

第1章 姿态更新算法

1.1 姿态更新的等效旋转矢量法

在等效旋转矢量法姿态更新中区分几个概念：姿态变化四元数、等效旋转矢量、姿态四元数；其中最重要的是姿态变化四元数，首先要求姿态变化四元数的微分高程，也即要知道如何更新姿态变化四元数。姿态四元素根据姿态变化四元数来进行递推更新；

姿态变化四元数的微分方程与四元数微分方程具有统一的形式， $1/2*\mathbf{q}(t) = 1/2*\mathbf{q} \odot \mathbf{w_nb_b}$

表征旋转的四元数是规范化四元数，定位为 $\mathbf{q} \odot \mathbf{q}^* = 1$ 或者 $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$

1.1.1 旋转矢量与姿态四元数间的关系

1.1.1.1 本章符号定义：

$b(k)$, $b(k+1)$: t_k , t_{k+1} 时刻的机体坐标系，采用前右下坐标形式
$n(k)$, $n(k+1)$: t_k , t_{k+1} 时刻的导航坐标系，采用 NED (北东地) 坐标形式
h : 姿态更新周期, $h = t_{k+1} - t_k$
$\underline{q}(h)$: $b(k)$ 至 $b(k+1)$ 的旋转四元数，称作姿态变化四元数
$\underline{\Phi}(h)$: $b(k)$ 至 $b(k+1)$ 的旋转四元数 $\underline{q}(h)$ 对应的等效旋转矢量
Φ : 等效旋转的转动角度, $\Phi = \underline{\Phi} $
$\underline{p}(h)$: $n(k)$ 至 $n(k+1)$ 的旋转四元数
$\underline{Q}(t_k)$: 为 t_k 时刻 $n(k)$ 至 $b(k)$ 的旋转四元数，也称姿态四元数
$\underline{Q}(t_{k+1})$: 为 t_{k+1} 时刻 $n(k+1)$ 至 $b(k+1)$ 的旋转四元数，也称姿态四元数

注意：对于单个位置坐标点来说，没有所谓的导航坐标系，也即单个点不能表示在 NED 坐标系中，只有向量（如速度）才能分解表示在导航坐标系 NED 下。是否可以这样理解？

向量坐标变换的直观理解可用方向余弦矩阵表示，如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{r}^{n(k+1)} = C_{b(k+1)}^{n(k+1)} \underline{r}^{b(k+1)} \\ \underline{r}^{n(k+1)} = C_{n(k)}^{n(k+1)} C_{b(k)}^{n(k)} C_{b(k+1)}^{b(k)} \underline{r}^{b(k+1)} \end{array} \right. \quad (1-1)$$

用对应的四元数表示上述转换关系为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{r}^{n(k+1)} = \underline{Q}(t_{k+1}) \underline{r}^{b(k+1)} \underline{Q}^*(t_{k+1}) \\ \underline{r}^{n(k+1)} = [\underline{p}^*(h) \otimes \underline{Q}(t_k) \otimes \underline{q}(h)] \underline{r}^{b(k+1)} [\underline{p}^*(h) \otimes \underline{Q}(t_k) \otimes \underline{q}(h)]^* \end{array} \right. \quad (1-2)$$

1.1.1.2 姿态四元数更新

由式 1-1 和式 1-2 可得

$$\underline{Q}(t_{k+1}) = \underline{p}^*(h) \otimes \underline{Q}(t_k) \otimes \underline{q}(h) \quad (1-3)$$

将式 1-3 简化^(*)如下

$$\underline{Q}(t_{k+1}) = \underline{Q}(t_k) \otimes \underline{q}(h) \quad (1-4)$$

其中，

$$\underline{q}(h) = \cos \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \quad (1-5)$$

