

Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Fotometria e Física Moderna

- [3] **Problema 1.** O objetivo dessa questão é deduzir uma expressão para a *profundidade óptica*. Imagine que um feixe de luz passe por uma região do espaço, com uma determinada quantidade de partículas. Se I_0 é a intensidade da luz antes de passar por tal região de espaço e I é a intensidade da luz após, a profundidade óptica é definida como:

$$I = I_0 e^{-\tau}$$

Onde τ é a profundidade óptica.

Considere uma região do espaço possui densidade numérica de partículas n .

- Qual o número de partículas em uma área A e espessura dz ?
- Supondo que cada partícula possua seção transversal σ , qual é a área tampada pelas partículas?
- Encontre a fórmula para τ .

Solução

- a) A densidade volumétrica de partículas é n , sendo assim temos que o número dN de partículas em um volume dV é dado por

$$dN = n dV \equiv n A dz$$

- b) Se cada partícula ocupa uma área σ , a área ocupada por dN partículas é

$$dS = \sigma dN = \sigma n A dz$$

- c) É esperado que a área ocupadas pelas partículas seja um empecilho para a passagem da luz. Como a Intensidade é proporcional a área disponível para a passagem da luz, nós temos

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dS}{A} = -n\sigma dz$$

Integrando, obtemos

$$I = I_0 e^{-n\sigma z}$$

Ou seja,

$$\tau = n\sigma z$$

- [2] **Problema 2.** A Galáxia do Triângulo, $M33$, é a terceira maior galáxia do grupo local, ela está a uma distância $d = 970$ kpc de nós e possui magnitude aparente de 5,72. Sabendo que ela possui aproximadamente 40 bilhões de estrelas, encontre a luminosidade média das estrelas de $M33$. Sua estimativa parece condizer com a realidade? Por que?

Solução

Utilizando a equação de Pogson

$$m - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_g}{L_{\odot}} \left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 \right)$$

Resolendo para L_g ,

$$L_g = L_{\odot} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2 10^{-0,4(m-M_{\odot})}$$

Temos também, que $L_g = \overline{L}_{\star} N$ e assim

$$\overline{L}_{\star} = \frac{L_{\odot}}{N} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2 10^{-0,4(m-M_{\odot})}$$

Utilizando os valores da tabela de constantes, obtemos:

$$\overline{L}_{\star} \approx 0,1 L_{\odot}$$

No entanto, essa estimativa não condiz com a realidade, uma vez que há fatores como a extinção interestelar que contribuem para o aumento da magnitude aparente de $M33$, uma estimativa condizente estaria na mesma ordem de grandeza da Luminosidade do Sol.

- [4] **Problema 3.** Considere que o universo possui densidade numérica de estrelas, isto é, numero de estrelas por unidade de volume, constante e de valor n . Assumindo que todas elas tenham $L = L_{\odot}$ e que existam um total de N_0 estrelas no universo.

- a) qual a probabilidade da magnitude absoluta de uma estrela, vista do centro do universo, ter magnitude entre m e $m + dm$, onde dm é uma porção infinitesimal de magnitude? Deixe sua resposta em termos de m e da maior magnitude possível, m_{lim} , de uma estrela na "borda" do universo.
- b) Qual a probabilidade de uma estrela poder ser observada a olho nu?

Dados:

$$\int_{-\infty}^6 10^{0,6(x-A)} dx \approx 2881,6 e^{-1,381A}$$

Solução

- a) A magnite aparente de uma estrela é dada por,

$$m = -2,5 \log F + C$$

Onde C é uma constante. Escrevendo $F = L/4\pi r^2$, temos,

$$m = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi r^2} \right) + C = 5 \log r - 2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi} \right) + C$$

Mas como L é constante para todas as estrelas, podemos absorver o segundo termo para a constante. Assim,

$$m = 5 \log r + C \rightarrow r = 10^{0,2(m-C)}$$

Derivando a expressão de m , temos,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{5}{r \ln 10}$$

Agora, vamos achar a probabilidade de uma estrela estar a uma distância r .

