

# Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

## 1 Mecânica Celeste

- [5] **Problema 1.** Iaum e Sevla, dois físicos renomados, pretendem lançar uma sonda espacial para explorar os limites da física newtoniana e as correções relativísticas necessárias nas proximidades de um buraco negro. Eles precisam da sua ajuda para estudar o *Potencial Efetivo* de tal corpo.

- a) A energia de um corpo de massa  $m$  orbitando um corpo massivo de massa  $M$  pode ser escrita como:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r)$$

Onde  $\dot{r}$  é a velocidade radial do corpo. Encontre  $V_{eff}(r)$  em função de  $G$ ,  $M$ ,  $L$ ,  $m$  e  $r$ .

- b) Segundo a física newtoniana, qual é o menor raio no qual é possível um corpo possuir uma órbita circular em torno de um buraco negro?
- c) Qual é a frequência de pequenas oscilações radiais,  $\omega_r$ , em torno desse raio?

O potencial gravitacional próximo a esses corpos precisa sofrer uma correção relativística e tem a forma:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}$$

- d) Explique por que essa correção permite que uma partícula caia no centro de um buraco negro,  $r = 0$ , e por que isso é impossível na física newtoniana.
- e) Qual é o menor valor de  $L$  para que uma partícula possa orbitar o buraco negro em uma órbita circular? Qual é o valor do raio nessa condição?
- f) Assumindo  $\lim_{L \rightarrow \infty}$ , encontre a menor distância que uma partícula em órbita aberta pode se aproximar de um buraco negro.

### Solução

- a) Da forma clássica, temos:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Note que podemos escrever  $v^2 = v_\theta^2 + v_r^2$ , onde  $v_\theta$  e  $v_r$  são, respectivamente, as velocidades tangenciais e radiais do corpo. Como  $v_r = \dot{r}$ , precisamos encontrar uma expressão que relate  $v_\theta$  com outra grandeza. A melhor maneira de fazer essa relação é utilizando o momento angular, pois:

$$L = mr v_\theta \rightarrow v_\theta = \frac{L}{mr}$$

Substituindo na expressão da energia, temos:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Como queremos uma resposta na forma  $E = m\dot{r}^2/2 + V_{eff}(r)$ , por analogia, temos:

$$V_{eff}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

b) A maior velocidade limite de um corpo é  $c$ , desconsiderando efeitos relativísticos:

$$\frac{mc^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

Isolando  $R$ :

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

c) Para pequenas oscilações, temos a aproximação:

$$\omega_r \approx \sqrt{\frac{V''_{eff}(R)}{m}}$$

Calculando:

$$V'_{eff}(R) = \frac{GMm}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}$$

$$V''_{eff}(R) = -\frac{2GMm}{r^3} + \frac{3L^2}{mr^4}$$

Utilizando que  $L = mvr$  (órbitas circulares) e que  $v \equiv c$ , chegamos a:

$$V''_{eff}(R) = \frac{mc^6}{G^2 M^2}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$\omega_r = \frac{c^3}{GM}$$

- d) Quando tomamos o limite de  $\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff}(r)$ , na física newtoniana, o termo que domina é  $L^2/2mr^2$ , ou seja, seria necessária uma energia  $+\infty$  para chegar ao centro do buraco negro. No entanto, após a correção relativística, o termo que domina é  $-GML^2/mc^2r^3$ , ou seja, seria necessária uma energia de  $-\infty$  para chegar ao centro do buraco negro. Por isso, não é possível chegar ao centro de um buraco negro na física newtoniana.
- e) Em uma órbita circular,  $r$  é constante, o que implica que a força na direção radial é nula, ou seja:

$$V'_{eff}(r) = 0$$

Calculando:

$$V'_{eff}(r) = \frac{GMm}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{3GML^2}{mc^2r^4} = 0$$

Simplificando, temos:

$$r^2 - \frac{L^2}{GMm^2}r + \frac{3L^2}{m^2c^2} = 0$$

Note que a solução dessa equação precisa ser real, uma vez que  $r$  não pode ser imaginário, o que nos impõe a condição:

$$\frac{L^4}{G^2M^2m^4} - \frac{12L^2}{m^2c^2} \geq 0$$

Na condição de igualdade, o valor de  $L$  que satisfaz essa equação é:

$$L = \frac{\sqrt{12}GMm}{c}$$

O valor de  $r$  nesse caso é:

$$r = \frac{L^2}{2GMm^2} = \boxed{r_{min} = \frac{6GM}{c^2}}$$

f) A expressão completa para  $r$  é:

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2} \pm \sqrt{\left(\frac{L^2}{GMm^2}\right)^2 - \frac{12L^2}{m^2c^2}}}{2} = \frac{L^2 - \sqrt{L^4 - 12(GMmL/c)^2}}{2GMm^2}$$

No limite de  $L \rightarrow \infty$ , temos:

$$r_{min} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L^2 - \sqrt{L^4 - 12(GMmL/c)^2}}{2GMm^2} = \frac{6(GMm/c)^2}{2(GMm^2)} = \boxed{\frac{3GM}{c^2}}$$

[3] **Problema 2.** Um ponto importante no estudo de órbitas é o que acontece quando o potencial segue algo incomum. O objetivo desta questão é estudar esse fenômeno. Considere o momento angular  $L$  e a massa do corpo  $m$ .

- a) Para uma órbita geral, que possui um potencial  $V(r)$  na forma  $\psi r^k$ , encontre o valor  $r_0$  de uma órbita circular para esse potencial.
- b) Encontre a frequência de pequenas oscilações,  $\omega_r$ , em torno desse raio.
- c) Seja  $\omega_\theta$  a frequência angular da órbita, encontre o valor da razão  $\frac{\omega_r}{\omega_\theta}$ . Uma órbita só pode ser fechada se essa razão for um número inteiro. Por quê? Encontre valores de  $k$  para que a órbita seja fechada.

### Solução

- a) Como em uma órbita circular  $V'_{eff}(r) = 0$ , temos:

$$V'_{eff}(r) = -\frac{L^2}{mr^3} + k\psi r^{k-1} = 0$$

$$k\psi r^{k-1} = \frac{L^2}{mr^3} \rightarrow r_0 = \left( \frac{L^2}{k\psi m} \right)^{\frac{1}{k+2}}$$

b) Utilizando que  $\omega_r^2 = V''_{eff}(r_0)/m$ :

$$\begin{aligned} V''_{eff}(r) &= \frac{3L^2}{mr^4} + k(k-1)\psi r^{k-2} \\ V''_{eff}(r) &= r^{-4} \left( \frac{3L^2}{m} + k(k-1)\psi r^{k+2} \right) \\ V''_{eff}(r) &= r^{-4} \left( \frac{3L^2}{m} + k(k-1)\psi \frac{L^2}{k\psi m} \right) \\ V''_{eff}(r) &= \frac{L^2}{r_0^4 m} (k+2) \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\omega_r = \frac{L}{r_0^2 m} \sqrt{k+2}$$

c) Pela definição de  $L$ , temos:

$$L = mr_0^2 \omega_\theta \rightarrow \omega_\theta = \frac{L}{mr_0^2}$$

Portanto:

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{k+2}$$

Note que, para a órbita ser uma figura fechada, essa razão deve ser um número inteiro, logo,  $k+2$  deve ser um quadrado perfeito. Qualquer valor  $k = n^2 - 2 \forall n \in \mathbb{N}$  satisfaz essa equação.

- [4] **Problema 3.** O Hodógrafo é uma das maneiras menos conhecidas de resolver questões de mecânica celeste. Ao usar esse mecanismo, é possível resolver questões complexas (envolvendo encontrar parâmetros orbitais, parâmetros de velocidade e como minimizar a excentricidade de uma órbita, por exemplo). Apesar de o Hodógrafo possuir diversas utilidades, o objetivo deste exercício é provar o Teorema do Hodógrafo, que diz que, em órbitas fechadas, a velocidade forma um círculo no espaço vetorial. Vamos provar esse teorema de duas maneiras.

### Método 1)

- I. Partindo da Segunda Lei de Newton e da conservação do momento angular, encontre uma expressão para  $d\mathbf{v}/d\theta$ . Deixe sua resposta em função do momento angular por unidade de massa,  $h$ , e  $\mu = GM$ .
- II. Onde o centro desse círculo está localizado? Considerando o corpo central na origem do sistema, determine uma expressão para a distância entre o corpo central e o centro do Hodógrafo.

**Método 2)**

O método 2 utiliza noções de cálculo mais avançadas e parte da conservação do *vetor de Laplace-Runge-Lenz*,  $\mathbf{A}$ .

- I.** O vetor  $\mathbf{A}$  é dado pela expressão:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GMm^2\hat{\mathbf{r}}$$

O primeiro passo para a demonstração é provar que  $\mathbf{A}$  é constante. Para isso, derive o mesmo em relação ao tempo e tire suas próprias conclusões.

- II.** Como o vetor  $\mathbf{L}$  é constante,  $\mathbf{A} \times \mathbf{L}$  também é uma constante. Utilizando a identidade vetorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ , prove que  $\mathbf{v}$  forma um círculo no espaço vetorial.

**Solução****Método 1)**

- I.** A Segunda Lei de Newton nos diz que:

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Pela definição de momento angular:

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \therefore dt = \frac{mr^2}{L}d\theta$$

Substituindo  $dt$  na fórmula da Segunda Lei de Newton:

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)\frac{d\mathbf{v}}{d\theta}$$

Isolando  $d\mathbf{v}/d\theta$ , temos:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = -\frac{GMm}{L}\hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{\mu}{h}\hat{\mathbf{r}}}$$

Note que essa expressão é um círculo no espaço vetorial e possui raio  $R = \mu/h$ , uma vez que  $d\mathbf{v}/d\theta$  é constante e aponta na direção radial.

- II.** Como vimos no item anterior, o hodógrafo forma um círculo de raio  $R = \mu/h$ . Tome como apoio a seguinte imagem:

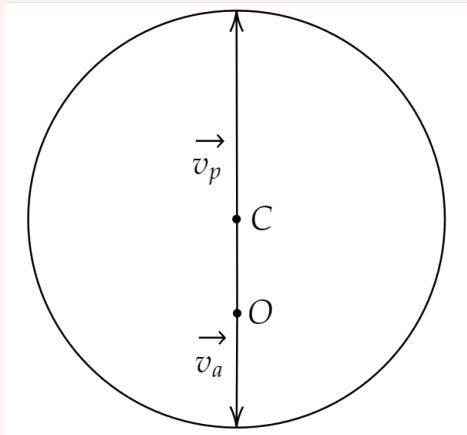


Figura 1: Esquema do Hodógrafo

O ponto  $O$  representa a origem do sistema (local do corpo central). Note que a menor distância entre  $O$  e o Hodógrafo deve corresponder à menor velocidade (apoastro) e a maior distância deve corresponder à maior velocidade (periastro). Note também que  $v_a + \overline{OC} = v_p - \overline{OC}$ . Equacionando, temos:

$$v_a + v_p = 2R \equiv \frac{2\mu}{h}$$

$$v_p - v_a = 2\overline{OC}$$

Podemos escrever  $v_p$  e  $v_a$  em função do momento angular:

$$L = ma(1-e)v_p \rightarrow v_p = \frac{h}{a(1-e)}$$

$$L = ma(1+e)v_a \rightarrow v_a = \frac{h}{a(1+e)}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{h}{a} \left( \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) = \frac{2\mu}{h}$$

Aqui, podemos isolar  $a$ :

$$\frac{h}{a} \left( \frac{2}{(1-e)^2} \right) = \frac{2\mu}{h}$$

$$a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{(1-e)^2}$$

Com isso em mente, podemos ir para a segunda expressão:

$$\frac{h}{a} \left( \frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} \right) = 2\overline{OC}$$

$$h \left( \frac{\mu(1-e)^2}{h^2} \right) \left( \frac{2e}{(1-e)^2} \right) = 2\overline{OC}$$

Finalmente, resolvendo para  $\overline{OC}$ , temos:

$$\boxed{\overline{OC} = \frac{\mu}{h} e}$$

Para uma elipse ( $e < 1$ ), a origem fica dentro da circunferência; para uma parábola ( $e = 1$ ), a origem fica no limite da circunferência; e para uma hipérbole ( $e > 1$ ), a origem fica fora da circunferência.

## Método 2

**I.** Derivando  $\mathbf{A}$  em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - GMm^2 \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}}$$

Quando derivamos um *versor* em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \omega \times \hat{\mathbf{r}}$$

Onde  $\omega$  é a velocidade com que o versor translada. Assim:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right) - GMm^2(\omega \times \hat{\mathbf{r}})$$

Agora, temos algumas considerações. Primeiramente, note que  $d\mathbf{L}/dt = 0$ , uma vez que só há forças centrais na órbita. Em segundo lugar,  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ . Além disso, temos que  $\mathbf{L} = mr^2\omega$ . Voltando para a equação:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times (mr^2\omega) - GMm^2(\omega \times \hat{\mathbf{r}}) \\ \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= -GMm^2(\hat{\mathbf{r}} \times \omega) - GMm^2(\omega \times \hat{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Para quaisquer dois vetores,  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , vale que:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Utilizando tal propriedade, podemos concluir que:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0}$$

Logo,  $\mathbf{A}$  é constante!