小结：姿态更新的等效旋转矢量算法则根据式 1-4 和式 1-5 进行推导，过程如下：

- 1) 推导出等效旋转矢量 $\underline{\Phi}$ 的微分方程； 2) 求解等效旋转矢量的计算公式，计算方法为：对 $\underline{\Phi}$ 做泰勒级数展开；首先根据 $\underline{\Phi}$ 的微分方程解算泰勒级数的系数，并用陀螺的角增量输出来表示上述泰勒级数； 3) 根据步骤 2) 中每个更新周期内解算的等效旋转矢量计算姿态变化四元数 $\underline{q}(h)$ ； 4) 根据计算的 $\underline{q}(h)$ 和给定的初始姿态四元数 $\underline{Q}(t_0)$ 不断更新计算 $\underline{Q}(t_k)$ 。上述整个过程就是姿态更新

1.1.2 等效旋转矢量的微分方程

在这一小节中，从式 1-4 和 1-5 出发推导等效旋转矢量的微分方程表达式。首先

^(*) 认为在姿态更新周期 h 内，导航坐标系的变化十分缓慢，则有 $\underline{p}(h) \approx 1 + \underline{0}$ ；注意该简化基于以下假设：姿态更新周期 h 很小，机体动态低，在以后的推导中要注意其应用范围；

推导姿态变化四元数 $\underline{q}(h)$ 的微分方程，再据此推导等效旋转矢量 $\underline{\Phi}$ 的微分方程。

1.1.2.1 姿态变化四元数微分方程

在姿态更新周期 $h = t_{k+1} - t_k$ 内，对于 $t_k < t < t_{k+1}$ ，根据式 1-4 可以得到以下定义^(\ominus)：

$$\underline{Q}(t) = \underline{Q}(t_k) \otimes \underline{q}(t - t_k) \quad (1-6)$$

姿态变化四元数的微分方程推导公式如下^(\ominus)：

$$\begin{cases} \frac{d\underline{Q}(t)}{dt} = \underline{Q}(t_k) \otimes \frac{d\underline{q}(t - t_k)}{dt} \\ \frac{d\underline{Q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \underline{Q}(t) \otimes \underline{\omega}_{nb}^b = \frac{1}{2} \underline{Q}(t_k) \otimes \underline{q}(t - t_k) \otimes \underline{\omega}_{nb}^b \end{cases} \quad (1-7)$$

由式 1-7 可得姿态变化四元数微分方程为：

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2} \underline{q}(t) \otimes \underline{\omega}_{nb}^b, \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (1-8)$$

在后续的推导中，将式 1-8 写成以下形式：

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \underline{q} \otimes \underline{\omega}_{nb}^b \quad (1-9)$$

1.1.2.2 等效旋转矢量微分方程

根据式 1-9，推导等效旋转矢量 $\underline{\Phi}$ 的表达式。将等效旋转矢量用三角函数的形式来表示，如下：

$$\underline{q} = q_0 + \underline{q}_1 = \cos \frac{\Phi}{2} + \underline{u} \sin \frac{\Phi}{2} \quad (1-10)$$

其中， $\underline{\Phi} = \Phi \underline{u}$ ；

由于 \underline{q} 是规范化四元数，即有 $\underline{q}^{-1} = \underline{q}^*$ ，所以

^(\ominus)注意以下问题：式 1-6 中只有 $\underline{q}(t - t_k)$ 才是时间 t 的函数，姿态四元数 $\underline{Q}(t_k)$ 在更新周期内是定值，其导数为零；

^(\ominus) 式 1-7 推导应用了：1) 四元数更新的公式推导 $\frac{d\underline{Q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \underline{Q}(t) \otimes \underline{\omega}_{nb}^b$ ；2) 姿态四元数为规范化四元数，即 $\underline{Q}^*(t_k) \otimes \underline{Q}(t_k) = 1$ ，但计算过程中四元数逐渐丧失了规范性，则需进行四元数的规范化处理（参考秦永元《惯性导航》，p304）。注意 \underline{q} 也是规范化四元数

$$\underline{\omega}_{nb}^b = 2\underline{q}^* \otimes \underline{q}' \quad (1-11)$$

由式 1-10 得到 \underline{q}^* 的表达式，并将其带入式 1-11 中化简^(*)后，用等效旋转矢量表示 $\underline{\omega}_{nb}^b$ 的表达式如下：

$$\underline{\omega}_{nb}^b = \underline{u}' \sin \Phi + \Phi' \underline{u} + \underline{u}' \times \underline{u} (1 - \cos \Phi) \quad (1-12)$$

