Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Fotometria e Física Moderna

[3] **Problema 1.** O objetivo dessa questão é deduzir uma expressão para a *profundidade óptica*. Imagine que um feixe de luz passe por uma região do espaço, com uma determiada quantidade de partículas. Se I_0 é a intensidade da luz antes de passar por tal região de espaço e I é a intensidade da luz após, a profundidade óptica é definida como:

$$I = I_0 e^{-\tau}$$

Onde τ é a profundidade óptica.
Considere uma região do espaço possuí densidade numérica de partículas n.

a) Qual o número de partículas em uma área A e espessura dz?

b) Supondo que cada partícula possua sessão transversal σ, qual é a área tampada pelas parículas?

c) Encontre a fórmula para τ.

Solução

a) A densidade volumétrica de partículas é n, sendo assim temos que o número dN de partículas em um volume dV é dado por

$$\boxed{dN = ndV \equiv nAdz}$$

b) Se cada particula ocupa uma área σ, a área ocupada por dN particulas é

$$\boxed{dS = \sigma dN = \sigma nAdz}$$

c) É esperado que a área ocupadas pelas particulas seja um empecilho para a passagem da luz. Como a Intensidade é proporcional a área disponível para a passagem da luz, nós temos

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dS}{A} = -n\sigma dz$$

Integrando, obtemos

$$I = I_0 e^{-n\sigma z}$$

Ou seja,

$$\boxed{\tau = n\sigma z}$$

[2] **Problema 2.** A Galáxia do Triângulo, $M33$, é a terceira maior galáxia do grupo local, ela está a uma distância $d = 970$ kpc de nós e possuí magnitude aparente de $5,72$. Sabendo que ela possuí aproximadamente 40 bilhões de estrelas, encontre a luminosidade média das estrelas de $M33$. Sua estimativa parece condizer com a realidade? Por que?

Solução

Utilizando a equação de Pogson

$$m - M_\odot = -2,5\log\left(\frac{L_g}{L_\odot}\left(\frac{10\text{ pc}}{d}\right)^2\right)$$

Resolendo para L_g,

$$L_g = L_\odot\left(\frac{d}{10\text{ pc}}\right)^2 10^{-0,4(m-M_\odot)}$$

Temos também, que $L_g = \overline{L_\star}N$ e assim

$$\overline{L_\star} = \frac{L_\odot}{N}\left(\frac{d}{10\text{ pc}}\right)^2 10^{-0,4(m-M_\odot)}$$

Utilizando os valores da tabela de constantes, obtemos:

$$\overline{L_\star} \approx 0,1L_\odot$$

No entando, essa estimativa não condiz com a realidade, uma vez que há fatores como a extinção interestelar que contribuem para o aumento da magnitude aparente de $M33$, uma estimativa condizente estaria na mesma ordem de grandeza da Luminosidade do Sol.

[4] **Problema 3.** Considere que o universo possuí densidade numérica de estrelas, isto é, numero de estrelas por unidade de volume, constante e de valor n. Assumindo que todas elas tenham $L = L_\odot$ e que existam um total de N_0 estrelas no universo.

a) qual a probrabilidade da magnitude absoluta de uma estrela, vista do centro do universo, ter magnitude entre m e $m + dm$, onde dm é uma porção infinitesimal de magnitude? Deixe sua resposta em termos de m e da maior magnitude possivél, m_{lim}, de uma estrela na "borda"do universo.

b) Qual a probabilidade de uma estrela poder ser observada a olho nu?

Dados:

$$\int_{-\infty}^{6} 10^{0,6(x-A)}dx \approx 2881.6e^{-1.381A}$$

Solução

a) A magnite aparente de uma estrela é dada por,

$$m = -2,5\log F + C$$

Onde C é uma constante. Escrevendo $F = L/4\pi r^2$, temos,

$$m = -2,5\log\left(\frac{L}{4\pi r^2}\right) + C = 5\log r - 2,5\log\left(\frac{L}{4\pi}\right) + C$$

Mas como L é constante para todas as estrelas, podemos absorver o segundo termo para a constante. Assim,

$$m = 5\log r + C \rightarrow r = 10^{0,2(m-C)}$$

Derivando a expressão de m, temos,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{5}{r\ln 10}$$

Agora, vamos achar a probabilidade de uma estrela estar a uma distância r.

