

Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Mecânica Celeste

- [5] **Problema 1.** Iaum e Sevla, dois físicos renomados, pretendem lançar uma sonda espacial para explorar os limites da física newtoniana e as correções relativísticas necessárias nas proximidades de um buraco negro. Eles precisam da sua ajuda para estudar o *Potencial Efetivo* de tal corpo.

- a) A energia de um corpo de massa m orbitando um corpo massivo de massa M pode ser escrita como:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r)$$

Onde \dot{r} é a velocidade radial do corpo. Encontre $V_{eff}(r)$ em função de G , M , L , m e r .

- b) Segundo a física newtoniana, qual é o menor raio no qual é possível um corpo possuir uma órbita circular em torno de um buraco negro?
- c) Qual é a frequência de pequenas oscilações radiais, ω_r , em torno desse raio?

O potencial gravitacional próximo a esses corpos precisa sofrer uma correção relativística e tem a forma:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}$$

- d) Explique por que essa correção permite que uma partícula caia no centro de um buraco negro, $r = 0$, e por que isso é impossível na física newtoniana.
- e) Qual é o menor valor de L para que uma partícula possa orbitar o buraco negro em uma órbita circular? Qual é o valor do raio nessa condição?
- f) Assumindo $\lim_{L \rightarrow \infty}$, encontre a menor distância que uma partícula em órbita aberta pode se aproximar de um buraco negro.

Solução

- a) Da forma clássica, temos:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Note que podemos escrever $v^2 = v_\theta^2 + v_r^2$, onde v_θ e v_r são, respectivamente, as velocidades tangenciais e radiais do corpo. Como $v_r = \dot{r}$, precisamos encontrar uma expressão que relate v_θ com outra grandeza. A melhor maneira de fazer essa relação é utilizando o momento angular, pois:

$$L = mr v_\theta \rightarrow v_\theta = \frac{L}{mr}$$

Substituindo na expressão da energia, temos:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Como queremos uma resposta na forma $E = m\dot{r}^2/2 + V_{eff}(r)$, por analogia, temos:

$$V_{eff}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

b) A maior velocidade limite de um corpo é c , desconsiderando efeitos relativísticos:

$$\frac{mc^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

Isolando R :

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

c) Para pequenas oscilações, temos a aproximação:

$$\omega_r \approx \sqrt{\frac{V''_{eff}(R)}{m}}$$

Calculando:

$$V'_{eff}(R) = \frac{GMm}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}$$

$$V''_{eff}(R) = -\frac{2GMm}{r^3} + \frac{3L^2}{mr^4}$$

Utilizando que $L = mvr$ (órbitas circulares) e que $v \equiv c$, chegamos a:

$$V''_{eff}(R) = \frac{mc^6}{G^2 M^2}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$\omega_r = \frac{c^3}{GM}$$

- d) Quando tomamos o limite de $\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff}(r)$, na física newtoniana, o termo que domina é $L^2/2mr^2$, ou seja, seria necessária uma energia $+\infty$ para chegar ao centro do buraco negro. No entanto, após a correção relativística, o termo que domina é $-GML^2/mc^2r^3$, ou seja, seria necessária uma energia de $-\infty$ para chegar ao centro do buraco negro. Por isso, não é possível chegar ao centro de um buraco negro na física newtoniana.
- e) Em uma órbita circular, r é constante, o que implica que a força na direção radial é nula, ou seja:

$$V'_{eff}(r) = 0$$

Calculando:

$$V'_{eff}(r) = \frac{GMm}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{3GML^2}{mc^2r^4} = 0$$

Simplificando, temos:

$$r^2 - \frac{L^2}{GMm^2}r + \frac{3L^2}{m^2c^2} = 0$$

Note que a solução dessa equação precisa ser real, uma vez que r não pode ser imaginário, o que nos impõe a condição:

$$\frac{L^4}{G^2M^2m^4} - \frac{12L^2}{m^2c^2} \geq 0$$

Na condição de igualdade, o valor de L que satisfaz essa equação é:

$$L = \frac{\sqrt{12}GMm}{c}$$

O valor de r nesse caso é:

$$r = \frac{L^2}{2GMm^2} = \boxed{r_{min} = \frac{6GM}{c^2}}$$

f) A expressão completa para r é:

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2} \pm \sqrt{\left(\frac{L^2}{GMm^2}\right)^2 - \frac{12L^2}{m^2c^2}}}{2} = \frac{L^2 - \sqrt{L^4 - 12(GMmL/c)^2}}{2GMm^2}$$

No limite de $L \rightarrow \infty$, temos:

$$r_{min} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L^2 - \sqrt{L^4 - 12(GMmL/c)^2}}{2GMm^2} = \frac{6(GMm/c)^2}{2(GMm^2)} = \boxed{\frac{3GM}{c^2}}$$

[3] **Problema 2.** Um ponto importante no estudo de órbitas é o que acontece quando o potencial segue algo incomum. O objetivo desta questão é estudar esse fenômeno. Considere o momento angular L e a massa do corpo m .

- a) Para uma órbita geral, que possui um potencial $V(r)$ na forma ψr^k , encontre o valor r_0 de uma órbita circular para esse potencial.
- b) Encontre a frequência de pequenas oscilações, ω_r , em torno desse raio.
- c) Seja ω_θ a frequência angular da órbita, encontre o valor da razão $\frac{\omega_r}{\omega_\theta}$. Uma órbita só pode ser fechada se essa razão for um número inteiro. Por quê? Encontre valores de k para que a órbita seja fechada.

Solução

- a) Como em uma órbita circular $V'_{eff}(r) = 0$, temos:

$$V'_{eff}(r) = -\frac{L^2}{mr^3} + k\psi r^{k-1} = 0$$

$$k\psi r^{k-1} = \frac{L^2}{mr^3} \rightarrow r_0 = \left(\frac{L^2}{k\psi m} \right)^{\frac{1}{k+2}}$$

b) Utilizando que $\omega_r^2 = V''_{eff}(r_0)/m$:

$$\begin{aligned} V''_{eff}(r) &= \frac{3L^2}{mr^4} + k(k-1)\psi r^{k-2} \\ V''_{eff}(r) &= r^{-4} \left(\frac{3L^2}{m} + k(k-1)\psi r^{k+2} \right) \\ V''_{eff}(r) &= r^{-4} \left(\frac{3L^2}{m} + k(k-1)\psi \frac{L^2}{k\psi m} \right) \\ V''_{eff}(r) &= \frac{L^2}{r_0^4 m} (k+2) \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\omega_r = \frac{L^2}{r_0^2 m} \sqrt{k+2}$$

c) Pela definição de L , temos:

$$L = mr_0^2 \omega_\theta \rightarrow \omega_\theta = \frac{L^2}{mr_0^2}$$

Portanto:

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{k+2}$$

Note que, para a órbita ser uma figura fechada, essa razão deve ser um número inteiro, logo, $k+2$ deve ser um quadrado perfeito. Qualquer valor $k = n^2 - 2 \forall n \in \mathbb{N}$ satisfaz essa equação.

- [4] **Problema 3.** O Hodógrafo é uma das maneiras menos conhecidas de resolver questões de mecânica celeste. Ao usar esse mecanismo, é possível resolver questões complexas (envolvendo encontrar parâmetros orbitais, parâmetros de velocidade e como minimizar a excentricidade de uma órbita, por exemplo). Apesar de o Hodógrafo possuir diversas utilidades, o objetivo deste exercício é provar o Teorema do Hodógrafo, que diz que, em órbitas fechadas, a velocidade forma um círculo no espaço vetorial. Vamos provar esse teorema de duas maneiras.

Método 1)

- I. Partindo da Segunda Lei de Newton e da conservação do momento angular, encontre uma expressão para $d\mathbf{v}/d\theta$. Deixe sua resposta em função do momento angular por unidade de massa, h , e $\mu = GM$.
- II. Onde o centro desse círculo está localizado? Considerando o corpo central na origem do sistema, determine uma expressão para a distância entre o corpo central e o centro do Hodógrafo.

Método 2)

O método 2 utiliza noções de cálculo mais avançadas e parte da conservação do *vetor de Laplace-Runge-Lenz*, \mathbf{A} .

- I.** O vetor \mathbf{A} é dado pela expressão:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GMm^2\hat{\mathbf{r}}$$

O primeiro passo para a demonstração é provar que \mathbf{A} é constante. Para isso, derive o mesmo em relação ao tempo e tire suas próprias conclusões.

- II.** Como o vetor \mathbf{L} é constante, $\mathbf{A} \times \mathbf{L}$ também é uma constante. Utilizando a identidade vetorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, prove que \mathbf{v} forma um círculo no espaço vetorial.

Solução**Método 1)**

- I.** A Segunda Lei de Newton nos diz que:

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Pela definição de momento angular:

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \therefore dt = \frac{mr^2}{L}d\theta$$

Substituindo dt na fórmula da Segunda Lei de Newton:

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = m\left(\frac{L}{mr^2}\right)\frac{d\mathbf{v}}{d\theta}$$

Isolando $d\mathbf{v}/d\theta$, temos:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = -\frac{GMm}{L}\hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{\mu}{h}\hat{\mathbf{r}}}$$

Note que essa expressão é um círculo no espaço vetorial e possui raio $R = \mu/h$, uma vez que $d\mathbf{v}/d\theta$ é constante e aponta na direção radial.

- II.** Como vimos no item anterior, o hodógrafo forma um círculo de raio $R = \mu/h$. Tome como apoio a seguinte imagem:

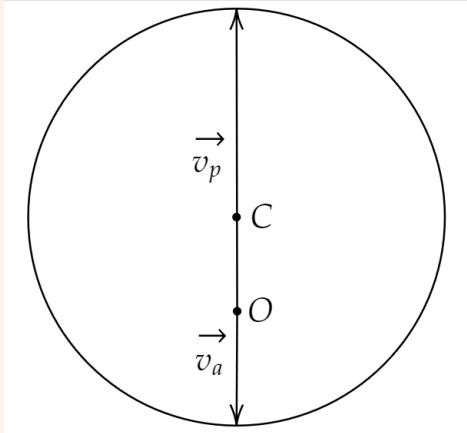


Figura 1: Esquema do Hodógrafo

O ponto O representa a origem do sistema (local do corpo central). Note que a menor distância entre O e o Hodógrafo deve corresponder à menor velocidade (apoastro) e a maior distância deve corresponder à maior velocidade (periastro). Note também que $v_a + \overline{OC} = v_p - \overline{OC}$. Equacionando, temos:

$$v_a + v_p = 2R \equiv \frac{2\mu}{h}$$

$$v_p - v_a = 2\overline{OC}$$

Podemos escrever v_p e v_a em função do momento angular:

$$L = ma(1-e)v_p \rightarrow v_p = \frac{h}{a(1-e)}$$

$$L = ma(1+e)v_a \rightarrow v_a = \frac{h}{a(1+e)}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{h}{a} \left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) = \frac{2\mu}{h}$$

Aqui, podemos isolar a :

$$\frac{h}{a} \left(\frac{2}{(1-e)^2} \right) = \frac{2\mu}{h}$$

$$a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{(1-e)^2}$$

Com isso em mente, podemos ir para a segunda expressão:

$$\frac{h}{a} \left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} \right) = 2\overline{OC}$$

$$h \left(\frac{\mu(1-e)^2}{h^2} \right) \left(\frac{2e}{(1-e)^2} \right) = 2\overline{OC}$$

Finalmente, resolvendo para \overline{OC} , temos:

$$\boxed{\overline{OC} = \frac{\mu}{h} e}$$

Para uma elipse ($e < 1$), a origem fica dentro da circunferência; para uma parábola ($e = 1$), a origem fica no limite da circunferência; e para uma hipérbole ($e > 1$), a origem fica fora da circunferência.

Método 2

I. Derivando \mathbf{A} em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - GMm^2 \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}}$$

Quando derivamos um *versor* em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \omega \times \hat{\mathbf{r}}$$

Onde ω é a velocidade com que o versor translada. Assim:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right) - GMm^2(\omega \times \hat{\mathbf{r}})$$

Agora, temos algumas considerações. Primeiramente, note que $d\mathbf{L}/dt = 0$, uma vez que só há forças centrais na órbita. Em segundo lugar, $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$. Além disso, temos que $\mathbf{L} = mr^2\omega$. Voltando para a equação:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times (mr^2\omega) - GMm^2(\omega \times \hat{\mathbf{r}}) \\ \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= -GMm^2(\hat{\mathbf{r}} \times \omega) - GMm^2(\omega \times \hat{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Para quaisquer dois vetores, \mathbf{i} e \mathbf{j} , vale que:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Utilizando tal propriedade, podemos concluir que:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0}$$

Logo, \mathbf{A} é constante!

II. Escrevendo a expressão e utilizando o *BAC-CAB*, temos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{L} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L} - GMm^2\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}$$

$$(\mathbf{A} + GMm^2\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{L} = -\mathbf{L} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{p}(-\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) - \mathbf{L}(-\mathbf{L} \cdot \mathbf{p})$$

Como \mathbf{L} e \mathbf{p} são sempre perpendiculares, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{p} = 0$, assim:

$$(\mathbf{A} + GMm^2\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{L} = -mL^2\mathbf{v}$$

Como tanto \mathbf{A} quanto $\hat{\mathbf{r}}$ são perpendiculares a \mathbf{L} e constantes, $\mathbf{A} + GMm^2\hat{\mathbf{r}}$ traçam um círculo. O produto vetorial com \mathbf{L} apenas gira o círculo em 90° e multiplica seu raio por \mathbf{L} . Portanto, \mathbf{v} traça um círculo no espaço vetorial.

[2] Problema 4. Um dos fenômenos mais fascinantes do sistema solar são as estrelas de nêutrons. Esses são corpos muito pequenos, super densos e que giram muito rápido. Nesta questão, vamos fazer um modelo teórico para essas estrelas.

- O Pulsar da Vela, uma estrela de nêutrons localizada na constelação da Vela, possui uma frequência de 11Hz, ou seja, ela gira em torno de si mesma 11 vezes por segundo, raio equatorial $R_e = 9,6$ km e massa $M = 1,88M_\odot$. Sabendo disso, calcule a razão entre seu raio equatorial e seu raio polar.
- Qual é o menor período de rotação que o Pulsar da Vela pode ter para que ele não se despedace?
- Atualmente, a taxa de variação do período do Pulsar da Vela é $\frac{\Delta P}{\Delta t} = 1,25 \cdot 10^{-13}$ s/s. Isso faz com que o Pulsar libere uma quantidade absurda de energia. A temperatura superficial do Pulsar é de $T \sim 10^6$ K. Calcule a ordem de grandeza da razão entre a potência emitida pelo aumento do período e a potência emitida pela Lei de Stefan-Boltzmann.

Solução

- a) Uma estrela sempre está em equilíbrio hidrostático, logo, equacionando para um ponto no equador e para um dos polos,

$$-\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2 = -\frac{GM}{r_p}$$

Utilizando que $\omega = 2\pi f$,

$$\frac{GM}{r_p} = \frac{GM}{r_e} + 2\pi^2 f^2 r_e^2$$

$$\frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{2\pi^2 f^2 r_e^3}{GM} \approx 1 + 8,4 \cdot 10^{-6}$$

Ou seja, uma estrela de nêutrons, mesmo girando absurdamente rápido, ainda é praticamente uma esfera perfeita!

- b) Na situação limite para se manter íntegro, temos:

$$\frac{GM}{r_e^2} = \omega^2 r_e$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{r_e^3} \rightarrow T_{min} = \frac{2\pi r_e^3}{GM} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

- c) A energia devido à rotação tem a forma:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Onde I é o momento de inércia da estrela ($I = \frac{2}{5} Mr^2$). Portanto, a potência dissipada é:

$$P = \frac{dE}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

Como $\omega = 2\pi/T$,

$$\frac{d\omega}{dT} = -\frac{2\pi}{T^2} \rightarrow d\omega = -\frac{2\pi}{T^2} dT$$

A expressão da potência em função do período se torna:

$$P = -\frac{8\pi^2 M r_e^2}{5T^3} \frac{dT}{dt} = -9,1 \cdot 10^{29} \text{ W}$$

Note que, por conservação de energia, toda essa potência deve ser convertida na forma de luminosidade, então $L_{rot} = -P = 9,1 \cdot 10^{29} \text{ W}$. A potência advinda da radiação térmica é dada por:

$$L_{rad} = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 6,56 \cdot 10^{25} \text{ W}$$

Com isso, podemos concluir que 99,99% da sua luminosidade advém da rotação.

- [3] Problema 5.** (Adaptado PPP) Geométrio, Paulinho e Hirata adoram chocolate. Certo dia, ambos estavam explorando uma galáxia quando se depararam com uma bola gigante de chocolate. Os três rapidamente começaram a comer a bola, primeiro fazendo uma linha reta do ponto P até o centro da bola em O (esquema 1). Após isso, Hirata cai, colidindo no ponto O , sem frear no caminho. Surpreendentemente, ele continua vivo e é resgatado por Geométrio e Paulinho. Após isso, famintos, eles continuam a comer a esfera gigante de chocolate e deixam um buraco esférico de diâmetro \overline{PO} (esquema 2). Hirata é muito desastrado e acaba caindo de novo, partindo do ponto P e indo até O novamente.

- a) Encontre a razão entre as velocidades de impacto de Hirata nos casos 1 e 2.
b) Encontre a razão entre os tempos de queda de Hirata nos casos 1 e 2.

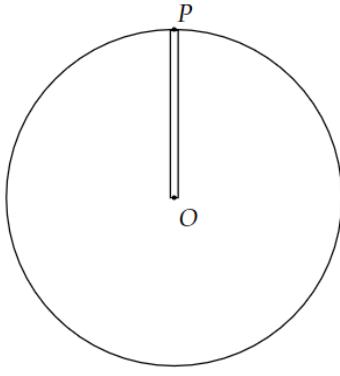


Figura 2: Esquema 1

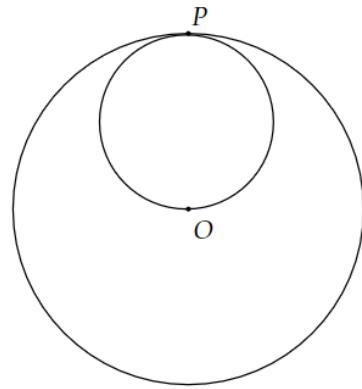


Figura 2: Esquema 2

Solução

- a) A gravidade dentro de um planeta é dada por:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM_{int}$$

$$4\pi r^2 g = -4\pi G\rho \frac{4\pi}{3}r^3$$

Ou seja, para o caso 1, $g \propto -\rho r \rightarrow g = -k\rho r$. Utilizando a Segunda Lei de Newton:

$$F = mv \frac{dv}{dr} = -mkr$$

Integrando:

$$\int_0^{v_1} v' dv' = -k\rho \int_0^R r dr$$

$$\frac{v_1^2}{2} = k\rho \frac{R^2}{2} \rightarrow \boxed{v_1 = R\sqrt{k\rho}}$$

Seja \mathbf{j} o vetor que parte do centro do planeta até o centro da cavidade. Utilizando superposição:

$$a = -k\rho\mathbf{r} - k(-\rho)(\mathbf{r} - \mathbf{j}) = -k\rho\mathbf{j}$$

Ou seja, no caso 2, a aceleração é constante e tem módulo $|a| = \frac{k\rho R}{2}$.

Utilizando Torricelli:

$$v_2^2 = 2aRk\rho R^2 \rightarrow \boxed{v_2 = R\sqrt{k\rho}}$$

Logo, $v_1/v_2 = 1$.

- b) No primeiro caso, note que temos um M.H.S., uma vez que a força é proporcional a r . O tempo até atingir a parte inferior seria igual a $1/4$ do período:

$$\ddot{r} = -k\rho r \rightarrow \omega^2 = k\rho \rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{k\rho}} \rightarrow t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{k\rho}}$$

No segundo caso, temos uma aceleração constante, logo:

$$t_2 = \frac{v_2}{a_2} = \frac{2R\sqrt{k\rho}}{k\rho R} = \frac{2}{\sqrt{k\rho}}$$

Logo, a razão t_1/t_2 é dada por:

$$\boxed{\frac{t_1}{t_2} = \frac{\pi}{4}}$$

- [5] Problema 6.** Calcular as velocidades de escape em certas situações pode ser mais complicado do que parece. Um exemplo disso é calcular a velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para chegar a determinado local.

Dica: Os problemas a seguir exigem que você pense cuidadosamente no referencial mais adequado. Não subestime a questão.

Dados: Um corpo pode orbitar a superfície da Terra com velocidade $v_0 = 7,9$ km/s, a velocidade orbital da Terra em torno do Sol é $u_0 = 29,7$ km/s, e o raio da Terra é desprezível em relação à distância Terra-Sol. Considere também que, ao deixar o campo gravitacional da Terra, a distância entre a sonda e o Sol é a mesma distância entre a Terra e o Sol.

- Qual é a menor velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para atingir o Sol, considerando que ele dê apenas um impulso? (Para conferir, $v = 31,8$ km/s)
- Qual é a menor velocidade de lançamento que um foguete precisa ter para escapar do Sistema Solar? (Para conferir, $v = 16,7$ km/s)
- Como a resposta do item a) muda se o foguete conseguir realizar um segundo impulso muito pequeno em algum ponto de sua órbita?

Solução

- Para que isso aconteça, após deixar a Terra, no referencial do Sol, a sonda deve estar parada e, consequentemente, no referencial da Terra, ela deve estar com velocidade $-u_0$. Utilizando conservação de energia:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{mu_0^2}{2}$$

$$v^2 = u_0^2 + \frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}$$

Note que a velocidade v_0 também pode ser obtida igualando a aceleração centrípeta com a gravitacional:

$$\frac{mv_0^2}{R_{\oplus}} = \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} \rightarrow v_0^2 = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}$$

Substituindo,

$$v^2 = u_0^2 + 2v_0^2 \rightarrow \boxed{v = 31,8 \text{ km/s}}$$

- b) Nesse caso, ao sair do campo gravitacional da Terra, no referencial do Sol, o corpo deve ter uma velocidade $\sqrt{2}u_0$, logo, no referencial da Terra, deve possuir $(\sqrt{2} - 1)u_0$. Novamente, por conservação de energia:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{m(\sqrt{2} - 1)^2 u_0^2}{2}$$

$$v^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 u_0^2 + 2v_0^2 \rightarrow v = 16,7 \text{ km/s}$$

- c) Imagine que façamos a sonda ir para o infinito, ou seja, a lançamos com velocidade $v = 16,7 \text{ km/s}$, e, após isso, damos um impulso infinitesimal na direção do Sol. Isso faz com que a sonda percorra todo o caminho de volta e, consequentemente, atinja o Sol.

[3] **Problema 7.** (Kevin Zhou) A equação dos foguetes é dada por:

$$v = u \ln \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

Onde v é a velocidade do foguete, u a velocidade relativa com que o foguete ejeta combustível, M_0 a massa inicial do foguete e M sua massa atual.

- a) Deduza a equação dos foguetes partindo da conservação do momento.
- b) Considerando u um valor fixo durante todo o percurso do foguete, qual deve ser o valor de u para que o foguete vá de 0 até v gastando o menor combustível possível? (Você precisará resolver numericamente para v/u)
- c) Como a equação dos foguetes deve ser corrigida para uma região do espaço com um campo gravitacional, \mathbf{g} , constante e apontando na direção contrária ao movimento do foguete? Considere $\eta = dm/dt = \text{constante}$.

Solução

- a) Considere que o foguete possui massa M e velocidade v . Ele ejeta combustível a uma velocidade relativa u . Seja dm a massa de gás ejetada:

$$dp = (v - u)dm$$

Mas, pela definição,

$$dp = vdm + mdv$$

Combinando essas equações:

$$mdv = -udm$$

Integrando,

$$\ln m = -\frac{v}{u} + C$$

Sabemos que quando $m = M_0$, temos $v = 0$, então $C = \ln M_0$. Assim:

$$v = u \ln \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

Como esperado.

- b)** A energia cinética do gás é dada por:

$$K_g = \frac{1}{2} M_g u^2 = \frac{(M_0 - M) u^2}{2}$$

Podemos encontrar uma expressão para M utilizando a equação dos foguetes:

$$\frac{M_0}{M} = e^{v/u} \rightarrow M_0 = M e^{v/u}$$

Voltando à fórmula anterior:

$$K_g = \frac{M(e^{v/u} - 1) u^2}{2}$$

Aqui, M seria o equivalente à massa da "carcaça" do foguete.

Para minimizar a quantidade de energia gasta com combustível, temos:

$$\frac{dK_g}{du} = 0 \rightarrow -e^{v/u} v + 2u(e^{v/u} - 1) = 0$$

Definindo $x = v/u$,

$$e^x x = 2(e^x - 1) \rightarrow x = 2(1 - e^{-x})$$

Resolvendo por iteração, encontramos:

$$x \approx 1,59 \rightarrow \boxed{u \approx \frac{v}{1,59}}$$

- c)** Nesse caso, temos:

$$dp = (v - u)dm - mgdt = mdv + vdm$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u} - \frac{g}{u} dt$$

Integrando,

$$\ln \left(\frac{M}{M_0} \right) = -\frac{v}{u} - \frac{gt}{u}$$

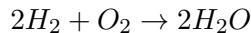
Como η é constante, $M = M_0 - \eta t \rightarrow t = (M_0 - M)/\eta$.

$$\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -\frac{v}{u} - \frac{g}{u\eta}(M_0 - M)$$

Resolvendo para v ,

$$v = u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) - \frac{g}{\eta}(M_0 - M)$$

- [4] **Problema 8.** Um dos propelentes mais comuns em foguetes é uma mistura de hidrogênio líquido com oxigênio líquido. Quando começa a queimar, a seguinte reação química ocorre:



Para cada mol de hidrogênio, esta reação libera 241,8 kJ de energia. Ao longo da questão, suponha que toda essa energia seja utilizada para mover o foguete.

- a) Uma expedição espacial deseja ser feita de tal maneira que é necessário realizar uma transferência de Hohmann para lançar um foguete da Terra para Marte. Calcule a variação de velocidade total Δv necessária para realizar essa manobra.
- b) A partir do Δv calculado anteriormente, estime quantas toneladas de propelente devem ser utilizadas para realizar tal manobra para um foguete que ejeta propelente com velocidade $u = 3,0 \text{ km/s}$ e carcaça com massa $M = 140 \cdot 10^3 \text{ kg}$.

Solução

- a) Para o primeiro impulso, temos:

$$v_{0,1}^2 = \frac{GM}{R_T}$$

$$v_{f,1}^2 = GM \left(\frac{2}{R_T} - \frac{1}{a} \right)$$

A órbita de transferência possui $a = (R_T + R_M)/2$,

$$v_{f,1}^2 = \frac{2GM}{R_T} \left(\frac{R_M}{R_T + R_M} \right)$$

Já no segundo impulso,

$$v_{0,2}^2 = GM \left(\frac{2}{R_M} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2GM}{R_M} \left(\frac{R_T}{R_T + R_M} \right)$$

$$v_{f,2}^2 = \frac{GM}{R_M}$$

Sendo $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = (v_{f,1} - v_{0,1}) + (v_{f,2} - v_{0,2})$, podemos equacionar:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T} \left(\frac{R_M}{R_T + R_M} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{R_T}} + \sqrt{\frac{GM}{R_M}} - \sqrt{\frac{2GM}{R_M} \left(\frac{R_T}{R_T + R_M} \right)}$$

Utilizando $M = M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $R_M = 1,5$ UA e $R_T = 1$ UA, encontramos o valor numérico de $\Delta v \approx 5,42$ km/s.

b) Utilizando a equação dos foguetes, temos:

$$v = u \ln \left(\frac{M_0}{M} \right) \rightarrow \frac{M_0}{M} = 1 + \frac{\mu}{M} = e^{v/u}$$

Onde μ é a massa de gás.

$$\mu = M(e^{v/u} - 1) \approx 7,12 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

O que é condizente com a realidade, uma vez que a massa do combustível é $\approx 83\%$ da massa total do foguete.

- [3] **Problema 9.** Marisso estava estudando um sistema binário com inclinação i . Ele conseguiu descobrir que o maior redshift vindo da estrela 1 era z_1 . Sabendo disso, ache uma expressão para a massa da estrela 2, m_2 , deixe sua resposta em função de z_1 , do período do binário P , da inclinação i , da razão entre as massas $\lambda = m_2/m_1$ e de constantes fundamentais.