**II.** Escrevendo a expressão e utilizando o *BAC-CAB*, temos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{L} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L} - GMm^2\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}$$

$$(\mathbf{A} + GMm^2\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{L} = -\mathbf{L} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{p}(-\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) - \mathbf{L}(-\mathbf{L} \cdot \mathbf{p})$$

Como  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{p}$  são sempre perpendiculares,  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{p} = 0$ , assim:

$$(\mathbf{A} + GMm^2\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{L} = -mL^2\mathbf{v}$$

Como tanto  $\mathbf{A}$  quanto  $\hat{\mathbf{r}}$  são perpendiculares a  $\mathbf{L}$  e constantes,  $\mathbf{A} + GMm^2\hat{\mathbf{r}}$  traçam um círculo. O produto vetorial com  $\mathbf{L}$  apenas gira o círculo em  $90^\circ$  e multiplica seu raio por  $\mathbf{L}$ . Portanto,  $\mathbf{v}$  traça um círculo no espaço vetorial.

**[2] Problema 4.** Um dos fenômenos mais fascinantes do sistema solar são as estrelas de nêutrons. Esses são corpos muito pequenos, super densos e que giram muito rápido. Nesta questão, vamos fazer um modelo teórico para essas estrelas.

- O Pulsar da Vela, uma estrela de nêutrons localizada na constelação da Vela, possui uma frequência de 11Hz, ou seja, ela gira em torno de si mesma 11 vezes por segundo, raio equatorial  $R_e = 9,6$  km e massa  $M = 1,88M_\odot$ . Sabendo disso, calcule a razão entre seu raio equatorial e seu raio polar.
- Qual é o menor período de rotação que o Pulsar da Vela pode ter para que ele não se despedace?
- Atualmente, a taxa de variação do período do Pulsar da Vela é  $\frac{\Delta P}{\Delta t} = 1,25 \cdot 10^{-13}$ s/s. Isso faz com que o Pulsar libere uma quantidade absurda de energia. A temperatura superficial do Pulsar é de  $T \sim 10^6$  K. Calcule a ordem de grandeza da razão entre a potência emitida pelo aumento do período e a potência emitida pela Lei de Stefan-Boltzmann.

### Solução

- a) Uma estrela sempre está em equilíbrio hidrostático, logo, equacionando para um ponto no equador e para um dos polos,

$$-\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2 = -\frac{GM}{r_p}$$

Utilizando que  $\omega = 2\pi f$ ,

$$\frac{GM}{r_p} = \frac{GM}{r_e} + 2\pi^2 f^2 r_e^2$$

$$\frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{2\pi^2 f^2 r_e^3}{GM} \approx 1 + 8,4 \cdot 10^{-6}$$

Ou seja, uma estrela de nêutrons, mesmo girando absurdamente rápido, ainda é praticamente uma esfera perfeita!

- b) Na situação limite para se manter íntegro, temos:

$$\frac{GM}{r_e^2} = \omega^2 r_e$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{r_e^3} \rightarrow T_{min} = \frac{2\pi r_e^3}{GM} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

- c) A energia devido à rotação tem a forma:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Onde  $I$  é o momento de inércia da estrela ( $I = \frac{2}{5} Mr^2$ ). Portanto, a potência dissipada é:

$$P = \frac{dE}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

Como  $\omega = 2\pi/T$ ,

$$\frac{d\omega}{dT} = -\frac{2\pi}{T^2} \rightarrow d\omega = -\frac{2\pi}{T^2} dT$$

A expressão da potência em função do período se torna:

$$P = -\frac{8\pi^2 M r_e^2}{5T^3} \frac{dT}{dt} = -9,1 \cdot 10^{29} \text{ W}$$

Note que, por conservação de energia, toda essa potência deve ser convertida na forma de luminosidade, então  $L_{rot} = -P = 9,1 \cdot 10^{29} \text{ W}$ . A potência advinda da radiação térmica é dada por:

$$L_{rad} = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 6,56 \cdot 10^{25} \text{ W}$$

Com isso, podemos concluir que 99,99% da sua luminosidade advém da rotação.

- [3] Problema 5.** (Adaptado PPP) Geométrio, Paulinho e Hirata adoram chocolate. Certo dia, ambos estavam explorando uma galáxia quando se depararam com uma bola gigante de chocolate. Os três rapidamente começaram a comer a bola, primeiro fazendo uma linha reta do ponto  $P$  até o centro da bola em  $O$  (esquema 1). Após isso, Hirata cai, colidindo no ponto  $O$ , sem frear no caminho. Surpreendentemente, ele continua vivo e é resgatado por Geométrio e Paulinho. Após isso, famintos, eles continuam a comer a esfera gigante de chocolate e deixam um buraco esférico de diâmetro  $\overline{PO}$  (esquema 2). Hirata é muito desastrado e acaba caindo de novo, partindo do ponto  $P$  e indo até  $O$  novamente.

- a) Encontre a razão entre as velocidades de impacto de Hirata nos casos 1 e 2.  
b) Encontre a razão entre os tempos de queda de Hirata nos casos 1 e 2.

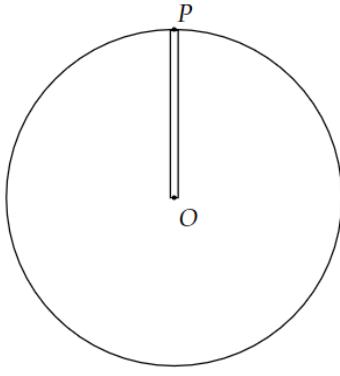


Figura 2: Esquema 1

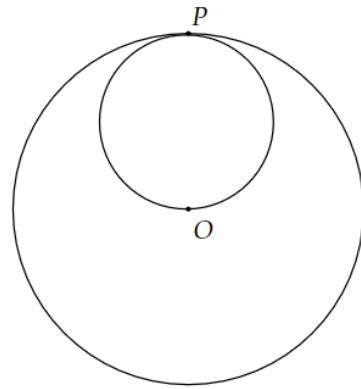


Figura 2: Esquema 2

### Solução

- a) A gravidade dentro de um planeta é dada por:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM_{int}$$

$$4\pi r^2 g = -4\pi G\rho \frac{4\pi}{3}r^3$$

Ou seja, para o caso 1,  $g \propto -\rho r \rightarrow g = -k\rho r$ . Utilizando a Segunda Lei de Newton:

$$F = mv \frac{dv}{dr} = -mkr$$

Integrando:

$$\int_0^{v_1} v' dv' = -k\rho \int_0^R r dr$$

$$\frac{v_1^2}{2} = k\rho \frac{R^2}{2} \rightarrow \boxed{v_1 = R\sqrt{k\rho}}$$

Seja  $\mathbf{j}$  o vetor que parte do centro do planeta até o centro da cavidade. Utilizando superposição:

$$a = -k\rho\mathbf{r} - k(-\rho)(\mathbf{r} - \mathbf{j}) = -k\rho\mathbf{j}$$

Ou seja, no caso 2, a aceleração é constante e tem módulo  $|a| = \frac{k\rho R}{2}$ .

Utilizando Torricelli:

$$v_2^2 = 2aRk\rho R^2 \rightarrow \boxed{v_2 = R\sqrt{k\rho}}$$

Logo,  $v_1/v_2 = 1$ .

- b) No primeiro caso, note que temos um M.H.S., uma vez que a força é proporcional a  $r$ . O tempo até atingir a parte inferior seria igual a  $1/4$  do período:

$$\ddot{r} = -k\rho r \rightarrow \omega^2 = k\rho \rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{k\rho}} \rightarrow t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{k\rho}}$$

No segundo caso, temos uma aceleração constante, logo:

$$t_2 = \frac{v_2}{a_2} = \frac{2R\sqrt{k\rho}}{k\rho R} = \frac{2}{\sqrt{k\rho}}$$

Logo, a razão  $t_1/t_2$  é dada por:

$$\boxed{\frac{t_1}{t_2} = \frac{\pi}{4}}$$

- [5] Problema 6.** Calcular as velocidades de escape em certas situações pode ser mais complicado do que parece. Um exemplo disso é calcular a velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para chegar a determinado local.

**Dica:** Os problemas a seguir exigem que você pense cuidadosamente no referencial mais adequado. Não subestime a questão.

**Dados:** Um corpo pode orbitar a superfície da Terra com velocidade  $v_0 = 7,9$  km/s, a velocidade orbital da Terra em torno do Sol é  $u_0 = 29,7$  km/s, e o raio da Terra é desprezível em relação à distância Terra-Sol. Considere também que, ao deixar o campo gravitacional da Terra, a distância entre a sonda e o Sol é a mesma distância entre a Terra e o Sol.

- Qual é a menor velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para atingir o Sol, considerando que ele dê apenas um impulso? (Para conferir,  $v = 31,8$  km/s)
- Qual é a menor velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para escapar do Sistema Solar? (Para conferir,  $v = 16,7$  km/s)
- Como a resposta do item a) muda se o foguete conseguir realizar um segundo impulso muito pequeno em algum ponto de sua órbita?

### Solução

- Para que isso aconteça, após deixar a Terra, no referencial do Sol, a sonda deve estar parada e, consequentemente, no referencial da Terra, ela deve estar com velocidade  $-u_0$ . Utilizando conservação de energia:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{mu_0^2}{2}$$

$$v^2 = u_0^2 + \frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}$$

Note que a velocidade  $v_0$  também pode ser obtida igualando a aceleração centrípeta com a gravitacional:

$$\frac{mv_0^2}{R_{\oplus}} = \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} \rightarrow v_0^2 = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}$$

Substituindo,

$$v^2 = u_0^2 + 2v_0^2 \rightarrow \boxed{v = 31,8 \text{ km/s}}$$

- b) Nesse caso, ao sair do campo gravitacional da Terra, no referencial do Sol, o corpo deve ter uma velocidade  $\sqrt{2}u_0$ , logo, no referencial da Terra, deve possuir  $(\sqrt{2} - 1)u_0$ . Novamente, por conservação de energia:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{m(\sqrt{2} - 1)^2 u_0^2}{2}$$

$$v^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 u_0^2 + 2v_0^2 \rightarrow v = 16,7 \text{ km/s}$$

- c) Imagine que façamos a sonda ir para o infinito, ou seja, a lançamos com velocidade  $v = 16,7 \text{ km/s}$ , e, após isso, damos um impulso infinitesimal na direção do Sol. Isso faz com que a sonda percorra todo o caminho de volta e, consequentemente, atinja o Sol.

[3] **Problema 7.** (Kevin Zhou) A equação dos foguetes é dada por:

$$v = u \ln \left( \frac{M_0}{M} \right)$$

Onde  $v$  é a velocidade do foguete,  $u$  a velocidade relativa com que o foguete ejeta combustível,  $M_0$  a massa inicial do foguete e  $M$  sua massa atual.

- a) Deduza a equação dos foguetes partindo da conservação do momento.
- b) Considerando  $u$  um valor fixo durante todo o percurso do foguete, qual deve ser o valor de  $u$  para que o foguete vá de 0 até  $v$  gastando o menor combustível possível? (Você precisará resolver numericamente para  $v/u$ )
- c) Como a equação dos foguetes deve ser corrigida para uma região do espaço com um campo gravitacional,  $\mathbf{g}$ , constante e apontando na direção contrária ao movimento do foguete? Considere  $\eta = dm/dt = \text{constante}$ .

### Solução

- a) Considere que o foguete possui massa  $M$  e velocidade  $v$ . Ele ejeta combustível a uma velocidade relativa  $u$ . Seja  $dm$  a massa de gás ejetada:

$$dp = (v - u)dm$$

Mas, pela definição,

$$dp = vdm + mdv$$

Combinando essas equações:

$$mdv = -udm$$

Integrando,

$$\ln m = -\frac{v}{u} + C$$

Sabemos que quando  $m = M_0$ , temos  $v = 0$ , então  $C = \ln M_0$ . Assim:

$$v = u \ln \left( \frac{M_0}{M} \right)$$

Como esperado.

- b)** A energia cinética do gás é dada por:

$$K_g = \frac{1}{2} M_g u^2 = \frac{(M_0 - M) u^2}{2}$$

Podemos encontrar uma expressão para  $M$  utilizando a equação dos foguetes:

$$\frac{M_0}{M} = e^{v/u} \rightarrow M_0 = M e^{v/u}$$

Voltando à fórmula anterior:

$$K_g = \frac{M(e^{v/u} - 1) u^2}{2}$$

Aqui,  $M$  seria o equivalente à massa da "carcaça" do foguete.

