



ÉCOLE CENTRALE LYON

UE PRO
PROJET D'APPLICATION DE RECHERCHE N°125
RAPPORT

Dimensionnement d'un absorbeur à raideur négative

Élève :
Ian VULCANESCU

Tuteurs :
Pascal FOSSAT
Mohammed ICHCHOU

Laboratoire :
LTDS

Equipe de Recherche :
Dynamique des Systèmes
Complexes

17 avril 2023

Résumé

L'isolation fréquentielle est une préoccupation majeure pour de nombreuses structures de la vie courante dès lors que le système est soumis à une excitation harmonique. En jouant sur sa masse ou sa raideur, il est généralement possible d'extraire ses fréquences propres du domaine fréquentiel d'excitation. Néanmoins, pour l'isolation à basse fréquence, ces paramètres peuvent s'avérer insuffisants.

L'utilisation de la raideur négative est un moyen de décroître artificiellement la raideur global du système tout en conservant sa capacité de charge. Cette raideur négative peut être générée par des dispositifs passifs possédant des géométries variables. On s'intéresse dans ce rapport au dimensionnement de l'un de ces dispositifs puis à sa validation par une phase expérimentale sur le résonateur imprimé en 3D.

Abstract

Frequency isolation is a major concern for many structures in everyday life when the system is subjected to harmonic excitation. By adjusting its mass or stiffness, it is usually possible to extract its natural frequencies from the excitation frequency domain. However, for low frequency isolation, these parameters may be insufficient.

The use of negative stiffness is a way to artificially decrease the overall stiffness of the system while maintaining its load capacity. This negative stiffness can be generated by passive devices with variable geometries. In this report, we are interested in the dimensioning of one of these devices and its validation by an experimental phase on the 3D printed resonator.

Remerciements

J'aimerais avant tout remercier plusieurs personnes pour leur aide et leur soutien qui furent essentiels à l'accomplissement de ce projet.

Monsieur Pascal Fossat, chercheur postdoctoral, pour sa disponibilité et son implication sans mesure tout au long du projet. Je le remercie en particulier pour le cadre de travail idéal dont j'ai pu profiter, basé sur la confiance et l'autonomie.

Monsieur Ichchou Mohammed, professeur de mécanique des solides et directeur du développement et des relations entreprises, pour m'avoir aiguillé lors de la prise en main du sujet et pendant les différentes réunions au cours de l'année.

Le Fablab, pour les conseils et l'aide apportés lors de la phase expérimentale du projet.

Table des matières

Résumé	1
Abstract	2
Remerciements	3
1 Introduction	6
1.1 Description générale du principe d'isolation fréquentielle	6
1.2 État des recherches	6
1.3 Objectifs du projet	7
2 Dimensionnement du résonateur HSLDS	7
2.1 Tuned Mass Damper	8
2.2 Absorbeur à raideur négative	10
2.3 Étude dynamique du résonateur HSLDS	14
2.4 Étude comparative entre un absorbeur HSLDS et l'absorbeur linéaire associé	17
3 Modélisation 3D d'un absorbeur HSLDS	21
3.1 Description du cadre expérimental	21
3.2 Validation numérique	25
4 Validation expérimentale du dimensionnement	26
4.1 Caractérisation du résonateur HSLDS	26
4.2 Expérience d'isolation fréquentielle	28
5 Conclusion	31
Bibliographie	32
6 Annexes	34
6.1 Expression de la force de réaction du système à raideur négative	34
6.2 Expression de la force de réaction de l'absorbeur HSLDS	35
6.3 Résolution de l'équation de Duffing	36
6.4 Transmissibilité vibratoire	37
6.5 Calcul de l'épaisseur des poutres droites	39
6.6 Élargissement de l'étude à un autre mode de résonance	40

Table des figures

1	Schéma de l'installation d'un TMD dans une tour à Taipei [8]	7
2	Schéma de principe du TMD	8
3	Influence d'un TMD sur la réponse fréquentielle	9
4	Poutre d'Euler avec déformation initiale	10
5	Modèle du ressort à raideur négative	11
6	Évolution de la force \tilde{F}	11
7	Évolution de la raideur \tilde{k}	12
8	Schéma de l'isolateur HSLDS	12
9	Évolution de la force \tilde{F}_{HSLDS}	13
10	Évolution de la raideur \tilde{k}_{HSLDS}	13
11	Modèle global du résonateur	14
12	Réponses fréquentielles d'un oscillateur de Duffing	15
13	Réponse fréquentielle d'un oscillateur de Duffing de type <i>hardening</i>	16
14	Réponse fréquentielle d'un oscillateur de Duffing de type <i>softening</i> avec une forte non-linéarité	17
15	Influence de la proportion de raideur négative	19
16	Effet du paramètre α sur la FRF avec $\xi_{lin} = 0.005$ et $\beta^2 = 0.2$	19
17	Effet du paramètre ξ sur la FRF avec $\alpha = 0.001$ et $\beta^2 = 0.2$	20
18	FRF de la poutre sans résonateur	21
19	Configuration du résonateur HSLDS	22
20	Modélisation 3D du résonateur HSLDS miniaturisé	24
21	FRF de la poutre sans et avec résonateur HSLDS	25
22	Trois modèles (tests) de résonateurs HSLDS imprimés en 3D	26
23	Vélocimètre laser de surface pointant sur le résonateur	27
24	Résonateur installé sur le pot vibrant	27
25	Absorbeur HSLDS	27
26	Absorbeur linéaire	27
27	FRF de la poutre sans et avec résonateur HSLDS	28
28	Poutre encastree-libre en aluminium, support de l'expérience d'isolation fréquentielle	29
29	Résonateur HSLDS installé comme un TMD sur la poutre encastree-libre	29
30	FRF de la poutre seule et amortie par le résonateur HSLDS	30
31	Schéma de l'isolateur HSLDS	35
32	Modèle du résonateur HSLDS	37
33	Modèle du résonateur linéaire	38
34	Schéma du résonateur linéaire	39
35	FRF de la poutre sans et avec résonateur HSLDS pour le second mode	40

Liste des tableaux

1	Tableau récapitulatif des différents paramètres de dimensionnement	23
2	Tableau des différents critères de dimensionnement et leur validité	24

1 Introduction

1.1 Description générale du principe d'isolation fréquentielle

Le phénomène de résonance est intrinsèquement lié à un vaste nombre de systèmes physiques. C'est cette sensibilité fréquentielle qui provoque la joie d'un enfant, assis sur une balançoire, qui déclenche l'absorption de photons par les atomes ou encore qui parvient à extraire de la musique d'un morceau de bois évidé. Cette résonance devient néanmoins préoccupante lorsqu'elle a lieu, par exemple, au sein de montages mécaniques ou de structures dans le domaine du génie civil. En effet, la résonance correspond à une absorption d'énergie, sous une excitation périodique, qui peut dépasser les capacités de la structure et donc l'endommager. C'est pourquoi l'isolation fréquentielle est un domaine actif de recherche et un concept largement utilisé dans le monde industriel.

Afin d'isoler un système, on dispose essentiellement de deux paramètres : sa masse et sa raideur. L'augmentation du premier paramètre a pour effet de diminuer les fréquences de résonance tandis que l'augmentation du second entraîne l'effet inverse. Ainsi, pour augmenter la largeur des bandes d'isolation de fréquence d'un système masse-ressort, une solution serait d'augmenter la masse du système ou bien de réduire sa raideur pour faire diminuer sa fréquence de résonance. Il peut arriver néanmoins des cas où la variation de ces paramètres ne soit pas suffisante : une masse excessive ou des contraintes spatiales peuvent endiguer le champ d'action de ces paramètres. De plus, la réduction de la raideur pour obtenir une plage de fréquence d'isolement plus large entraîne inévitablement un déplacement statique plus important pour l'isolateur linéaire.

La raideur négative a le potentiel de réduire artificiellement la raideur d'un système tout en assurant sa stabilité ainsi qu'une capacité de charge suffisante. C'est un dispositif passif d'isolation fréquentielle. Contrairement à la raideur positive, un ressort fictif à raideur négative ne s'oppose pas à la force qui s'exerce sur lui mais l'accompagne dans le processus de déformation. Il possède donc un comportement fortement non linéaire qui suscite l'intérêt de nombreux chercheurs depuis plusieurs années.

1.2 État des recherches

Les chercheurs ont exploré nombre de dispositifs passifs permettant de créer de la raideur négative. Platus [1] a exploité deux barres articulées au centre, inclinées et chargées en compression pour obtenir une raideur négative. Carrella et al. [2] ont étudié une disposition similaire avec l'adjonction de ressorts linéaires pour parvenir à un système de raideur quasi-nulle. En effet, la raideur négative étant intrinsèquement instable, il est nécessaire de lui associer des ressorts à raideur positive en parallèle.

Certains chercheurs sont parvenus à reproduire une raideur négative en utilisant des électroaimants [3] [4] ce qui a permis de s'affranchir des contraintes de nature purement mécanique présentes dans les dispositifs précédents. Enfin Liu et al. [5] et Huang et al. [6] proposent dans leurs travaux un isolateur à raideur quasi-nulle en utilisant des poutres d'Euler en flambement comme source de raideur négative. En comparaison des poutres sollicitées en compression du modèle de Platus, ces poutres créent une raideur négative plus grande pour un même déplacement grâce à la non-linéarité issue de la déformation même des poutres. Celles-ci offrent également davantage de paramètres d'ajustement comme la déformation initiale des poutres, l'angle d'inclinaison ainsi que leur géométrie propre. C'est ce dispositif qui sera étudié plus en profondeur dans la suite de ce rapport.

1.3 Objectifs du projet

Le projet s'inscrit dans la continuité du travail du doctorant Qichen Wu autour d'un résonateur HSLDS (High-Static-Low-Dynamic Stiffness) construit à base de 4 poutres d'Euler en flambement mises en parallèle avec des ressorts linéaires. Le but du projet consiste à explorer le potentiel d'isolation fréquentielle d'un tel dispositif et de proposer des modifications géométriques et/ou mécaniques de ce dernier.

Le premier objectif sera d'aboutir à des règles de dimensionnement précises de chacun des paramètres du résonateur pour une gamme de fréquence à isoler donnée.

Ces différentes règles devront permettre ensuite la modélisation d'une version miniature de l'absorbeur en vue d'une impression en 3D.

Enfin, une phase expérimentale aura pour but d'examiner le comportement dynamique du résonateur imprimé et donc de vérifier l'influence de la raideur négative sur la réponse en fréquence.

2 Dimensionnement du résonateur HSLDS

En règle générale, le dimensionnement d'une structure comme une tour, un pont ou toute pièce mécanique se fait de manière à ce que ses fréquences propres se situent en dehors du domaine fréquentiel auquel cette structure sera soumise (rafales de vent, marche de piétons sur une passerelle, vitesse de rotation d'un moteur, etc.). Il est des structures, néanmoins, où cette démarche n'est pas possible ou bien irréalisable du fait d'un coût en matière première trop élevé, de contraintes spatiales, etc. Comment faire alors pour isoler une structure préexistante à une fréquence ou dans un domaine fréquentiel donné ?

Une première solution est d'augmenter la masse de la structure mais celle-ci peut rapidement devenir excessive dès lors qu'on cherche à isoler le système dans les basses fréquences. Il semble par ailleurs difficile de réduire la raideur étant donné que le système a déjà été fabriqué. Une autre solution est d'implémenter un amortisseur dynamique à un endroit précis de la structure ou de manière distribuée sur celle-ci [7]. À la résonance, la structure va conférer une grande partie de son énergie à ce résonateur et limiter ainsi sa propre amplitude de vibration. Cet amortisseur est appelé un TMD (Tuned Mass Damper) ou Amortisseur harmonique (Figure 1).

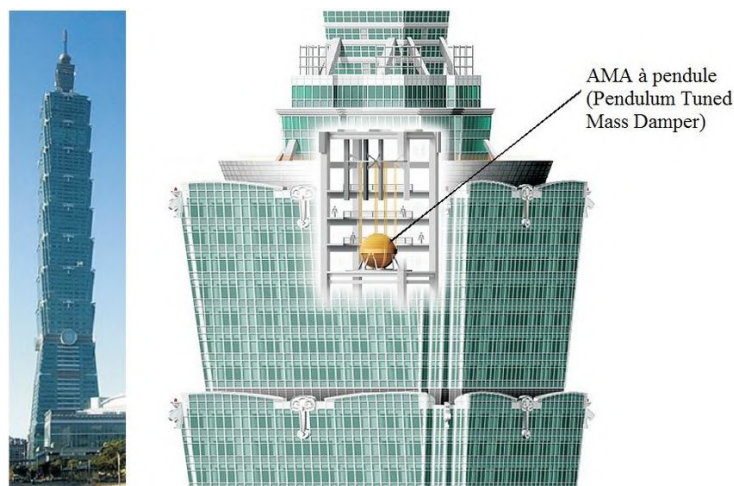


FIGURE 1 – Schéma de l'installation d'un TMD dans une tour à Taipei [8]

2.1 Tuned Mass Damper

Modèle mathématique

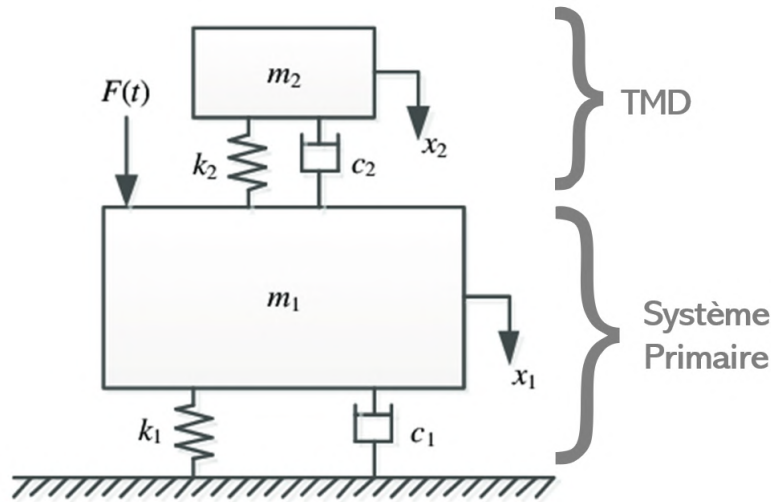


FIGURE 2 – Schéma de principe du TMD

L'application du Principe Fondamental de la Dynamique à la masse m_1 (Figure 2) donne :

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 = F(t) \quad (1)$$

Pour la masse m_2 , on obtient :

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 = 0 \quad (2)$$

En réécrivant les équations 1 et 2 sous forme matricielle, il vient :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On cherche une solution de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$

En injectant dans l'équation matricielle précédente, on obtient finalement :

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2) & -i\omega c_2 - k_2 \\ -i\omega c_2 - k_2 & -\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Afin de rendre générique la résolution du problème on adimensionne le système d'équations en posant : $\Delta_{ST} = \frac{F_0}{k_1}$, $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$, $\xi_i = \frac{c_i}{2\omega_i m_i}$, $q = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, $r = \frac{\omega}{\omega_1}$