在接下来的推导中要确定上式右边三项，对式 $\underline{\Phi} = \underline{\Phi} \underline{u}$ 两边求导^(*)，得：

$$\underline{\Phi}' = \underline{\Phi}' \underline{u} + \underline{\Phi} \underline{u}' \quad (1-13)$$

对式 1-13 两边点乘旋转矢量对应的单位向量 \underline{u} ，结合 \underline{u} 的特性：由于 \underline{u} 是单位向量， $|\underline{u}|=1$ ， \underline{u} 在空间旋转时 \underline{u} 的矢端速度始终与 \underline{u} 垂直^(*)，可作如下推导：

$$\begin{cases} \underline{u} \cdot \underline{u} = 1 \\ \underline{u}' \cdot \underline{u} = 0 \\ \underline{\Phi}' \underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{\Phi}' \underline{u} - \underline{\Phi} \underline{u}' \cdot \underline{u} \end{cases}$$

由上式可得：

$$\underline{\Phi}' = \underline{\Phi}' \underline{u} \quad (1-14)$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{\Phi}}{\Phi} \quad (1-15)$$

对式 1-15 求全微分，得：

$$\underline{u}' = \frac{\underline{\Phi}' \Phi - \underline{\Phi} \underline{\Phi}'}{\Phi^2} \quad (1-16)$$

将 1-15 带入 1-14 后，在带入 1-16 得：

$$\underline{u}' = \frac{\underline{\Phi}' \Phi - \underline{\Phi} (\underline{\Phi}' \cdot \frac{\underline{\Phi}}{\Phi})}{\Phi^2} = \frac{\underline{\Phi}'}{\Phi} - \frac{\underline{\Phi} (\underline{\Phi}' \cdot \underline{\Phi})}{\Phi^3} \quad (1-17)$$

根据三重矢积公式^(*)得：

^(*) 相同单位向量相乘时呈虚单位特性，相异单位向量相乘时呈向量特性，乘法为叉乘

^(*) 式中三个符号所表示的均为时间变量，所以求导要求上式的全微分

^(*) 注意该公式只对模为定值的向量成立，对于模是变量的向量来说，矢端速度并不总是与向量本身垂直，例如对于等效旋转矢量 $\underline{\Phi}$ ，式子 $\underline{\Phi}' \cdot \underline{\Phi}$ 并不恒等于 0，该性质特别注意!!!

^(*) 三重矢积公式： $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$ ，直观理解： $\underline{b} \times \underline{c}$ 得到的向量与 bc 平面垂直，则 $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ 得到的向量必定在 bc 平面内，后续给出详细的证明

$$\underline{\Phi}(\underline{\Phi}' \cdot \underline{\Phi}) = \underline{\Phi} \times (\underline{\Phi} \times \underline{\Phi}') + \underline{\Phi}' \underline{\Phi}^2 \quad (1-18)$$

将式 1-18 带入 1-17 得:

$$\underline{u}' = -\frac{\underline{\Phi} \times (\underline{\Phi} \times \underline{\Phi}')}{\underline{\Phi}^3} \quad (1-19)$$

将 1-19 式带入 1-12 式中, 替换掉 \underline{u}' , 得到 1-12 式中右边三项为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}' \sin \Phi = -\frac{\underline{\Phi} \times (\underline{\Phi} \times \underline{\Phi}')}{\underline{\Phi}^3} \sin \Phi \\ \underline{\Phi}' \underline{u} = \underline{\Phi}' + \frac{\underline{\Phi} \times (\underline{\Phi} \times \underline{\Phi}')}{\underline{\Phi}^2} \\ \underline{u}' \times \underline{u} (1 - \cos \Phi) = \left(\frac{\underline{\Phi}'}{\underline{\Phi}} - \frac{\underline{\Phi} \underline{\Phi}'}{\underline{\Phi}^2} \right) \times \frac{\underline{\Phi}}{\underline{\Phi}} (1 - \cos \Phi) = \frac{\underline{\Phi}' \times \underline{\Phi}}{\underline{\Phi}^2} (1 - \cos \Phi) \end{array} \right. \quad (1-20)$$