Para minimizar a quantidade de energia gasta com combustível, temos:

$$\frac{dK_g}{du} = 0 \rightarrow -e^{v/u} v + 2u(e^{v/u} - 1) = 0$$

Definindo  $x = v/u$ ,

$$e^x x = 2(e^x - 1) \rightarrow x = 2(1 - e^{-x})$$

Resolvendo por iteração, encontramos:

$$x \approx 1,59 \rightarrow \boxed{u \approx \frac{v}{1,59}}$$

- c)** Nesse caso, temos:

$$dp = (v - u)dm - mgdt = mdv + vdm$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u} - \frac{g}{u} dt$$

Integrando,

$$\ln \left( \frac{M}{M_0} \right) = -\frac{v}{u} - \frac{gt}{u}$$

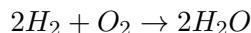
Como  $\eta$  é constante,  $M = M_0 - \eta t \rightarrow t = (M_0 - M)/\eta$ .

$$\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -\frac{v}{u} - \frac{g}{u\eta}(M_0 - M)$$

Resolvendo para  $v$ ,

$$v = u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) - \frac{g}{\eta}(M_0 - M)$$

- [4] **Problema 8.** Um dos propelentes mais comuns em foguetes é uma mistura de hidrogênio líquido com oxigênio líquido. Quando começa a queimar, a seguinte reação química ocorre:



Para cada mol de hidrogênio, esta reação libera 241,8 kJ de energia. Ao longo da questão, suponha que toda essa energia seja utilizada para mover o foguete.

- a) Uma expedição espacial deseja ser feita de tal maneira que é necessário realizar uma transferência de Hohmann para lançar um foguete da Terra para Marte. Calcule a variação de velocidade total  $\Delta v$  necessária para realizar essa manobra.
- b) A partir do  $\Delta v$  calculado anteriormente, estime quantas toneladas de propelente devem ser utilizadas para realizar tal manobra para um foguete que ejeta propelente com velocidade  $u = 3,0 \text{ km/s}$  e carcaça com massa  $M = 140 \cdot 10^3 \text{ kg}$ .

### Solução

- a) Para o primeiro impulso, temos:

$$v_{0,1}^2 = \frac{GM}{R_T}$$

$$v_{f,1}^2 = GM \left( \frac{2}{R_T} - \frac{1}{a} \right)$$

A órbita de transferência possui  $a = (R_T + R_M)/2$ ,

$$v_{f,1}^2 = \frac{2GM}{R_T} \left( \frac{R_M}{R_T + R_M} \right)$$

Já no segundo impulso,

$$v_{0,2}^2 = GM \left( \frac{2}{R_M} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2GM}{R_M} \left( \frac{R_T}{R_T + R_M} \right)$$

$$v_{f,2}^2 = \frac{GM}{R_M}$$

Sendo  $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = (v_{f,1} - v_{0,1}) + (v_{f,2} - v_{0,2})$ , podemos equacionar:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T} \left( \frac{R_M}{R_T + R_M} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{R_T}} + \sqrt{\frac{GM}{R_M}} - \sqrt{\frac{2GM}{R_M} \left( \frac{R_T}{R_T + R_M} \right)}$$

Utilizando  $M = M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $R_M = 1,5$  UA e  $R_T = 1$  UA, encontramos o valor numérico de  $\Delta v \approx 5,42$  km/s.

b) Utilizando a equação dos foguetes, temos:

$$v = u \ln \left( \frac{M_0}{M} \right) \rightarrow \frac{M_0}{M} = 1 + \frac{\mu}{M} = e^{v/u}$$

Onde  $\mu$  é a massa de gás.

$$\mu = M(e^{v/u} - 1) \approx 7,12 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

O que é condizente com a realidade, uma vez que a massa do combustível é  $\approx 83\%$  da massa total do foguete.

- [3] **Problema 9.** Marisso estava estudando um sistema binário com inclinação  $i$ . Ele conseguiu descobrir que o maior redshift vindo da estrela 1 era  $z_1$ . Sabendo disso, ache uma expressão para a massa da estrela 2,  $m_2$ , deixe sua resposta em função de  $z_1$ , do período do binário  $P$ , da inclinação  $i$ , da razão entre as massas  $\lambda = m_2/m_1$  e de constantes fundamentais.

### Solução

A velocidade com que 1 orbita o CM é:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}$$

Pela geometria, a velocidade radial é  $v_{r,1} = v_1 \sin i$ , com isso:

$$z_1 \approx \frac{v_{r,1}}{c} = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P c}$$

Do teorema do centro de massa:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{\lambda}$$

Utilizando a terceira Lei de Kepler:

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} &= \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \\ \frac{a_1^3 (1 + 1/\lambda)^3}{P^2} &= \frac{G m_2 (1 + 1/\lambda)}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Isolando  $m_2$ :

$$m_2 = \frac{4\pi^2 a_1^3 (1 + 1/\lambda)^2}{G P^2}$$

$a_1$  pode ser obtido avaliando a fórmula do redshift,  $a_1 = P c z_1 / 2\pi \sin i$ :

$$m_2 = \frac{4\pi^2}{GP^2} \left( \frac{z_1 P c}{2\pi \sin i} \right)^3 (1 + 1/\lambda)^2$$

Por fim, simplificando:

$$m_2 = \frac{z_1^3 c^3 P}{2\pi G \sin^3 i} (1 + 1/\lambda)^2$$

- [2] **Problema 10.** Qual é a razão entre a) as forças gravitacionais causadas pelo Sol e pela Lua na superfície da Terra? E b) das forças de maré causadas pelo mesmo?

### Solução

- a) A força gravitacional tem a forma:

$$F_G = \frac{GMm}{d^2}$$

Assim,

$$\frac{F_\odot}{F_L} = \frac{M_\odot}{M_L} \left( \frac{d_{T-L}}{d_{T-\odot}} \right)^2 \approx 178,33$$

- b) Para as forças de maré, temos:

$$F_M \propto \frac{m}{d^3}$$

$$\therefore \frac{F_\odot}{F_L} = \frac{M_\odot}{M_L} \left( \frac{d_{T-L}}{d_{T-\odot}} \right)^3 \approx 0,456$$

- [4] **Problema 11.** (Morin 7.7) Uma partícula de massa  $m$  viaja em uma órbita hiperbólica com uma massa  $M$  fixa em um dos focos. A velocidade no infinito é  $v_0$  e o parâmetro de impacto é  $b$ .

- a) Mostre que o ângulo de desvio da partícula é dado por:

$$\phi = \pi - 2 \tan^{-1}(\gamma b)$$

Onde  $\gamma \equiv v_0^2/GM$ .

- b) Sendo  $d\sigma$  a seção transversal da partícula (medida quando a mesma se encontra no infinito) que é defletida em um ângulo sólido de tamanho  $d\Omega$ . Mostre que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\gamma^2 \sin^4(\phi/2)}$$

A título de curiosidade, essa quantidade é chamada de *seção transversal diferencial*.

### Solução

- a) O esquema da situação é o seguinte:

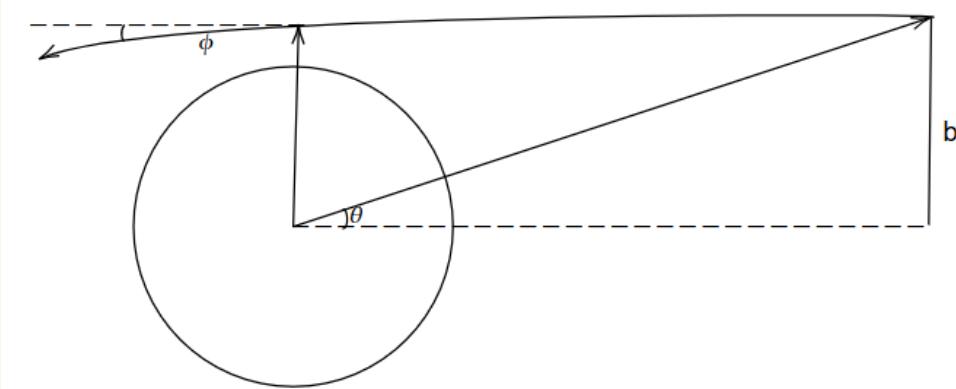


Figura 3: Esquema da Órbita Hiperbólica

Para achar o ângulo de desvio  $\phi$ , vamos usar o teorema do Impulso, considerando as componentes horizontais e verticais da força de atração:

$$F_x = -\frac{GMm}{r^2} \cos \theta, \quad F_y = -\frac{GMm}{r^2} \sin \theta$$

O teorema do Impulso nos diz que:

$$\int F_i dt = \Delta p$$

Onde  $p_i$  é o momento da partícula na direção  $i$ .

No eixo  $x$ , temos:

$$-\int \frac{GMm}{r^2} \cos \theta dt = \Delta p_x$$

Note que integrar com relação ao tempo deixa as coisas inconvenientes, pois descobrir como  $\theta$  e  $r$  variam no tempo é algo complicado. Por isso, vamos recorrer à definição de momento angular. Utilizando que  $L = mr^2 d\theta/dt$ , temos:

$$dt = \frac{mr^2}{L} d\theta$$

Substituindo esse valor na nossa integral:

$$-\int \frac{GMm^2}{L} \cos \theta d\theta = \Delta p_x$$

Perceba que nossa integral vai de  $\theta = 0$ , situação no infinito, até  $\theta = \pi - \phi$ , situação no infinito após o desvio. Assim:

$$-\frac{GMm^2}{L} \int_0^{\pi-\phi} \cos \theta d\theta = -\frac{GMm^2}{L} \sin \theta \Big|_0^{\pi-\phi} = -\frac{GMm^2}{L} \sin(\pi - \phi) = \Delta p_x$$

Analogamente para  $y$ :

$$\begin{aligned} -\frac{GMm^2}{L} \int_0^{\pi-\phi} \sin \theta d\theta &= \Delta p_y \\ = \frac{GMm^2}{L} \cos \theta \Big|_0^{\pi-\phi} &\equiv -\frac{GMm^2}{L}(1 - \cos(\pi - \phi)) = \Delta p_y \end{aligned}$$

Note também que  $\Delta p_x = m(v_{f,x} - v_0)$ ,  $\Delta p_y = m(v_{f,y} - 0)$ . Podemos achar também uma relação de  $\phi$  com as velocidades e, por pura geometria, obtemos:

$$\tan \phi = -\frac{v_{f,y}}{v_{f,x}}$$

Como só há forças centrais,  $L$  é um valor constante, e da situação inicial, o mesmo vale  $L = mbv_0$ . Agora, indo para as contas:

$$-\frac{GM}{bv_0} \sin(\pi - \phi) = v_{f,x} - v_0, \quad -\frac{GM}{bv_0}(1 - \cos(\pi - \phi)) = v_y$$

Com essas duas equações, obtemos:

$$\frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = -\frac{GM(1 - \cos(\pi - \phi))}{bv_0^2 - GM \sin(\pi - \phi)}$$

Ou seja:

$$\tan \phi = \frac{GM(1 - \cos(\pi - \phi))}{bv_0^2 - GM \sin(\pi - \phi)}$$

Resolvendo para  $\phi$ , obtemos o resultado esperado. Uma outra maneira de realizar a mesma questão é pensar puramente na geometria da situação:

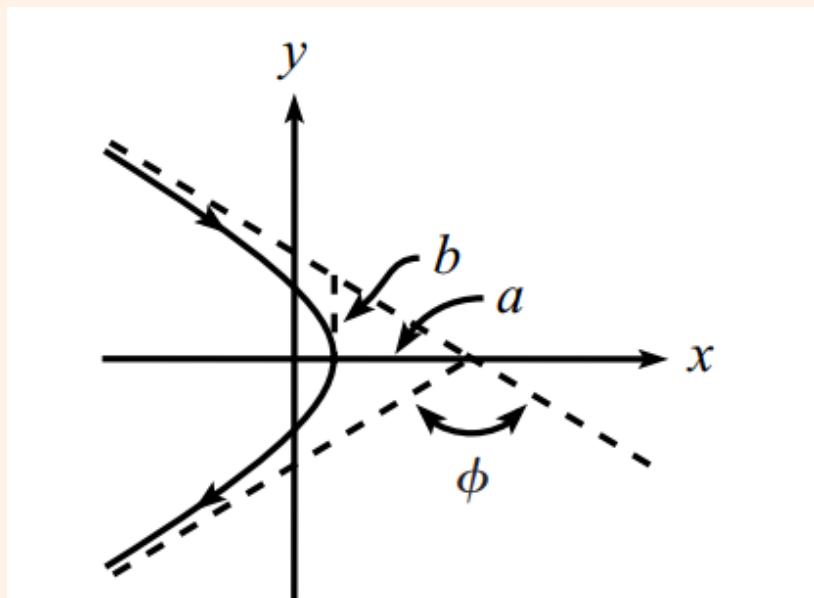


Figura 4: Fonte: Morin 7.7

Aqui, é evidente que:

$$\phi = \pi - 2 \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$$

Onde  $b$  é o parâmetro de impacto e  $a$  o semi-eixo da hipérbole. Do conhecimento de cônicas, temos:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{\frac{2EL^2}{m(GMm)^2}} = \frac{v_0^2 b}{GM} \equiv \gamma b$$

Em ambas as maneiras, chegamos no mesmo resultado:

$$\boxed{\phi = \pi - \tan^{-1}(\gamma b)}$$

Como desejado.