O numero de estrelas contidas entre r e $r + dr$ é

$$dN(r) = 4\pi n r^2 dr$$

Dividindo por N_0, temos que a probabildiade de uma estrela estar nessa distância é

$$dP(r) = \frac{dN(r)}{N_0} = \frac{4\pi n r^2}{N_0}dr \rightarrow dr = \frac{N_0}{4\pi n r^2}dP(r)$$

Substituindo a expressão para dr,

$$\frac{r\ln 10}{5}dm = \frac{N_0}{4\pi n r^2}dP(r)$$

Isolando $dP(r)$,

$$dP(r) = \frac{4\pi\ln 10 n r^3}{5N_0}dm$$

Substituindo a expressão de r, podemos realizar a mudança de variável $r \rightarrow m$em dP

$$dP(m) = \frac{4\pi n\ln 10}{5N_0}10^{0,6(m-C)}dm$$

Para achar o valor de C, vamos comparar com a magnitude limite, na "borda"do universo. Como o universo possuí N_0 estrelas, seu raio deve ser dado por,

$$N_0 = \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow R = \left(\frac{3N_0}{4\pi}\right)^{1/3}$$

Equacionando agora para m_{lim},

$$m_{lim} = 5\log R + C$$

No qual, podemos isolar a constante $C = m_{lim} - 5\log R$. Substituindo na expresssão de $dP(m)$,

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m - m_{lim} + 5\log R)} dm$$

Trabalhando nessa expressão,

$$dP(m) = \frac{4\pi n \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m - m_{lim})} 10^{3\log R} dm$$

Usando as propriedades do log, $a\log b = \log b^a$ e $10^{\log x} = x$, temos,

$$dP(m) = \frac{4\pi n R^3 \ln 10}{5N_0} 10^{0,6(m - m_{lim})} dm$$

Substituindo R,

$$\boxed{dP(m) = \frac{3\ln 10}{5} 10^{0,6(m - m_{lim})} dm}$$

Ou seja, a probabilidade não depende de n e nem de N_0!

b) Para uma estrela ser vísivel, sua magnitude deve ser $m \leq 6$, assim, equacionando,

$$P(m \leq 6) = \int_{-\infty}^{6} dP(m) = \frac{3\ln 10}{5} \int_{-\infty}^{6} 10^{0,6(m - m_{lim})} dm$$

Usando a integral dada no enuncicado,

$$P(m \leq 6) = \frac{3\ln 10}{5} 2881,6 e^{-1,381 m_{lim}}$$

Simplificando os fatores numéricos,

$$\boxed{P(m \leq 6) \approx 3981,08 e^{-1,381 m_{lim}}}$$

A fim de curiosidade, colocando $m_{lim} \approx 40$, para uma estimativa, teriamos,

$$P(m \leq 6) \approx 10^{-20}$$

Ou seja, mesmo no modelo mais simples o universo, a nossa capacidade e insigficicancia prevalece.

[4] **Problema 4.** O *Brilho Superfícial*, fluxo por ângulo sólido por frequência, B_ν é dada pela Lei de

Plank:

$$B_\nu = \frac{dF}{d\nu d\Omega} = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1)}$$

a) Encontre uma expressão para:

$$B_\lambda = \frac{dF}{d\lambda d\Omega}$$

b) A partir de B_λ encontre o comprimento de onda máximo de onda λ_{max} que uma estrela de temperatura T emite (você terá que resolver algo numéricamente).

c) Para pequenas frequências temos a aproximação de Righlight-Jeans. Obetenha uma expressão para B_ν para frequêncais pequenas.