L'équation 3 se réécrit alors :

$$\boxed{\frac{X_1}{\Delta_{ST}} = \frac{\tilde{a} + i\tilde{b}}{\tilde{c} + i\tilde{d}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{a} = q^2 - r^2 \\ \tilde{b} = 2\xi_2 r q \\ \tilde{c} = r^4 - r^2(q^2(1 + \mu) + 1 + 4\xi_1 \xi_2 q) + q^2 \\ \tilde{d} = 2r q \xi_2 + 2r q^2 \xi_1 - r^3(2\xi_1 + 2\xi_2 q \mu + 2\xi_2 q) \end{cases}$$

Le système d'étude à isoler étant connu, on peut avoir accès aux valeurs de m_1 et k_1 . On cherche alors à dimensionner l'amortisseur, caractérisé par les variables m_2 et k_2 , de manière à limiter le déplacement x_1 de la structure. Ce problème est équivalent au problème adimensionné suivant : connaissant les valeurs ξ_1 et μ , on cherche les valeurs de ξ_2 et q optimales qui minimisent le déplacement relatif X_1 . La méthode de Den Hartog [9] permet d'obtenir, à travers un algorithme d'optimisation, les expressions suivantes de $\xi_{2,opt}$ et q_{opt} pour un rapport de masse $\mu \in [0.005; 0.1]$ et un coefficient d'amortissement $\xi_1 \in [0; 0.05]$ donnés :

$$\xi_{2,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} + \frac{0,1616 \xi_1}{1+\mu} \quad (4)$$

$$q_{opt} = \frac{1}{1+\mu} \left(1 - 1,5906 \xi_1 \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \right) \quad (5)$$

Pour illustrer le fonctionnement du TMD, on choisit un système masse-ressort de masse $m_1=10\text{kg}$, de facteur d'amortissement $\xi_1 = 0.02$ et possédant un pic de résonance en $\omega_1 = 10\text{rad.s}^{-1}$. Le calcul du couple $(\xi_{2,opt}, q_{opt})$ permet ensuite de caractériser entièrement le TMD qu'il faut relier à la masse m_1 pour isoler spécifiquement la pulsation ω_1 :

$$m_2 = \mu m_1, \quad \omega_2 = q_{opt} \omega_1, \quad k_2 = \omega_2^2 m_2 \quad \text{et} \quad c_2 = 2\omega_2 m_2 \xi_{2,opt}$$

L'atténuation du pic de résonance à l'aide d'un dispositif TMD est visible sur la Figure 3. On remarque que cette isolation fréquentielle se fait au prix de la génération de deux fréquences de résonance de part et d'autre du pic avec, toutefois, des amplitudes plus modérées : l'ajout d'un deuxième système masse-ressort offre un deuxième degré de liberté à la structure globale d'où la présence de deux résonances.

Notons enfin que plus le rapport massique μ est élevé, plus l'atténuation devient significative et les deux pulsations de résonance générées s'éloignent davantage l'une de l'autre.

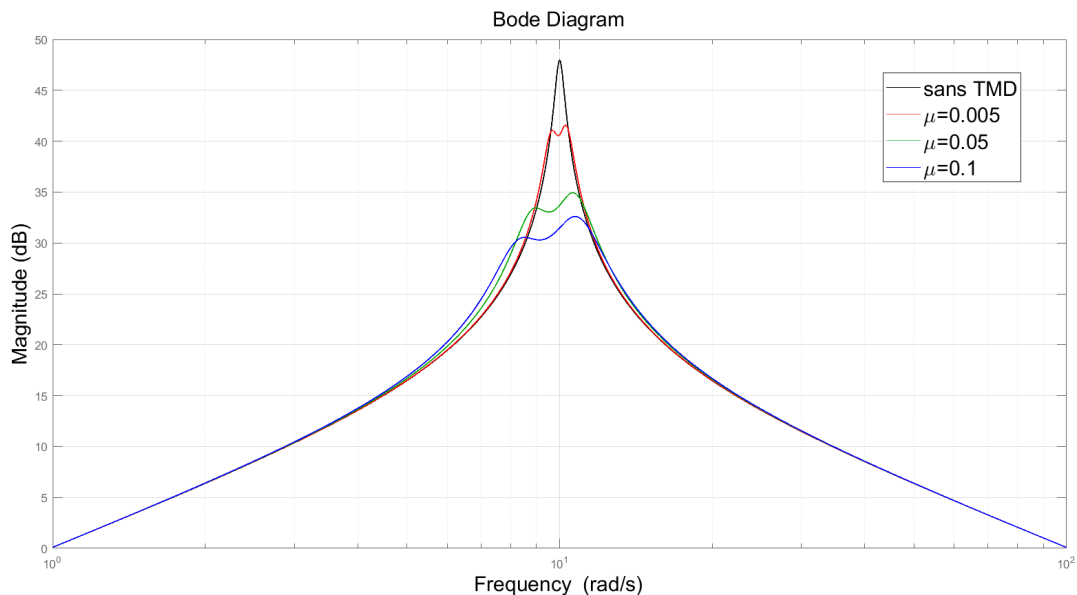


FIGURE 3 – Influence d'un TMD sur la réponse fréquentielle

Les limites du TMD

On se propose de mettre en évidence les limites de l'utilisation du TMD en étudiant la situation suivante : soit un système de masse m_1 présentant un premier mode de résonance à la pulsation ω_1 . Supposons que l'on souhaite isoler cette fréquence particulière de résonance à l'aide d'un TMD avec un rapport massique μ . La raideur du TMD à implémenter est alors $k_2 = \omega_2^2 m_2 = (q_{opt} \omega_1)^2 m_2$.

À présent, si on considère une structure 100 fois plus légère tout en conservant le même rapport massique et que l'on souhaite isoler le même mode de résonance de pulsation ω_1 , la raideur k_2 s'en trouverait nécessairement également diminuée d'un facteur 100. Il arrive cependant un point où il peut être physiquement difficile de concevoir un ressort si sa raideur devient trop faible. C'est sur ce point précis que la raideur négative se montre des plus pertinente.

2.2 Absorbeur à raideur négative

Raideur négative avec poutres d'Euler en flambement

Considérons une poutre droite fixée en une extrémité par une liaison rotule au bâti et chargée à l'autre extrémité sous une force axiale. La force critique appliquée provoquant le flambage de la poutre est appelée charge critique d'Euler. Son expression est donnée par $P_e = \frac{EI\pi^2}{L^2}$.

Néanmoins, l'introduction d'une imperfection géométrique initiale w modifie de manière significative l'influence de la charge axiale sur la poutre d'Euler (Figure 4). La relation entre la charge appliquée P et le déplacement axial y est alors approchée par l'expression suivante :

$$P = P_e \left[1 - \frac{\pi w}{L} \left[\left(\frac{\pi w}{L} \right)^2 + \frac{4y}{L} \right]^{\frac{-1}{2}} \right] \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi w}{L} \right)^2 + \frac{y}{2L} \right] \quad (6)$$

Cette expression est valable uniquement pour une faible imperfection initiale $w < 0.2L$.

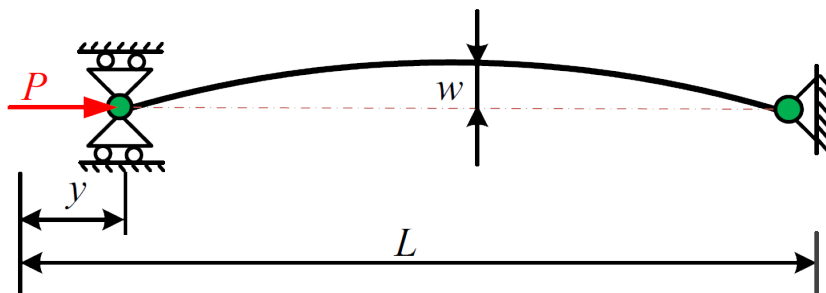


FIGURE 4 – Poutre d'Euler avec déformation initiale

Comme expliqué en introduction, le résonateur HSLDS que l'on cherche à modéliser se compose de 4 poutres d'Euler en flambement et installées en parallèle. Un modèle équivalent est représenté sur la Figure 5. Initialement, les poutres d'Euler au repos forment un angle θ avec l'horizontale. Ce n'est qu'une fois comprimées que le phénomène de raideur négative apparaît.

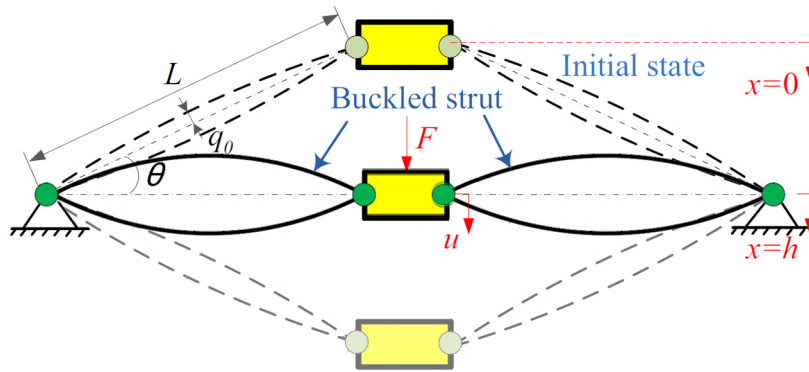


FIGURE 5 – Modèle du ressort à raideur négative

La force réactive du système peut alors s'écrire :

$$F = -4.P.\sin(\theta) \quad (7)$$

Après avoir effectué l'adimensionnement et la linéarisation de la relation (voir [6] et Annexe 6.1), on obtient l'expression de la force adimensionnée $\tilde{F} = \frac{F}{P_e}$ suivante :

$$\tilde{F} = -k_1\tilde{u} + k_3\tilde{u}^3 \quad (8)$$

Après dérivation, on obtient l'expression de la raideur faisant apparaître une composante négative $-k_1$ ainsi qu'un terme non linéaire en \tilde{u}^2 .

$$\tilde{k} = -k_1 + 3k_3\tilde{u}^2 \quad (9)$$

La représentation graphique de ces différentes relations fait bien état d'une zone pour laquelle la pente de la courbe de \tilde{F} est négative (Figure 6) ce qui fait écho aux valeurs négatives de la raideur \tilde{k} (Figure 7) : dans cette zone, la force de réaction du système ne s'oppose plus à la déformation mais l'entraîne davantage. Sont également représentées les courbes correspondant aux relations 8 et 9 auxquelles a été retiré le terme non linéaire (modèle linéarisé).

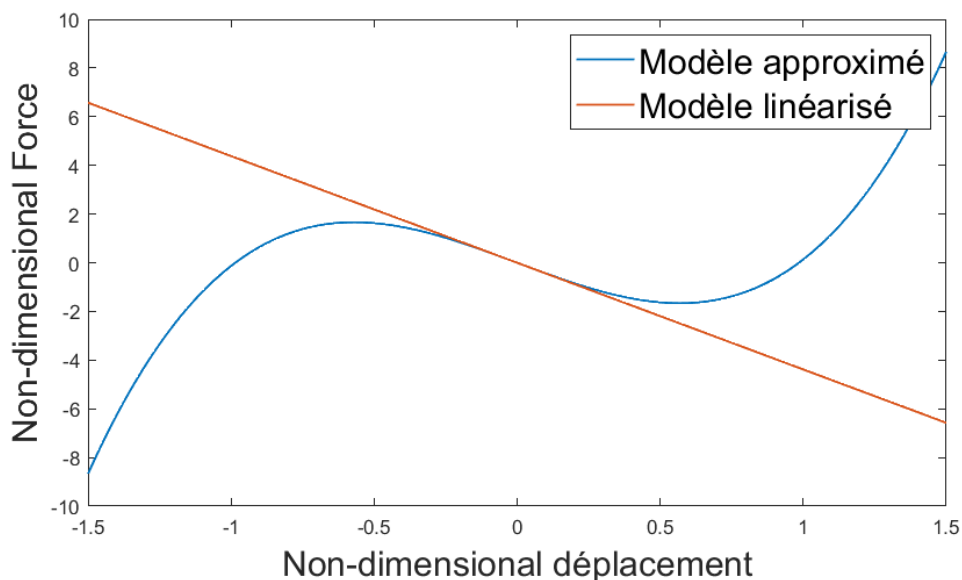


FIGURE 6 – Évolution de la force \tilde{F}

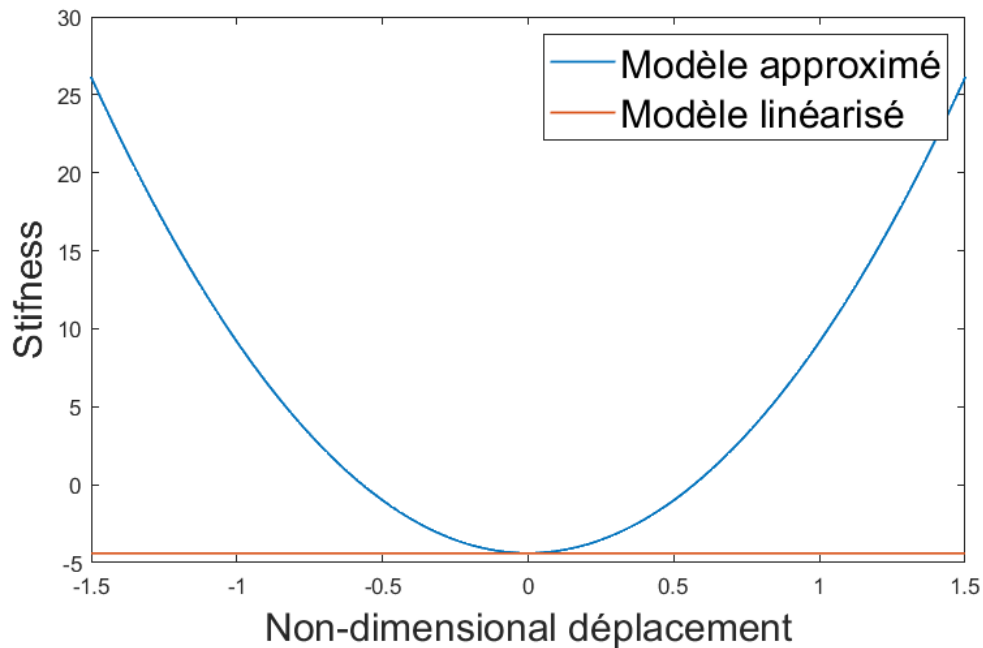


FIGURE 7 – Évolution de la raideur \tilde{k}

Isolateur HSLDS

Néanmoins, un système à raideur négative n'offre pas de régime stable de fonctionnement : un dispositif n'exerçant aucune résistance devant sa propre déformation et qui, au contraire, l'accompagne est nécessairement instable. C'est pourquoi on lui rajoute en parallèle une raideur positive qui aura le rôle de compenser suffisamment cette raideur négative pour avoir un fonctionnement stable du système. La raideur globale sera alors quasi-nulle mais bien positive. C'est la réunion de ces deux raideurs de signes opposés qui offre au résonateur une grande flexibilité sur la gamme de fréquence à isoler notamment les basses fréquences. Le schéma de l'absorbeur peut se représenter comme sur la Figure 8.