O numero de estrelas contidas entre r e $r + dr$ é

$$dN(r) = 4\pi n r^2 dr$$

Dividindo por N_0 , temos que a probabilidade de uma estrela estar nessa distância é

$$dP(r) = \frac{dN(r)}{N_0} = \frac{4\pi n r^2}{N_0} dr \rightarrow dr = \frac{N_0}{4\pi n r^2} dP(r)$$

Substituindo a expressão para dr ,

$$\frac{r \ln 10}{5} dm = \frac{N_0}{4\pi n r^2} dP(r)$$

Isolando $dP(r)$,

$$dP(r) = \frac{4\pi \ln 10 n r^3}{5 N_0} dm$$

Substituindo a expressão de r , podemos realizar a mudança de variável $r \rightarrow m$ em dP

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5 N_0} 10^{0,6(m-C)} dm$$

Para achar o valor de C , vamos comparar com a magnitude limite, na "borda" do universo. Como o universo possui N_0 estrelas, seu raio deve ser dado por,

$$N_0 = \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow R = \left(\frac{3N_0}{4\pi} \right)^{1/3}$$

Equacionando agora para m_{lim} ,

$$m_{lim} = 5 \log R + C$$

No qual, podemos isolar a constante $C = m_{lim} - 5 \log R$. Substituindo na expressão de $dP(m)$,

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m-m_{lim}+5 \log R)} dm$$

Trabalhando nessa expressão,

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m-m_{lim})} 10^{3 \log R} dm$$

Usando as propriedades do log, $a \log b = \log b^a$ e $10^{\log x} = x$, temos,

$$dP(m) = \frac{4\pi n R^3 \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m-m_{lim})} dm$$

Substituindo R ,

$$dP(m) = \frac{3 \ln 10}{5} 10^{0,6(m-m_{lim})} dm$$

Ou seja, a probabilidade não depende de n e nem de N_0 !

b) Para uma estrela ser visível, sua magnitude deve ser $m \leq 6$, assim, equacionando,

$$P(m \leq 6) = \int_{-\infty}^6 dP(m) = \frac{3 \ln 10}{5} \int_{-\infty}^6 10^{0,6(m-m_{lim})} dm$$

Usando a integral dada no enunciado,

$$P(m \leq 6) = \frac{3 \ln 10}{5} 2881,6 e^{-1,381 m_{lim}}$$

Simplificando os fatores numéricos,

$$P(m \leq 6) \approx 3981,08 e^{-1,381 m_{lim}}$$

A fim de curiosidade, colocando $m_{lim} \approx 40$, para uma estimativa, teríamos,

$$P(m \leq 6) \approx 10^{-20}$$

Ou seja, mesmo no modelo mais simples o universo, a nossa capacidade e insignificancia prevalece.

[4] **Problema 4.** O *Brilho Superficial*, fluxo por ângulo sólido por frequência, B_ν é dada pela Lei de

Plank:

$$B_\nu = \frac{dF}{d\nu d\Omega} = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1)}$$

a) Encontre uma expressão para:

$$B_\lambda = \frac{dF}{d\lambda d\Omega}$$

- b) A partir de B_λ encontre o comprimento de onda máximo de onda λ_{max} que uma estrela de temperatura T emite (você terá que resolver algo numericamente).
- c) Para pequenas frequências temos a aproximação de Righlight-Jeans. Obtenha uma expressão para B_ν para frequências pequenas.