Solução

a) Temos que

$$B_\lambda = \frac{dF}{d\lambda d\Omega} = \frac{dF}{d\nu d\Omega}\frac{d\nu}{d\lambda}$$

Utilizando a relação fundamental da ondulatória, $c = \nu\lambda \rightarrow \nu = c/\lambda$ chegamos em

$$B_\lambda = \frac{2h(c/\lambda)^3}{c^2(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}$$

b) Para resolver esse item, pracisamos achar o ponto máximo de B_λ. Mas diferenciar B_λ diretamente é uma tarefa estremamente chata. Uma ideia mais eficiente é tirar o logaritimo natural de B_λ e diferenciar o mesmo. Uma vez que estamos no ponto de máximo, ambas as maneiras chegarâo no mesmo, resultado

$$\ln B_\lambda = -5\ln\lambda - \ln(e^{hc/\lambda k_B T} - 1) + C$$

Onde C é uma constante que absorve os ln das outras constantes de B_λ. Continuando a derivar

$$\frac{d\ln B_\lambda}{d\lambda} = -\frac{5}{\lambda} + \frac{e^{hc/\lambda k_B T}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}\frac{hc}{k_B T\lambda^2} = 0$$

Definindo $x = \frac{hc}{k_B T\lambda}$

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 5$$

$$x = 5e^{-x}(e^x - 1) = 5(1 - e^{-x})$$

Utilizando iteração, podemos resolver para x, obtendo $x \approx 4,965$. Voltando a definição de x

$$4,965 = \frac{hc}{k_B T\lambda_{max}} \rightarrow \boxed{\lambda_{max} \approx \frac{2,989 \cdot 10^{-3}}{T}}$$

Essa é a famosa *Lei de Wien*, comumente escrita na forma $\lambda = b/T$, onde $b \approx 2,989 \cdot 10^{-3}$.

[3] **Problema 5.** A luminosidade de um corpo secundário, depende da área iluminada vísivel do astro. Nestá questão vamos fazer um breve estudo sobre esse fenômeno.

a) Considere a Seguinte situação:

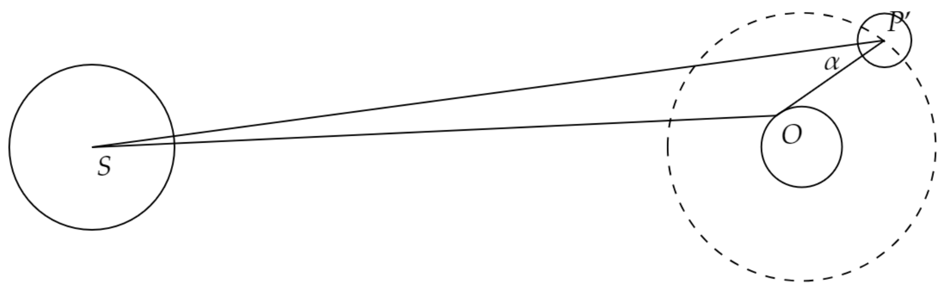

Figura 1: Esquema Sol-Terra-Lua

Encontre uma expressão para a razão Φ entre a área iluminada em função de α e a área total do planeta.

b) Encontre os ângulos α em que temos a fase da Lua em: Nova, crescente, cheia e minguante, respectivamente.

Solução

Para resolver a questão, vamos nos guiar no esquema da imagem abaixo:

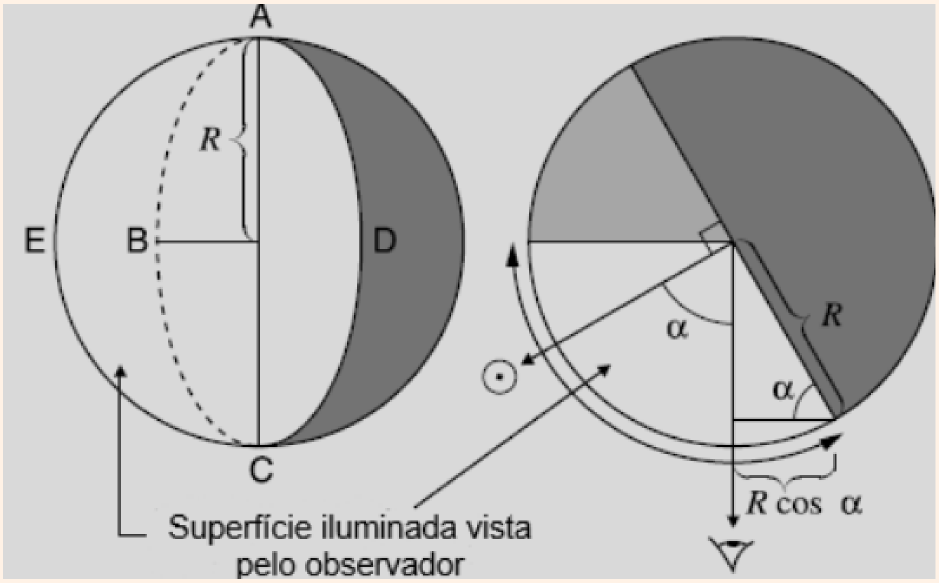

Figura 2: Fonte: Introduction do Planetary Fotometry

Do lado esquerdo, vamos um esquema de como o plaeta se parece no céu e na direita uma representação vista "de cima". Aqui, podemos perceber que a área que vemos é composta por metade da área do cículo mais metadade da área de uma elipse de semi eixo maior R e semi eixo menor $R\cos\alpha$. Assim

$$\Phi = \frac{\pi R^2/2 + \pi R^2 \cos\alpha/2}{\pi R^2} \quad \boxed{\therefore \Phi = \frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Na Lua nova, temos $\Phi = 0$, na crescente $\Phi = 1/2$, na cheia $\Phi = 1$ e na minguante $\Phi = 1/2$, assim:

$$\boxed{\alpha_{nova} = 180^\circ,\ \alpha_{crescente} = 90^\circ,\ \alpha_{cheia} = 0^\circ,\ \alpha_{minguante} = 90^\circ}$$

[5] **Problema 6.** (Apostila Magna) Neste problema, modelaremos o efeito da atmosfera na Terra. Suponha que o Sol seja um corpo negro de temperatura T_1 e raio R_1. A Terra é uma esfera que está localizada a uma distância R do Sol e possui raio R_3. A emissividade da Terra é ϵ_3.

a) Se não houvesse atmosfera na Terra, determine sua temperatura de equilíbrio, T_3.

b) Agora, consideraremos os efeitos da atmosfera. Modele-a como uma casa esférica de gás, com uma emissividade ϵ_2 e raio exterior $R_2 > R_3$, concêntrica à Terra. No equilíbrio térmico, sua absortividade para os comprimentos de onda no ultravioleta e no infravermelho é ϵ_2. A atmosfera transmite uma fração t da radiação ultravioleta mas é completamente opaca ao infravermelho. Assumindo que o Sol emita luz ultravioleta enquanto a Terra emite e re-emite no infravermelho, determine as temperaturas T_2 da atmosfera e T_3 da Terra, no equilíbrio termodinâmico. Assuma que a atmosfera seja um condutor de calor perfeito, de forma que toda a radiação incidente sobre ela seja uniformemente distribuída por sua superfície.

