}. \end{aligned}$$

このように計算すれば，$\dfrac{1}{n}$ や $\dfrac{1}{n^2}$ は $n \to \infty$ のとき 0 になるので，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}} \\ &= \frac{2+0-0}{1-0+0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

のように収束し，その極限値が 2 であることがわかる．

例題 2.4. $b_n = \dfrac{3n^3+n-2}{2n^2-5n+1}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求める．

数列の分母の最高次に着目して計算すると，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

となり，この数列は無限大に発散する．

例題 2.5. $c_n = \sqrt{n^2+n+2} - n$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ を求める．

まず，そのまま数列に ∞ を入れてみると，

$$\infty - \infty$$

となり，計算ができない．今回のものも不定形と呼ばれ，適切な計算をすることで極限値を計算できる．

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+2} - n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2-n^2}{\sqrt{n^2+n+2}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+1} \\
&= \frac{1}{1+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

このように，分子の有理化をすることで計算でき，その極限値は $\dfrac{1}{2}$ となる．

例題 2.6. $d_n = \dfrac{3^{n+1}-2^n+1}{3^n+4\cdot 2^n+4}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$ を求める．

分数に指数が入っていても基本的な計算方針は変わらない．分母の指数の底が最も大きい 3^n で分母分子を割ると，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d_n &= \frac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^n}}{1+4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{3^n}} \\
&= \frac{3-0+0}{1+4\cdot 0+0} \\
&= 3
\end{aligned}$$

と収束してその極限値は 3 となる．

上記の例のように，不定形で一見極限値をもたないような数列であっても，適切な計算をすることで極限値を求めることができる．また，四則演算の極限値においては，収束する場合次のような定理がある．

定理 2.7. 数列 a_n，b_n がそれぞれ極限値 α，β をもつとする．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

とする．このとき，次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \alpha\beta,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \ (\beta \neq 0).$$

つまり，収束する数列に対しては，四則演算はそのまま極限値にも引き継がれる．上記でたくさんの例を見てきたが，どの極限においても，

限りなく n が大きいとき，a_n は限りなく極限値 α に近づく

ということを述べている．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

というこの短い等式には多くの意味が込められていることに注意してもらいたい．

不定形については様々な形が存在するが，下記の形になっているものは不定形と呼ばれる．

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty - \infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 0\times\infty,\ 1^\infty$$

上記の形の場合，極限値を求めることは困難であるが，概ね計算可能な場合が多い．それぞれの不定形に対してどのようなアプローチを取れば計算が可能になるのかは高校の教材などで学ぶと楽しめるだろう．

また，極限には上記で説明した「数列の極限」と「関数の極限」の 2 種類がメインだが，関数の極限の方は詳しくは書かない (そもそもこの資料の読者は高校卒業くらいの方を想定して書いているため)．

高校数学における極限の定義を用いても，極限計算は十分に行うことができ，正直なところ大学の数学を本格的にしないのであればこれ以上のものを学ぶ必要はない．また，大学数学における極限の問題においても高校数学で学ぶ直感的な極限計算は非常に重要である．次の節では理論的な内容になるが，わからなければ飛ばしても多少は問題ないだろう．

2.3 大学数学における数列の極限

この節では，極限を厳密に定義することを目的とする．高校までの極限の定義では「限りなく」という (直感的だが) 曖昧な言葉が混ざっていた．この「限りなく」を数式と論理で定式化することで，極限というものを厳密に扱う．初めてこの理論に触れる読者はかなり理解に時間を要するので，軽く読んでみて興味が出なければ飛ばしてもらっても構わない．[*4]

2.4 ε - N 論法

数列の極限を厳密に定式化する理論は

ε - N 論法

[*4] 筆者は大学 1 年生の春にこの理論を学んで，ちゃんと理解して問題が解けるようになったのは 1 年後だった．さらに，他人に教えられるようになったのは大学 3 年生になる直前くらいだった．

と呼ばれる．この 2 つの文字 (ε と N) を用いて,「限りなく」という言葉の曖昧さを消す．
　さて，改めて高校数学における極限の定義を思いだそう．

定義 2.8 (再)**.** 数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくしたとき，a_n が限りなく α に近づくことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と定義する．また，このときの α を極限値という．

　この定義に現れる「限りなく」は 2 つある．それは n を限りなく大きくするところと，a_n が限りなく α に近づくという 2 つである．意味が通じるのだから，それでいいじゃないかとも思うが，数学は誰が見ても そうだ と言える定義でなければならない．高校数学の極限の定義では,「誰にとっての限りなく」なのかがはっきりとはわからない．限りなく n が大きいとき，と言われてもそれは $n = 100$ なのか $n = 10000$ なのか $n = 1000000000000$ なのか，また，a_n が α に近いとはそもそも何なのか，近いというとどれくらい近いのか，などなど数学の理論としては完全に定式化されているとは言い難いものである．
　では,「限りなく大きい」や「限りなく近い」を一度決めてみて定義を改めてみるが，その前に仮定と結論を再確認しておこう．定義 2.8 における仮定は

$$a_n \text{ の } n \text{ を限りなく大きくしたとき}$$

であり，結論は

$$a_n \text{ が限りなく } \alpha \text{ に近づく}$$

である．さらに，抽象さを少なくし，具体的に物事議論するために以降は

$$a_n = \frac{1}{n},\ \alpha = 0$$

とする．もちろん，これから得たい結論は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

である．
　さて，結論の「限りなく近い」ということを差の絶対値が 0.01 未満になると (恣意的に) 定義しよう．つまり，

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0.01$$

を満たすとき $\dfrac{1}{n}$ は 0 に限りなく近いと定義し，これを満たしたときに

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

と書くことにする．このように極限を定義するとき，仮定である「n を限りなく大きくしたとき」の n はどこまで大きくすればよいだろうか．例えば，$n=10$ とすると，

$$\frac{1}{n}=0.1$$

となり，「限りなく近くない」ことがわかる (0 との差の絶対値が 0.01 未満ではない)．では，思い切って大きくして $n=1000$ とするとどうだろうか．このとき，

$$\frac{1}{n}=0.001$$

となり，「限りなく近い」ということがわかる．よって，

$$n=1000 \text{ のように } n \text{ を大きくしたとき，} \left|\frac{1}{n}-0\right|<0.001<0.01$$

が成り立つので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

が証明されたことになる．あくまでこの証明は，$\dfrac{1}{n}$ が 0 に限りなく近いという定義を差の絶対値が 0.01 未満になるになるときと定義したときだけのものであることに注意する．もしかすると，

> いやいや，私の (俺の)「限りなく小さい」はもっと小さい数を使う．差の絶対値が 0.0000001 未満のときじゃないと $\dfrac{1}{n}$ が限りなく 0 に近いとは言えないね

などと言う人がいるかもしれない．つまり，上記の人は

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0.0000001$$

のときに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

を認めると言っているのである．では，それを満たすように n を限りなく大きくすればよい．例えば，

$$n=1000000000$$

と n を限りなく大きくすれば

$$\frac{1}{n}=0.000000001$$

となり，0 との差の絶対値が 0.0000001 未満になっているので，$\dfrac{1}{n}$ が限りなく 0 に近いと言える．

このように，人によって結論，$\dfrac{1}{n}$ が 0 に近いという定義が異なる．しかし，どのような近さを言われたとしても適切に n を大きくすることで，その人の定義に合わせて $\dfrac{1}{n}$ が 0 に近いということを証明することができる．これこそが，

$$n \text{ を限りなく大きくするとき，} \frac{1}{n} \text{ が限りなく } 0 \text{ に近づく}$$

ことを表している．

では，どんな人がどんな「限りなく近い」の定義を持ってこようとも，適切に n を大きくすることでその定義に当てはまるようにできればよい．誰になんと言われても文句がないように，「限りなく近い」として任意に $\varepsilon > 0$ をとってくる．つまり，

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

のときに

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

が成り立つとする (この ε は 0.000001 のようなメチャクチャ小さな数と思う)．このとき，どれほど n を大きくすれば良いかというと，

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

となるような自然数 n を持ってくれば，

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| &= \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となり，「限りなく近い」の定義に当てはめることができる．誰かが，$\frac{1}{n}$ が限りなく 0 に近いことを，差の絶対値が ε 未満になることと定義してきてから，その定義してきた ε を使って n を定めるということを行っている．大事なことなのでもう一度述べておくが，この ε は任意なので，誰がどんな数を言おうとこの ε で対応ができる．[*5]

議論を整理しよう．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

を証明するためにまずは，$\frac{1}{n}$ が 0 に限りなく近いを任意の $\varepsilon > 0$ を用いて

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

によって定義した．その後，この定義に当てはまるような大きな n を ε を使って定める．誰がどんな近い尺度を持ってきても，適切に n を大きくすることで (例えば $n > \frac{1}{\varepsilon}$ を満たすような n) 限りなく近いの定義に当てはめられる．よって，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

[*5] 筆者がこの ε について習ったとき，「クレーム対応をするために任意にする」と教えられたのはなかなか記憶に残っている

が成り立つ．という流れである．

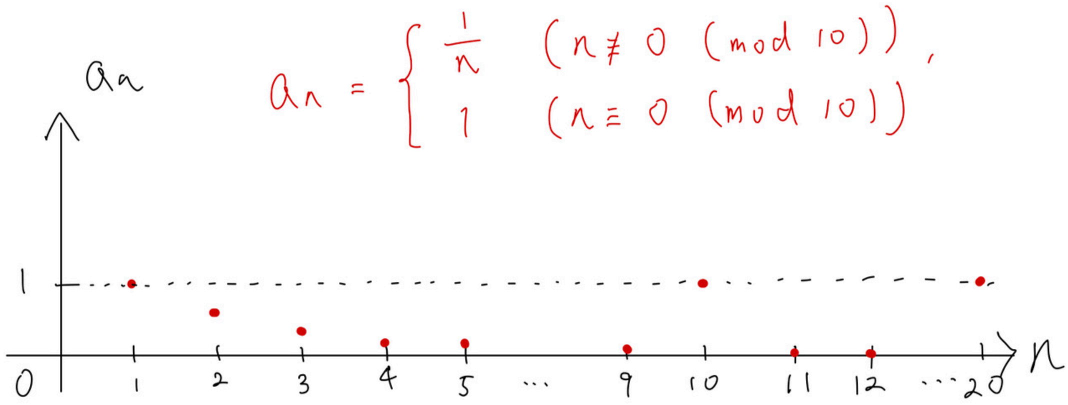
このとき，注意すべきことが 1 つある．それは，限りなく近いの定義である

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

を満たすような n は 1 つだけあればよいということではなく，とある数から全ての n が限りなく近いの定義に当てはまっている必要がある．例えば次の数列を考えてみよう．

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n \text{ は 10 の倍数でない}) \\ 1 & (n \text{ は 10 の倍数}) \end{cases}$$

少しわかりづらい数列だが，次のグラフを見れば理解が深まると思われる (手書きですみません)．



さて，この数列に対して，

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

はどうなるだろうか．ほとんどの数の場合は大きな数 n の逆数になり，n を大きくすれば 0 に近づくかもしれないと思うが，定期的に数列の値が 1 になる部分もある．よって，この数列は収束しなさそうだと予測される (実際収束しない)．どれだけ n を大きくしても，$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ としてしまうと (1 未満の数であればなんでも良いが) それは

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

を満たさなくなってしまう．例えば，$n = 100000000$ という大きな数でも $a_n = 1$ となり，$\dfrac{1}{2}$ をこえる．10 の倍数以外の自然数であれば限りなく近いの定義に当てはまりそうだが，あらゆる 10 の倍数はそうではない．このとき a_n は n が十分大きいときに限りなく 0 に近いとは言い難い．つまり，この数列は収束しない．

上記の a_n のように，ある n からすべてが「限りなく近い」の定義に当てはまっていないと収束したと認めづらい，というか認めれらないことがわかる．よって，改めて極限の定義を練り直すと次のようになる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N > 0$ を用意したとき，$n > N$ を満たすすべての n に対して

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

を満たすとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

と表す．

この定義を一般の数列 a_n や α に置き換えることで，ε-N 論法の定義が次で完成する．抽象的なので，今後も難しいと感じたら具体的な数列や収束値に置き換えて考えるとよい．

定義 2.9. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N > 0$ が存在し，$n > N$ を満たす全ての n に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つとき，[*6]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と定義する．

「任意」を $\forall$,「存在」を $\exists$ で表し，論理記号を用いて厳密に定義を書こうとすると，次のようになる．

$$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}N \in \mathbb{N}\ s.t.\ ^{\forall}n > N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

ここで,「$s.t.$」は such that の略で,「〜〜のような」という意味を持つ．上記の定義であれば，$s.t.$ 以下の条件が成り立つような，という意味で使用される．また，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表す．すなわち，

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

である．

このような論理記号の定義は「日本語」という曖昧なものから脱却し，厳密に定式化することが可能であるが，ご覧の通り見た目がえげつないことになるので覚える必要はない．まずは定義 2.9 の内容を完璧にすることをお勧めする．

さて，定義 2.9 が書けたということは，極限等式である

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

を証明する必要がある (できる) ということになる．では，改めた ε-N 論法を用いて証明しよう．

[*6] 「$n > N$ を満たす全ての自然数に対して不等式を満たす」ような自然数 N が存在するとき，と考える．

Proof. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，自然数 N を $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ を満たすように，例えば，$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ とする (ガウス記号) と，$n > N$ を満たす任意の n に対して，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n} - 0\right| &= \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} \\ &< \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ[*7]．よって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

が証明された． □

このように証明することができるが，やはり疑問に思うことは，

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

がどうやって出てきたのかである．これは筆者もはじめは疑問に思ったが，これには 2 つ注意すべき点がある．1 つは，

$$\text{別に } N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \text{ である必要はない}$$

ということである．定義 2.9 で述べている「存在する」とは，何か 1 つあればよく，それは条件を満たすものなら本当になんでも良い (が，明確に 1 つはバシッと決まっている必要はある)．例えば教科書の練習問題の答えとは違っていても正しい N を選択できている場合がある．なので，

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2$$

$$N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$$

のどれでも正しい回答となる．ただし，その選択した N から差の絶対値が ε で上から抑えられる[*8]ことをちゃんと示す必要がある．

2 つ目は

[*7] ガウス記号の性質の 1 つである，$[x] \leq x < [x] + 1$ を用いた

[*8] 数学における業界用語であり上から評価するとも言う．$a < b$ のことを a を上から b で抑えるという．

この N は証明とは別の場所で計算する必要がある

ということである．つまり，証明の清書の前の下書きの段階で求めておくということである．例えば今回の場合は,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せば良いとあらかじめわかっているので,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

を n について解いて

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

となるように n を選ぶ必要があるとわかる．今回の場合はかなり簡単に n が求まるが,複雑な問題はもっと苦労する (けど求める感覚は次第に身につく)．そして，定義には自然数 N を決める必要があるので，$\dfrac{1}{\varepsilon}$ を超えるような自然数として,

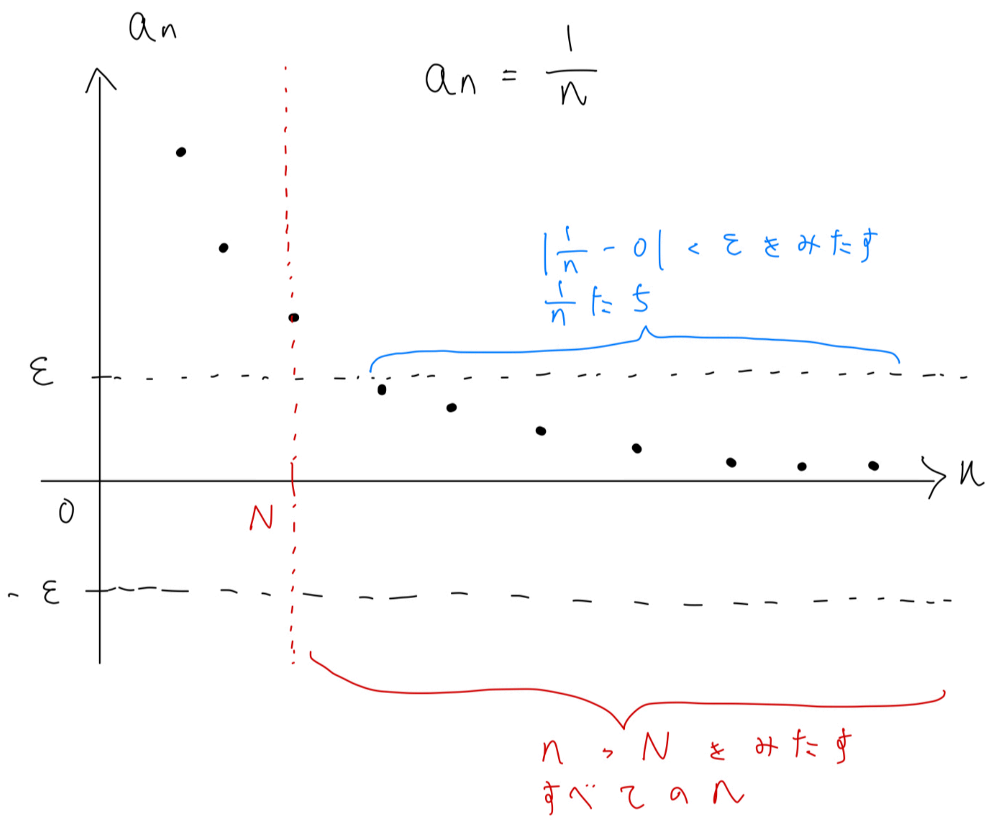
$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

を選んだわけである．特にガウス記号は単に自然数に無理矢理変換するためのもので、どの証明にも必須というわけではない.

改めて，図を見ながらこの証明が何をやっているのか理解しよう．この論法が述べていることは

どんなに小さな誤差 (ε) を用意しても，あるところから数列と極限値の差の絶対値がその小さな誤差におさまっている

ということである．ε で上から抑えられるとは，数列のグラフが 2ε の幅の中におさまっていることを表す．また，$n > N$ を満たす任意の n とはある縦ラインから右側にあるすべての n を指す．つまり，どれだけ誤差の幅を小さくしても，N を適切にとってくることで，それより右側にある数列 $\dfrac{1}{n}$ たちが全て小さな誤差の中に入ることを意味する.