Solução

A velocidade com que 1 orbita o CM é:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}$$

Pela geometria, a velocidade radial é $v_{r,1} = v_1 \sin i$, com isso:

$$z_1 \approx \frac{v_{r,1}}{c} = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P c}$$

Do teorema do centro de massa:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{\lambda}$$

Utilizando a terceira Lei de Kepler:

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} &= \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \\ \frac{a_1^3 (1 + 1/\lambda)^3}{P^2} &= \frac{G m_2 (1 + 1/\lambda)}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Isolando m_2 :

$$m_2 = \frac{4\pi^2 a_1^3 (1 + 1/\lambda)^2}{G P^2}$$

a_1 pode ser obtido avaliando a fórmula do redshift, $a_1 = P c z_1 / 2\pi \sin i$:

$$m_2 = \frac{4\pi^2}{GP^2} \left(\frac{z_1 P c}{2\pi \sin i} \right)^3 (1 + 1/\lambda)^2$$

Por fim, simplificando:

$$m_2 = \frac{z_1^3 c^3 P}{2\pi G \sin^3 i} (1 + 1/\lambda)^2$$

- [2] **Problema 10.** Qual é a razão entre a) as forças gravitacionais causadas pelo Sol e pela Lua na superfície da Terra? E b) das forças de maré causadas pelo mesmo?

Solução

- a) A força gravitacional tem a forma:

$$F_G = \frac{GMm}{d^2}$$

Assim,

$$\frac{F_\odot}{F_L} = \frac{M_\odot}{M_L} \left(\frac{d_{T-L}}{d_{T-\odot}} \right)^2 \approx 178,33$$

- b) Para as forças de maré, temos:

$$F_M \propto \frac{m}{d^3}$$

$$\therefore \frac{F_\odot}{F_L} = \frac{M_\odot}{M_L} \left(\frac{d_{T-L}}{d_{T-\odot}} \right)^3 \approx 0,456$$

- [4] **Problema 11.** (Morin 7.7) Uma partícula de massa m viaja em uma órbita hiperbólica com uma massa M fixa em um dos focos. A velocidade no infinito é v_0 e o parâmetro de impacto é b .

- a) Mostre que o ângulo de desvio da partícula é dado por:

$$\phi = \pi - 2 \tan^{-1}(\gamma b)$$

Onde $\gamma \equiv v_0^2/GM$.

- b) Sendo $d\sigma$ a seção transversal da partícula (medida quando a mesma se encontra no infinito) que é defletida em um ângulo sólido de tamanho $d\Omega$. Mostre que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\gamma^2 \sin^4(\phi/2)}$$

A título de curiosidade, essa quantidade é chamada de *seção transversal diferencial*.

Solução

- a) O esquema da situação é o seguinte:

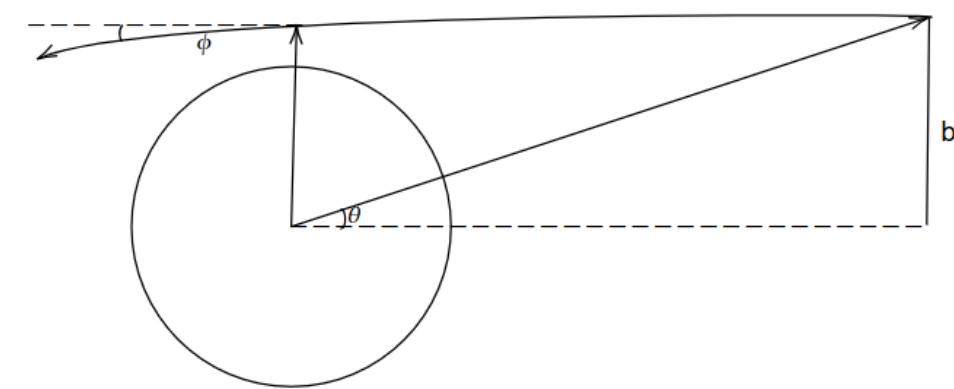


Figura 3: Esquema da Órbita Hiperbólica

Para achar o ângulo de desvio ϕ , vamos usar o teorema do Impulso, considerando as componentes horizontais e verticais da força de atração:

$$F_x = -\frac{GMm}{r^2} \cos \theta, \quad F_y = -\frac{GMm}{r^2} \sin \theta$$

O teorema do Impulso nos diz que:

$$\int F_i dt = \Delta p$$

Onde p_i é o momento da partícula na direção i .

No eixo x , temos:

$$-\int \frac{GMm}{r^2} \cos \theta dt = \Delta p_x$$

Note que integrar com relação ao tempo deixa as coisas inconvenientes, pois descobrir como θ e r variam no tempo é algo complicado. Por isso, vamos recorrer à definição de momento angular. Utilizando que $L = mr^2 d\theta/dt$, temos:

$$dt = \frac{mr^2}{L} d\theta$$

Substituindo esse valor na nossa integral:

$$-\int \frac{GMm^2}{L} \cos \theta d\theta = \Delta p_x$$

Perceba que nossa integral vai de $\theta = 0$, situação no infinito, até $\theta = \pi - \phi$, situação no infinito após o desvio. Assim:

$$-\frac{GMm^2}{L} \int_0^{\pi-\phi} \cos \theta d\theta = -\frac{GMm^2}{L} \sin \theta \Big|_0^{\pi-\phi} = -\frac{GMm^2}{L} \sin(\pi - \phi) = \Delta p_x$$

Analogamente para y :

$$\begin{aligned} -\frac{GMm^2}{L} \int_0^{\pi-\phi} \sin \theta d\theta &= \Delta p_y \\ = \frac{GMm^2}{L} \cos \theta \Big|_0^{\pi-\phi} &\equiv -\frac{GMm^2}{L}(1 - \cos(\pi - \phi)) = \Delta p_y \end{aligned}$$

Note também que $\Delta p_x = m(v_{f,x} - v_0)$, $\Delta p_y = m(v_{f,y} - 0)$. Podemos achar também uma relação de ϕ com as velocidades e, por pura geometria, obtemos:

$$\tan \phi = -\frac{v_{f,y}}{v_{f,x}}$$

Como só há forças centrais, L é um valor constante, e da situação inicial, o mesmo vale $L = mbv_0$. Agora, indo para as contas:

$$-\frac{GM}{bv_0} \sin(\pi - \phi) = v_{f,x} - v_0, \quad -\frac{GM}{bv_0}(1 - \cos(\pi - \phi)) = v_y$$

Com essas duas equações, obtemos:

$$\frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = -\frac{GM(1 - \cos(\pi - \phi))}{bv_0^2 - GM \sin(\pi - \phi)}$$

Ou seja:

$$\tan \phi = \frac{GM(1 - \cos(\pi - \phi))}{bv_0^2 - GM \sin(\pi - \phi)}$$

Resolvendo para ϕ , obtemos o resultado esperado. Uma outra maneira de realizar a mesma questão é pensar puramente na geometria da situação:

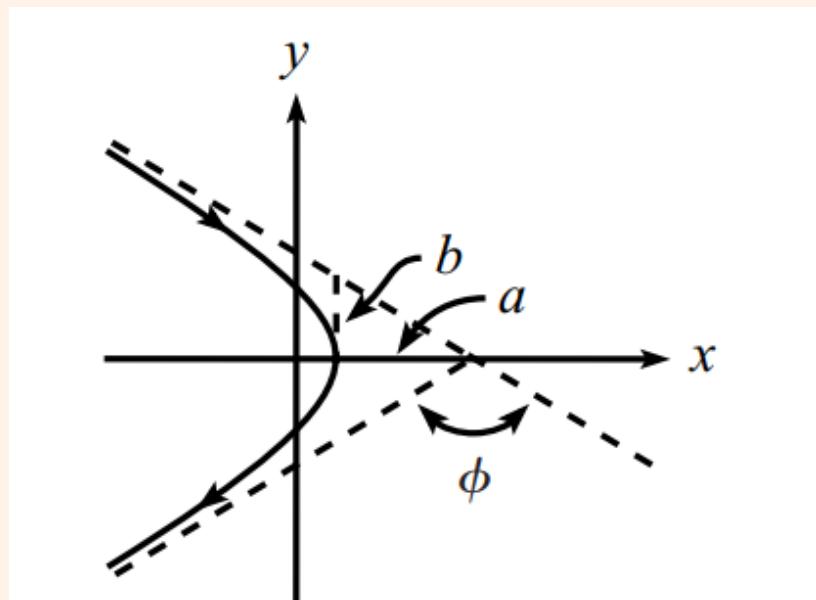


Figura 4: Fonte: Morin 7.7

Aqui, é evidente que:

$$\phi = \pi - 2 \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

Onde b é o parâmetro de impacto e a o semi-eixo da hipérbole. Do conhecimento de cônicas, temos:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{\frac{2EL^2}{m(GMm)^2}} = \frac{v_0^2 b}{GM} \equiv \gamma b$$

Em ambas as maneiras, chegamos no mesmo resultado:

$$\boxed{\phi = \pi - \tan^{-1}(\gamma b)}$$

Como desejado.

- b)** Considere um anel de espessura db e raio b . Agora, considere uma esfera bem grande, com centro em M . Qualquer partícula que passar pela seção transversal do anel de raio b irá atingir essa esfera fazendo um ângulo ϕ com o eixo x , com uma separação angular $d\phi$. Usando que $d \cot x / dx = -1 / \sin^2 x$, temos:

$$\left| \frac{db}{d\phi} \right| = \frac{1}{2\gamma \sin^2(\phi/2)}$$

A área de seção transversal é dada por $d\sigma = 2\pi b db$ e o ângulo sólido de uma esfera é dado por $d\Omega = 2\pi \sin \phi d\phi$. Portanto:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b}{2\pi \sin \phi} \frac{db}{d\phi} = \left(\frac{(1/\gamma) \cot(\phi/2)}{2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2)} \right) \left(\frac{1}{2\gamma \sin^2(\phi/2)} \right)$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\gamma^2 \sin^4(\phi/2)}}$$

Ideia 1

Em certas questões, é válida a utilização de vetores. Um exemplo é a questão abaixo. Para facilitar, na parte de encontrar a inclinação da órbita, observe a seguinte imagem:

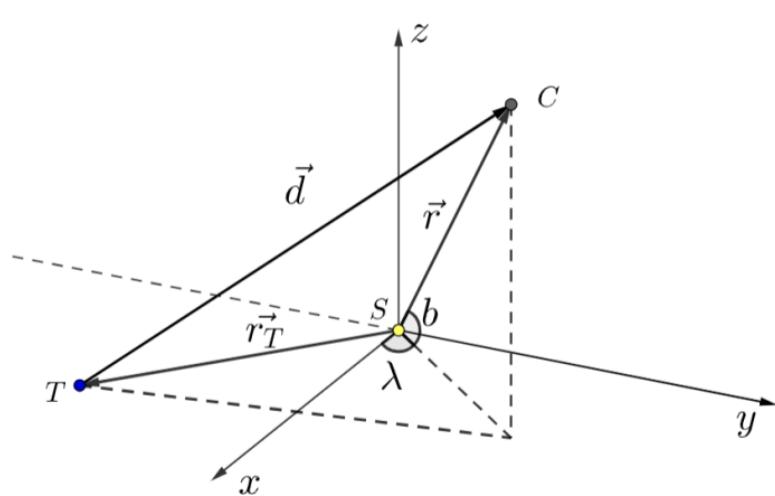


Figura 5: Vetores

Aqui, C representa um corpo, T a Terra e S o Sol. Os ângulos λ e b denotam, respectivamente, a longitude e a latitude eclíptica. \vec{r} é o vetor entre o Sol e o corpo, \vec{r}_T o vetor entre o Sol e a Terra, e \vec{d} o vetor entre a Terra e o corpo. Pela figura,

$$\vec{r} = r(\cos b \cos \lambda \hat{x} + \cos b \sin \lambda \hat{y} + \sin b \hat{z})$$

$$\vec{r}_T = r_T(\cos(\omega_{\oplus} t) \hat{x} + \sin(\omega_{\oplus} t) \hat{y})$$

Assim, $\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_T$:

$$\vec{d} = (r \cos b \cos \lambda - r_T \cos(\omega_{\oplus} t)) \hat{x} + (r \cos b \sin \lambda - r_T \sin(\omega_{\oplus} t)) \hat{y} + r \sin b \hat{z}$$

Calculando o módulo do vetor \vec{d} , obtemos que:

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{r_T^2 + r^2 - 2r_T r \cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t)}$$

Portanto:

$$\boxed{\cos b \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t) = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r}}$$

- [5] Problema 12.** (Lista 1 - Vinhedo 2024) CR4b-2023 é uma sonda em órbita heliocêntrica que foi construída e lançada em 2023 pelo jovem prodígio Caranguejo. O objetivo da sonda era estudar as tempestades solares e captar dados para que Caranguejo analisasse em seu observatório no Espírito Santo. CR4b-2023, porém, durante uma de suas expedições ao Sol, foi atingida por uma tempestade solar e sofreu uma danificação grave. Devido a isso, a sonda se desorientou e, assim, teve todos os seus parâmetros orbitais alterados, de maneira que Caranguejo não soubesse mais sua localização.

Visando rastrear a posição de CR4b-2023 novamente, Caranguejo utilizou-se de seu observatório para coletar os valores das separações angulares $\Delta\phi$ entre a sonda e o Sol e os valores do diâmetro angular θ_S da sonda, tudo em função do tempo t . A tabela obtida por Caranguejo pode ser vista abaixo.

$\Delta\phi$ (Graus)	θ_S (mas)	t (Dias)
0,000	99,27	0,00
4,889	103,67	1,79
17,354	104,72	7,43
29,015	93,06	20,62
27,793	81,18	25,41
13,460	79,77	45,98
11,539	77,97	51,61
2,466	76,44	54,53
2,656	74,84	55,31
7,177	73,90	57,19
10,800	70,63	58,43
22,464	72,92	91,67
13,823	80,50	130,48

Tabela 1: Valores medidos por Caranguejo

Considere que, no momento inicial $t_0 = 0$ em que a sonda é atingida pela tempestade solar, o Sol estava exatamente no ponto de Libra e o movimento da sonda era ascendente em relação ao plano da eclíptica. Além disso, considere que o raio da sonda, supostamente esférica, é dado por $R = 30$ km. Para essa questão, não é necessário fazer análise de erros (apesar de ser importante tentar utilizar métodos visando diminuir erros estatísticos). Com base no que foi apresentado:

- (a) Calcule os parâmetros orbitais da órbita de CR4b-2023, ou seja, seu semi-eixo maior a , excentricidade e , inclinação i , longitude do nodo ascendente Ω e argumento do periélio ω . Como em todas as questões de análise de dados, você deve fornecer tabelas de dados claramente rotuladas, gráficos claramente rotulados e derivações de fórmulas suficientes para deixar claro o que você mediu e como está derivando seus resultados visando reduzir erros estatísticos.
- (b) Considerando (x', y', z') como as coordenadas de CR4b-2023 em um sistema cartesiano de mão direita em que o plano $x'y'$ se localiza no plano da órbita da sonda, o Sol se localiza na origem, e o eixo x' aponta para o ponto vernal, escreva, em uma tabela, os valores de pelo menos 5 pontos (x', y', z') distintos. Com base nos dados encontrados, esboce, em um gráfico, a órbita de CR4b-2023, indicando as coordenadas de seu centro.
- (c) Considerando agora um novo sistema de coordenadas de mão direita (x, y, z) , no qual o Sol se localiza na origem, o plano xy representa o plano da eclíptica, e o eixo x aponta para o ponto vernal, escreva as coordenadas do centro da órbita de CR4b-2023. Por fim, calcule a distância d_{TC} entre o centro da órbita terrestre e o centro da órbita da sonda.

Solução

- a) A ideia dessa parte da questão é encontrar uma relação entre os dias e a distância da sonda até o Sol. Utilizando trigonometria básica, podemos dizer que a distância da sonda até a Terra é dada por:

$$d_{S-\oplus} = R / \tan^{-1} \left(\frac{\theta_S}{2} \right)$$

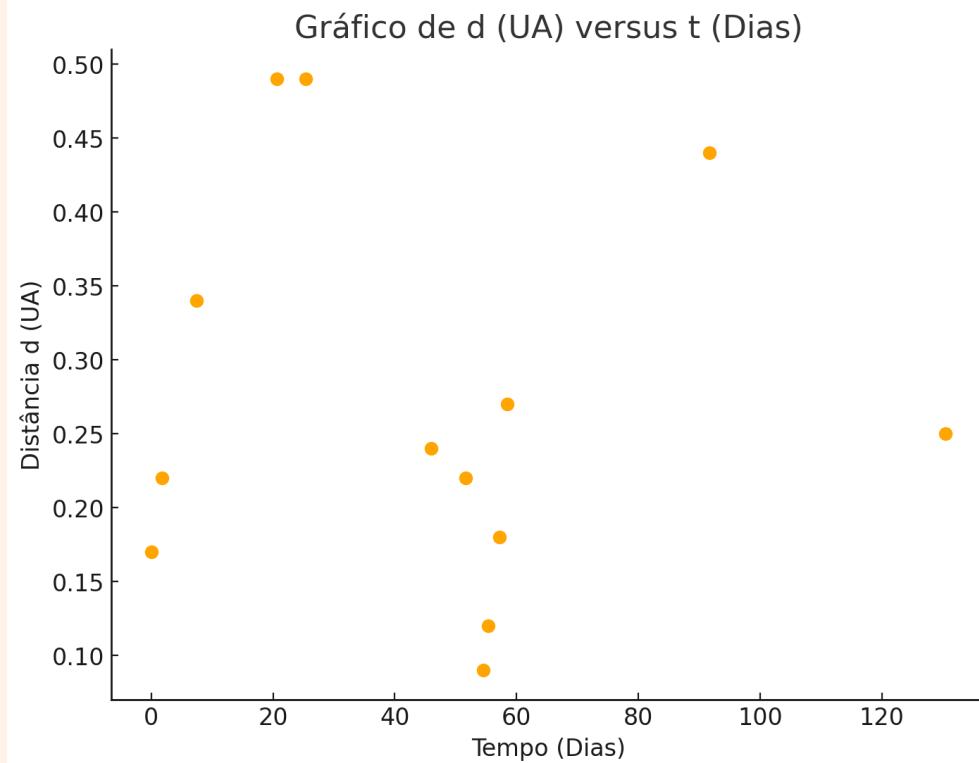
Onde R é o raio da sonda. Aqui, podemos utilizar a lei dos cosenos para encontrar a relação dessa distância com a distância da sonda até o Sol. Considerando a órbita da Terra circular de raio $d_{\odot-\oplus}$ e definindo por d a distância entre a sonda e o Sol, temos:

$$d^2 = d_{\odot-\oplus}^2 + d_{S-\oplus}^2 - 2d_{\odot-\oplus}d_{S-\oplus} \cos \Delta\phi$$

Com isso, podemos montar a seguinte tabela, com os valores de d em UA e os valores de t em dias.

t (Dias)	d (UA)
0.00	0.17
1.79	0.22
7.43	0.34
20.62	0.50
25.41	0.49
45.98	0.24
51.61	0.22
54.53	0.09
55.31	0.12
57.19	0.18
58.43	0.27
91.67	0.44
130.48	0.25

Plotando um gráfico de t por d , temos:



Agora, vamos colocar a mão na massa e achar os parâmetros requisitados: semi-eixo maior, a , excentricidade, e , inclinação, i , longitude do nodo ascendente Ω e argumento do periélio, ω . Os dois primeiros podem ser obtidos diretamente dos dados que analisamos até o momento.

Analizando os dados, podemos perceber que a menor distância entre a sonda e o Sol é dada por $a_p = 0,09$ UA e a maior distância é dada por $a_a = 0,49$ UA. Essas distâncias devem corresponder ao periélio e ao afélio, respectivamente. Utilizando a definição:

$$a_p = a(1 - e), \quad a_a = a(1 + e) \rightarrow \frac{a_p}{a_a} = \frac{1 - e}{1 + e} \approx 0,18$$

Resolvendo, obtemos $e \approx 0,67$.

Usando que $a = \frac{a_p + a_a}{2}$, obtemos $a \approx 0,30$ UA.

Para acharmos os fatores angulares, temos que pensar um pouco mais. Começando por Ω , note que no momento inicial, em $t = 0$, a separação angular entre o Sol e a sonda é $\Delta\phi = 0$. O enunciado nos diz que nesse momento o Sol se encontra no ponto de Libra, assim, temos que a sonda também se encontra no ponto de Libra e, como seu movimento era ascendente, temos $\Omega = 0^\circ$.

Para encontrar ω e i , vamos nos atentar ao seguinte triângulo esférico:

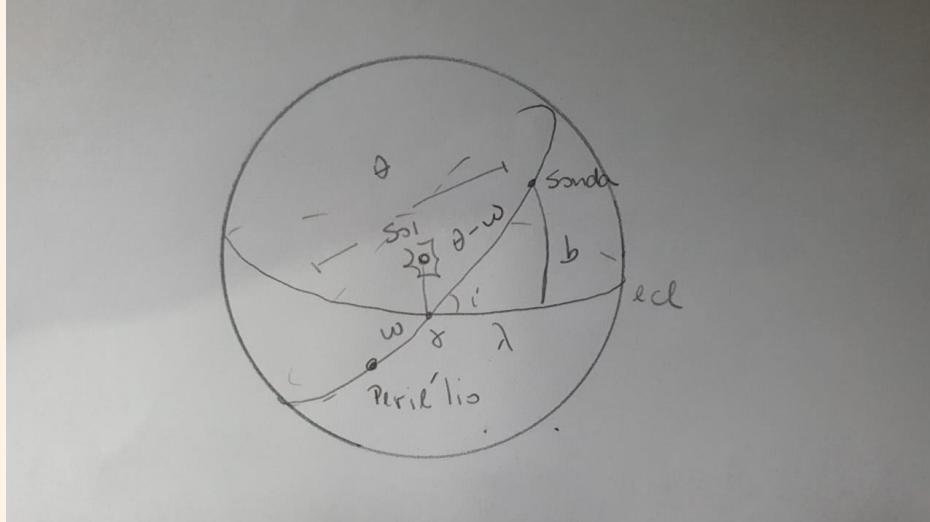


Figura 6: Esquema

Da forma polar da elipse, $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, onde θ é a anomalia verdadeira da órbita, podemos encontrar ω . Perceba que no instante inicial, $t = 0$, a sonda está exatamente no ponto de Libra, assim $\theta = 2\pi - \omega$ conforme o esquema.

Assim, temos:

$$d(0) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(2\pi-\omega)}$$

Resolvendo para ω :

$$\omega = 2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{a(1-e^2)}{d(0)e} - \frac{1}{e} \right) \approx 267,6^\circ \approx 270^\circ$$

Substituindo os valores encontrados.

Para achar a inclinação, vamos utilizar a lei dos cossenos:

$$\cos(\theta - \omega) = \cos \lambda \cos b + \sin \lambda \sin b \cos(\pi/2) = \cos \lambda \cos b$$

Note que $\cos(\theta - \omega) \approx \cos(\theta - 270^\circ) = \sin \theta$.

Reescrevendo,

$$\cos b = \frac{\sin \theta}{\cos \lambda}$$

Utilizando a relação obtida na ideia anterior,

$$\cos b = \frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r \cos(\lambda - \omega_{\oplus} t)}$$

Igualando essas expressões e resolvendo para λ ,

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{r_T^2 + r^2 - d^2}{2r_T r \sin \theta \sin(\omega_{\oplus} t)} - \cot(\omega_{\oplus} t) \right)$$

Onde:

$$\theta = \arccos \left(\frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e} \right)$$

Com isso, podemos fazer a seguinte tabela, com os valores de b e λ .

λ (Graus)	b (Graus)
0,000	0,00
17,495	9,847
45,905	22,521
78,492	29,499
101,508	29,499
134,095	22,521
163,504	9,847
180,000	0,000
197,495	-9,847
216,005	-18,747
270	-30
333,435	-14,478
17,495	9,847
78,492	29,499
143,994	18,747

Voltando ao triângulo esférico e utilizando a lei dos quatro elementos, temos:

$$\cos \lambda \cos 90^\circ = \sin \lambda \cot b - \sin 90^\circ \cot i$$

Simplificando:

$$\tan b = \tan i \sin \lambda$$

Note que isso se assemelha a uma função do tipo $y = A + Bx$. Fazendo uma regressão linear na calculadora, encontramos $B \approx 0,578$. De modo que $\tan i = B$, chegamos em:

$$i \approx 30^\circ$$

- b)** Como o Sol se localiza na origem, os valores de x' e y' podem ser calculados por:

$$x' = r \sin \theta$$

e

$$y' = -r \cos \theta$$

Escrevendo em uma tabela cinco valores diferentes de x' e y' , obtemos que:

Tabela 7: Valores de x' e y'

x' UA	y' UA
0, 167	0, 000
0, 084	0, 478
-0, 219	0, 261
-0, 203	0, 074
0, 000	-0, 100

Perceba que quaisquer valores, desde que corretos, de x' e y' podem ser utilizados. Além do mais, é importante aumentar o espaçamento entre os valores de x' e y' visando diminuir os erros associados ao esboço da órbita. Com base nisso, podemos plotar o gráfico:

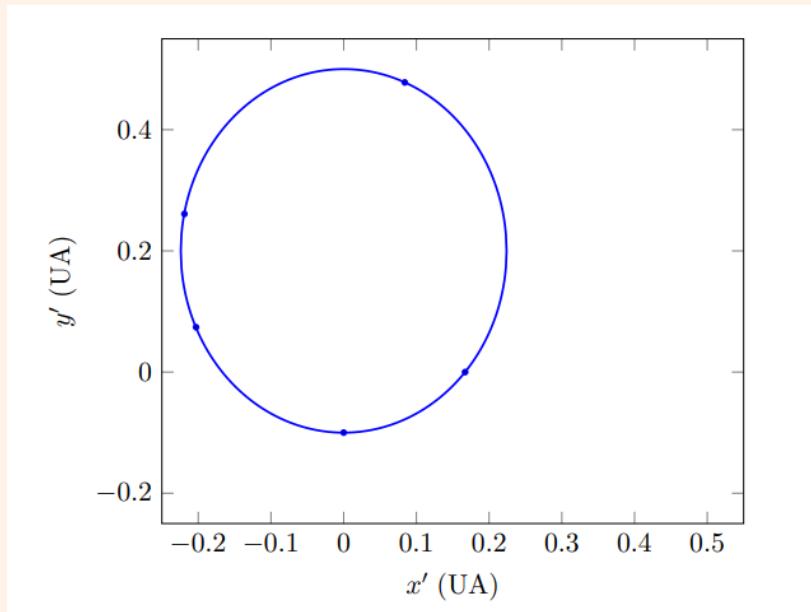


Figura 7: Gráfico da órbita

Observando o gráfico, vemos que as coordenadas (x', y', z') do centro da elipse são $\boxed{(0; 0, 2; 0)}$.

- c) Aqui, vamos utilizar uma matriz de rotação em torno do eixo x , dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Para $\alpha = i = 30^\circ$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Então:

$$x = x'$$

$$y = y' \cos 30^\circ + z' \sin 30^\circ$$

$$z = -y' \sin 30^\circ + z' \cos 30^\circ$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos que as coordenadas (x, y, z) do centro de CR4b-2023 são dadas por:

$$(0.000, 0.173, -0.100).$$

Por fim, obtemos então que a distância entre o centro da órbita terrestre e o centro da órbita da sonda é dada por:

$$d = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2|}$$

ou seja:

$$d = 0.200 \text{ UA}$$

- [5] **Problema 13.** (Iran Problem Set) Uma partícula de massa m está orbitando um objeto massivo de massa M . Mostre que o impulso necessário para fazer a órbita girar um ângulo η em torno de um dos focos é dado por:

$$\Delta v = \frac{2\mu e}{h} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

onde:

- h é o momento angular por unidade de massa;
- $\mu = GM$, sendo G a constante gravitacional.