得到式 1-12 的表达式, 也即等效旋转矢量微分方程的严格表达式:

$$\underline{\Phi}' = \underline{\omega}_{nb}^b + \frac{\underline{\Phi} \times \underline{\Phi}'}{\underline{\Phi}^2} (1 - \cos \Phi) - \left(1 - \frac{\sin \Phi}{\Phi} \right) \frac{\underline{\Phi} \times (\underline{\Phi} \times \underline{\Phi}')}{\underline{\Phi}^2} \quad (1-21)$$

把 1-21 式中的 $\underline{\Phi}'$ 用 $\underline{\Phi}$ 、 Φ 和 $\underline{\omega}_{nb}^b$ 表示, 式子右边不出现 $\underline{\Phi}'$ 的表达式, 化简中间过程略去^(*), 得到最终的表达形式为:

$$\underline{\Phi}' = \underline{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{2} \underline{\Phi} \times \underline{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{\underline{\Phi}^2} \left[1 - \frac{\underline{\Phi} \sin \Phi}{2(1 - \cos \Phi)} \right] \underline{\Phi} \times (\underline{\Phi} \times \underline{\omega}_{nb}^b) \quad (1-22)$$

由于姿态更新周期一般都很短, Φ , 将 1.15 式中的三角函数级数展开后略去高阶项^(**), 得到工程上常用的近似方程如下:

$$\underline{\Phi}' = \underline{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{2} \underline{\Phi} \times \underline{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{12} \underline{\Phi} \times (\underline{\Phi} \times \underline{\omega}_{nb}^b) \quad (1-23)$$

1.1.3 等效旋转矢量求解

用等效旋转矢量对姿态进行更新时, 并不对等效旋转矢量的微分方程 (1-22 或 1-23) 直接求解, 而是对等效旋转矢量做泰勒级数展开¹¹。旋转矢量的微分方程 1-22

^(*)注意式中 $\underline{\Phi}$ 的模不为定值, 所以其矢端速度不与向量本身垂直

^(**) 为严格推导, 并没有做简化处理

⁽¹¹⁾ $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \dots, 0 < |x| < \pi$

¹¹ 姿态更新中只需求解更新周期内对应的等效旋转矢量, 而不必知道在该周期内旋转矢量的演变过程, 因

用于求解泰勒展开项的系数。

等效旋转矢量的泰勒展开形式为：

$$\underline{\Phi}(h) = \underline{\Phi}(0) + h\underline{\Phi}'(0) + \frac{h^2}{2!}\underline{\Phi}''(0) + \dots \quad (1-24)$$

在本小节中，采用三字样算法作姿态更新，主要步骤为：1) 角增量的三字样假设，并推导角速率和角增量的各阶导数；2) 推导等效旋转矢量各阶导数的表达式；3) 解算三字样假设的三个参数，用角增量输出表达泰勒展开式。

1. 1. 3. 1 角增量三字样假设

角增量三字样假设为：设 $\underline{\Phi}(h)$ 为在姿态更新周期 $[t_k, t_{k+1}]$ 内的等效旋转矢量，其中 $h = t_{k+1} - t_k$ ，运载体的角速度用抛物线拟合：

$$\underline{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau) = \underline{a} + 2\underline{b}\tau + 3\underline{c}\tau^2, \quad 0 < \tau < h \quad (1-25)$$

角增量表示如下：

$$\Delta\theta(\tau) = \int_0^\tau \underline{\omega}_{nb}^b(t_k + \xi) d\xi \quad (1-26)$$