これがグラフで捉えた ε-N 論法である．さまざまな観点で観察してきたが，それでもなおこの理論は難しいと筆者は思う．たくさんの問題に触れて経験値を積んでいってほしい．

　ということで，別の数列の極限の証明をする．

例題 2.10. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

を証明する．

　まずは予備考察として示したいことの確認と N を定めるための計算をする．

　示したいことは任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

である．N を定めるために，上記の不等式を n について解く．

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

なので，

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

となる．よって，この不等式の右辺の値より大きな自然数として

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

を選べば良さそうである．

Proof. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}$ とすると，$n > N$ を満たす任意の n に対して，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &= \frac{1}{n+1} \\
&< \frac{1}{N+1} \\
&= \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1} \\
&\leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

が示された． □

このように極限等式を証明することができる．予備考察がなければ N の選び方が不明すぎるが，例えば試験などで解答する場合にはそれは答案用紙に書く必要もない (だって証明ができているのだから)．任意に ε をとり，適切に N を決めて，数列と極限値の差の絶対値が ε で上から抑えられることが証明できれば良い．

以上のように，極限等式は ε-N 論法によって厳密に定式化される．このように厳密に定義することで例えば高校数学までは直観的に扱っていた定理 2.7 もちゃんと証明することができる．例えば，収束する数列の足し算は極限値も足し算で求まることを証明しよう．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

のとき，

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

となることを示す．

まず，示すべきことは任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．また，条件として二つの極限等式が与えられている．それぞれ ε-N 論法であるで書くと，任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して，自然数 N_1 が存在して，$n > N_1$ をみたす任意の n に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon_1$$

が成り立つことと，任意の $\varepsilon_2 > 0$ に対して，自然数 N_2 が存在して，$n > N_2$ をみたす任意の n に対して

$$|b_n - \beta| < \varepsilon_2$$

が成り立つことである．[*9]これらの条件は証明に使えることと結論を意識しよう．ここで条件として現れた ε_1，ε_2 はすでに成り立っているもとでの任意なので，本当になんでも良い．どんな数をとってきたとしても適切に N_1，N_2 をとることで差の絶対値が上から ε_1，ε_2 でそれぞれおさえられることを示している．例えば，$\varepsilon_1 = 10^{-100000000000}$ などメチャクチャな微小な数をとってきたとしても，$n > N_1$ を満たす任意の n に対して

$$|a_n - \alpha| < 10^{-100000000000}$$

となるように適切な N_1 が存在することを示している．

さて，今したいことは

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon_1,\ |b_n - \beta| < \varepsilon_2$$

を使って

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

を証明することである．

結論の式を三角不等式[*10]を用いると次のように変形できる．

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

最終的に，最後の式を ε で上から抑えられること，または ε に等しいことが証明できたら勝ちである (証明完了である)．では，最初から $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ としておけばよい話である ここで「本当になんでも良い」がいきてくる．なんでも良いならば最初にクレーム対策として任意にとった ε を使って ε_1，ε_2 を決めれば良い．

最後に，N をどのように選べば良いかというと，条件から得られた N_1，N_2 の大きい方を N と定めてやれば良い．条件式がともに使えるようにするためには，大きな自然数をもってくる必要があるわけだが，それであれば N_1，N_2 のうち大きな方を選べばどちらの条件式も用いることができる．

Proof. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．このとき，条件より，自然数 N_1, N_2 が存在して，$n > N_1$ を満たす任意の n に対して

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立ち，$n > N_2$ を満たす任意の n に対して，

$$|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

[*9] 結論の ε と区別するためにそれぞれ添え字に 1,2 をつけている

[*10] ある 2 点間を直線で進むより遠回りした方がより距離が長くなることを数学的に表した式．$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ のように表される．

が成り立つ．よって，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n > N$ を満たす任意の n に対して，

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

が成り立つ． □

上記のように，抽象的な数列であっても ε-N 論法を用いることで証明することができる．むしろこれが ε-N の本質，真骨頂というべきであろう．抽象的なものを抽象的なまま扱えることができ，抽象的なままで証明された理論はすべての具体を含んでいる．1 つずつ具体的なことを確認しなくても抽象論ですべてまとめて証明できてしまう．これが ε-N 論法 (数学) のよい部分であると筆者は思う．

上記の例だけでもかなり抽象度が高く理解に苦しむが，余裕のある読者は収束する数列の差・積・商の極限値の証明を ε-N 論法を用いて証明してほしい．

2.5 高校数学における関数の極限

さて，数列に対して極限を考えたが，本節からは関数に対しても極限を考える．[*11]

極限については前節でかなり触れてきたので，ここでの復習部分はさらっと流すことにする．

定義 2.11 (高校数学での関数の極限の定義)**.** 関数 $f(x)$ において，x が限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が A に限りなく近づくことを

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

と書く．また，このとき関数 $f(x)$ は極限値 A に収束するといい，そうでない場合は発散するという．

例えば，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(x^2 + x + 2) &= 2, \\ \lim_{x\to 2}(3x - 1) &= 5, \\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + 9x + 1} &= 3\end{aligned}$$

[*11] 数列もある意味で関数である．自然数の集合から実数 (複素数など) の集合への写像と考えることで数列も関数とみなせる．

などの極限等式が成り立つ．

数列の極限とは異なり，必ずしも x が無限大に向かうとは限らない．さらに，ある一定の値に「近づく」ことを考えているため，その近づき方には右からと左からという 1 次元的な近づき方が考えられることもわかる．つまり，ある一定の値より大きい値を取りながら近づいていくのか，ある一定の値より小さい値を取りながら近づいていくのかの 2 通りの近づき方があるということだ (下図参照).

図を挿入

例えば，$f(x)$ に対して，x が a に右側から近づく場合は

$$\lim_{x \to a+0} f(x)$$

と書き，左側から近づく場合は

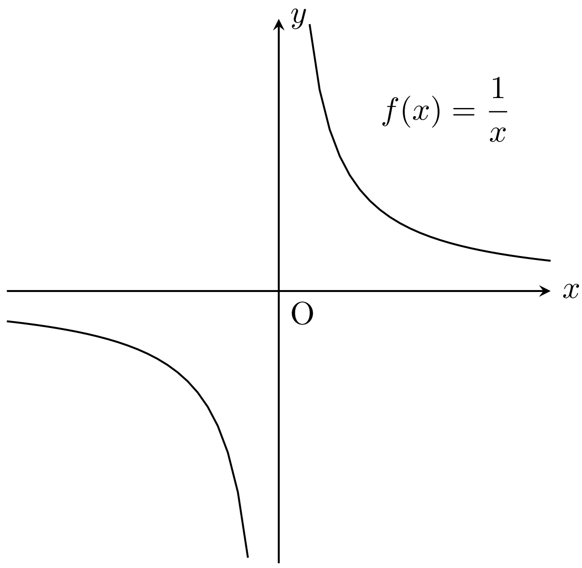
$$\lim_{x \to a-0} f(x)$$

のように書く．また，$a = 0$ のときは $0 + 0,\ 0 - 0$ を単に $+0,\ -0$ と書くことにする．

このように右からその値に近づくのか、左から近づくのかは非常に重要なことである．例えば,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

という関数を考えよう．グラフは以下のようになる．



右から近づく場合，第一象限にあるグラフをたどって 0 に近づき，グラフは x が 0 に近づくにつれて $+\infty$ へと向かっていく．一方，左から 0 に近づく場合は第三象限にあるグラフをたどって 0 に近づくので，グラフは $-\infty$ へと向かっていく．同じ「0 に近づく」でも方向によって結果が異なる場合があることに注意しよう．

よって，関数の極限が収束するとはもっと厳しい条件となる．

関数 $f(x)$ が，$x \to a$ のときに収束するとは,

$$\lim_{x \to a+0} f(x),\ \lim_{x \to a-0} f(x)$$

がともに存在して，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

が成り立つことである．このとき，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

と書く．

つまり，± 0 がついていない極限等式には暗に左右両方からの極限が考えられていることに注意しよう．さらに，条件の $x \to a$ とは，決して $x = a$ でないことにも注意しよう．

2.6 ε - δ 論法

ここから，大学数学における関数の極限について述べる．これは ε-δ 論法と呼ばれ，基本的な理論や考え方については ε-N 論法と大きく変わらない．数列の極限の場合に考えていた

n を限りなく大きくしたとき

という条件が

x を限りなく a に近づけたとき

に変わっただけである (というと聞こえはいいがやっぱりこれも難しい．)．

さて，いきなりではあるが，読者が ε-N 論法をある程度理解できていると信じて定義を述べる．

定義 2.12. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，$0 < |x - a| < \delta$ を満たす全ての x に対して

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つとき，

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

と定義する．

論理記号を用いて厳密に書くと次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \forall x \in \mathbb{R}\,[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon]$$

この定義における $0 < |x - a| < \delta$[*12]が条件である $x \to a$ を表しており，x が限りなく a に近いときを述べている．

[*12] なぜ 0 が含まれないのかという疑問が生まれるが，あくまで x が a に近づくだけで「=」になるとは言っていないためである．

つまり，とある人が，$f(x)$ が A に近いとは「差の絶対値が ε 未満でないと言えない」と述べたときに「それならば x を a にこれだけ近づけます」の”これだけ”が δ であることを示している．

以下の例題を通して詳しく学ぶことにする．

例題 2.13.

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

となることを証明する．

まず，状況を整理する．定義 2.12 における文字がそれぞれどんな数や関数になったのかをみる．それぞれ，

$$a = 3,\ f(x) = x^2,\ A = 9$$

となっていることがわかる．

さて，今示したいことは任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$|x^2 - 9| < \varepsilon$$

となることである．

こちらについてもまずは，「限りなく近い」の定義を恣意的 (具体的な数値) に決めて，その定義を満たすためにはどの程度 x を 3 に近づけなければならないのかを考察する．では，

$$|x^2 - 9| < 0.01$$

のとき，「x^2 は限りなく 9 に近い」と定義し，

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

と書くことにしよう．

知りたいことは，x をどれだけ 3 に近づければ $|x^2 - 9| < 0.01$ を満たすのか，ということである．つまり，$|x - 3|$ がどんな数 (これが δ にあたる) で上から抑えられたら良いのかということである．結論から条件を見つけるために，

$$|x^2 - 9| < 0.01$$

を x について解くと，

$$\sqrt{8.99} < x < \sqrt{9.01}$$

となる．[*13]

$$\sqrt{9.01} = 3.00167\ldots,\ \sqrt{8.99} = 2.99833\ldots$$

なので，(ちょっと範囲を狭めて)

$$2.999 < x < 3.001$$

[*13] x は 3 に近い数と仮定しているため，負の範囲の解は除いてもよい．

が得られる．よって，$x \neq 3$ に注意して

$$0 < |x-3| < 0.001 \tag{2.1}$$

となる (この 0.001 が，のちの δ である．).

つまり，示したいことである「x^2 が 9 に限りなく近い」ということを言うためには，x と 3 の差の絶対値が 0.001 未満であれば良いことがわかる．実際，$0 < |x-3| < 0.001$ を満たす任意の x に対して，

$$\begin{aligned} |x^2-9| &= |x+3||x-3| \\ &< |x+3| \cdot 0.001 \\ &< (3.001+3) \cdot 0.001 \\ &= 0.006001 \\ &< 0.01 \end{aligned}$$

が成り立ち，(恣意的に決めた) 定義である「限りなく近い」に当てはまっていることがわかる．よって，x が「限りなく 3 に近い」とき，x^2 は「限りなく 9 に近い」ことが証明できたので，

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

が成り立つ.[*14]

上記の議論は $\varepsilon = 0.001$ でも $\varepsilon = 0.000000000000001$ でもどれだけ小さな数を当てはめても，(2.1) に現れる 0.001 のような数を適切にとることができる．つまり，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても同様の議論が成り立つ.

では，抽象的な $\varepsilon > 0$ に対しても同様に，適切な x の範囲を求める予備考察をしよう．つまり，適切な $\delta > 0$ を求めることに他ならない．直接

$$|x^2-9| < \varepsilon$$

を解いて δ を定めることは難しい (面倒) なので，結論から迎えに行くことにする．$|x^2-9| < \varepsilon$ となるためには δ がどのような値であればよいか考える.

$$0 < |x-3| < \delta$$

のとき，

$$\begin{aligned} |x^2-9| &= |x+3||x-3| \\ &< |x+3|\delta \\ &= |x-3+6|\delta \\ &\leq (|x-3|+6)\delta \\ &< (\delta+6)\delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

[*14] 絶対値をつけて議論をすることにより，右側と左側の両方からの極限を同時に考えることができている.

となってほしいので，ここから δ を求める．つまり，

$$(\delta+6)\delta=\varepsilon$$

を δ について解けばよい．2 次方程式の解の公式を用いて，

$$\delta=-3+\sqrt{9+\varepsilon}$$

が得られる．もちろん，この δ は $\varepsilon>0$ より正の値をとる．逆に，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta=-3+\sqrt{9+\varepsilon}>0$ とすれば，$0<|x-3|<\delta$ を満たす任意の x に対して，

$$\begin{aligned}|x^2-9|&=|x+3||x-3|\\&<(\delta+6)\delta\\&=(3+\sqrt{9+\varepsilon})(-3+\sqrt{9+\varepsilon})\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．それでは，δ の決め方がわかったところで証明をしよう．

Proof. 任意に $\varepsilon>0$ をとる．このとき，$\delta=-3+\sqrt{9+\varepsilon}>0$ とすれば，$0<|x-3|<\delta$ を満たす任意の x に対して，

$$\begin{aligned}|x^2-9|&=|x+3||x-3|\\&<|x-3+6|\delta\\&\leq(|x-3|+6)\delta\\&<(\delta+6)\delta\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\lim_{x\to 3}x^2=9$$

である． □

このように，誰がどんな小さい数 ε をとってきたとしても，それに合わせて適切に δ を設定してあげることで x^2 と 9 がその人の小さいの定義に当てはまるように証明できる．

しかし，証明を見た読者は，

「読んだらわかるけど，$\delta=-3+\sqrt{9+\varepsilon}$ は複雑すぎる．
もっと簡単な δ をとることはできないのか．」

と思っただろう．確かに，今回は簡単な関数だったので δ は 2 次方程式を解くだけで求まった．複雑な極限等式の証明をするとなると，上記のように綺麗に δ について解ける式が現れる保証もない．ちなみに，質問に対する答えは「できる」である．δ は一意ではなく，条件を満たすようにとることができれば実はなんでもよい．また，条件として δ は限りなく小さい数として与えられているので，実は $0<\delta<1$ として問題ない．これを踏まえた上で証明を見直すと，実は δ はもっと簡単なものをとることができる．

よって，$0 < |x-3| < \delta$ かつ $0 < \delta < 1$ のとき，

$$\begin{aligned} |x^2-9| &= |x+3||x-3| \\ &< |x+3|\delta \\ &= |x-3+6|\delta \\ &\leq (|x-3|+6)\delta \\ &< (\delta+6)\delta \\ &< 7\delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

を満たすような δ をとっても問題ない．このとき，解くべき式は

$$7\delta = \varepsilon$$

であり，一瞬で

$$\delta = \frac{\varepsilon}{7} > 0$$

とわかる．もちろんこのように δ を決めると x^2 と 9 の差の絶対値が ε で上から抑えられる．

他の例も見てみよう．

例題 2.14. 極限等式

$$\lim_{x \to -1} x^3 = -1$$

を示す．

まずは予備考察として，どのように δ を決めたら良いか考える．$0 < |x-(-1)| < \delta$ のとき ($0 < \delta < 1$ で十分であることに注意して)，

$$\begin{aligned} |x^3-(-1)| &= |x+1||x^2-x+1| \\ &= |x+1||(x+1)^2-3(x+1)+4| \\ &\leq |x+1|(|x+1|^2+3|x+1|+4) \\ &< \delta(\delta^2+3\delta+4) \\ &< \delta(1^2+3+4) \\ &= 8\delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となってほしいので，求める $\delta > 0$ の 1 つとして，

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8}$$

がとれる．では，極限等式の証明に入る．

Proof. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．[*15] このとき，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{8} > 0$ とすると，$0 < |x - (-1)| < \delta$ を満たす任意の x に対して，

$$\begin{aligned} |x^3 - (-1)| &= |x+1||(x+1)^2 - 3(x+1) + 4| \\ &\leq |x+1|(|x+1|^2 + 3|x+1| + 4) \\ &< \delta(1^2 + 3 + 4) \\ &= 8\delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\lim_{x \to -1} x^3 = -1$$

となる． □

上記のように，$0 < \delta < 1$ であることを用いるとかなり簡単な δ をとることができる．

ε-N 論法のときでも述べたが，このような極限の理論が強力に働くときというのは，扱う関数が抽象的になったときである．以下のように，収束する関数の 2 つの和差積商の極限値はそれぞれの関数の極限値の和差積商によって計算ができる．

定理 2.15.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$$

とする．このとき，次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) &= \alpha \pm \beta, \\ \lim_{x \to a} f(x)g(x) &= \alpha\beta, \\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\alpha}{\beta} \ (\beta \neq 0). \end{aligned}$$

最後の締めくくりとして，関数の積の極限値がそれぞれの関数の極限値の積で求まることを ε-δ 論法で証明しよう．まずは，予備考察を行う．

最初に条件を確認すると，それはそれぞれの関数 $f(x)$，$g(x)$ が α, β に収束するということだ．これを ε-δ 論法で書き直すと，

任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して，ある $\delta_1 > 0$ が存在し，$0 < |x - a| < \delta_1$ を満たす全ての x に対して，

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon_1$$

が成り立つことと，

任意の $\varepsilon_2 > 0$ に対して，ある $\delta_2 > 0$ が存在し，$0 < |x - a| < \delta_2$ を満たす全ての x に対して，

$$|g(x) - \beta| < \varepsilon_2$$

[*15] しつこいようだが，任意の $\varepsilon > 0$ は必ず最初にとる．

が成り立つことである．次に，今から示したいことは関数の積の極限値がそれぞれの極限値の積に等しいことなので，

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta$ を満たす任意の x に対して，

$$|f(x)g(x) - \alpha\beta| < \varepsilon$$

が成り立つことである．δ をどのようにとるかはまた後で考えることにして，まずは関数の積と極限値の積の差の絶対値が ε で上から抑えるためにはどうすればよいかを考える．

この不等式の左辺を無理やり条件の使える形に変形していく．$f(x) - \alpha$ と $g(x) - \beta$ を作ることを意識して，

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |(f(x)-\alpha)(g(x)-\beta) + \beta f(x) + \alpha g(x) - 2\alpha\beta| \\ &= |(f(x)-\alpha)(g(x)-\beta) + \beta(f(x)-\alpha) + \alpha(g(x)-\beta)| \\ &\leq |f(x)-\alpha||g(x)-\beta| + |\beta||f(x)-\alpha| + |\alpha||g(x)-\beta| \\ &< \varepsilon_1\varepsilon_2 + |\beta|\varepsilon_1 + |\alpha|\varepsilon_2\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき，最右辺が ε に上から抑えるためにはどうすればよいだろうか.