Solução

Desenhando a órbita e a órbita rotacionada:

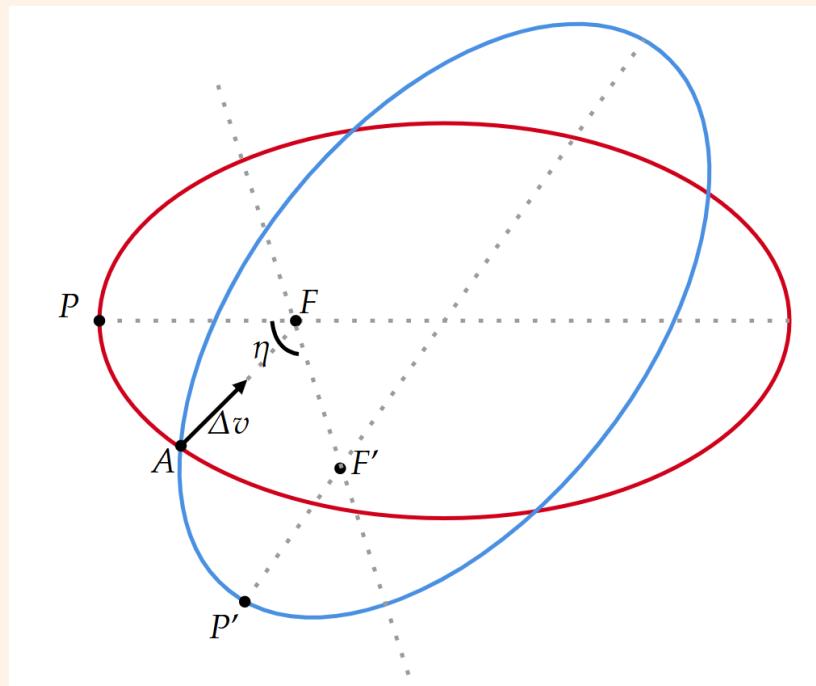


Figura 8: Esquema da órbita rotacionada.

Perceba que o impulso só pode ser realizado nos pontos de interseção das duas órbitas e deve ser radial, uma vez que o momento angular deve continuar constante, a fim de manter a órbita idêntica. Vamos definir por X um ponto na órbita antes do impulso e X' um ponto na órbita após a rotação.

Vamos às seguintes definições: F é o foco, P é o periélio da órbita, e A é o ponto de interseção onde é realizado o impulso.

Por simetria, note que os ângulos AFP e AFF' são iguais e, portanto, têm valor $\eta/2$.

Como as duas órbitas possuem o mesmo momento angular, a velocidade tangencial no ponto A deve ser equivalente para ambas as órbitas. Além disso, podemos perceber que o ponto A possui anomalia verdadeira $\theta = \eta/2$, o que garante que o módulo da velocidade também seja o mesmo para ambas as órbitas.

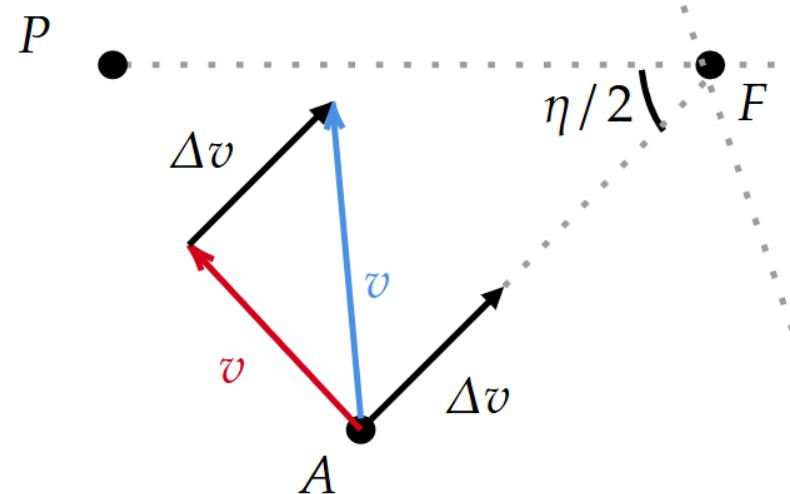


Figura 9: Vetores de velocidade.

A única maneira de isso ser possível seria se o impulso radial fosse dado por $\Delta v = 2v_r$, onde v_r é a velocidade radial imediatamente antes do impulso.

É claro que $v_r^2 = v^2 - v_t^2$, onde v_t é a velocidade tangencial. Partindo de definições básicas:

$$h^2 = \mu a(1 - e^2), \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}, \quad v_t = \frac{h}{r}, \quad v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Trabalhando com essas equações, chegamos a:

$$v^2 = \frac{\mu^2}{h^2}(1 + 2e \cos \theta + e^2), \quad v_t^2 = \frac{\mu^2}{h^2}(1 + e \cos \theta)^2.$$

Por fim, substituindo em $v_r^2 = v^2 - v_t^2$, obtemos:

$$v_r^2 = \frac{\mu^2}{h^2}(e^2 - e^2 \cos^2 \theta) \equiv \frac{\mu^2 e^2}{h^2} \sin^2 \theta.$$

Substituindo $\Delta v = 2v_r$ e $\theta = \eta/2$, chegamos ao resultado desejado:

$$\boxed{\Delta v = \frac{2\mu e}{h} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \blacksquare}$$

- [3] Problema 14.** Nessa questão, vamos estudar um modelo simplificado para o efeito que confirmou a Teoria da Relatividade Geral de Einstein: as lentes gravitacionais. A presença de um corpo massivo curva o espaço-tempo, fazendo com que estrelas possam servir como lentes no espaço. Alguns telescópios, como o JWST, utilizam esse efeito para conseguir fotografar aglomerados de galáxias muito distantes. Uma das fotos tiradas pelo JWST de uma lente gravitacional pode ser vista a seguir:

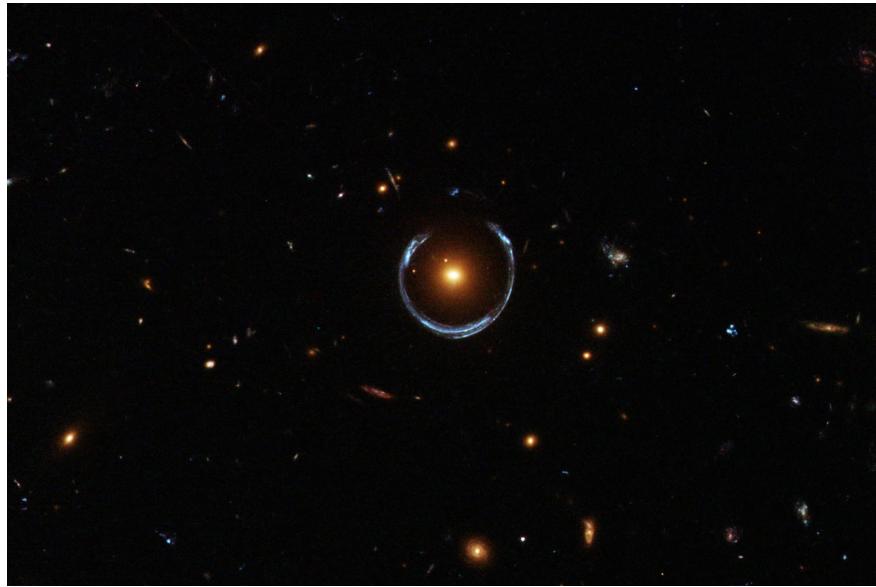


Figura 10: Fonte: National Geographic

Um esquema simplificado das lentes gravitacionais pode ser observado a seguir. Esse "círculo" é conhecido como Anel de Einstein.

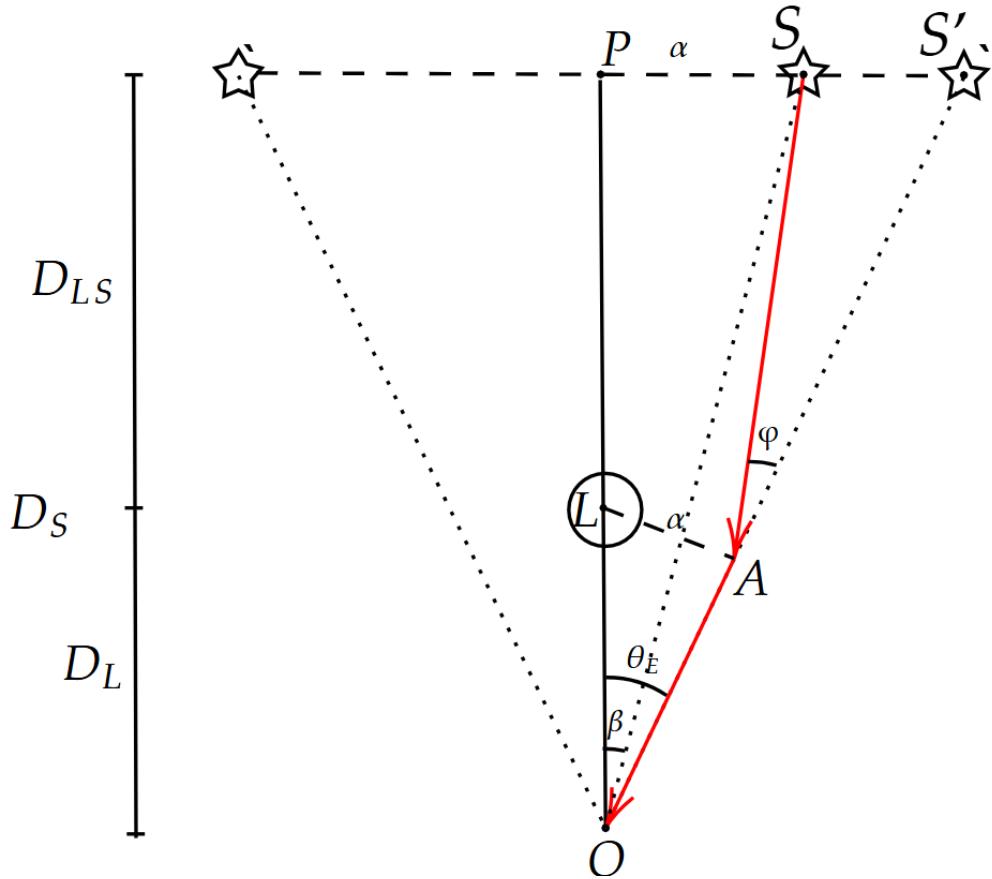


Figura 11: Esquema da lente gravitacional

No esquema, o ponto O representa o observador, L o corpo massivo que atua como uma lente, S a posição real do objeto observado e S' sua posição aparente, α é o parâmetro de impacto, β a separação angular entre o corpo observado e a lente, θ_E o raio angular do anel de Einstein, φ o desvio angular causado por um corpo massivo. A distância \overline{OL} vale D_L e a distância \overline{OP} vale D_S , de modo que $D_S - D_L = D_{LS}$.

Todos os ângulos são muito pequenos, de modo que $\sin x \approx \tan x \approx x$. Além disso, por estarem no infinito, as retas \overline{OP} , \overline{OS} e $\overline{OS'}$ podem ser aproximadas como paralelas.

É um resultado conhecido da Teoria da Relatividade Geral que o desvio da luz causado por um corpo massivo é dado por:

$$\varphi = \frac{4GM}{\alpha c^2}$$

- a) No limite em que $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$, encontre uma expressão para θ_E em função das demais distâncias e ângulos fornecidos.
- b) O telescópio JWST obtém imagens no infravermelho, de comprimento de onda λ_{IV} . Quão grande deve ser seu diâmetro para que ele possa resolver um anel de Einstein?

Solução

a) Note que, quando $\alpha \rightarrow 0$, $\overline{PL} = \overline{AS} = D_{LS}$. Utilizando $\tan \theta = \sin \theta = \theta$, temos:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \overline{PS} = D_S \beta = \alpha, \quad (2) \quad \overline{SS'} = D_{SL} \varphi, \quad (3) \quad \overline{PS'} = D_S \theta_E, \\ (4) \quad & \overline{OL} = D_L = \overline{LA}/\theta_E = \alpha \theta_E, \quad (5) \quad \overline{LA} = \overline{PS}, \quad (6) \quad \overline{PS'} = \overline{PS} + \overline{SS'} \end{aligned}$$

Substituindo (1), (2), (3) em (6),

$$D_S \theta_E = D_S \beta + (D_S - D_L) \varphi$$

$$\theta_E - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \varphi$$

Substituindo o valor de φ :

$$\theta_E - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{\alpha c^2}$$

Utilizando (4), temos $\alpha = D_L \theta_E$ e substituindo na nossa equação:

$$\theta_E - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{D_L \theta_E c^2}$$

$$\theta_E^2 - \beta \theta_E = \frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{c^2}$$

O limite de $\alpha \rightarrow 0$ implica que $\beta \rightarrow 0$, assim:

$$\boxed{\theta_E = \sqrt{\frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{c^2}}}$$

b) Utilizando o critério de Rayleigh $\theta = R \frac{\lambda}{D}$, onde $R \approx 1,22$. Isolando D e substituindo $\theta = \theta_E$:

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{c^2 R^2 \lambda_{IV}^2}{4GM} \frac{D_S}{D_S - D_L}}}$$

[4] **Problema 15.** Neste exercício, vamos estudar propriedades da excentricidade das órbitas e entender como ela se relaciona com a energia e o momento angular. Denotando $\mu = GM$ e $h = L/m$, faça o que se pede nos itens a seguir.

Parte I: O vetor excentricidade

a) Escreva uma expressão para a segunda lei de Newton no formato vetorial para um corpo de massa m orbitando um corpo de massa M a uma distância r .

- b) Faça o produto vetorial da sua expressão por \mathbf{h} e prove que:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r} \mathbf{v} - \frac{\mu \dot{r}}{r^2} \mathbf{r}$$

Onde $\dot{\mathbf{r}}$ representa a velocidade radial e \mathbf{v} a velocidade.

- c) Podemos escrever o lado direito da equação anterior como:

$$\frac{d}{dt}(A\mathbf{r})$$

Encontre o valor de A .

- d) Integre os dois lados da igualdade encontrada e faça a multiplicação escalar de ambos os lados por \mathbf{r} . Após isso, resolva para r . O seu resultado deve ser bem parecido com o previsto somente pela geometria:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Encontre os valores de p e e . **Não esqueça da constante de integração. Suas respostas podem depender dela.**

- e) No item anterior, e é a excentricidade da órbita. Voltando à equação obtida inicialmente no item c, após a integração, ache uma forma de expressar \mathbf{e} , como sendo um vetor de módulo e e que aponta diretamente para o corpo orbitado.
- f) Prove que a relação encontrada no item anterior pode ser escrita como:

$$\mu \mathbf{e} = (v^2 - \frac{\mu}{r}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

Para onde esse vetor aponta?

Parte II: Determinando elementos orbitais a partir do vetor excentricidade

Vamos definir o nosso sistema de coordenadas da seguinte maneira. Considere um sistema de mão direita, orientado de tal forma que o plano xy coincida com o plano equatorial e com \mathbf{z} apontando para o polo norte. Definindo o vetor nodal como $\mathbf{n} = \mathbf{z} \times \mathbf{h}$.

- a) Encontre uma expressão para \mathbf{h} em função das componentes do vetor \mathbf{r} e do vetor \mathbf{v} . Após isso, encontre o vetor \mathbf{n} em função das componentes de \mathbf{h} .
- b) Desenhe uma esfera celeste e represente nela: o plano do equador e uma órbita qualquer (que tenha inclinação diferente de 0). Nela, marque os seguintes ângulos: i , a inclinação orbital, Ω a longitude do nodo ascendente, ω o argumento do periastro e θ , a anomalia verdadeira.
- c) Encontre expressões para todos esses ângulos em função de \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{n} , \mathbf{r} e qualquer um dos vetores definidos no nosso sistema de coordenadas xyz .

Solução**Parte I**

a) Utilizando a forma vetorial da força gravitacional, temos:

$$-\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = m\ddot{\mathbf{r}} \rightarrow \boxed{\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}}$$

b) Fazendo o produto vetorial dessa expressão por \mathbf{h} , temos:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r})$$

Uma vez que \mathbf{h} é constante, o lado esquerdo da equação pode ser escrito como $d(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})/dt$. Para o lado direito, vamos escrever $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ e utilizar a regra do BAC-CAB, que diz que $(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$. Desse modo:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r^3}((\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}) = \frac{\mu}{r^3}(r^2\mathbf{v} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}))$$

Note que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ é a multiplicação das componentes de \mathbf{r} e \mathbf{v} que estão na mesma direção. Assim, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\dot{r}$. Substituindo na expressão anterior:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mu}{r}\mathbf{v} - \frac{\mu\dot{r}}{r^2}\mathbf{r}}$$

c) Abrindo a expressão fornecida pelo enunciado:

$$\frac{d}{dt}(A\mathbf{r}) = \mathbf{r}\frac{d}{dt}A + A\mathbf{v}$$

Comparando as expressões, é fácil perceber que $\boxed{A = \mu/r}$.

d) Utilizando as informações obtidas nos itens anteriores, temos:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

Multiplicando ambos os lados por dt e integrando, temos:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r}\mathbf{r} + \mathbf{B}$$

Onde B é um vetor constante de integração. Agora, fazendo o produto escalar com \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$$

Usando que $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ e definindo ν como o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{B} , temos:

$$h^2 = \mu r + rB \cos \nu$$

Resolvendo para r , chegamos em:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (B/\mu) \cos \nu}$$

Assim:

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \quad e = \frac{B}{\mu}$$

e) Utilizando $\mathbf{e} = \mu \mathbf{B}$ e voltando ao item d), temos:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r} \mathbf{r} + \mu \mathbf{e}$$

Resolvendo para \mathbf{e} e notando que $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{v} \times \mathbf{h}$, temos:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

f) Escrevendo $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, temos:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Multiplicando os dois lados da expressão por μ , e usando o BAC-CAB, temos:

$$\mu \mathbf{e} = v^2 \mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\mu}{r} \mathbf{r}$$

Reorganizando os termos:

$$\mu \mathbf{e} = (v^2 - \frac{\mu}{r}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

[5] Problema 16. ★★ (Adaptado IPhO 2018) Um dos efeitos mais interessantes da relatividade geral é a emissão de ondas gravitacionais (OG's) por binárias próximas. Um dos efeitos disso é a perda de energia do sistema. Nesta questão, iremos estudar esse efeito a fundo.

a) Considere um sistema formado pelas estrelas 1 e 2, com massas M_i e distando r_i do centro de massa. Utilizando a segunda lei de Newton, é possível demonstrar que:

$$\mathbf{a}_1 = -\alpha \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^n}$$

Onde \mathbf{a}_1 é o vetor aceleração da estrela 1. Encontre o valor de $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ (lê-se α em função de G, M_1, M_2) e de n .

- b)** A energia total do sistema binário pode ser expressa como:

$$E = A(\omega, \mu, L) - \frac{GM\mu}{L}$$

Onde μ é a massa reduzida do sistema, $M = M_1 + M_2$ e $L = r_1 + r_2$. Encontre o valor de A .

- c)** A expressão anterior pode ser simplificada para:

$$E = \frac{\beta GM\mu}{L}$$

Onde β é uma constante adimensional. Encontre seu valor.

A teoria correta da gravidade, a Relatividade Geral, foi formulada por Einstein em 1915 e prevê que a gravidade se propaga à velocidade da luz. Os mensageiros que carregam informações sobre a interação são chamados de ondas gravitacionais (OGs). OGs são emitidas sempre que massas são aceleradas, fazendo com que o sistema de massas perca energia.

Considere um sistema de duas partículas pontuais, isoladas do restante do Universo. Einstein provou que, para velocidades suficientemente pequenas, as ondas emitidas: 1) têm uma frequência que é duas vezes maior do que a frequência orbital; 2) podem ser caracterizadas por uma luminosidade, ou seja, um poder emitido \mathcal{P} , que é dominado pela fórmula:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right).$$

Aqui, c é a velocidade da luz $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. Para um sistema de duas partículas pontuais orbitando no plano $x - y$, Q_{ij} é a seguinte tabela (i, j indicam o número da linha/coluna):

Os componentes de Q_{ij} são dados por:

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2),$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A.$$

E $Q_{i,j} = 0$ para todas as outras possibilidades. Aqui, x_A, y_A são as posições da estrela A , com $A = 1, 2$ em um plano cartesiano com o centro de massa na origem.

- d)** Escreva as coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em função de r_1, r_2, ω e t , com t sendo o tempo percorrido desde algum ponto específico da órbita.

- e) Para calcular a potência dissipada, a fórmula possui uma soma quádrupla. Resolver essa expressão "na tora" é algo bem complicado e demorado. Porém, felizmente, há um jeito mais bonito e elegante de resolvê-la. Para isso, comece escrevendo $Q_{i,j}$ como uma matriz 3x3, da seguinte forma:

$$Q = A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Encontre o coeficiente $A = A(\mu, L)$ e complete a matriz Q .

- f) Do item anterior, você deve obter:

$$Q_{ii} = A(b_i + j_i \cos(kt)), \quad Q_{ij}^{i \neq j} = A(p_{ij} \sin(kt))$$

Encontre os valores de b_i , j_i , p_{ij} e k .

- g) Agora, você é capaz de resolver para \mathcal{P} de maneira mais fluida. A expressão pode ser simplificada para:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \omega^6$$

Encontre o valor numérico de ξ .

DICA: O somatório duplo:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A_{ij})(A_{ij})$$

Onde A é uma matriz $N \times N$ pode ser simplificado para:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^2$$

Que representa a soma quadrática de todos os elementos da matriz A .

- h) Caso não houvesse a emissão de OG's, o sistema continuaria em equilíbrio indeterminadamente, mas devido à sua emissão, a energia do sistema não é conservada, fazendo com que haja uma variação na velocidade angular do sistema, ω . A fórmula para a variação temporal de ω tem a seguinte cara:

$$\left(\frac{d\omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5$$

Onde M_c é a chamada Massa Chirp e $M_c = M_c(M, \mu)$. Encontre uma fórmula para M_c .

- i) Usando as informações obtidas acima, relate a velocidade angular orbital ω com a frequência das ondas gravitacionais f_{OG} . Sabendo que, para qualquer função suave $F(t)$ e $a \neq 1$:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \implies F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t_0 - t),$$

onde χ é uma constante e t_0 é uma constante de integração, mostre que a equação do item anterior implica que a frequência das ondas gravitacionais é:

$$f_{OG}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p},$$

e determine a constante p .

Em 14 de setembro de 2015, o evento GW150914 foi registrado pelos detectores LIGO, consistindo de dois braços em forma de L, cada um com 4 km de comprimento. Esses braços mudaram de comprimento relativo de acordo com a Figura abaixo. Os braços do detector respondem linearmente a uma onda gravitacional que passa, e o padrão de resposta imita a onda. Essa onda foi criada por dois buracos negros em órbitas quase circulares; a perda de energia por radiação gravitacional causou a contração da órbita e, eventualmente, a colisão dos buracos negros. O ponto de colisão corresponde, aproximadamente, ao pico do sinal após o ponto D, na Figura abaixo.

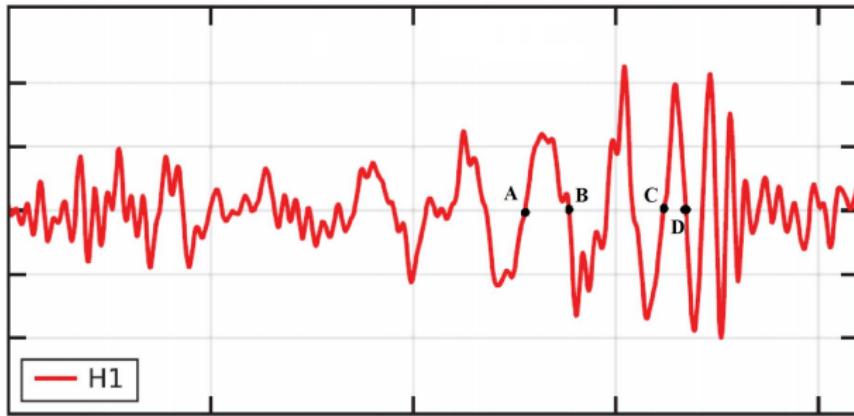


Figura 12: Deformação, ou seja, variação relativa do tamanho de cada braço, no detector LIGO H1. O eixo horizontal representa o tempo, e os pontos A, B, C, D correspondem a $t = 0, 000, 0, 009, 0, 034, 0, 040$ segundos, respectivamente.

- j) A partir da figura, estime $f_{OG}(t)$ em:

$$t_{AB} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{e} \quad t_{CD} = \frac{t_D + t_C}{2}.$$

Assumindo que a equação para f_{OG} é válida até a colisão (o que, estritamente falando, não é verdade) e que os dois objetos possuem massas iguais, estime a massa "chirp", M_c , e a massa total do sistema, em termos de massas solares $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

- k) Estime a separação orbital mínima entre os dois objetos em t_{CD} . Assim, estime um tamanho máximo para cada objeto, R_{\max} . Obtenha $\frac{R_\odot}{R_{\max}}$ para comparar esse tamanho com o raio do nosso Sol, $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km. Estime também sua velocidade orbital linear no mesmo instante, v_{col} , comparando-a com a velocidade da luz, $\frac{v_{\text{col}}}{c}$.