Solução

a) Temos que

$$B_\lambda = \frac{dF}{d\lambda d\Omega} = \frac{dF}{d\nu d\Omega} \frac{d\nu}{d\lambda}$$

Utilizando a relação fundamental da ondulatória, $c = \nu\lambda \rightarrow \nu = c/\lambda$ chegamos em

$$B_\lambda = \frac{2h(c/\lambda)^3}{c^2(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{\lambda} \right) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}$$

- b) Para resolver esse item, precisamos achar o ponto máximo de B_λ . Mas diferenciar B_λ diretamente é uma tarefa extremamente chata. Uma ideia mais eficiente é tirar o logaritmo natural de B_λ e diferenciar o mesmo. Uma vez que estamos no ponto de máximo, ambas as maneiras chegarão no mesmo, resultado

$$\ln B_\lambda = -5 \ln \lambda - \ln(e^{hc/\lambda k_B T} - 1) + C$$

Onde C é uma constante que absorve os \ln das outras constantes de B_λ . Continuando a derivar

$$\frac{d \ln B_\lambda}{d\lambda} = -\frac{5}{\lambda} + \frac{e^{hc/\lambda k_B T}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \frac{hc}{k_B T \lambda^2} = 0$$

Definindo $x = \frac{hc}{k_B T \lambda}$

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5$$

$$x = 5e^{-x}(e^x - 1) = 5(1 - e^{-x})$$

Utilizando iteração, podemos resolver para x , obtendo $x \approx 4,965$. Voltando a definição de x

$$4,965 = \frac{hc}{k_B T \lambda_{max}} \rightarrow \boxed{\lambda_{max} \approx \frac{2,989 \cdot 10^{-3}}{T}}$$

Essa é a famosa *Lei de Wien*, comumente escrita na forma $\lambda = b/T$, onde $b \approx 2,989 \cdot 10^{-3}$.

- [3] **Problema 5.** A luminosidade de um corpo secundário, depende da área iluminada visível do astro. Nestá questão vamos fazer um breve estudo sobre esse fenômeno.

a) Considere a Seguinte situação:

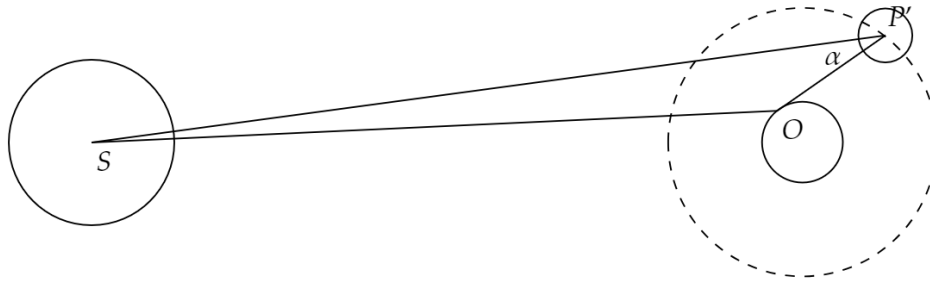


Figura 1: Esquema Sol-Terra-Lua

Encontre uma expressão para a razão Φ entre a área iluminada em função de α e a área total do planeta.

- b) Encontre os ângulos α em que temos a fase da Lua em: Nova, crescente, cheia e minguante, respectivamente.

Solução

Para resolver a questão, vamos nos guiar no esquema da imagem abaixo:

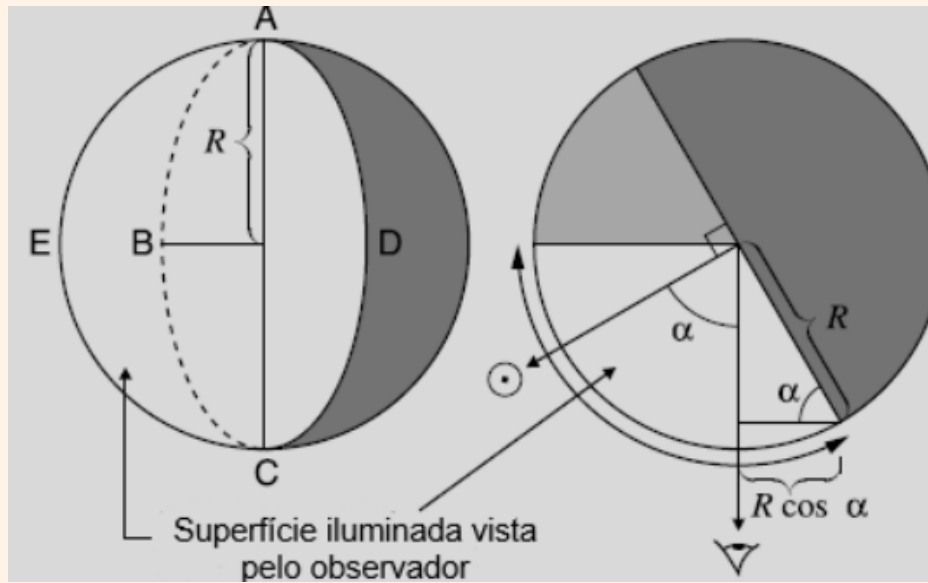


Figura 2: Fonte: Introduction do Planetary Fotometry

Do lado esquerdo, vamos um esquema de como o planeta se parece no céu e na direita uma representação vista "de cima". Aqui, podemos perceber que a área que vemos é composta por metade da área do círculo mais metade da área de uma elipse de semi eixo maior R e semi eixo menor $R \cos \alpha$. Assim

$$\Phi = \frac{\pi R^2/2 + \pi R^2 \cos \alpha/2}{\pi R^2} \quad \therefore \Phi = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Na Lua nova, temos $\Phi = 0$, na crescente $\Phi = 1/2$, na cheia $\Phi = 1$ e na minguante $\Phi = 1/2$, assim:

$$\alpha_{nova} = 180^\circ, \alpha_{crescente} = 90^\circ, \alpha_{cheia} = 0^\circ, \alpha_{minguante} = 90^\circ$$

[5] **Problema 6.** (Apostila Magna) Neste problema, modelaremos o efeito da atmosfera na Terra. Suponha que o Sol seja um corpo negro de temperatura T_1 e raio R_1 . A Terra é uma esfera que está localizada a uma distância R do Sol e possui raio R_3 . A emissividade da Terra é ϵ_3 .

- a) Se não houvesse atmosfera na Terra, determine sua temperatura de equilíbrio, T_3 .
- b) Agora, consideraremos os efeitos da atmosfera. Modele-a como uma casa esférica de gás, com uma emissividade ϵ_2 e raio exterior $R_2 > R_3$, concêntrica à Terra. No equilíbrio térmico, sua absorvidade para os comprimentos de onda no ultravioleta e no infravermelho é ϵ_2 . A atmosfera transmite uma fração t da radiação ultravioleta mas é completamente opaca ao infravermelho. Assumindo que o Sol emita luz ultravioleta enquanto a Terra emite e re-emite no infravermelho, determine as temperaturas T_2 da atmosfera e T_3 da Terra, no equilíbrio termodinâmico. Assuma que a atmosfera seja um condutor de calor perfeito, de forma que toda a radiação incidente sobre ela seja uniformemente distribuída por sua superfície.

Solução

- a) No equilíbrio termodinâmico, temos que a quantidade de potencia absorvida é a mesma que a emitida. Além disso, a emissividade e a absorvidade são as mesmas. Desse modo,

$$\frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R^2} \pi R_3^2 \epsilon_3 = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4 \epsilon_3$$

Resolvendo para T_3 ,

$$T_3 = T_1 \left(\frac{R_1^2}{4\pi R^2} \right)^{1/4}$$

- b) A temperatura da atmosfera é calculada por

$$T_2 = T_1 \left(\frac{R_1^2}{4\pi R^2} \right)^{1/4}$$

O processo é analogo ao item anterior. A luminosidade transmitida pela terra é,

$$L_2 = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 t$$

A Terra irá refletir toda essa radiação e a atmosfera refletirá de volta apenas uma fração t , desse modo, a luminosidade total é dada por,

$$L_{2,T} = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 (t + t^2 + t^3 + \dots)$$

O item dentro do parenteses é uma somatório de PG infinito, com $q_1 = t$ e $r = t$, como $t < 1$, o valor do somatório vale,

$$(t + t^2 + t^3 + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

Igualando ambas,

$$L_{2,T} = L_3 \rightarrow \frac{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 t}{1-t} = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4$$