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 + |\beta|\varepsilon_1 + |\alpha|\varepsilon_2 < (\text{何かしらの計算}) < \varepsilon$$

のようになってほしい．ここで，2 つの ε_1，ε_2 だが，どちらも条件に現れる任意の数なので我々が好きなように与えることができる (好きなように与えたとしても，適切に小さいの尺度である δ_1，δ_2 をとることが可能である)．よって，はじめから

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

としておいても問題ない．これでさらに式は簡単になり，

$$\begin{aligned}\varepsilon_1\varepsilon_2 + |\beta|\varepsilon_1 + |\alpha|\varepsilon_2 &= \varepsilon_1(\varepsilon_1 + |\beta| + |\alpha|) \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

を考えればよい．さらに，任意であることをまた使い，ε_1 は

$$0 < \varepsilon_1 < 1$$

を満たす数としてもよい．さらに式は簡単になり，

$$\begin{aligned}\varepsilon_1\varepsilon_2 + |\beta|\varepsilon_1 + |\alpha|\varepsilon_2 &= \varepsilon_1(\varepsilon_1 + |\beta| + |\alpha|) \\ &< \varepsilon_1(1 + |\beta| + |\alpha|) \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

を考えればよい．ここまで来ると，ε_1 のとり方が 1 つ決まり，

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|} > 0$$

とすればよいことがわかった．ただし，これは $0 < \varepsilon < 1$ のときでないと $0 < \varepsilon_1 < 1$ が言えない．しかし，極限等式を示す上で任意の ε は「小さい」を表すものなので，初めから $0 < \varepsilon < 1$ の場合が言えれば十分である．

さて，最後に $\delta > 0$ のとり方であるが，$0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の x に対して次の 2 つの条件式が使えるようなものでなければならない．

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|},\ |g(x) - \beta| < \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|}$$

この 2 つの不等式はそれぞれ，

$$0 < |x - a| < \delta_1,\ 0 < |x - a| < \delta_2$$

を満たす任意の x のときのみ使えるものなので，両方とも使えるようにその 2 つの δ_1，δ_2 よりも小さなものを選べばよい．つまり，

$$0 < |x - a| < \delta < \delta_1 \text{ かつ } 0 < |x - a| < \delta < \delta_2$$

となる δ を選べばよい．それはあまり難しいことではなく，

$$\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\} > 0$$

とすればいい．これで予備考察は終わり，証明が可能になる．

Proof. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$0 < \varepsilon < 1$ の場合を証明する．このとき，仮定より，ある $\delta_1 > 0$ と $\delta_2 > 0$ が存在して，$0 < |x - a| < \delta_1$ を満たす任意の x に対して

$$|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|}$$

が成り立ち，$0 < |x - a| < \delta_2$ を満たす任意の x に対して

$$|g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|}$$

が成り立つ．よって，$\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\} > 0$ とすれば，$0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の x に対して，$0 < \dfrac{\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|} < 1$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |(f(x) - \alpha)(g(x) - \beta) + \beta f(x) + \alpha g(x) - 2\alpha\beta| \\
&= |(f(x) - \alpha)(g(x) - \beta) + \beta(f(x) - \alpha) + \alpha(g(x) - \beta)| \\
&\leq |f(x) - \alpha||g(x) - \beta| + |\beta||f(x) - \alpha| + |\alpha||g(x) - \beta| \\
&< \frac{\varepsilon^2}{(1 + |\beta| + |\alpha|)^2} + \frac{|\beta|\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|} + \frac{|\alpha|\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|} \\
&< \frac{\varepsilon}{1 + |\beta| + |\alpha|}(1 + |\beta| + |\alpha|) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

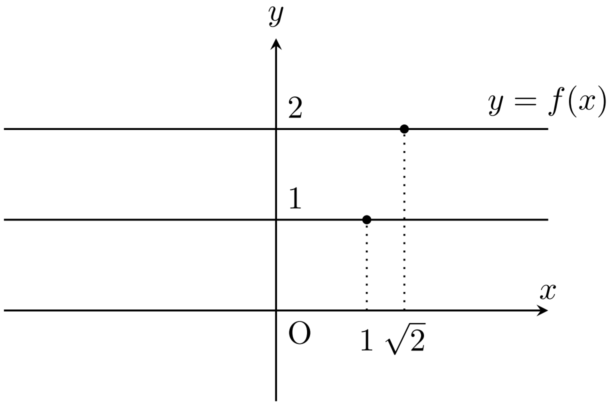
が成り立つ． □

2.7 関数の連続性

次に，関数が連続とは何かということについて述べる．視覚的に，平たく言えば関数が連続であるとは「つながっていること」と言い換えられる．ただし，このような日本語では曖昧であり，グラフを見るだけで連続かどうか判断できる関数ばかりではない．例えば，次の関数はグラフを見てもつながっているかは判断ができにくい．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 2 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

ここで，$\mathbb{Q}$ とは有理数全体の集合である．つまり，この関数[*16]は，x が有理数のときは 1 をとり，無理数のときは 2 をとるような関数である．有理数も無理数も実数の中に細かく分布している[*17]のでグラフは次のように見える．



このようなグラフでも，連続かどうかを判断できるように「つながっている」ということを論理で明確にする必要がある．

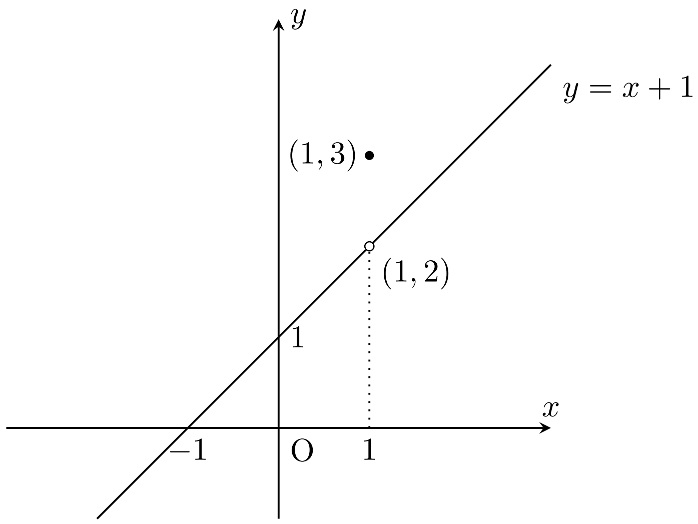
さて，つながっているというどういうことだろうか．逆につながっていないということを考えてみよう．例えば次のようなグラフを考えると，$x = 1$ でつながっていないことは視覚的に明らかである．

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x \neq 1), \\ 3 & (x = 1) \end{cases}$$

この関数はほとんどの x の場合で $x + 1$ だが，唯一 $x = 1$ のときだけは 2 ではなく 3 という値をとっている．図示すると次のようになる．

[*16] Dirichlet 関数と呼ばれ，本来は無理数で 0，有理数で 1 をとる関数のことを指す．今回はグラフをわかりやすくするために 1 と 2 を採用した．ちなみにこの関数は至る所で連続でない．

[*17] 正確には「稠密」という表現をする．



この $x = 1$ でグラフが途切れているのがわかるだろう．この場合，実際この関数 $f(x)$ は $x = 1$ で連続でない．「連続でない」の感覚は，「急に値が飛ぶこと」である．この $f(x)$ は x が 1 より小さい値から徐々に 1 に近づいていくことを考えたとき，この直線に沿うと普通 (？) は $x = 1$ のとき 2 に近づいていきそうな気もする．だがしかし関数の定義はそうでなく，急に値が 3 に飛んでいる．これは 1 より大きな値をとりながら近づいても同様である．

つまり，$x = 1$ 連続でないとは，$f(x)$ の x が 1 に限りなく近づいていくとき，その近づいた値が $f(1)$ に等しくない (急に値が飛ぶ) ことを示している．この近づくということを極限を使って書くと，

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 3 = f(1)$$

となる．逆に，ある値 $x = a$ に徐々に近づいていくときにその極限値がグラフの値 $f(a)$ になることが連続であると定義できる．

よって，関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの定義は次のようになる．

定義 2.16. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは，関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで定義されていて，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことと定義する．[*18]

端的に言えば，

極限と代入が等しい

と言い換えられる．さらに

$$\lim_{x \to a} x = a$$

[*18] たまに連続の定義を ε-δ 論法で書かなければならないと思っている人がいるが，それは連続の定義に含まれる極限を厳密に書いただけであり必ずしも ε-δ 論法で書く必要はない．

というあたり前の事実を用いることで連続の定義は次のようにも思える．

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$$

つまり，この等式を見ると，関数 $f(x)$ が連続であるとき，

極限 (lim) と関数 (f) の入れ替えが可能

であることを示している．ちなみに ε-δ 論法を用いて厳密に連続の定義を表記すると

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ s.t.\ \forall x \in \mathbb{R}\,[0 \leq |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

となる．ここで，$0 < |x-a| < \delta$ ではなく $0 \leq |x-a| < \delta$ となっているのは，関数 $f(x)$ は $x = a$ で定義されており，$|x-a| = 0$ となることもあり得るためである．

連続な関数の和差積商、合成はすべて連続関数となる．つまり，次のような関数は定義されている区間で連続である．

例 2.17. 次の関数は定義された区間で連続な関数である．

1. $y = x^2 + x + 1$
2. $y = \sin(x^2)$
3. $y = \cos(e^x)$
4. $y = \log(\sin(x^2) + x^4 + e^x)$
5. $y = |x|$

例えば，例 2.17 の 4 つ目の関数 $y = \log(\sin(x^2) + x^4 + e^x)$ の $x \to 0$ における極限値を求めようとすると，指数・対数関数，三角関数，多項式は全て連続関数なので，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\log(\sin(x^2) + x^4 + e^x) &= \log\left(\lim_{x\to 0}\left(\sin(x^2) + x^4 + e^x\right)\right) \\
&= \log\left(\lim_{x\to 0}\sin(x^2) + \lim_{x\to 0} x^4 + \lim_{x\to 0} e^x\right) \\
&= \log\left(\sin\left(\left(\lim_{x\to 0} x\right)^2\right) + \left(\lim_{x\to 0} x\right)^4 + e^{\lim_{x\to 0} x}\right) \\
&= \log(0 + 0 + 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．

以上のように，極限値を求める操作において，関数の連続性は非常に大事なものになる．当たり前に行っていた計算も，実は関数の連続性によって担保されていたのである．また，連続関数にはコンパクト空間*19上の最大・最小の存在定理など，様々なところで重要な役割を果たす．

*19 端っこが全て含まれるかつ無限に広がらないような空間のこと．$a \leq x \leq b$ など．

3　微分

本節より，微分について述べる．微分とは関数のある点における接線の傾きを求める操作である．その他にも関数の近似など，一般的で複雑な関数を分析するときに非常に重要な役割を果たす．また，高校数学で扱うような微分の計算は省略する．

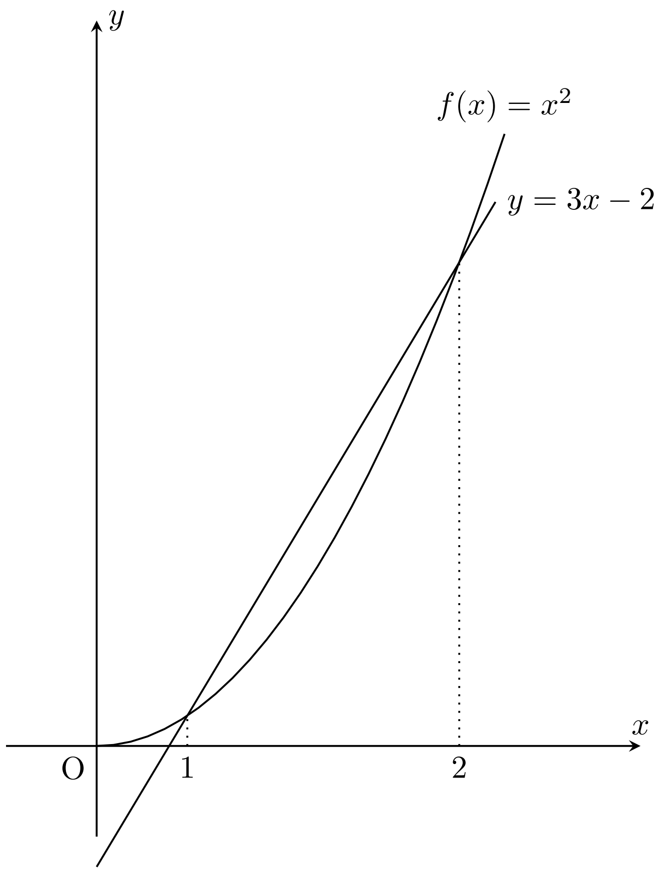
3.1　具体的な微分の計算と意味

例えば，$f(x) = x^2$ の点 $(1,1)$ における接線を求めようとするとどうすれば良いだろうか．通る点は与えられているので，あとは傾きさえわかってしまえば直線の方程式がもとまる．

では，例えば 2 点 $(1,1)$，$(2,4)$ を通る線の傾きを求めよと言われればそれは簡単であり，

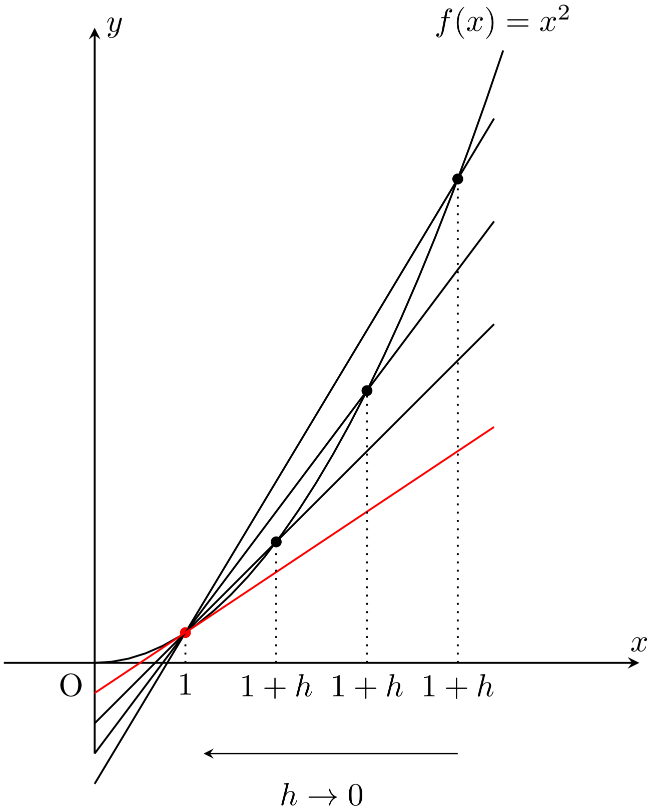
$$\frac{4-1}{2-1} = 3$$

とわかる．図にすると以下のようになる．



このように，2 点を与えられないと直線の傾きはわからないが，接線を求めるときに与えられるものは 1 点のみである．この 1 点を求めるときに，限りなく近い 2 点を 1 点と思うことにすると接線の傾きがわかる．つまり，2 点 $(1,1)$ と $(1+h, (1+h)^2)$ を与え，こ

の h を限りなく 0 に近づけるという操作をすればそれは 1 点だと思えると解釈するわけである．



赤色の直線は点 $(1,1)$ における接線である．また，傾きは次のようにして求められる．

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} &= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2 + h) \\
&= 2
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

そして，点 $(1,1)$ を通るので，求める接線の式は

$$y = 2x - 1$$

とわかる．この計算を一般化することで，点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを求める式が定義できる．

定義 3.1. 点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するときに求められ，これを $x = a$ における微分係数と呼び，

$$f'(a)$$

と表す．

例えば，(3.1) は次のように書く．

$$f'(1) = 2$$

意味としては，関数 $f(x) = x^2$ の $x = 1$ における接線の傾きが 2 であることを示している．

さらに，微分係数は a についての関数とも思うことができ，改めて a を x と書き換えると新しい関数を定義することができる．

定義 3.2. 極限,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在するとき，$f'(x)$ と表し，$f(x)$ の導関数という．また，関数 $f(x)$ は与えられた区間で微分可能であると言う．

また，微分の記号は様々であり，$y = f(x)$ のとき，$f'(x)$ は次のように書かれることもある．

$$\frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ y',\ \frac{dy}{dx}$$

読者が知っている通り，次のように計算ができる．

例 3.3. 次の関数は定義された区間で微分可能な関数である．

1. $f(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$
2. $g(x) = \sin(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2x\cos(x^2)$
3. $h(x) = \log x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{x}$