角速率和角增量的各阶导数为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Phi}(0) = 0 \\ \underline{\omega}_{nb}^b(t_k) = \underline{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = \underline{a} \\ \underline{\omega}_{nb}^{b'}(t_k) = \underline{\omega}_{nb}^{b'}(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 2\underline{b} \\ \underline{\omega}_{nb}^{b''}(t_k) = \underline{\omega}_{nb}^{b''}(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 6\underline{c} \\ \underline{\omega}_{nb}^{b(i)}(t_k) = \underline{\omega}_{nb}^{b(i)}(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, i = 3, 4, 5, \dots \\ \Delta\theta(0) = \Delta\theta(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0 \\ \Delta\theta'(0) = \Delta\theta'(\tau) \Big|_{\tau=0} = \underline{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = \underline{a} \\ \Delta\theta''(0) = \Delta\theta''(\tau) \Big|_{\tau=0} = \underline{\omega}_{nb}^{b''}(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 2\underline{b} \\ \Delta\theta'''(0) = \Delta\theta'''(\tau) \Big|_{\tau=0} = \underline{\omega}_{nb}^{b'''}(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 6\underline{c} \\ \Delta\theta^{(i)}(0) = \Delta\theta^{(i)}(\tau) \Big|_{\tau=0} = \underline{\omega}_{nb}^{b(i-1)}(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, i = 4, 5, 6, \dots \end{array} \right. \quad (1-27)$$

由于姿态更新的周期 h 一般为毫秒级的量（例如 200Hz，则更新周期为 5 毫秒）；在此如此短的时间段内，可看作是小角度转动， $\underline{\Phi}$ 可以视为小量，则 $\underline{\Phi}(\tau) \approx \Delta\theta(\tau)$ ，等效旋转矢量微分方程的第三项可看作是 $\underline{\Phi}$ 的高阶小量，略去，根据上述近似和简

此采用泰勒级数展开的方式求解。

化可得：

$$\underline{\Phi}'(\tau) = \underline{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau) + \frac{1}{2} \Delta\theta(\tau) \times \underline{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau), \quad 0 \leq \tau \leq h \quad (1-28)$$

注意下面问题：

- 1) 姿态更新周期与陀螺的角增量输出的时间间隔并不一定相同；
- 2) 对于 200Hz 的陀螺角增量输出，如果采用三子样算法，并不意味着姿态更新频率变成了 200Hz/3；实际做法是：用 t_{k-1} , t_k , t_{k+1} 三个时刻的角增量输出求 t_{k+1} 时刻的姿态， t_k , t_{k+1} 和 t_{k+2} 三个时刻的角增量求 t_{k+2} 的姿态更新；(这是常用的做法)
- 3) 第二种方案：先将陀螺的角增量输出扩展到 600Hz(加速度计还是 200Hz)，按 200Hz 做姿态更新时，用相邻三个角增量输出即可。

1.1.3.2 等效旋转矢量导数

对式 1-28 两边求旋转矢量的各阶导数，并令 $\tau=0$ ，得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Phi}'(0) = \underline{a} \\ \underline{\Phi}''(0) = 2\underline{b} \\ \underline{\Phi}'''(0) = 6\underline{c} + \underline{a} \times \underline{b} \\ \underline{\Phi}^{(4)}(0) = 6\underline{a} \times \underline{c} \\ \underline{\Phi}^{(5)}(0) = 12\underline{b} \times \underline{c} \\ \underline{\Phi}^{(6)}(0) = \underline{0} \\ \underline{\Phi}^{(i)}(0) = \underline{0}, \quad i = 7, 8, 9, \dots \end{array} \right. \quad (1-29)$$

根据上式可得等效旋转矢量的泰勒展开式¹²如下：

$$\underline{\Phi}(h) = \underline{a}h + \underline{b}h^2 + \underline{c}h^3 + \frac{1}{6}\underline{a} \times \underline{b}h^3 + \frac{1}{4}\underline{a} \times \underline{c}h^4 + \frac{1}{10}\underline{b} \times \underline{c}h^5 \quad (1-30)$$

1.1.3.3 三子样参数求解

用角增量的形式表述上式 (1-30)，首先定义角增量的表达式，如下：

$$\Delta\theta_i = \int_{\frac{i-1}{3}h}^{\frac{i}{3}h} \underline{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau) d\tau, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-31)$$

