UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Relatório - EP2

Professor: Henrique Von Dreifus

Tiago Simões Inácio Cavalcanti n° USP: 11804891

Pedro Maia da Silva n° USP: 11805996

São Paulo-SP,

junho de 2022

Introdução

O EP proposto pela disciplina de Métodos Numéricos tem como objetivo utilizar a regra da quadratura gaussiana para resolver problemas de integrais duplas. O método estabelecido por Gauss é uma aproximação da integral de uma função, geralmente estabelecida como um somatório com pesos dos valores assumidos pela função em pontos específicos dentro do domínio de integração. Esse conceito será melhor explorado e explicado no relatório, assim como a exposição das funções utilizadas no programa, e os resultados das tarefas propostas.

Metodologia

O código escrito primeiramente resolve integrais simples no intervalo [a,b] = [-1,1], utilizando os dados fornecidos no enunciado. Assim, para integrais em outros intervalos, faz-se uma mudança de variável para adaptá-la pro intervalo que conhecemos os pesos e pontos a serem calculados. Por fim, realiza-se a integral dupla, que nada mais é que integrar em x e depois integrar em y, ou seja, resolver a integral simples duas vezes. Por fim, rodou-se cada atividade proposta separadamente, mostrando o resultado de cada uma delas.

Regra da Quadratura de Gauss

Uma regra de quadratura gaussiana de *n* pontos é uma regra de quadratura construída para produzir um resultado exato para polinômios de grau $2n - 1$ ou menor para uma escolha adequada dos pontos x_i e pesos w_i para $i = 1,...,n$. O domínio de integração de tal regra é por convenção tomado como [−1, 1], de modo que a regra é expressa como:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

Para o intervalo [-1,1], o enunciado fornece os seguintes pontos e pesos:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{0.6}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{0.6}\right)$$

No EP, forneceu-se os pesos e pontos a serem calculados para quadratura gaussiana com 6, 8 e 10 pontos. Esses dados foram utilizados para calcular as integrais. Vale ressaltar que quanto maior o número de pontos, menor o erro e maior a precisão.

n=6

x_j	w_j
0.2386191860831969086305017	0.4679139345726910473898703
0.6612093864662645136613996	0.3607615730481386075698335
0.9324695142031520278123016	0.1713244923791703450402961

n=8

x_j	w_j
0.1834346424956498049394761	0.3626837833783619829651504
0.5255324099163289858177390	0.3137066458778872873379622
0.7966664774136267395915539	0.2223810344533744705443560
0.9602898564975362316835609	0.1012285362903762591525314

n=10

x_j	w_j
0.1488743389816312108848260	0.2955242247147528701738930
0.4333953941292471907992659	0.2692667193099963550912269
0.6794095682990244062343274	0.2190863625159820439955349
0.8650633666889845107320967	0.1494513491505805931457763
0.9739065285171717200779640	0.0666713443086881375935688

Vale ressaltar que, para extremos de integração [a,b] diferentes de [-1,1], faz-se necessário uma mudança de variável. Os nós são linearmente transportados do intervalo [−1, 1] para o intervalo [a, b] e os pesos são multiplicados por um fator de escala. Assim, a fórmula fica:

Observação

Uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser transformada para uma integral sobre $[-1,1]$ utilizando a mudança de variáveis:

$$t = \frac{2x-a-b}{b-a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\Big[(b-a)t + a + b\Big]$$

Isso nos permite escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\Big(\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\Big)\frac{(b-a)}{2}dt$$

Por fim, para realizar a integral dupla,deve-se realizar a integral [-1,1] duas vezes.

$$I = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$

.Usando fórmulas de Gauss com n nós, o valor acima pode ser aproximado como:

$$I = \sum_{i=1}^{n} u_i F(x_i)$$

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} f(x_i, y_{ij}),$$

Sabe-se que xi e ui são os nós e os pesos no intervalo [a, b], e yij e vij são os nós e os pesos nos intervalos [c(xi), d(xi)]. O outro caso pode ser deduzido de maneira análoga.

Código

Primeiramente, utilizando as listas fornecidas, dobrou-se o número de pesos e adicionaram-se os “x” negativos, organizando a lista para conseguir rodar a simulação. Tal procedimento foi realizado da seguinte forma:

```
xt = []
wt = []
 for x in x_dict[n]:
        x_aux.append(x)
        x_aux.append(-x)
for w in w_dict[n]:
w_aux.append(w)
w_aux.append(w)
```