Solução

a) Da segunda lei de newton,

$$-\frac{GM_1M_2}{(r_1 + r_2)^3} \mathbf{d} = M_1 \mathbf{a}_1$$

Onde \mathbf{d} é um vetor que saí da estrela dois e vai até a estrela um. Portanto, $|\mathbf{d}| = r_1 + r_2$. Utilizando o teorema do centro de massa, temos

$$r_2 = \frac{M_1 r_1}{M_2}$$

Substituindo e simplificando,

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{GM_2}{r_1^3 (1 + \frac{M_1}{M_2})^3} \mathbf{d}$$

Agora trabalhando no vetor \mathbf{d} , note que a sua direção é a mesma direção que \mathbf{r}_1 , uma vez que a linha que liga 1 e 2, obrigatoriamente passa pelo CM do sistema. Assim,

$$\mathbf{d} = |\mathbf{d}| \hat{\mathbf{r}}_1 = (r_1 + r_2) \hat{\mathbf{r}}_1 = (1 + M_1/M_2) \mathbf{r}_1$$

Substituindo,

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{GM_2}{(1 + M_1/M_2)^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}$$

Com isso, podemos concluir que

$$\alpha = \frac{GM_2}{(1 + M_1/M_2)^2}, \quad n = 3$$

b) A energia do sistema é dada por,

$$E = \frac{M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2}{2} - \frac{GM_1 M_2}{L}$$

Focando no primeiro termo e utilizando-se de que, $v_A = r_A \omega$, temos

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \omega^2$$

Pelo teorema do centro de massa

$$(M_1 r_1 - M_2 r_2)^2 = 0 \rightarrow M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} L^2 \equiv \mu L^2$$

Para o segundo termo, basta multiplicar em cima e embaixo por $(M_1 + M_2)$. Assim,

$$E = \frac{\mu L^2}{2} - \frac{G}{L} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (M_1 + M_2) \equiv \frac{\mu L^2 \omega^2}{2} + \frac{GM\mu}{L}$$

Desse modo, $A = \frac{\mu L^2 \omega^2}{2}$.

c) Pela terceira lei de kepler,

$$\omega^2 = \frac{GM}{L^3}$$

Substituindo,

$$E = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = -\frac{GM\mu}{L}$$

Concluindo assim, que $\beta = -1/2$.

d) Seja, θ o ângulo que o vetor r_1 faz com o eixo x , desse modo,

$$(x_1, y_1) = r_1(\cos \theta, \sin \theta)$$

O vetor r_2 deve fazer um ângulo de $\pi + \theta$. Utilizando que $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$ e $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$,

$$(x_2, y_2) = -r_2(\cos \theta, \sin \theta)$$

Definindo por t o tempo decorrido desde que as estrelas cruzaram o eixo x , tem se $\theta = \omega t$. Logo,

$$(x_1, y_1) = r_1(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \quad (x_2, y_2) = -r_2(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

e) A matrix terá a seguinte cara,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Evocando as fórmulas do enunciado,

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2),$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A.$$

Para Q_{11} , temos,

$$Q_{11} = \frac{M_1}{3}(2x_1^2 - y_1^2) + \frac{M_2}{3}(2x_2^2 - y_2^2)$$

Substituindo x e y ,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{M_1}{3}r_1^2(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) + \frac{M_2r_2^2}{3}(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) \\ Q_{11} &= \frac{1}{3}(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))(M_1r_1^2 + M_2r_2^2) \\ Q_{11} &= \frac{\mu L^2}{3}(2\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) \end{aligned}$$

Para Q_{22} ,

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \frac{M_1r_1^2}{3}(2\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)) + \frac{M_2r_2^2}{3}(2\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)) \\ Q_{22} &= \frac{\mu L^2}{3}(2\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)) \end{aligned}$$

Para Q_{33}

$$\begin{aligned} Q_{33} &= -\frac{M_1r_1^2}{3}(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) - \frac{M_2r_2^2}{3}(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) \\ Q_{33} &= -\frac{\mu L^2}{3} \end{aligned}$$

Por fim, para $Q_{12} = Q_{21}$,

$$Q_{12} = Q_{21} = M_1r_1^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) + M_2r_2^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \mu L^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \sin(2\omega t)$$

Como os de mais termos são 0, podemos escolher como A o valor de $\mu L^2/2$, assim a nossa matriz Q toma forma,

$$Q = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \cos^2(\omega t) - \frac{2}{3} \sin^2(\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \frac{4}{3} \sin^2(\omega t) - \frac{2}{3} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Para os termos a_{11} e a_{22} , vamos utilizar identidades trigonométricas, começando com a_{11} ,

$$\frac{4}{3} \cos^2(\omega t) - \frac{2}{3} \sin^2(\omega t) = \frac{2}{3}(2 \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))$$

Usando $\cos^2(\omega t) = 1 - \sin^2(\omega t)$, temos,

$$= \frac{2}{3}(2 - 3 \sin^2(\omega t))$$

Usando a forma do arco duplo, temos,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Fazendo essa substituição,

$$= \frac{2}{3} \left(2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\omega t) \right) = \frac{1}{3} + \cos(2\omega t)$$

Utilizando o mesmo processo para a_{22} , encontramos

$$a_{22} = \frac{1}{3} - \cos(2\omega t)$$

De modo que nossa matriz pode ser simplificada para,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \frac{1}{3} - \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

f) Analisando a matriz anterior, temos que,

$$A = \frac{\mu L^2}{2}$$

E que

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{3}, \quad b_3 = -\frac{2}{3}, \quad j_1 = 1, \quad j_2 = -1, \quad j_3 = 0, \quad p_{12} = p_{21} = 2, \quad k = 2$$

g) A fórmula fornecida para a potência foi,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right).$$

Para começar, vamos derivar a matriz Q com respeito ao tempo,

$$\frac{d^3 Q}{dt^3} = \frac{\mu L^2}{2} \frac{d^3}{dt^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & \frac{1}{3} - \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Para derivar uma matriz, basta derivarmos todos os seus elementos, ao fazer isso, chegamos em,

$$\frac{d^3 Q}{dt^3} = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} 8\omega^3 \sin(2\omega t) & -8\omega^3 \cos(2\omega t) & 0 \\ -8\omega^3 \cos(\omega t) & -8\omega^3 \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deixando o termo em comum fora da matriz,

$$\frac{d^3 Q}{dt^3} = 4\mu\omega^3 L^2 \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ -\cos(2\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Foi fornecido como dica que o termo

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right)$$

Corresponde a soma quadrática dos membros da matriz, desse modo

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) = (4\mu\omega^3 L^2)^2 (\sin^2(2\omega t) + 2\cos^2(\omega t))$$

Assim,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) = \frac{G}{5c^5} (32\mu^2\omega^6 L^4)$$

Reorganizando,

$$\mathcal{P} = \frac{32}{5} \frac{G\mu^2\omega^6 L^4}{c^5}$$

Comparando essa expressão com a fornecida pelo enunciado, temos,

$\xi = \frac{32}{5}$

h) \mathcal{P} representa a potência que está sendo dissipada pelas OG's, assim,

$$\mathcal{P} = -\frac{dE}{dt}$$

Igualando E a energia da órbita,

$$\mathcal{P} = \frac{GM\mu}{2} \frac{d}{dt} \frac{1}{L}$$

Podemos escrever ω em função de L , para isso, basta utilizar a terceira lei de kepler,

$$\omega^2 = \frac{GM}{L^3} \rightarrow \frac{1}{L} = (GM)^{-1/3} \omega^{2/3}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{(GM)^{2/3}\mu}{2} \frac{d}{dt} \omega^{2/3} = \frac{(GM)^{2/3}\mu}{2} \frac{d}{d\omega} \omega^{2/3} \frac{d\omega}{dt} \\ &= \frac{(GM)^{2/3}\mu}{3\omega^{1/3}} \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

Igualando a expressão obtida no item anterior,

$$\frac{\xi G\mu^2\omega^6 L^4}{c^5} = \frac{(GM)^{2/3}\mu}{3\omega^{1/3}} \frac{d\omega}{dt}$$

Resolvendo para $d\omega/dt$,

$$\frac{d\omega}{dt} = (3\xi) \frac{G\mu\omega^{19/3}L^4}{(GM)^{2/3}c^5}$$

Substituindo $L = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$, temos,

$$\frac{d\omega}{dt} = (3\xi) \frac{G\mu\omega^{19/3}}{(GM)^{2/3}c^5} \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{4/3}$$

Elevando ao cubo,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{G^3\mu^3\omega^{19}}{G^2M^2c^{15}} \frac{G^4M^4}{\omega^8}$$

Simplificando,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} (G^5\mu^3 M^2)$$

Analisando a expressão do enunciado, temos,

$$M_c = (\mu^3 M^2)^{1/5}$$

- i) Utilizando o fato fornecido pelo enunciado,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t_0 - t)$$

Podemos encontrar uma expressão para $\omega(t)$.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3\xi(GM_c)^{3/5}}{c^5} \omega^{11/3} \rightarrow \omega^{1-11/3} = \frac{3\xi(GM_c)^{3/5}}{c^5} (1 - 11/3)(t_0 - t)$$

Simplificando,

$$\omega^{-8/3} = -\frac{3\xi(GM_c)^{3/5}}{c^5} \frac{8}{3}(t_0 - t)$$

$$\omega^{-8/3} = \frac{8\xi(GM_c)^{3/5}(t - t_0)}{c^5}$$

Para encontrar uma expressão para f_{OG} , temos que utilizar que,

$$f_{OG} = 2f_{orbt} = \frac{\omega}{\pi} \rightarrow \omega = \pi f_{OG}$$

Fazendo tal substituição, chegamos em,

$$f_{OG}^{-8/3} = \frac{8\pi^{8/3}(GM_c)^{3/5}(t - t_0)}{c^5}$$

Comparando com a forma do enunciado, podemos obter,

$$p = 1$$

- j) A partir da figura, consideramos os dois Δt como meias-períodos. Assim, a frequência de onda gravitacional cíclica é $f_{OG} = 1/(2\Delta t)$. Então, os quatro pontos fornecidos nos permitem calcular a frequência no tempo médio dos dois intervalos como:

t (s)	f_{OG} (Hz)
$t_{AB} = 0.0045$	$f_{OG}(t_{AB}) = (2 \times 0.009)^{-1}$
$t_{CD} = 0.037$	$f_{OG}(t_{CD}) = (2 \times 0.006)^{-1}$

Agora, temos dois pares de valores (f_{OG}, t) para duas incógnitas (t_0, M_c) . Em termos de t_{AB} e t_{CD} e dividindo as duas equações, obtemos:

$$t_0 = \frac{At_{CD} - t_{AB}}{A - 1}, \quad A = \left(\frac{f_{OG}(t_{AB})}{f_{OG}(t_{CD})} \right)^{-8/3}.$$

Substituindo os valores numéricos, $A \simeq 2.95$ e $t_0 \simeq 0.054$ s. Agora podemos usar a equação de f_{OG} para qualquer um dos valores t_{AB} ou t_{CD} e determinar M_c . Obtém-se a massa de chirp:

$$M_c \simeq 6 \times 10^{31} \text{ kg} \simeq 30 M_\odot$$

Assim, a massa total M é:

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 69 M_\odot$$

Este resultado é, na verdade, notavelmente próximo das melhores estimativas usando a teoria completa da Relatividade Geral! [Mesmo que os objetos reais não tenham massas exatamente iguais e a teoria que acabamos de usar não seja válida muito próximo da colisão.]

- k) Usando a lei de Kepler estabelece que $L = (GM/\Omega^2)^{1/3}$. O segundo par de pontos destacados no gráfico corresponde ao ciclo anterior à fusão. Assim, utilizando que $f_{OG} = \omega/\pi$,

$$\omega_{t_{CD}} \sim 2.6 \times 10^2 \text{ rad/s.}$$

Em seguida, usando a massa total obtida anteriormente:

$$L \sim 5 \times 10^2 \text{ km}$$

Assim, esses objetos possuem um raio máximo de $R_{\max} \sim 250$ km. Portanto, eles têm mais de 30 vezes mais massa e:

$$\frac{R_\odot}{R_{\max}} \sim 3 \times 10^3,$$

eles são 3000 vezes menores que o Sol!

A velocidade linear é:

$$v_{\text{col}} = \frac{L}{2}\omega \simeq 7 \times 10^4 \text{ km/s.}$$

Eles estão se movendo a mais de 20% da velocidade da luz!

$L_{\text{col}} \sim 5 \times 10^2 \text{ km,}$
$\frac{R_\odot}{R_{\max}} \sim 3 \times 10^3,$
$\frac{v_{\text{col}}}{c} \sim 0.2.$

- [3] **Problema 17.** (Barra 2024) Durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, Hugo observava a estrela Plo I com seu telescópio. Comparando o seu espectro com o de outras estrelas, ele descobre que Plo I é uma estrela de nêutrons e estima sua massa como sendo $M_1 = 2M_{\odot}$. Ele também observa que Plo I possui variações senoidais em sua velocidade radial ao longo do tempo e conclui que Plo I deve fazer parte de um sistema binário com outro corpo celeste, Plo II. Observando a curva de velocidade de Plo I, Hugo também determina que Plo I possui uma órbita circular de período P e velocidade radial máxima K . Porém, ele não sabe qual é a massa M_2 de Plo II e nem qual é a inclinação i do plano orbital do binário em relação ao plano do céu, representada na figura a seguir.

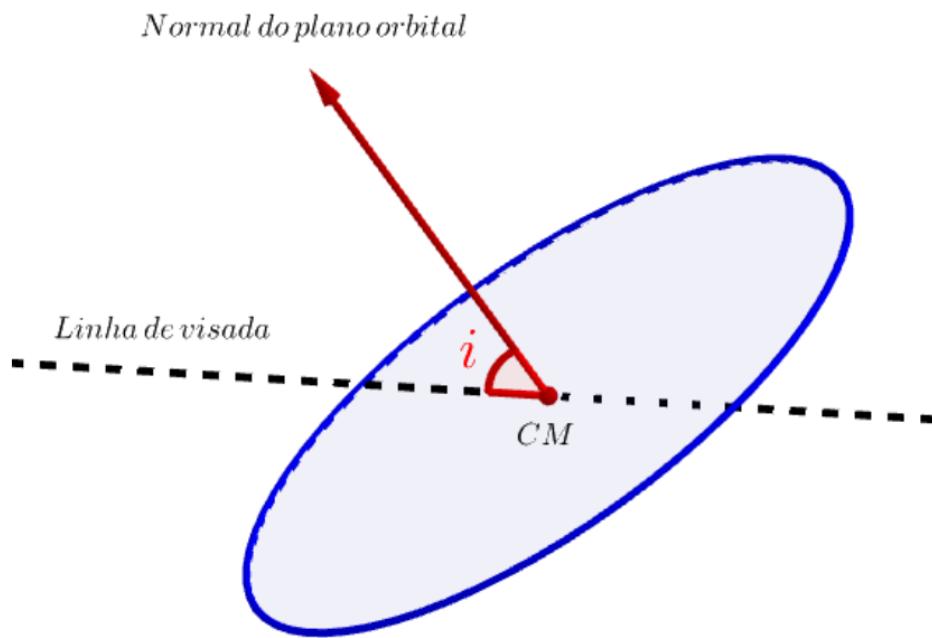


Figura 13: Representação da órbita

- a) A partir da 3^a lei de Kepler e da 2^a lei de Newton, encontre uma expressão para a **função de massa** do sistema binário formado por Plo I e Plo II em termos de P , K e constantes universais. Você pode utilizar que a função de massa é dada por:

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

- b) Utilizando suas medidas, Hugo calcula que a função de massa do binário é $f = 46,2M_{\odot}$. Desejamos encontrar o valor mínimo $M_{2,\min}$ para a massa de Plo II, sabendo que ele corresponde ao caso em que $i = 90^\circ$. Suponha $M_{2,\min} > M_1$. A partir disso, determine $M_{2,\min}$. Seu resultado é condizente com a hipótese? Responda SIM ou NÃO, justificando com cálculos.
- c) Com base em sua resposta do item anterior, conclua: é mais provável que Plo II seja um exoplaneta, uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro?

Solução

- a) Primeiramente, note que $v_{r,aparente} = |\omega \times \mathbf{r}| = \omega r \sin i = v_r \sin i$, logo $K = v_r \sin i = \frac{2\pi a_1}{T} \sin i$. Definindo $a = a_1 + a_2$ e $M = M_1 + M_2$ onde a_i e M_i representam a distância entre a estrela i e o CM e a massa da estrela i , temos a terceira lei de Kepler como,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

2 Astronomia de Posição

- [5] **Problema 18.** Após se perderem em uma navegação, você e o professor Klafke, naufraga em uma ilha e encontra o seguinte relógio de Sol:



Figura 14: Relógio de Sol

Agora é missão de vocês descobrirem propriedades do relógio de Sol.

- Em qual hemisfério vocês se encontraram? Como você chegou a tal conclusão?
- Após várias semanas na ilha, vocês notam que a sombra do relógio parece seguir uma linha reta, sendo ϕ a latitude que vocês se encontraram, determine a declinação do Sol nesse dia e explique o porquê disso só acontecer em 2 dias do ano.
- Prove que, quando o Sol possuí a declinação encontrada anteriormente, a sombra segue uma linha reta. Isso pode ser feito seguindo os seguintes passos:
 - Determine a orientação da linha e explicar por que ela deve estar nessa orientação;
 - Determine o comprimento da sombra para uma dada posição do Sol em coordenadas alt-azimute;
 - Derivar uma relação entre altitude e azimute, dado que a ponta da sombra está sobre a linha;
 - Determine uma quantidade constante e mostrar que ela é constante para todas as posições do Sol naquele dia.

Solução

- a) Pela imagem, podemos notar que as notações da esquerda correspondem as horas da manhã. Assim, temos que o Sol está nascedo á direita, para que assim a sua sombra fique sobre a esquerda. A partir desses argumentos, é possível dizer que o ponto cardenal *Leste* se encontra a direita e o *Oeste* a direita. Um relógio de sol vertical, tem seu gnômon sempre apontado para o polo celeste não elevado. Como este está apontando para a direção *Sul*, podemos concluir que o relógio se encontra no *hemisfério Norte*.
- b) Isso só acontece nos equinócios, quando $\delta_{\odot} = 0$.
- c) Seguindo os passos do enunciado,
- Como $\delta_{\odot} = 0$, o céu se move exatamente da direção leste para oeste,
 - Se o gnônom tem comprimento L e o Sol está em uma altura h , utilizando geometria, podemos dizer que o comprimento da sombra, l vale, $l = \frac{L}{\tan h}$.
 - Observe a seguinte figura,

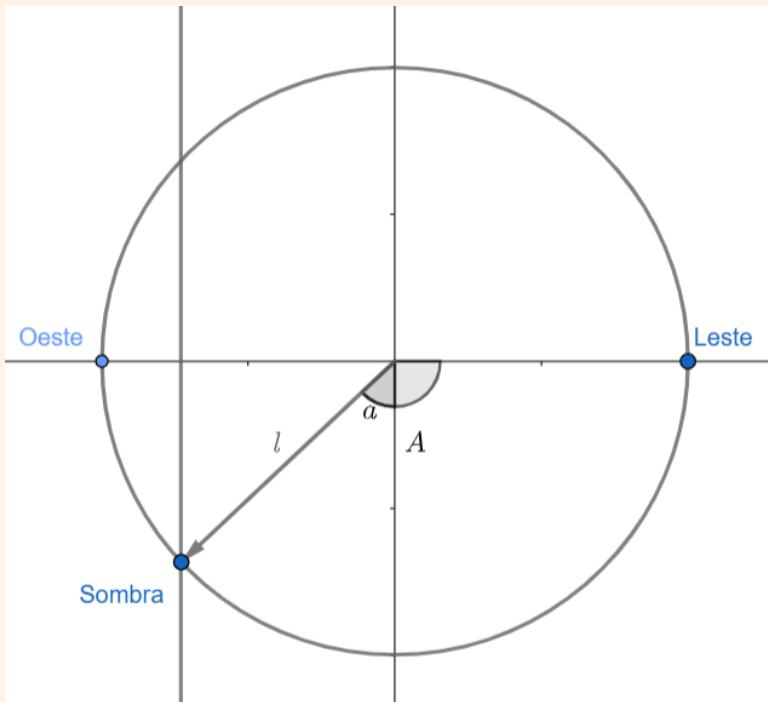


Figura 15: Esquema da linha imaginaria

A distância entre o centro do reógio e a sombra é dada por,

$$x = l \sin(A - 90^\circ) \equiv l \sin a = L \frac{\sin a}{\tan h}$$

Agora, queremos provar que essa quantidade é constante.

d) Observe o seguinte triângulo,

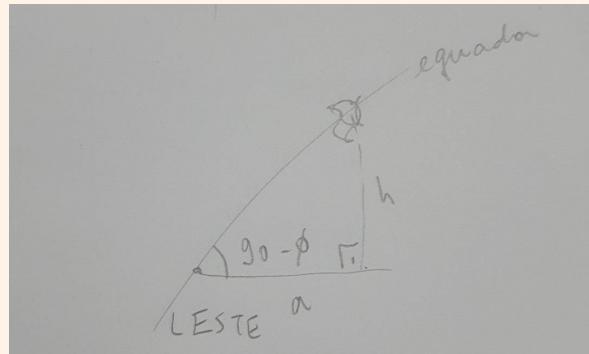


Figura 16: Sol no equador

Usando a Lei dos quatro elementos,

$$\cot(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ) + \cos a \cos(90^\circ) = \cot h \sin a$$

Simplificando, temos,

$$\frac{\sin a}{\tan h} = \tan \phi$$

O que é constante. Logo, a nossa condição está provada.

[5] **Problema 19.** (Adaptado T1 - 2024) A equação do tempo é a diferença entre a ascenção reta do Sol médio e a ascenção reta do Sol verdadeiro. Sabendo disso, vamos calcular algumas das suas propriedades.

- a) Determine uma expressão para a equação do tempo, desconsiderando a excentricidade da Terra, i.e.: O Sol possuindo velocidade constante ao longo da eclíptica. Deixe sua resposta em função do tempo desde o equinócio de março T_M , do período da Terra T e da obliquidade da eclíptica ϵ .
- b) Agora, considerando a excentricidade da Terra, a equação do tempo tem forma:

$$E.T. = -2e \cdot \sin(k_1 \cdot M) + \tan^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \cdot \sin(k_2 \cdot (M + \lambda_P))$$

Onde M é a anomalia média, λ_P a longitude eclíptica do periastro e e a excentricidade da Terra. Determine as constantes k_1 e k_2 . Pense nas situações de simetria envolvendo cada uma das parcelas da equação.

Agora o objetivo da questão é descobrir a declinação do Sol no ponto de nó do analema. Veja a figura a seguir:

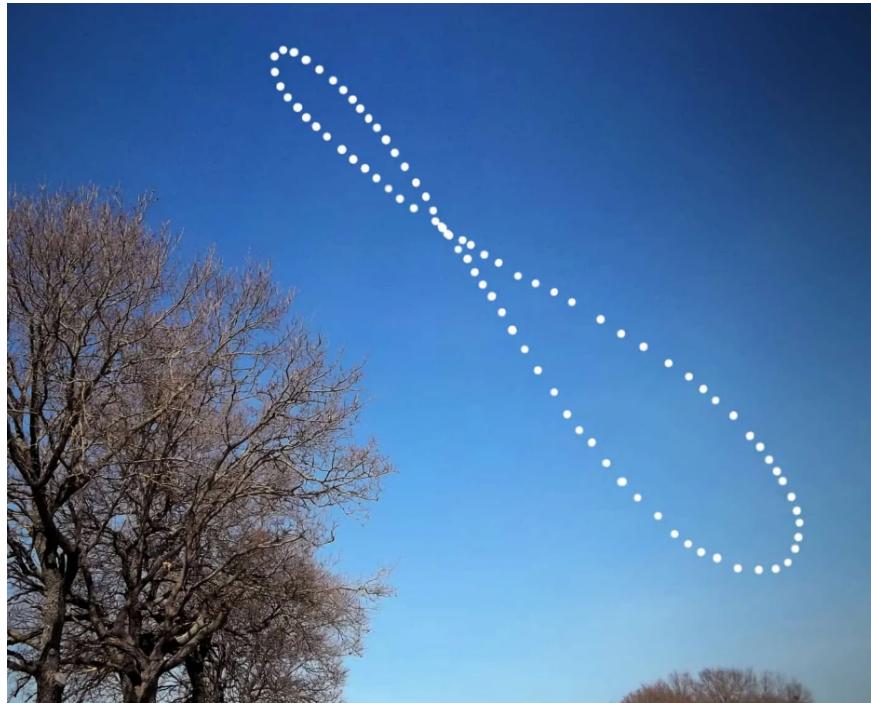


Figura 17: Representação analema

O ponto de nó é o ponto em que a trajetória se cruza.

- c) Para pequenos valores da declinação do Sol, obtenha uma fórmula para essa em função de M , λ_P e ϵ . Considere também que a excentricidade e a inclinação da órbita sejam suficientemente pequenos pequenos.
- d) Encontre as duas anomalias médias que tenham a mesma declinação e mesma $E.T..$
- e) Encontre o valor da declinação Solar no ponto de nó.

Solução

- a) A equação do tempo se da por

$$E.T. = \alpha_M - \alpha_V$$

Onde α_M é a ascenção reta do Sol médio, i.e.: um "Sol fictício" que se move ao longo do equador com velocidade constante, e α_V a ascenção reta do Sol verdadeiro.

Observe o seguinte triângulo esférico

COLOCAR imagem

Primeiramente, tanto o Sol verdadeiro quanto o Sol médio possuem velocidades angulares constantes e equivalentes a $\omega_{\odot} = 2\pi/T$, assim, $\alpha_M = \omega_{\odot}T_M$.

Utilizando a lei dos quatro elementos

$$\cot \pi/2 \sin \epsilon + \cos \epsilon \cos \alpha_V = \cot(\omega_{\odot}T_M) \sin \alpha_V$$

Como $\cot \pi/2 = 0$, obtemos

$$\alpha_V = \tan^{-1}(\cos \epsilon \tan(\omega_{\odot} T_M))$$

Note que, quando $\epsilon = 0$, $\alpha_V = \alpha_M$ como esperado.

Por fim, voltando a definição da equação do tempo

$$E.T. = \tan^{-1} \left(\cos \epsilon \tan \left(\frac{2\pi}{T} T_M \right) \right) - \frac{2\pi}{T} T_M$$

- b)** Para resolver essa questão, vamos pensar nas situações de simetria. Para uma órbita Elíptica, a única situação de simetria é em relação ao eixo maior. Já considerando a obliquidade da eclíptica, existem duas simetrias possíveis, em relação a linha dos solstícios e dos equinócios. Por tanto é razoável pensar que a senoide que se relaciona com a excentricidade da órbita tenha um período por ano enquanto a que se relaciona com a obliquidade da eclíptica tenha 2 períodos por ano, assim $k_1 = 1, k_2 = 2$
- c)** Voltando ao triângulo esférico anterior e utilizando a Lei dos Senos, nós temos

$$\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \epsilon} = \sin \lambda$$

Onde λ é a longitude eclíptica do Sol. Utilizando que para pequenos ângulos $\sin \theta \approx \theta$, temos

$$\delta_{\odot} = \epsilon \sin \lambda$$

Desprezando a excentricidade, temos $\lambda = \lambda_P + M$, assim

$$\delta_{\odot} = \epsilon \sin(\lambda_P + M)$$

- d)** A condição para que duas anomalias médias possuam a mesma equação do tempo é

$$\sin(M_1 + \lambda_P) = \sin(M_2 + \lambda_P)$$

Usando que $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$ temos

$$M_2 = \pi - M_1 - 2\lambda_P$$

- e)** Igualando as equações do tempo

$$-2e \sin(M_1) + \tan^2 \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \sin(2(M_1 + \lambda_P)) = -2e \sin(M_2) + \tan^2 \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \sin(2(M_2 + \lambda_P))$$

Substituindo M_2

$$-2e \sin(M_1) + \tan^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \sin(2(M_1 + \lambda_P)) = -2e \sin(M_1 + 2\lambda_P) - \tan^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \sin(2M_1 + 2\lambda_P)$$

$$\tan^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \sin(2M_1 + 2\lambda_P) = e(\sin M_1 - \sin(M_1 + \lambda_P))$$

Utilizando o seno do arco duplo e prostaférese:

$$\tan^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \sin(M_1 + \lambda_P) \cos(M_1 + \lambda_P) = -e \sin \lambda_P \cos(M_1 + \lambda_P)$$

$$\sin(M_1 + \lambda_P) = -\frac{e \sin \lambda_P}{\tan^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \approx -\frac{4e \sin \lambda_P}{\epsilon^2}$$

Finalmente, substituindo na fórmula da declinação:

$$\delta_{\odot} \approx -\frac{4e \sin \lambda_P}{\epsilon}$$

- [5] Problema 20.** Porílio, após um longo dia de aulas no ITA, no solstício de verão ($\phi = 23^\circ 11' S$, $\lambda = 45^\circ 53' O$). No dia em questão, o valor da equação do tempo é $E.T. = -3$ minutos. Porílio, não quer perder o Sol de jeito nenhum e começa a correr para que o (centro do) Sol continue no horizonte.

- a) São José dos Campos, segue o horário de Brasília (UTC-3h), em qual horário, no Tempo Civil, Porílio deve começar sua corrida?
 - b) Se Porílio corre em direção a um dos polos geográficos, qual deve ser a sua velocidade inicial?
 - c) Se Porílio decide subir uma montanha de inclinação $i = 30^\circ$, a uma velocidade constante de $v = 1$ m/s, qual o maior tempo com que Porílio consegue deixar o Sol acima do horizonte?
- Dica:** Utilizar aproximações para pequenos ângulos, talvez seja útil

Solução

- a) Para encontrar o horário de nascer/se por de uma estrela, precisamos achar o ângulo horário dela no momento em que ela nasce. Olhe o triângulo esférico a seguir,

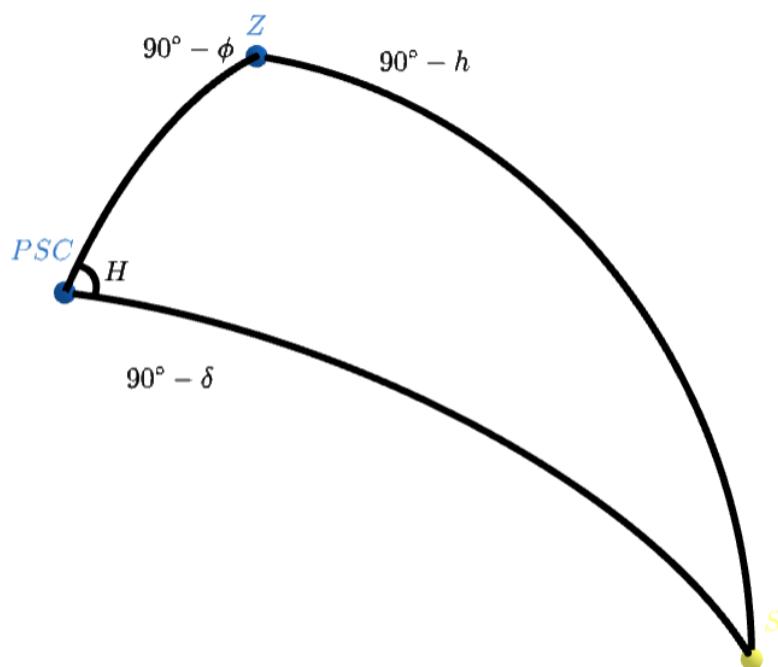


Figura 18: Esquema do Sol no Horizonte

No momento em que o sol se encontra no horizonte, temos $h = 0$. Por ser solstício de verão (no hemisfério Sul), temos $\delta = -23,47^\circ$. Utilizando uma lei dos cossenos e que $\sin(90 - \theta) = \cos(\theta)$ e que $\cos(90 - \theta) = \sin(\theta)$, temos

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

Resolvendo para H , e usando $\sin h = \sin 0^\circ = 0$,

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta$$

Resolvendo, obtemos $H = 100,72^\circ = 6^h 42^m 52^s$

O horário do por do Sol, é dado por $TSL = 12 + H = 18^h 42^m 52^s$.