Solução

a) No equilíbiro termodinâmico, temos que a quantidade de potencia absorvida é a mesma que a emitida. Além disso, a emissividade e a absortividade são as mesmas. Desse modo,

$$\frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R^2}\pi R_3^2 \epsilon_3 = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4 \epsilon_3$$

Resolvendo para T_3,

$$\boxed{T_3 = T_1 \left(\frac{R_1^2}{4\pi R^2}\right)^{1/4}}$$

b) A temperatura da atmosfera é calculada por

$$T_2 = T_1 \left(\frac{R_1^2}{4\pi R^2}\right)^{1/4}$$

O processo é analogo ao item anterior. A luminosidade transmitida pela terra é,

$$L_2 = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 t$$

A Terra irá refletir toda essa radiação e a atmosfera refletirá de volta apenas uma fração t, desse modo, a luminosidade total é dadda por,

$$L_{2,T} = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 (t + t^2 + t^3 + ...)$$

O item dentro do parenteses é uma somatóriso de PG infinito, com $q_1 = t$ e $r = t$, como $t < 1$, o valor do somatório vale,

$$(t + t^2 + t^3 + ...) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

Igualando ambas,

$$L_{2,T} = L_3 \rightarrow \frac{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4 \epsilon_2 t}{1-t} = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4$$

Resolvendo para T_3,

$$T_3 = T_2 \left(\frac{R_2^2 \epsilon_2}{R_3^2}\frac{t}{1-t}\right)^{1/4}$$

Substituindo o valor de T_2,

$$\boxed{T_3 = T_1 \left(\frac{R_1^2 R_2^2}{4\pi R^2 R_3^2}\frac{\epsilon_2 t}{1-t}\right)^{1/4}}$$

[2] **Problema 7.** (Lista 2 - 2021) A Nebulosa do Anel (M57) possui uma magnitude aparente igual a 9 e um diâmetro angular de $2'$ para um observador na Terra. Qual seria a magnitude aparente do céu noturno de um planeta orbitando uma estrela exatamente no centro de M57?

Solução

O céu noturno compreende um ângulo sólido de 2π sr, já o ângulo sólido visto por nés é $\Omega \approx \pi\theta^2$, onde θ é o raio angular. Como o Fluxo é proporcional a Ω, temos

$$m_{ceu} - m = -2,5\log\left(\frac{\Omega_{ceu}}{\Omega}\right)$$

Para converter Ω de arco-minuto^2 para sr, temos que multiplicar por $\left(\frac{\pi}{180\cdot 60}\right)^2$, assim

$$m_{ceu} = 9 - \log\left(\frac{2\pi}{\pi(\frac{\pi}{180\cdot 60})^2}\right)$$

$$\boxed{m_{ceu} = -9,43}$$

[4] **Problema 8.** (Adaptado Lista 4 - 2021) O Efeito Cherenkov foi primeiramente detectado pelo cientista soviético Pavel Cherenkov, em 1937. Mais tarde, em conjunto com seus colegas de trabalho, I. E. Tamm e I. M. Frank, ele interpretou fisicamente o fenômeno, ganhando, assim, o Prêmio Nobel de Física de 1958. Antes de fazer um estudo matemático, precisamos, primeiro, entender um pouco mais sobre seu princípio.

Quando partículas carregadas de alta energia percorrem um meio dielétrico, é possível que, caso sua velocidade seja maior que a velocidade de fase ($\frac{c}{n}$), átomos sejam excitados. Esses, por sua vez, ao retornarem ao estado fundamental, emitem radiação eletromagnética. As ondas emitidas se espalham de forma esférica e, quando somadas, formam um cone de ângulo de abertura 2α, como mostra a figura abaixo.