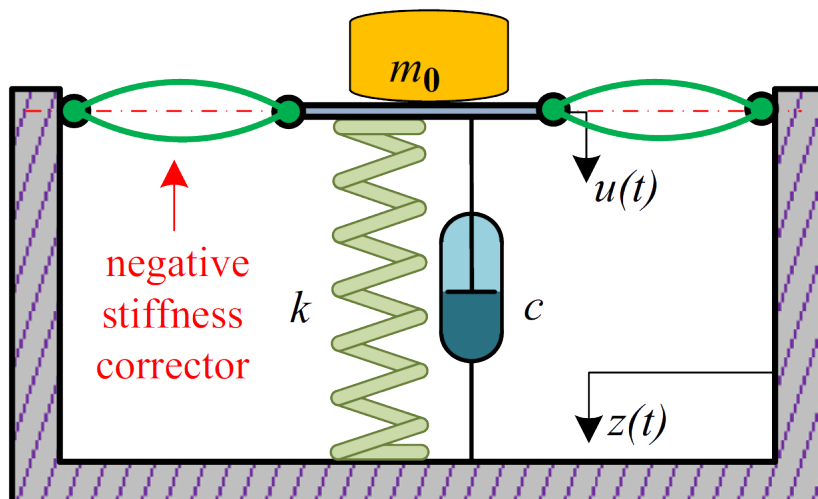


FIGURE 8 – Schéma de l'isolateur HSLDS

Les expressions associées à la force et à la raideur adimensionnées se voient alors modifiées par l'ajout de la raideur positive k (Annexe 6.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}_{HSLDS} = k'_1 \tilde{u} + k'_3 \tilde{u}^3 \\ \tilde{k}_{HSLDS} = k'_1 + 3k'_3 \tilde{u}^2 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} k'_1 = 1 - k_1 \lambda \\ k'_3 = k_3 \lambda \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{P_e}{kL} \quad (10)$$

On représente en jaune sur les Figures 9 et 10 les évolutions respectives de la force et de la raideur adimensionnées en fonction du déplacement adimensionné. Lorsque la raideur avoisine des valeurs proches de 0, la force réactive du système évolue de manière quasi-horizontale avec le déplacement. Ce comportement est à l'origine de l'isolation fréquentielle basse fréquence.

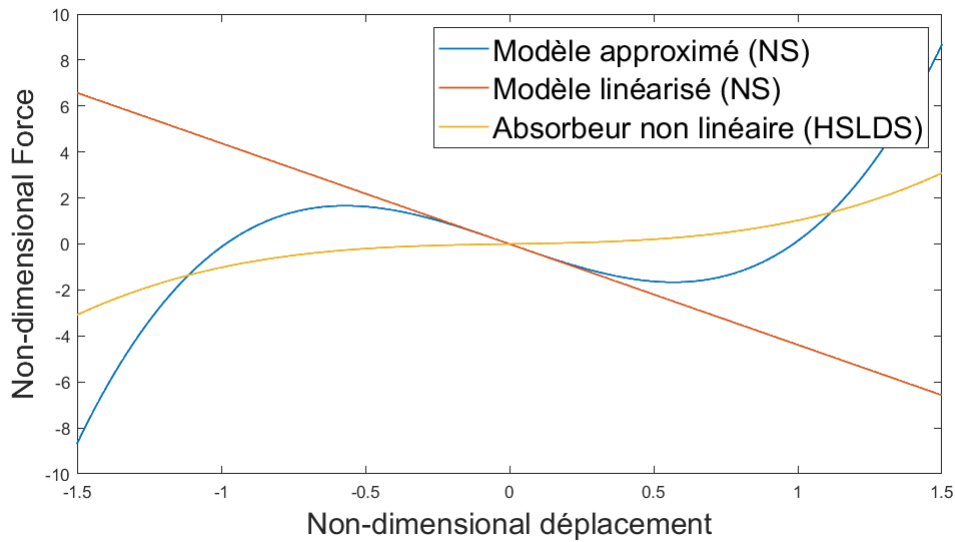


FIGURE 9 – Évolution de la force \tilde{F}_{HSLDS}

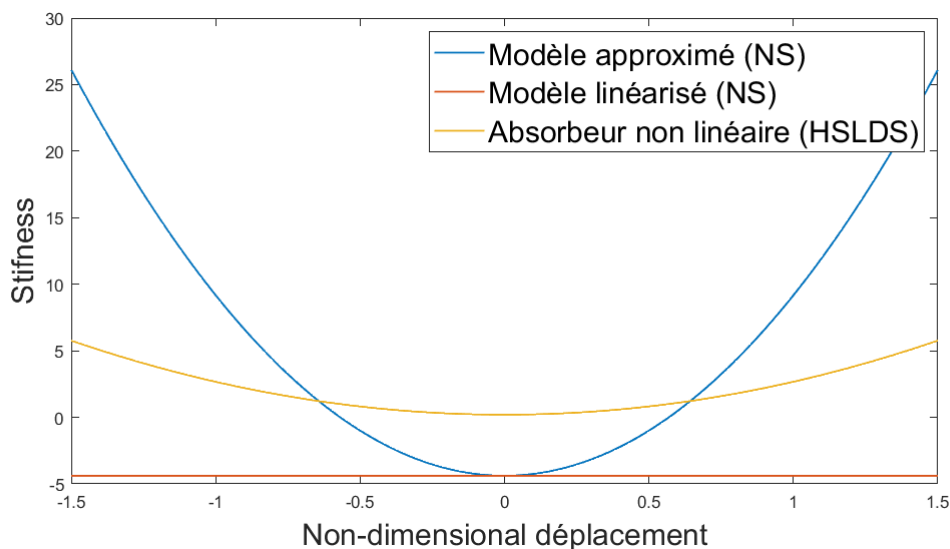


FIGURE 10 – Évolution de la raideur \tilde{k}_{HSLDS}

2.3 Étude dynamique du résonateur HSLDS

Équation de Duffing

On étudie à présent le régime dynamique du résonateur. La non-linéarité du dispositif peut, en effet, faire apparaître des comportements non désirés sous excitation harmonique [10].

On observe l'évolution du déplacement u de la masse m soumise à une excitation harmonique $F_e \cos(\omega t)$. Les raideurs positive et négative sont regroupées sous une raideur équivalente $k_{HSLDS} = K_1 + 3K_3 u^2$ à l'origine de la force $f_{HSLDS} = K_1 u + K_3 u^3$ où K_1 et K_3 sont les coefficients qui témoignent respectivement de la part linéaire et cubique de la force f_{HSLDS} (Figure 11).

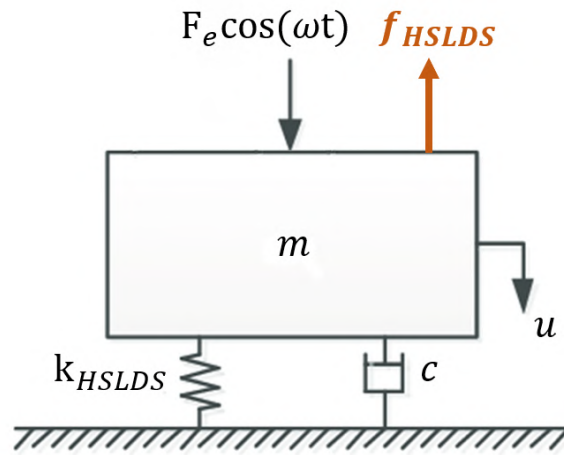


FIGURE 11 – Modèle global du résonateur

Le principe fondamental de la dynamique projetée selon l'axe vertical peut s'écrire :

$$m\ddot{u} = F_e \cos(\omega t) - f_{HSLDS} - c\dot{u} \quad (11)$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme suivante appelée équation de Duffing :

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + K_1 u + K_3 u^3 = F_e \cos(\omega t)} \quad (12)$$

On pose les paramètres d'adimensionnement suivants :

$$u_0 = \frac{F_e}{K_1}, \omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{m}}, \xi = \frac{c}{2\omega_n m}, \alpha = \frac{K_3}{K_1} u_0^2, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \tau = \omega_n t, \ddot{x} = \frac{\ddot{u}}{\omega_n^2 u_0}, \dot{x} = \frac{\dot{u}}{\omega_n u_0}, x = \frac{u}{u_0}$$

Ceci nous conduit à une seconde équation de Duffing adimensionnée :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x + \alpha x^3 = \cos(\Omega\tau)} \quad (13)$$

Notons que ω_n symbolise la pulsation, non pas du système HSLDS global mais uniquement de la part linéaire de ce dernier. De plus, le paramètre α représente le degré de non-linéarité du système et est également lié à l'amplitude d'excitation à travers le terme u_0^2 .

Qualitativement, l'effet du signe de α s'observe sur la Figure 12. Pour $\alpha < 0$, la courbe de la réponse fréquentielle du système se courbera vers la gauche (comportement de type *softening*) et vers la droite pour $\alpha > 0$ (comportement de type *hardening*). Le cas $\alpha = 0$ correspond au cas linéaire.

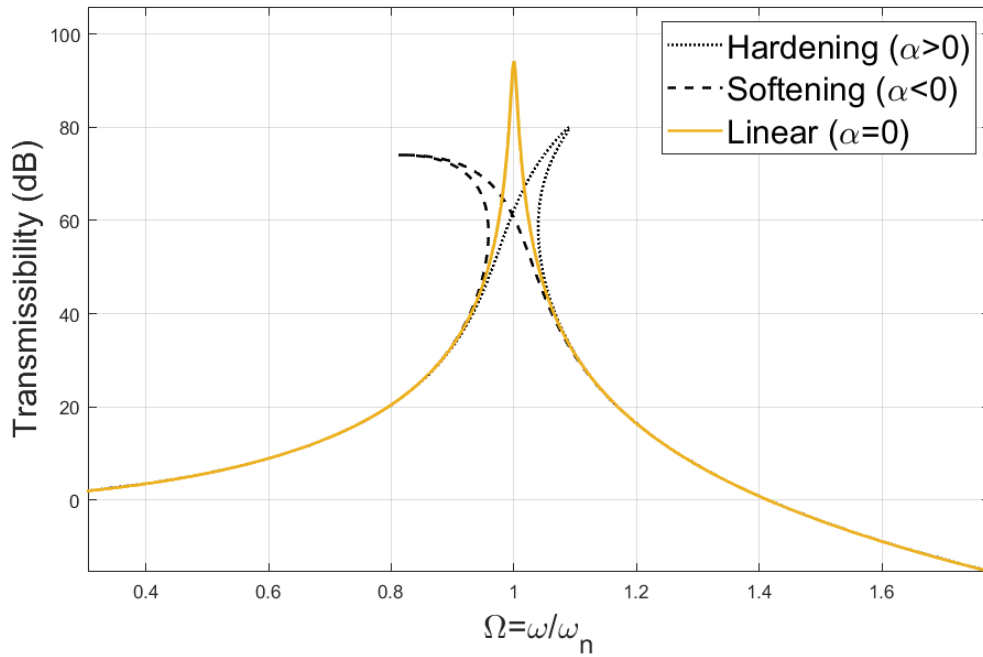


FIGURE 12 – Réponses fréquentielles d'un oscillateur de Duffing

Résolution de l'équation de Duffing

Supposons une solution à l'équation 13 de la forme $x = X \cos(\Omega\tau + \varphi)$. La résolution (détaillée en Annexe 6.3) permet d'obtenir deux solutions réelles décrivant l'évolution de la pulsation adimensionnée Ω :

$$\Omega^2 = \left(1 + \frac{3}{4}\alpha X^2 + 2\xi^2\right) \pm \frac{1}{X} \sqrt{1 - 4\xi^2 X^2 \left(1 - \xi^2 + \frac{3}{4}\alpha X^2\right)} \quad (14)$$

Les valeurs prises par Ω_-^2 décrivent les abscisses de la portion de la courbe en rouge sur la Figure 13, tandis que celles prises par Ω_+^2 décrivent les abscisses de la portion bleue de la courbe. Le comportement d'un système présentant une telle réponse fréquentielle dépend du sens de variation de la fréquence que l'on applique : lorsqu'on augmente la fréquence d'excitation depuis les basses fréquences, le système suit la courbe rouge jusqu'au point D à la fréquence Ω_d . Si l'on continue d'accroître la fréquence, il descend subitement vers la portion non-résonante de la courbe. De manière analogue, lorsqu'on diminue la fréquence d'excitation depuis les hautes fréquences, le système suit la courbe bleue jusqu'au point U à la fréquence Ω_u puis saute sur la partie résonante de la courbe.

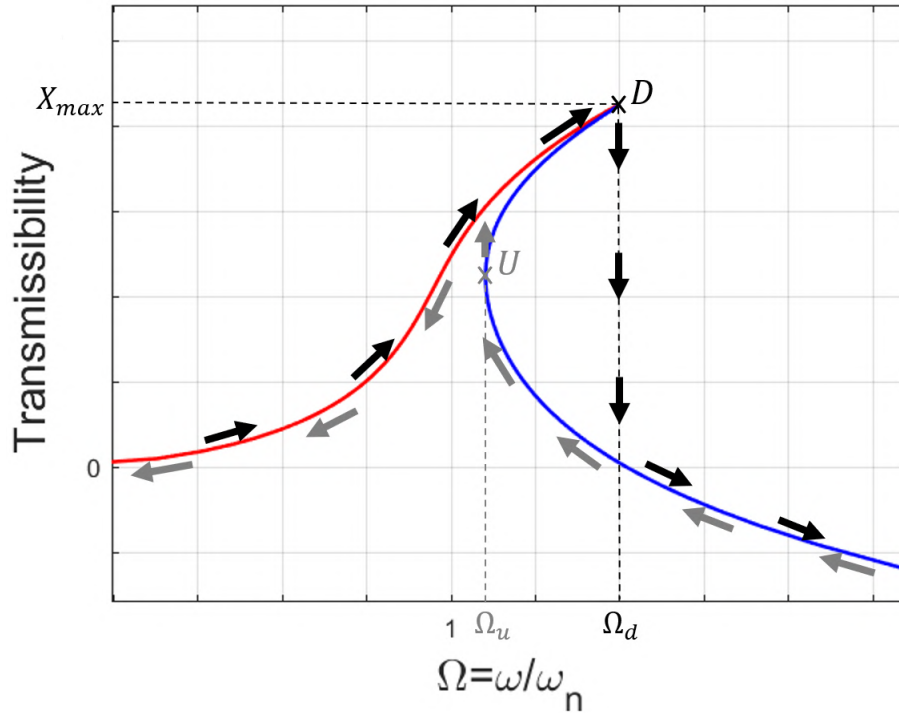


FIGURE 13 – Réponse fréquentielle d'un oscillateur de Duffing de type *hardening*

Sur la Figure 13, les portions de courbes dont l'abscisse est située entre les valeurs Ω_u et Ω_d constituent une zone de fréquence instable dont la taille doit être limitée au maximum en vue de l'utilisation pratique du résonateur HSLDS.