- b)** Considere um anel de espessura  $db$  e raio  $b$ . Agora, considere uma esfera bem grande, com centro em  $M$ . Qualquer partícula que passar pela seção transversal do anel de raio  $b$  irá atingir essa esfera fazendo um ângulo  $\phi$  com o eixo  $x$ , com uma separação angular  $d\phi$ . Usando que  $d \cot x / dx = -1 / \sin^2 x$ , temos:

$$\left| \frac{db}{d\phi} \right| = \frac{1}{2\gamma \sin^2(\phi/2)}$$

A área de seção transversal é dada por  $d\sigma = 2\pi b db$  e o ângulo sólido de uma esfera é dado por  $d\Omega = 2\pi \sin \phi d\phi$ . Portanto:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b}{2\pi \sin \phi} \frac{db}{d\phi} = \left( \frac{(1/\gamma) \cot(\phi/2)}{2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2)} \right) \left( \frac{1}{2\gamma \sin^2(\phi/2)} \right)$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\gamma^2 \sin^4(\phi/2)}}$$

### Ideia 1

Em certas questões, é válida a utilização de vetores. Um exemplo é a questão abaixo. Para facilitar, na parte de encontrar a inclinação da órbita, observe a seguinte imagem:

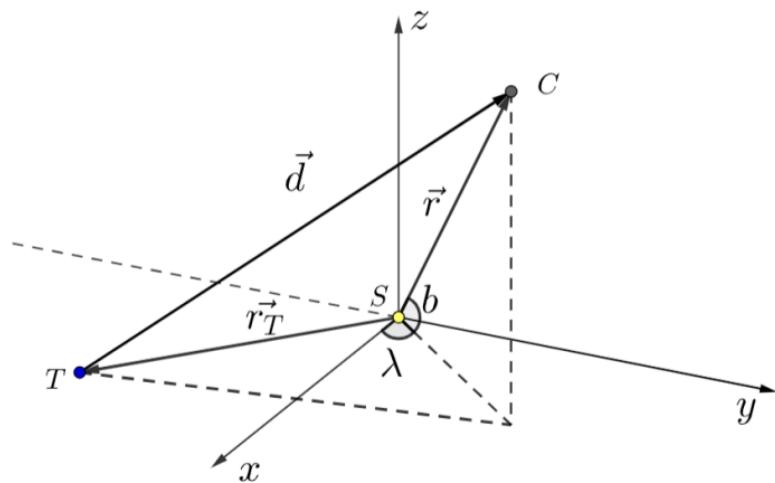


Figura 5: Vetores

Aqui,  $C$  representa um corpo,  $T$  a Terra e  $S$  o Sol. Os ângulos  $\lambda$  e  $b$  denotam, respectivamente, a longitude e a latitude eclíptica.  $\vec{r}$  é o vetor entre o Sol e o corpo,  $\vec{r}_T$  o vetor entre o Sol e a Terra, e  $\vec{d}$  o vetor entre a Terra e o corpo. Pela figura,

$$\vec{r} = r(\cos b \cos \lambda \hat{x} + \cos b \sin \lambda \hat{y} + \sin b \hat{z})$$

$$\vec{r}_T = r_T(\cos(\omega_{\oplus} t) \hat{x} + \sin(\omega_{\oplus} t) \hat{y})$$

Assim,  $\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_T$ :

$$\vec{d} = (r \cos b \cos \lambda - r_T \cos(\omega_{\oplus} t)) \hat{x} + (r \cos b \sin \lambda - r_T \sin(\omega_{\oplus} t)) \hat{y} + r \sin b \hat{z}$$

Calculando o módulo do vetor  $\vec{d}$ , obtemos que:

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{r_T^2 + r^2 - 2r_T r \cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t)}$$

Portanto:

$$\boxed{\cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t) = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r}}$$

- [5] Problema 12.** (Lista 1 - Vinhedo 2024) CR4b-2023 é uma sonda em órbita heliocêntrica que foi construída e lançada em 2023 pelo jovem prodígio Caranguejo. O objetivo da sonda era estudar as tempestades solares e captar dados para que Caranguejo analisasse em seu observatório no Espírito Santo. CR4b-2023, porém, durante uma de suas expedições ao Sol, foi atingida por uma tempestade solar e sofreu uma danificação grave. Devido a isso, a sonda se desorientou e, assim, teve todos os seus parâmetros orbitais alterados, de maneira que Caranguejo não soubesse mais sua localização.

Visando rastrear a posição de CR4b-2023 novamente, Caranguejo utilizou-se de seu observatório para coletar os valores das separações angulares  $\Delta\phi$  entre a sonda e o Sol e os valores do diâmetro angular  $\theta_S$  da sonda, tudo em função do tempo  $t$ . A tabela obtida por Caranguejo pode ser vista abaixo.

$\Delta\phi$ (Graus)	$\theta_S$ (mas)	$t$ (Dias)
0,000	99,27	0,00
4,889	103,67	1,79
17,354	104,72	7,43
29,015	93,06	20,62
27,793	81,18	25,41
13,460	79,77	45,98
11,539	77,97	51,61
2,466	76,44	54,53
2,656	74,84	55,31
7,177	73,90	57,19
10,800	70,63	58,43
22,464	72,92	91,67
13,823	80,50	130,48

Tabela 1: Valores medidos por Caranguejo

Considere que, no momento inicial  $t_0 = 0$  em que a sonda é atingida pela tempestade solar, o Sol estava exatamente no ponto de Libra e o movimento da sonda era ascendente em relação ao plano da eclíptica. Além disso, considere que o raio da sonda, supostamente esférica, é dado por  $R = 30$  km. Para essa questão, não é necessário fazer análise de erros (apesar de ser importante tentar utilizar métodos visando diminuir erros estatísticos). Com base no que foi apresentado:

- (a) Calcule os parâmetros orbitais da órbita de CR4b-2023, ou seja, seu semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$ , inclinação  $i$ , longitude do nodo ascendente  $\Omega$  e argumento do periélio  $\omega$ . Como em todas as questões de análise de dados, você deve fornecer tabelas de dados claramente rotuladas, gráficos claramente rotulados e derivações de fórmulas suficientes para deixar claro o que você mediu e como está derivando seus resultados visando reduzir erros estatísticos.
- (b) Considerando  $(x', y', z')$  como as coordenadas de CR4b-2023 em um sistema cartesiano de mão direita em que o plano  $x'y'$  se localiza no plano da órbita da sonda, o Sol se localiza na origem, e o eixo  $x'$  aponta para o ponto vernal, escreva, em uma tabela, os valores de pelo menos 5 pontos  $(x', y', z')$  distintos. Com base nos dados encontrados, esboce, em um gráfico, a órbita de CR4b-2023, indicando as coordenadas de seu centro.
- (c) Considerando agora um novo sistema de coordenadas de mão direita  $(x, y, z)$ , no qual o Sol se localiza na origem, o plano  $xy$  representa o plano da eclíptica, e o eixo  $x$  aponta para o ponto vernal, escreva as coordenadas do centro da órbita de CR4b-2023. Por fim, calcule a distância  $d_{TC}$  entre o centro da órbita terrestre e o centro da órbita da sonda.

### Solução

- a) A ideia dessa parte da questão é encontrar uma relação entre os dias e a distância da sonda até o Sol. Utilizando trigonometria básica, podemos dizer que a distância da sonda até a Terra é dada por:

$$d_{S-\oplus} = R / \tan^{-1} \left( \frac{\theta_S}{2} \right)$$

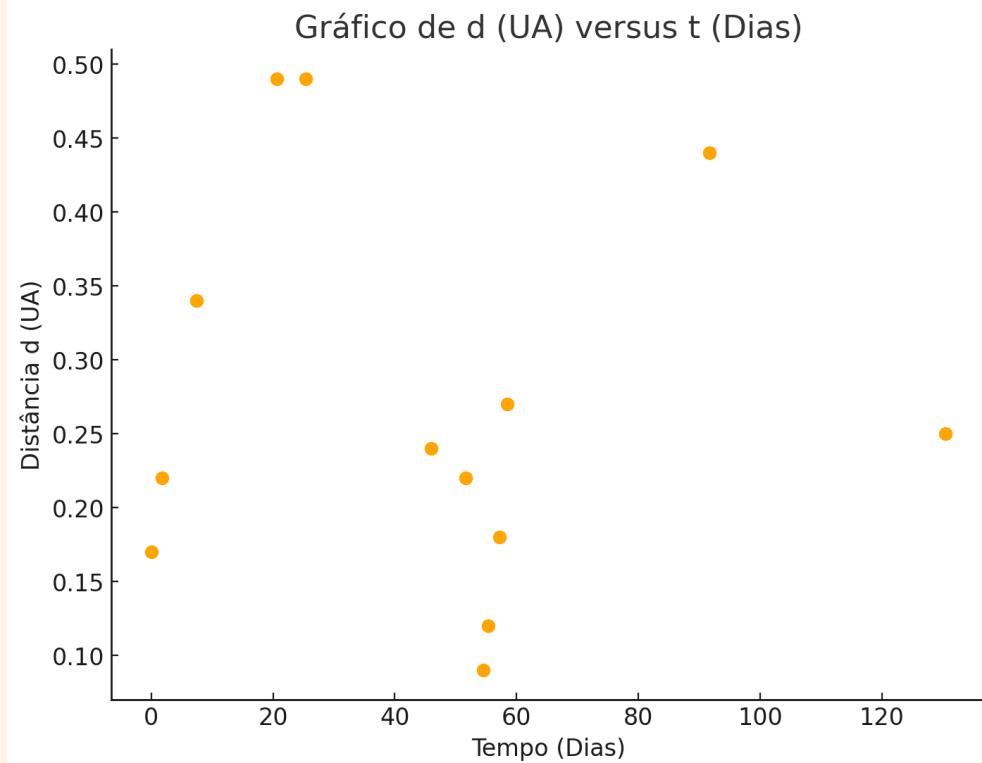
Onde  $R$  é o raio da sonda. Aqui, podemos utilizar a lei dos cosenos para encontrar a relação dessa distância com a distância da sonda até o Sol. Considerando a órbita da Terra circular de raio  $d_{\odot-\oplus}$  e definindo por  $d$  a distância entre a sonda e o Sol, temos:

$$d^2 = d_{\odot-\oplus}^2 + d_{S-\oplus}^2 - 2d_{\odot-\oplus}d_{S-\oplus} \cos \Delta\phi$$

Com isso, podemos montar a seguinte tabela, com os valores de  $d$  em UA e os valores de  $t$  em dias.

$t$ (Dias)	$d$ (UA)
0.00	0.17
1.79	0.22
7.43	0.34
20.62	0.50
25.41	0.49
45.98	0.24
51.61	0.22
54.53	0.09
55.31	0.12
57.19	0.18
58.43	0.27
91.67	0.44
130.48	0.25

Plotando um gráfico de  $t$  por  $d$ , temos:



Agora, vamos colocar a mão na massa e achar os parâmetros requisitados: semi-eixo maior,  $a$ , excentricidade,  $e$ , inclinação,  $i$ , longitude do nodo ascendente  $\Omega$  e argumento do periélio,  $\omega$ . Os dois primeiros podem ser obtidos diretamente dos dados que analisamos até o momento.

Analizando os dados, podemos perceber que a menor distância entre a sonda e o Sol é dada por  $a_p = 0,09$  UA e a maior distância é dada por  $a_a = 0,49$  UA. Essas distâncias devem corresponder ao periélio e ao afélio, respectivamente. Utilizando a definição:

$$a_p = a(1 - e), \quad a_a = a(1 + e) \rightarrow \frac{a_p}{a_a} = \frac{1 - e}{1 + e} \approx 0,18$$

Resolvendo, obtemos  $e \approx 0,67$ .

Usando que  $a = \frac{a_p + a_a}{2}$ , obtemos  $a \approx 0,30$  UA.

Para acharmos os fatores angulares, temos que pensar um pouco mais. Começando por  $\Omega$ , note que no momento inicial, em  $t = 0$ , a separação angular entre o Sol e a sonda é  $\Delta\phi = 0$ . O enunciado nos diz que nesse momento o Sol se encontra no ponto de Libra, assim, temos que a sonda também se encontra no ponto de Libra e, como seu movimento era ascendente, temos  $\Omega = 0^\circ$ .