Resolvendo para T_3 ,

$$T_3 = T_2 \left(\frac{R_2^2 \epsilon_2}{R_3^2} \frac{t}{1-t} \right)^{1/4}$$

Substituindo o valor de T_2 ,

$$T_3 = T_1 \left(\frac{R_1^2 R_2^2}{4\pi R^2 R_3^2} \frac{\epsilon_2 t}{1-t} \right)^{1/4}$$

- [2] **Problema 7.** (Lista 2 - 2021) A Nebulosa do Anel (M57) possui uma magnitude aparente igual a 9 e um diâmetro angular de $2'$ para um observador na Terra. Qual seria a magnitude aparente do céu noturno de um planeta orbitando uma estrela exatamente no centro de M57?

Solução

O céu noturno compreende um ângulo sólido de 2π sr, já o ângulo sólido visto por nós é $\Omega \approx \pi\theta^2$, onde θ é o raio angular. Como o Fluxo é proporcional a Ω , temos

$$m_{ceu} - m = -2,5 \log \left(\frac{\Omega_{ceu}}{\Omega} \right)$$

Para converter Ω de arco-minuto² para sr, temos que multiplicar por $\left(\frac{\pi}{180 \cdot 60}\right)^2$, assim

$$m_{ceu} = 9 - \log \left(\frac{2\pi}{\pi \left(\frac{\pi}{180 \cdot 60}\right)^2} \right)$$

$$m_{ceu} = -9,43$$

- [4] **Problema 8.** (Adaptado Lista 4 - 2021) O Efeito Cherenkov foi primeiramente detectado pelo cientista soviético Pavel Cherenkov, em 1937. Mais tarde, em conjunto com seus colegas de trabalho, I. E. Tamm e I. M. Frank, ele interpretou fisicamente o fenômeno, ganhando, assim, o Prêmio Nobel de Física de 1958. Antes de fazer um estudo matemático, precisamos, primeiro, entender um pouco mais sobre seu princípio.

Quando partículas carregadas de alta energia percorrem um meio dielétrico, é possível que, caso sua velocidade seja maior que a velocidade de fase ($\frac{c}{n}$), átomos sejam excitados. Esses, por sua vez, ao retornarem ao estado fundamental, emitem radiação eletromagnética. As ondas emitidas se espalham de forma esférica e, quando somadas, formam um cone de ângulo de abertura 2α , como mostra a figura abaixo.

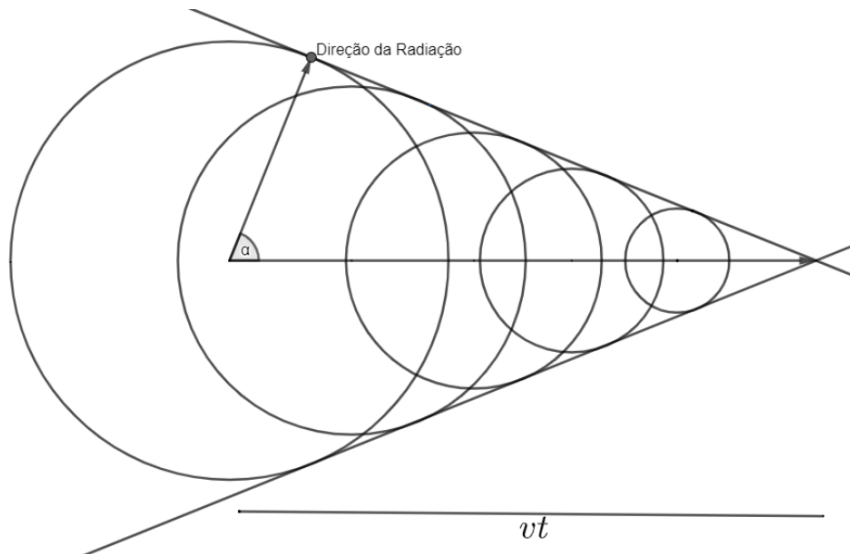


Figura 3: Mecanismo de radiação do Efeito Cherenkov

Esse efeito é similar a um jato movendo-se em velocidade supersônica, ou seja, segue o mesmo princípio do Cone de Mach, porém, com a luz. Finalmente, iremos desenvolver o modelo matemático do Efeito Cherenkov.