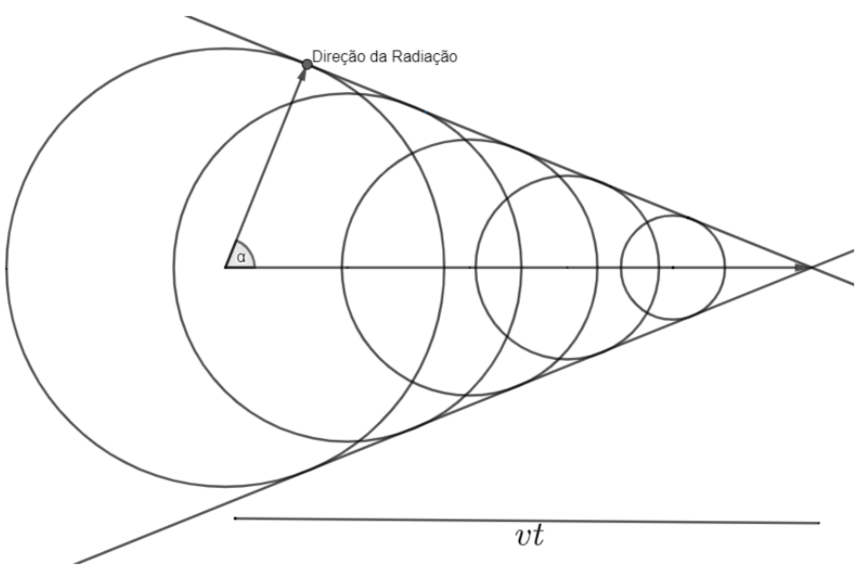

Figura 3: Mecanismo de radiação do Efeito Cherenkov

Esse efeito é similar a um jato movendo-se em velocidade supersônica, ou seja, segue o mesmo princípio do Cone de Mach, porém, com a luz. Finalmente, iremos desenvolver o modelo matemático do Efeito Cherenkov.

Parte A - Modelo Teórico

Considere uma partícula movimentando-se a velocidades relativísticas em um meio de índice de refração n. Sabe-se que sua massa de repouso é m_0, possui momento linear p e velocidade v. Em determinado momento, há emissão de um fóton sob um ângulo α, como mostra a figura 1.

a) Sendo μ a frequência do fóton emitido, determine a equação de seu momento linear, p_μ, e sua energia, E_μ. Sua resposta deve estar em função de n, μ e constantes físicas.

b) Encontre uma expressão para o momento linear da partícula após a emissão do fóton em função de p_μ, p e α.

c) Sendo $\beta_n = \frac{c}{vn}$, prove que a relação abaixo é verdadeira:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\beta_n} \tag{1}$$

d) Considerando que o momento linear e a energia se conservem, determine a velocidade mínima para a ocorrência do Efeito Cherenkov. **Dica:** Quando comparado com os outros parâmetros, o fator $(n^2-1)h\mu$ pode ser desprezado.

Parte B - Reações Nucleares

A cadeia próton-próton é um processo de reações de fusão para conversão de hidrogênio em hélio. Um dos ramos possíveis da cadeia próton-próton é a *pp* IV, na qual, teoricamente, um átomo de hélio-3 reage diretamente com um próton, conforme a reação a seguir:

$$^3\text{He} + ^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + \nu + \_\_ \tag{2}$$

e) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.

f) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação abaixo:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \_ \tag{3}$$

Dados: Massa do píon: 140 MeV/c^2, massa do múon: 106 MeV/c^2.

Solução

Parte A - Modelo Teórico

a) Para um fóton, as relações de De Broglie, nos dizem que

$$E = h\mu, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

Onde h é a constante de plank.

Utilizando a relação fundamental da ondulatória, $\lambda = v/\mu = \frac{c}{n\mu}$, assim

$$\boxed{E = h\mu, \quad p = \frac{nh\mu}{c}}$$

b) Como o momento total é conservado, considereque a particula está se movendo com momento p ao longo do eixo x, antes de emitir um foton. Assim, temos

$$p = p_\mu \cos\alpha + p'_x$$

$$p_\mu \sin\alpha = p'_y$$

$$p' = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Resolvendo para p'