Para encontrar  $\omega$  e  $i$ , vamos nos atentar ao seguinte triângulo esférico:

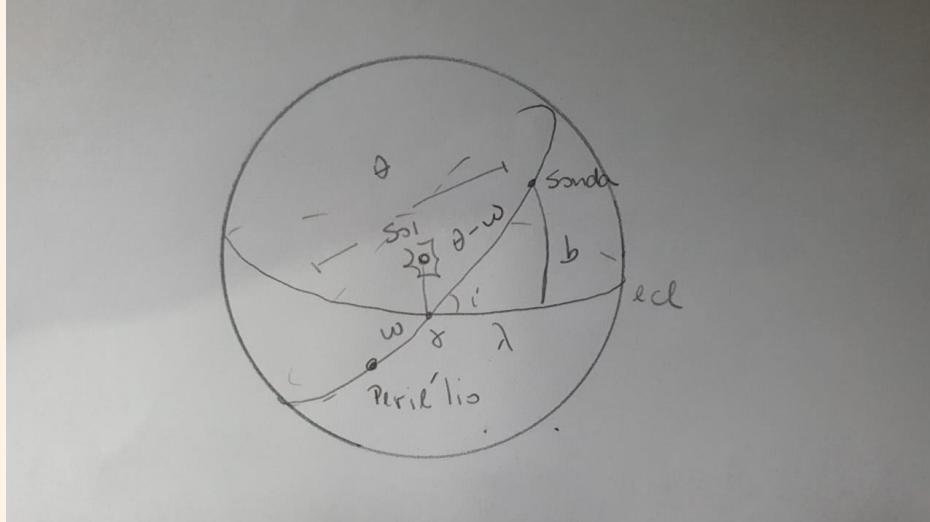


Figura 6: Esquema

Da forma polar da elipse,  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ , onde  $\theta$  é a anomalia verdadeira da órbita, podemos encontrar  $\omega$ . Perceba que no instante inicial,  $t = 0$ , a sonda está exatamente no ponto de Libra, assim  $\theta = 2\pi - \omega$  conforme o esquema.

Assim, temos:

$$d(0) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(2\pi-\omega)}$$

Resolvendo para  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi - \cos^{-1} \left( \frac{a(1-e^2)}{d(0)e} - \frac{1}{e} \right) \approx 267,6^\circ \approx 270^\circ$$

Substituindo os valores encontrados.

Para achar a inclinação, vamos utilizar a lei dos cossenos:

$$\cos(\theta - \omega) = \cos \lambda \cos b + \sin \lambda \sin b \cos(\pi/2) = \cos \lambda \cos b$$

Note que  $\cos(\theta - \omega) \approx \cos(\theta - 270^\circ) = \sin \theta$ .

Reescrevendo,

$$\cos b = \frac{\sin \theta}{\cos \lambda}$$

Utilizando a relação obtida na ideia anterior,

$$\cos b = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t)}$$

Igualando essas expressões e resolvendo para  $\lambda$ ,

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r \sin \theta \sin(\omega_{\oplus} t)} - \cot(\omega_{\oplus} t) \right)$$

Onde:

$$\theta = \arccos \left( \frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e} \right)$$

Com isso, podemos fazer a seguinte tabela, com os valores de  $b$  e  $\lambda$ .

$\lambda$ (Graus)	$b$ (Graus)
0,000	0,00
17,495	9,847
45,905	22,521
78,492	29,499
101,508	29,499
134,095	22,521
163,504	9,847
180,000	0,000
197,495	-9,847
216,005	-18,747
270	-30
333,435	-14,478
17,495	9,847
78,492	29,499
143,994	18,747

Voltando ao triângulo esférico e utilizando a lei dos quatro elementos, temos:

$$\cos \lambda \cos 90^\circ = \sin \lambda \cot b - \sin 90^\circ \cot i$$

Simplificando:

$$\tan b = \tan i \sin \lambda$$

Note que isso se assemelha a uma função do tipo  $y = A + Bx$ . Fazendo uma regressão linear na calculadora, encontramos  $B \approx 0,578$ . De modo que  $\tan i = B$ , chegamos em:

$$i \approx 30^\circ$$

- b)** Como o Sol se localiza na origem, os valores de  $x'$  e  $y'$  podem ser calculados por:

$$x' = r \sin \theta$$

e

$$y' = -r \cos \theta$$

Escrevendo em uma tabela cinco valores diferentes de  $x'$  e  $y'$ , obtemos que:

Tabela 7: Valores de  $x'$  e  $y'$

$x'$ UA	$y'$ UA
0, 167	0, 000
0, 084	0, 478
-0, 219	0, 261
-0, 203	0, 074
0, 000	-0, 100

Perceba que quaisquer valores, desde que corretos, de  $x'$  e  $y'$  podem ser utilizados. Além do mais, é importante aumentar o espaçamento entre os valores de  $x'$  e  $y'$  visando diminuir os erros associados ao esboço da órbita. Com base nisso, podemos plotar o gráfico:

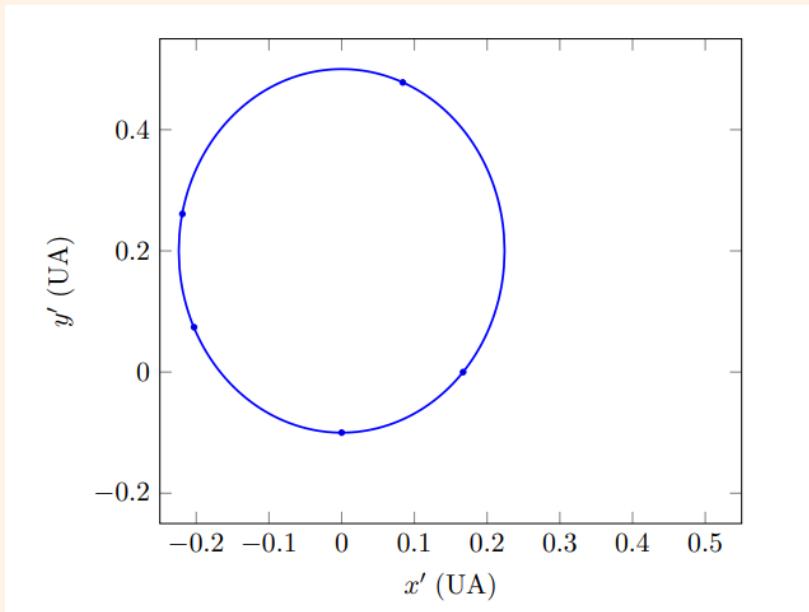


Figura 7: Gráfico da órbita

Observando o gráfico, vemos que as coordenadas  $(x', y', z')$  do centro da elipse são  $\boxed{(0; 0, 2; 0)}$ .

- c) Aqui, vamos utilizar uma matriz de rotação em torno do eixo  $x$ , dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Para  $\alpha = i = 30^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Então:

$$x = x'$$

$$y = y' \cos 30^\circ + z' \sin 30^\circ$$

$$z = -y' \sin 30^\circ + z' \cos 30^\circ$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos que as coordenadas  $(x, y, z)$  do centro de CR4b-2023 são dadas por:

$$(0.000, 0.173, -0.100).$$

Por fim, obtemos então que a distância entre o centro da órbita terrestre e o centro da órbita da sonda é dada por:

$$d = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2|}$$

ou seja:

$$d = 0.200 \text{ UA}$$

- [5] **Problema 13.** (Iran Problem Set) Uma partícula de massa  $m$  está orbitando um objeto massivo de massa  $M$ . Mostre que o impulso necessário para fazer a órbita girar um ângulo  $\eta$  em torno de um dos focos é dado por:

$$\Delta v = \frac{2\mu e}{h} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

onde:

- $h$  é o momento angular por unidade de massa;
- $\mu = GM$ , sendo  $G$  a constante gravitacional.

### Solução

Desenhando a órbita e a órbita rotacionada:

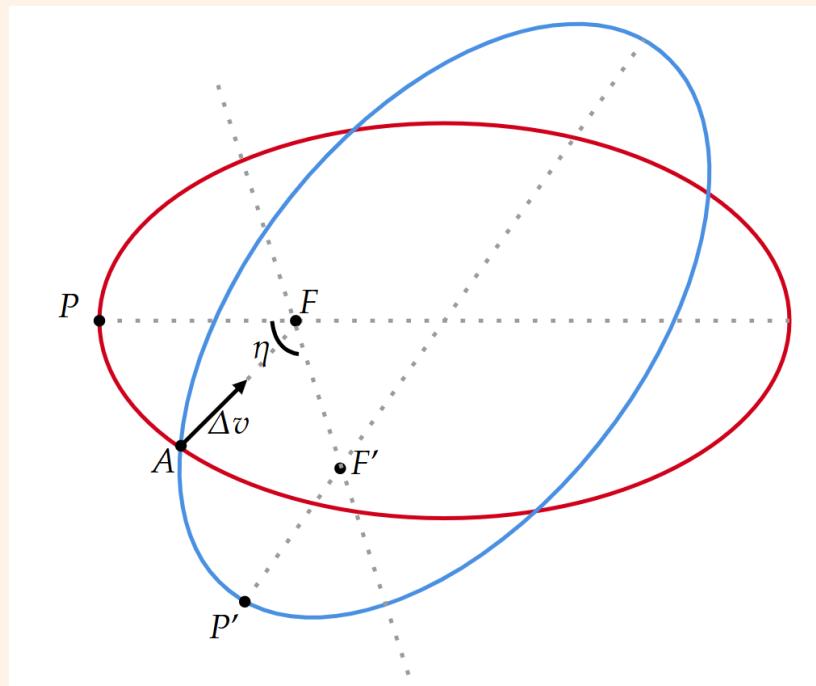


Figura 8: Esquema da órbita rotacionada.

Perceba que o impulso só pode ser realizado nos pontos de interseção das duas órbitas e deve ser radial, uma vez que o momento angular deve continuar constante, a fim de manter a órbita idêntica. Vamos definir por  $X$  um ponto na órbita antes do impulso e  $X'$  um ponto na órbita após a rotação.

Vamos às seguintes definições:  $F$  é o foco,  $P$  é o periélio da órbita, e  $A$  é o ponto de interseção onde é realizado o impulso.

Por simetria, note que os ângulos  $AFP$  e  $AFF'$  são iguais e, portanto, têm valor  $\eta/2$ .

Como as duas órbitas possuem o mesmo momento angular, a velocidade tangencial no ponto  $A$  deve ser equivalente para ambas as órbitas. Além disso, podemos perceber que o ponto  $A$  possui anomalia verdadeira  $\theta = \eta/2$ , o que garante que o módulo da velocidade também seja o mesmo para ambas as órbitas.

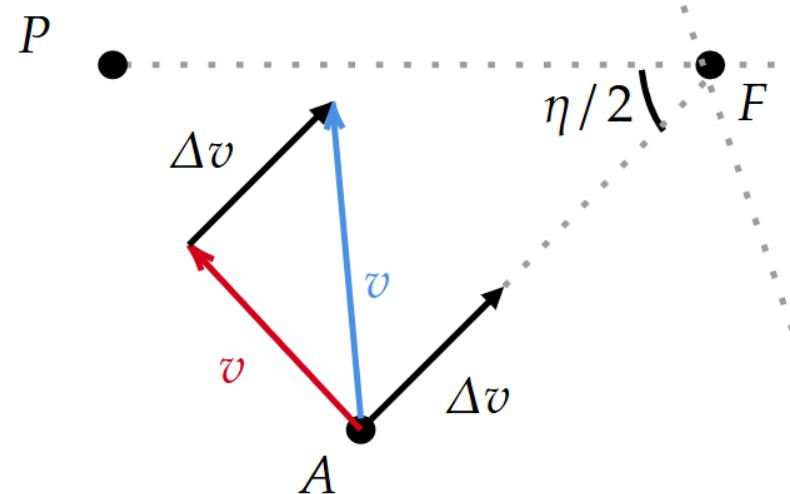


Figura 9: Vetores de velocidade.

A única maneira de isso ser possível seria se o impulso radial fosse dado por  $\Delta v = 2v_r$ , onde  $v_r$  é a velocidade radial imediatamente antes do impulso.