A partir des solutions décrites à l'égalité 14, il est possible d'extraire les valeurs de l'amplitude maximale X_{max} et la pulsation Ω_d à laquelle elle est atteinte :

$$X_{max} = \sqrt{\frac{2}{3\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{3\alpha}{4\xi^2}} - 1 \right)} \quad (15)$$

$$\Omega_d = \sqrt{\frac{3}{4}\alpha X_{max}^2 + 1 - 2\xi^2} \text{ avec } \xi \ll \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

En injectant l'équation 15 dans l'équation 16, il vient :

$$\Omega_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{3\alpha}{4\xi^2}}} \quad (17)$$

On constate l'apparition d'une contrainte sur les valeurs possibles du paramètre α :

$$\alpha \geq \frac{-4\xi^2}{3} \quad (18)$$

Cette condition témoigne du fait que, pour un fonctionnement de type *softening*, une trop forte non-linéarité ne permet pas aux courbes décrites par Ω_- et Ω_+ de se rencontrer comme illustré sur la Figure 14.

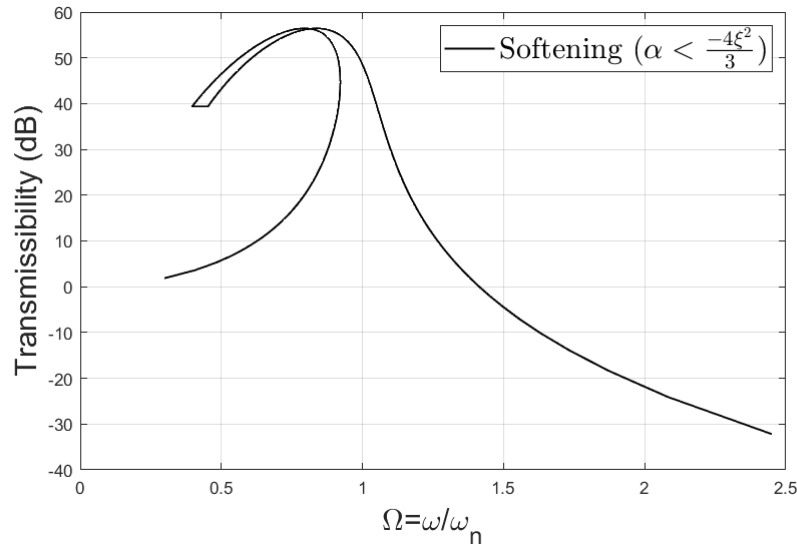


FIGURE 14 – Réponse fréquentielle d'un oscillateur de Duffing de type *softening* avec une forte non-linéarité

2.4 Étude comparative entre un absorbeur HSLDS et l'absorbeur linéaire associé

On cherche maintenant à mettre en avant les avantages que propose un résonateur HSLDS par rapport à un système purement linéaire. La description du résonateur HSLDS présentée dans la section 2.2 fait état de la mise en parallèle d'une raideur positive k avec une raideur négative de part et d'autre de la masse. Le modèle linéaire associé est défini comme le système constitué uniquement de la raideur positive et privé des éléments constitutifs de la raideur négative.

Transmissibilité vibratoire de l'isolateur HSLDS

Afin d'étudier les performances d'isolation on s'intéresse à la transmissibilité de notre système qui correspond au rapport entre l'amplitude de la force transmise F_t et celle de la force excitatrice F_e . Le calcul détaillé en Annexe 6.4 permet d'aboutir à l'expression suivante :

$$|T_a| = \frac{F_t}{F_e} = \tilde{X} \sqrt{(2\xi\Omega)^2 + \left(1 + \frac{3\alpha}{4}\tilde{X}^2\right)^2} \quad (19)$$

avec \tilde{X} le déplacement adimensionné

Pour le système linéaire associé, la transmissibilité s'écrit comme le rapport entre l'amplitude du déplacement vertical sur l'amplitude du déplacement imposé (démonstration en Annexe 6.4) :

$$|T_{lin}| = \left| \frac{X}{X_e} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\xi_{lin}\Omega_{lin})^2}{(1 - \Omega_{lin}^2)^2 + (2\xi_{lin}\Omega_{lin})^2}} \quad (20)$$

avec $\Omega_{lin} = \frac{\omega}{\omega_{lin}}$ la pulsation adimensionnée

Lien entre l'isolateur HSLDS et linéaire associé

Rappelons ici l'équation fournissant l'expression de la force de réaction adimensionnée :

$$\boxed{\tilde{F}_{HSLDS} = k'_1 \tilde{u} + k'_3 \tilde{u}^3} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k'_1 = 1 - k_1 \lambda \\ k'_3 = k_3 \lambda \end{cases} \quad (21)$$

Or comme $\tilde{F}_{HSLDS} = \frac{f_{HSLDS}}{kL}$, il vient :

$$f_{HSLDS} = k k'_1 u + k k'_3 u^3 \quad (22)$$

Par identification avec l'expression de départ $f_{HSLDS} = K_1 u + K_3 u^3$ on pose :

$$\boxed{K_1 = \beta^2 k} \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{k'_1} \quad \text{et} \quad 0 < \beta < 1 \quad (23)$$

L'équation 15 incarne la manifestation de la raideur négative sur le système. En effet, elle fait le lien entre la raideur purement positive k du système linéaire et la raideur K_1 de l'absorbeur HSLDS qui comprend à la fois la raideur positive et négative. Ainsi, β^2 est une grandeur adimensionnée qui correspond à la proportion de raideur positive "restante" une fois la raideur négative implémentée sur le système.

Ce paramètre permet ensuite de relier les paramètres caractéristiques du système linéaire comme la pulsation propre $\omega_{lin} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, le coefficient d'amortissement $\xi_{lin} = \frac{c}{2\omega_{lin}m}$ et le rapport $\Omega_{lin} = \frac{\omega}{\omega_{lin}}$ aux paramètres de l'absorbeur HSLDS :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{m}} = \sqrt{\frac{\beta^2 k}{m}} = \beta \omega_{lin} \quad (24)$$

$$\xi = \frac{c}{2\omega_n m} = \frac{\xi_{lin}}{\beta} \quad (25)$$

$$\Omega_{lin} = \beta \Omega \quad (26)$$

Dans l'exemple montré sur la Figure 15, on choisit un amortissement $\xi_{lin} = 0.005$ et un coefficient de non-linéarité $\alpha = 10^{-4}$. On trace les réponses fréquentielles en faisant varier la quantité de raideur positive que l'on supprime par l'intermédiaire de la raideur négative. Les courbes illustrent donc le rôle du paramètre β^2 dans les performances d'isolation fréquentielle. L'augmentation de la raideur négative fait décroître la raideur global du système, β^2 diminue et la réponse fréquentielle se translate vers les basses fréquences. On a donc abaissé la fréquence du pic de résonance du système et par cela augmenté la gamme d'isolation fréquentielle.

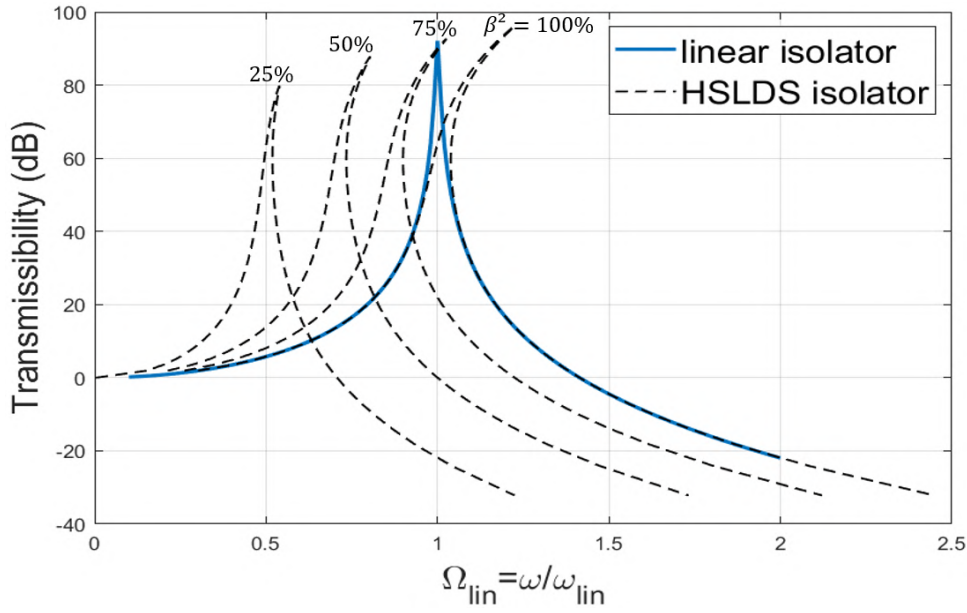


FIGURE 15 – Influence de la proportion de raideur négative

Ainsi pour $\beta^2 = 100\%$, l'ensemble de la raideur positive est conservé mais l'introduction de non-linéarité entraîne la courbure de la FRF. Pour $\beta^2 = 25\%$, la raideur négative a contribué à supprimer 75% de la raideur positive du système linéaire, d'où un décalage vers les basses fréquences.

Notons que, pour le système HSLDS décrit dans ce rapport, le paramètre α sera toujours de signe positif entraînant nécessairement un comportement de type *hardening* (voir l'expression des coefficients de α en Annexe 6.1). Ce comportement peut s'avérer problématique car, au-delà d'un certain seuil, la valeur de α (liée à l'amplitude d'excitation) peut entraîner la courbure du pic de résonance au-delà de la fréquence de résonance du système linéaire comme illustré sur la Figure 16.

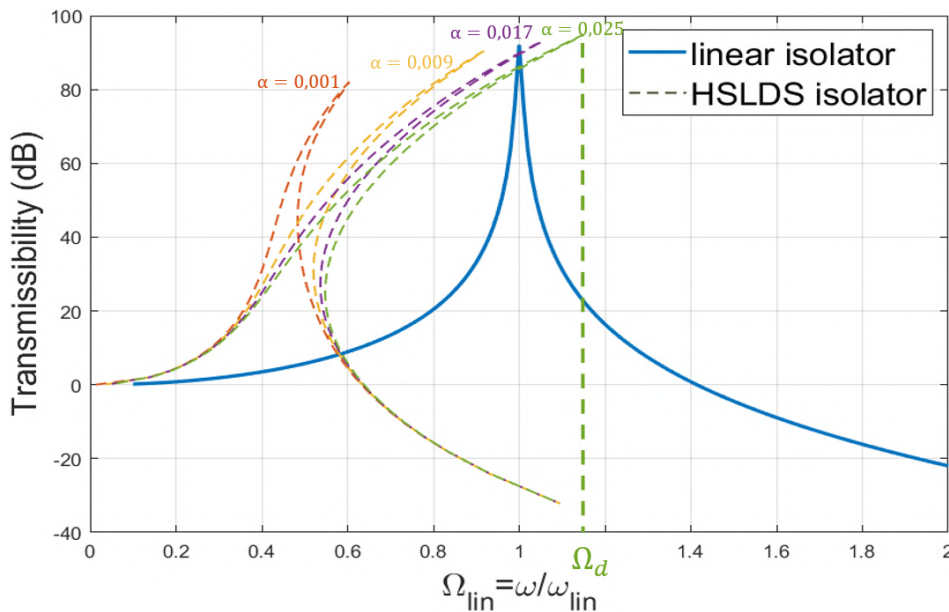


FIGURE 16 – Effet du paramètre α sur la FRF avec $\xi_{lin} = 0.005$ et $\beta^2 = 0.2$

Il est donc nécessaire d'établir une condition de dimensionnement supplémentaire sur la valeur de α . On cherche alors à répondre au critère suivant :

$$\Omega_d \beta = 1 \quad (27)$$

En injectant, l'équation 17 dans l'équation précédente on obtient la valeur seuil de α au delà de laquelle l'utilisation du dispositif non-linéaire n'est plus pertinente.

$$\alpha_{lim} = \frac{16}{3} \frac{\xi^2 (1 - \beta^2)}{\beta^4} \quad (28)$$

Dans l'exemple de la Figure 16, on trouve une valeur seuil $\alpha_{lim} = 0.0133$. On constate effectivement que la courbure du pic devient excessive au-delà de cette limite.

Remarquons qu'il est également possible d'atténuer l'effet des non-linéarités en augmentant le coefficient d'amortissement du système HSLDS (Figure 17).

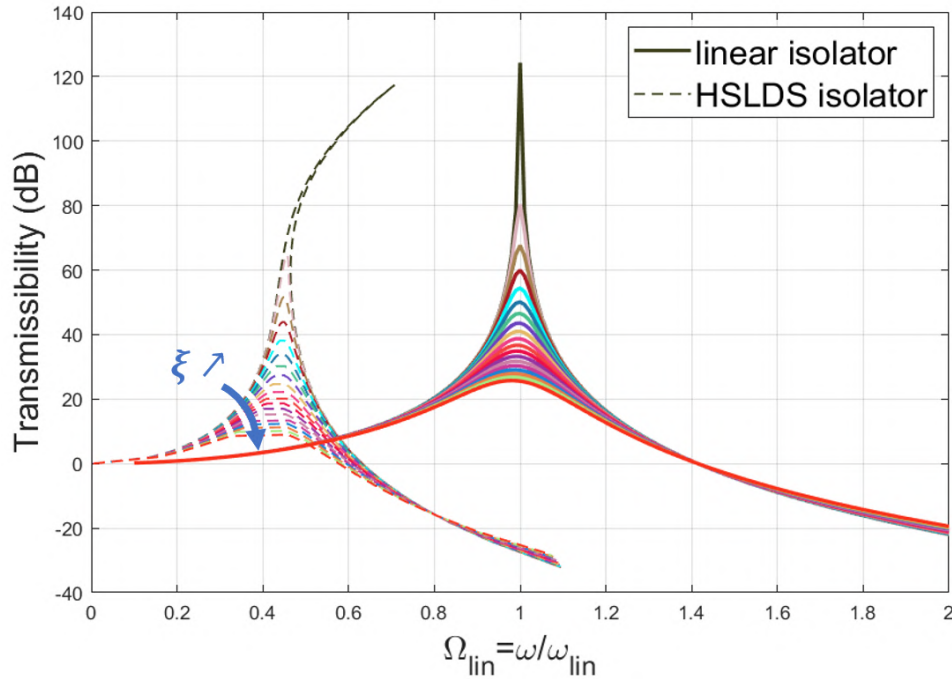


FIGURE 17 – Effet du paramètre ξ sur la FRF avec $\alpha = 0.001$ et $\beta^2 = 0.2$

3 Modélisation 3D d'un absorbeur HSLDS

3.1 Description du cadre expérimental

On cherche désormais à mettre en oeuvre les règles de dimensionnement mises en évidence dans la section précédente pour concevoir un absorbeur dynamique afin d'atténuer la réponse fréquentielle d'une structure donnée.