由此可得：

¹² 等效旋转矢量的技术展开式并不是只取到 5 阶，因为 5 阶以上的系数都为零，所以上述展开是严格表达式

$$\begin{cases} \Delta\theta_1 = \frac{1}{3}\underline{a}h + \frac{1}{9}\underline{b}h^2 + \frac{1}{27}\underline{c}h^3 \\ \Delta\theta_2 = \frac{1}{3}\underline{a}h + \frac{1}{3}\underline{b}h^2 + \frac{7}{27}\underline{c}h^3 \\ \Delta\theta_3 = \frac{1}{3}\underline{a}h + \frac{5}{9}\underline{b}h^2 + \frac{19}{27}\underline{c}h^3 \end{cases} \quad (1-32)$$

根据 1.25 式, 解方程, 式子右边各项用角增量的形式来表示, 得到三子样的参数; 最终得到用角增量表示的等效旋转矢量的表达式为:

$$\underline{\Phi}(h) = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \frac{33}{80}\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_3 + \frac{57}{88}\Delta\theta_2 \times (\Delta\theta_3 - \Delta\theta_1) \quad (1-33)$$

小结:

姿态更新的旋转矢量法中做了以下假设和简化:

- 1) 在姿态更新周期 $h = t_{k+1} - t_k$ 内, 将导航坐标系 (n 系) 在更新周期内的四元数变化简化为 $\underline{p}(h) \approx 1 + \underline{0} = 1 + 0i + 0j + 0k$ 。简化基于以下假设: 载体低动态运动, 或者更新周期极短, 以致导航坐标系的变化十分缓慢;
- 2) 在姿态更新周期 $h = t_{k+1} - t_k$ 内, 将等效旋转矢量微分方程的第三项作为高阶项忽略, 同时将等效旋转矢量简化为角增量。简化基于以下假设: 载体低动态运动, 或者更新周期极短, 以致 h 为毫秒级, 等效旋转矢量的旋转角度 $\underline{\Phi}$ 被视为小量;

1.1.4 姿态更新的等效旋转矢量算法实现

已知量:

$\underline{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)}$: 上一历元的姿态四元数;

$\Delta\theta_{k-1}$: 上一历元的陀螺角增量输出

$\Delta\theta_k$: 当前历元的陀螺角增量输出

更新步骤如下:

- (1) b 系等效旋转矢量更新: 根据陀螺输出的当前历元和前一历元的角增量, 计算当前历元的等效旋转矢量, 计算公式为

$$\underline{\Phi}_k \approx \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\underline{\omega}_{ib}^b + \frac{1}{2}\Delta\theta(t) \times \underline{\omega}_{ib}^b \right] dt = \Delta\theta_k + \frac{1}{12}\Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k$$

Φ_k 为 b 系下的向量，采用前右下坐标系。

(2) 计算 b 系变化四元数 $q_{b(k)}^{b(k-1)}$:

$$q_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5\Phi_k \\ \sin 0.5\Phi_k \\ 0.5\Phi_k \end{bmatrix}$$

(3) 计算 n 系变化等效旋转矢量 $\underline{\zeta}_k$ ，即 n 系 k 时刻相对于 k-1 时刻的等效旋转矢量¹³

$$\underline{\zeta}_k \approx \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underline{\omega}_{in}^n dt \approx (\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n) \Delta t$$

$$\underline{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_e \cos \varphi \\ 0 \\ -\omega_e \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{N+h} \\ \frac{-v_N}{M+h} \\ \frac{-v_E \tan \varphi}{N+h} \end{bmatrix}$$

注意：在计算 $\underline{\zeta}_k$ ，也即计算 $\underline{\omega}_{ie}^n$ 和 $\underline{\omega}_{en}^n$ 时，所用的位置和速度因为 $[t_{k-1}, t_k]$ 中间时刻的位置和速度。

(4) 计算 n 系变化四元数

$$q_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5\underline{\zeta}_k \\ -\frac{\sin 0.5\underline{\zeta}_k}{0.5\underline{\zeta}_k} 0.5\underline{\zeta}_k \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{8}\underline{\zeta}_k^2 \\ -\frac{1}{2}\underline{\zeta}_k \end{bmatrix}$$