É claro que  $v_r^2 = v^2 - v_t^2$ , onde  $v_t$  é a velocidade tangencial. Partindo de definições básicas:

$$h^2 = \mu a(1 - e^2), \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}, \quad v_t = \frac{h}{r}, \quad v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Trabalhando com essas equações, chegamos a:

$$v^2 = \frac{\mu^2}{h^2}(1 + 2e \cos \theta + e^2), \quad v_t^2 = \frac{\mu^2}{h^2}(1 + e \cos \theta)^2.$$

Por fim, substituindo em  $v_r^2 = v^2 - v_t^2$ , obtemos:

$$v_r^2 = \frac{\mu^2}{h^2}(e^2 - e^2 \cos^2 \theta) \equiv \frac{\mu^2 e^2}{h^2} \sin^2 \theta.$$

Substituindo  $\Delta v = 2v_r$  e  $\theta = \eta/2$ , chegamos ao resultado desejado:

$$\boxed{\Delta v = \frac{2\mu e}{h} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \blacksquare}$$

- [3] Problema 14.** Nessa questão, vamos estudar um modelo simplificado para o efeito que confirmou a Teoria da Relatividade Geral de Einstein: as lentes gravitacionais. A presença de um corpo massivo curva o espaço-tempo, fazendo com que estrelas possam servir como lentes no espaço. Alguns telescópios, como o JWST, utilizam esse efeito para conseguir fotografar aglomerados de galáxias muito distantes. Uma das fotos tiradas pelo JWST de uma lente gravitacional pode ser vista a seguir:

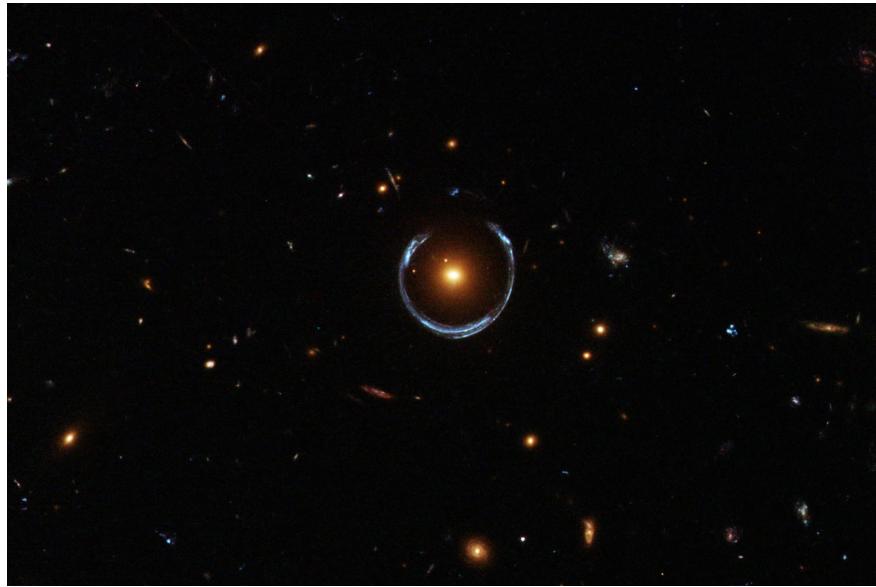


Figura 10: Fonte: National Geographic

Um esquema simplificado das lentes gravitacionais pode ser observado a seguir. Esse "círculo" é conhecido como Anel de Einstein.

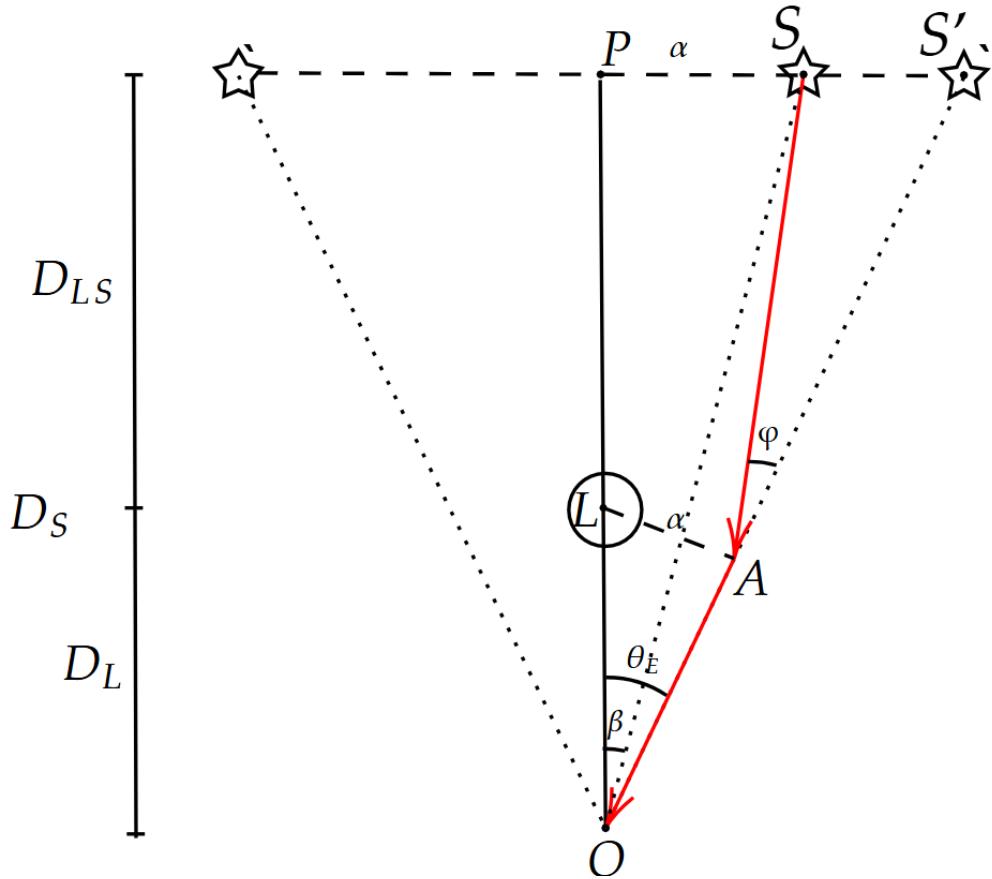


Figura 11: Esquema da lente gravitacional

No esquema, o ponto  $O$  representa o observador,  $L$  o corpo massivo que atua como uma lente,  $S$  a posição real do objeto observado e  $S'$  sua posição aparente,  $\alpha$  é o parâmetro de impacto,  $\beta$  a separação angular entre o corpo observado e a lente,  $\theta_E$  o raio angular do anel de Einstein,  $\varphi$  o desvio angular causado por um corpo massivo. A distância  $\overline{OL}$  vale  $D_L$  e a distância  $\overline{OP}$  vale  $D_S$ , de modo que  $D_S - D_L = D_{LS}$ .

Todos os ângulos são muito pequenos, de modo que  $\sin x \approx \tan x \approx x$ . Além disso, por estarem no infinito, as retas  $\overline{OP}$ ,  $\overline{OS}$  e  $\overline{OS'}$  podem ser aproximadas como paralelas.

É um resultado conhecido da Teoria da Relatividade Geral que o desvio da luz causado por um corpo massivo é dado por:

$$\varphi = \frac{4GM}{\alpha c^2}$$

- a) No limite em que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$ , encontre uma expressão para  $\theta_E$  em função das demais distâncias e ângulos fornecidos.
- b) O telescópio JWST obtém imagens no infravermelho, de comprimento de onda  $\lambda_{IV}$ . Quão grande deve ser seu diâmetro para que ele possa resolver um anel de Einstein?

### Solução

a) Note que, quando  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\overline{PL} = \overline{AS} = D_{LS}$ . Utilizando  $\tan \theta = \sin \theta = \theta$ , temos:

$$(1) \overline{PS} = D_S \beta = \alpha, \quad (2) \overline{SS'} = D_{SL} \varphi, \quad (3) \overline{PS'} = D_S \theta_E,$$

$$(4) \overline{OL} = D_L = \overline{LA}/\theta_E = \alpha \theta_E, \quad (5) \overline{LA} = \overline{PS}, \quad (6) \overline{PS'} = \overline{PS} + \overline{SS'}$$

Substituindo (1), (2), (3) em (6),

$$D_S \theta_E = D_S \beta + (D_S - D_L) \varphi$$

$$\theta_E - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \varphi$$

Substituindo o valor de  $\varphi$ :

$$\theta_E - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{\alpha c^2}$$

Utilizando (4), temos  $\alpha = D_L \theta_E$  e substituindo na nossa equação:

$$\theta_E - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{D_L \theta_E c^2}$$

$$\theta_E^2 - \beta \theta_E = \frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{c^2}$$

O limite de  $\alpha \rightarrow 0$  implica que  $\beta \rightarrow 0$ , assim:

$$\boxed{\theta_E = \sqrt{\frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{c^2}}}$$

b) Utilizando o critério de Rayleigh  $\theta = R \frac{\lambda}{D}$ , onde  $R \approx 1,22$ . Isolando  $D$  e substituindo  $\theta = \theta_E$ :

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{c^2 R^2 \lambda_{IV}^2}{4GM} \frac{D_S}{D_S - D_L}}}$$

[4] **Problema 15.** Neste exercício, vamos estudar propriedades da excentricidade das órbitas e entender como ela se relaciona com a energia e o momento angular. Denotando  $\mu = GM$  e  $h = L/m$ , faça o que se pede nos itens a seguir.

#### Parte I: O vetor excentricidade

a) Escreva uma expressão para a segunda lei de Newton no formato vetorial para um corpo de massa  $m$  orbitando um corpo de massa  $M$  a uma distância  $r$ .

- b) Faça o produto vetorial da sua expressão por  $\mathbf{h}$  e prove que:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r} \mathbf{v} - \frac{\mu \dot{r}}{r^2} \mathbf{r}$$

Onde  $\dot{\mathbf{r}}$  representa a velocidade radial e  $\mathbf{v}$  a velocidade.

- c) Podemos escrever o lado direito da equação anterior como:

$$\frac{d}{dt}(A\mathbf{r})$$

Encontre o valor de  $A$ .

- d) Integre os dois lados da igualdade encontrada e faça a multiplicação escalar de ambos os lados por  $\mathbf{r}$ . Após isso, resolva para  $r$ . O seu resultado deve ser bem parecido com o previsto somente pela geometria:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Encontre os valores de  $p$  e  $e$ . **Não esqueça da constante de integração. Suas respostas podem depender dela.**

- e) No item anterior,  $e$  é a excentricidade da órbita. Voltando à equação obtida inicialmente no item c, após a integração, ache uma forma de expressar  $\mathbf{e}$ , como sendo um vetor de módulo  $e$  e que aponta diretamente para o corpo orbitado.
- f) Prove que a relação encontrada no item anterior pode ser escrita como:

$$\mu \mathbf{e} = (v^2 - \frac{\mu}{r}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

Para onde esse vetor aponta?

## Parte II: Determinando elementos orbitais a partir do vetor excentricidade

Vamos definir o nosso sistema de coordenadas da seguinte maneira. Considere um sistema de mão direita, orientado de tal forma que o plano  $xy$  coincida com o plano equatorial e com  $\mathbf{z}$  apontando para o polo norte. Definindo o vetor nodal como  $\mathbf{n} = \mathbf{z} \times \mathbf{h}$ .

- a) Encontre uma expressão para  $\mathbf{h}$  em função das componentes do vetor  $\mathbf{r}$  e do vetor  $\mathbf{v}$ . Após isso, encontre o vetor  $\mathbf{n}$  em função das componentes de  $\mathbf{h}$ .
- b) Desenhe uma esfera celeste e represente nela: o plano do equador e uma órbita qualquer (que tenha inclinação diferente de 0). Nela, marque os seguintes ângulos:  $i$ , a inclinação orbital,  $\Omega$  a longitude do nodo ascendente,  $\omega$  o argumento do periastro e  $\theta$ , a anomalia verdadeira.
- c) Encontre expressões para todos esses ângulos em função de  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{r}$  e qualquer um dos vetores definidos no nosso sistema de coordenadas  $xyz$ .

**Solução****Parte I**

a) Utilizando a forma vetorial da força gravitacional, temos:

$$-\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = m\ddot{\mathbf{r}} \rightarrow \boxed{\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}}$$

b) Fazendo o produto vetorial dessa expressão por  $\mathbf{h}$ , temos:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r})$$

Uma vez que  $\mathbf{h}$  é constante, o lado esquerdo da equação pode ser escrito como  $d(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})/dt$ . Para o lado direito, vamos escrever  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  e utilizar a regra do BAC-CAB, que diz que  $(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ . Desse modo:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r^3}((\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}) = \frac{\mu}{r^3}(r^2\mathbf{v} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}))$$

Note que  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$  é a multiplicação das componentes de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  que estão na mesma direção. Assim,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\dot{r}$ . Substituindo na expressão anterior:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r}\mathbf{v} - \frac{\mu\dot{r}}{r^2}\mathbf{r}}$$

c) Abrindo a expressão fornecida pelo enunciado:

$$\frac{d}{dt}(A\mathbf{r}) = \mathbf{r}\frac{d}{dt}A + A\mathbf{v}$$

Comparando as expressões, é fácil perceber que  $\boxed{A = \mu/r}$ .

d) Utilizando as informações obtidas nos itens anteriores, temos:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

Multiplicando ambos os lados por  $dt$  e integrando, temos:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r}\mathbf{r} + \mathbf{B}$$

Onde  $B$  é um vetor constante de integração. Agora, fazendo o produto escalar com  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$$

Usando que  $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$  e definindo  $\nu$  como o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{B}$ , temos:

$$h^2 = \mu r + rB \cos \nu$$

Resolvendo para  $r$ , chegamos em:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (B/\mu) \cos \nu}$$

Assim:

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \quad e = \frac{B}{\mu}$$

e) Utilizando  $\mathbf{e} = \mu \mathbf{B}$  e voltando ao item d), temos:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r} \mathbf{r} + \mu \mathbf{e}$$

Resolvendo para  $\mathbf{e}$  e notando que  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{v} \times \mathbf{h}$ , temos:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

f) Escrevendo  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , temos:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Multiplicando os dois lados da expressão por  $\mu$ , e usando o BAC-CAB, temos:

$$\mu \mathbf{e} = v^2 \mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\mu}{r} \mathbf{r}$$

Reorganizando os termos:

$$\mu \mathbf{e} = (v^2 - \frac{\mu}{r}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

**[5] Problema 16.** ★★ (Adaptado IPhO 2018) Um dos efeitos mais interessantes da relatividade geral é a emissão de ondas gravitacionais (OG's) por binárias próximas. Um dos efeitos disso é a perda de energia do sistema. Nesta questão, iremos estudar esse efeito a fundo.

a) Considere um sistema formado pelas estrelas 1 e 2, com massas  $M_i$  e distando  $r_i$  do centro de massa. Utilizando a segunda lei de Newton, é possível demonstrar que:

$$\mathbf{a}_1 = -\alpha \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^n}$$

Onde  $\mathbf{a}_1$  é o vetor aceleração da estrela 1. Encontre o valor de  $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$  (lê-se  $\alpha$  em função de  $G, M_1, M_2$ ) e de  $n$ .

