

# Banco de questões de astronomia

Estas questões foram produzidas/selecionadas cuidadosamente com o objetivo de preparar os estudantes para o processo seletivo de astronomia no Brasil. Algumas questões não são de autoria própria e estão devidamente sinalizadas por ( ) antes do enunciado. O template do banco de questões é o mesmo do Professor Kevin Zhou. Seu trabalho é valioso, e diversas ideias desta lista podem ser encontradas em seus Handouts.

## 1 Óptica e Telescópios

- [3] **Problema 1.** Um telescópio Kepleriano possui duas lentes convergentes. A primeira possui o raio de curvatura das duas faces igual a  $R = 2$  m e a segunda possui ambos os raios de curvatura igual a  $r = 0,5$  m. Considerando que ambas as lentes possuem espessura desprezível e são feitas de um material com índice de refração  $n = 1,4$ . Calcule o diâmetro e o aumento do telescópio sabendo que este telescópio é um  $f/12$ .
- [5] **Problema 2.** Nessa questão, vamos nos familiarizar com uma das ferramentas mais poderosas da óptica, a *óptica geométrica*. O objetivo dessa ferramenta é modelar lentes e espelho em forma de matrizes. Isso é muito útil para resolver questões envolvendo associações de diversas lentes e é um método de resolver problemas de óptica geométrica (praticamente) sem usar geometria. Mas para isso, se atente as seguintes definições na imagem a seguir

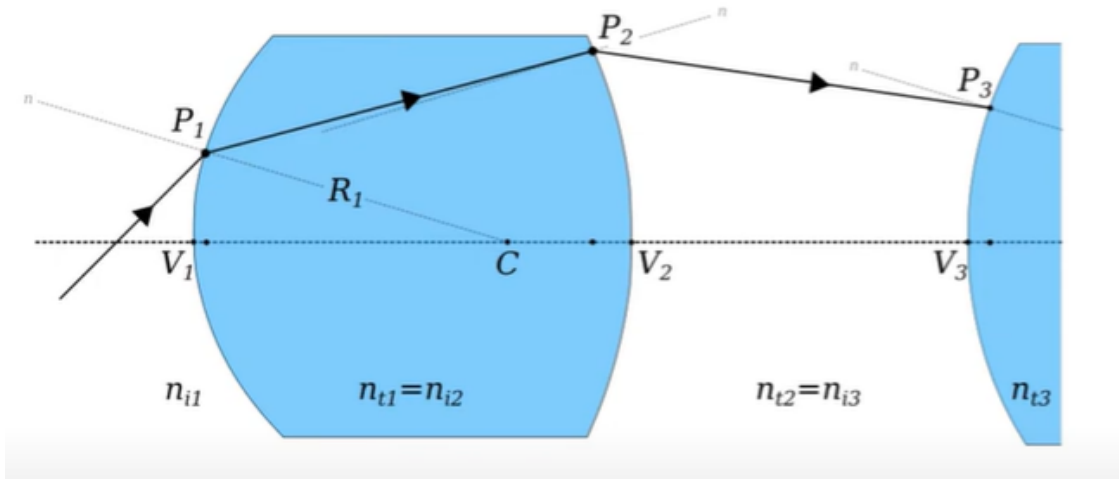


Figura 1: Esquema 1

Todas as linhas pontilhadas são paralelas ao eixo óptico, representado pela seta horizontal. É denotado por  $P_k$  o ponto onde a luz passa de um meio para o outro,  $y_k$  a coordenada vertical do ponto  $P_k$ . São utilizados os subscritos  $i$  e  $t$  para se referir a incidente e transmitido, respectivamente, então, por exemplo,  $\alpha_{i,k}$  é o ângulo que o raio de luz incidente faz com a horizontal no ponto  $P_k$ , já o ângulo  $\alpha_k$  é o ângulo entre o ponto  $P_k$  e o centro da lente  $k$ . Por exemplo, na figura, o ângulo  $\alpha_1$  é representado por  $V_1\hat{C}P_1$ .

Para essa questão, vamos considerar que todos os ângulos de interesse são pequenos, de modo que  $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ .

- a) Partindo da Lei de Snell, encontre uma relação entre  $n_{i,1}$ ,  $n_{t,1}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_{i,1}$  e  $\alpha_{t,1}$ .
- b) Encontre uma relação para (1)  $n_{t,1}\alpha_{t,1}$  e (2)  $y_{t,1}$ . Deixe suas respostas em função de  $n_{i,1}$ ,  $\alpha_{i,1}$ ,  $y_{i,1}$  e  $\mathcal{D}_1$ , para

$$\mathcal{D}_1 = \frac{n_{t,1} - n_{i,1}}{R_1}$$

Agora vamos para mais uma definição, seja o vetor  $\mathbf{r}_{t,1} = (n_{t,1}\alpha_{t,1}, y_{t,1})$  e  $\mathbf{r}_{i,1} = (n_{i,1}\alpha_{i,1}, y_{i,1})$ .