Parte A - Modelo Teórico

Considere uma partícula movimentando-se a velocidades relativísticas em um meio de índice de refração n . Sabe-se que sua massa de repouso é m_0 , possui momento linear p e velocidade v . Em determinado momento, há emissão de um fóton sob um ângulo α , como mostra a figura 1.

- Sendo μ a frequência do fóton emitido, determine a equação de seu momento linear, p_μ , e sua energia, E_μ . Sua resposta deve estar em função de n , μ e constantes físicas.
- Encontre uma expressão para o momento linear da partícula após a emissão do fóton em função de p_μ , p e α .
- Sendo $\beta_n = \frac{c}{vn}$, prove que a relação abaixo é verdadeira:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\beta_n} \quad (1)$$

- Considerando que o momento linear e a energia se conservem, determine a velocidade mínima para a ocorrência do Efeito Cherenkov. **Dica:** Quando comparado com os outros parâmetros, o fator $(n^2 - 1)h\mu$ pode ser desprezado.

Parte B - Reações Nucleares

A cadeia próton-próton é um processo de reações de fusão para conversão de hidrogênio em hélio. Um dos ramos possíveis da cadeia próton-próton é a pp IV, na qual, teoricamente, um átomo de hélio-3 reage diretamente com um próton, conforme a reação a seguir:



- Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.
- Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação abaixo:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + _ \quad (3)$$

Dados: Massa do pión: $140 \text{ MeV}/c^2$, massa do múon: $106 \text{ MeV}/c^2$.

Solução

Parte A - Modelo Teórico

- a) Para um fóton, as relações de De Broglie, nos dizem que

$$E = h\mu, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

Onde h é a constante de plank.

Utilizando a relação fundamental da ondulatória, $\lambda = v/\mu = \frac{c}{n\mu}$, assim

$$E = h\mu, \quad p = \frac{nh\mu}{c}$$

- b) Como o momento total é conservado, considere que a partícula está se movendo com momento p ao longo do eixo x , antes de emitir um foton. Assim, temos

$$p = p_\mu \cos \alpha + p'_x$$

$$p_\mu \sin \alpha = p'_y$$

$$p' = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Resolvendo para p'

$$p'^2 = (p - p_\mu \cos \alpha)^2 + p_\mu^2 \sin^2 \alpha$$

$$p'^2 = p^2 - 2pp_\mu \cos \alpha + p_\mu^2$$

Finalmente

$$p' = \sqrt{p^2 - 2pp_\mu \cos \alpha + p_\mu^2}$$

- c) Olhe a seguinte figura,

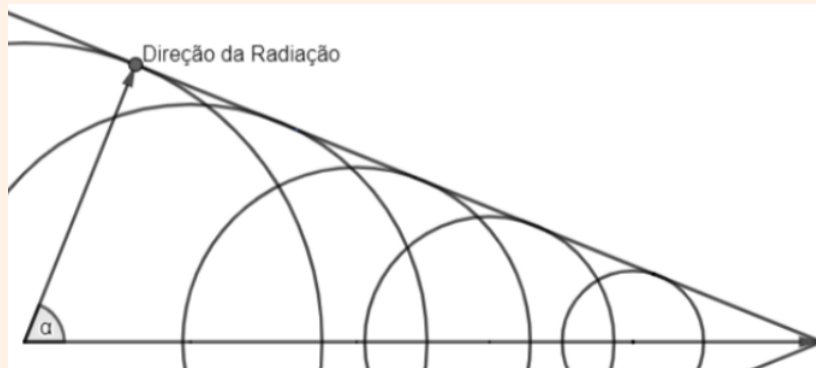


Figura 4: Esquema Cherenkov

Note que o raio do círculo é dado pela distância percorrida pelo fóton. A distância percorrida do centro do círculo até o fim do cone é vt , assim