Identification du domaine fréquentiel à isoler

L'expérience sera menée sur une poutre encastree-libre de section rectangulaire en aluminium de dimensions $L \times l \times h$: 595 x 30 x 15 mm. Le tracé de la FRF (Frequency Response Function) de la poutre va permettre de caractériser le comportement fréquentiel du système et d'identifier précisément la valeur de fréquence du mode que l'on cherche à isoler (Figure 18). Une première FRF a été tracée à l'aide de la *TMM (Transfer Matrix Method)* [11] [12]. Un second tracé a ensuite été réalisé à l'aide du logiciel d'éléments finis *COMSOL Multiphysics* pour conforter les résultats obtenus.

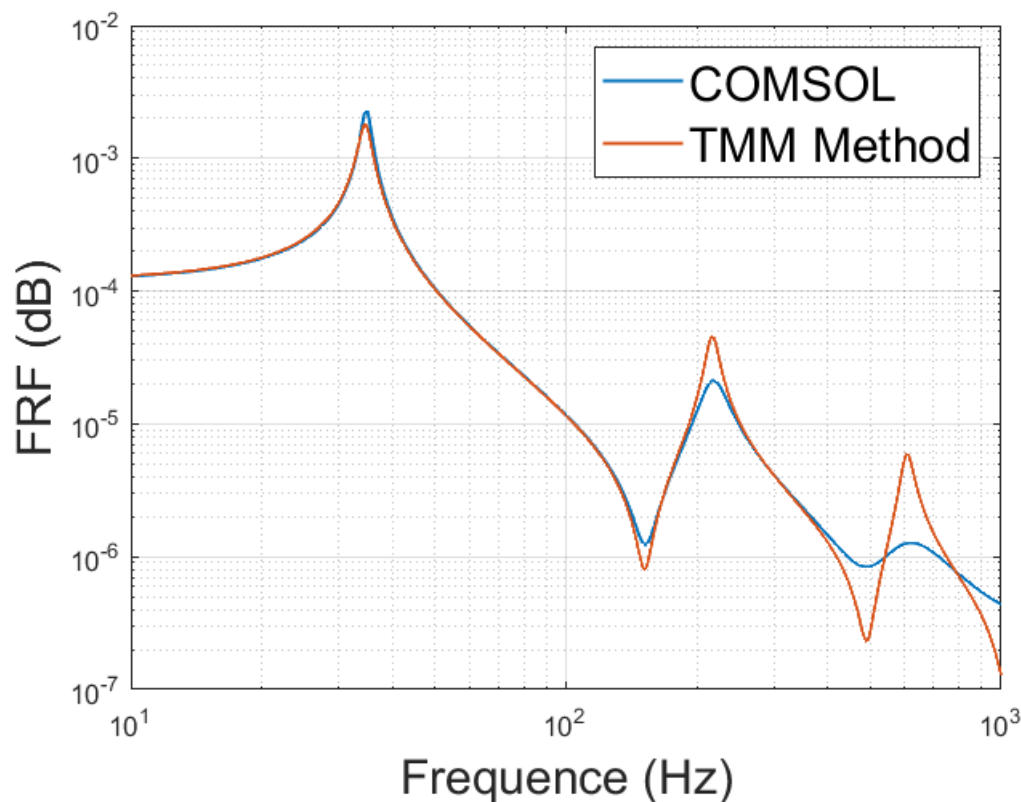


FIGURE 18 – FRF de la poutre sans résonateur

Supposons que l'on cherche à atténuer les vibrations du premier mode situé, d'après les courbes précédentes, à une fréquence $f_r = 34.8 \text{ Hz}$. L'idée est donc d'adopter la même démarche que celle permettant d'implémenter un TMD à la différence près que ce dernier sera basé non plus sur une raideur uniquement positive mais sur l'assemblage d'une raideur positive et d'une raideur négative.

Dimensionnement d'un TMD accordé sur la fréquence f_r

En choisissant d'implémenter un TMD avec un rapport massique $\mu = 0.05$, le modèle mathématique décrit à la section 2.1 fournit les caractéristiques globales du résonateur : $m_2 = 22,2 \text{ g}$ et $k_2 = 940 \text{ N.m}^{-1}$

Bien qu'il ne semble pas impossible de concevoir un ressort linéaire avec une telle raideur k_2 , on se propose de la construire en s'aidant d'une raideur négative. On se base pour cela sur le modèle de résonateur dont la géométrie est illustrée sur la Figure 19 et qui a fait l'objet du travail de Qichen Wu [13].

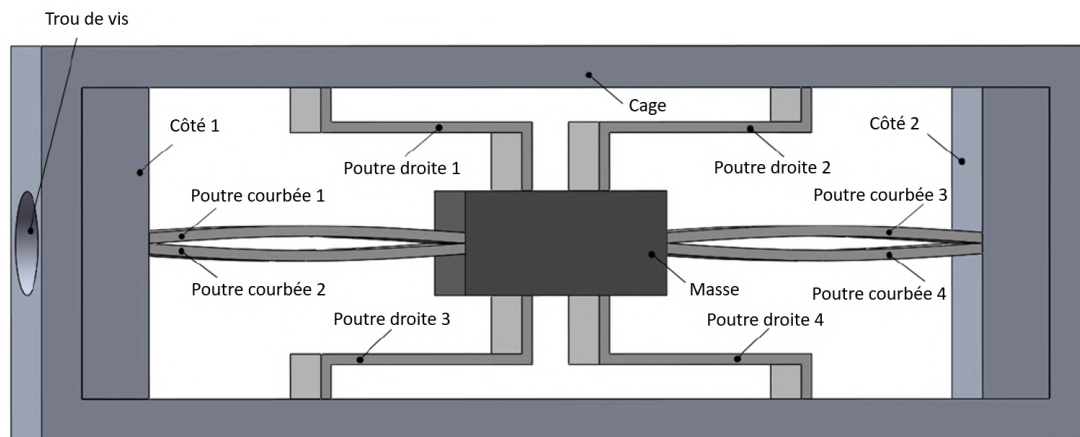


FIGURE 19 – Configuration du résonateur HSLDS

La configuration de ce résonateur rappelle les schémas rencontrés au cours de la section 2.2. Le choix a été fait ici de comprimer les poutres d'Euler non plus par l'application d'une charge verticale mais par l'intermédiaire de vis latérales pour mettre en tension les poutres courbées numérotées de 1 à 4 qui produisent la composante négative de la raideur. Puis, dans un souci de symétrie et de robustesse du système, la raideur positive a été décomposée en quatre poutres (en forme de "S") qui travaillent en flexion disposées au-dessus et en dessous de la masse m_2 .

L'un des objectifs de ce projet est de proposer une version miniaturisée de ce dispositif. Étant donné que la raideur globale k_2 du résonateur a déjà été déterminée, il ne reste plus qu'à la partager en une composante négative (poutres courbées) et une autre positive (poutres droites). On dispose pour cela d'un jeu de paramètres assez large résumé dans le tableau 1.

Composant	Paramètre	Signification
Poutres droites → Positive Stiffness (PS)	h_{PS}	Épaisseur
	L_{PS}	Longueur
	b_{PS}	Largeur
Poutres courbes → Negative Stiffness (NS)	h_{NS}	Épaisseur
	L_{NS}	Longueur au repos (non comprimée)
	b_{NS}	Largeur
	θ	Angle entre positions au repos et comprimé
	w	Imperfection initiale
Masse	m_2	Masse au centre du TMD

TABLE 1 – Tableau récapitulatif des différents paramètres de dimensionnement

Le choix a été fait de fixer des valeurs raisonnables pour 8 des paramètres cités dans le tableau et en ne laissant qu'un seul paramètre d'ajustement libre.

La miniaturisation du dispositif a d'abord défini les dimensions de la cage du résonateur $L \times l \times h$: 120 x 51 x 30 mm. Celles-ci ont alors contraint les grandeurs significatives des éléments constitutifs comme la longueur des différentes poutres : $L_{PS} = 25$ mm et $L_{NS} = 31$ mm. La masse $m_2 = 22g$, quant à elle, a été fixée par le rapport $\mu = 0.05$. On choisit également de fixer une largeur pour tous les éléments du résonateur commune avec celle de la cage : $b_{PS} = b_{NS} = 30$ mm.

La valeur de θ est de 15° (vérifie le critère $\theta < 25^\circ$) : cela signifie que les poutres courbées devront être comprimées de $L_{PS}(1 - \cos(\theta)) \simeq 1mm$ avant d'être insérées dans le dispositif. Une valeur supérieure aurait tendance à endommager ces poutres lors de la compression. Pour faciliter leur déformation, on cherche aussi à maximiser la valeur de la déformation initiale w . En prenant en compte le critère $w < 0.2L_{NS}$, on choisit $w = 5$ mm.

Finalement, les épaisseurs h_{PS} et h_{NS} sont les 2 derniers paramètres à déterminer. La géométrie plus complexe des poutres incurvées nous amène à fixer préférentiellement l'épaisseur de celles-ci : $h_{NS} = 0.5$ mm.

h_{PS} demeure donc l'unique paramètre laissé libre afin d'ajuster la raideur globale du système HSLDS qui, utilisé comme un TMD, permettra d'atténuer spécifiquement la fréquence de résonance $f_r = 34.8$ Hz de la poutre en aluminium.

Les calculs menés en Annexe 6.5 permettent de déterminer une valeur $h_{PS} = 0.5$ mm pour l'épaisseur des poutres droites.

Le dimensionnement ainsi achevé permet d'aboutir à une valeur de $\beta^2 \approx 0.79$. Ainsi, la raideur négative mise en place contribue à supprimer près de 20% de la raideur positive du résonateur linéaire.

Vérification des critères de dimensionnement

Les valeurs choisies à la section précédente pour les différents paramètres doivent aussi répondre à plusieurs critères pour garantir le bon fonctionnement du système HSLDS. L'ensemble de ces critères ainsi que leur validité sont résumés dans le tableau 2.

Paramètre	Critère	Validation
Rapport massique	$\mu \in [0.005; 0.1]$	Oui
Amortissement de la poutre	$\xi_1 \in [0; 0.05]$	Oui
Amortissement du résonateur	$\xi \ll \frac{1}{\sqrt{2}}$	Oui
Déformation initiale	$w < 0.2L_{NS}$	Oui
Angle d'inclinaison	$\theta < 25^\circ$	Oui
Coefficient de non-linéarité	$\alpha < \alpha_{lim}$	Oui pour $u_0 < 10cm$

TABLE 2 – Tableau des différents critères de dimensionnement et leur validité

Création d'un modèle 3D d'absorbeur

Une fois l'ensemble des valeurs des paramètres choisies et validées, un modèle 3D du résonateur a pu être construit en s'aidant du logiciel de modélisation Sketchup dont une représentation est donnée Figure 20. L'impression en 3D de ce dispositif permettra ensuite de valider expérimentalement le dimensionnement effectué.

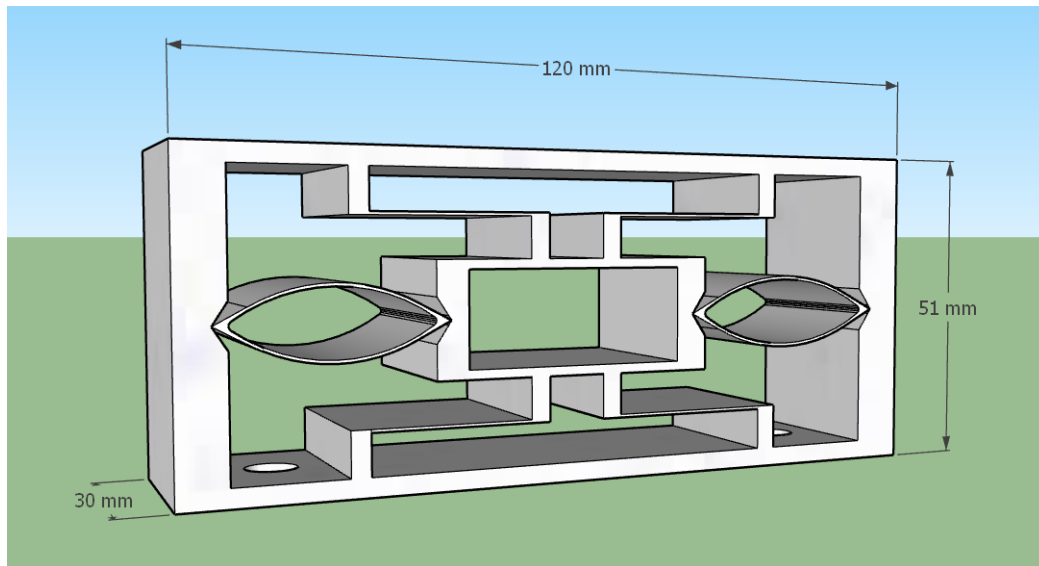


FIGURE 20 – Modélisation 3D du résonateur HSLDS miniaturisé

Notons que pour un dispositif miniaturisé, l'utilisation du système de vis latérales pour comprimer les poutres courbées ne semble plus adapté pour mettre en tension ces dernières et ainsi générer la composante négative de la raideur du système. Le choix a donc été fait de fusionner la cage extérieure, les poutres droites et la masse en une unique pièce. Les poutres courbées seront imprimées séparément et devront être comprimées (de 1 mm d'après l'étude précédente) pour pouvoir être insérées de part et d'autre de la masse et en appui sur la cage extérieure.

De plus, un espace a été laissé libre à l'endroit de la masse m_2 afin de pouvoir accorder celle-ci par l'ajout de masselottes dans le cadre d'expériences différentes éventuelles impliquant une autre fréquence de résonance f_r .

3.2 Validation numérique

Avant d'entrer dans la phase expérimentale, une première vérification numérique du dimensionnement a été menée. Les paramètres calculés ont permis de tracer numériquement, à l'aide de la *TMM (Transfer Matrix Method)*, la réponse en fréquence du système avec et sans le résonateur HSLDS (Figure 21). Conformément aux attentes, la résonance à la fréquence $f_r = 34.8 \text{ Hz}$ qui était ciblée a bien été atténuée par l'ajout du TMD modifié avec raideur négative.