$$p'^2 = (p - p_\mu \cos\alpha)^2 + p_\mu^2 \sin^2\alpha$$

$$p'^2 = p^2 - 2p_\mu p \cos\alpha + p_\mu^2$$

Finalmente

$$p' = \sqrt{p^2 - 2pp_\mu \cos\alpha + p_\mu^2}$$

c) Olhe a seguinte figura,

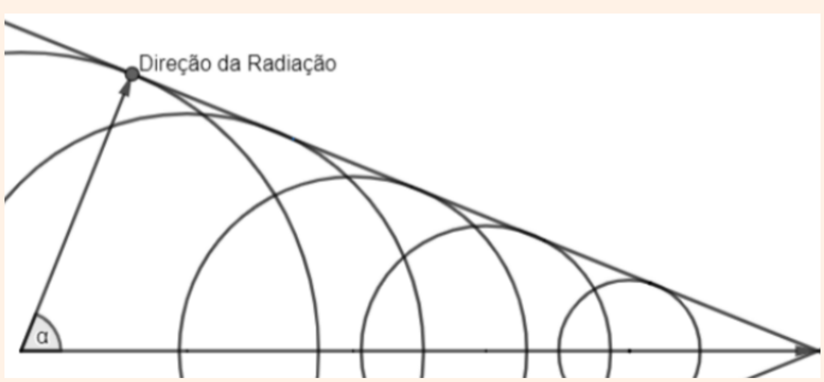

Figura 4: Esquema Cherenkov

Note que o raio do circulo é dado pela distância percorrida pelo fóton. A distância percorrida do centro do cirulo até o fim do cone é vt, assim

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{ct}{nvt} = \frac{c}{nv} \equiv \frac{1}{\beta_n}}$$

d) Definindo $c = 1$, a conservação de energia nos diz

$$\sqrt{p^2 + m_0^2} = \sqrt{p'^2 + m_0^2} + h\mu$$

Trablhando nessa expressão

$$\sqrt{p'^2 + m_0^2} = \sqrt{p^2 + m_0^2} - h\mu$$

$$p'^2 + m_0^2 = p^2 + m_0^2 + h^2\mu^2 - 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}$$

Substituindo p'

$$p^2 - 2pp_\mu \cos\alpha + p_\mu^2 = p^2 + h^2\mu^2 - 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}$$

Resolvendo para $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{p_\mu^2 - h^2\mu^2 + 2h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}}{2pp\mu}$$

Simplificando

$$\cos\alpha = \frac{p_\mu}{2p} - \frac{h^2\mu^2}{2pp_\mu} + \frac{h\mu\sqrt{p^2 + m_0^2}}{pp_\mu}$$

Substituindo $p_\mu = nh\mu$

$$\cos\alpha = \frac{nh\mu}{2p} + \frac{h\mu}{2np} + \frac{\sqrt{p^2 + m_0^2}}{np}$$

$$\cos\alpha = \frac{h\mu(n^2 - 1) + 2\sqrt{p^2 + m_0^2}}{2np}$$

Desprezando o termo $h\mu(n^2 - 1)$ e substituindo $\cos\alpha$

$$\frac{1}{nv} = \frac{\sqrt{p^2 + m_0^2}}{np}$$

Resolvendo para v

$$v = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_0^2}}$$

Porfim, voltando os c's, temos

$$\boxed{v = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}}$$

Parte B - Reações Nucleares

e) Utilizando a conservação de carga, do lado esquerdo temos $2 + 1 = 3$ prótons, porém do lado direito, só temos 2, portanto a particula faltante deve conter um proton. Já a massa atômica, segue como $3 + 1 = 4$ e do lado direito 4. Assim, a particula faltante deve ter a carga de um proton e a massa muito menor do que este. A única partícula que seja essa descrição é o $\boxed{\text{pósiton, } e^+}$.

f) Utilizando que o número leptônico é constante, temos que o pion não é um lepton $n_L = 0$, mas o múon, é um lepton com $n_L = +1$, então a nossa partícula deve ter $n_L = -1$. O único antilépton neutro associado ao múon com $n_L = -1$ é o antineutrino do múon, $\bar{\nu}_\mu$, portanto, a relação completa é

$$\boxed{\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu}$$

[3] **Problema 9.** (Lista 3 - Vinhedo 2022) Juvelino, diretamente de seu observatório em Paris, França, monitora a estrela Polaris (αUMi). Ele tem como objetivo descobrir a temperatura de cor T_c do astro. Alguns dos dados de que ele dispõe a respeito de seu alvo são:

- Magnitude aparente na banda V: $V = 1,98$;
- Magnitude absoluta na banda V: $M_V = -3,60$;
- Magnitude absoluta na banda B: $M_B = -3,19$.