さらに，抽象的な関数に対する微分の結果を定理としてまとめておく．

定理 3.4. 定義された区間で微分可能な $f(x)$, $g(x)$ について，次が成り立つ．

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$,
4. $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\, g'(x)$

次に，微分不可能な点をもつ関数について紹介する．

$$f(x) = |x|$$

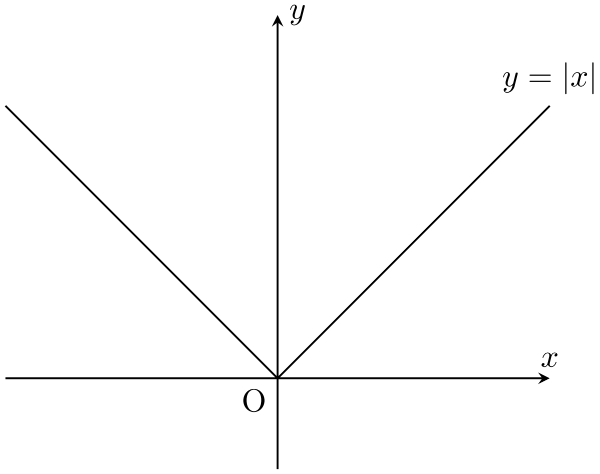
は $x = 0$ で微分不可能である．実際，定義に従って計算すると，

$$\lim_{h \to +0} \frac{|h| - |0|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \to -0} \frac{|h| - |0|}{h}$$

となり，右側から 0 に近づけたときの極限値と左側から 0 に近づけたときの極限値が異なる値をもつからである．微分可能であるのイメージは，

関数がその点で滑らかにつながっている

である．上記の微分ができない関数を図示すると次のようになり，$x = 0$ のところで尖っていることがわかるだろう．



また，微分が可能であればその関数は連続である．実際，関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとすると，$h = x - a$ とおけば，$x \to a$ のとき，$h \to 0$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h \\
&= f'(a)\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つからである．

3.2 平均値の定理

ここでは微分で非常に重要な定理の 1 つである平均値の定理について述べる．平均値の定理とは，関数の 2 点を結んでできる直線に対して，それと同じ傾きをもつその関数の接線を少なくとも 1 つ以上は構成できることを保証する定理である．

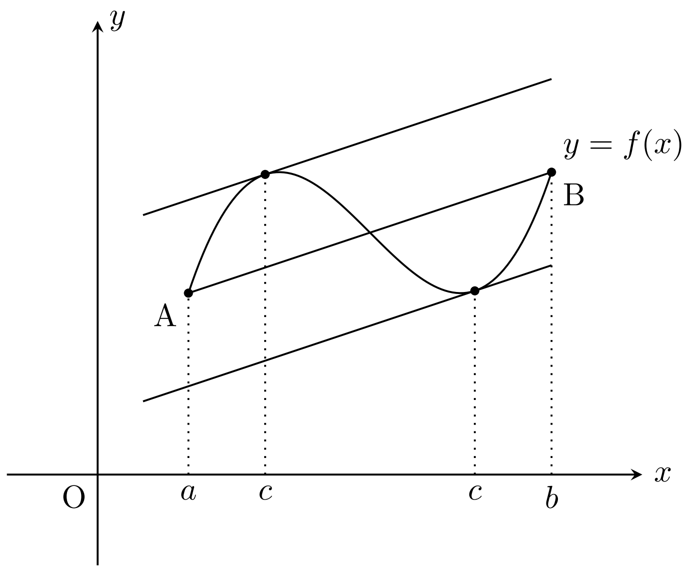
定理 3.5 (平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であるとする[*20]．このとき，定数 $c \in (a, b)$ が存在して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{3.2}$$

[*20] $a \leq x \leq b$ を $[a, b]$ で，$a < x < b$ を (a, b) で表すことがある．

が成り立つ．

抽象的な関数を例として，定理の意味を図示すると以下のようになる．c は必ずしも 1 つだけとは限らず，2 つ以上存在する場合がある．



また，$f(x)$ が $f(a) = f(b)$ を満たすとき，ロルの定理と呼ばれるものになる．

定理 3.6 (ロルの定理)**.** 関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で $f(a) = f(b)$ を満たし，閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．このとき，定数 $c \in (a, b)$ が存在して

$$f'(c) = 0$$

が成り立つ．

もちろんこの定理の内容はほとんど平均値の定理と同じであり，関数の端っこが同じ高さで滑らかに繋がっている関数は，必ずどこかのタイミングで傾きがなくなる瞬間 (山の頂上か谷の底) があるということを述べている．

Proof. 関数 $f(x)$ が定数関数の場合は明らかである (定数を微分すると 0 になるため)．$f(x)$ が定数関数でないとする．関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続なので，任意の $x \in [a, b]$ に対して，

$$f(c) \geq f(x)$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する ($f(c) \neq f(a)$，$f(c) \neq f(b)$ であることに注意する)．つまり，最大値 $f(c)$ が存在する．このとき，$h > 0$ に対して，$f(c+h) \leq f(c)$ であることに注意すると，

$$f'(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成り立つ．また，$h < 0$ に対して，$f(c+h) \leq f(c)$ なので，

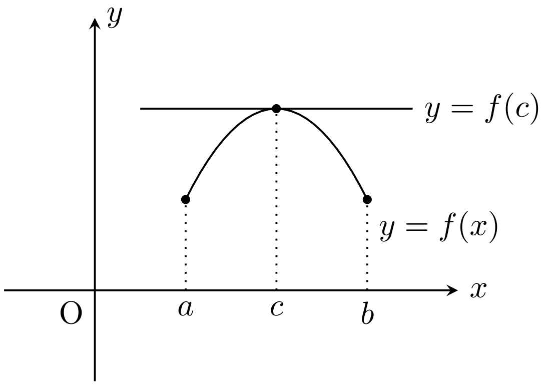
$$f'(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成り立つ．よって，

$$0 \leq \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

となり，$f'(c)=0$ が成り立つ． □

下の図のように，端点が同じ高さで連続かつ微分可能であれば，接線の傾きが 0 になる (接線が真横になる) ような点 c が存在することがわかる．



平均値の定理はロルの定理から導かれる．では，平均値の定理を証明してみよう．

Proof. (平均値の定理の証明)

$$F(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

とおく．[*21] このとき，$F(x)$ は $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能，さらに，

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a), \\ F(b) &= f(b) - (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= f(a) = F(a) \end{aligned}$$

なので，ロルの定理より，定数 $c \in (a,b)$ が存在して，

$$F'(c) = 0$$

が成り立つ．よって，$F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ なので，

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が成り立つ． □

[*21] この $F(x)$ はどこから出てきたのかと疑問に思うかもしれないが，平均変化率の部分が $f(x)$ の微分係数と思うと一次近似式に見えてくるので自然な発想といえば自然である．かも．

3.3 高階微分

微分は，1 回するだけにとどまらず可能な回数まで行うことができる．関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，その導関数を $f'(x)$ と表した．この導関数がさらに微分可能，つまり

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

が存在するとき，この極限値を

$$f''(x)$$

と表し，$f(x)$ の 2 階微分[*22]という．

もちろん，3 階，4 階と微分の階数を増やすことができるが，それぞれ数式で表現しようとすると，

$$f'''(x),\ f''''(x)$$

と f の右肩のダッシュ (プライム) が増えて非常に見にくくなる．一般に，$f(x)$ の n 階微分を

$$f^{(n)}(x)\ (n \in \mathbb{N})^{*23}$$

と書く．例えば,

$$f^{(3)}(x) = f'''(x),\ f^{(2)}(x) = f''(x),\ f^{(1)}(x) = f'(x)$$

である．また，便宜上 $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする．

例 3.7. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ のとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 10x - 1, \\ f''(x) &= 12x + 10, \\ f^{(3)}(x) &= 12, \\ f^{(n)}(x) &= 0\ (n \geq 4). \end{aligned}$$

となる．

また，2 回微分できるがそれ以降微分ができない関数もある．

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

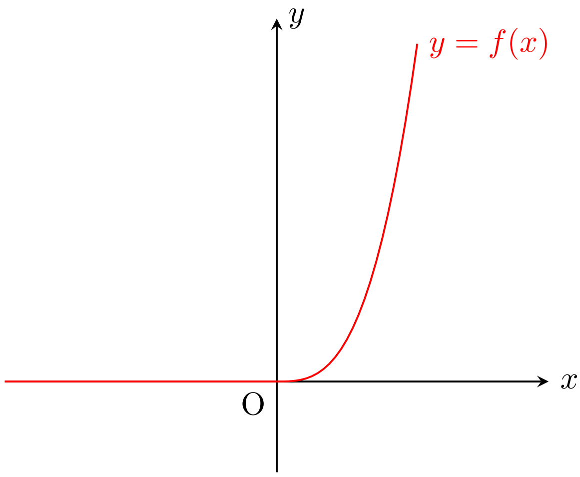
とすれば，$f(x)$ は 2 階微分は存在するが 3 階微分は存在しない関数である．グラフは以下のようになる．

---

*22 $f''(x)$ は「2 回微分」ではなく「2 階微分」と表記する．一説では，微分すると関数の”住む世界”が変わるから．

*23 ちなみに微分の階数は負の数や分数に拡張可能である．つまり，-1 階微分や $\frac{1}{2}$ 階微分なるものが定義可能である．

(ここに図を挿入)



1 階微分は

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

であり，2 階微分は

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

となる．しかし，3 階微分 $f^{(3)}(x)$ は存在しない．実際，

$$6 = \lim_{h \to +0} \frac{f''(h) - f''(0)}{h} \neq \lim_{h \to -0} \frac{f''(h) - f''(0)}{h} = 0$$

となるからである．

3.4 Taylor の定理

ここでは Taylor の定理について述べる．Taylor の定理とは，平均値の定理の一般化である．Taylor の定理では，一般的な関数を多項式で近似する定理である．抽象的な関数 $f(x)$ を準備したとき，それをどのように扱って良いか不明なものだが，Taylor の定理を用いることでまるで多項式のようにその関数を扱うことができ，多くの近似計算の役に立つ．例えば，物理学の分野でよく使われる次のような近似式は Taylor の定理によって裏付けされている．

$$\begin{aligned} \sin\theta &\fallingdotseq \theta \ (\theta \fallingdotseq 0), \\ (1+x)^\alpha &\fallingdotseq 1 + \alpha x \ (\alpha \in \mathbb{R},\ |x| \ll 1), \\ \log(1+x) &\fallingdotseq x \ (|x| \ll 1) \end{aligned}$$

このような近似式をより深く考察，一般化したものが Taylor の定理である．

(3.2) において，$b=x$ とすると[*24]

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

を満たす定数 $c\in(a,x)$ が存在するという定理になり，これを $f(x)$ について解くと，

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(c) \tag{3.3}$$

となる．これは，$f(x)$ という抽象的でよくわからない関数を 1 次式のような簡単な式に書き換えているように見える．[*25]また

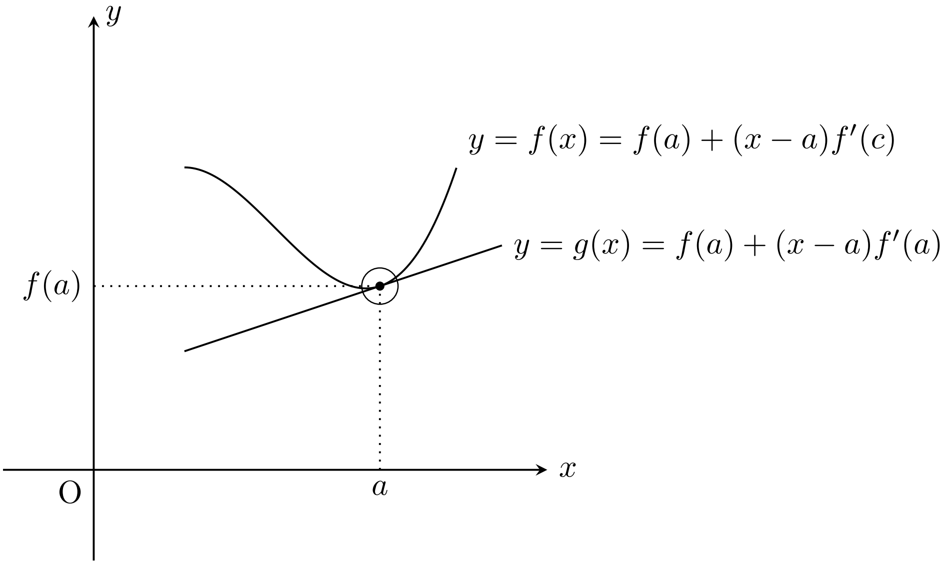
実際,

$$g(x)=f(a)+(x-a)f'(a)$$

とおくと，$g(x)$ は $x=a$ の近くで $f(x)$ の良い近似を与えている．

では，(3.3) との違いや誤差はなんだろうか．$f(x)$ と $g(x)$ の違いは，最後の f' の引数が a か c かの違いである．図示して確認すると以下のようになる．

(ここに図を挿入)



点 $(a,f(a))$ 中心の円の中だけで関数を比較すると，ほぼ差がないように見える (つまり近似ができている．)．

具体例として，ある x を与えたときに誤差項に現れる c がどのような値になるなのかを確認してみよう．ここでは簡単な例として

$$f(x)=x^2,\ a=1$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} g(x)&=f(1)+(x-1)f'(1)\\ &=1+2(x-1)\end{aligned}$$

[*24] $b=x$ にする本質的な意味はない．単に，よく見る関数の変数である x に書き直しているだけである．

[*25] つまり微分とは，抽象的な関数をよく知られている”多項式”で近似する理論であるとも言える．

となる．さて，平均値の定理により，

$$f(x) = 1 + 2(x-1)c$$

となる $c \in (1, x)$ が存在する．この $f(x)$，$g(x)$ の 2 つがどれだけ近い関数なのかを考える．ちなみに，ここで近いのはあくまで $x = 1$ 付近であり，そこから離れるにつれて誤差が大きくなっていく傾向がある．

$x = 1$ に関しては，両者は完全に一致している．つまり，

$$f(1) = 1 = g(1)$$

である．では，$x = 1$ から少し離れた点についてはどの程度の誤差が生まれるだろうか．その誤差をどのように表すかを明確に数値として表しているのが c の値である (誤差そのものを表しているわけではないことに注意)．例えば，$x = 2$ における 2 つの関数の近さを比較しよう．もちろん，それぞれの関数に $x = 2$ を代入すればよいので，

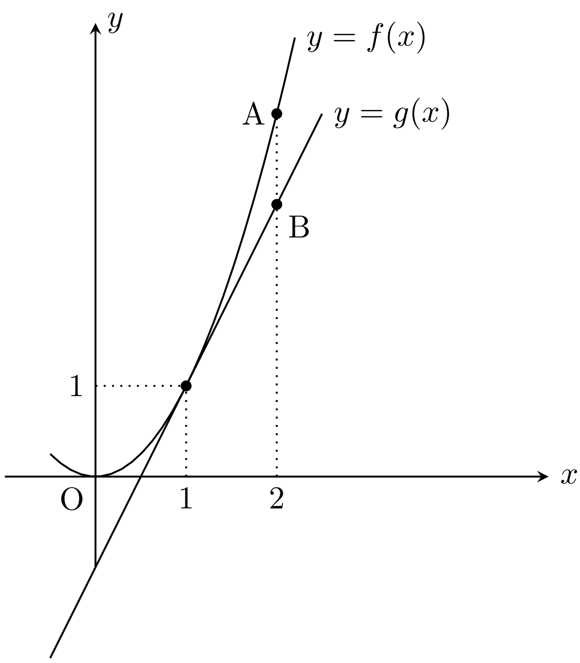
$$\begin{aligned} f(2) &= 1 + 2c, \\ g(2) &= 3 \end{aligned}$$

となる．また, 実際の誤差は $f(2) = 4$, $g(2) = 3$ なので 1 になる．よって, $f(2) - g(2) = 1$ を c について解けば,

$$c = \frac{3}{2}$$

とわかる．もちろん，これは定理の通り $a = 1 < c < 2 = x$ を満たす．

(ここに図を挿入)



他にも，$x = \dfrac{3}{2} = 1.5$ の場合で誤差を表す c の値を計算してみよう．

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + c,$$
$$g\left(\frac{3}{2}\right) = 2$$

なので，$f\left(\dfrac{3}{2}\right) - g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ を解くと，

$$c = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$$

となる．

今行った例は，実際に定理の主張に合うような定数 c の具体的な数値を計算しただけである．つまり，よくわからない関数 $f(x)$ を近似しようと思ったけどどうしても

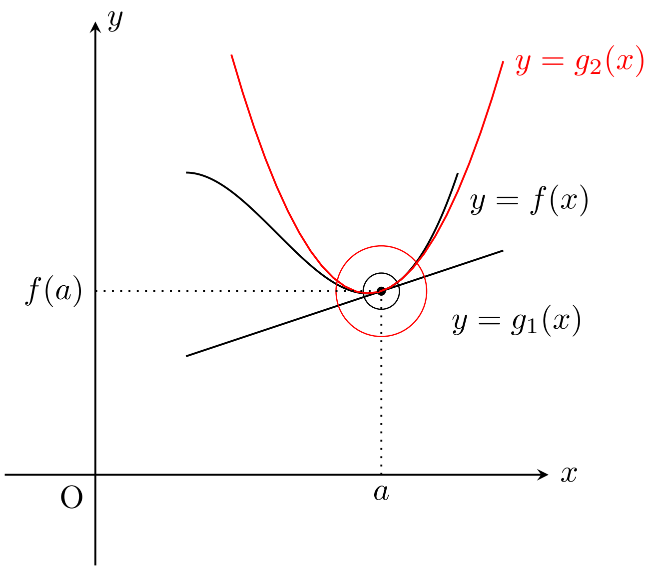
$$f(x) = f(a) + (\text{誤差})$$

という形になるので，じゃあこの誤差はどうやって表されるんだろう？という疑問に答えたものが平均値の定理 (Taylor の定理) である．この誤差は，先ほども見たように

$$(\text{誤差}) = (x-a)f'(c)$$

とかける．

ただ，やはり一般の関数を直線で近似をすることは見ての通り難しい．点 $(a, f(a))$ から離れるほど関数の差が大きくなる．そこで，次は 2 次関数で $f(x)$ を近似することを考える．