- b)** A energia total do sistema binário pode ser expressa como:

$$E = A(\omega, \mu, L) - \frac{GM\mu}{L}$$

Onde  $\mu$  é a massa reduzida do sistema,  $M = M_1 + M_2$  e  $L = r_1 + r_2$ . Encontre o valor de  $A$ .

- c)** A expressão anterior pode ser simplificada para:

$$E = \frac{\beta GM\mu}{L}$$

Onde  $\beta$  é uma constante adimensional. Encontre seu valor.

A teoria correta da gravidade, a Relatividade Geral, foi formulada por Einstein em 1915 e prevê que a gravidade se propaga à velocidade da luz. Os mensageiros que carregam informações sobre a interação são chamados de ondas gravitacionais (OGs). OGs são emitidas sempre que massas são aceleradas, fazendo com que o sistema de massas perca energia.

Considere um sistema de duas partículas pontuais, isoladas do restante do Universo. Einstein provou que, para velocidades suficientemente pequenas, as ondas emitidas: 1) têm uma frequência que é duas vezes maior do que a frequência orbital; 2) podem ser caracterizadas por uma luminosidade, ou seja, um poder emitido  $\mathcal{P}$ , que é dominado pela fórmula:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right).$$

Aqui,  $c$  é a velocidade da luz  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s. Para um sistema de duas partículas pontuais orbitando no plano  $x - y$ ,  $Q_{ij}$  é a seguinte tabela ( $i, j$  indicam o número da linha/coluna):

Os componentes de  $Q_{ij}$  são dados por:

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2),$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A.$$

E  $Q_{i,j} = 0$  para todas as outras possibilidades. Aqui,  $x_A, y_A$  são as posições da estrela  $A$ , com  $A = 1, 2$  em um plano cartesiano com o centro de massa na origem.

- d)** Escreva as coordenadas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  em função de  $r_1, r_2, \omega$  e  $t$ , com  $t$  sendo o tempo percorrido desde algum ponto específico da órbita.

- e) Para calcular a potência dissipada, a fórmula possui uma soma quádrupla. Resolver essa expressão "na tora" é algo bem complicado e demorado. Porém, felizmente, há um jeito mais bonito e elegante de resolvê-la. Para isso, comece escrevendo  $Q_{i,j}$  como uma matriz 3x3, da seguinte forma:

$$Q = A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Encontre o coeficiente  $A = A(\mu, L)$  e complete a matriz  $Q$ .

- f) Do item anterior, você deve obter:

$$Q_{ii} = A(b_i + j_i \cos(kt)), \quad Q_{ij}^{i \neq j} = A(p_{ij} \sin(kt))$$

Encontre os valores de  $b_i$ ,  $j_i$ ,  $p_{ij}$  e  $k$ .

- g) Agora, você é capaz de resolver para  $\mathcal{P}$  de maneira mais fluida. A expressão pode ser simplificada para:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \omega^6$$

Encontre o valor numérico de  $\xi$ .

**DICA:** O somatório duplo:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A_{ij})(A_{ij})$$

Onde  $A$  é uma matriz  $N \times N$  pode ser simplificado para:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^2$$

Que representa a soma quadrática de todos os elementos da matriz  $A$ .

- h) Caso não houvesse a emissão de OG's, o sistema continuaria em equilíbrio indeterminadamente, mas devido à sua emissão, a energia do sistema não é conservada, fazendo com que haja uma variação na velocidade angular do sistema,  $\omega$ . A fórmula para a variação temporal de  $\omega$  tem a seguinte cara:

$$\left( \frac{d\omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5$$

Onde  $M_c$  é a chamada Massa Chirp e  $M_c = M_c(M, \mu)$ . Encontre uma fórmula para  $M_c$ .

- i) Usando as informações obtidas acima, relate a velocidade angular orbital  $\omega$  com a frequência das ondas gravitacionais  $f_{OG}$ . Sabendo que, para qualquer função suave  $F(t)$  e  $a \neq 1$ :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \implies F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t_0 - t),$$

onde  $\chi$  é uma constante e  $t_0$  é uma constante de integração, mostre que a equação do item anterior implica que a frequência das ondas gravitacionais é:

$$f_{OG}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p},$$

e determine a constante  $p$ .

Em 14 de setembro de 2015, o evento GW150914 foi registrado pelos detectores LIGO, consistindo de dois braços em forma de L, cada um com 4 km de comprimento. Esses braços mudaram de comprimento relativo de acordo com a Figura abaixo. Os braços do detector respondem linearmente a uma onda gravitacional que passa, e o padrão de resposta imita a onda. Essa onda foi criada por dois buracos negros em órbitas quase circulares; a perda de energia por radiação gravitacional causou a contração da órbita e, eventualmente, a colisão dos buracos negros. O ponto de colisão corresponde, aproximadamente, ao pico do sinal após o ponto D, na Figura abaixo.

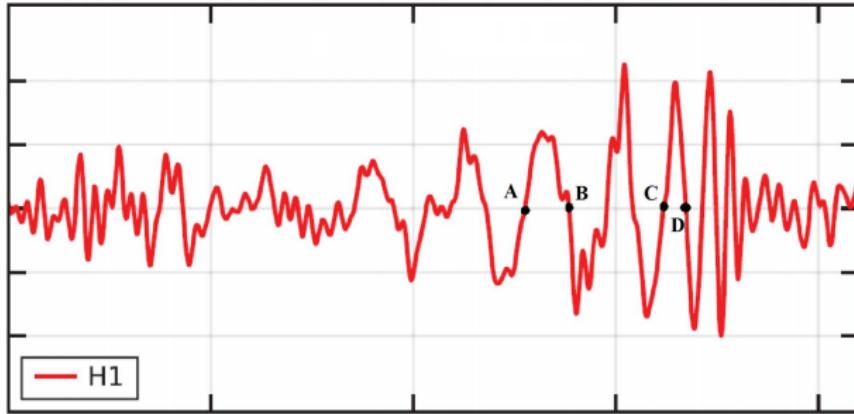


Figura 12: Deformação, ou seja, variação relativa do tamanho de cada braço, no detector LIGO H1. O eixo horizontal representa o tempo, e os pontos A, B, C, D correspondem a  $t = 0, 000, 0, 009, 0, 034, 0, 040$  segundos, respectivamente.

- j) A partir da figura, estime  $f_{OG}(t)$  em:

$$t_{AB} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{e} \quad t_{CD} = \frac{t_D + t_C}{2}.$$

Assumindo que a equação para  $f_{OG}$  é válida até a colisão (o que, estritamente falando, não é verdade) e que os dois objetos possuem massas iguais, estime a massa "chirp",  $M_c$ , e a massa total do sistema, em termos de massas solares  $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$  kg.

- k) Estime a separação orbital mínima entre os dois objetos em  $t_{CD}$ . Assim, estime um tamanho máximo para cada objeto,  $R_{\max}$ . Obtenha  $\frac{R_\odot}{R_{\max}}$  para comparar esse tamanho com o raio do nosso Sol,  $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$  km. Estime também sua velocidade orbital linear no mesmo instante,  $v_{\text{col}}$ , comparando-a com a velocidade da luz,  $\frac{v_{\text{col}}}{c}$ .

## Solução

a) Da segunda lei de newton,

$$-\frac{GM_1M_2}{(r_1 + r_2)^3} \mathbf{d} = M_1 \mathbf{a}_1$$

Onde  $\mathbf{d}$  é um vetor que saí da estrela dois e vai até a estrela um. Portanto,  $|\mathbf{d}| = r_1 + r_2$ . Utilizando o teorema do centro de massa, temos

$$r_2 = \frac{M_1 r_1}{M_2}$$

Substituindo e simplificando,

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{GM_2}{r_1^3 (1 + \frac{M_1}{M_2})^3} \mathbf{d}$$

Agora trabalhando no vetor  $\mathbf{d}$ , note que a sua direção é a mesma direção que  $\mathbf{r}_1$ , uma vez que a linha que liga 1 e 2, obrigatoriamente passa pelo CM do sistema. Assim,

$$\mathbf{d} = |\mathbf{d}| \hat{\mathbf{r}}_1 = (r_1 + r_2) \hat{\mathbf{r}}_1 = (1 + M_1/M_2) \mathbf{r}_1$$

Substituindo,

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{GM_2}{(1 + M_1/M_2)^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}$$

Com isso, podemos concluir que

$$\alpha = \frac{GM_2}{(1 + M_1/M_2)^2}, \quad n = 3$$

b) A energia do sistema é dada por,

$$E = \frac{M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2}{2} - \frac{GM_1 M_2}{L}$$

Focando no primeiro termo e utilizando-se de que,  $v_A = r_A \omega$ , temos

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \omega^2$$

Pelo teorema do centro de massa

$$(M_1 r_1 - M_2 r_2)^2 = 0 \rightarrow M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} L^2 \equiv \mu L^2$$

Para o segundo termo, basta multiplicar em cima e embaixo por  $(M_1 + M_2)$ . Assim,

$$E = \frac{\mu L^2}{2} - \frac{G}{L} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (M_1 + M_2) \equiv \frac{\mu L^2 \omega^2}{2} + \frac{GM\mu}{L}$$

Desse modo,  $A = \frac{\mu L^2 \omega^2}{2}$ .

c) Pela terceira lei de kepler,

$$\omega^2 = \frac{GM}{L^3}$$

Substituindo,

$$E = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = -\frac{GM\mu}{L}$$

Concluindo assim, que  $\beta = -1/2$ .

d) Seja,  $\theta$  o ângulo que o vetor  $r_1$  faz com o eixo  $x$ , desse modo,

$$(x_1, y_1) = r_1(\cos \theta, \sin \theta)$$

O vetor  $r_2$  deve fazer um ângulo de  $\pi + \theta$ . Utilizando que  $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$  e  $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ ,

$$(x_2, y_2) = -r_2(\cos \theta, \sin \theta)$$

Definindo por  $t$  o tempo decorrido desde que as estrelas cruzaram o eixo  $x$ , tem se  $\theta = \omega t$ . Logo,

$$(x_1, y_1) = r_1(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \quad (x_2, y_2) = -r_2(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

e) A matrix terá a seguinte cara,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Evocando as fórmulas do enunciado,

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2),$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A.$$

Para  $Q_{11}$ , temos,

$$Q_{11} = \frac{M_1}{3}(2x_1^2 - y_1^2) + \frac{M_2}{3}(2x_2^2 - y_2^2)$$

Substituindo  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{M_1}{3}r_1^2(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) + \frac{M_2r_2^2}{3}(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) \\ Q_{11} &= \frac{1}{3}(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))(M_1r_1^2 + M_2r_2^2) \\ Q_{11} &= \frac{\mu L^2}{3}(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) \end{aligned}$$

Para  $Q_{22}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \frac{M_1r_1^2}{3}(2\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)) + \frac{M_2r_2^2}{3}(2\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)) \\ Q_{22} &= \frac{\mu L^2}{3}(2\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)) \end{aligned}$$

Para  $Q_{33}$

$$\begin{aligned} Q_{33} &= -\frac{M_1r_1^2}{3}(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) - \frac{M_2r_2^2}{3}(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) \\ Q_{33} &= -\frac{\mu L^2}{3} \end{aligned}$$

Por fim, para  $Q_{12} = Q_{21}$ ,

$$Q_{12} = Q_{21} = M_1r_1^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) + M_2r_2^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \mu L^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \sin(2\omega t)$$

