Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por () antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

1 Óptica e Telescópios

[3] **Problema 1.** Um telescópio Kepleriano possuí duas lentes convergentes. A primeira possuí o raio de curavtura das duas faces igual a $R = 2$ m e a segunda possuí ambos os raios de curvatura igual a $r = 0,5$ m. Considerando que ambas as lentes possuem espessura desprezivel e são feitas de um material com indíce de refração $n = 1,4$. Calcule o diâmetro e o aumento do telescópio sabendo que este telescópio é um f/12.

[5] **Problema 2.** Nessa questão, vamos nos familiarizar com uma das ferramentas mais poderosas da óptica, a *óptica geométrica*. O objetivo dessa ferramenta é modelar lentes e espelho em forma de matrizes. Isso é muito útil para resolver questões envolvendo associações de diversas lentes e é um método de resolver problemas de óptica geométrica (praticamente) sem usar geometrica. Mas para isso, se atente as seguintes definições na imagem a seguir

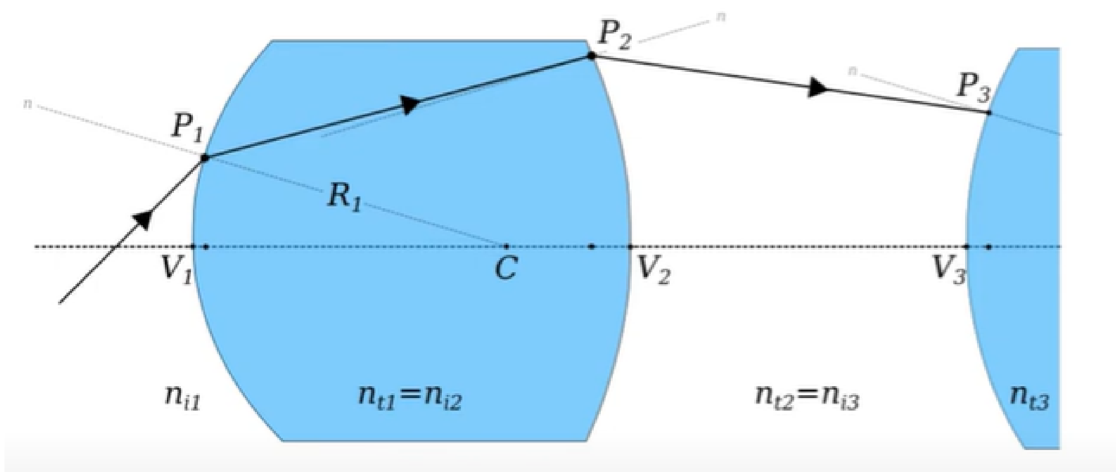

Figura 1: Esquema 1

Todas as linhas pontilhadas são paralelas ao eixo óptico, representado pela seta horizontal. É denotado por P_k o ponto onde a luz passa de um meio para o outro, y_k a coordenda vertical do ponto P_k. São utilizados os subscritos i e t para se referir a incidente e transmitido, reespectivamente, então, por exemplo, $\alpha_{i,k}$ é o ângulo que o raio de incidente luz faz com a horizontal no ponto P_k, já o ângulo α_k é o ângulo entre a horizontal e o centro da lente k.

Para essa questão, vamos considerar que todos os ângulos de interesse são pequenos, de modo que $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$.

a) Partindo da Lei de Snell, encontre uma relação entre $n_{i,1}$, $n_{t,1}$, α_1, $\alpha_{i,1}$ e $\alpha_{t,1}$.

É facil perceber que $\alpha_k = y_k/R_k$. Utilizando-se desse fato

b) Encontre uma relação para (1) $n_{t,1}\alpha_{t,1}$ e (2) $y_{t,1}$. Deixe suas respostas em função de $n_{i,1}$, $\alpha_{i,1}$, $y_{i,1}$ e $\mathcal{D}_1$, para

$$\mathcal{D}_1 = \frac{n_{t,1} - n_{i,1}}{R_1}$$

Agora vamos para mais uma definição, seja o vetor $\mathbf{r}_{t,1} = (n_{t,1}\alpha_{t,1},\ y_{t,1})$ e $\mathbf{r}_{i,1} = (n_{i,1}\alpha_{i,1},\ y_{i,1})$.

c) É possível escrever as duas equações que encontramos no item anterior na forma matricial, de forma:

$$\mathbf{r}_{t,1} = \mathcal{R}_1 \mathbf{r}_{i,1}$$

Encontre a matriz 2×2 equivalente à $\mathcal{R}_1$.