なお，ここでは 1 次関数で近似した式を $g_1(x)$ とし，2 次関数で近似した式を $g_2(x)$ とお

いている．つまり，

$$g_1(x) = f(a) + (x-a)f'(a),$$
$$g_2(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$$

としている．2 次関数で $f(x)$ を近似すると，$g_1(x)$ と比較するとより広い範囲で正確に近似できていることがわかる．$g_2(x)$ の構成方法はここではいったん無視して，平均値の定理を拡張したようなものという認識さえあれば良い．

このような近似式の構成を続けていくと，3 次式，4 次式と次数を増やしていけば関数 $f(x)$ をよりよく近似できそうという発想に至るだろう．それを n 次式にまで一般化して近似したものが Taylor の定理である．

定理 3.8. $f(x)$ は閉区間 $[a,x]$ 上で n 回微分可能とする．このとき，定数 $c \in (a,x)$ が存在して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

つまりこの定理は，一般のよくわからない関数を $(n-1)$ 次式で近似しようとして、その誤差が

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

で表されることを述べている．[*26]誤差というものがあることはわかっているが，それが自身の微分と $x=a$ だけの情報で記述できるという点が Taylor の定理の素晴らしいところだと筆者は思う．

例 3.9. $f(x) = e^x$，$a=0$ のとき[*27]に Taylor の定理を適用する．n が自然数または 0 のとき，

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

なので，$f^{(n)}(0) = 1$ である．よって，Taylor の定理より，定数 $c \in (0,x)$ が存在して，

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}x^k + \frac{e^c}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n \end{aligned}$$

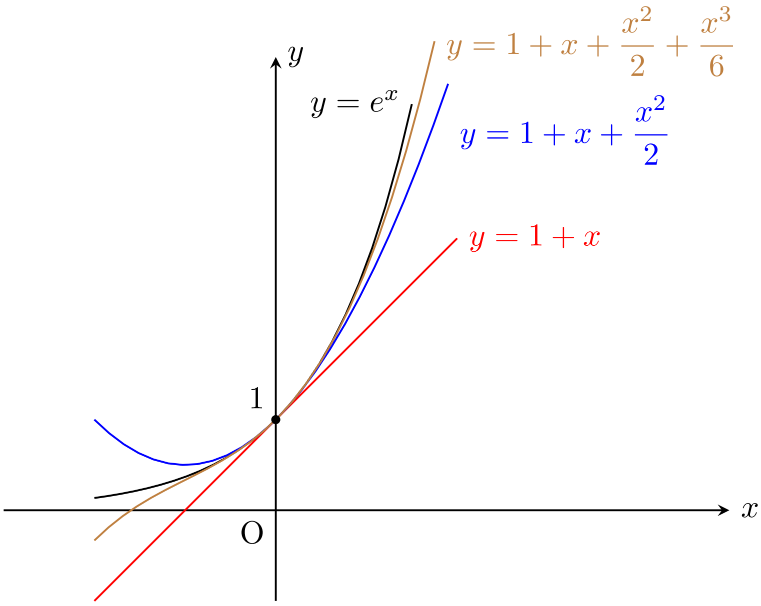
[*26] これは Lagrange(ラグランジュ) の剰余項と呼ばれ，その他にも Cauchy(コーシー) の剰余項や Bernoulli(ベルヌーイ) の剰余項が存在する．

[*27] $a=0$ の場合は特別に Maclaurin(マクローリン) の定理と呼ばれる．

が成り立つ．

このように，指数関数というものを $(n-1)$ 次式のようなもので表すことが可能である．もちろん，指数関数は多項式ではないので，一番最後に誤差項が現れる．n が大きくなるほど以下の図のように $x=0$ の近くでの近似の精度は向上する．

ここに図を挿入



最後に，Taylor の定理の証明を行う．Lagrange の剰余項の場合は少し発想が複雑である．基本的には平均値の定理を証明したときと同様に，新しい関数を定義してそれがロルの定理をみたすことにより証明をする．

定理の主張では $[a,x]$ であるが，$[a,b]$ に置き換えて証明を行う．

Proof. (Taylor の定理の証明) $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で $(n-1)$ 回微分可能で微分したあとの関数が連続，かつ (a,b) で n 階微分が存在するとする．[*28]まず，定数 A を次の等式がみたすように定義する．

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{A}{n!}(b-a)^n \tag{3.4}$$

(この A が後の $f^{(n)}(c)$ である) 関数 $F(x)$ を次で定義する．

$$F(x) = f(b) - \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{n!}(b-x)^n \right\}$$

このとき，

$$f(a) = 0 = f(b)$$

[*28] 一般に，関数 $f(x)$ がある区間で n 階微分が存在し，$f^{(n)}(x)$ が連続関数であるとき，その関数は C^n 級関数という．C^0 級関数は連続関数のことを指す．

なので，ロルの定理より，

$$F'(c) = 0$$

となる定数 $c \in (a, x)$ が存在する．

$$F'(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{k!} \left(f^{(k+1)}(x)(b-x)^k - kf^{(k)}(x)(b-x)^{k-1} \right) \right\}$$

なので，

$$F'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-c)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b-c)^{n-1}$$

より，

$$A = f^{(n)}(c)$$

が成り立つ．よって，(3.4) に代入すれば，題意の等式が得られる． □

3.5 Taylor 展開

Taylor の定理を用いると，誤差項はついてくるがそれでも一般の関数を多項式のようなもので表せることがわかった．そして，その次数 n を大きくすると近似の精度は上がる．それでは，その次数を無限大にするとどうなるだろうか？極限まで次数を大きくしているのでかなりの精度を叩き出すと予想ができる．結論としては，$n \to \infty$ とすると無限次の多項式は元の一般の関数に一致する．それが Taylor 展開であり，現代の数学・物理学では様々な応用がなされている．

また，ここまで触れてこなかったが，Taylor の定理の主張に現れる定数 c は，定数ではあるが a と x に依存していることに注意しよう．つまり，変数 x が変わるとそれに伴って c の値もおのずと変わることを意味する．

さて，Taylor の定理によって次のように誤差項をもつ $(n-1)$ 次近似に表したとする．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \tag{3.5}$$

$R_n(x)$ が誤差項であり，

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

となる定数 $c \in (a, x)$ が存在する．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

が成り立つとすれば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{3.6}$$

これが Taylor 展開と呼ばれるものであり，正確には

$$\text{点 } x=a \text{ を中心とする } f(x) \text{ の Taylor 展開}^{*29}$$

という.

例題 3.10. $f(x)=e^x$ を $x=0$ を中心として Taylor 展開すると，$f^{(k)}(0)=1$ なので,

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

となる．また，これは任意の $x\in\mathbb{R}$ で成り立つ.

例題 3.11. $f(x)=\sin x$ を $x=0$ を中心として Taylor 展開すると，$f^{(k)}(0)=\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ なので,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

となる．また，これは任意の $x\in\mathbb{R}$ で成り立つ.

例題 3.12. $f(x)=-\log(1-x)$ を $x=0$ を中心として Taylor 展開すると，$f^{(k)}(0)=k!\ (k\in\mathbb{N})$ なので,

$$-\log(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$$

となる．また，これは $-1\leq x<1$ で成り立つ.

このように，指数関数や三角関数、対数関数などはすべて与えられた区間において Taylor 展開可能である．また，与えられた関数が Taylor 展開可能かどうかは，誤差項 $R_n(x)$ が $n\to\infty$ において 0 収束するかどうかで決まる．つまり，実際に計算してみるまでわからないこともあるということだ. [30]

Taylor 展開された無限の和をどこか有限の場所で打ち切ってしまえば，それば近似式となる．例えば $\sin x$ の例をみると，最初の第一項で打ち切ると

$$\sin x\fallingdotseq x$$

となり，冒頭の近似式が得られる.

Taylor 展開には近似だけではなく，無限級数に展開されたものからその関数の性質が様々に明らかにされる．詳しいことは最後の節で述べる.

4　積分

ここからは積分について述べる．積分とは，高校数学においては微分の計算の逆と定義され，関数によって囲まれた図形の面積を求めるものと学習する．大学数学においては積

[29] $a=0$ の場合は特別に Maclaurin 展開と呼ばれる.

[30] 無限回微分可能な f の n 階微分の絶対値がある連続関数で上から抑えられるとき，Taylor 展開可能であるという定理は存在する.

分は微分の逆として定義はせず，全く別の理論として構築する．しかし，関数にある条件を設けることによって積分計算は微分計算の逆であることが示される．つまり，積分が微分の逆であることは定義ではなく定理として示される．

4.1　高校までの積分

とはいえ，いきなり大学数学の積分の話をすると大変なので，まずは高校数学の積分を振り返ろう．

定義 4.1. 微分すると $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．つまり，

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を原始関数という．

例 4.2. $F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数である．

x によらない定数 C を用いて $F(x) = x^3 + C$ という関数も $f(x)$ の原始関数である．定数を微分すると 0 になるためである．

高校数学の場合，この $F(x)$ は不定積分と呼ばれ，

$$F(x) = \int f(x)dx$$

と書く．[*31]つまり，$f(x) = 3x^2$ のとき，

$$F(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

となる．このときの定数 C は積分定数と呼ばれる．

不定積分の次は定積分の復習をする．不定積分とはその名の通り値が決まっていないために「不定」であり，定積分は実際に値が求まる．

定義 4.3. $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，a から b までの定積分を次で定義する．

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

例 4.4. $f(x) = 3x^2$ の 1 から 3 の定積分は

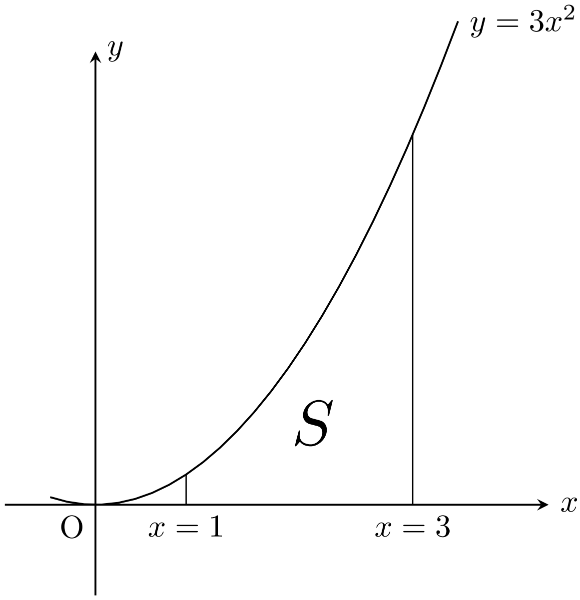
$$\begin{aligned}\int_1^3 3x^2 dx &= \left[x^3\right]_1^3 \\ &= 3^3 - 1^3 \\ &= 26\end{aligned}$$

となる．

[*31] $\int$ はインテグラルと呼ばれ，S を縦に引き延ばした形を表している．

定積分の計算とは，関数によって表された図形の面積を求める操作である．ほとんどの読者が知っている通り，先ほどの求めた 26 という数値は以下の図で表された面積 S の大きさである (縮尺は変えている).

(ここに図を挿入)



そのほかにも，積分には様々な性質があり，線形性や置換積分，部分積分などがある．まずはそれを紹介する.

定理 4.5. 関数 $f(x)$, $g(x)$，定数 α, $\beta \in \mathbb{R}$ に対して，次の式が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx,$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\left(g(t)\right) g'(t)dt.$

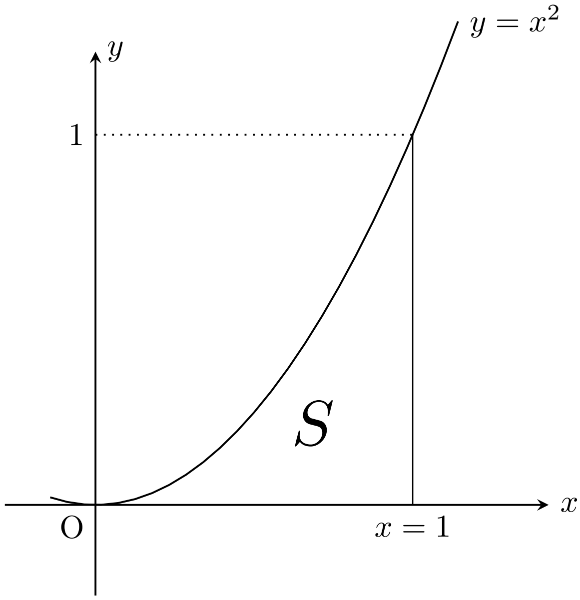
例えば定理 4.5 の (2) を用いる場合では，次のような積分計算例が有名である.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos x dx &= [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= -\left[-\cos x\right]_0^\pi \\ &= -2\end{aligned}$$

4.2 区分求積法

定積分は面積を求める計算と最初に学習するが，理系の高校生では別の観点から対象の図形の面積を求めることを学ぶ．それが区分求積法と呼ばれる求積法であり，定積分が面積を求める操作ということを知らない前提で関数で囲まれた面積を求めることを考える.

今回は $y=x^2$ と $x=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよう．



このような図形の面積 S を求めるのだが，定積分の知識をもった読者であればすぐに，

$$S=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

と求めることができるだろう．だが，今回は定積分を用いずに答えの $\dfrac{1}{3}$ を求める．

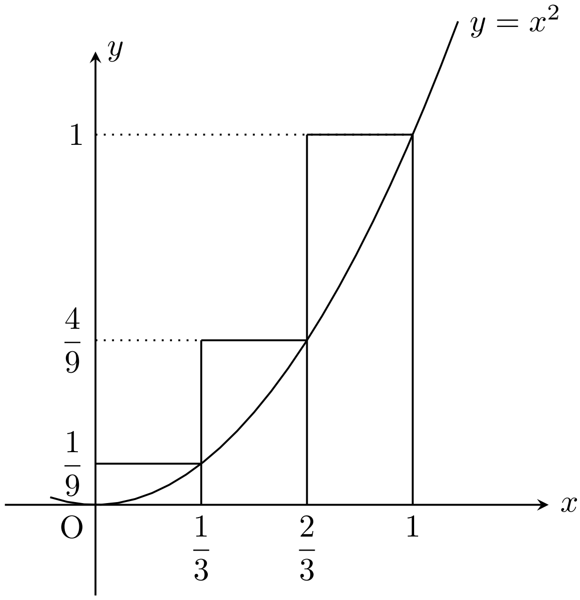
どうすれば良いのかという疑問が当然湧いてくるが，なぜこの図形の面積を求めることができないのかという部分を考える必要がある．それは図形の境界線の一部に曲線が混ざっているからである．例えば単純な，縦の長さが a，横の長さが b である長方形の面積 S を求めよと言われればそれはすぐに

$$S=(\text{縦の長さ})\times(\text{横の長さ})=ab$$

と求まるだろう．[*32] この長方形の面積というものだけを武器として，曲線を含む図形の面積を求めることを考える．キーワードは近似である．ではどのように近似をするかというと，図形がすっぽり覆うようないくつかの長方形 (もしくは図形に長方形がすっぽり覆われる) を考えてそれを S の近似としようというアイデアである．

例えば以下の図のように，区間 $[0,1]$ を 3 等分するように 3 つの長方形を考えよう．まず，次のように図形を覆うように長方形を作る．

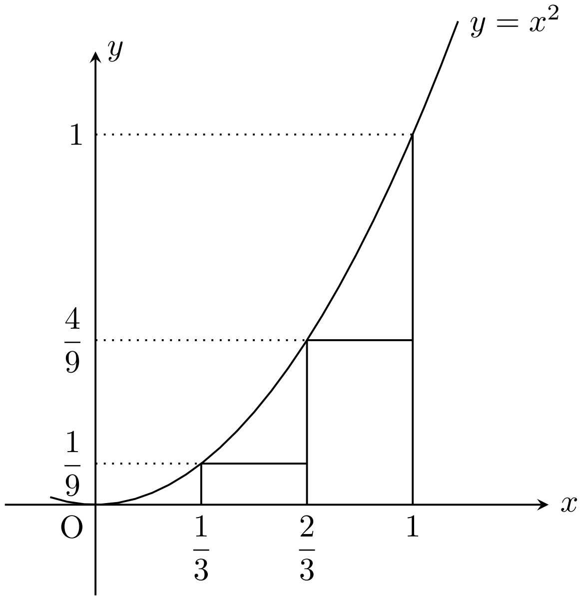
[*32] この長方形の面積まで議論をしようと思えば，対象の大きさを測ることを厳密に議論する「測度論」という分野の知識が必要になる．



このとき，3 つの長方形の面積の合計を S_3^+ すると

$$
\begin{aligned}
S_3^+ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{9} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9}\right) \\
&= \frac{14}{27}
\end{aligned}
$$

次に，長方形が図形に覆われるような長方形を作る．



こちら[*33]についても，長方形の面積の合計を S_3^- とすると

$$\begin{aligned} S_3^- &= \frac{1}{3}\times\frac{0}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{0}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right) \\ &= \frac{5}{27} \end{aligned}$$