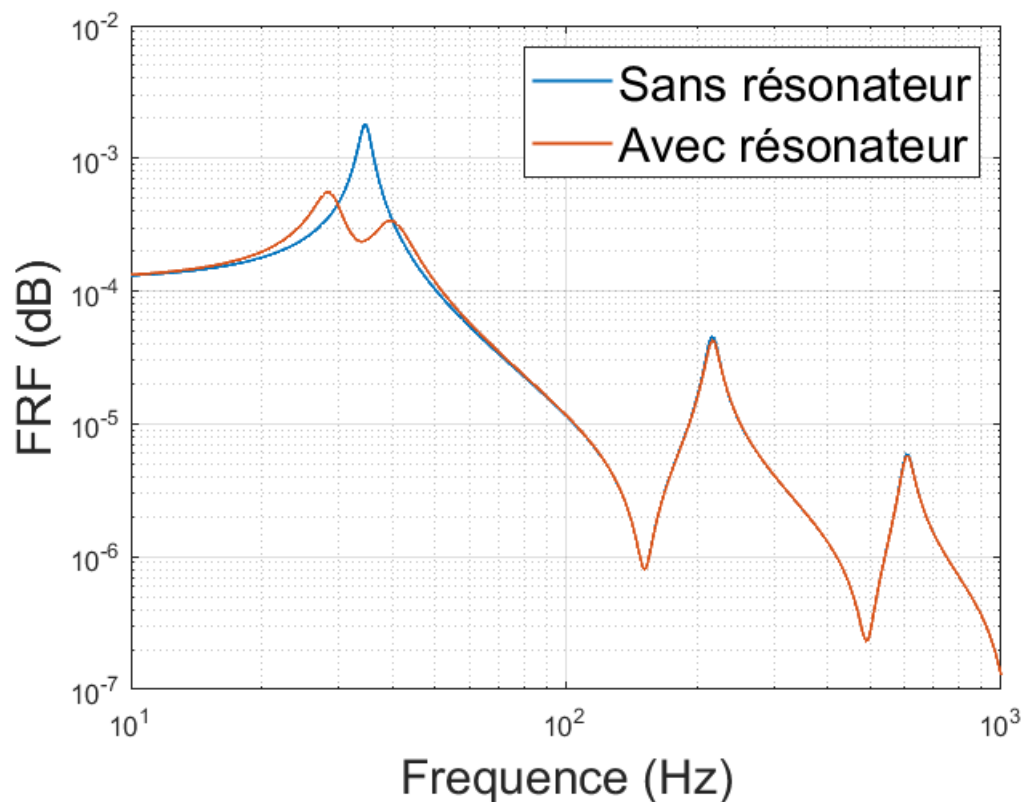


FIGURE 21 – FRF de la poutre sans et avec résonateur HSLDS

On remarquera que le choix a été fait de mener l'étude sur le premier mode de résonance mais qu'elle pourrait être tout aussi bien menée sur les modes suivants (voir par exemple Annexe 6.6 pour l'isolation du deuxième mode).

4 Validation expérimentale du dimensionnement

4.1 Caractérisation du résonateur HSLDS

Le résonateur HSLDS a été imprimé à l'aide de l'imprimante 3D *Fortus 450mc* en ABS (Figure 22). Les caractéristiques de ce matériau (module de Young, densité, etc.) ont évidemment été prises en compte lors du dimensionnement. La taille de la buse de cette machine est de l'ordre du dixième de millimètre ce qui a permis la réalisation des pièces de très faible épaisseur comme les poutres droites et courbes.

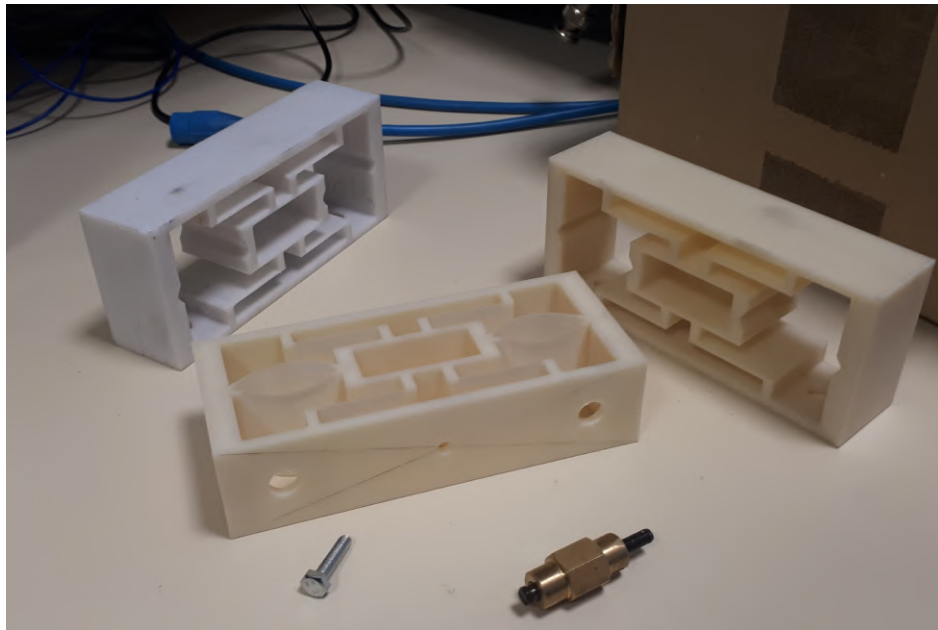


FIGURE 22 – Trois modèles (tests) de résonateurs HSLDS imprimés en 3D

Une première expérience a été menée afin de caractériser le comportement fréquentiel du résonateur HSLDS seul. Pour cela, il a été fixé sur un pot vibrant simulant une excitation extérieure sur la cage du résonateur. Puis à l'aide d'un vélocimètre laser de surface, on mesure la vitesse de déplacement de la masse m_2 en pointant la source monochromatique sur la zone correspondante (Figures 23 et 24).

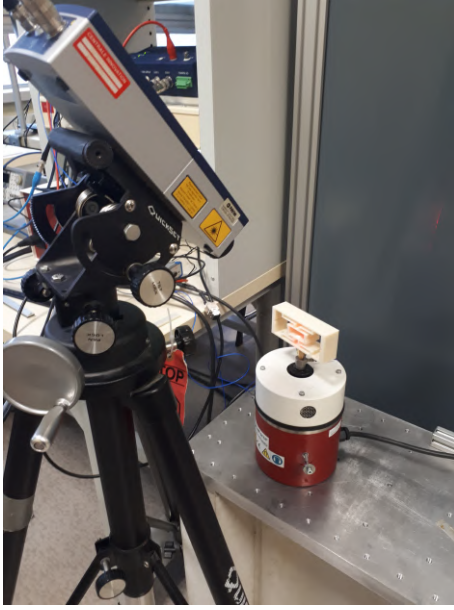


FIGURE 23 – Vélocimètre laser de surface pointant sur le résonateur

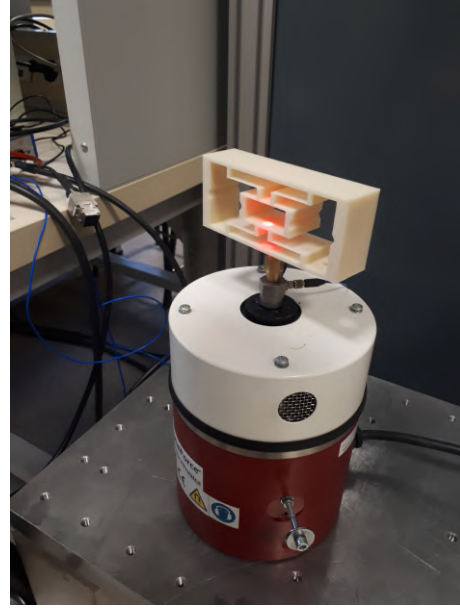


FIGURE 24 – Résonateur installé sur le pot vibrant

On rappelle que la fréquence de résonance de l'absorbeur HSLDS f_2 s'exprime en fonction de la fréquence $f_1 = f_r$ par l'équation :

$$f_2 = q_{opt} f_1 \quad \text{avec} \quad q_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \left(1 - 1,5906 \xi_1 \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}} \right) \quad (29)$$

A l'aide des paramètres ξ_1 et μ choisis, on obtient $q_{opt} = 0.9491$ et donc une fréquence de résonance $f_2 = 33 \text{ Hz}$. En recueillant les données issues du laser, on s'attend donc à observer un pic de résonance à cette fréquence. Afin d'observer l'effet de la raideur négative, on étudie successivement la réponse fréquentielle du système HSLDS (Figure 25) et du système linéaire associé sans la raideur négative (Figure 26).

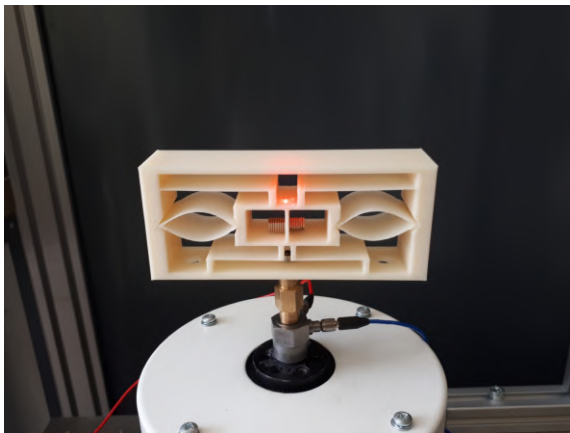


FIGURE 25 – Absorbeur HSLDS

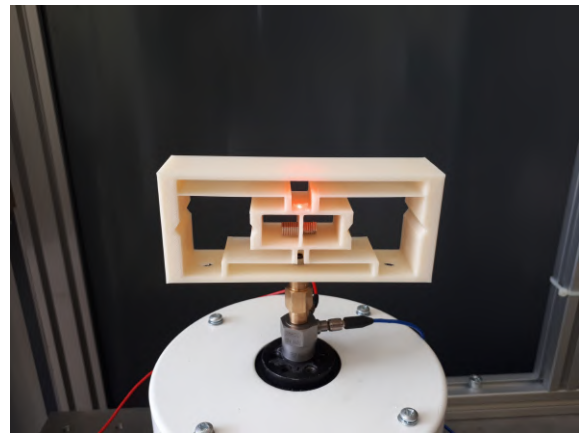


FIGURE 26 – Absorbeur linéaire

La Figure 27 fait apparaître une fréquence de résonance de 32,88 Hz soit une erreur relative de 0.6% par rapport à la valeur théorique f_2 . La FRF fait également ressortir le rôle de la raideur négative, associée aux poutres courbées, qui abaisse la raideur globale du système ce qui décale le pic de résonance vers les basses fréquences par rapport au cas linéaire.

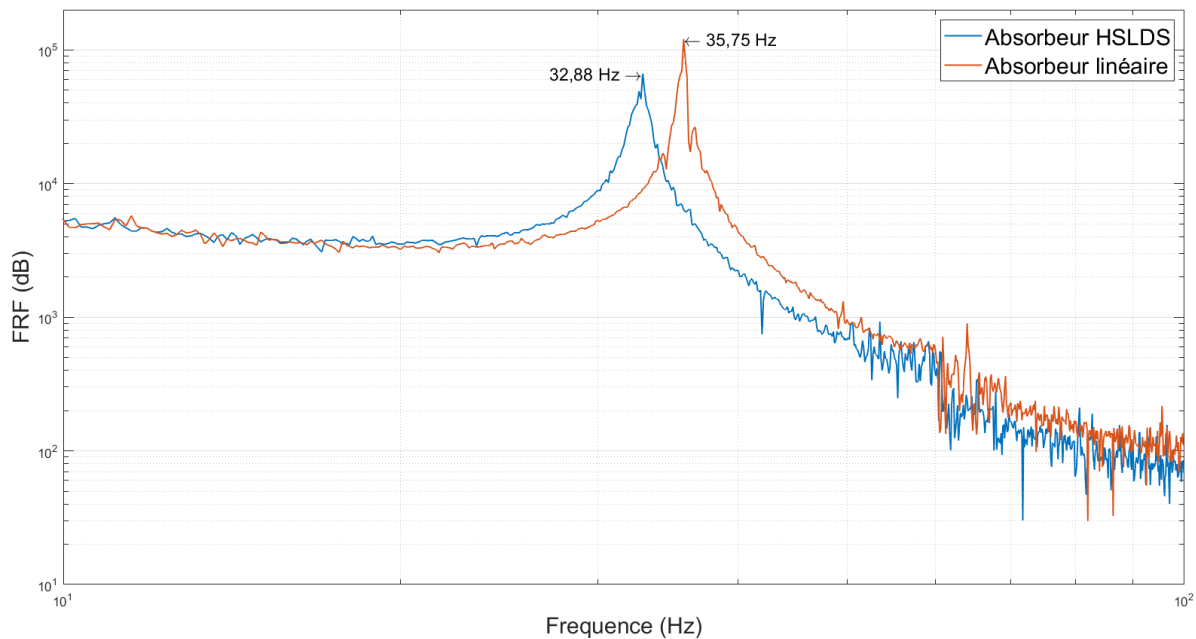


FIGURE 27 – FRF de la poutre sans et avec résonateur HSLDS

Notons que pour l'absorbeur linéaire, la raideur du TMD (issu uniquement des poutres droites) était $k_2 = 1202 N.m^{-1}$. On s'attendait alors à observer un pic de résonance à 37.0 Hz. Ce dernier est assez proche du pic présent sur la FRF à 35.75 Hz ce qui conforte le dimensionnement de la partie linéaire du résonateur.

Maintenant que le bon comportement fréquentiel du résonateur est confirmé, il ne reste plus qu'à installer ce dernier sur la poutre en aluminium et vérifier si ce TMD est correctement accordé pour atténuer sa première fréquence propre $f_1 = f_r$.

4.2 Expérience d'isolation fréquentielle

Le dimensionnement du TMD a été effectué pour être installé sur une poutre encastree-libre de section rectangulaire en aluminium de dimensions $L \times l \times h$: 595 x 30 x 15 mm. Pour simuler la liaison encastrement, une poutre de 64.5 cm de longueur a été sélectionnée puis fixée dans une étau sur une distance de 5 cm, comme illustré sur la Figure 28. Un accéléromètre a été positionné en bout de poutre de manière à maximiser l'amplitude du signal reçu.

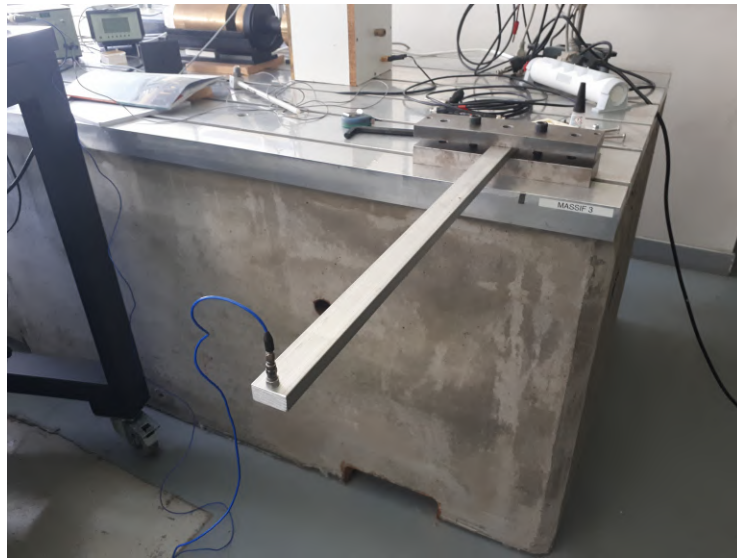


FIGURE 28 – Poutre encastrée-libre en aluminium, support de l'expérience d'isolation fréquentielle

Pour maximiser l'atténuation issue du TMD, ce dernier doit être préférentiellement placé sur un ventre de vibration de la poutre. La fréquence $f_1 = f_r$ à atténuer correspondant au premier mode de résonance de la poutre : la déformée modale associée suggère de placer le TMD en bout de poutre (Figure 29) .