Utilizando que $TC = TSL + (\lambda_{fuso} - \lambda_{local})/15 - E.T.$, obtemos,

$$TC = 18^h 49^m 20^s$$

- b) Porílio deve correr em direção ao Polo Celeste Sul, uma vez que a declinação do Sol é negativa. Para achar sua velocidade inicial, vamos derivar a lei dos cossenos em relação ao tempo em $h = 0$.

$$\frac{d \cos H}{dt} = -\tan \delta \frac{d \tan \phi}{dt}$$

Usando a regra da cadeia,

$$-\sin H \dot{H} = -\frac{\tan \delta}{\cos^2 \phi} \dot{\phi}$$

Onze $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Isoloando $\dot{\phi}$,

$$\dot{\phi} = \frac{\cos^2 \phi \sin H}{\tan \delta} \dot{H}$$

A variação do ângulo horário é $360^\circ / 24^h = 15^\circ / 1^h$. Resolvendo para $\dot{\phi}$,

$$\dot{\phi} = \frac{-28,68^\circ}{h} = -1,39 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

Note que o sinal de $\dot{\phi}$ apenas representa que ele está se movendo em direção ao polo Sul. Utilizando que,

$$\dot{\phi} = \frac{v}{R_\oplus}$$

Chegamos na relação $v = R_\oplus |\dot{\phi}|$,

$$v \approx 885 \text{ m/s}$$

c) Agora, temos que usar a ideia de ângulo do horizonte. Observe a seguinte imagem,

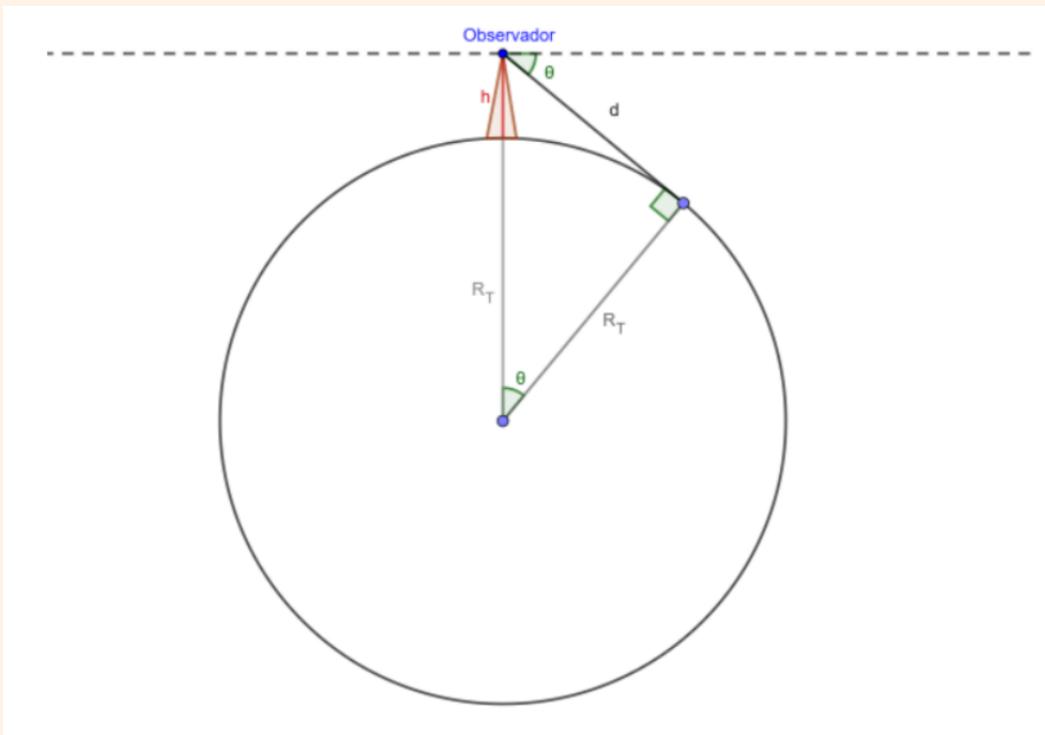


Figura 19: Fonte: Apostila Magna

O ângulo θ , vale

$$\cos \theta = \frac{R_T}{R_T + h}$$

Como $h \ll R_T$, vamos utilizar $x = h/R_T$ e usar a aproximações para $x \ll 1$.

$$\cos \theta = \left(\frac{R_T + h}{R_T} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{R_T}$$

Como θ é um ângulo pequeno, vamos utilizar a aproximação em segunda ordem utilizando a série de taylor,

$$f(x) \approx \sum \frac{f^{(n)}(a)x^n}{n!}$$

Onde $f^{(n)}(x)$ representa a n-ésima derivada de $f(x)$. Espandindo a função em torno de $a = 0$, temos,

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Igualando os termos,

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{h}{R_T} \rightarrow \theta = \sqrt{\frac{2h}{R_T}}$$

Para calcular o tempo em que o sol continua acima do horizonte, temos que calcular o tempo em que a altura aparente do sol, deve ser compensada pelo ângulo θ , afim de que o sol permaneça no horizonte. Desse modo, a lei dos cossenos, se torna,

$$\sin \theta = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

Usando $\sin \theta \approx \theta$,

$$\theta = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

Derivando os dois lados com relação ao tempo, (aqui vamos desprezar $\dot{\phi}$ uma vez que a velocidade com que Porfílio se move é muito pequena).

$$\frac{d\theta}{dt} = -\cos \phi \cos \delta \sin H \dot{H}$$

Para derivar θ em relação ao tempo, perceba que $h(t) = vt \sin i$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2v \sin i}{R_T}} \frac{d}{dt} \sqrt{t} = \sqrt{\frac{v \sin i}{2R_T t}}$$

Igualando as expressões,

$$\frac{v \sin i}{2R_T t} = (\cos \phi \cos \delta \sin H \dot{H})^2$$

$$t = \frac{v \sin i}{2R_T (\cos \phi \cos \delta \sin H \dot{H})^2}$$

$$t \approx 10,82 \text{ s}$$

- [3] **Problema 21.** Mauí, um renomado astrônomo deseja passar as suas férias de fim de ano em Serjipe ($10^\circ 54' 33'' S$, $37^\circ 4' 29'' O$) e deseja saber o horário de nascimento de uma das suas estrelas favoritas, Al Kaf al Dij Ma III ($\delta = +10^\circ 56' 58''$, $\alpha = 2h 58m 43s$) e precisa da sua ajuda para calcular o horário de nascimento dela nas seguintes situações:

- a) Calcule o horário de nascimento de Al Kaf al Dij Ma III no solstício de dezembro.
- b) Quando tempo a estrela passará acima do horizonte?
- c) Estime o período de tempo em que a estrela é visível.

Solução

- a) Como visto anteriormente, o ângulo horário de nascer de uma estrela é calculado por,

$$\cos H = -\tan \delta \tan \phi \rightarrow H =$$

O horário pode ser obtido usando a equação,

$$TSL = \alpha + H$$

Resultando em $TSL =$

- b) O tempo em que a estrela fica acima do horizonte é dado por,

$$\Delta t = 2H =$$

- c) No solstício de verão, $\delta_{\odot} = -23,47$, assim, o ângulo horário do sol é dado por, $H_{\odot} = -\tan \delta_{\odot} \tan \phi =$, Ou seja, o tempo em que o Sol fica visível é dado por, $\delta t_{\odot} =$. Uma estimativa valida do tempo em que a estrela é visível, é dada por,

$$\Delta t = 2(H - H_{\odot})$$

Que representam os períodos em que a estrela esterá acima do horizonte sem a presença do Sol,

$$\boxed{\Delta t =}$$

- [4] **Problema 22.** (Lucas Cavalcante - Semana 111) Considerando um sistema de coordenadas horizontal em que o azimute 0 corresponde ao ponto cardeal norte, um asteroide foi observado nas alturas h_1 e h_2 e azimutes A_1 e A_2 , enquanto outro asteroide foi observado nas coordenadas h_3 , h_4 , A_3 e A_4 . Encontre as coordenadas dos pontos de encontro entre os asteroïdes.

Ideia 2: Notação de Einsten

Durante a resolução dessa questão, utilizarei a Notação de Einsten. Ela é uma ferramenta física para facilitar as contas vetoriais. Explicando, na notação comum, um vetor é representado por

$$\mathbf{a} = (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1, a_2 \hat{\mathbf{e}}_2, a_3 \hat{\mathbf{e}}_3)$$

Na notação de Einsete, isso é substituído por:

$$\mathbf{a} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

Onde os índices repetidos indicam a soma ($a_i \hat{\mathbf{e}}_i = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 + \dots$)
O produto escalar entre dois vetores, na notação de Einstein é definido por:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij}$$

Onde δ_{ij} é a função *Delta de Kronecker* e é definida por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Assim, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Já para o produto vetorial, temos:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i b_j \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k$$

Aqui, ϵ_{ijk} é denominado *tensor de Levi-Civita*, ou símbolo de Levi-Civita, e é definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{se dois ou mais índices são iguais.} \end{cases}$$

Por exemplo, $\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$ e $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$. Explicitamente

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{\mathbf{e}}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{\mathbf{e}}_3$$

- [5] Problema 23.** (Lista 1 - Vinhedo 2024) Considere um relógio de Sol composto por um mostrador vertical e um gnômon, conforme representado na figura.

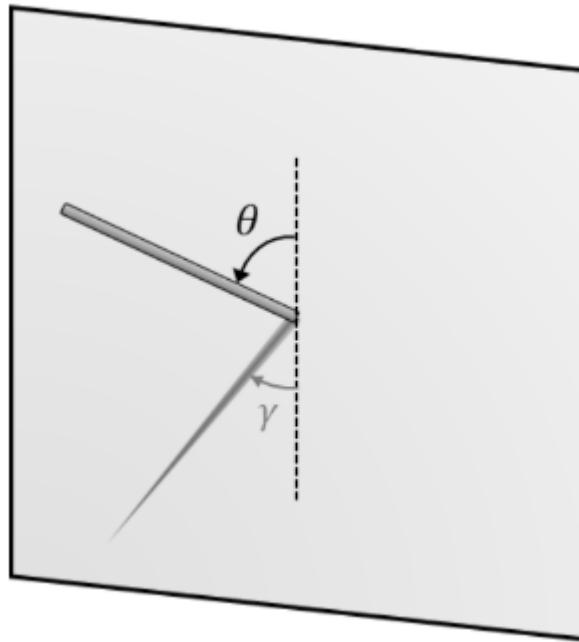


Figura 20: Esquema relógio de Sol.

- a) Suponha um relógio de Sol vertical cujo gnômon esteja corretamente apontado para o sul. Seja ϕ a latitude do observador, H o ângulo horário do Sol e δ a declinação solar. Determine a relação entre θ e γ em função dessas variáveis.

- b)** Com base no item anterior, qual deve ser o valor de θ para que o relógio funcione o ano todo?
- c)** Utilizando o valor correto para θ , determine a relação entre γ e H , em função apenas de ϕ .
- [2] **Problema 24.** Qual a menor altura que um gigante (que vive MUITOS), localizado no polo Sul, precisa ter para conseguir ver todas as estrelas do céu?

Solução: O

ângulo abaixo do horizonte que o gigante consegue enchergar, é dado por,

$$\cos \theta = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + H}$$

Onde H é a altura do gigante. Devido a preseção dos equinónicos, o polo sul ficará "23, 47° para cima" na eclíptica, logo, o ângulo do horizonte deve ser $\theta = 90^\circ - 23, 47^\circ = 66, 53^\circ$. Resolvendo para H , temos,

$$H = R_{\oplus} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \approx 9,62 \cdot 10^6 \text{ m}$$

- [3] **Problema 25.** Toleduardo deseja ver o por do Sol, mas acabou passando tempo de mais na SorveterITA. Toleduardo é um homem *Just in time* e deseja saber quanto tempo o por do Sol vai durar, para que ele possa se atrasar com calma. Sabendo que o Toleduardo só vai para a SorveterITA dias 21 de março ou 22 de setembro, calcule qual a duração do por do Sol na SorveterITA.

Dados: Latitude da SorveterITA $\phi = 23^\circ 10' 45'' S$, $\lambda = 45^\circ 53' 14'' O$.

- [3] **Problema 26.** (Lista 2 - Vinhedo 2021) Em fevereiro de 2015, a Lua começou um ciclo de ocultações mensais de Aldebaran (α Tau). Ou seja, todo mês a Lua passava na frente de Aldebaran para um observador na Terra. Vale ressaltar que essas ocultações não ocorriam necessariamente para observadores na mesma posição todo mês.

Calcule a data (mês e ano) do fim desse ciclo de ocultações mensais. Considere que a órbita da Lua é circular.

Dados:

- Latitude eclíptica de Aldebaran = $5,47^\circ$
- Período de precessão nodal da Lua = 18,6 anos

- [4] **Problema 27.** (Lista 2 - Vinhedo 2021) Miguel vive em uma ilha isolada no oceano Pacífico Sul, em uma longitude $\lambda = 176^\circ 09' 137,7'' W$. Ao longo do ano, o local onde o Sol nasce visto por Miguel varia $\Delta A = 67^\circ 03' 81''$ no horizonte. Para os dois primeiros itens, desconsidere a refração atmosférica. Com essas informações, descubra:

- a)** A latitude ϕ e o nome da ilha. (Consulte o Google Earth ou software similar)
- b)** O intervalo de horários em que o Sol nasce na ilha, dado o fuso horário peculiar $UT + 12\frac{3}{4}$.
- c)** Considerando a refração atmosférica, o tamanho do intervalo do item anterior iria diminuir, aumentar ou se manter constante?

- [3] **Problema 28.** (Lista 2 - Vinhedo 2022) Bruno decidiu alugar uma casa para passar as férias em Cuiabá ($15,3^{\circ}\text{S}$, $56,1^{\circ}\text{O}$). Como um bom astrônomo, Bruno passava suas noites sentado em uma cadeira observando as estrelas por uma gigante porta voltada para o ponto cardeal sul.

A porta tinha 4,00 metros de altura e 1,50 metros de largura. Bruno tinha o costume de sentar a 1,00 metro da porta perfeitamente alinhado com o seu centro na horizontal. Ou seja, o segmento de reta entre os olhos de Bruno e o ponto que está exatamente no meio da porta na horizontal e na altura dos olhos forma um ângulo de 90° com o plano da porta. Os olhos de Bruno ficam a 1,20 metros do chão quando ele está na cadeira.

Para facilitar as suas observações, Bruno criou um sistema de coordenadas baseado na posição da porta onde ele via as estrelas a partir do local onde ele estava sentado, utilizando metros como a unidade de referência. A origem do sistema está no canto inferior esquerdo. As coordenadas em x aumentam para a direita e as coordenadas em y aumentam para cima. Dessa forma, uma estrela vista a 1 metro do lado esquerdo da porta e 2 metros acima do chão seria representada pelas coordenadas $(1, 2)$.

Bruno estava bastante interessado em Shaula ($\lambda \text{ Sco}, \delta = 37,1^{\circ}\text{S}$). Determine as coordenadas de Shaula no instante em que a estrela se tornava visível para Bruno quando observada através da porta. Assuma que Shaula estava abaixo do horizonte quando Bruno começava a observar o céu.

3 Fotometria e Física Moderna

- [3] **Problema 29.** O objetivo dessa questão é deduzir uma expressão para a *profundidade óptica*. Imagine que um feixe de luz passe por uma região do espaço, com uma determinada quantidade de partículas. Se I_0 é a intensidade da luz antes de passar por tal região de espaço e I é a intensidade da luz após, a profundidade óptica é definida como:

$$I = I_0 e^{-\tau}$$

Onde τ é a profundidade óptica.

Considere uma região do espaço possuindo densidade numérica de partículas n .

- a) Qual o número de partículas em uma área A e espessura dz ?
- b) Supondo que cada partícula possua seção transversal σ , qual é a área tampada pelas partículas?
- c) Encontre a fórmula para τ .

Solução

- a) A densidade volumétrica de partículas é n , sendo assim temos que o número dN de partículas em um volume dV é dado por

$$dN = n dV \equiv n A dz$$

- b) Se cada partícula ocupa uma área σ , a área ocupada por dN partículas é

$$dS = \sigma dN = \sigma n A dz$$

- c) É esperado que a área ocupadas pelas partículas seja um empecilho para a passagem da luz. Como a Intensidade é proporcional a área disponível para a passagem da luz, nós temos

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dS}{A} = -n\sigma dz$$

Integrando, obtemos

$$I = I_0 e^{-n\sigma z}$$

Ou seja,

$$\tau = n\sigma z$$

- [2] **Problema 30.** A Galáxia do Triângulo, $M33$, é a terceira maior galáxia do grupo local, ela está a uma distância $d = 970$ kpc de nós e possui magnitude aparente de 5,72. Sabendo que ela possui aproximadamente 40 bilhões de estrelas, encontre a luminosidade média das estrelas de $M33$. Sua estimativa parece condizer com a realidade? Por que?

Solução

Utilizando a equação de Pogson

$$m - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_g}{L_{\odot}} \left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 \right)$$

Resolvendo para L_g ,

$$L_g = L_{\odot} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2 10^{-0,4(m-M_{\odot})}$$

Temos também, que $L_g = \overline{L_{\star}} N$ e assim

$$\overline{L_{\star}} = \frac{L_{\odot}}{N} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2 10^{-0,4(m-M_{\odot})}$$

Utilizando os valores da tabela de constantes, obtemos:

$$\overline{L_{\star}} \approx 0,1 L_{\odot}$$

No entanto, essa estimativa não condiz com a realidade, uma vez que há fatores como a extinção interestelar que contribuem para o aumento da magnitude aparente de M33, uma estimativa condizente estaria na mesma ordem de grandeza da Luminosidade do Sol.

[4] **Problema 31.** Considere que o universo possuí densidade numérica de estrelas, isto é, numero de estrelas por unidade de volume, constante e de valor n . Assumindo que todas elas tenham $L = L_{\odot}$ e que existam um total de N_0 estrelas no universo.

- a) qual a probabilidade da magnitude absoluta de uma estrela, vista do centro do universo, ter magnitude entre m e $m + dm$, onde dm é uma porção infinitesimal de magnitude? Deixe sua resposta em termos de m e da maior magnitude possível, m_{lim} , de uma estrela na "borda" do universo.
- b) Qual a probabilidade de uma estrela poder ser observada a olho nu?

Dados:

$$\int_{-\infty}^6 10^{0,6(x-A)} dx \approx 2881.6 e^{-1.381A}$$

Solução

- a) A magnite aparente de uma estrela é dada por,

$$m = -2,5 \log F + C$$

Onde C é uma constante. Escrevendo $F = L/4\pi r^2$, temos,

$$m = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi r^2} \right) + C = 5 \log r - 2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi} \right) + C$$

Mas como L é constante para todas as estrelas, podemos absorver o segundo termo para a constante. Assim,

$$m = 5 \log r + C \rightarrow r = 10^{0,2(m-C)}$$

Derivando a expressão de m , temos,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{5}{r \ln 10}$$

Agora, vamos achar a probabilidade de uma estrela estar a uma distância r .

O numero de estrelas contidas entre r e $r + dr$ é

$$dN(r) = 4\pi n r^2 dr$$

Dividindo por N_0 , temos que a probabildiade de uma estrela estar nessa distância é

$$dP(r) = \frac{dN(r)}{N_0} = \frac{4\pi n r^2}{N_0} dr \rightarrow dr = \frac{N_0}{4\pi n r^2} dP(r)$$

Substituindo a expressão para dr ,

$$\frac{r \ln 10}{5} dm = \frac{N_0}{4\pi n r^2} dP(r)$$

Isolando $dP(r)$,

$$dP(r) = \frac{4\pi \ln 10 n r^3}{5 N_0} dm$$

Substituindo a expressão de r , podemos realizar a mudança de variável $r \rightarrow m$ em dP

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5 N_0} 10^{0,6(m-C)} dm$$

Para achar o valor de C , vamos comparar com a magnitude limite, na "borda" do universo. Como o universo possuí N_0 estrelas, seu raio deve ser dado por,

$$N_0 = \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow R = \left(\frac{3N_0}{4\pi} \right)^{1/3}$$

Equacionando agora para m_{lim} ,

$$m_{lim} = 5 \log R + C$$

No qual, podemos isolar a constante $C = m_{lim} - 5 \log R$. Substituindo na expressão de $dP(m)$,

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m-m_{lim})+5 \log R} dm$$

Trabalhando nessa expressão,

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m-m_{lim})} 10^{3 \log R} dm$$

Usando as propriedades do log, $a \log b = \log b^a$ e $10^{\log x} = x$, temos,

$$dP(m) = \frac{4\pi n R^3 \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m-m_{lim})} dm$$

Substituindo R ,

$$dP(m) = \frac{3 \ln 10}{5} 10^{0,6(m-m_{lim})} dm$$

Ou seja, a probabilidade não depende de n e nem de N_0 !

b) Para uma estrela ser visível, sua magnitude deve ser $m \leq 6$, assim, equacionando,

$$P(m \leq 6) = \int_{-\infty}^6 dP(m) = \frac{3 \ln 10}{5} \int_{-\infty}^6 10^{0,6(m-m_{lim})} dm$$

Usando a integral dada no enunciado,

$$P(m \leq 6) = \frac{3 \ln 10}{5} 2881,6 e^{-1,381m_{lim}}$$

Simplificando os fatores numéricos,

$$P(m \leq 6) \approx 3981,08 e^{-1,381m_{lim}}$$

A fim de curiosidade, colocando $m_{lim} \approx 40$, para uma estimativa, teríamos,

$$P(m \leq 6) \approx 10^{-20}$$

Ou seja, mesmo no modelo mais simples o universo, a nossa capacidade é insignificante.

- [4] **Problema 32.** O *Brilho Superficial*, fluxo por ângulo sólido por frequência, B_ν é dada pela Lei de Plank:

$$B_\nu = \frac{dF}{d\nu d\Omega} = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1)}$$

- a)** Encontre uma expressão para:

$$B_\lambda = \frac{dF}{d\lambda d\Omega}$$

- b) A partir de B_λ encontre o comprimento de onda máximo de onda λ_{max} que uma estrela de temperatura T emite (você terá que resolver algo numéricamente).
- c) Para pequenas frequências temos a aproximação de Righlight-Jeans. Obtenha uma expressão para B_ν para freqüências pequenas.

Solução

a) Temos que

$$B_\lambda = \frac{dF}{d\lambda d\Omega} = \frac{dF}{d\nu d\Omega} \frac{d\nu}{d\lambda}$$

Utilizando a relação fundamental da ondulatória, $c = \nu\lambda \rightarrow \nu = c/\lambda$ chegamos em

$$B_\lambda = \frac{2h(c/\lambda)^3}{c^2(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{\lambda} \right) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}$$

b) Para resolver esse item, precisamos achar o ponto máximo de B_λ . Mas diferenciar B_λ diretamente é uma tarefa estremamente chata. Uma ideia mais eficiente é tirar o logaritmo natural de B_λ e diferenciar o mesmo. Uma vez que estamos no ponto de máximo, ambas as maneiras chegarão no mesmo, resultado

$$\ln B_\lambda = -5 \ln \lambda - \ln(e^{hc/\lambda k_B T} - 1) + C$$

Onde C é uma constante que absorve os \ln das outras constantes de B_λ . Continuando a derivar

$$\frac{d \ln B_\lambda}{d\lambda} = -\frac{5}{\lambda} + \frac{e^{hc/\lambda k_B T}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \frac{hc}{k_B T \lambda^2} = 0$$

Definindo $x = \frac{hc}{k_B T \lambda}$

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5$$

$$x = 5e^{-x}(e^x - 1) = 5(1 - e^{-x})$$

Utilizando iteração, podemos resolver para x , obtendo $x \approx 4,965$. Voltando a definição de x

$$4,965 = \frac{hc}{k_B T \lambda_{max}} \rightarrow \boxed{\lambda_{max} \approx \frac{2,989 \cdot 10^{-3}}{T}}$$

Essa é a famosa *Lei de Wien*, comumente escrita na forma $\lambda = b/T$, onde $b \approx 2,989 \cdot 10^{-3}$.

- [3] **Problema 33.** A luminosidade de um corpo secundário, depende da área iluminada visível do astro. Nestá questão vamos fazer um breve estudo sobre esse fenômeno.

- a) Considere a Seguinte situação:

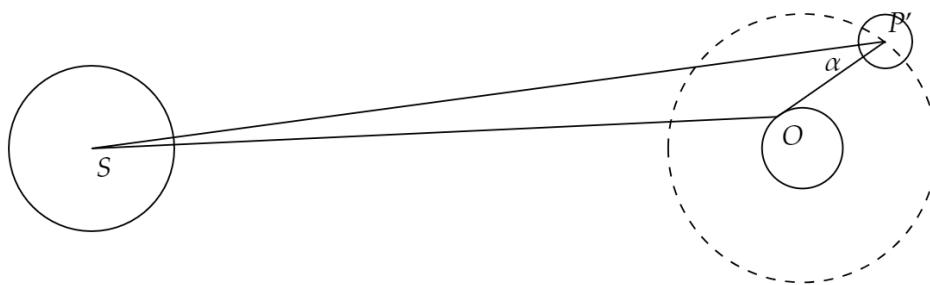


Figura 21: Esquema Sol-Terra-Lua

Encontre uma expressão para a razão Φ entre a área iluminada em função de α e a área total do planeta.

- b) Encontre os ângulos α em que temos a fase da Lua em: Nova, crescente, cheia e minguante, respectivamente.

Solução

Para resolver a questão, vamos nos guiar no esquema da imagem abaixo:

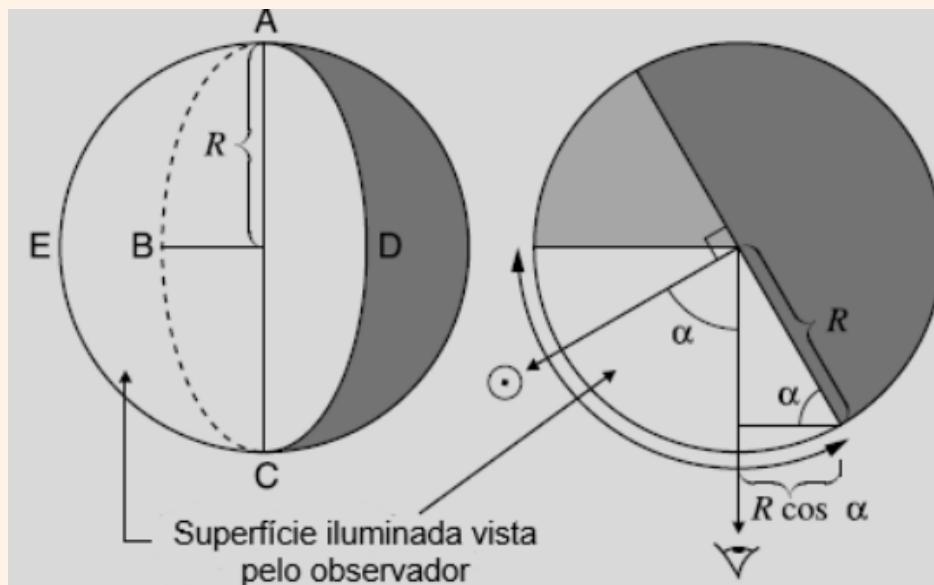


Figura 22: Fonte: Introduction do Planetary Fotometry

No lado esquerdo, vemos um esquema de como o planeta se parece no céu e na direita uma representação vista "de cima". Aqui, podemos perceber que a área que vemos é composta por metade da área do círculo mais metade da área de uma elipse de semi eixo maior R e

semi eixo menor $R \cos \alpha$. Assim

$$\Phi = \frac{\pi R^2/2 + \pi R^2 \cos \alpha/2}{\pi R^2} \quad \therefore \Phi = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Na Lua nova, temos $\Phi = 0$, na crescente $\Phi = 1/2$, na cheia $\Phi = 1$ e na minguante $\Phi = 1/2$, assim:

$$\alpha_{nova} = 180^\circ, \alpha_{crescente} = 90^\circ, \alpha_{cheia} = 0^\circ, \alpha_{minguante} = 90^\circ$$

- [5] Problema 34.** (Apostila Magna) Neste problema, modelaremos o efeito da atmosfera na Terra. Suponha que o Sol seja um corpo negro de temperatura T_1 e raio R_1 . A Terra é uma esfera que está localizada a uma distância R do Sol e possui raio R_3 . A emissividade da Terra é ϵ_3 .
- Se não houvesse atmosfera na Terra, determine sua temperatura de equilíbrio, T_3 .
 - Agora, consideraremos os efeitos da atmosfera. Modele-a como uma casa esférica de gás, com uma emissividade ϵ_2 e raio exterior $R_2 > R_3$, concêntrica à Terra. No equilíbrio térmico, sua absorvidade para os comprimentos de onda no ultravioleta e no infravermelho é ϵ_2 . A atmosfera transmite uma fração t da radiação ultravioleta mas é completamente opaca ao infravermelho. Assumindo que o Sol emite luz ultravioleta enquanto a Terra emite e re-emite no infravermelho, determine as temperaturas T_2 da atmosfera e T_3 da Terra, no equilíbrio termodinâmico. Assuma que a atmosfera seja um condutor de calor perfeito, de forma que toda a radiação incidente sobre ela seja uniformemente distribuída por sua superfície.

