


# Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por ( ) antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

## 1 Miscelânea

- [4] **Problema 1.**  Dudu Leiteiro, estava observando o céu, no interior de sua fazenda no Mato Grosso do Sul e observou o sistema binário formado pelas estrelas Iaum e Sezenem. Dudu, observou as estrelas e coletou os seguintes dados, com um intervalo de 6 meses entre eles:

Medida	Iaum	Sezenem
Ascensão Reta 1	$4^h 19^m 53,91^s$	$4^h 19^m 53,078^s$
Ascensão Reta 2	$4^h 19^m 53,92^s$	$4^h 19^m 53,077^s$
Declinação 1	$-13^\circ 33' 45,28''$	$-13^\circ 33' 47,78''$
Declinação 2	$-13^\circ 33' 45,20''$	$-13^\circ 33' 48,03''$

Com esses dados, você e Dudu Leiteiro, juntos vão analisar propriedades desse sistema binário. O primeiro passo importante para isso, é encontrar as coordenadas do centro de massa do sistema, denotadas pelo subscrito  $_{CM}$ . Você lembra que em uma das aulas sobre o estudo de binárias, seu professor, LuCav, te ensinou que:

$$\delta_{CM} = \delta_A + \Delta\delta_A$$

$$\alpha_{CM} = \alpha_A + \Delta\alpha_A$$

Onde  $\delta_A$  e  $\alpha_A$  são as coordenadas de uma das estrelas do binário e  $\Delta$  representa a diferença de coordenadas entre a estrela e o centro de massa, temos a seguinte relação:

$$\frac{a_A}{a} = \frac{\Delta\delta_A}{\Delta\delta_{CM}} = \frac{\Delta\alpha_A}{\Delta\alpha_{CM}}$$

Onde  $a_A$  é a distância da estrela  $A$  até o  $CM$ ,  $a$  o semi-eixo maior da órbita e  $\Delta\alpha_{CM}$  a variação das coordenadas do  $CM$ .

a) Sabendo que Iaum possui  $3/2$  da massa de Sezenem, calcule  $\Delta\delta_{CM}$  e  $\Delta\alpha_{CM}$ .

b) Com isso e considerando que as variações angulares são pequenas o suficiente para triângulos esféricos serem planos, encontre a paralaxe do sistema e sua distância até a Terra.

c) Considerando a massa de Iaum,  $M_I = 4,9M_\odot$ , e o período do sistema igual a  $P = 29,01$  anos, calcule o maior redshift advindo de Sezenem, sendo que ambas as órbitas são circulares e Sezenem possui velocidade tangencial de  $\mu = 1509''/\text{ano}$ .

- [3] **Problema 2.** Marisso estava cansado de não conseguir encontrar com precisão a posição de uma estrela em seu telescópio e decidiu investigar os efeitos que poderiam estar causando esse erro aparente. Após ler alguns artigos, ele descobriu 2 principais efeitos que fazem um objeto aparentar estar em um ângulo  $\Delta\theta_i$ , desviado da sua posição original, são eles: *Paralaxe* e *Aberração Estelar*. Nessa questão, seu objetivo é ajudar Marisso, a entender o porque desses efeitos acontecerem.

- a) A paralaxe é o mais básico deles e ocorre por causa da mudança de posição da Terra ao longo do Ano. Considere que uma estrela está localizada de tal modo que a linha *Sol – Estrela* é perpendicular ao plano da órbita da Terra. Desenhe o esquema da situação e, considerando o raio da órbita da Terra como  $r$  e a distância da estrela como  $d$ , obtenha uma fórmula para  $\Delta\theta_p$  causado pela paralaxe.
- b) Suponha agora, que a linha *Sol – Estrela* faça um ângulo  $\phi$  qualquer com a órbita da Terra. Como sua resposta muda?  
A aberração estar por sua vez advem de efeitos relativísticos a serem explorados a seguir.
- c) Considere um referencial  $S'$  se movendo com velocidade  $v\hat{x}$  em relação ao referencial  $S$ . Como as coordenadas  $(x', t')$  se relacionam com as coordenadas  $(x, t)$ ? Deixe suas respostas em função de  $\gamma$ .
- d) Supondo que haja um emissor de radiação no referencial  $S'$  e que o mesmo emita luz em um ângulo  $\alpha'$  em relação ao eixo  $x$ . No referencial  $S$  o dispositivo aparentará emitir luz em um ângulo  $\alpha$ . Prove, utilizando as transformações de Lorentz, que a relação entre  $\alpha$  e  $\alpha'$  é dada por:
- $$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v/c}{1 + (\cos \alpha')v/c}$$
- e) Repita o item anterior, mas prove utilizando a adição de velocidade relativística.
- f) Considerando que a linha *Sol – Estrela* é perpendicular ao plano da órbita da Terra, e que a Terra se move com velocidade  $v$ , encontre uma expressão para o desvio  $\Delta\theta_A$  causado pela aberração estelar.
- g) Qual desses efeitos você acha que é mais significativo, a paralaxe ou a aberração estelar?

### Solução

a)

b)

c) As transformações de Lorentz (usando  $c = 1$ ) são dadas por

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma(t' + vx')$$

d) Note que no referencial  $S$ , temos  $\cos \alpha = \frac{x}{t}$ , No referencial  $S'$  temos

$$x' = t' \cos \alpha'$$

Usando as transformações de Lorentz,

$$t = \gamma t' (1 + v \cos \alpha')$$

$$x = \gamma t' (\cos \alpha' + v)$$

Utilizando que  $\cos \alpha = x/t$ , temos

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v}{1 + v \cos \alpha'}$$

”Voltando” os  $c$ , temos

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v/c}{1 + (v/c) \cos \alpha'}$$

- e) No frame  $S'$ , teremos que a velocidade em  $x'$  é dada por  $v'_x = c \cos \alpha'$ . No referencial  $S$ , temos

$$v_x = "v'_x + v" = \frac{v'_x + v}{1 + (v'_x v)/c^2}$$

Substituindo  $v'_x$  e utilizando que  $\cos \alpha = v_x/c$  temos

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v/c}{1 + (v/c) \cos \alpha'}$$

- f) No referencial da Terra, (que está se movendo e portanto corresponde ao referencial  $S'$ ), temos  $\alpha' = \pi/2$ . Plugando isso, na resposta obtemos

$$\cos \alpha = v/c \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{1}{\gamma}$$

Utilizando a aproximação para pequenos ângulos,  $\alpha \approx 1/\gamma$ .

- g) Enquanto a distância Sol terra, está na ordem de alguns minutos-luz, a menor distância entre a Terra e outra estrela, está na ordem de anos luz, ou seja  $\theta \sim 10^{-6}$ . Já a velocidade da Terra é a aproximadamente 30 km/s, assim,  $v/c \sim 10^{-4}$ . Logo os efeitos de aberração são mais evidentes que os de paralaxe.