- c) É possível escrever as duas equações que encontramos no item anterior na forma matricial, de forma:

$$\mathbf{r}_{t,1} = \mathcal{R}_1 \mathbf{r}_{i,1}$$

Encontre a matriz  $2 \times 2$  equivalente à  $\mathcal{R}_1$ .

Nosso interesse agora é encontrar as relações entre os pontos  $P_2$  e  $P_1$ .

- d) Encontre uma equação para  $n_1\alpha_{i,2}$  e  $y_{i,2}$ . Utilizando o raciocínio do item anterior, deixe sua resposta na forma

$$\mathbf{r}_{i,2} = \Gamma_{2,1} \mathbf{r}_{t,1}$$

Onde  $\Gamma_{2,1}$  também é uma matriz  $2 \times 2$ . Deixe sua resposta em função da espessura da lente,  $d_{2,1}$ .

- e) Definimos a matriz da lente,  $\mathcal{A}_{2,1}$  da seguinte equação:

$$\mathbf{r}_{t,2} = \mathcal{A}_{2,1} \mathbf{r}_{i,1}$$

De modo que

$$\mathcal{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Encontre explicitamente  $\mathcal{A}_{2,1}$ . Isso é de extrema importancia, pois descreve o raio de luz que sai da lente em função do raio que entra.

- f) Dentre todas as propriedades da matriz da lente, a mais curiosa delas é que o termo  $a_{12}$  é proporcional a  $-1/f$  onde  $f$  é o foco da lente. Prove esse resultado. (Dica: você conseguiu escrever  $-a_{12}$  com uma equação bem conhecida da óptica).

Agora, vamos colocar a mão na massa e fazer utilizações praticas da óptica matricial.

- g) Refaça o exercício anterior utilizando óptica matricial.
- h) Considere o seguinte esquema:

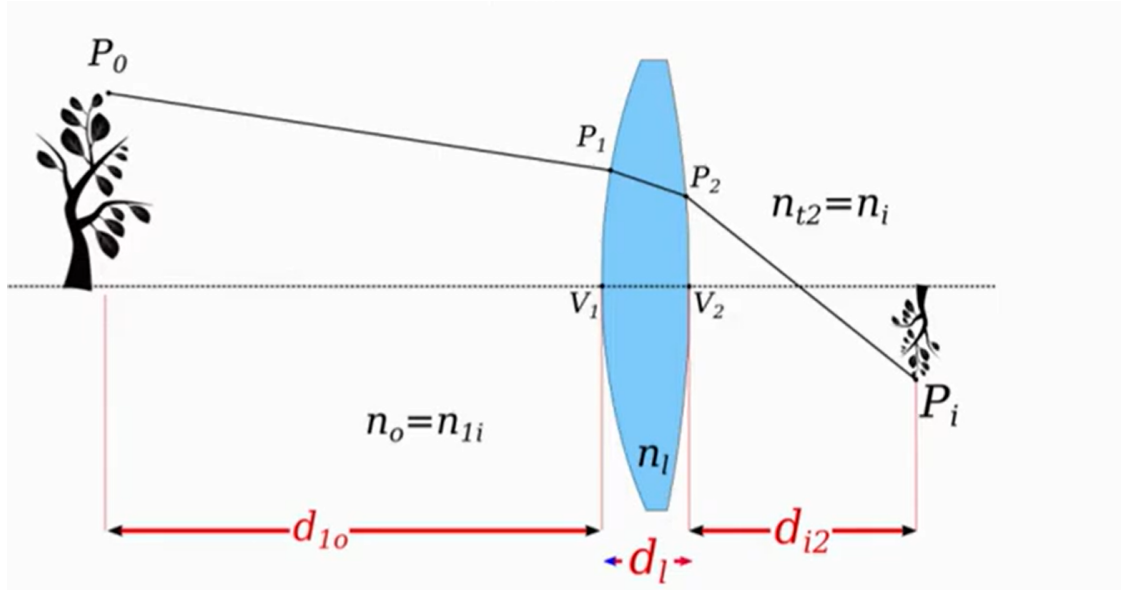


Figura 2: Esquema 2

Encontre  $y_i$  em função de  $y_0$  e dos dados na imagem.