Solução

- a) No equilíbrio termodinâmico, temos que a quantidade de potência absorvida é a mesma que a emitida. Além disso, a emissividade e a absorvidade são as mesmas. Desse modo,

$$\frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R^2} \pi R_3^2 \epsilon_3 = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4 \epsilon_3$$

Resolvendo para T_3 ,

$$T_3 = T_1 \left(\frac{R_1^2}{4\pi R^2} \right)^{1/4}$$

- b) A temperatura da atmosfera é calculada por

$$T_2 = T_1 \left(\frac{R_1^2}{4\pi R^2} \right)^{1/4}$$

O processo é analógico ao item anterior. A luminosidade transmitida pela terra é,

$$L_2 = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 t$$

A Terra irá refletir toda essa radiação e a atmosfera refletirá de volta apenas uma fração t , desse modo, a luminosidade total é dada por,

$$L_{2,T} = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 (t + t^2 + t^3 + \dots)$$

O item dentro do parenteses é uma somatória de PG infinita, com $q_1 = t$ e $r = t$, como $t < 1$, o valor da soma vale,

$$(t + t^2 + t^3 + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

Igualando ambas,

$$L_{2,T} = L_3 \rightarrow \frac{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 t}{1-t} = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4$$

Resolvendo para T_3 ,

$$T_3 = T_2 \left(\frac{R_2^2 \epsilon_2}{R_3^2} \frac{t}{1-t} \right)^{1/4}$$

Substituindo o valor de T_2 ,

$$T_3 = T_1 \left(\frac{R_1^2 R_2^2}{4\pi R^2 R_3^2} \frac{\epsilon_2 t}{1-t} \right)^{1/4}$$

- [2] Problema 35.** (Lista 2 - 2021) A Nebulosa do Anel (M57) possui uma magnitude aparente igual a 9 e um diâmetro angular de $2'$ para um observador na Terra. Qual seria a magnitude aparente do céu noturno de um planeta orbitando uma estrela exatamente no centro de M57?

Solução

O céu noturno compreende um ângulo sólido de 2π sr, já o ângulo sólido visto por nós é $\Omega \approx \pi\theta^2$, onde θ é o raio angular. Como o Fluxo é proporcional a Ω , temos

$$m_{ceu} - m = -2,5 \log \left(\frac{\Omega_{ceu}}{\Omega} \right)$$

Para converter Ω de arco-minuto² para sr, temos que multiplicar por $(\frac{\pi}{180 \cdot 60})^2$, assim

$$m_{ceu} = 9 - \log \left(\frac{2\pi}{\pi (\frac{\pi}{180 \cdot 60})^2} \right)$$

$$m_{ceu} = -9,43$$

- [4] Problema 36.** (Adaptado Lista 4 - 2021) O Efeito Cherenkov foi primeiramente detectado pelo cientista soviético Pavel Cherenkov, em 1937. Mais tarde, em conjunto com seus colegas de trabalho, I. E. Tamm e I. M. Frank, ele interpretou fisicamente o fenômeno, ganhando, assim, o Prêmio Nobel de Física de 1958. Antes de fazer um estudo matemático, precisamos, primeiro, entender um pouco mais sobre seu princípio.

Quando partículas carregadas de alta energia percorrem um meio dielétrico, é possível que, caso sua velocidade seja maior que a velocidade de fase ($\frac{c}{n}$), átomos sejam excitados. Esses, por sua vez, ao retornarem ao estado fundamental, emitem radiação eletromagnética. As ondas emitidas se espalham de forma esférica e, quando somadas, formam um cone de ângulo de abertura 2α , como mostra a figura abaixo.

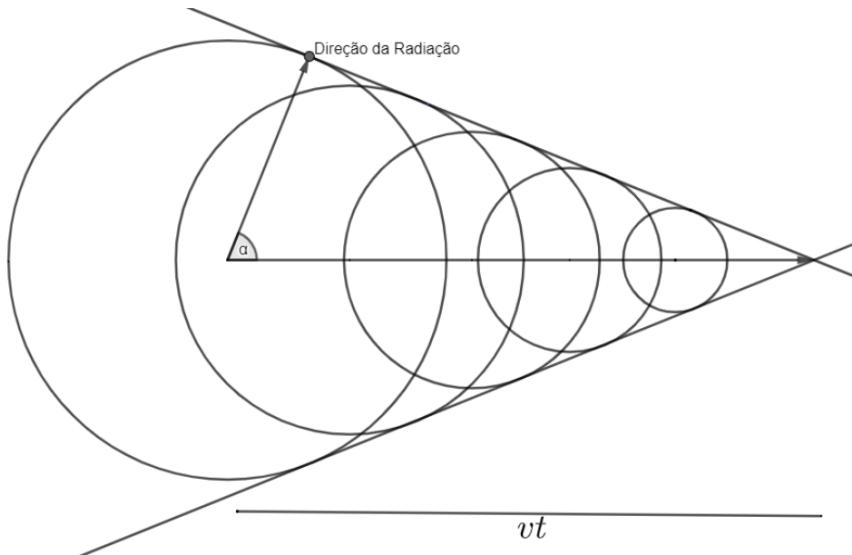


Figura 23: Mecanismo de radiação do Efeito Cherenkov

Esse efeito é similar a um jato movendo-se em velocidade supersônica, ou seja, segue o mesmo princípio do Cone de Mach, porém, com a luz. Finalmente, iremos desenvolver o modelo matemático do Efeito Cherenkov.

Parte A - Modelo Teórico

Considere uma partícula movimentando-se a velocidades relativísticas em um meio de índice de refração n . Sabe-se que sua massa de repouso é m_0 , possui momento linear p e velocidade v . Em determinado momento, há emissão de um fóton sob um ângulo α , como mostra a figura 1.

- Sendo μ a frequência do fóton emitido, determine a equação de seu momento linear, p_μ , e sua energia, E_μ . Sua resposta deve estar em função de n , μ e constantes físicas.
- Encontre uma expressão para o momento linear da partícula após a emissão do fóton em função de p_μ , p e α .
- Sendo $\beta_n = \frac{c}{vn}$, prove que a relação abaixo é verdadeira:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\beta_n} \quad (1)$$

- Considerando que o momento linear e a energia se conservem, determine a velocidade mínima para a ocorrência do Efeito Cherenkov. **Dica:** Quando comparado com os outros parâmetros, o fator $(n^2 - 1)h\mu$ pode ser desprezado.

Parte B - Reações Nucleares

A cadeia próton-próton é um processo de reações de fusão para conversão de hidrogênio em hélio. Um dos ramos possíveis da cadeia próton-próton é a pp IV, na qual, teoricamente, um átomo de hélio-3 reage diretamente com um próton, conforme a reação a seguir:



- e) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.
- f) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação abaixo:



Dados: Massa do píon: $140 \text{ MeV}/c^2$, massa do muôn: $106 \text{ MeV}/c^2$.

Solução

Parte A - Modelo Teórico

- a) Para um fóton, as relações de De Broglie, nos dizem que

$$E = h\mu, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

Onde h é a constante de plank.

Utilizando a relação fundamental da ondulatória, $\lambda = v/\mu = \frac{c}{n\mu}$, assim

$$E = h\mu, \quad p = \frac{n h \mu}{c}$$

- b) Como o momento total é conservado, considere que a partícula está se movendo com momento p ao longo do eixo x , antes de emitir um foton. Assim, temos

$$p = p_\mu \cos \alpha + p'_x$$

$$p_\mu \sin \alpha = p'_y$$

$$p' = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}$$

Resolvendo para p'

$$p'^2 = (p - p_\mu \cos \alpha)^2 + p_\mu^2 \sin^2 \alpha$$

$$p'^2 = p^2 - 2pp_\mu \cos \alpha + p_\mu^2$$

Finalmente

$$p' = \sqrt{p^2 - 2pp_\mu \cos \alpha + p_\mu^2}$$

c) Olhe a seguinte figura,

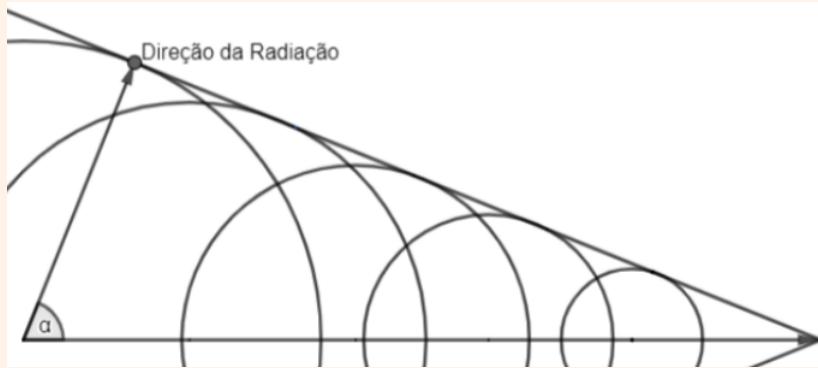


Figura 24: Esquema Cherenkov

Note que o raio do círculo é dado pela distância percorrida pelo fóton. A distância percorrida do centro do círculo até o fim do cone é vt , assim

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{ct}{nvt} = \frac{c}{nv} \equiv \frac{1}{\beta_n}}$$

d) Definindo $c = 1$, a conservação de energia nos diz

$$\sqrt{p^2 + m_0^2} = \sqrt{p'^2 + m_0^2} + h\mu$$

Trabalhando nessa expressão

$$\sqrt{p'^2 + m_0^2} = \sqrt{p^2 + m_0^2} - h\mu$$

$$p'^2 + m_0^2 = p^2 + m_0^2 + h^2\mu^2 - 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}$$

Substituindo p'

$$p^2 - 2pp_\mu \cos \alpha + p_\mu^2 = p^2 + h^2\mu^2 - 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}$$

Resolvendo para $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{p_\mu^2 - h^2\mu^2 + 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}}{2pp\mu}$$

Simplificando

$$\cos \alpha = \frac{p_\mu}{2p} - \frac{h^2\mu^2}{2pp_\mu} + \frac{h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}}{pp_\mu}$$

Substituindo $p_\mu = nh\mu$

$$\cos \alpha = \frac{nh\mu}{2p} + \frac{h\mu}{2np} + \frac{\sqrt{p^2 + m_0^2}}{np}$$

$$\cos \alpha = \frac{h\mu(n^2 - 1) + 2\sqrt{p^2 + m_0^2}}{2np}$$

Desprezando o termo $h\mu(n^2 - 1)$ e substituindo $\cos \alpha$

$$\frac{1}{nv} = \frac{\sqrt{p^2 + m_0^2}}{np}$$

Resolvendo para v

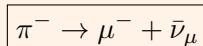
$$v = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_0^2}}$$

Porfim, voltando os c 's, temos

$$v = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$$

Parte B - Reações Nucleares

- e) Utilizando a conservação de carga, do lado esquerdo temos $2 + 1 = 3$ prótons, porém do lado direito, só temos 2, portanto a partícula faltante deve conter um protão. Já a massa atômica, segue como $3 + 1 = 4$ e do lado direito 4. Assim, a partícula faltante deve ter a carga de um protão e a massa muito menor do que este. A única partícula que seja essa descrição é o **pósiton, e^+** .
- f) Utilizando que o número leptônico é constante, temos que o pion não é um lepton $n_L = 0$, mas o muon, é um lepton com $n_L = +1$, então a nossa partícula deve ter $n_L = -1$. O único antilepton neutro associado ao muon com $n_L = -1$ é o antineutrino do muon, $\bar{\nu}_\mu$, portanto, a relação completa é



- [3] **Problema 37.** (Lista 3 - Vinhedo 2022) Juvelino, diretamente de seu observatório em Paris, França, monitora a estrela Polaris (α UMi). Ele tem como objetivo descobrir a temperatura de cor T_c do astro. Alguns dos dados de que ele dispõe a respeito de seu alvo são:

- Magnitude aparente na banda V : $V = 1,98$;
- Magnitude absoluta na banda V : $M_V = -3,60$;
- Magnitude absoluta na banda B : $M_B = -3,19$.

Com as informações fornecidas, ajude Juvelino!

- Realizando diversas observações, Juvelino determinou que a extinção interestelar na banda V na direção de Polaris é $a_V = 5,8 \text{ mag/kpc}$. Determine a distância, em pc, de α UMi até a Terra.
- Usando a relação empírica

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0 \quad (4)$$

sendo A_V a extinção interestelar total na banda V e E_{B-V} o excesso de cor $B - V$, determine o índice de cor $B - V$ da estrela observada.

- Demonstre a relação

$$T_c = \frac{7009}{(B - V) + 0,47} \quad (5)$$

na qual a temperatura de cor é dada em Kelvin. Para tanto, use o fato de que estrelas de classe espectral A0 possuem $(B - V) = 0$ e $T_c = 15000 \text{ K}$. Use também que os comprimentos de onda das bandas B e V são, respectivamente, $\lambda_B = 440 \text{ nm}$ e $\lambda_V = 548 \text{ nm}$. Justifique quaisquer aproximações feitas.

DICA: A lei de plack talvez seja útil

- Determine a temperatura de cor de Polaris.

Solução

- A expressão que relaciona corretamente as magnitudes é

$$V - M_V = 5 \log d - 5 + a_V d$$

Essa equação, só pode ser resolvida por meio da iteração,

$$d = \frac{V - M_V - 5 \log d + 5}{a_v}$$

Iterando, chegamos em $d \approx 100 \text{ pc}$.

- Pela definição, $E_{B-V} = A_B - A_V$. Assim

$$\frac{A_V}{A_B - A_V} = 3,00$$

$$A_B = \frac{A_V}{3} + A_V = 0,77$$

Assim,

$$B - M_B = 5 \log d - 5 + A_B \rightarrow B = 2,58$$

E pela definição, o índice $B - V = \boxed{U_{B-V} = B - V = 0,60}$

- c) Utilizando a Lei de Planck, temos que

$$\frac{B_B}{B_V} = \frac{F_B}{F_V} \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 \frac{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_V}} - 1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_B}} - 1}$$

Utilizando a aproximação de Wein, temos

$$\frac{F_B}{F_V} = \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 \frac{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_V}}}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_B}}}$$

Utilizando a equação de Pogson para comparar as magnitudes,

$$B - V = -2,5 \log \left(\frac{F_B}{F_V} \right) + C$$

Aqui adicionamos uma constante, pois estamos trabalhando com diferentes comprimentos de ondas. Trabalhando na expressão,

$$B - V = -2,5 \log \left(\left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 \frac{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_V}}}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_B}}} \right) + C$$

Trabalhando nessa expressão,

$$B - V = -2,5 \log \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 + 2,5 \beta hc \left(\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_V} \right) \log e + C$$

E utilizando $\beta = \frac{1}{k_B T_c}$ e substituindo os valores,

$$B - V = -1,19 + \frac{7009}{T_c} + C$$

Para o tipo A_0 , $(B_V) = 0$ e $T_c = 15000\text{K}$. Assim,

$$-1,19 + \frac{7009}{15000} + C = 0 \rightarrow C = 0,72$$

Assim,

$$B - V = -0,47 + \frac{7009}{T_c} \rightarrow T_c = \frac{7009}{(B - V) + 0,47}$$

d) da equação anterior,

$$T_c = \frac{7009}{0,60 + 0,47} \approx 6600 \text{ K}$$

4 Termodinâmica

- [3] **Problema 38.** Uma galáxia possuí na ordem de 10^{10} estrelas, por essa quantidade imensa, podemos modelar uma galáxia como sendo uma níuem de gás ideal, onde cada estrela seria equivamente a uma partícula do Gás.

O objetivo dessa questão é utilizar esse modelo teórico para estudar algumas propriedades de galáxias. Para isso, vamos fazer as seguintes suposições:

- A galáxia é esférica e se encontra em equilíbrio hidrostático.
 - A densidade de massa da galáxia é constante e tem valor ρ .
 - As massas das estrelas são pequenas o suficiente para que as interações interestelares possam ser desconsideradas.
- Considerando um sistema de gás ideal, encontre uma expressão para a pressão em função da densidade ρ , da temperatura, T , da massa de cada partícula μ e constantes físicas.
 - No nosso modelo teórico, não faz sentido pensar em temperatura, então precisamos encontrar um substituto para ela. Utilizando o teorema da equipartição de energia, encontre uma expressão para $T(r)$ e $P(r)$.

Solução

- a) Partidindo da equação de Clepeiron,

$$PV = Nk_B T$$

Vamos multiplicar os dois lados por μ ,

$$P\mu V = N\mu k_B T$$

$$P\mu = \frac{N\mu}{V} k_B T$$

Mas note que $N\mu$ equivale a massa total, assim,

$$\rho = \frac{N\mu}{V}$$

E com isso, obtemos,

$$P\mu = \rho k_B T$$

Essa expressão será utilizada com bastante frequencia na parte de termodinâmica dessa lista.

- b) Pelo teorema da equipartição de energia,

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{3k_B T}{2}$$

Logo,

$$T = \frac{\mu v^2}{3k_B}$$

Como as estrelas possuem massa e velocidade, essa é uma substituição aceitável. Podemos calcular v pela equação vis-viva, considerando órbitas circulares,

$$v^2 = \frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi G \rho r}{3}$$

Assim,

$$T(r) = \frac{4\pi G \rho \mu r}{9k_B}$$

Para $P(r)$, vamos substituir na fórmula,

$$P(r) = \frac{\rho k_B T(r)}{\mu} = \frac{4\pi G \rho^2 r}{9}$$

- [2] **Problema 39.** Nessa questão, vamos fazer um estudo sobre o coeficiente adiabático de estrelas. Considere uma o exterior de uma estrela se dá por vácuo a temperatura $T = 0$.
- Todas as estrelas são corpos em equilíbrio hidrostático. Sabendo disso, qual a pressão na superfície de uma estrela de massa M e raio R .
 - Considere agora, que a estrela se expanda em δR , como a pressão variaria? Se necessário utilize que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.
 - Agora, conclua qual o valor de γ mínimo, γ_{min} a estrela deve ter para se manter gravitacionalmente ligada (assuma que ela se expande de maneira adiabática)?

Solução

- a) Utilizando $P = F/A$ temos

$$P(R) = \frac{GM^2}{4\pi R^4}$$

- b) Desse modo

$$P(R + \delta R) = \frac{GM^2}{4\pi} (R + \delta R)^{-4} = \frac{GM^2}{4\pi R^4} \left(1 + \frac{\delta R}{R}\right)^{-4}$$

Utilizando a aproximação fornecida pelo enunciado

$$P(R + \delta R) = \frac{GM^2}{4\pi R^4} \left(1 - \frac{4\delta R}{R}\right) = P \left(1 - \frac{4\delta R}{R}\right)$$

- c) Na expansão adiabática, PV^γ é constante, como $V \propto R^3$, vale que $PR^{3\gamma}$ é constante. Desse modo

$$PR^{3\gamma} = (P + \delta P)(R + \delta R)^{3\gamma}$$

Utilizando o mesmo raciocínio do item anterior

$$PR^{3\gamma} = (P + \delta P)R^{3\gamma} \left(1 + \frac{\delta R}{R}\right)^{3\gamma}$$

$$P = (P + \delta P) \left(1 + \frac{3\gamma\delta R}{R}\right)$$

Substituindo $P + \delta P$

$$1 = \left(1 - \frac{4\delta R}{R}\right) \left(1 + \frac{3\gamma\delta R}{R}\right)$$

Desse modo

$$\left(1 - \frac{4\delta R}{R}\right)^{-1} = 1 + \frac{3\gamma\delta R}{R}$$

Utilizando novamente a aproximação binomial do lado esquerdo da equação e resolvendo para γ obtemos

$$\gamma = \frac{4}{3}$$

[4] **Problema 40.** Há vários modelos para a atmosfera do nosso planeta, vamos explorá-los e encontrar os efeitos físicos de cada um.

- a) Primeiramente, vamos considerar o modelo isotérmico ($T = \text{cte}$). Considerando que cada partícula de ar possuí massa μ , a atmosfera possuí $P(0) = P_0$, encontre uma fórmula para a pressão em função da altura, $P(h)$.
- b) Um modelo mais real da atmosfera é na verdade, adiabática, uma vez que o ar é um péssimo condutor de calor. Considerando que o ar possuí coeficiente de Poisson γ , encontre uma fórmula para $P(h)$, no modelo adiabático. Considere que a nível do mar, a pressão e a temperatura valem $P(0)$ e $T(0)$.
- c) Encontre uma expressão para dT/dh para o modelo anterior e estime seu valor. O resultado é condizente com a realidade?

Solução

a) Da relação

$$P\mu = \rho k_B T$$

Assim, como $T = cte$,

$$\frac{P(h)}{P(0)} = \frac{\rho(h)}{\rho(0)}$$

O gradiente de pressão é dado pela lei de stevin,

$$\frac{dP(h)}{dh} = -g\rho(h)$$

Substituindo $\rho(h)$,

$$\frac{dP(h)}{dh} = \frac{-gP(h)\rho(0)}{P(0)}$$

Separando os termos,

$$\frac{dP(h)}{P(h)} = \frac{-g\rho(0)}{P(0)} dh$$

Integrando dos dois lados,

$$\int_0^h \frac{dP(h)}{P(h)} = \ln \left(\frac{P(h)}{P(0)} \right)$$

$$\int_0^h dh = h$$

Assim,

$$P(h) = P(0)e^{-\frac{g\rho(0)}{P(0)}h}$$

Por fim, vamos eliminar o termo $\rho(0)$, analisando a relação de clepeyron,

$$P(0)\mu = \rho(0)k_B T \rightarrow \rho(0) = \frac{P(0)\mu}{k_B T}$$

Substituindo,

$$P(h) = P(0)e^{-\frac{\mu gh}{k_B T}}$$

b) No modelo adiabático, temos,

$$PV^\gamma = cte$$

Como $V \propto \rho^{-1}$,

$$P\rho^{-\gamma} = cte$$

Ou seja,

$$\rho(h) = \left(\frac{P(0)}{P(h)} \right)^{-1/\gamma} \rho(0) = \left(\frac{P(h)}{P(0)} \right)^{1/\gamma} \rho(0)$$

Substituindo na expressão do gradiente de pressão,

$$\frac{dP(h)}{dh} = -g\rho(h) = - \left(\frac{P(h)}{P(0)} \right)^{1/\gamma} \rho(0)g$$

Separando os termos e integrando,

$$\int_0^h P(h)^{-1/\gamma} dP(h) = -P(0)^{-1/\gamma} \rho(0)g \int_0^h dh$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} (P(h)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P(0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}) = -\frac{\mu g z}{k_B T(0)} P(0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Aqui usamos que,

$$P(0)\mu = \rho(0)k_B T(0)$$

Isolando $P(h)$

$$P(h) = P(0) \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g h}{k_B T(0)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

c) Para processos adiabáticos,

$$PV^\gamma = cte$$

$$V \propto \frac{T}{P}$$

Logo,

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = cte$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cte$$

Assim,

$$T = P(0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T(0) P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Derivando,

$$\frac{dT}{dh} = P(0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T(0) \frac{\gamma-1}{\gamma P^{1/\gamma}} \frac{dP}{dh}$$

Do item anterior, temos a expressão para P em função de h . Efetivando a derivada,

$$\frac{dP}{dh} = P(0) \frac{d}{dh} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{k_B T(0)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{dP}{dh} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P(0) \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{k_B T(0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{k_B T(0)} \right)$$

Simplificando,

$$\frac{dP}{dh} = -P(0) \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{k_B T(0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\mu g}{k_B T(0)}$$

Substituindo na expressão para dT/dh ,

$$\frac{dT}{dh} = -P(0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T(0) \frac{\gamma-1}{\gamma P^{1/\gamma}} P(0) \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{k_B T(0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\mu g}{k_B T(0)}$$

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} P(0)^{\frac{1}{\gamma}} P^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{k_B T(0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\mu g}{k_B}$$

Substituindo P ,

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} P(0)^{\frac{1}{\gamma}} \left(P(0) \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{k_B T(0)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{k_B T(0)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\mu g}{k_B}$$

Continuando a simplificar os termos, obtemos uma expressão fofa,

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{k_B}$$

Podemos aproximar o ar para um gás diatômico, $\gamma = \frac{7}{5}$, de massa, $\mu \approx 30\text{u}$. Fazendo os cálculos, obtemos,

$$\boxed{\frac{dT}{dh} \approx -10,03 \text{ K/km}}$$

O que é um valor bem condizente com a realidade.

- [5] Problema 41.** Um dos corpos mais fascinantes do universo são Buracos Negros. Nessa questão, vamos estudar um pouco da Termodinâmica relacionada a esses tipos de objeto. Para essa questão utilizaremos unidades naturais, i.e.: $c = G = \hbar = k_B = 1$. Nessa convenção, a massa do buraco negro é descrita pela equação:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dL + \Phi dQ$$

Aqui, os valores se restringem ao horizonte de eventos, ou seja, κ é a aceleração da gravidade no horizonte de eventos, A , sua área, Ω a velocidade angular do buraco negro, L seu momento de inércia, Φ o potencial elétrico e Q a sua carga.

Parte 1: Termodinâmica Básica

- a) Um dos conceitos fundamentais da termodinâmica é o conceito de entropia, utilizando seus conhecimentos sobre a mesma, explique bravamente a desigualdade:

$$\oint dS \geq 0$$

- b) Dos 3 fatores que regem a massa de um buraco negro (dA , dL , dQ), apenas dA segue a mesma singularidade da entropia, por que isso se verifica sempre verdade?

Para os próximos itens, considere um buraco negro sem spin e sem carga.

- c) Bekenstein e Hawking conseguiram provar a chamada *Entropia Bekenstein-Hawking* que relaciona a entropia com a área do Buraco Negro (lembre-se que estamos utilizando unidades naturais, por isso, algumas dimensões podem não fazer sentido). Bekenstein e Hawking descobriram que para um buraco negro $S \equiv \frac{A}{4}$. A equação que nós temos então é:

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} d\left(\frac{A}{4}\right)$$

Fazendo uma analogia a dM com alguma função de estado, encontre a temperatura do buraco negro em função de κ .

Ainda há um termo importante faltando na fórmula anterior, a Pressão relacionada a densidade de energia escura, Λ .

- d) A pressão devida a energia escura é dada por:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$$

Onde Λ é constante. Isso nos mostra que VdP é nulo, ou seja, pode ser adicionado livremente a expressão anterior. Com isso podemos concluir que a massa do buraco negro, na verdade se relaciona com outro potencial termodinâmico, qual é ele?

- e) Note que o volume, $V = V$ e a entropia, $S = A/4$ não são mais independentes em buracos negros. Assumindo que o horizonte de eventos do buraco negro é uma esfera, encontre uma relação entre S e V . Isso é mais uma prova que a energia intera, $U = U(S, V)$ não é o melhor potencial termodinâmico para trabalharmos.

Parte 2: Ciclo de Carnot Para Buracos Negros

- a) O objetivo dessa parte da questão é construir um modelo teórico para um ciclo de Carnot dentro de buracos negros. Mas primeiro prove um resultado importante, para buracos negros, adiabáticos e isocóricos devem ser equivalentes para buracos negros.
- b) Calcule a capacidade térmica a pressão constante de um Buraco negro. Seu resultado deve ser algo bizarro.
- c) Use o fato de que $Q = T\Delta S$ ao longo das isotermas, juntamente com os resultados dos resultados anteriores partes, para calcular a eficiência de uma máquina de Carnot de buraco negro e confirmar que você obtenha a eficiência de Carnot. Maravilhe-se com o quanto mais rápido esse cálculo é do que a derivação típica da eficiência de Carnot, e observe que você também inadvertidamente também calculou a eficiência do ciclo Stirling.