Com as informações fornecidas, ajude Juvelino!

a) Realizando diversas observações, Juvelino determinou que a extinção interestelar na banda V na direção de Polaris é $a_V = 5,8\,\text{mag/kpc}$. Determine a distância, em pc, de αUMi até a Terra.

b) Usando a relação empírica

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0 \tag{4}$$

sendo A_V a extinção interestelar total na banda V e E_{B-V} o excesso de cor $B - V$, determine o índice de cor $B - V$ da estrela observada.

c) Demonstre a relação

$$T_c = \frac{7009}{(B - V) + 0,47} \tag{5}$$

na qual a temperatura de cor é dada em Kelvin. Para tanto, use o fato de que estrelas de classe espectral $A0$ possuem $(B - V) = 0$ e $T_c = 15000\,\mathrm{K}$. Use também que os comprimentos de onda das bandas B e V são, respectivamente, $\lambda_B = 440\,\mathrm{nm}$ e $\lambda_V = 548\,\mathrm{nm}$. Justifique quaisquer aproximações feitas.

DICA: A lei de plack talvez seja útil

d) Determine a temperatura de cor de Polaris.

Solução

a) A expressão que relaciona corretamente as magnitudes é

$$V - M_V = 5 \log d - 5 + a_V d$$

Essa equação, só pode ser resolvida por meio da iteração,

$$d = \frac{V - M_V - 5 \log d + 5}{a_v}$$

Iterando, chegamos em $\boxed{d \approx 100 \text{ pc}}$.

b) Pela definição, $E_{B-V} = A_B - A_V$. Assim

$$\frac{A_V}{A_B - A_V} = 3,00$$

$$A_B = \frac{A_V}{3} + A_V = 0,77$$

Assim,

$$B - M_B = 5 \log d - 5 + A_B \rightarrow B = 2,58$$

E pela definição, o índice $B - V = \boxed{U_{B-V} = B - V = 0,60}$

c) Utilizando a Lei de Planck, temos que

$$\frac{B_B}{B_V} = \frac{F_B}{F_V} \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B}\right)^5 \frac{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_V}} - 1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_B}} - 1}$$

Utilizando a aproximação de Wein, temos

$$\frac{F_B}{F_V} = \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B}\right)^5 \frac{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_V}}}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_B}}}$$

Utilizando a equação de Pogson para comparar as magnitudes,

$$B - V = -2,5 \log \left(\frac{F_B}{F_V}\right) + C$$

Aqui adicionamos uma constante, pois estamos trabalhando com diferentes comprimentos de ondas. Trabalhando na expressão,

$$B - V = -2,5 \log \left(\left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 \frac{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_V}}}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda_B}}} \right) + C$$

Trabalhando nessa expressão,

$$B - V = -2,5 \log \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B} \right)^5 + 2,5\beta hc \left(\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_V} \right) \log e + C$$

E utilizando $\beta = \frac{1}{k_B T_c}$ e substituindo os valores,

$$B - V = -1,19 + \frac{7009}{T_c} + C$$

Para o tipo A_0, $(B_V) = 0$ e $T_c = 15000$K. Assim,

$$-1,19 + \frac{7009}{15000} + C = 0 \rightarrow C = 0,72$$

Assim,

$$B - V = -0,47 + \frac{7009}{T_c} \rightarrow \quad \boxed{T_c = \frac{7009}{(B - V) + 0,47}}$$

d) da equação anterior,

$$\boxed{T_c = \frac{7009}{0,60 + 0,47} \approx 6600 \text{ K}}$$