$$\cos \alpha = \frac{ct}{nvt} = \frac{c}{nv} \equiv \frac{1}{\beta_n}$$

d) Definindo $c = 1$, a conservação de energia nos diz

$$\sqrt{p^2 + m_0^2} = \sqrt{p'^2 + m_0^2} + h\mu$$

Trabalhando nessa expressão

$$\sqrt{p'^2 + m_0^2} = \sqrt{p^2 + m_0^2} - h\mu$$

$$p'^2 + m_0^2 = p^2 + m_0^2 + h^2\mu^2 - 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}$$

Substituindo p'

$$p^2 - 2pp_\mu \cos \alpha + p_\mu^2 = p^2 + h^2\mu^2 - 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}$$

Resolvendo para $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{p_\mu^2 - h^2\mu^2 + 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}}{2pp_\mu}$$

Simplificando

$$\cos \alpha = \frac{p_\mu}{2p} - \frac{h^2\mu^2}{2pp_\mu} + \frac{h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}}{pp_\mu}$$

Substituindo $p_\mu = nh\mu$

$$\cos \alpha = \frac{nh\mu}{2p} + \frac{h\mu}{2np} + \frac{\sqrt{p^2 + m_0^2}}{np}$$

$$\cos \alpha = \frac{h\mu(n^2 - 1) + 2\sqrt{p^2 + m_0^2}}{2np}$$

Desprezando o termo $h\mu(n^2 - 1)$ e substituindo $\cos \alpha$

$$\frac{1}{nv} = \frac{\sqrt{p^2 + m_0^2}}{np}$$

Resolvendo para v

$$v = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_0^2}}$$

Porfim, voltando os c 's, temos

$$v = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$$

Parte B - Reações Nucleares

- e) Utilizando a conservação de carga, do lado esquerdo temos $2 + 1 = 3$ prótons, porém do lado direito, só temos 2, portanto a partícula faltante deve conter um próton. Já a massa atômica, segue como $3 + 1 = 4$ e do lado direito 4. Assim, a partícula faltante deve ter a carga de um próton e a massa muito menor do que este. A única partícula que seja essa descrição é o pósitron, e^+ .
- f) Utilizando que o número leptônico é constante, temos que o pión não é um lepton $n_L = 0$, mas o múon, é um lepton com $n_L = +1$, então a nossa partícula deve ter $n_L = -1$. O único antilepton neutro associado ao múon com $n_L = -1$ é o antineutrino do múon, $\bar{\nu}_\mu$, portanto, a relação completa é

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

[3] **Problema 9.** (Lista 3 - Vinhedo 2022) Juvelino, diretamente de seu observatório em Paris, França, monitora a estrela Polaris (α UMi). Ele tem como objetivo descobrir a temperatura de cor T_c do astro. Alguns dos dados de que ele dispõe a respeito de seu alvo são:

- Magnitude aparente na banda V : $V = 1,98$;
- Magnitude absoluta na banda V : $M_V = -3,60$;
- Magnitude absoluta na banda B : $M_B = -3,19$.

Com as informações fornecidas, ajude Juvelino!

- a) Realizando diversas observações, Juvelino determinou que a extinção interestelar na banda V na direção de Polaris é $a_V = 5,8 \text{ mag/kpc}$. Determine a distância, em pc, de α UMi até a Terra.

- b) Usando a relação empírica

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0 \quad (4)$$

sendo A_V a extinção interestelar total na banda V e E_{B-V} o excesso de cor $B - V$, determine o índice de cor $B - V$ da estrela observada.

- c) Demonstre a relação

$$T_c = \frac{7009}{(B - V) + 0,47} \quad (5)$$

na qual a temperatura de cor é dada em Kelvin. Para tanto, use o fato de que estrelas de classe espectral A0 possuem $(B - V) = 0$ e $T_c = 15000$ K. Use também que os comprimentos de onda das bandas B e V são, respectivamente, $\lambda_B = 440$ nm e $\lambda_V = 548$ nm. Justifique quaisquer aproximações feitas.