Caso você se interesse pelo assunto, há um artigo interessante que fala especificamente sobre o tema de ciclos em buracos negros e pode ser encontrado aqui.

Parte 3: Tempo de Vida e Evaporação de Buracos Negros

- a) Como calculado na parte 1, buracos negros possuem uma temperatura. Em decorrência disso, eles emitem radiação, como descrita na Lei de Stefan-Boltzmann. Sabendo disso, ache uma relação entre o tempo de vida de um buraco negro e a sua massa M .

Solução

Parte 1: Termodinâmica Básica

- a) A desigualdade representa a segunda lei da termodinâmica. De maneira breve, ela nos mostra que a variação de entropia sempre é positiva, ou seja, tudo tende a desordem.
- b) Note que nenhuma Lei da física impede que um buraco negro perca velocidade angular, $dL < 0$, ou carga, $dQ < 0$. Mas ao analisarmos a área do buraco negro temos algo interessante. Considerando o horizonte de eventos, dado por uma esfera com o raio de R_{sch} . Como esse é definido pela distância da qual a um objeto se movendo a velocidade luz não consegue mais escapar da atração gravitacional do buraco negro, podemos obtê-lo por conservação de energia,

$$-\frac{GMm}{R_{sch}} + \frac{mc^2}{2} = 0 \rightarrow R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}$$

Logo a área do horizonte de eventos é dada por,

$$A = 4\pi R_{sch}^2 = \frac{8\pi G^2 M^2}{c^4}$$

Em unidades naturais,

$$A = 8\pi M^2$$

Assim,

$$dA = 16\pi M dM$$

Mas, um buraco negro não pode perder massa, uma vez que nada pode escapar do horizonte de eventos. Assim, $dM > 0$ e consequentemente $dA > 0$. Assim, podemos concluir que também é válido,

$$\oint dA \geq 0$$

Para buracos negros.

c) Da Relação massa energia,

$$U = M \rightarrow dU = dM$$

(Lembrando que estamos utilizando unidades naturais, então $Mc^2 = M$). Desse modo, utilizando a primeira Lei da termodinâmica,

$$dU = TdS - PdV$$

Logo,

$$T = \left. \frac{dU}{dS} \right|_V = \left. \frac{dM}{dS} \right|_V$$

Utilizando a fórmula da entropia fornecida pelo enunciado, (análoga a obtida no item anterior).

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} \left(\frac{A}{4} \right) = \frac{\kappa}{2\pi} dS$$

utilizando a equação do item anterior, podemos perceber que $\kappa = 1/4M$, Substituindo na fórmula de T ,

$$T = \frac{1}{8\pi M}$$

d) Utilizando a fórmula obtida para T ,

$$dM = TdS$$

Adicionando o termo nulo VdP , temos,

$$dM = TdS + VdP$$

Mas note que essa é identica a Entalpia, H :

$$H = U + PV \rightarrow dH = (TdS - PdV) + (PdV - VdP) = TdS - VdP$$

Desse modo, podemos dizer que a massa equivale a Entalpia.

e) O Volume de uma esfera é dado por,

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Enquanto a área é dada por $A = 4\pi R^2$, então, $R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \equiv \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Substituindo na fórmula do volume,

$$V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{3/2}$$

Simplificando,

$$V = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} S^{3/2}$$

Ou seja, o volume e a entropia são dependentes de si. Como a energia interna é uma função do volume e da entropia, não faz sentido dizer que esta equivale a massa do buraco negro.

Parte 2: Ciclo de Carnot Para Buracos Negros

a) Utilizando a relação do item anterior,

$$dV = \frac{2}{\pi} S dS$$

Ou seja, um ciclo adiabático ($dS = 0$) equivale a um ciclo isocórico ($dV = 0$).

b) Para calcular a capacidade térmica a pressão constante,

$$C_P = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_P = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P = \frac{dM}{dT}$$

Usando a fórmula para a temperatura,

$$T = \frac{1}{8\pi M} \rightarrow M = \frac{1}{8\pi T}$$

$$C_P = \frac{dM}{dT} = -\frac{1}{8\pi T^2}$$

c) A eficiência de um ciclo é dada por,

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_C - Q_H}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

Onde Q_H é o calor que entra no ciclo durante a fase quente e Q_C é o valor que entra nele durante a fase fria. Assim, definindo T_H e T_C como as temperaturas quentes e frias, respectivamente. Considere que o ciclo opera nas seguintes 1 – 2 temepratura quente e 3 – 4 temperatura fria. Assim,

$$Q_H = T_H \Delta S_{1 \rightarrow 2}$$

$$Q_C = T_C \Delta S_{3 \rightarrow 4}$$

Utilizando a expressão do item 1.e, temos,

$$S = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} V^{2/3}$$

Assim,

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(V_2^{2/3} - V_1^{2/3} \right)$$

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(V_4^{2/3} - V_3^{2/3} \right)$$

Logo, a eficiencia pode ser escrita,

$$\eta = 1 - \frac{T_C \left(V_4^{2/3} - V_3^{2/3} \right)}{T_H \left(V_2^{2/3} - V_1^{2/3} \right)}$$

Mas como para buracos negros, adabáticas e ispcórias são identicas, $V_1 = V_3$ e $V_2 = V_4$!, logo,

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

Que é a eficiencia de Carnot!

Parte 3: Tempo de Vida e evaporação de Buracos Negros

a) A Lei de Stefan Boltzmann diz que a luminosidade (Potência) é dado por,

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{dM}{dt} = A\sigma T^4$$

Mas note que $A \propto M^2$ e $T \propto 1/M$, assim,

$$\frac{dM}{dt} \propto M^2 \left(\frac{1}{M}\right)^4 = \frac{1}{M^2}$$

Separando as variaveis,

$$M^2 dM \propto dt$$

Por fim, integrando, obtemos,

$$t \propto M^3$$

- [3] **Problema 42.** Considere que um foguete utiliza como combustível um gás ideal diatômico. Seu mecanismo de funcionamento é bem simples: O gás parte de uma camera a temperatura T_1 , que possuí área de secção transversal A_1 , o gás entao, flui adiabaticamente e é expelido em uma abertura de área A_2 , com pressão, P_2 e temperatura $T_2 < T_1$. Considerando que o fluxo é contínuo, determine o empuxo sentido pelo foguete.

Solução

Como o processo é adiabático, temos

$$PV^\gamma \propto P \left(\frac{T}{P}\right)^\gamma = cte$$

Como o gás é diatômico, $C_P = 7/2R$ e $C_V = 5/2R$, pela definição $\gamma = C_P/C_V = 7/5$
Assim, temos

$$P_1 \left(\frac{T_1}{P_1}\right)^\gamma = P_2 \left(\frac{T_2}{P_2}\right)^\gamma$$

Substituindo o valor de γ

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{7/2}$$

Sejam v_1 e v_2 a velocidade do gás nos dados momentos, como o fluxo é contínuo, devemos ter

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

E pela lei dos gases ideais

$$P\mu = \rho RT \rightarrow \rho \propto \frac{P}{T}$$

Substituindo na expressão anterior,

$$\frac{\rho_1 v_1 A_1}{T_1} = \frac{\rho_2 v_2 A_2}{T_2}$$

Combinando está e a primeira equação, temos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{5/2}$$

Utilizando a equação de Bernoulli para gases

$$\frac{1}{2} \mu v_1^2 + C_P R T_1 = \frac{1}{2} \mu v_2^2 + C_P T_2$$

Resolvendo para v_2

$$v_2^2 = \frac{7R(T_1 - T_2)}{\mu(1 - (A_1/A_2)^2(T_2/T_1)^5)}$$

Finalmente, utilizando a segunda Lei de Newton,

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v_2 = \rho_2 A_2 v_2^2 = \boxed{\frac{7P_2 A_2 (T_1 - T_2)}{T_2 (1 - (A_1/A_2)^2 (T_2/T_1)^5)}}$$

- [5] **Problema 43.** (Adaptado Iran Problem Set) Este problema visa calcular o ponto de ebulação de líquidos. Para mais informações sobre os conceitos abordados neste problema, consulte os capítulos 5, 8, 9 e 10 do livro *An Introduction to Modern Astrophysics*. Tempo recomendado para resolução: 2 horas.

As partículas de um líquido movem-se com diferentes velocidades dependendo da temperatura, e algumas dessas partículas podem escapar das forças intermoleculares e da gravidade terrestre (que será negligenciada neste problema), deixando a superfície do líquido. Essas partículas transferem seu momento, criando pressão ao colidirem com o ambiente ao redor. Essa pressão é conhecida como pressão de vapor do líquido. O ponto de ebulação é a temperatura na qual a pressão de vapor iguala-se à pressão atmosférica ao redor do líquido.

- a) Usando a distribuição de Maxwell-Boltzmann, encontre uma relação para a velocidade quadrática média v_{rms} .

A distribuição de Maxwell-Boltzmann é:

$$n(v) dv = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} 4\pi v^2 dv \quad (6)$$

A velocidade quadrática média é dada por:

$$v_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{1}{n} \int_0^\infty v^2 n(v) dv \quad (7)$$

- b) Suponha que a velocidade da partícula estudada seja igual a v_{rms} . Além disso, suponha que a atmosfera terrestre seja composta por 80% de nitrogênio e 20% de oxigênio, e que o líquido estudado seja água.

Calcule a distância que a partícula escapada percorre na atmosfera antes de colidir, conhecida como comprimento médio livre. Expresse essa distância em termos da densidade numérica da atmosfera e da seção transversal geométrica das partículas. (30 pontos)

- c) Calcule a taxa de variação do momento de uma partícula escapando. Divida a variação do momento pelo intervalo de tempo do processo. Suponha que as partículas do líquido perdem todo o seu momento ao colidirem com moléculas de ar.

O tempo médio para a próxima colisão é o comprimento médio livre dividido pela velocidade da partícula.

Sabendo que, nesse intervalo de tempo, um momento igual ao momento da partícula do líquido foi transferido para a molécula de ar, use a segunda lei de Newton para calcular a força exercida pela partícula do líquido sobre a molécula de ar.

- d) A pressão é a força exercida sobre uma superfície. Considere que a seção transversal da força exercida sobre as moléculas de ar é igual à seção transversal geométrica das moléculas do líquido. Encontre uma expressão para a pressão de vapor de um líquido.

Dica:

$$P = n \frac{S_a}{S_i} 3k_B T \quad (8)$$

Onde S_a e S_i são as seções transversais geométricas das moléculas de ar e água, respectivamente. n é a densidade numérica das moléculas de ar próximas à superfície do líquido, e T é a temperatura do líquido.

- e) Usando a relação de equilíbrio hidrostático e assumindo aceleração gravitacional constante, densidade do ar constante e pressão nula nas camadas superiores da atmosfera, encontre uma relação para a pressão próxima à superfície da Terra. Expresse essa relação em termos da densidade do ar, aceleração gravitacional e espessura da atmosfera.
- f) Adicione a condição necessária para a ebulação, igualando a pressão atmosférica próxima à superfície da Terra (obtida acima) à pressão de vapor. Simplifique o resultado até obter:

$$T = \frac{mhgS_i}{3k_B S_a} \quad (9)$$

Onde m é o peso médio das moléculas de ar, g é a aceleração gravitacional, h é a espessura da atmosfera, e os outros parâmetros foram descritos nas partes anteriores.

- g) Determine o peso médio das moléculas de ar para a composição mencionada no início do problema.

- h)** Use o conceito do raio de Bohr para estimar a razão entre as seções transversais. Suponha um elétron em órbita circular ao redor de um próton, onde a força dominante é a força de Coulomb. Usando a suposição de Niels Bohr $L = n\hbar$, encontre a distância do elétron ao núcleo em termos de constantes físicas, n e o número atômico Z .
- i)** Calcule a seção transversal dos átomos de ar e de líquido. Assuma que cada molécula de líquido é composta por dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, e que as partículas de ar consistem em dois átomos de oxigênio e dois de nitrogênio. Encontre a razão entre as seções transversais S_i/S_a .
- j)** Considere $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e a altura da atmosfera como 100 km. Determine o ponto de ebulação da água.

Solução

a) Definindo as variáveis

$$C = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Desse modo, podemos expressar

$$n(v)dv = Ce^{-\frac{\beta mv^2}{2}} v^2 dv$$

utilizando a expressão para v_{rms} fornecida pela questão,

$$v_{rms}^2 = \frac{C}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta mv^2}{2}} v^4 dv$$

Para resolver a integral, temos

$$\int_0^\infty e^{-av^2} v^4 dv = \frac{d^2}{da^2} \int_0^\infty e^{-av^2} dv$$

Onde

$$a = \frac{\beta m}{2}$$

A integral do lado direito é bem conhecida e resulta em $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Ou seja

$$\int_0^\infty e^{-av^2} v^4 dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{d^2}{da^2} a^{-1/2} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Desse modo,

$$v_{rms}^2 = \frac{3C}{8n} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Substituindo C e a , temos

$$v_{rms}^2 = \frac{3}{2}\pi \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{2^5\pi}{\beta^5 m^5}}$$

Por fim, simplificando

$$v_{rms}^2 = \frac{3}{m\beta} = \frac{3k_B T}{m}$$

- b) Considere $P(t)$ a probabilidade da partícula **não** colidir em um tempo t . A probabilidade da partícula não colidir em um tempo t e não colidir no tempo dt seguinte é dada por $P(t + dt) = P(t)P(dt)$ (propriedade multiplicativa), mas também temos

$$P(t + dt) \approx P + \frac{dP}{dt}dt$$

Em um tempo dt a partícula varre um volume $dV = \sigma v dt$, onde σ é o parâmetro de impacto. A probabilidade da partícula colidir em um tempo dt é dada então por $P'(dt) = ndV = n\sigma v dt$, desse modo (lembrando $P(dt)$ é a probabilidade da partícula **NÃO** colidir) $P(dt) = 1 - n\sigma v dt$

Igualando as expressões para $P + dt$, temos

$$P + \frac{dP}{dt}dt = P(1 - n\sigma v dt)$$

Trabalhando nesta expressão,

$$dP = -Pn\sigma v dv \rightarrow \frac{dP}{P} = -n\sigma v dt$$

Integrando os dois lados e utilizando que $P(0) = 1$, temos

$$P(t) = e^{-n\sigma vt}$$

Então, a probabilidade de uma partícula sobreviver um tempo t e depois colidir no tempo dt seguinte é

$$J(t)dt = P(t)(1 - P(dt)) = e^{-n\sigma vt}n\sigma v dt$$

Assim, o tempo médio entre colisões é

$$\tau = \int_0^\infty t J(t)dt = \int_0^\infty e^{-n\sigma vt}n\sigma v dt = \frac{1}{n\sigma v}$$

O livre caminho médio, é dado então por

$$\lambda = v_{radial}\tau = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

Para achar σ , vamos definir como r_H o raio da molécula de agua, e semelhantemente r_O e r_N . Olhando o seguinte esquema

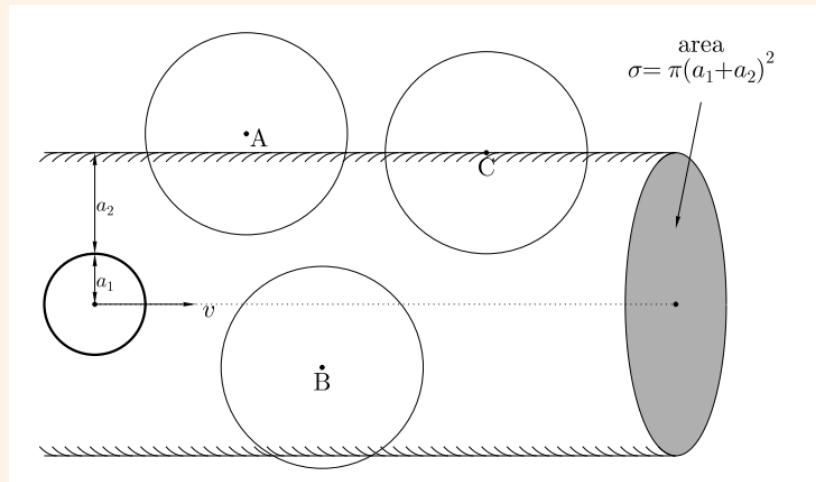


Figura 25: Fonte: Concepts In Thermal Physics, Blundell and Blundell

Para o nitrogénio, $\sigma_N = \pi(r_H + r_N)^2$ e para o oxigenio, $\sigma_O = \pi(r_H + r_O)^2$. Como a atmosfera é feito de $0,8N$ e $0,2O$, é valido que

$$\sigma = 0,2\sigma_O + 0,8\sigma_N$$

Assim, temos

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2n(0,8\sigma_0 + 0,2\sigma_0)}}$$

- c) Assumindo que a partícula perde todo seu momento ao colidir com uma molécula de ar, temos $\delta p = mv_{rms}$. Cada colisão acontece em um tempo $\delta t = \tau$, assim,

$$F = \frac{\delta p}{\delta t} = \frac{mv_{rms}}{\tau} = n\sigma v_{rms}^2 \boxed{= 3n\sigma k_B T}$$

- d) Utilizando a definição de pressão

$$P = \frac{F}{\sigma} = \boxed{3nk_B T}$$

- e) Utilizando a equação do equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g$$

Como ρ e g são constantes,

$$P = -\rho g \int_h^0 dh = \boxed{\rho gh}$$

Onde h é a espessura da atmosfera.

f) Igualando as pressões,

$$\rho gh = 3 \frac{S_a}{S_w} n k_B T$$

Resolvendo para T , temos

$$T = \frac{\rho gh}{3n k_B} \frac{S_w}{S_a}$$

Como n é a densidade numérica de partículas e ρ é a densidade de massa, temos $\rho/n = m$, assim

$$\boxed{T = \frac{mgh}{3k_B} \frac{S_w}{S_a}}$$

g) Fazendo uma média ponderada,

$$\boxed{m = 0,8m_N + 0,2m_O}$$

h) a força que o eletron sente é dada por,

$$F = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Igualando esta a força centrípeta

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \omega^2 r$$

Porém, pela definição de momento angular, Temos

$$L = m_e r^2 \omega \rightarrow \omega = \frac{L}{m_e r^2} = \frac{n\hbar}{m_e r^2}$$

Substituindo na expressão anterior

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \left(\frac{n\hbar}{m_e r^2} \right)^2 r$$

Resolvendo para r ,

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Z e^2 m_e}$$

i) Para a água, temos, $r_w = 2r_H + r_O$ e para o ar, $r_a = 2(r_N + r_O)$, como $S_i \propto r_i^2$, temos

$$\frac{S_w}{S_a} = \frac{(2r_H + r_O)^2}{4(r_N + r_O)^2}$$

Assumindo que todos os elétrons estão no nível mais baixo ($n = 1$), que $Z_H = 1$, $Z_N = 7$, $Z_O = 8$ e que $r \propto 1/Z$, temos

$$\boxed{\frac{S_w}{S_a} = \frac{(2/Z_H + 1/Z_O)^2}{4(1/Z_N + 1/Z_O)^2} \approx 15,73}$$

j) Substituindo na fórmula,

$$T = \frac{(2 \cdot 14 + 2 \cdot 16) \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^5 \cdot 15,73}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 380 \text{ K}$$

O que é uma estimativa bastante coerente com a realidade, $T = 373 \text{ K}$.

[3] **Problema 44.** (Adaptado Iran Problem Set) Dr. Shahram Abbassi é um dos cientistas iranianos mais reconhecidos no campo dos discos de acreção. Em uma de suas pesquisas recentes sobre a gigantesca nuvem molecular B32, ele descobriu uma estrela semelhante ao Sol no centro dessa nuvem específica. Segundo suas pesquisas, essa nuvem possui uma massa de $10^6 M_\odot$, um raio de 30 pc e uma viscosidade muito alta, tão grande que, se a nuvem entrasse em colapso, todo o sistema colapsaria com simetria esférica.

O mais importante é calcular o calor específico a volume constante (C_v) para essa nuvem. Com base nos dados fornecidos e utilizando aproximações razoáveis, determine um limite para C_v de modo que a acreção seja possível. Esses valores variam dependendo da massa e do raio da nuvem? O que podemos concluir com o resultado?

Solução

Esse limite será dado pelo teorema do virial, quando,

$$\langle U \rangle = -2\langle K \rangle$$

Podemos modelar a nuvem como um gás, de modo que sua energia cinética seja dada por $\frac{3}{2}Nk_B T$. A sua energia potencial é energia potencial de uma esfera, dada por $U = -3GM^2/5R$. Assim

$$\frac{3GM^2}{5R} = 3\frac{M}{m_p}k_B T$$

Onde m é a massa de uma partícula da nuvem.

Desse modo,

$$T = \frac{GMm_p}{5k_B R}$$

Em função do calor específico a volume constante, a energia é dada por,

$$MC_v T$$

Voltando a igualdade,

$$C_v = \frac{3GM}{5RT}$$

Substituindo T ,

$$C_v = \frac{k_B}{m} \approx 4.1 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Note que esse valor depende apenas da massa das partículas que compões a nívem de gás. Para uma compostade hidrogênio, o valor é Surpreendentemente proximo do valor da água $C_{v,água} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J/kg K}$.

5 Óptica e Telescópios

- [3] **Problema 45.** Um telescópio Kepleriano possuí duas lentes convergentes. A primeira possuí o raio de curvatura das duas faces igual a $R = 2$ m e a segunda possuí ambos os raios de curvatura igual a $r = 0,5$ m. Considerando que ambas as lentes possuem espessura desprezível e são feitas de um material com índice de refração $n = 1,4$. Calcule o diâmetro e o aumento do telescópio sabendo que este telescópio é um f/12.
- [5] **Problema 46.** Nessa questão, vamos nos familiarizar com uma das ferramentas mais poderosas da óptica, a *óptica geométrica*. O objetivo dessa ferramenta é modelar lentes e espelho em forma de matrizes. Isso é muito útil para resolver questões envolvendo associações de diversas lentes e é um método de resolver problemas de óptica geométrica (praticamente) sem usar geometria. Mas para isso, se atente as seguintes definições na imagem a seguir

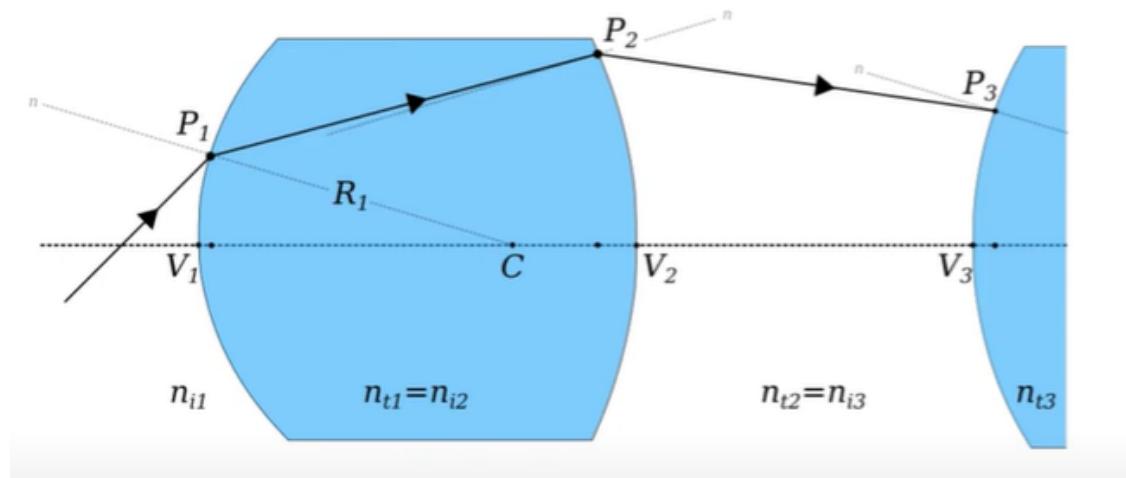


Figura 26: Esquema 1

Todas as linhas pontilhadas são paralelas ao eixo óptico, representado pela seta horizontal. É denotado por P_k o ponto onde a luz passa de um meio para o outro, y_k a coordenda vertical do ponto P_k . São utilizados os subscritos i e t para se referir a incidente e transmitido, reespectivamente, então, por exemplo, $\alpha_{i,k}$ é o ângulo que o raio de incidente faz com a horizontal no ponto P_k , já o ângulo α_k é o ângulo entre a horizontal e o centro da lente k .

Para essa questão, vamos considerar que todos os ângulos de interesse são pequenos, de modo que $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$.

- a) Partindo da Lei de Snell, encontre uma relação entre $n_{i,1}$, $n_{t,1}$, α_1 , $\alpha_{i,1}$ e $\alpha_{t,1}$.

É facil perceber que $\alpha_k = y_k/R_k$. Utilizando-se desse fato

- b) Encontre uma relação para (1) $n_{t,1}\alpha_{t,1}$ e (2) $y_{t,1}$. Deixe suas respostas em função de $n_{i,1}$, $\alpha_{i,1}$, $y_{i,1}$ e D_1 , para

$$D_1 = \frac{n_{t,1} - n_{i,1}}{R_1}$$

Agora vamos para mais uma definição, seja o vetor $\mathbf{r}_{t,1} = (n_{t,1}\alpha_{t,1}, y_{t,1})$ e $\mathbf{r}_{i,1} = (n_{i,1}\alpha_{i,1}, y_{i,1})$.

- c) É possível escrever as duas equações que encontramos no item anterior na forma matricial, de forma:

$$\mathbf{r}_{t,1} = \mathcal{R}_1 \mathbf{r}_{i,1}$$

Encontre a matriz 2×2 equivalente à \mathcal{R}_1 .

Nosso interesse agora é encontrar as relações entre os pontos P_2 e P_1 .

- d) Encontre uma equação para $n_1 \alpha_{i,2}$ e $y_{i,2}$. Utilizando o raciocínio do item anterior, deixe sua resposta na forma

$$\mathbf{r}_{i,2} = \Gamma_{2,1} \mathbf{r}_{t,1}$$

Onde $\Gamma_{2,1}$ também é uma matriz 2×2 .

- e) Definimos a matriz da lente, $\mathcal{A}_{2,1}$ da seguinte equação:

$$\mathbf{r}_{i,2} = \mathcal{A}_{2,1} \mathbf{r}_{i,1}$$

De modo que

$$\mathcal{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Encontre explicitamente $\mathcal{A}_{2,1}$.

- f) Dentre todas as propriedades da matriz da lente, a mais curiosa delas é que o termo a_{12} equivale a $-1/f$ onde f é o foco da lente. Prove esse resultado. (Dica: você consiguirá escrever $-a_{12}$ com uma equação bem conhecida da óptica).

Agora, vamos colocar a mão na massa e fazer utilizações práticas da óptica matricial.

- g) Refaça o exercício anterior utilizando óptica matricial.

- h) Considere o seguinte esquema:

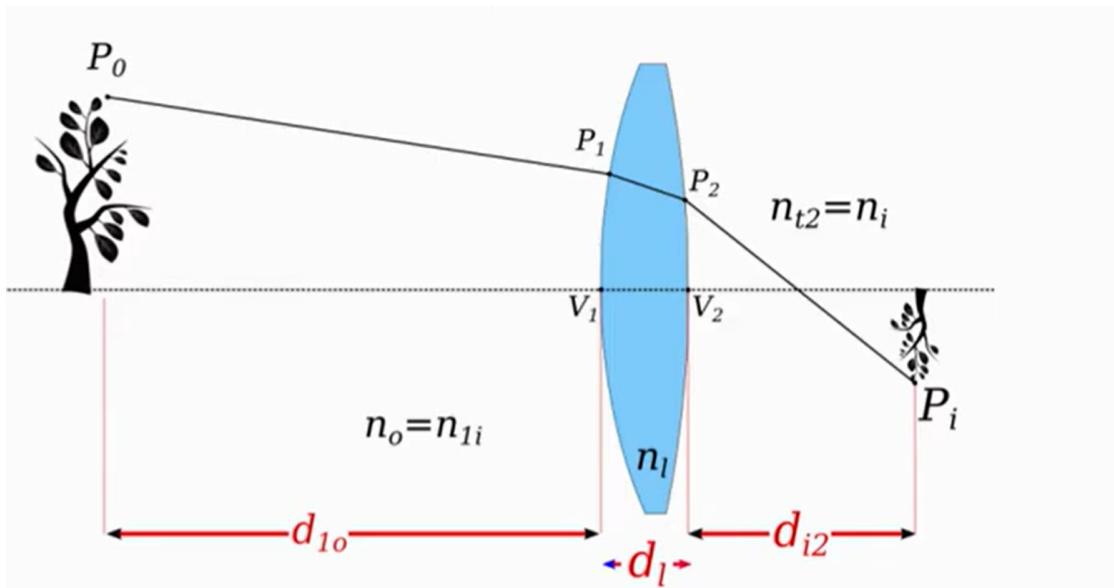


Figura 27: Esquema 2

Encontre y_i em função de y_0 e dos dados na imagem.