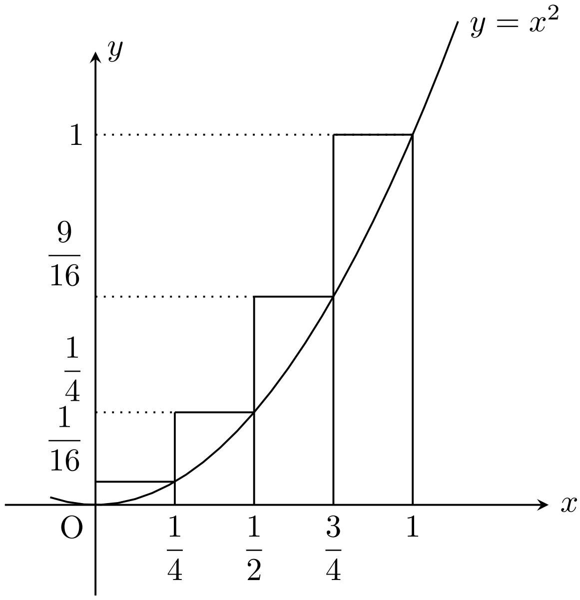
となる．これらの長方形によって得られた面積たちは，今求めたい面積 S と次のような関係が成り立つことがわかる (求める面積の値が積分によって $S=\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{27}$ とわかっているのでなんとなく想像はつく．本当はこの値は知らないという前提だが．)．

$$S_3^- < S < S_3^+$$

このように求めたい図形の面積を，長方形の面積を用いて上からと下からで評価することによって挟み込む．もちろんこれは 3 つの長方形なのでかなり誤差がある．それでは，長方形の数を増やせばどうなるだろうか？

次は長方形を 4 つで考える．つまり，次の図のような長方形たちによって求める図形の面積を評価する．

(ここに図を挿入)



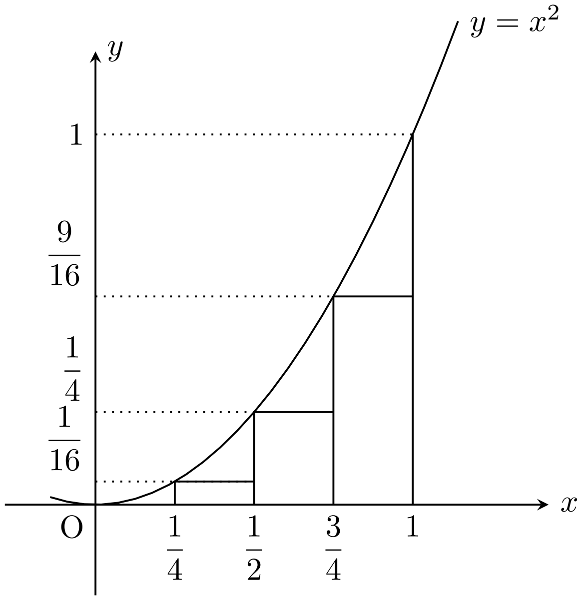
[*33] 一番左の長方形は高さが 0 の長方形と思っている．

このとき，4 つの長方形の面積の合計を S_4^+ すると

$$\begin{aligned} S_4^+ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{9}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{16}{16} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}+\frac{16}{16}\right) \\ &= \frac{30}{64} \end{aligned}$$

となる．次に，長方形が図形に覆われるような長方形を作る．

(ここに図を挿入)



こちらについても，長方形の面積の合計を S_4^- とすると

$$\begin{aligned} S_4^- &= \frac{1}{4}\times\frac{0}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{9}{16} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{0}{16}+\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}\right) \\ &= \frac{14}{64} \end{aligned}$$

となる．もちろん，求めたい面積 S と S_4^+，S_4^- にも次のような関係がある．

$$S_4^- < S < S_4^+$$

しかも，3 つの長方形で S を近似したときよりも真の値 (S) に近くなっていることがわかる．つまり，

$$S_3^- < S_4^- < S < S_4^+ < S_3^+$$

が成り立っている．

このように，分割する長方形の数 n を大きくすればするほど，それらの長方形の面積の総和 S_n^-，S_n^+ はより S に近い値になることが想像できる．不等式にすると，

$$S_1^- < S_2^- < S_3^- < \cdots < S_n^- < \cdots < S < \cdots < S_n^+ < \cdots < S_3^+ < S_2^+ < S_1^+$$

となり $n \to \infty$ とすることで，真の面積 S が求められることが期待される．

さて，S_n^- と S_n^- が具体的に n の式で求めることができれば，$n \to \infty$ の極限をとることで真の面積 S を (定積分を使わずに) 求めることができると考えられる．

まずは，S_n^+ を求める．n 個の長方形の k 番目の面積を求める．長方形の底辺の長さは $\dfrac{1}{n}$ であり，高さは $f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ である．よって，k 番目の長方形の面積は

$$\frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

となる．これらは n 個あり，それらの和を考えることで

$$\begin{aligned} S_n^+ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．同様に，S_n^- についても考えることで (S_n^+ のときの長方形を右に 1 つ分ずらせばいい),

$$\begin{aligned} S_n^- &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．[*34] よって，

$$\lim_{n \to \infty} S_n^- = \frac{1}{3} = \lim_{n \to \infty} S_n^+$$

なので，はさみうちの原理[*35] より，求める真の面積は

$$S = \frac{1}{3}$$

とわかった．[*36]

[*34] 特に断りは入れていないが k^2 の和の公式を用いている．

[*35] $b_n < a_n < c_n$ という関係の数列たちがあるとき，不等式の両端の極限値が等しいならばその間の a_n の極限値もそれに等しくなるという定理．

[*36] 正確にはカントールの公理を用いて $S = \dfrac{1}{3}$ を求めている．

このように，与えられた図形の面積を長方形の面積の総和として近似し，その n 等分した n を無限大にする (長方形の幅を限りなく 0 に近づける) ことで求めたい面積を求める方法を

区分求積法

という．これはこのあと学ぶ定積分の定義の特殊な場合であり，この考え方が欠かせない．また，極限値を求める計算においても区分求積法が役に立つことがある．次のような極限値を求めたい場合は積分に書き直すことでその極限値を求めることができる．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

和の記号を用いて表すと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

となり，これは区分求積法によって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

が成り立つので，右辺の定積分を置換積分により計算すれば，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{4}$$

がわかる．[*37]

一般的に，次のような和の極限値は定積分を使って求めることが可能である．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

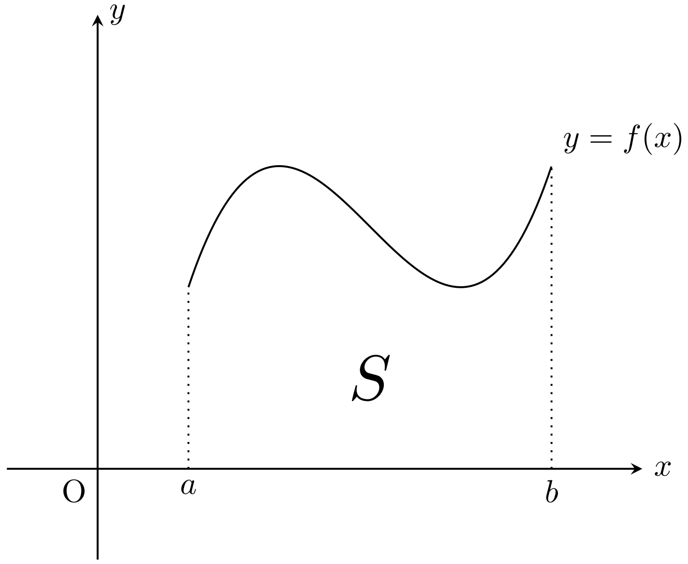
4.3 積分の定義

ここからは，積分というものを微分という言葉を使わずに定義する．だが，区分求積法を理解した読者であればあまり難しく感じるものではなく，身構える必要もない．

イメージしやすいように，関数 $f(x)$ は閉区間 $I=[a,b]$ において連続かつ正の値をとるものとする．この関数と $x=a,\ x=b$ で囲まれた面積 S を定義することをこれから行う．つまり，次の図形の面積 S を定義する．

---

*37 つまり，半径 1 の円の面積の $\frac{1}{4}$ を求めていることになる．



もちろん，この図形の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

で求められることが結論なのだが，この右辺が何者なのか，微分の逆という言葉を使わずにどのように構成されるのかをこれから考えるということに注意してもらいたい．くどいようだが，微分の逆という定義をせずに曲線で囲まれた図形の面積を求め，それを定積分と定義することを行う．

大学数学で定義される積分とは，上記の区分求積法により作られた長方形の幅を一般化しただけものと捉えると良い．つまり，区間 $[a, b]$ を n 等分して，全ての長方形の底辺の幅を同じにするのではなく，分割の仕方をさまざまなものにする．具体的には，与えられた区間 $[a, b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のようにして一般的に分割する．もちろん，$a = 0$, $b = 1$ とし，$x_k = \dfrac{k}{n}$ とすれば区分求積法のときと同じく区間を n 等分していることになる．

このように一般的に分割すると，次のような小区間 I_k たちが定義できる．[*38]

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

この小区間の幅を底辺にもつ長方形たちにより，図形の面積を求めるが，肝心の高さがまだわかっていない．この小区間内で関数 $f(x)$ がどのような値をとるのか明確にはされていないので，とりあえず代表で

$$c_k \in I_k$$

という要素をとることにする．このとき，小区間 I_k の幅を底辺に，高さを $f(c_k)$ にもつ長方形の面積は

$$f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

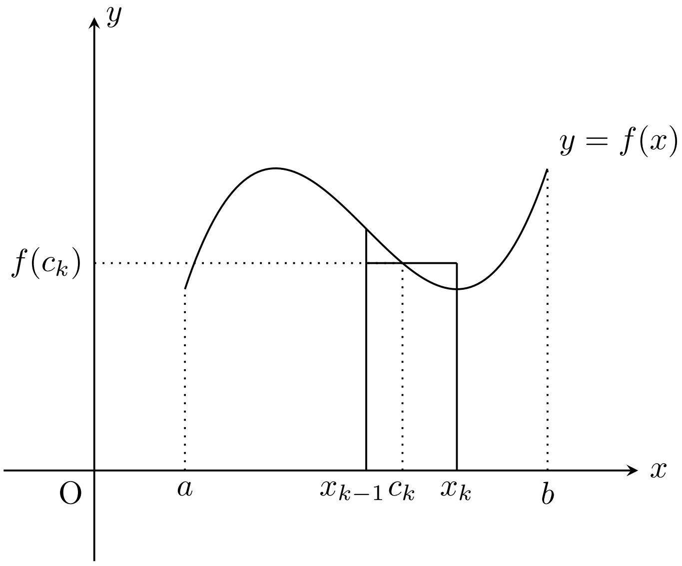
[*38] 本当は半開区間で定義するのがお行儀が良い．今回は見た目的な理解を優先して閉区間で定義している．

である．これを $k = 1, 2, \ldots, n$ と和をとれば，求める図形の面積の近似が得られる．

つまり，次の式が求める面積 S の近似を与えていると思える．

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})^{*39}$$

和をとる $f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ については以下の長方形の面積と思うとイメージしやすい．



このような長方形 n 個の底辺の幅を限りなく細かくしていくことによって，求める S がわかると期待される．分割の幅の最大値を $|\Delta|$ としよう．このとき，$|\Delta| \to +0$ とするとき，

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

が収束するのであればそれは求めたい面積 S を表すことがわかる．数式で書き直すと

$$S = \lim_{|\Delta| \to +0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{4.1}$$

となるということだ．しかし，1 つ気がかりなことがある．それは自由に c_k を選んできているという点である．もしかすると，この c_k の選び方によっては (4.1) の右辺が収束しないかもしれないということだ．

よって，面積 S の定義を次のようにするのが望ましい．

定義 4.6. 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ とする．$I = [a, b]$ とし，I の分割 Δ を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とする．このとき，小区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ の代表元

$$c_k \in I_k$$

*39 これは Riemann 和と呼ばれる．

のとり方によらず，分割の幅の最大値 $|\Delta|$ を 0 に近づける極限 (つまり，$n \to \infty$)

$$\lim_{|\Delta| \to +0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{4.2}$$

が収束するとき，その極限値を $x = a,\ x = b$ と $f(x)$ で囲まれた図形の面積と定義し，

$$\int_a^b f(x)dx$$

と表記する．[*40]

さらに，このとき $f(x)$ は区間 I で可積分という．

例で計算した，$f(x) = x^2$ は区間 $[0, 1]$ 上可積分である．しかし，次の関数は区間 $[0, 1]$ で可積分ではない．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

詳しい証明はしないが，どんな有理数の間にも無理数が存在することによって，どれだけ分割の幅を小さくしても代表元のとり方によって (4.2) の収束先が変わってしまうからである (0 か 1 になる．). [*41]

上記のように定積分を定義することで，様々な関数に対してその関数で囲まれた図形の面積を求めることができる．もちろん可積分でないような病的な関数も存在するが，ある程度不連続な関数であってもその図形の面積を求めることが可能になる．

4.4 不定積分

高校数学では先に不定積分を定義したが，大学数学では先に定積分を定義した．では，高校生のときに学んだ

$$\int f(x)dx$$

とはいったい何を意味するのだろうかという疑問が湧く．もちろん高校生からすると，これは「微分すると $f(x)$ になる関数」と答えるだろうが，まだ我々はこの記号の意味を定義していない．

そこで，定積分の意味を考える．すると「定まった積分」と読み解くことができる．何が定まっているのかというとそれは面積が定まっているのである．つまり，関数 $f(x)$ を固定して，区間 $[a, b]$ を与えてやるとその関数たちで囲まれた面積が定まる．よって，不定積分とは

「定まっていない積分」

[*40] くどいようだが，この記号には「微分の逆」という意味はまだ含まれていない．

[*41] Lebesgue 積分というものを導入すると実は”可積分”である．こちらも測度論を参照されたい．

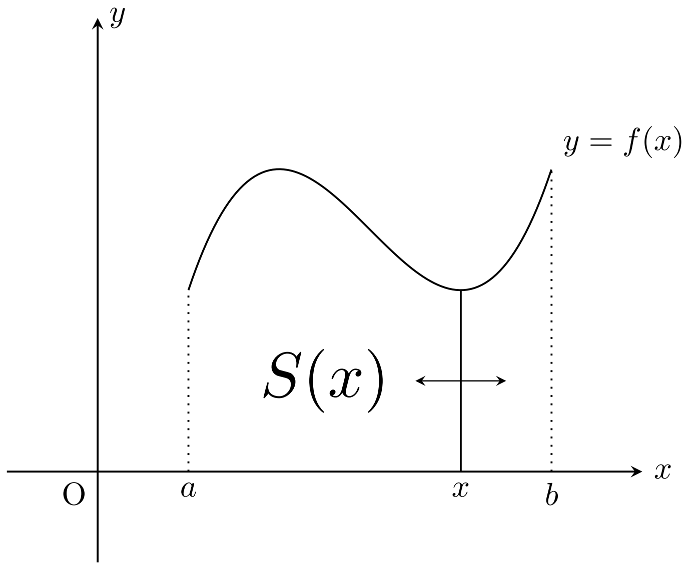
と理解することができる．関数を固定してしまっているので，面積を決めているものは区間 $[a,b]$ である．つまり，区間が「定まっている」から面積が定まるのである．この区間の幅を自由に動かすとそれに伴って面積も自由に動く．すなわち区間に x という変数を持たせるとそれに伴い面積も x を変数にもつ関数へと変貌する．これが不定積分の正体である．

定義 4.7. $x \in [a,b]$ として，

$$\int_a^x f(t)dt^{*42}$$

を関数 $f(x)$ の不定積分という．

不定積分は，以下の図のように x が動くことによってそこで囲まれた図形の面積 $S(x)$ も動き，関数となる．



この $S(x)$ のことを高校数学においては，$\displaystyle\int f(x)dx$ と略記して書いているだけである．しかし，この高校生で学ぶ記号は時に危うい事態を招くこともある．部分積分は既知 (現在は高校生に戻ったと思って) として次の積分計算を見てほしい．

$$\begin{aligned} I = \int \frac{1}{x\log x}dx &= \frac{\log x}{\log x} + \int \frac{1}{x\log x}dx \\ &= 1 + \int \frac{1}{x\log x}dx = 1 + I \end{aligned}$$

より，

$$0 = 1$$

が導かれる．もちろんこのような等式が成り立っては世界が崩壊してしまうので，どこかでミスが起きている．まずはこの資料を読むのをやめて，読者自身で少し考えてもらいたい．

---

*42 積分区間と積分変数がともに x なのは見づらいので，積分変数を t とした．本質的に変わりはない．

この計算は最後の $0=1$ とするところでミスをしている．[*43]積分の計算は区間の端点を代入して差分をとるので本当の計算は

$$
\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{x\log x}dx &= \left[\frac{\log x}{\log x}\right]_a^x + \int_a^x \frac{1}{x\log x}dx \\
&= [1]_a^x + \int_a^x \frac{1}{x\log x}dx \\
&= 1 - 1 + \int_a^x \frac{1}{x\log x}dx \\
&= \int_a^x \frac{1}{x\log x}dx
\end{aligned}
$$

となり，正しく (何の計算もされていないが) 計算できていることがわかる．

さて，高校数学においては，原始関数と不定積分は同じものとして扱っていたが，区分求積法による積分の定義による不定積分は厳密には原始関数ではない．例えば次のような関数を見てみよう．

$$
f(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0), \\ 1 & (t = 0). \end{cases}
$$

この関数は，$t=0$ のみ 1 をとり，その他では 0 をとる不連続な関数である．この関数は区間 $[-1,1]$ で不定積分は存在する (値は任意の $x \in [-1,1]$ において $S(x)=0$ となる) が，微分して $f(t)$ となるような関数 $F(t)$，つまり原始関数は存在しない．1 点のみで傾きが 1 になるような関数は存在しないためである．

このように，特に不連続な関数を扱おうとすると不定積分と原始関数は異なるものであると理解できる．しかし，高校数学が間違っているというわけではなく，ある条件を満たせば不定積分と原始関数は一致する．

この条件さえ満たせば, 積分と微分が互いに逆演算となっていることを示すことができ,

微分積分学の基本定理

と呼ばれる．

4.4.1 定積分の公式

微分積分学の基本定理の証明に入る前に，定積分の基本的な公式を改めた紹介することにする．そんなものは知っている，と読者なら思うだろうが，なぜこの公式が成り立つのかを定義を思い出しながら公式を眺めてもらいたい．

定理 4.8. $f(x)$, $g(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で可積分とする．このとき，$c \in [a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して次の公式が成り立つ：

[*43] 定数 (積分定数) のズレを無視して計算を進めているのでこのようなミスが起こる．つまり，最左辺の I と最右辺の I は定数のズレまで考慮すると厳密には同じものではない．

(1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

この公式は，積分には線形性があり，区間を適当な場所で分割することができるということであるが，これは全て

極限

の性質を受け継いでいるだけである．積分の定義は極限を用いられているため，このような線形性などがそのまま定積分に現れることは当然なのである．例えば (1) に関しては次のように証明ができる．

Proof. (概略) 和のときを証明する．差のときも同様である．$f(x)$，$g(x)$ は与えられた区間上で可積分なので，ある分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

において，幅の最大値を 0 にするときの極限値

$$\lim_{|\Delta|\to+0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$
$$\lim_{|\Delta|\to+0} \sum_{k=1}^{n} g(d_k)(x_k - x_{k-1})$$

が存在する ($c_k \in [x_{k-1}, x_k]$，$d_k \in [x_{k-1}, x_k]$)．このとき，この分割に対して，

$$\lim_{|\Delta|\to+0} \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(e_k) + \beta g(e_k))\,(x_k - x_{k-1})$$

は極限の線形性より収束する ($e_k \in [x_{k-1}, x_k]$)．よって，関数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で可積分であり，

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx &= \lim_{|\Delta|\to+0} \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(e_k) + \beta g(e_k))\,(x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha \lim_{|\Delta|\to+0} \sum_{k=1}^{n} f(e_k)(x_k - x_{k-1}) + \beta \lim_{|\Delta|\to+0} \sum_{k=1}^{n} g(e_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

が成り立つ．なお，2 行目においては $f(e_k)$，$g(e_k)$ になっても定理の仮定からその極限の収束が保証されていることに注意する． □

4.5 微分積分学の基本定理

さて，微分と積分が互いに逆演算であることを示そう．示したいことは，関数 $f(x)$ の不定積分

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

に対して，

$$S'(x) = f(x)$$

が成り立つことである．もちろん現時点では積分は微分となんの関係もない．しかし，上記の不連続関数の例を見たように不定積分が定義できるからといってそれが原始関数になることはない．では，どのようなときに不定積分と原始関数が一致するかというと，それは関数が「連続」であるときである．[*44]

定理 4.9 (微分積分学の基本定理)**.** 関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で連続とする．このとき，$f(x)$ の不定積分

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

は微分可能であり，その導関数は $f(x)$ に等しい (つまり，$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数).