Após isso, duas funções foram criadas: **mudancadeVariavelponto(x)** e **mudancadeVariavelpeso(w)**, a fim de adaptar as variáveis sempre pro intervalo [a,b] = [-1,1]. Para isso, utilizou-se a função map para aplicar essa mudança de variavel às listas xt e wt de forma mais prática.
Em seguida, é necessário realizar a mudança de variável a fim de adequar o intervalo de integração em y, calculando essa mudança utilizando a própria mudança já feita em x. No código, é possível observar:

```
xd = [(d(xf[i]) - c(xf[i])) * x + (d(xf[i]) + c(xf[i]))/2 for x in xt]
wd = [((d(xf[i]) - c(xf[i]))/2) * w for w in wt]
```

Por fim, realiza-se a primeira soma referente a essa integral, e depois a segunda soma em loop. Então, a soma final nada mais é do que a soma1 (primeira integral) mais a soma2 (segunda integral). No código observa-se que:

```
soma1 = 0
for u in range(n):
        soma1 += wd[u] * f(xf[i] , xd[u])
        soma2 += wf[i] * soma1
return(soma2)
```

É importante ressaltar que, de forma bem intuitiva e prática, para rodar cada exemplo, basta descomentar no código cada um deles.

Atividades

a) **Atividade 1**

Percebe-se que para a integral do cubo, os extremos de integração saem de 0 e vão para 1, o qual é o valor da aresta, e a função do plano como 1 dydx

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dydx$$

E para a integral do tetraedro, os extremos de integração são [a,b] = [0,1] e [c,d] = [0, 1-x], já que vai de 0 até a equação da reta no plano xy. A função f(x,y) será a equação do plano, 1-x-y.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dydx$$

Resolvendo esses dois casos, obtêm-se os seguintes resultados:

```
O volume do cubo calculado para n =  6 é:  1.0
O volume do cubo calculado para n =  8 é:  1.0
O volume do cubo calculado para n =  10 é:  1.0
O volume do tetraedro calculado para n =  6 é:  0.16666666666666666
O volume do tetraedro calculado para n =  8 é:  0.16666666666666666
O volume do tetraedro calculado para n =  10 é:  0.16666666666666669
```

b) **Atividade 2**

Essa atividade consiste em calcular a área A da região no primeiro quadrante limitada pelos eixos e pela curva $y = 1 - x^2$, a qual pode ser obtida por:

$$A = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y}} dx \right] dy = \frac{2}{3}$$

Assim, o resultado gerado pelo código foi:

```
O valor calculado da primeira integral para n=  6 é:  0.666666666666666
6
O valor calculado da primeira integral para n=  8 é:  0.666666666666666
6
O valor calculado da primeira integral para n=  10 é:  0.66666666666666
67
O valor calculado da segunda integral para n=  6 é:  0.6670464379156136
O valor calculado da segunda integral para n=  8 é:  0.6668355801001765
O valor calculado da segunda integral para n=  10 é:  0.666756042936508
9
```

c) Atividade 3

Calcular a área da superfície descrita pela função $z = e^{y/x}$ com os extremos $0.1 \leq x \leq 0.5$ e $x^3 \leq y \leq x^2$. Assim, utilizando a equação fornecida pelo enunciado:

$$\iint_R \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\, dx\, dy \Big).$$

O valor obtido foi de:

```
O valor calculado da área para n=  6 é:  0.02573333333333333
O valor calculado da área para n=  8 é:  0.025733333333333337
O valor calculado da área para n=  10 é:  0.02573333333333333
O valor calculado do volume para n=  6 é:  0.033519713652734144
O valor calculado do volume para n=  8 é:  0.03351971365272375
O valor calculado do volume para n=  10 é:  0.03351971365272375
```

d) Atividade 4

O volume V do sólido de revolução obtido da rotação da região R em torno de γ é igual a:

$$V = 2\pi \iint_R d_\gamma(x,y)\, dx\, dy$$

onde dγ(x, y) é a distância do ponto (x, y) à reta γ. Por fim, calculando o volume de uma calota esférica de raio 1 e altura ¼, obtêm-se que:

```
O volume da calota esférica calculado para n=  6 é:  0.17989583333333332
5
O volume da calota esférica calculado para n=  8 é:  0.1798958333333333
4
O volume da calota esférica calculado para n=  10 é:  0.179895833333333
34
```

Em seguida, calculando o volume do sólido de revolução obtido da rotação da região, em torno do eixo y, delimitada por $x = 0,\ x = e^{-y^2},\ y = -1,\ y = 1$:

```
O volume do sólidos calculado para n=  6 é:  3.7581650328967093
O volume do sólidos calculado para n=  8 é:  3.7582492624394392
O volume do sólidos calculado para n=  10 é:  3.7582496332093864
```

Bibliografia

https://www.ufjf.br/flavia_bastos/files/2009/06/aula_integral.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=bu8trr9Qm1Y
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7041254/mod_resource/content/2/tarefa2_2022.pdf
https://www.digitalocean.com/community/tutorials/how-to-use-the-python-map-function-pt