- i) Se a lente estiver entre dois meios diferentes, $n_{i,1} \neq n_{t,2}$ temos a seguinte relação:

$$a_{12} = -\frac{n_{i,1}}{f_0} = -\frac{n_{t,2}}{f_I}$$

Utilizando-se disso, refaça a questão anterior, considerando que entre as duas lentes de água de $n_w = 4/3$.

- j) Um arranjo muito comum de lentes é a Objetiva de Tessar, presente em muitas câmeras pela sua eficiência em diminuir efeitos de aberração e astigmatismo. O Arranjo tem a seguinte forma:

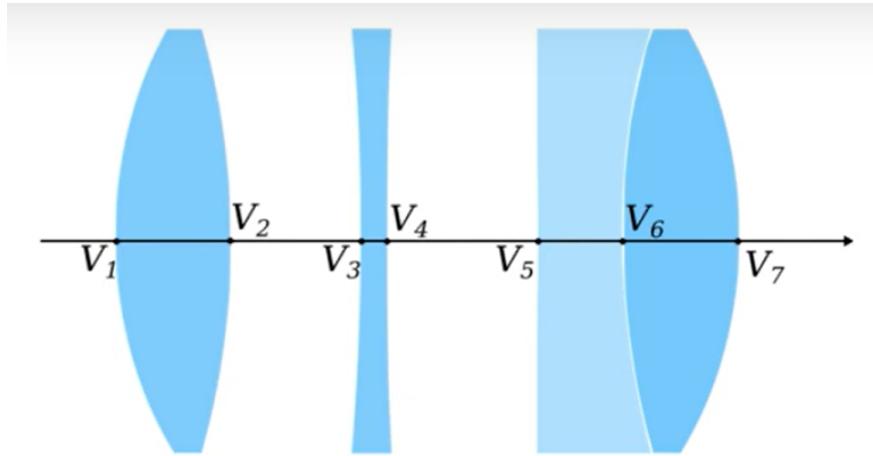


Figura 28: Esquema Objetiva Tessar

Encontre a Matrix da Lente equivalente, $\mathcal{A}_{1,7}$ em função de \mathcal{R}_i e $\Gamma_{i,j}$.

Solução

- a) A lei de Snell nos diz que $n_{i,1}\theta_{i,1} = n_{t,1}\theta_{t,1}$. Onde θ são os ângulos que a luz faz com a normal. Note que podemos escrever ambos os ângulos θ como:

$$\theta_{i,1} = \alpha_1 + \alpha_{i,1}, \quad \theta_{t,1} = \alpha_1 + \alpha_{t,1}$$

Logo, a relação que procuramos é

$$n_{i,1}(\alpha_1 + \alpha_{i,1}) = n_{t,1}(\alpha_1 + \alpha_{t,1})$$

- b) Substituindo $\alpha_1 = y_1/R_1$, temos

$$n_{i,1}(y_1/R_1 + \alpha_{i,1}) = n_{t,1}(y_1/R_1 + \alpha_{t,1})$$

isolando $n_{t,1}\alpha_{t,1}$

$$n_{t,1}\alpha_{t,1} = n_{i,1}\alpha_{i,1} + \frac{y_1}{R_1}(n_{i,1} - n_{t,1})$$

Em termos de \mathcal{D}_1

$$n_{t,1}\alpha_{t,1} = n_{i,1}\alpha_{i,1} - y_1\mathcal{D}_1$$

Note que y não moda imediatamente após a transmissão da luz. Logo $y_1 \equiv y_{i,1} \equiv y_{t,1}$.

c) Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} n_{t,1}\alpha_{t,1} \\ y_{t,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{i,1}\alpha_{i,1} \\ y_{i,1} \end{pmatrix}$$

Assim, nossa matriz \mathcal{R}_1 , também conhecida como matriz refração é dada por:

$$\boxed{\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

d) Primeiro, vamos achar a altura do ponto 2. Seja d_{21} a espessura da lente. Utilizando trigonometria obtemos

$$y_{i,2} = y_{t,1} + \alpha_{t,1}d_{21}$$

Temos que $\alpha_{t,1}$ e $\alpha_{i,2}$ são alternos internos. Ou seja $\alpha_{t,1} = \alpha(i, 2)$. Como o índice de refração dentro da lente é constante, temos

- [2] **Problema 47.** A teoria ondulatória da luz demonstra que um foco perfeito não é possível devido aos efeitos de difração associados à abertura finita da lente. Essa falta de foco perfeito impede que objetos muito próximos sejam distinguidos. Este problema pode ser estudado de dois pontos de vista diferentes:

A teoria ondulatória da luz prevê que uma lente de diâmetro D não pode focar um feixe paralelo de luz com comprimento de onda λ em um ângulo menor que o limite de difração:

$$\theta_m \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (10)$$

Considere agora uma abordagem quântica, os fôtons que são focados pela lente. Esses fôtons são conhecidos por terem passado em algum lugar dentro de um raio do centro da lente. A incerteza na posição x está associada a uma incerteza no componente x do momento do fóton. Consequentemente, um fóton que, na ausência dessa incerteza, teria sido trazido para o eixo óptico do plano focal, pode agora ser desviado por um ângulo $\theta \ll 1$.

Considere o comprimento de onda de de Broglie $\lambda = \frac{\hbar}{p}$. Encontre um limite para θ .

DICA: o princípio de incerteza de Heisenberg, relaciona a impressão entre as medidas de momento e posição de uma partícula por

$$\Delta p_x \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

Solução

O momento de um fóton é dado por $p = h/\lambda$ e sabemos que o foton possui $\Delta x = D$ utilizando o princípio da incerteza de Heisenberg

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2D}$$

Utilizando que $\theta \approx \frac{\Delta p_x}{p}$, obtemos

$$\theta \approx \frac{\lambda \hbar}{2Dh} = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda}{D}$$

[3] **Problema 48.** (Apostila Magna) Prove que a quantia $n_i R_i \sin \theta_i$ para cascas esféricas adjacentes entre si, em que n_i é o índice de refração da i-ésima casca esférica, θ_i é o ângulo que o raio de luz faz com a normal da i-ésima casca esférica e R_i é o raio da i-ésima casca esférica, é uma invariante

[4] **Problema 49.** O indídice de refração da atmosfera de um planeta é dado por,

$$n(h) = \frac{n_0}{1 + \epsilon h}$$

Onde n_0 e ϵ são constantes.

- a) Um raio de luz atinge a atmosfera paralelamente a superfície, há uma altura $h' \ll R$, como será a trajetória?
- b) Sabendo a trajetória do raio de luz, calcule o Raio do planeta.

Dica: Você pode achar útil a seguinte relação,

$$\int \frac{t}{\sqrt{a - bt^2}} dt = -\frac{1}{b} \sqrt{a - bt^2} + C$$

Solução

- a) Defidindo $ds = \sqrt{dx^2 + dh^2}$ como sendo o elemnto infinitesimal de arco, temos,

$$\sin \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \theta = \frac{dh}{ds}$$

Como o meio é contínuo, podemos escrever,

$$n(h) \sin \theta(h) = cte$$

Assim,

$$n \frac{dx}{ds} = K$$

Substituindo n ,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{K(1 + \epsilon h)}{n_0}$$

Porém, pela definição de s , temos,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 = 1$$

Substituindo dx/ds ,

$$\frac{dh}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{K(1 + \epsilon h)}{n_0}\right)^2}$$

Usando uma regra da cadeia,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh/ds}{dx/ds} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{K(1 + \epsilon h)}{n_0}\right)^2}}{\frac{K(1 + \epsilon h)}{n_0}}$$

Simplificando a expressão,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sqrt{n_0^2 - K^2(1 + \epsilon h)^2}}{K(1 + \epsilon h)}$$

Para resolver essa E.D.O, vamos criar a variável $u = 1 + \epsilon h$, de modo que,

$$dh = \frac{du}{\epsilon}$$

Assim,

$$\frac{du}{dx} = \epsilon \frac{\sqrt{n_0^2 - K^2 u^2}}{K u}$$

Separando os termos e integrando,

$$\int \frac{u}{\sqrt{n_0^2 - K^2 u^2}} du = \frac{\epsilon}{K} \int dx$$

A integral do lado esquerdo, é a mesma fornecida pela questão, assim,

$$-\frac{1}{K^2} \sqrt{n_0^2 - K^2 u^2} = \frac{\epsilon}{K} x + C$$

Trabalhando nessa expressão,

$$\sqrt{n_0^2 - K^2 u^2} = -\epsilon K x - K^2 C$$

$$n_0^2 - K^2 u^2 = (\epsilon K x + K^2 C)^2$$

Substituindo u ,

$$n_0^2 - K^2(1 + \epsilon h)^2 = \epsilon^2 K^2 x^2 + 2\epsilon K^3 C x + K^4 C^2$$

Rearranjando os termos,

$$\epsilon^2 K^2 x^2 + 2\epsilon K^3 C x + K^2(1 + \epsilon h)^2 = n_0^2 - K^4 C^2$$

$$\epsilon^2 x^2 + 2\epsilon K C x + (1 + \epsilon h)^2 = n_0^2 / K^2 - K^2 C^2$$

Dividindo por ϵ^2 ,

$$x^2 + \frac{2KC}{\epsilon} x + \frac{K^2 C^2}{\epsilon^2} + \left(h + \frac{1}{\epsilon}\right)^2 = \left(\frac{n_0}{\epsilon K}\right)^2$$

Juntando o produto notável,

$$\left(x + \frac{KC}{\epsilon}\right)^2 + \left(h + \frac{1}{\epsilon}\right)^2 = \left(\frac{n_0}{\epsilon K}\right)^2$$

Que é justamente a equação de um círculo de raio $\frac{n_0}{\epsilon K}$ e centro $C = (-\frac{KC}{\epsilon}, -\frac{1}{\epsilon})$.

- b)** No caso de um raio que tangência o planeta, temos que o mesmo possuí $\theta_0 = \pi/2$ e $h_0 = 0$. Assim, utilizando,

$$n(h) \sin \theta(h) = n_0 \sin \theta_0 = K$$

Obtemos $K = n_0$, assim, o raio do planeta é dado pelo raio da trajetória (O raio de luz é tangente a superfície) e, portanto,

$$R = \frac{1}{\epsilon}$$

6 Cosmologia

- [5] **Problema 50.** A Equação de Friedmann é uma das mais importantes para o estudo da cosmologia e do estudo sobre o universo. O objetivo do problema é deduzir as equações fundamentais da cosmologia. Primeiro, vamos com algumas definições:

- i) Devido a expansão do Universo, a distância entre dois pontos é dada por:

$$r(t) = r_0 a(t)$$

Onde $a(t)$ é conhecido como o fator de escala e r_0 é a distância medida em $t = 0$.

- ii) O Universo segue a métrica de Robertson-Walker, a mesma pode ser simplificada para:

$$-c^2 dt^2 + dr^2 = 0$$

- a) Encontre uma expressão para a distância comóvel, r_0 , na forma de integral, a partir das definições dadas anteriormente.

- b) A Primeira Equação de Friedmann tem forma:

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = k_1 \varepsilon(t) + \frac{C}{r_0^2 a^2}$$

Encontre os valores das constantes k_1 para um universo esférico, em função de constantes fundamentais. Na equação acima, $\varepsilon(t)$ é a densidade de energia do universo, C é uma constante relacionada a sua energia e a é o fator de escala.

Dica: Você pode obter essa equação tanto por conservação de energia ou utilizando a segunda lei de Newton.

- c) Repita o item anterior para um universo cilíndrico se expandindo radialmente. A equação encontrada deve ter forma,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = f(a) \varepsilon(t) + \frac{C'}{r_0^2 a^2}$$

Encontre a função $f(a)$.

- d) Voltando agora para um "universo normal". Em cosmologia, definimos a densidade crítica de energia, como sendo a densidade de energia de um universo em que $C = 0$. Encontre uma expressão para a densidade crítica.

- e) Re-escreva a primeira equação de Friedmann em função de:

$$\Omega(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}$$

Onde $\varepsilon_c(t)$ é a densidade crítica de energia.

Solução

a) Isolando d_r ,

$$d_r = cdt$$

Mas por definição, $r(t) = r_0 a(t) \rightarrow d_r = r_0 da$. Substituindo,

$$dr_0 = c \frac{dt}{a(t)}$$

Integrando dos dois lados,

$$r_0 = c \int \frac{dt}{a(t)}$$

b) **Método 1: Conservação de energia** Considere uma partícula de massa m localizada em um ponto do universo. A sua energia em relação ao centro do universo é dada por,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM(r)m}{r}$$

Onde $v = \dot{r} = r_0 \dot{a}$ e $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho(t)$. Dividindo a equação por $m/2$ e aplicando as substituições, temos,

$$\frac{2E}{m} = r_0^2 \dot{a}^2 - \frac{G}{r_0 a} \frac{8\pi(r_0 a)^3 \rho(t)}{3}$$

Simplificando,

$$\frac{2E}{m} = r_0^2 \dot{a}^2 - \frac{8\pi G r_0^2 a^2 \rho(t)}{3}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{r_0^2 a^2}$, obtemos,

$$\frac{2E}{mr_0^2 a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G \rho(t)}{3}$$

Reorganizando a equação e utilizando a equivalência massa energia, $m = E/c^2 \rightarrow \rho(t) = \varepsilon(t)/c^2$, temos,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) + \frac{2E}{mr_0^2 a^2}$$

Da onde podemos concluir que,

$k_1 = \frac{8\pi G}{3c^2}$

Método 2: Segunda Lei de Newton

Escrevendo a segunda lei de newton para um corpo com relação ao centro do universo,

$$-\frac{GM(r)m}{r^2} = m \frac{d^2r}{dt^2}$$

Note que, ao se expandir, o universo não cria massa, então a massa contida em uma camada r , será constante ao longo do tempo, usando dessa propriedade, temos que,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

Multiplicando ambos os lados por dr/dt ,

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

Reescrevendo,

$$\dot{r} \frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{GM(r)}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

Multiplicando ambos os lados por dt ,

$$\dot{r} d\dot{r} = -GM(r) \frac{dr}{r^2}$$

Substituindo $r = r_0 a$,

$$r_0^2 \dot{a} d\dot{a} = -\frac{GM(r)}{r_0} \frac{da}{a^2}$$

Integrando dos dois lados,

$$r_0^2 \int \dot{a} da = -\frac{GM(r)}{r_0^2} \int \frac{da}{a^2}$$

$$\frac{r_0^2 \dot{a}^2}{2} = \frac{GM(r)}{r_0 a} + A$$

Onde A é uma constante de integração. Substituindo $M(r)$,

$$\frac{r_0^2 \dot{a}^2}{2} = \frac{4\pi G r_0^2 a^2}{3c^2} \varepsilon(t) + A$$

Multiplicando a expressão por $2/a^2 r_0^2$, temos,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) + \frac{2A}{r_0^2 a^2}$$

De onde podemos concluir, igualmente, que,

$$k_1 = \frac{8\pi G}{3c^2}$$

- c) Utilizando a lei de gauss,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM(r)$$

Onde,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -g(2\pi rL)$$

Para uma simetria cilíndrica. Substituindo na equação,

$$g = \frac{4\pi GM(r)}{2\pi rL} = \frac{2GM(r)}{rL}$$

Utiliznado o método da conservação de energia, temos primeiramente temos que calcular a energia potencial,

$$U = - \int F dr = - \int \frac{2GM(r)m}{rL} dr = - \int \frac{2GM(r)m}{L} \frac{da}{a} - \frac{2GM(r)m}{L} \ln(a)$$

Por conservação de energia,

$$E = \frac{mr_0^2 \dot{a}^2}{2} - \frac{2GM(r)m}{L} \ln(a)$$

Substituindo $M(r) = \pi r_0^2 a^2 L \varepsilon(t) / c^2$,

$$E = \frac{mr_0^2 \dot{a}^2}{2} - \frac{2\pi r_0^2 a^2 G m \ln(a)}{c^2} \varepsilon(t)$$

Reorganizando,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G \ln(a)}{c^2} \varepsilon(t) + \frac{2E}{mr_0^2 a^2}$$

Da onde podemos obter,

$$f(a) = \frac{4\pi G}{c^2} \ln(a)$$

d) A equação de Friedmann para $C = 0$ se reduz a

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_c(t)$$

Isolando $\varepsilon_c(t)$,

$$\boxed{\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H^2(t)}$$

Pela definição,

$$\varepsilon(t) = \Omega(t)\varepsilon_c(t)$$

Substituindo na equação,

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \Omega(t)\varepsilon_c(t) + \frac{C}{r_0^2 a^2}$$

Substituindo $\varepsilon_c(t)$,

$$H^2(t) = H^2(t)\Omega(t) + \frac{C}{r_0^2 a^2}$$

Resolvendo para $H^2(t)$,

$$\boxed{H^2(t) = \frac{C}{r_0^2 a^2 (1 - \Omega(t))}}$$

- [3] **Problema 51.** (Adaptado NAO 2019) Considere um universo plano em que a constante gravitacional deixa de ser constante e passa a ser definida por

$$G(a) = G_0 f(a)$$

Onde $f(a)$ é uma função do fator de escala.

- a) Como se daria a Equação de Friedmann nesse universo? Assuma que o universo é plano, $C = 0$ e que ele é composto apenas por matéria bariônica ("clara"). Deixa sua resposta em função de H_0 , $f(a)$, a e $\Omega_{m,0}$, onde H_0 é o valor da constante de Hubble no tempo atual, e $\Omega_{m,0}$ é o parâmetro de densidade,

No caso em que $f(a) = e^{b(a-1)}$, onde $b = 2$.

- b) Estime a idade desse universo assumindo que ele é constituído apenas de matéria bariônica (matéria "clara").
- c) Qual o comportamento da idade quando $t \rightarrow \infty$?

Talvez você ache as seguintes relações úteis:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x^2} \approx 0,189$$

Solução

a) Para um universo plano e contendo apenas matéria a equação de Friedmann tem cara,

$$H(t)^2 = H_0^2 \Omega_m$$

Onde $\Omega_m = \frac{\rho_m(t)}{\rho_{c,0}}$ onde

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Para matéria bariônica,

$$\rho_m(t) = \rho_0 a(t)^{-3}$$

Então,

$$\Omega_m = \Omega_{m,0} f(a) a^{-3}$$

Para um universo só de matéria bariônica, $\Omega_{m,0} = 1$,

Assim,

$$H(a)^2 = H_0^2 \Omega_{m,0} f(a) a^{-3} \equiv H_0^2 f(a) a^{-3}$$

b) Usando que $H = (\dot{a}/a)$, temos,

$$t = \int dt = \int da \frac{dt}{da} = \int \frac{da}{\dot{a}}$$

Multiplicando por a/a ,

$$t = \int \frac{a}{\dot{a}a} da = \int \frac{da}{H(a)a}$$

Substituindo o valor de $H(a)$ encontrado no item anterior,

$$t = \frac{1}{H_0^2} \int \frac{da}{\sqrt{f(a)a^{-3}}} = \frac{1}{H_0^2} \int a^{3/2} e^{-b(a-1)/2} da = \frac{e^{b/2}}{H_0^2} \int a^{3/2} e^{-ba/2} da$$

Usando uma substituição da forma $x = \sqrt{ba/2}$, temos,

$$t = \frac{4\sqrt{2}e^{b/2}}{b^{3/2}H_0} \int x^2 e^{-x^2}$$

Os limites de integração vão de $a = 0$ (inicio do universo) até $a = 1$ (momento atual), como fizemos a substituição em x ,

$$x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$$

$$t = \frac{4\sqrt{2}e^{b/2}}{b^{3/2}H_0} \int_0^{\sqrt{b/2}} x^2 e^{-x^2}$$

Substituindo $b = 2$,

$$t = \frac{4\sqrt{2}e}{2^{3/2}H_0} \int_0^1 x^2 e^{-x^2}$$

Substituindo os valores e utilizando a integral fornecida, obtemos,

$$t \approx 15 \text{Gyr}$$

O que é próximo do nosso universo!!

- c) Mudando os limites da integral para um tempo infinito, $a(t) \rightarrow \infty$,

$$t_\infty = \frac{4\sqrt{2}e}{2^{3/2}H_0} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}e}{2^{3/2}H_0} \approx 34.1 \text{ Gyr}$$

[5] **Problema 52.** (Lista 8 - 2021) A equação de Friedmann é:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (11)$$

em que a é o fator de escala no tempo t , ε é a densidade de energia no tempo t e k é o parâmetro que informa a geometria do universo, podendo assumir qualquer valor real. Considerando um universo composto apenas de matéria bariônica não relativística e resolvendo essa equação diferencial não linear para $k > 0$, obtém-se as seguintes soluções em termos do parâmetro $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$a(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3kc^4} (1 - \cos \theta), \quad (12)$$

$$t(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3k^{3/2}c^5} (\theta - \sin \theta). \quad (13)$$

Seja um universo com $\Omega_0 = 4$ e $H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc}$.

- a) A partir da equação de Friedmann, mostre que $kc^2 = H^2(1 - \Omega)a^2$. Por fim, reescreva as equações paramétricas de a e t em termos do parâmetro de densidade atual Ω_0 e da constante de Hubble atual H_0 , além do parâmetro θ . Não substitua os seus respectivos valores numéricos.

- b) Encontre a idade t_0 do universo em questão em termos de H_0 e em seguida em bilhões de anos.
- c) O chamado *Lookback time*, Δt_L , representa quanto tempo no passado o universo estava com certo fator de escala a . Qual é Δt_L em bilhões de anos para quando o tamanho do universo era $1/3$ do que é atualmente?
- d) Determine θ_n e em seguida t_n para os quais $H = 0$.

Solução

a)

[5] **Problema 53.** (Lista 6 - 2022) aaa

7 Miscelânia

- [4] **Problema 54.** Dudu Leiteiro, estava observando o céu, no interior de sua fazenda no Mato Grosso do Sul e observou o sistema binário formado pelas estrelas Iaum e Sezenem. Dudu, observou as estrelas e coletou os seguintes dados, com um intervalo de 6 meses entre eles:

Medida	Iaum	Sezenem
Ascenção Reta 1	$4^h 19^m 53, 91^s$	$4^h 19^m 53, 078^s$
Ascenção Reta 2	$4^h 19^m 53, 92^s$	$4^h 19^m 53, 077^s$
Declinação 1	$-13^\circ 33' 45, 28''$	$-13^\circ 33' 47, 78''$
Declinação 2	$-13^\circ 33' 45, 20''$	$-13^\circ 33' 48, 03''$

Com esses dados, você e Dudu Leiteiro, juntos vão analizar propriedades desse sistema binário. O primeiro passo importante para isso, é encontrar as coordenadas do centro de massa do sistema, denotadas pelo subscrito CM . Você lembra que em uma das aulas sobre o estudo de binárias, seu professor, LuCav, te ensinou que:

$$\delta_{CM} = \delta_A + \Delta\delta_A$$

$$\alpha_{CM} = \alpha_A + \Delta\alpha_A$$

Onde δ_A e α_A são as coordenadas de uma das estrelas do binário e Δ representa a diferença de coordenadas entre a estrela e o centro de massa, temos a seguinte relação:

$$\frac{a_A}{a} = \frac{\Delta\delta_A}{\Delta\delta_{CM}} = \frac{\Delta\alpha_A}{\Delta\alpha_{CM}}$$

Onde a_A é a distância da estrela A até o CM , a o semi-eixo maior da órbita e Δx_{CM} a variação das coordenadas do CM .

a) Sabendo que Iaum possuí $3/2$ da massa de Sezenem, calcule $\Delta\delta_{CM}$ e $\Delta\alpha_{CM}$.

b) Com isso e considerando que as variações angulares são pequenas o suficiente para triângulos esféricos serem planos, encontre a paralaxe do sistema e sua distância até a Terra.

c) Considerando a massa de Iaum, $M_I = 4,9M_\odot$, e o período do sistema igual a $P = 29,01$ anos, calcule o maior redshift advindo de Sezenem, sendo que ambas as órbitas são circulares e Sezenem possuí velocidade tangencial de $\mu = 1509''/\text{ano}$.

- [3] **Problema 55.** Marisso estava cansado de não conseguir encontrar com precisão a posição de uma estrela em seu telescópio e decidiu investigar os efeitos que poderiam estar causando esse erro aparente. Após ler alguns artigos, ele descobriu 2 principais efeitos que fazem um objeto aparentar estar em um ângulo $\Delta\theta_i$, desviado da sua posição original, são eles: *Paralaxe* e *Aberraçao Estelar*. Nessa questão, seu objetivo é ajudar Marisso, a entender o porque desses efeitos acontecerem.

- a) A paralaxe é o mais básico deles e ocorre por causa da mudança de posição da Terra ao longo do Ano. Considere que uma estrela está localizada de tal modo que a linha *Sol – Estrela* é perpendicular ao plano da órbita da Terra. Desenhe o esquema da situação e, considerando o raio da órbita da Terra como r e a distância da estrela como d , obtenha uma fórmula para $\Delta\theta_p$ causado pela paralaxe.
- b) Suponha agora, que a linha *Sol – Estrela* faça um ângulo ϕ qualquer com a órbita da Terra. Como sua resposta muda?

A aberraçao estar por sua vez advém de efeitos relativísticos a serem explorados a seguir.

- c) Considere um referencial S' se movendo com velocidade $v\hat{x}$ em relação ao referencial S . Como as coordenadas (x', t') se relacionam com as coordenadas (x, t) ? Deixe suas respostas em função de γ .
- d) Supondo que haja um emissor de radiação no referencial S' e que o mesmo emita luz em um ângulo α' em relação ao eixo x . No referencial S o dispositivo aparentará emitir luz em um ângulo α . Prove, utilizando as transformações de Lorentz, que a relação entre α e α' é dada por:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v/c}{1 + (\cos \alpha')v/c}$$

- e) Repita o item anterior, mas prove utilizando a adição de velocidade relativística.
- f) Considerando que a linha *Sol – Estrela* é perpendicular ao plano da órbita da Terra, e que a Terra se move com velocidade v , encontre uma expressão para o desvio $\Delta\theta_A$ causado pela aberração estelar.
- g) Qual desses efeitos você acha que é mais significativo, a paralaxe ou a aberração estelar?

Solução

a)

b)

c) As transformações de Lorentz (usando $c = 1$) são dadas por

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma(t' + vx')$$

d) Note que no referencial S , temos $\cos \alpha = \frac{x}{t}$. No referencial S' temos

$$x' = t' \cos \alpha'$$

Usando as transformações de Lorentz,

$$t = \gamma t'(1 + v \cos \alpha')$$

$$x = \gamma t'(\cos \alpha' + v)$$

Utilizando que $\cos \alpha = x/t$, temos

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v}{1 + v \cos \alpha'}$$

”Voltando” os c , temos

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v/c}{1 + (v/c) \cos \alpha'}$$

- e) No frame S' , teremos que a velocidade em x' é dada por $v'_x = c \cos \alpha'$. No referencial S , temos

$$v_x = "v'_x + v" = \frac{v'_x + v}{1 + (v'_x v)/c^2}$$

Substituindo v'_x e utilizando que $\cos \alpha = v_x/c$ temos

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + v/c}{1 + (v/c) \cos \alpha'}}$$

- f) No referencial da Terra, (que está se movendo e portanto corresponde ao referencial S'), temos $\alpha' = \pi/2$. Plugando isso, na resposta obtemos

$$\cos \alpha = v/c \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{1}{\gamma}$$

Utilizando a aproximação para pequenos ângulos, $\boxed{\alpha \approx 1/\gamma}$.

- g) Enquanto a distância Sol terra, está na ordem de alguns minutos-luz, a menor distância entre a Terra e outra estrela, está na ordem de anos luz, ou seja $\theta \sim 10^{-6}$. Já a velocidade da Terra é a aproximadamente 30 km/s, assim, $v/c \sim 10^{-4}$. Logo os efeitos de aberração são mais evidentes que os de paralaxe.