ここで注意すべきポイントは，不定積分という何者かもわからない新しい関数 $S(x)$ に対してそれが微分できるのかも不明で，そこから証明する必要があるということだ.

この定理は単純に，微分と積分が逆演算になっていると解釈もできるが，幾何的には連続関数と縦線 2 本で囲まれた図形の面積はその縦線を動かすとき面積が滑らかに動くと解釈できる．つまり，縦線を連続的に動かすときに面積の値が急に飛ぶことがないことを示している.

さて，定理の証明に入る．証明したいことは微分可能かどうかなので，微分の定義に基づき証明する.

Proof. $x \in [a,b]$ とする．また，十分小さい $h > 0$ をとる．このとき，区間 $[x, x+h]$ 上で $f(t)$ は連続なので，最大・最小値の存在定理より，定数 m_h，M_h が存在して[*45]，

$$m_h \leq f(t) \leq M_h$$

が成り立つ．$x \leq t \leq x+h$ で積分することにより，

$$hm_h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq hM_h$$

[*44] 関数 $f(x)$ が与えられた区間で連続であれば，可積分という定理が存在する.

[*45] 特に明記する必要はないが，この最小値と最大値はとってくる h によって変化するので h を添え字とした.

となる．一方，定理 4.8 の (2) より，

$$\begin{aligned} S(x+h) - S(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$m_h \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq M_h$$

となり，$m_h \to f(x)$, $M_h \to f(x)$ $(h \to +0)$ に注意すると，はさみうちの原理より

$$\lim_{h \to +0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

が成り立つ．また，これは $h < 0$ としても同様に

$$\lim_{h \to -0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

が示される．よって，関数 $S(x)$ は微分可能であり，

$$S'(x) = f(x)$$

となる． □

これでやっと，積分と微分がつながったことになる．長い道のりだったが，このような抽象的な議論は重要である．筆者も最初は，結局微分の逆が積分ならもうそれで定義してしまえばいいのではないかと思ったが，積分というものを単体で見たときに，様々な関数に適応できる方が便利なことが往々にしてあると知ったときはやはり抽象化というものは大事だと感じた．

4.6 広義積分

これから広義積分について述べる．上記の積分とは，関数が有界 (無限大にならない) であったり，区間がきちんと区切られていたが，そのような場合ではないときにも積分を定義したい場面がある．そのような，上記の積分の定義を広く捉えた積分を

広義積分

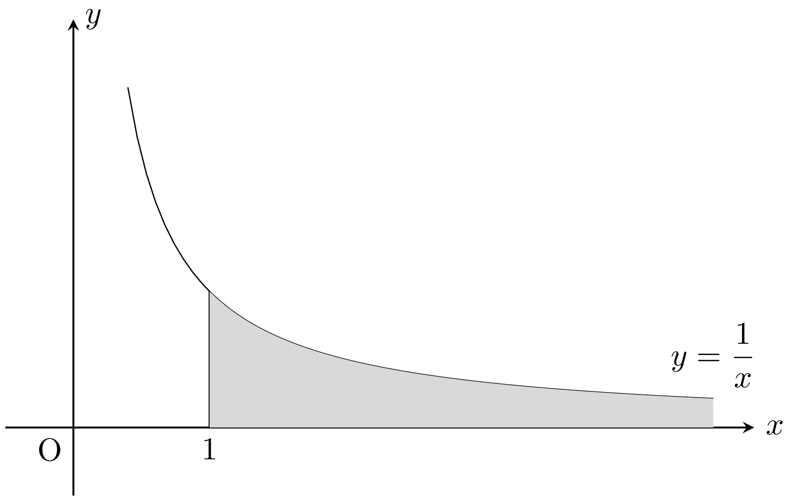
という．

まず，区間が区切られていない場合，つまり，$[1, \infty)$ のような右側にずっと続く区間における積分を見てみよう．今回は簡単な関数 $\dfrac{1}{x}$ を例にとり，計算を進める．

今から計算したいものは，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

である．積分とは関数などに囲まれた図形の面積を表すので，以下のような図形の面積を求めることになる．



では，この面積を積分を用いてどのように計算するべきかと悩むところがある．いきなり無限区間の積分を考えることは難しいので，まずは有限の区間で積分を考え，そのあとに積分した結果を無限大にするような操作をする．

つまり，一度適当に n をとって $[1, n]$ 上の積分を考えて計算してから，計算し切った後に n を無限大に飛ばすことを考える．もちろん，区間が有界になったので積分を定義することが可能である．

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{1}{x}dx &= [\log x]_1^n \\ &= \log n\end{aligned}$$

なので，$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x}dx = \infty$$

となって発散していることがわかる．[*46]

つまり，上記の図における斜線部の面積は無限に大きくなるということだ．では，面積が収束する例も見てみよう．

次の関数は $y = \dfrac{1}{x^2}$ とし，同様の積分区間で考える．求める積分は

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

である．こちらも同様に，いったんは $[1, n]$ で考え，その後 $n \to \infty$ とすることを考える．

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{1}{x^2}dx &= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \\ &= 1 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

[*46] 正確には，積分の値を ∞ と「解釈」するという表現が適切である．定積分の定義を自然に拡張するとすればこのようなことが起きるというニュアンスである．

なので，$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^2}dx = 1$$

となって収束していることがわかる．[*47]

このように，積分する区間が有界ではなく無限大に広がるようなときでも，いったんは n で止めておいて，積分計算を行ってから極限をとるような積分を広義積分という．

その他にも，関数が定義されていない点を含む区間での積分を考えるときでも広義積分と呼ぶ．例えば,

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

という関数は $x = 1$ では定義されていないが次のような積分を考えたいときもある．

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

この積分の問題となるところは，積分区間の下端に被積分関数が定義できない点を含んでしまっていることである．

このようなときは，定義されていないところを手前で避けるようにして積分区間を定義し，その後極限をとる操作を行う．つまり，n を適当にとって次のような積分を考える．

$$\int_{1+\frac{1}{n}}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$ [*48]

この場合は，積分区間が $\left[1+\frac{1}{n}, 2\right]$ となり，問題なく積分が可能になる．実際に計算してみると

$$\begin{aligned}\int_{1+\frac{1}{n}}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx &= \left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\frac{1}{n}}^2 \\ &= 2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

なので，$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1+\frac{1}{n}}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2$$

となって収束していることがわかる．

また，区間が無限に広がる方向や，関数が定義できない点が積分区間の端点に来るとも限らない．そのような広義積分は適当な場所で積分を複数個に分ける必要がある．2 つ例をみよう．

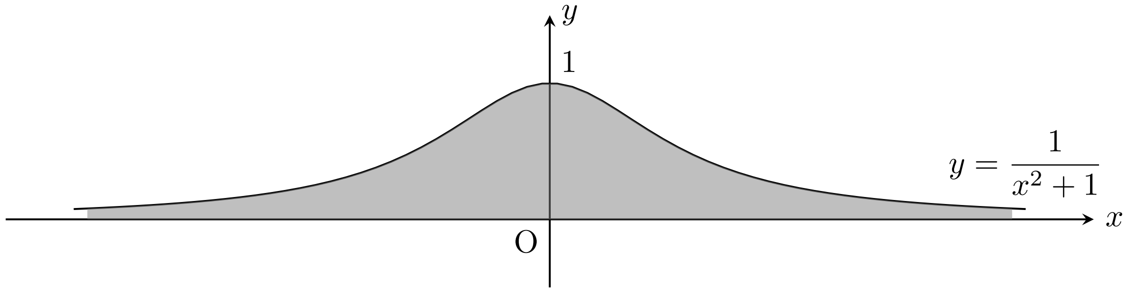
[*47] こちらも同様に，積分の値を 1 と「解釈」している．今までの積分の定義ならば計算することは不可能だが，意味のある値を自然に与えるならば 1 だろうという考えである．

[*48] $1 - \dfrac{1}{n}$ では 1 を左側に飛び越えてしまうので NG である．手前 (内側) で止めるという意識が重要である．

まずは両方向に無限に区間が広がる場合である．両方向に無限に広がるとはつまり，$(-\infty,\infty)$ が積分区間になっているということである．次の積分の計算をしよう．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$$

幾何的には，次の図形の面積を求めていることになる．



関数の両端がどんどん 0 に近づいているのでその辺りの面積もほぼ 0 になり，収束することが予測される．しかし，極限を同時に複数個扱うのは非常にセンシティブなことである．どのように極限をとるのかによってその収束先が変わってしまうことがあるからだ．例えば,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}=0,$$
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{m}=\infty$$

のように極限をとる順番によって発散か収束かが変わってしまう例がある．今回扱う問題はこれとは少し異なる問題も含まれているが，同時に複数個の極限を扱う難しさが少しは体感してもらえたと思う．

ではこのような積分の場合どうするかというと，分割してそれぞれの積分を考えるということをする．つまり，困難を分割してしまうのだ．

例えば，$x=0$ で積分を,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$$

と分ける．[*49] このように分けることで，上記で紹介した積分区間の片方が無限大になる場合に議論を帰着させられる．

2 つ目の積分の計算をしよう．まず，n をとって $[0,n]$ で積分を考える．$\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始

[*49] 実は $x=0$ でなくとも良い．適当に $x=a$ で分けて積分がともに収束するのであれば都合の良い値で分けて良い．

関数は $\arctan x$[*50]なので

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{dx}{x^2+1} &= [\arctan x]_0^n \\ &= \arctan n - \arctan 0 \\ &= \arctan n\end{aligned}$$

となる．$n \to \infty$ とすると，$\tan \dfrac{\pi}{2} = \infty$ であることに注意して，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．また，同様に

$$\lim_{n\to-\infty} \int_n^0 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つので，求める広義積分の値は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

となる．

2 つ目の例として，次のような積分区間の端点に関数が発散する点がない場合，つまり積分区間内に関数が発散する点が含まれているような広義積分を見る．

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

被積分関数の分母が 0 になるときは $x = 1$ のときなので，0 から 2 の積分区間に含まれてしまっている．このようなときも先ほどと同様に，積分を分けるということをする．つまり，次のように積分を分割する．

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} + \lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

それぞれ計算すると，

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\frac{1}{n}} \\ &= 2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}}\right) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 2\end{aligned}$$

[*50] $\arctan x$ は $\tan x$ の逆関数である．例えば，$\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$，$\arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ など．

$$
\begin{aligned}
\int_{1+\frac{1}{n}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} &= \left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\frac{1}{n}}^{2} \\
&= 2\left(1-\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 2
\end{aligned}
$$

となるので，求める広義積分の値は

$$
\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = 4
$$

となる．

様々な広義積分の具体例を見てきたが，それではこのような積分はいつ収束していつ発散するのだろうか？その一部を述べているのが次の定理である．

定理 4.10. 関数 $f(x)$ は $[a,\infty)$ 上で連続とし，$a \le c$ となる c と定数 $M>0,\ q>1$ が存在して，$[c,\infty)$ の各点で

$$
x^q|f(x)| < M
$$

が成り立つならば[*51]，広義積分

$$
\int_a^\infty f(x)dx
$$

は収束する．

この定理は $a>0$ のとき

$$
\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty & (0<\alpha\le 1), \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & (1<\alpha) \end{cases}
$$

について，$0<\alpha\le 1$ では発散し，$1<\alpha$ では収束するという単純なことを利用し，関数 $f(x)$ の発散速度を見積もり広義積分の収束性を確かめている定理である．

Proof. $a\le c$ となる c と定数 $M>0,\ q>1$ が存在して，各点 $x\in[c,\infty)$ で

$$
x^q|f(x)| < M
$$

[*51] ランダウの記法で書くと，$f(x)=O\left(\dfrac{1}{x^q}\right)$ である．つまり，十分大きな x において定数 $M>0$ を用いて $|f(x)|$ が上から $\dfrac{M}{x^q}$ で抑えられることを述べている．

が成り立っているとする．このとき，$n \geq c$ を満たす任意の n に対して，

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^n f(x)dx \right| &= \left| \int_a^c f(x)dx + \int_c^n f(x)dx \right| \\
&\leq \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^n |f(x)|dx \\
&\leq \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^n \frac{M}{x^q}dx \\
&= \int_a^c |f(x)|dx + \frac{M}{q-1}\left[-\frac{1}{x^{q-1}} \right]_c^n \\
&= \int_a^c |f(x)|dx + \frac{M}{q-1}\left(\frac{1}{c^{q-1}} - \frac{1}{n^{q-1}} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．この両辺を $n \to \infty$ とすると，$q > 1$ より，

$$\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^c |f(x)|dx + \frac{M}{(q-1)c^{q-1}}$$

となり，これは広義積分が (絶対) 収束することを示している． □

広義積分には様々な応用がある．物理学・化学などのいわゆる理科系の分野における Fourier 解析，Laplace 解析には必須の積分手法である．また，数学分野においても $n!$ を実数にまで拡張した関数である Gamma 関数や Beta 関数などの特殊関数と呼ばれるものは広義積分を用いて定義される関数であり，複素関数論や解析的整数論において幅広い応用がある．詳しくは最終章で少し述べる．

5 級数

本節から級数について述べる．級数の簡単な概要と，関数列における各点収束と一様収束についても述べる．

5.1 級数とは

(無限) 級数とは，無限に数を足し続けることを指す．例えば，次のようなものは級数である．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

つまり，数列 $\{a_n\}$ が与えられたときに，そのすべての項を足し上げたもの

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

を級数という．

もちろん，読者が知っている通り級数は値が無限大に大きくなるものや振動するもの，収束するものが存在する．級数が収束するとき，その収束値を級数の和と定義する．

上記に現れた Taylor 展開は級数の一種である．Taylor 展開のような級数は，足し上げる数列が関数になっている．このような場合は関数項級数と呼ぶ．つまり，関数の列 $\{f_n(x)\}$ が与えられたとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

を関数項級数と呼ぶ．Taylor 展開は

$$f_n(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

としたときの関数項級数であり，その級数は収束して和が $f(x)$ に等しい．例えば，$f_n(x) = x^n$ とすると $|x| < 1$ のとき収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

となる．関数項級数では x の範囲によって収束・発散が変わるため注意が必要である．

(関数項) 級数の計算の基本は部分和の極限値をとることである．部分和とは，無限に項を足さず，あるところで止めて和を考えるものである．つまり，自然数 N に対して，部分和 S_N を

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

と定義し，S_N が計算できたら $N \to \infty$ を考える．これは，a_n から作られた新しい数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \ldots, S_N,\ \ldots$$

に対してその極限値

$$\lim_{N\to\infty} S_N$$

を考えることと同じである．

ε-N 論法を用いて記述すれば，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n > N,\ |S_n - S| < \varepsilon$$

のとき，級数が収束してその和が S ということである．

例として，$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

を考えよう．部分和 S_N を計算すると，

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

となるので，$N \to \infty$ とすると，

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

となり，級数は収束してその和は 1 である．

5.2　収束・発散の判定

では，どのような級数が収束して発散するのかの判定方法はあるのだろうか？結論はどんな級数に対してもその収束・発散がわかるような定理は現時点では見つかっていない．一部の条件を満たす級数であれば収束したり発散したりすることが言える．ここではその一部を紹介する．

5.2.1　比較判定法

基本的には，収束・発散がわかっている級数と比較することによって判定することが多い．例えば，次の 2 つの級数はそれぞれ発散・収束することが知られている．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

どちらも区分求積法による比較でその収束・発散を調べることが可能である．1 つ目については,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\ &> \int_1^{N-1} \frac{dx}{x} + \frac{1}{N} \\ &= \log(N-1) + \frac{1}{N} \\ &\to \infty \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

となるので発散する．2 つ目については Basel 問題と呼ばれ，数学界隈では有名な問題である．自然数の平方数の逆数和は収束することが知られており，具体的な値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