Como os de mais termos são 0, podemos escolher como  $A$  o valor de  $\mu L^2/2$ , assim a nossa matriz  $Q$  toma forma,

$$Q = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \cos^2(\omega t) - \frac{2}{3} \sin^2(\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \frac{4}{3} \sin^2(\omega t) - \frac{2}{3} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Para os termos  $a_{11}$  e  $a_{22}$ , vamos utilizar identidades trigonométricas, começando com  $a_{11}$ ,

$$\frac{4}{3} \cos^2(\omega t) - \frac{2}{3} \sin^2(\omega t) = \frac{2}{3}(2 \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))$$

Usando  $\cos^2(\omega t) = 1 - \sin^2(\omega t)$ , temos,

$$= \frac{2}{3}(2 - 3 \sin^2(\omega t))$$

Usando a forma do arco duplo, temos,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Fazendo essa substituição,

$$= \frac{2}{3} \left( 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\omega t) \right) = \frac{1}{3} + \cos(2\omega t)$$

Utilizando o mesmo processo para  $a_{22}$ , encontramos

$$a_{22} = \frac{1}{3} - \cos(2\omega t)$$

De modo que nossa matriz pode ser simplificada para,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \frac{1}{3} - \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

f) Analisando a matriz anterior, temos que,

$$A = \frac{\mu L^2}{2}$$

E que

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{3}, \quad b_3 = -\frac{2}{3}, \quad j_1 = 1, \quad j_2 = -1, \quad j_3 = 0, \quad p_{12} = p_{21} = 2, \quad k = 2$$

g) A fórmula fornecida para a potência foi,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right).$$

Para começar, vamos derivar a matriz  $Q$  com respeito ao tempo,

$$\frac{d^3 Q}{dt^3} = \frac{\mu L^2}{2} \frac{d^3}{dt^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \frac{1}{3} - \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Para derivar uma matriz, basta derivarmos todos os seus elementos, ao fazer isso, chegamos em,

$$\frac{d^3 Q}{dt^3} = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} 8\omega^3 \sin(2\omega t) & -8\omega^3 \cos(2\omega t) & 0 \\ -8\omega^3 \cos(\omega t) & -8\omega^3 \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deixando o termo em comum fora da matriz,

$$\frac{d^3 Q}{dt^3} = 4\mu\omega^3 L^2 \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ -\cos(2\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Foi fornecido como dica que o termo

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right)$$

Corresponde a soma quadrática dos membros da matriz, desse modo

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) = (4\mu\omega^3 L^2)^2 (\sin^2(2\omega t) + 2\cos^2(\omega t))$$

Assim,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) = \frac{G}{5c^5} (32\mu^2\omega^6 L^4)$$

Reorganizando,

$$\mathcal{P} = \frac{32}{5} \frac{G\mu^2\omega^6 L^4}{c^5}$$

Comparando essa expressão com a fornecida pelo enunciado, temos,

$\xi = \frac{32}{5}$

h)  $\mathcal{P}$  representa a potência que está sendo dissipada pelas OG's, assim,

$$\mathcal{P} = -\frac{dE}{dt}$$

Igualando  $E$  a energia da órbita,

$$\mathcal{P} = \frac{GM\mu}{2} \frac{d}{dt} \frac{1}{L}$$

Podemos escrever  $\omega$  em função de  $L$ , para isso, basta utilizar a terceira lei de kepler,

$$\omega^2 = \frac{GM}{L^3} \rightarrow \frac{1}{L} = (GM)^{-1/3} \omega^{2/3}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{(GM)^{2/3}\mu}{2} \frac{d}{dt} \omega^{2/3} = \frac{(GM)^{2/3}\mu}{2} \frac{d}{d\omega} \omega^{2/3} \frac{d\omega}{dt} \\ &= \frac{(GM)^{2/3}\mu}{3\omega^{1/3}} \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

Igualando a expressão obtida no item anterior,

$$\frac{\xi G\mu^2\omega^6 L^4}{c^5} = \frac{(GM)^{2/3}\mu}{3\omega^{1/3}} \frac{d\omega}{dt}$$

Resolvendo para  $d\omega/dt$ ,

$$\frac{d\omega}{dt} = (3\xi) \frac{G\mu\omega^{19/3}L^4}{(GM)^{2/3}c^5}$$

Substituindo  $L = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$ , temos,

$$\frac{d\omega}{dt} = (3\xi) \frac{G\mu\omega^{19/3}}{(GM)^{2/3}c^5} \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{4/3}$$

Elevando ao cubo,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{G^3\mu^3\omega^{19}}{G^2M^2c^{15}} \frac{G^4M^4}{\omega^8}$$

Simplificando,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} (G^5\mu^3 M^2)$$

Analisando a expressão do enunciado, temos,

$$M_c = (\mu^3 M^2)^{1/5}$$

- i) Utilizando o fato fornecido pelo enunciado,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t_0 - t)$$

Podemos encontrar uma expressão para  $\omega(t)$ .

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3\xi(GM_c)^{3/5}}{c^5} \omega^{11/3} \rightarrow \omega^{1-11/3} = \frac{3\xi(GM_c)^{3/5}}{c^5} (1 - 11/3)(t_0 - t)$$

Simplificando,

$$\omega^{-8/3} = -\frac{3\xi(GM_c)^{3/5}}{c^5} \frac{8}{3}(t_0 - t)$$

$$\omega^{-8/3} = \frac{8\xi(GM_c)^{3/5}(t - t_0)}{c^5}$$

Para encontrar uma expressão para  $f_{OG}$ , temos que utilizar que,

$$f_{OG} = 2f_{orbt} = \frac{\omega}{\pi} \rightarrow \omega = \pi f_{OG}$$

Fazendo tal substituição, chegamos em,

$$f_{OG}^{-8/3} = \frac{8\pi^{8/3}(GM_c)^{3/5}(t - t_0)}{c^5}$$

Comparando com a forma do enunciado, podemos obter,

$$p = 1$$

- j) A partir da figura, consideramos os dois  $\Delta t$  como meias-períodos. Assim, a frequência de onda gravitacional cíclica é  $f_{OG} = 1/(2\Delta t)$ . Então, os quatro pontos fornecidos nos permitem calcular a frequência no tempo médio dos dois intervalos como:

$t$ (s)	$f_{OG}$ (Hz)
$t_{AB} = 0.0045$	$f_{OG}(t_{AB}) = (2 \times 0.009)^{-1}$
$t_{CD} = 0.037$	$f_{OG}(t_{CD}) = (2 \times 0.006)^{-1}$

Agora, temos dois pares de valores  $(f_{OG}, t)$  para duas incógnitas  $(t_0, M_c)$ . Em termos de  $t_{AB}$  e  $t_{CD}$  e dividindo as duas equações, obtemos:

$$t_0 = \frac{At_{CD} - t_{AB}}{A - 1}, \quad A = \left( \frac{f_{OG}(t_{AB})}{f_{OG}(t_{CD})} \right)^{-8/3}.$$

Substituindo os valores numéricos,  $A \simeq 2.95$  e  $t_0 \simeq 0.054$  s. Agora podemos usar a equação de  $f_{OG}$  para qualquer um dos valores  $t_{AB}$  ou  $t_{CD}$  e determinar  $M_c$ . Obtém-se a massa de chirp:

$$M_c \simeq 6 \times 10^{31} \text{ kg} \simeq 30 M_\odot$$

Assim, a massa total  $M$  é:

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 69 M_\odot$$

Este resultado é, na verdade, notavelmente próximo das melhores estimativas usando a teoria completa da Relatividade Geral! [Mesmo que os objetos reais não tenham massas exatamente iguais e a teoria que acabamos de usar não seja válida muito próximo da colisão.]

- k) Usando a lei de Kepler estabelece que  $L = (GM/\Omega^2)^{1/3}$ . O segundo par de pontos destacados no gráfico corresponde ao ciclo anterior à fusão. Assim, utilizando que  $f_{OG} = \omega/\pi$ ,

$$\omega_{t_{CD}} \sim 2.6 \times 10^2 \text{ rad/s.}$$

Em seguida, usando a massa total obtida anteriormente:

$$L \sim 5 \times 10^2 \text{ km}$$

Assim, esses objetos possuem um raio máximo de  $R_{\max} \sim 250$  km. Portanto, eles têm mais de 30 vezes mais massa e:

$$\frac{R_\odot}{R_{\max}} \sim 3 \times 10^3,$$

eles são 3000 vezes menores que o Sol!

A velocidade linear é:

$$v_{\text{col}} = \frac{L}{2}\omega \simeq 7 \times 10^4 \text{ km/s.}$$

Eles estão se movendo a mais de 20% da velocidade da luz!

$L_{\text{col}} \sim 5 \times 10^2 \text{ km,}$
$\frac{R_\odot}{R_{\max}} \sim 3 \times 10^3,$
$\frac{v_{\text{col}}}{c} \sim 0.2.$

- [3] **Problema 17.** (Barra 2024) Durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, Hugo observava a estrela Plo I com seu telescópio. Comparando o seu espectro com o de outras estrelas, ele descobre que Plo I é uma estrela de nêutrons e estima sua massa como sendo  $M_1 = 2M_{\odot}$ . Ele também observa que Plo I possui variações senoidais em sua velocidade radial ao longo do tempo e conclui que Plo I deve fazer parte de um sistema binário com outro corpo celeste, Plo II. Observando a curva de velocidade de Plo I, Hugo também determina que Plo I possui uma órbita circular de período  $P$  e velocidade radial máxima  $K$ . Porém, ele não sabe qual é a massa  $M_2$  de Plo II e nem qual é a inclinação  $i$  do plano orbital do binário em relação ao plano do céu, representada na figura a seguir.

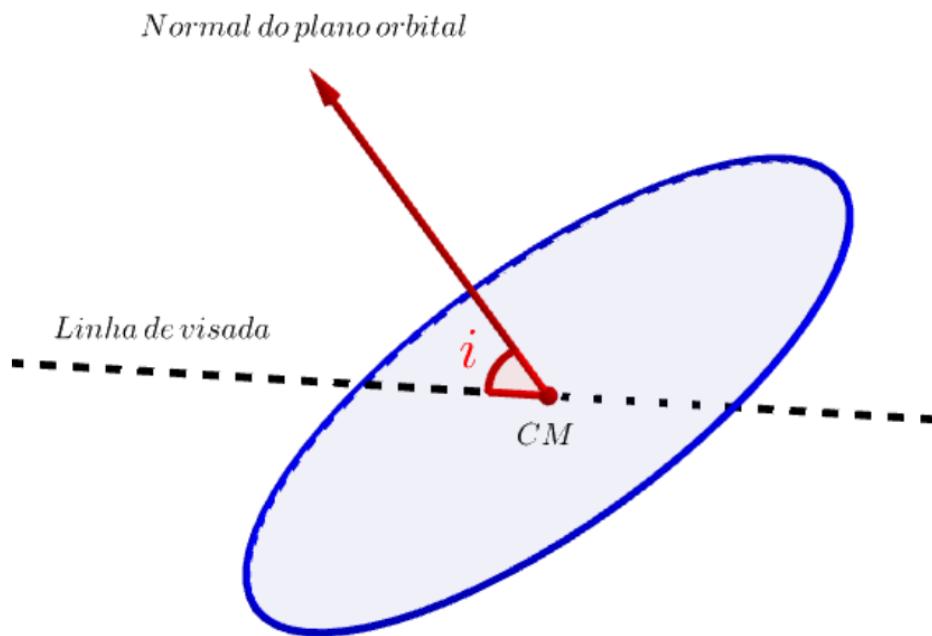


Figura 13: Representação da órbita

- a) A partir da 3<sup>a</sup> lei de Kepler e da 2<sup>a</sup> lei de Newton, encontre uma expressão para a **função de massa** do sistema binário formado por Plo I e Plo II em termos de  $P$ ,  $K$  e constantes universais. Você pode utilizar que a função de massa é dada por:

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

- b) Utilizando suas medidas, Hugo calcula que a função de massa do binário é  $f = 46,2M_{\odot}$ . Desejamos encontrar o valor mínimo  $M_{2,\min}$  para a massa de Plo II, sabendo que ele corresponde ao caso em que  $i = 90^\circ$ . Suponha  $M_{2,\min} > M_1$ . A partir disso, determine  $M_{2,\min}$ . Seu resultado é condizente com a hipótese? Responda SIM ou NÃO, justificando com cálculos.
- c) Com base em sua resposta do item anterior, conclua: é mais provável que Plo II seja um exoplaneta, uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro?

**Solução**

- a) Primeiramente, note que  $v_{r,aparente} = |\omega \times \mathbf{r}| = \omega r \sin i = v_r \sin i$ , logo  $K = v_r \sin i = \frac{2\pi a_1}{T} \sin i$ . Definindo  $a = a_1 + a_2$  e  $M = M_1 + M_2$  onde  $a_i$  e  $M_i$  representam a distância entre a estrela  $i$  e o CM e a massa da estrela  $i$ , temos a terceira lei de kepler como,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$