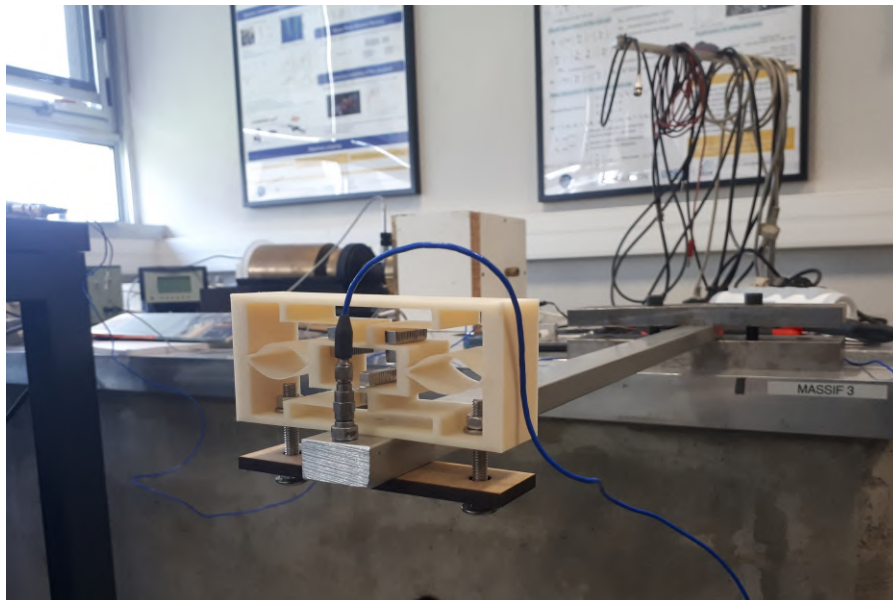


FIGURE 29 – Résonateur HSLDS installé comme un TMD sur la poutre encastrée-libre

La réponse fréquentielle tracée sur la Figure 30 permet de confirmer le bon dimensionnement du résonateur. La FRF de la poutre seule met en évidence la fréquence de résonance ciblée $f_r = 35,16$ Hz, assez proche de la valeur prédite par la théorie à 34,8 Hz. L'ajout du TMD a permis d'atténuer significativement ce pic de résonance de près de 100 dB. En contrepartie, il y a apparition de deux nouvelles pulsations de résonance de part et d'autre de f_r à 27,4 Hz et 43,46 Hz conformément au mécanisme d'isolation par un TMD.

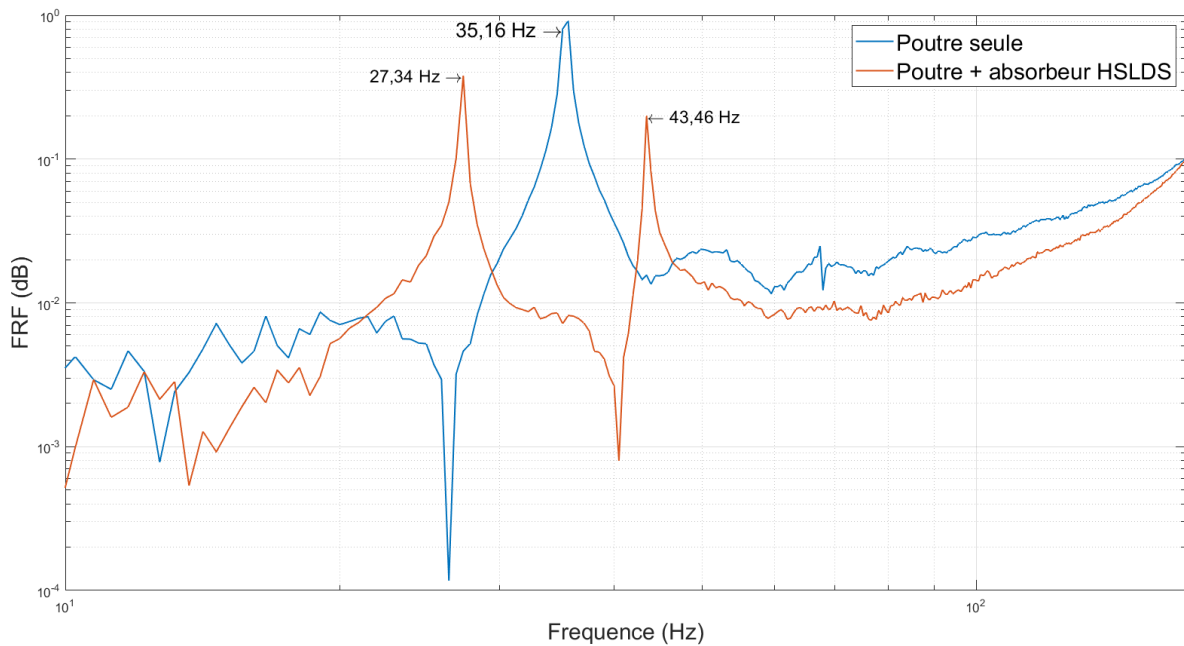


FIGURE 30 – FRF de la poutre seule et amortie par le résonateur HSLDS

5 Conclusion

Ce projet d'Application de Recherche offre l'opportunité aux étudiants d'un premier contact avec le monde de la recherche. Contrairement à un projet industriel, il semble que la recherche offre un cadre de travail plus ouvert à l'originalité et à la créativité : notre curiosité seule détermine les limites de notre travail.

L'absorbeur à raideur négative constitue un dispositif ingénieux et novateur pour l'isolation fréquentielle. Ce projet s'est intéressé en particulier à une version revisitée de la *Tuned Mass Damper* en lui associant des éléments générant de la raideur négative. Celle-ci permet d'élargir la zone fréquentielle d'action du TMD vers les basses fréquences. Le but du projet a donc été d'établir le dimensionnement d'un tel absorbeur pour une fréquence de résonance donnée.

A l'issue du projet, l'atténuation d'un mode de résonance à 34,8 Hz d'une poutre encastree-libre a pu être mise en oeuvre et observée expérimentalement. La raideur négative présente sur le TMD a abaissé la raideur du résonateur de 20%. Il serait intéressant de poursuivre l'expérimentation avec une part plus importante de raideur négative afin d'atteindre des fréquences encore plus faibles.

Références

- [1] Platus David L., *Negative-stiffness-mechanism vibration isolation systems* 1er Fervier 1992
- [2] Carrella A., Brennan M.J. et Waters T.P. *Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic*, Journal of Sound and Vibration, Avril 2007
- [3] Zhou N. et Liu K., *A tunable high-static-low-dynamic stiffness vibration isolator*, Journal of Sound and Vibration, Avril 2010
- [4] Pu H., Yuan S., Peng Y., Meng K., Zhao J., Xie R., Huang Y., Sun Y., Yang Y., Xie S., Luo J. et Chen X., *Multi-layer electromagnetic spring with tunable negative stiffness for semi-active vibration isolation*, Mechanical Systems and Signal Processing, Avril 2019
- [5] Liu Xingtian, Huang, Xiuchang et Hua Hongxing, *On the characteristics of a quasi-zero stiffness isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector*, Journal of Sound and Vibration, Juillet 2013
- [6] Huang Xiuchang, Liu Xingtian, Sun Jingya, Zhang Zhiyi et Hua Hongxing, *Vibration isolation characteristics of a nonlinear isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector : A theoretical and experimental study*, Journal of Sound and Vibration, Février 2014
- [7] Zhou J., Wang K., Xu D. et Ouyang H., *Local resonator with high-static-low-dynamic stiffness for lowering band gaps of flexural wave in beams*, Journal of Applied Physics, 2017
- [8] A. Preumont, *Twelve Lectures on Structural Dynamics*, Dordrecht : Springer Science+Business Media, 2013
- [9] Abubakar I. M. et Farid B. J. M., *Generalized Den Hartog tuned mass damper system for control of vibrations in structures*, Journal of Sound and Vibration, Cyprus, Avril 2009
- [10] Carrella A. et Brennan M. J., *FORCE TRANSMISSIBILITY OF A NONLINEAR VIBRATION ISOLATOR WITH HIGH-STATIC-LOW-DYNAMIC-STIFFNESS*, Avril 2008
- [11] Boiangiu Mihail, Ceausu Valentin et Untaroiu Costin D., *A transfer matrix method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with variable cross section*, Journal of Vibration and Control, Mai 2016

- [12] Nanda Aditya et Karami M.A., *Tunable bandgaps in a deployable metamaterial*, Journal of Vibration and Control, Mai 2018

- [13] Wu Qichen, Droz Christophe, Fossat Pascal, Ichchou Mohamed et Xie Shilin, *Broad low-frequency bandgap of metamaterial beam with nonlinear high-static-low-dynamic stiffness resonators*, Avril 2021

6 Annexes

6.1 Expression de la force de réaction du système à raideur négative

On rappelle l'expression de la charge en fonction du déplacement pour une poutre en flambement.

$$P = P_e \left[1 - \frac{\pi w}{L} \left[\left(\frac{\pi w}{L} \right)^2 + \frac{4y}{L} \right]^{\frac{-1}{2}} \right] \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi w}{L} \right)^2 + \frac{y}{2L} \right] \quad (30)$$

On pose les paramètres d'adimensionnement suivants : $\tilde{u} = \frac{u}{L}$, $\tilde{w} = \frac{w}{L}$, $\gamma = \cos(\theta)$ et $\tilde{\epsilon} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \gamma^2}$.

$$\begin{aligned} y &= L - \sqrt{u^2 + l^2} \\ \frac{y}{L} &= 1 - \sqrt{\frac{u^2}{L^2} + \frac{l^2}{L^2}} \\ &= 1 - \sqrt{\tilde{u}^2 + \cos^2(\theta)} \\ &= 1 - \tilde{\epsilon} \end{aligned}$$

La force réactive F du système décrit à la Figure 5 peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} F &= -4.P.\sin(\theta) \\ &= -P_e \left[1 - \pi \tilde{w} \left[(\pi \tilde{w})^2 + 4(1 - \tilde{\epsilon}) \right]^{\frac{-1}{2}} \right] \frac{8 + (\pi \tilde{w})^2 + 4(1 - \tilde{\epsilon})}{2} \sin(\theta) \\ \tilde{F} &= \left[1 - \pi \tilde{w} \left[(\pi \tilde{w})^2 + 4(1 - \tilde{\epsilon}) \right]^{\frac{-1}{2}} \right] \left(2\tilde{\epsilon} - \frac{12 + (\pi \tilde{w})^2}{2} \right) \frac{u}{\sqrt{u^2 + l^2}} \text{ avec } \tilde{F} = \frac{F}{P_e} \\ \tilde{F} &= \left[1 - \pi \tilde{w} \left[(\pi \tilde{w})^2 + 4(1 - \tilde{\epsilon}) \right]^{\frac{-1}{2}} \right] \left(2\tilde{\epsilon} - \frac{12 + (\pi \tilde{w})^2}{2} \right) \frac{\tilde{u}}{\tilde{\epsilon}} \end{aligned}$$

A l'aide des développements en séries de Taylor, on montre enfin que :

$$\boxed{\tilde{F} = -k_1 \tilde{u} + k_3 \tilde{u}^3} \quad (31)$$

Les expressions de k_1 et k_3 sont données ci-après :

$$k_1 = \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{b}{a\gamma} \right) \left(\frac{b^2}{2} - 2\gamma + 6 \right) \quad (32)$$

$$k_3 = \left(\frac{a-b}{2a\gamma^3} + \frac{b}{a^3\gamma^2} \right) \left(\frac{b^2}{2} - 2\gamma + 6 \right) + \frac{a-b}{a\gamma^2} \quad (33)$$

avec $a = \sqrt{(\pi \tilde{w})^2 - 4\gamma + 4}$ et $b = \pi \tilde{w}$

On remarque que k_1 est positif ce qui confirme la présence d'une raideur négative dans l'équation 31.

De plus, en définissant $\alpha = \frac{K_3}{K_1} u_0^2$ comme le coefficient de non linéarité il vient :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{K_3}{K_1} u_0^2 \\ &= \frac{k k'_3}{k k'_1} u_0^2 \\ &= \frac{k_3 \lambda}{1 - k_1 \lambda} u_0^2\end{aligned}$$

α est donc du signe de $k'_1 = 1 - k_1 \lambda$. Pour le cadre d'application et les paramètres considérés, la valeur de α sera positive. Le système aura donc un comportement de type *hardening*.

6.2 Expression de la force de réaction de l'absorbeur HSLDS

On rappelle ici le schéma de l'absorbeur HSLDS (Figure 31).