となる.[*52]

このような，あらかじめ収束・発散がわかっている級数と比較することによって，その級数の収束・発散が判断できる．先ほどの級数についても，一般的に $a > 0$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+a)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

なので，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+a)}$$

は収束することがわかる.[*53]

5.3 関数列の極限

ここからは関数列の極限について述べる．関数列とは，その名の通り「関数の列」のことである．例えば,

$$x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{3},\ \frac{x}{4}, \cdots$$

は関数列の例である．つまりこの関数列は，自然数 n に対して

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

[*52] 筆者もこの等式を初めて見たときは驚いたと同時に感動した．周りの人がこの等式が美しい？と言っているのを聞いて自分もその感覚が欲しいだけのかもしれないが，数学者を辞めてもこのような等式に感動できる少年のような心 (？) は持ち続けたいと思う．

[*53] ここでは具体的な収束値までは述べないが，digamma 関数と Euler 定数を用いて記述できる．

で定義される関数列である．その他にも，

$$x,\ x^2,\ x^3,\ x^4, \ldots$$

も

$$f_n(x) = x^n$$

で定義される関数列ある．

関数列は数列と同じように

$$\{f_n(x)\}$$

で表記される．

5.3.1 関数列の極限

関数列も数列と同じように $n \to \infty$ の極限を考えることができる．例えば，

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

のとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

となることは容易に想像がつく．では，

$$g_n(x) = x^n$$

のとき，$n \to \infty$ の極限はどうなるだろうか．それは x の値によってその極限値は異なる．つまり，$g_n(x)$ の極限値は次のようになる．

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1), \\ 1 & (x = 1), \\ \infty & (x > 1), \\ \text{振動} & (x \geq -1) \end{cases}$$

上記のように，関数列の極限値は変数 x にも気を遣う必要があるため，一般にはすべての x で収束値があるとは限らない．もちろん，$f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ のようにすべての実数 x において収束する関数列も存在する．

基本的にはすべての実数 x で収束しないので，与えられた区間に限定して関数列の収束を考えることが多い．例えば，$I = [0, 1]$ に限定すると，関数列 $g_n(x)$ は区間 I のすべての点で収束する．このような，与えられた区間 I 上の全ての点で関数列が収束するとき，その関数列は与えられた区間で各点収束するという．

定義 5.1. 閉区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して，$x \in I$ を固定したとき，その各 x で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つとき，関数列 $f_n(x)$ は区間 I 上で各点収束するという．

ε-N 論法で記述すると次のようになる．

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

イメージとしては，まず与えられた区間内の点を 1 つをとり，それを関数列に代入した数列の極限値を考える．つまり，$x = a \in I$ をとり，それを関数列に代入した数列，

$$f_1(a),\ f_2(a),\ f_3(a),\ \ldots, f_n(a),\ \ldots$$

を考えるということである．

例えば，$x = 2$ として数列 $f_n(2) = \dfrac{2}{n}$ を考えると，$n \to \infty$ で 0 になる．$x = 3$ でも $x = 100000$ としてもそれを $f_n(x)$ に代入した数列は全て 0 に収束する．

他の例も見てみよう．$x \in I = [0, \infty)$ として

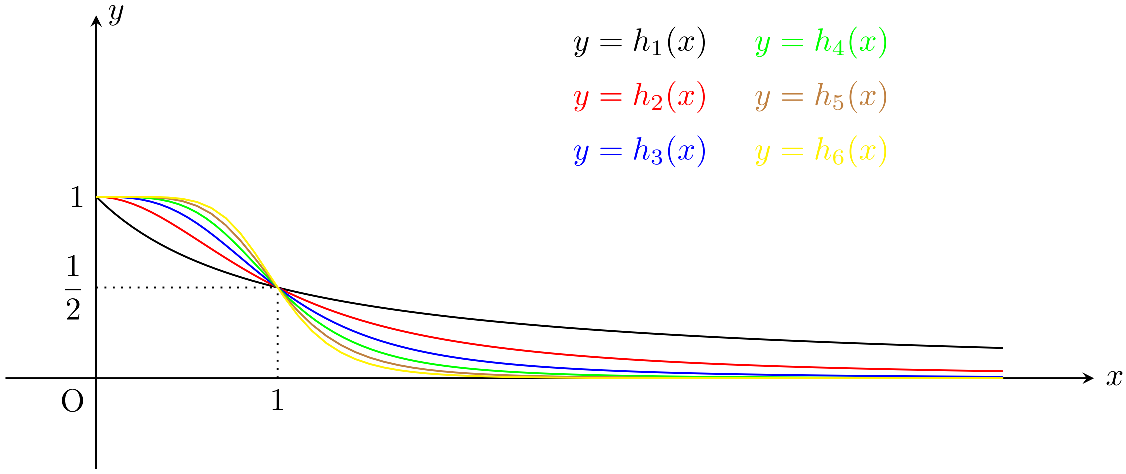
$$h_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}$$

を考える．これはすべての $x \in I$ で各点収束する．実際，

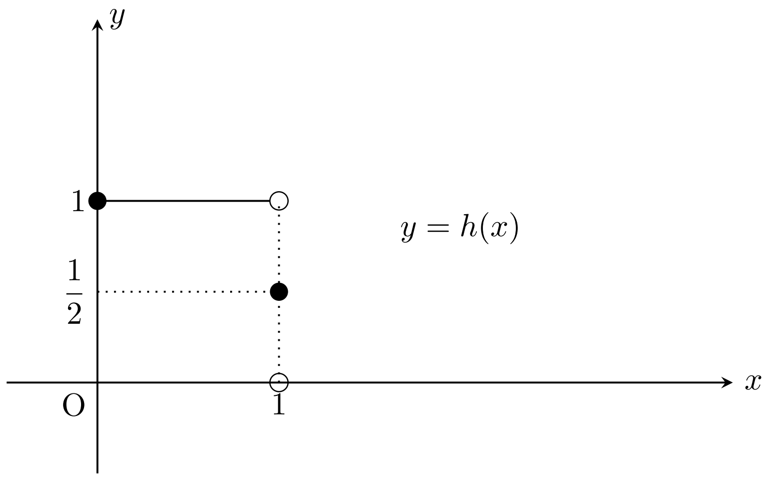
$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1), \\ \dfrac{1}{2} & (x = 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

となる．$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ としてそれぞれ $h_n(x)$ を描くと次のようになる．

(ここに図を挿入)



このように n が大きくなるとグラフも動く．さらに，$n \to \infty$ としたグラフは以下のようになる ($h_\infty(x) = h(x)$ とおいている．)．



$h_n(x)$ は I 上で各点収束するが，その収束先の関数は不連続になってしまう．数学的にはもちろん連続関数の方が扱いやすい対象になる．よって，収束した関数も連続であるような「収束」も考えたい．それが「一様収束」というものであり，これは x に依らずにいっせいに収束するようなものである．

定義 5.2. 閉区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つとき，関数列 $f_n(x)$ は区間 I 上で一様収束するという．

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

各点収束との違いは，「$\forall x \in I$」の位置である．各点収束は各 x に対して数列を考えるので，小さいの尺度である $\varepsilon > 0$ は x に依存しても良いが，一様収束では $\varepsilon > 0$ は x に依存してはいけない．つまり，x を固定せずに数列

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

を考え，それが収束する場合に一様収束するという．

一様収束は別の定義もある．同値なので，どちらを定義としても良い．

定義 5.3. 閉区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つとき，関数列 $f_n(x)$ は区間 I 上で一様収束するという．

この定義の気持ちは，区間 I 上で $f_n(x)$ と $f(x)$ が離れたところの $n \to \infty$ における極限値が 0 になるということである．関数列とその収束先の関数がもっとも離れたところであっても，n を十分に大きくすると 0 になるということである．

具体的な例をみよう．区間 $I=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上で定義された関数列 $g_n(x)=x^n$ は区間 I 上で極限関数 $g(x)=0$ に一様収束する．実際，

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}|g_n(x)-0| &= \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} x^n \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\to 0\ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

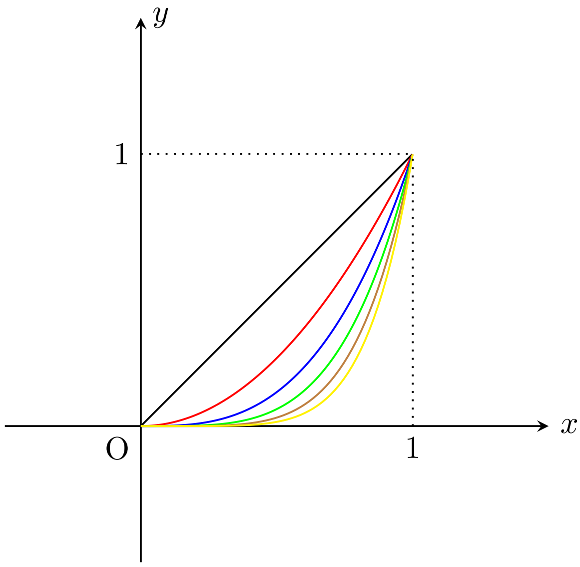
となるためである．以下のグラフのように，$g_n(x)$ と $g(x)=0$ がもっとも離れている点は $x=\dfrac{1}{2}$ であるため，$|g_n(x)-g(x)|$ に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入した値の $n\to\infty$ のときの極限値が 0 になることを示している．最も離れている点が極限関数に収束してくれているのだから，その他の点も同様に極限関数に綺麗に収束するよねというお気持ちである．

しかし，同じ関数列でも異なる区間を与えると突然一様収束しなくなることもある．同様の関数 $g_n(x)$ に対して，区間を $I=[0,1]$ とすると一様収束しない (上記で見たように各点収束はする)．実際，$I=[0,1]$ 上において，

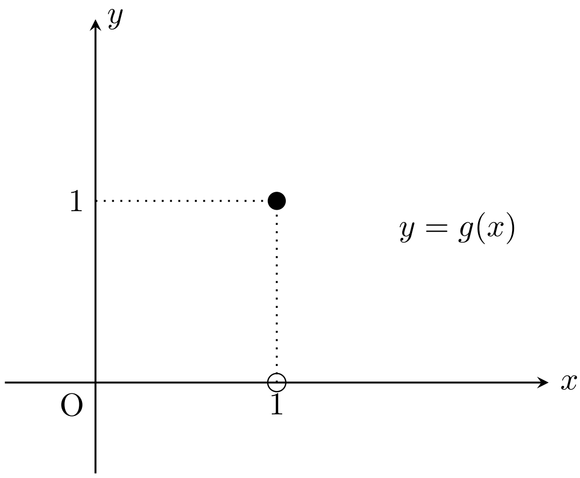
$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,1]}|g_n(x)-0| &= \sup_{x\in[0,1]} x^n \\
&= 1^n \\
&\to 1\ (n\to\infty) \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

となるためである．グラフでもその様子は確認できる．

(ここに図を挿入)



なお，$g_n(x)$ の極限関数 $g(x)$ は次のようになる．



他の例も見よう．任意の $M > 0$ に対して，閉区間 $[0, M]$ 上で関数列

$$e_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

は一様収束する (収束先はもちろん e^{-x} である). [*54]

5.3.2　極限と積分の順序交換

さて，関数列には 2 種類の収束の概念があることがわかった．しかし，一様収束を定義したからといって何がありがたいのかがいまいちわからないだろう．もちろん，収束先が連続関数になることを十分にありがたいが，それ以上に一様収束する関数列は微分・積分と非常に相性が良い．

定理 5.4. 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ が極限関数 $f(x)$ に I 上で一様収束すると仮定する．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

極限関数は

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

を指しているので，つまり次のように極限と積分が入れ替わったと思える．

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

積分は極限を用いて定義されているため，このような 2 つの極限の入れ替えというものは一般的に行ってはいけない．しかし，関数列が一様収束しているのであれば極限の入れ替えが問題なく可能になることを示している定理である．

[*54] もちろん $\mathbb{R}$ 上で収束するが，閉区間ではない集合での一様収束の概念は広義一様収束と呼ばれ，一様収束より広い概念の収束が必要になる．

1 つ例をみる．$I = [0, \frac{1}{2}]$ 上で定義された関数列

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^n} dx$$

を求める．入れ替えるということをしないのであればこれはかなり苦労する積分である．なぜなら，$f_n(x)$ の原始関数を求める必要があるからである．しかし，この関数列は区間 I 上で $f(x) = 1$ に一様収束するので，次のような計算で極限値を求めることができる．

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^n} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

では逆に，極限と積分を入れ替えてはいけない例を見よう．一様収束しない関数列がそれに当たるが，今回は次のような関数を準備する．

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(x > \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

まず，極限関数を考えると，n が大きくなるにつれて区間の幅が 0 になるので

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

となる．しかし，極限をとる前に積分の値を計算すると

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = n$$

となるため，$n \to \infty$ にするとその積分値は ∞ に発散する．つまり，次のように極限と積分を入れ替えたときの値が異なる関数列になっていることがわかる．

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx = 0 \neq \infty = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx$$

6　おまけ

最後に，おまけとして特殊関数を紹介する．特殊関数とは，厳密な定義はないが初等関数ではない関数のことを指す場合が多い．初等関数とは，多項式，分数関数，三角関数，指数関数，対数関数など高校数学で学ぶような関数の和差積商，それらの合成で表されるような関数のことである．そのような初等関数ではない関数たちについては非常に応用が多く，古くから研究される対象となっている．それらをこのおまけで見ることにする．

6.1 Gamma 関数

Gamma 関数とは，階乗の一般化である．自然数 n に対して，

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

を n の階乗と呼んだ．並び替えの順列問題でよく現れ，高校数学においても重要な対象である．この階乗に関してもしかしたら次のような計算をしようと試みた人もいるかもしれない．

$$\left(\frac{1}{2}\right)!$$

そう，階乗の n に自然数ではなく分数という有理数を代入したのだ．もちろん高校数学ではこのような式の計算方法は学んでいない．$\frac{1}{2}$ 個の順列と言われても何がなんだかわからないだろう．

このような自然数ではない数に対してもある意味で階乗を計算することが可能である．そもそも階乗の計算が分数ではできない理由はなんだろうか？それは，階乗の計算方法が「その数から 1 ずつ下がっていって，1 になるまで掛ける」と教わってきたので，分数から順番に引こうにもそれは 1 にはなり得ず計算が不可能になる．では，そのような計算方法から離れ，階乗がもつ性質のみを抽出することで自然数という枠組みを離れ新たな階乗を定義することが可能である．

階乗の性質を抽象化すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(x+1) &= xf(x), \\ f(n) &= (n-1)!\ (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

つまり，実数を引数にとる関数 $f(x)$ が与えられたとき，自然数を代入するとそれはよく知っている階乗に等しく，「その数から 1 ずつ下がって...」という性質を持つものと定義できる．

上記のような性質をすべて満たすように構成された関数が，次の Gamma 関数である．

定義 6.1. 正の実数 x に対して[*55]，次の広義積分は収束し，それを Gamma 関数と定義する．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

収束性については議論しない．ここでは，高校数学の階乗を含んでいることを示す．つまり，任意の自然数 n に対して

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

[*55] 実数でなくても良い．実部が 0 より大きい複素数であっても Gamma 関数は定義可能である．

となることを示す．[*56]

部分積分より，

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

となるので[*57]，$x=n$ を代入すると，

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)$$

となる．さらに，$\Gamma(1)$ は

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$$

なので，

$$\Gamma(n+1) = n!$$

が成り立つ．これで Gamma 関数が高校数学における階乗を含んでいることがわかった．

最後に，$\dfrac{1}{2}$ の階乗の計算を行う．概略のみ触れ，最終的な答えのみ知ってもらうことを目的とする．正の実数 x に対して，$x! = \Gamma(x+1)$ と定義すると，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{-1}e^{-s^2}2sds \\ &= \int_0^\infty e^{-s^2}ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

となる．最後の等式は以下の Gauss 積分を用いた．

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

[*56] 引数とずれが生じているのは筆者もよくわからない．ただ，$\Pi(x) = \Gamma(x+1)$ という関数を定義することもあるらしいが結局は不要である．

[*57] 任意の n に対して $\dfrac{x^n}{e^x} \to 0$ $(x\to\infty)$ となることを使用した．

6.2 Beta 関数

Beta 関数は，Gamma 関数と繋がりの深い特殊関数である．高校数学の積分計算で学ぶいわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式の一般化とも言える関数である．

定義 6.2. $x,\ y > 0$ に対して，次の広義積分は収束し，Beta 関数という．

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

例えば，$x = n+1,\ y = m+1$ とすると，次の式が成り立つ．

$$B(n+1,m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

さらにこの n,m を実数にすると，右辺は Gamma 関数で表せるため次が成り立つ．

定理 6.3. Beta 関数と Gamma 関数について次の関係式が成り立つ．

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

6.3 Zeta 関数

最後に Zeta 関数について述べる．Zeta 関数とは特殊関数の中でもよく研究されている対象であり，素数の分布と関わりが深い．

定義 6.4. 実数 $s > 1$ に対して，次の級数は収束し，Zeta 関数という[*58]．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

これは上記で現れた自然数の逆数和と自然数の 2 乗の逆数和の一般化である．素数と関わりが深い理由は次の等式による．

定理 6.5. Zeta 関数は次の Euler 積表示をもつ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

ただし，右辺は全ての素数にわたる積を表す．

また，Zeta 関数は Gamma 関数とも関わりのある関数である．

---

*58 Riemann がこれを定義し，変数に s を用いたことから現在でも Zeta 関数だけはなぜか変数を s にする慣習がある．

定理 6.6. 次の等式が成り立つ.

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \ (s \neq 1)$$

Zeta 関数を別の表示にすることでさまざまな性質を明らかにすることができる．また，ミレニアム懸賞問題の 1 つである Riemann 予想は，この Zeta 関数がいつ 0 になるかという問題であり，この予想を解くことで素数の規則性の解明に一歩近づくとされている．*59

*59 素数定理という素数の分布を示す定理と関わりが深く，筆者は素数定理を専門で勉強・研究していた．