Nosso interesse agora é encontrar as relações entre os pontos P_2 e P_1.

d) Encontre uma equação para $n_1\alpha_{i,2}$ e $y_{i,2}$. Utilizando o raciocínio do item anterior, deixe sua resposta na forma

$$\mathbf{r}_{i,2} = \Gamma_{2,1}\mathbf{r}_{t,1}$$

Onde $\Gamma_{2,1}$ também é uma matriz 2×2.

e) Definimos a matriz da lente, $\mathcal{A}_{2,1}$ da seguinte equação:

$$\mathbf{r}_{i,2} = \mathcal{A}_{2,1}\mathbf{r}_{i,1}$$

De modo que

$$\mathcal{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Encontre explicitamente $\mathcal{A}_{2,1}$.

f) Dentre todas as propriedades da matriz da lente, a mais curiosa delas é que o termo a_{12} equivale a $-1/f$ onde f é o foco da lente. Prove esse resultado. (Dica: você consiguira escrever $-a_{12}$ com uma equação bem conhecida da óptica).

Agora, vamos colocar a mão na massa e fazer utilizações praticas da óptica matricial.

g) Refaça o exercício anterior utilizando óptica matricial.

h) Considere o seguinte esquema:

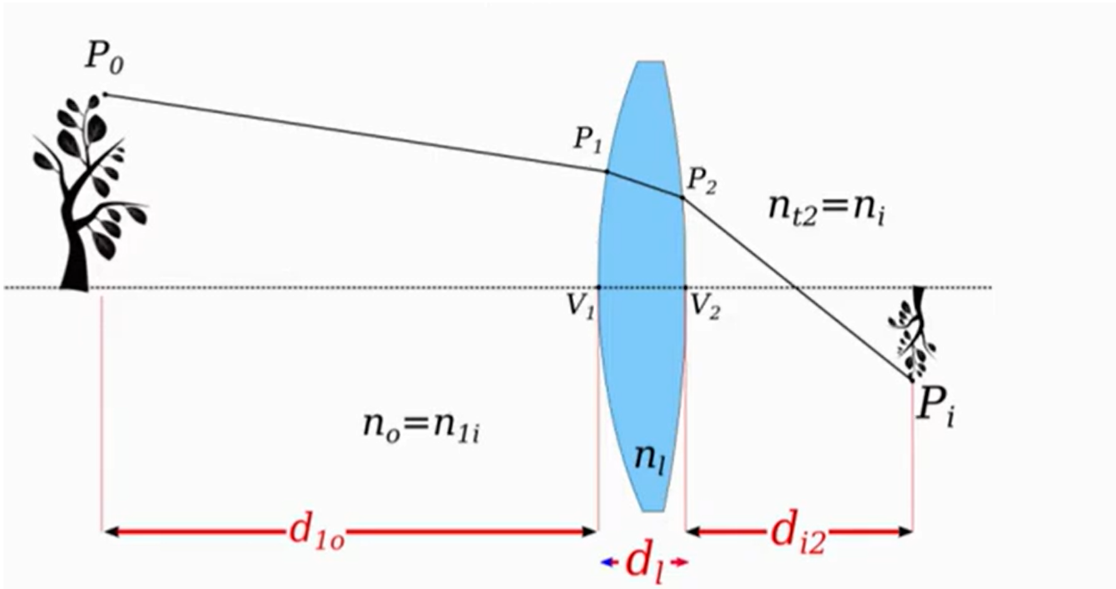

Figura 2: Esquema 2

Ecnontre y_i em função de y_0 e dos dados na imagem.