DICA: A lei de plack talvez seja útil

d) Determine a temperatura de cor de Polaris.

Solução

a) A expressão que relaciona corretamente as magnitudes é

$$V - M_V = 5 \log d - 5 + a_V d$$

Essa equação, só pode ser resolvida por meio da iteração,

$$d = \frac{V - M_V - 5 \log d + 5}{a_v}$$

Iterando, chegamos em $d \approx 100$ pc.

b) Pela definição, $E_{B-V} = A_B - A_V$. Assim

$$\frac{A_V}{A_B - A_V} = 3,00$$

$$A_B = \frac{A_V}{3} + A_V = 0,77$$

Assim,

$$B - M_B = 5 \log d - 5 + A_B \rightarrow B = 2,58$$

E pela definição, o índice $B - V = U_{B-V} = B - V = 0,60$

c) Utilizando a Lei de Planck, temos que

$$\frac{B_B}{B_V} = \frac{F_B}{F_V} \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 \frac{e^{\frac{\beta_{hc}}{\lambda_V} - 1}}{e^{\frac{\beta_{hc}}{\lambda_B} - 1}}$$

Utilizando a aproximação de Wein, temos

$$\frac{F_B}{F_V} = \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 \frac{e^{\frac{\beta_{hc}}{\lambda_V}}}{e^{\frac{\beta_{hc}}{\lambda_B}}}$$

Utilizando a equação de Pogson para comparar as magnitudes,

$$B - V = -2,5 \log \left(\frac{F_B}{F_V} \right) + C$$

Aqui adicionamos uma constante, pois estamos trabalhando com diferentes comprimentos de ondas. Trabalhando na expressão,

$$B - V = -2,5 \log \left(\left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 \frac{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_V}}}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_B}}} \right) + C$$

Trabalhando nessa expressão,

$$B - V = -2,5 \log \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 + 2,5 \beta hc \left(\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_V} \right) \log e + C$$

E utilizando $\beta = \frac{1}{k_B T_c}$ e substituindo os valores,

$$B - V = -1,19 + \frac{7009}{T_c} + C$$

Para o tipo A_0 , $(B_V) = 0$ e $T_c = 15000\text{K}$. Assim,

$$-1,19 + \frac{7009}{15000} + C = 0 \rightarrow C = 0,72$$

Assim,

$$B - V = -0,47 + \frac{7009}{T_c} \rightarrow T_c = \frac{7009}{(B - V) + 0,47}$$

d) da equação anterior,

$$T_c = \frac{7009}{0,60 + 0,47} \approx 6600 \text{ K}$$

- [4] **Problema 10.** (Lista 4 - 2020) Apesar de assustadora, a plantação de bananeiras de Juvelino possui um céu perfeito para uma de suas duas paixões: astrofotografia. Ele possui um telescópio de 200 mm de diâmetro e uma super CCD acoplada, com os parâmetros: lado do pixel $5 \mu\text{m}$, escala de placa $3,2 \text{ arcmin/mm}$, eficiência quântica de 97%, RON (Read-out noise, ou ruído de leitura) 1 contagem/pixel e DN (ruído térmico) 1 contagem/(pixel.hora). Ele prefere fazer suas observações na banda V (comprimento de onda central $\lambda_V = 5500 \text{ \AA}$, largura de banda $\Delta\lambda = 820 \text{ \AA}$), pois lembra-se de um número mágico associado a ela: o fluxo de fótons de um objeto de magnitude 0 nessa banda é $\phi_0 = 1000 \text{ fótons}/(\text{\AA} \cdot \text{cm}^2)$. Juvelino possui 2 alvos prediletos: uma estrela de magnitude $m_V = 4,51$ e um aglomerado globular de brilho superficial uniforme em V de $19,5 \text{ mag/arcsec}^2$ e diâmetro angular $\theta = 40''$.