- i) Se a lente estiver entre dois meios diferentes,  $n_{i,1} \neq n_{t,2}$  temos a seguinte relação:

$$a_{12} = -\frac{n_{i,1}}{f_0} = -\frac{n_{t,2}}{f_I}$$

Utilizando-se disse, refaça a questão anterior, considerando que entre as duas lentes a água de  $n_w = 4/3$ .

- j) Um arranjo muito comum de lentes é a Objetiva de Tessar, presente em muitas cameras pela sua eficiencia em diminuir efeitos de aberração e astigmatismo. O Arranjo tem a seguinte forma:

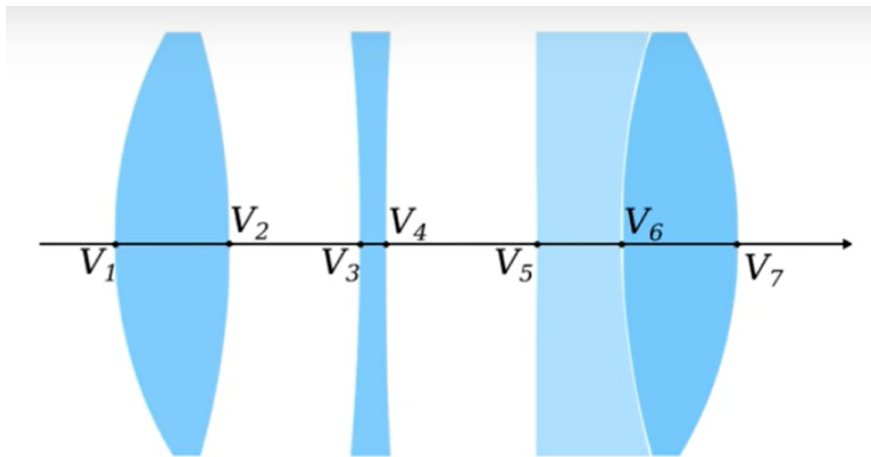


Figura 3: Esquema Objetiva Tessar

Encontre a Matrix da Lente equivalente,  $\mathcal{A}_{1,7}$  em função de  $\mathcal{R}_i$  e  $\Gamma_{i,j}$ .

- [2] **Problema 3.** A teoria ondulatória da luz demonstra que um foco perfeito não é possível devido aos efeitos de difração associados à abertura finita da lente. Essa falta de foco perfeito impede que objetos muito próximos sejam distinguidos. Este problema pode ser estudado de dois pontos de vista diferentes:

A teoria ondulatória da luz prevê que uma lente de diâmetro  $D$  não pode focar um feixe paralelo de luz com comprimento de onda  $\lambda$  em um ângulo menor que o limite de difração:

$$\theta_m \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (1)$$

Considere agora uma abordagem quântica, os fótons que são focados pela lente. Esses fótons são conhecidos por terem passado em algum lugar dentro de um raio do centro da lente. A incerteza na posição  $x$  está associada a uma incerteza no componente  $x$  do momento do fóton. Consequentemente, um fóton que, na ausência dessa incerteza, teria sido trazido para o eixo óptico do plano focal, pode agora ser desviado por um ângulo  $\theta \ll 1$ .

Considere o comprimento de onda de de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Encontre um limite para  $\theta$ .

**DICA:** o princípio de incerteza de Heisenberg, relaciona a impressão entre as medidas de momento e posição de uma partícula por

$$\Delta p_x \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

- [3] **Problema 4.** (Apostila Magna) Prove que a quantia  $n_i R_i \sin \theta_i$  para cascas esféricas adjacentes entre si, em que  $n_i$  é o índice de refração da  $i$ -ésima casca esférica,  $\theta_i$  é o ângulo que o raio de luz faz com a normal da  $i$ -ésima casca esférica e  $R_i$  é o raio da  $i$ -ésima casca esférica, é uma invariante
- [4] **Problema 5.** O índice de refração da atmosfera de um planeta é dado por,

$$n(h) = \frac{n_0}{1 + \epsilon h}$$

Onde  $n_0$  e  $\epsilon$  são constantes.

- a) Um raio de luz atinge a atmosfera paralelamente a superfície, há uma altura  $h' \ll R$ , como será a trajetória?
- b) Sabendo a trajetória do raio de luz, calcule o Raio do planeta.

**Dica:** Você pode achar útil a seguinte relação,

$$\int \frac{t}{\sqrt{a - bt^2}} dt = -\frac{1}{b} \sqrt{a - bt^2} + C$$