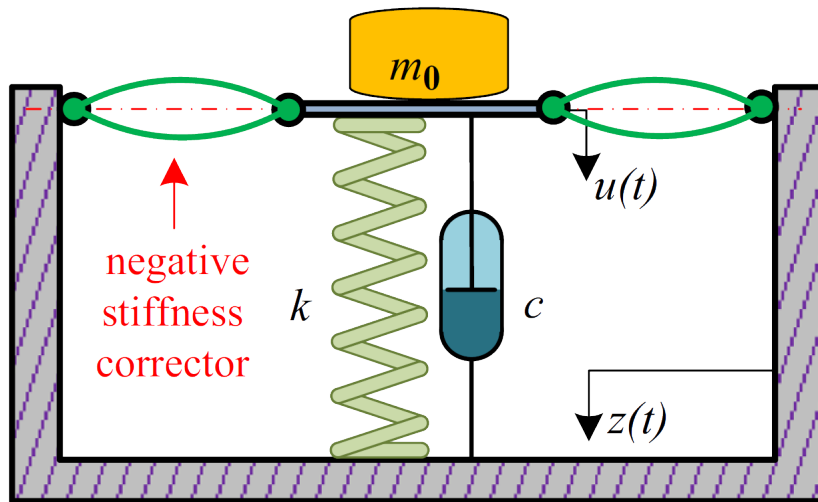


FIGURE 31 – Schéma de l'isolateur HSLDS

La force f_{HSLDS} s'écrit comme la somme des contributions issues des raideurs négatives (NS) et positives (PS) du résonateur.

$$\begin{aligned}f_{HSLDS} &= f_{NS} + f_{PS} \\ &= P_e(-k_1 \tilde{u} + k_3 \tilde{u}^3) + k u \\ \frac{f_{HSLDS}}{kL} &= \frac{P_e}{kL}(-k_1 \tilde{u} + k_3 \tilde{u}^3) + \tilde{u} \\ \tilde{F}_{HSLDS} &= (1 - k_1 \lambda) \tilde{u} + \lambda k_3 \tilde{u}^3 \quad \text{avec} \quad \tilde{F}_{HSLDS} = \frac{f_{HSLDS}}{kL} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{P_e}{kL}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{F}_{HSLDS} = k'_1 \tilde{u} + k'_3 \tilde{u}^3 \\ \tilde{k}_{HSLDS} = k'_1 + 3k'_3 \tilde{u}^2 \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k'_1 = 1 - k_1 \lambda \\ k'_3 = k_3 \lambda \end{cases} \quad (34)$$

6.3 Résolution de l'équation de Duffing

L'équation de Duffing adimensionnée s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x + \alpha x^3 = \cos(\Omega\tau) \quad (35)$$

Supposons une solution de la forme $x = X \cos(\Omega\tau + \varphi) = a \cos(\Omega\tau) + b \sin(\Omega\tau)$ avec $X = a^2 + b^2$. En injectant cette solution dans l'équation 35 on a :

$$\begin{aligned} & (-\Omega^2 a + 2\Omega\xi b + a + \frac{3}{4}\alpha a^3 + \frac{3}{4}\alpha a b^2 - 1) \cos(\Omega\tau) \\ & + (-\Omega^2 b - 2\Omega\xi a + \frac{3}{4}\alpha b^3 + b + \frac{3}{4}\alpha a^2 b) \sin(\Omega\tau) \\ & + (\frac{1}{4}\alpha a^3 - \frac{3}{4}\alpha a b^2) \cos(3\Omega\tau) + (\frac{3}{4}\alpha a^2 b - \frac{1}{4}\alpha b^3) \sin(3\Omega\tau) = 0. \end{aligned}$$

En négligeant les termes à haute fréquence en $3\Omega\tau$, les deux termes précédant les termes en cosinus et sinus doivent être nuls. Par conséquent :

$$-\Omega^2 a + 2\Omega\xi b + a + \frac{3}{4}\alpha a^3 + \frac{3}{4}\alpha a b^2 = 1 \quad (36)$$

$$-\Omega^2 b - 2\Omega\xi a + \frac{3}{4}\alpha b^3 + b + \frac{3}{4}\alpha a^2 b = 0. \quad (37)$$

En élevant les deux égalités 36 et 37 au carré et en les sommant, on obtient :

$$\left[\left(\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha X^2 \right)^2 + (2\xi\Omega)^2 \right] X^2 = 1 \quad (38)$$

En posant $\Omega_k = \Omega^2$, la résolution de l'équation du second ordre donne le couple solution :

$$\Omega_k = \left(1 + \frac{3}{4}\alpha X^2 + 2\xi^2 \right) \pm \frac{1}{X} \sqrt{1 - 4\xi^2 X^2 (1 - \xi^2 + \frac{3}{4}\alpha X^2)} \quad (39)$$

6.4 Transmissibilité vibratoire

On établit dans cette section l'expression de la transmissibilité vibratoire de l'isolateur HSLDS et de l'isolateur linéaire.

Transmissibilité isolateur HSLDS

Considérons une force d'excitation $f_e = F_e \cos(\omega t)$. La force transmise peut alors s'écrire $f_t = F_t \cos(\omega t + \varphi_t)$ (Figure 32).

La transmissibilité revient donc à calculer :

$$|T_a| = \frac{F_t}{F_e} = \frac{F_t/k_1 x_0}{F_e/k_1 x_0} = \frac{\tilde{F}_t}{\tilde{F}_e} = \tilde{F}_t \quad \text{car} \quad F_e = k_1 x_0 \quad (40)$$

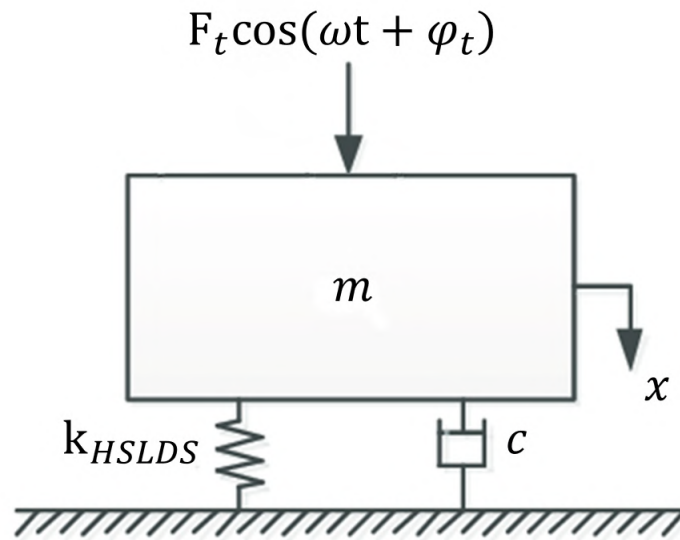


FIGURE 32 – Modèle du résonateur HSLDS

D'après le Principe Fondamental de la Statique on a :

$$\begin{aligned} f_t - f_{HSLDS} - c\dot{x} &= 0 \\ c\dot{x} + K_1 x + K_3 x^3 &= f_t \\ 2\xi\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} + \alpha\tilde{x}^3 &= \tilde{f}_t \quad \text{en divisant par } k_1 x_0 \end{aligned}$$

On choisit une solution de la forme $\tilde{x} = \tilde{X} \cos(\Omega t + \varphi)$.

D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t &= -2\xi\Omega\tilde{X}\sin(\Omega t + \varphi) + \left(\tilde{X} + \frac{3\alpha}{4}\tilde{X}^3\right)\cos(\Omega t + \varphi) \\ \tilde{f}_t &= A\sin(\Omega t + \varphi) + B\cos(\Omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Or on a l'égalité :

$$\tilde{F}_t = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (41)$$

Finalement :

$$|T_a| = \tilde{F}_t = \tilde{X} \sqrt{(2\xi\Omega)^2 + (1 + \frac{3\alpha}{4}\tilde{X}^2)^2} \quad (42)$$

Transmissibilité isolateur linéaire

On considère le modèle de la Figure 33, avec un déplacement imposé harmonique $x_e = X_e \cos(\omega t)$.

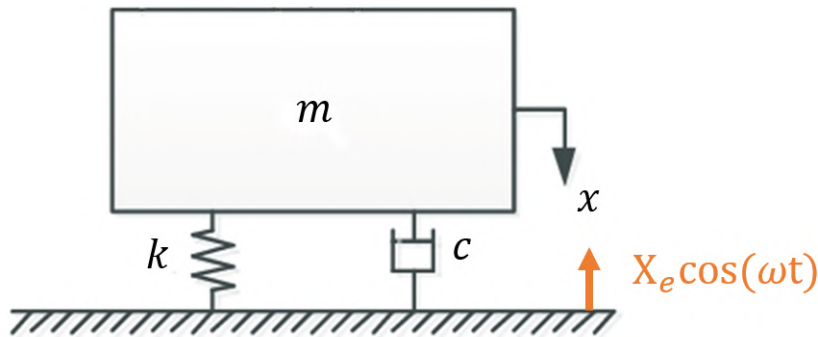


FIGURE 33 – Modèle du résonateur linéaire

On écrit ensuite le Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= kx_e + c\dot{x}_e - c\dot{x} - kx \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= kx_e + c\dot{x}_e \\ \ddot{x} + 2\xi\omega_{lin}\dot{x} + \omega_{lin}^2 x &= \omega_{lin}^2 x_e + 2\xi\omega_{lin}\dot{x}_e \quad \text{avec} \quad \omega_{lin} = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ -\omega^2 X + i\omega 2\xi\omega_{lin}X + \omega_{lin}^2 X &= X_e(\omega_{lin}^2 + i\omega 2\xi\omega_{lin}) \quad \text{en formalisme complexe} \end{aligned}$$

Finalement :

$$|T_{lin}| = \left| \frac{X}{X_e} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\Omega_{lin})^2}{(1 - \Omega_{lin}^2)^2 + (2\xi\Omega_{lin})^2}} \quad (43)$$

6.5 Calcul de l'épaisseur des poutres droites

Après avoir fixé les valeurs de 8 des 9 paramètres du résonateur, on décrit la méthode utilisée pour déterminer le dernier paramètre qui correspond à l'épaisseur des poutres droites h_{PS} (Figure 34).

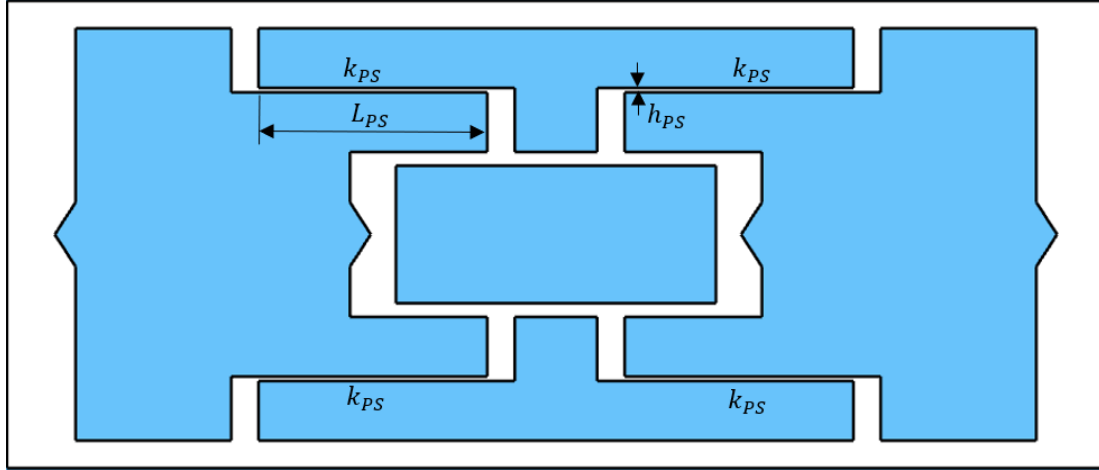


FIGURE 34 – Schéma du résonateur linéaire

Pour un comportement en flexion, chaque poutre droite est équivalente à un ressort de raideur $k_{PS} = \frac{3EI}{L_{PS}^3}$ avec E le module de Young du matériau (ABS) et I le moment quadratique.

La disposition des poutres permet d'affirmer que les ressorts équivalents sont en parallèle. La raideur positive globale est donc $k = 4k_{PS}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} k &= 4k_{PS} \\ &= 4 \times \frac{3EI}{L_{PS}^3} \\ &= 4 \times \frac{3Eb_{PS}h_{PS}^3}{12L_{PS}^3} \\ &= \frac{Eb_{PS}h_{PS}^3}{L_{PS}^3} \end{aligned}$$

Donc :

$$h_{PS} = \sqrt[3]{\frac{kL_{PS}^3}{Eb_{PS}}} \quad (44)$$

Il ne reste maintenant plus qu'à déterminer la raideur positive k . La notation propre au TMD veut que l'on note k_2 la raideur globale de ce résonateur. Dans le cas d'un TMD de type HSLDS, celle-ci est identique à la raideur équivalente $k_{HSLDS} = K_1 + 3K_3u^2$.

En négligeant le terme non linéaire pour de faibles déplacements, on peut affirmer que $k_2 = K_1 = 940 \text{ N.m}^{-1}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} K_1 &= k k'_1 \\ &= k(1 - k_1 \lambda) \\ &= k - k_1 \frac{P_e}{L_{NS}} \quad \text{avec } k_1 \text{ défini à l'équation 32} \end{aligned}$$

Finalement :

$$k = K_1 + k_1 \frac{P_e}{L_{NS}} \quad (45)$$

Une fois calculée la raideur globale positive k , il est possible de déterminer l'épaisseur h_{PS} et de compléter ainsi le dimensionnement du résonateur HSLDS.

6.6 Élargissement de l'étude à un autre mode de résonance

L'étude a été menée sur la première fréquence de résonance. Toutefois, il est possible d'étendre son champ d'application aux modes suivants. Il suffit pour cela de renseigner la nouvelle fréquence f_r ciblée. Puis toujours à l'aide de la méthode de Den Hartog et du couple $(\xi_{2,opt}, q_{opt})$ on détermine les caractéristiques du TMD notamment la raideur k_2 . Enfin grâce aux calculs menés dans la section précédente (Annexe 6.5) on peut aboutir très simplement à un nouveau dimensionnement. Si ce dernier apparaît trop contraignant il sera toujours possible de jouer sur les 8 autres paramètres à disposition : la flexibilité de cette méthode est la force principale des résonateurs HSLDS.

La Figure 35 illustre, par exemple, l'isolation du second mode de vibration de la poutre en aluminium.

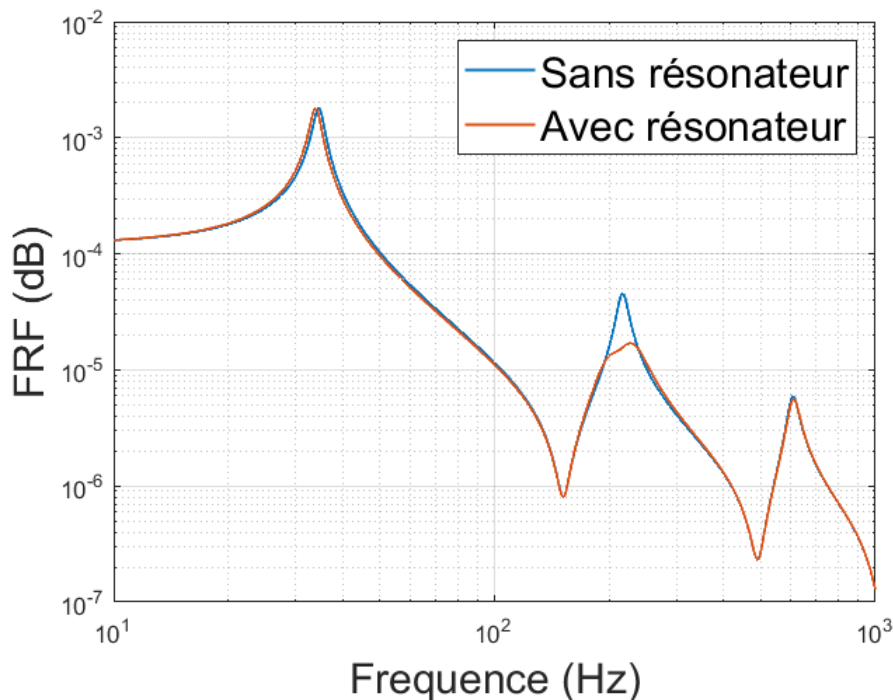


FIGURE 35 – FRF de la poutre sans et avec résonateur HSLDS pour le second mode