i) Se a lente estiver entre dois meios diferentes, $n_{i,1} \neq n_{t,2}$ temos a seguinte relação:

$$a_{12} = -\frac{n_{i,1}}{f_0} = -\frac{n_{t,2}}{f_I}$$

Utilizando-se disse, refaça a questão anterior, considerando que entre as duas lentes á água de $n_w = 4/3$.

j) Um arranjo muito comum de lentes é a Objetiva de Tessar, presente em muitas cameras pela sua eficiencia em diminuir efeitos de aberração e astigmatismo. O Arranjo tem a seguinte forma:

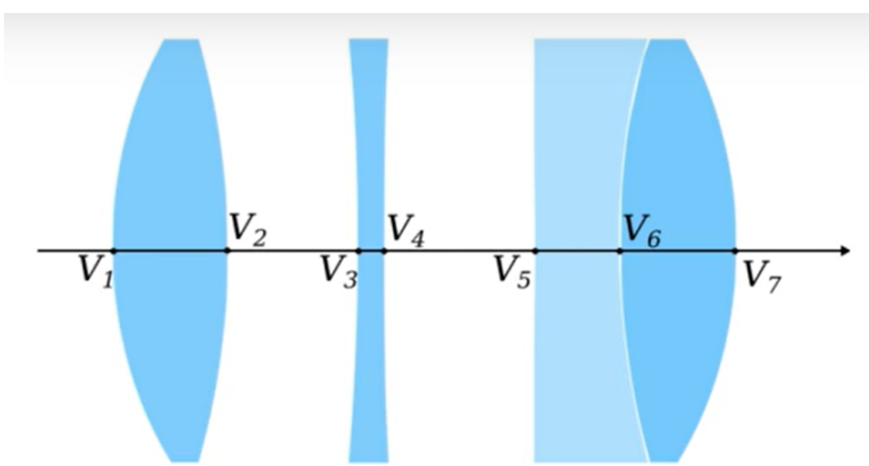

Figura 3: Esquema Objetiva Tessar

Encontre a Matrix da Lente equivalente, $\mathcal{A}_{1,7}$ em função de $\mathcal{R}_i$ e $\Gamma_{i,j}$.

[2] **Problema 3.** A teoria ondulatória da luz demonstra que um foco perfeito não é possível devido aos efeitos de difração associados à abertura finita da lente. Essa falta de foco perfeito impede que objetos muito próximos sejam distinguidos. Este problema pode ser estudado de dois pontos de vista diferentes:

A teoria ondulatória da luz prevê que uma lente de diâmetro D não pode focar um feixe paralelo de luz com comprimento de onda λ em um ângulo menor que o limite de difração:

$$\theta_m \approx 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{1}$$

Considere agora uma abordagem quântica, os fótons que são focados pela lente. Esses fótons são conhecidos por terem passado em algum lugar dentro de um raio do centro da lente. A incerteza na posição x está associada a uma incerteza no componente x do momento do fóton. Consequentemente, um fóton que, na ausência dessa incerteza, teria sido trazido para o eixo óptico do plano focal, pode agora ser desviado por um ângulo $\theta \ll 1$.

Considere o comprimento de onda de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$. Encontre um limite para θ.

DICA: o princípio de incerteza de Heisenberg, relaciona a impressição entre as medidas de momento e posição de uma particula por

$$\Delta p_x \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

[3] **Problema 4.** (Apostila Magna) Prove que a quantia $n_i R_i \sin\theta_i$ para cascas esféricas adjacentes entre si, em que n_i é o índice de refração da i-ésima casca esférica, θ_i é o ângulo que o raio de luz faz com a normal da i-ésima casca esférica e R_i é o raio da i-ésima casca esférica, é uma invariante

[4] **Problema 5.** O indídice de refração da atmosfera de um planeta é dado por,

$$n(h) = \frac{n_0}{1 + \epsilon h}$$

Onde n_0 e *epsilon* são constantes.

a) Um raio de luz atinge a atmosfera paralelamente a superfície, há uma altura $h' \ll R$, como será a trajetória?

b) Sabendo a trajetória do raio de luz, calcule o Raio do planeta.

Dica: Você pode achar útil a seguinte relação,

$$\int \frac{t}{\sqrt{a - bt^2}} dt = -\frac{1}{b}\sqrt{a - bt^2} + C$$