$q_{n(k)}^{n(k-1)}$ 的计算频率按 40Hz 进行更新，

(5) 计算当前时刻的姿态四元数：

¹³ 该步骤中做了以下简化：1) 更新周期短，旋转矢量很小；2) 假设旋转矢量不存在转动

$$q_{b(k)}^{n(k)} = q_{n(k-1)}^{n(k)} \otimes q_{b(k-1)}^{n(k-1)} \otimes q_{b(k)}^{b(k-1)}$$

(6) 对姿态四元数进行规范化处理: $Q_i = \frac{Q_i}{\sqrt{\hat{Q}_0^2 + \hat{Q}_1^2 + \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_3^2}}, i = 1, 2, 3$

计算 t_{k+1} 时刻的姿态四元数需用到:

第2章 速度更新

本章公式按照 Savage “Strapdown analytics” 中的符号定义。但是没有使用 L 系，而是直接将书中的 N 系，改成了 NED 形式的导航坐标系 (n 系)，在公式书写中仍写作 N。

速度更新是指根据速度微分方程，推导当前时刻速度与前一时刻速度之间的递推关系。速度微分方程为：

$$\underline{v}^N = C_B^N \underline{a}_{SF}^B + \underline{g}_P^N - (\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{IE}^N) \times \underline{v}^N \quad (2-1)$$

对上述微分方程进行积分得到以下形式：

$$\underline{v}_m^N = \underline{v}_{m-1}^N + \Delta \underline{v}_{SF_m}^N + \Delta \underline{v}_{G/COR_m}^N \quad (2-2)$$

特别注意对式 2-1 积分时，需要给定初始状态，也即 \underline{v}_{m-1}^N (**不要忘记**)。其中，

$$\begin{cases} \Delta \underline{v}_{G/COR_m}^N = \int_{t_{m-1}}^{t_m} [\underline{g}_P^N - (\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{IE}^N) \times \underline{v}^N] dt \\ \Delta \underline{v}_{SF_m}^N = \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_B^N \underline{a}_{SF}^B dt \end{cases} \quad (2-3)$$

式中， $\Delta \underline{v}_{G/COR_m}^N$ 称为重力/哥氏项 (gravity/Coriolis term)， $\Delta \underline{v}_{SF_m}^N$ 称为比力积分项，

在本章的后续两个小节中将推导上述两个积分项的离散化公式。

2.1 重力哥氏积分项

近似 1：哥氏项中 \underline{g}_P^N 是位置的函数，认为在一个更新历元中，位置变化比较平滑，可以将其近似为中间时刻位置所对应的重力值。

近似 2：Coriolis 项相对较小，且在更新周期内速度变化比较平滑，该项可以看作是也可以近似为中间时刻所对应的值

其中哥氏项，计算公式如下：

$$\Delta \underline{v}_{G/COR_m}^N \approx \left\{ \underline{g}_{P_{m-1/2}}^N - \left[2\underline{\omega}_{IE_{m-1/2}}^N + \underline{\omega}_{EN_{m-1/2}}^N \right] \times \underline{v}_{m-1/2}^N \right\} T_m \quad (2-4)$$

因为 $\Delta \underline{v}_{G/COR_m}^N$ 是用来将速度从 m-1 时刻更新至 m 时刻的，速度 $\underline{v}_{m-1/2}^N$ 无法按其定义 (m-1 时刻和 m 时刻速度的均值) 进行计算，需根据前面历元的速度进行外推，一种常用的方法是线性外推，方法如下：

$$\underline{v}_{m-1/2}^N \approx \underline{v}_{m-1}^N + \frac{1}{2} (\underline{v}_{m-1}^N - \underline{v}_{m-2}^N) = \frac{3}{2} \underline{v}_{m-1}^N - \frac{1}{2} \underline{v}_{m-2}^N \quad (2-5)$$

式子 2-2 中所用到的 \underline{g}_P^N , ω_{IE}^N , ρ_{ZN} , F_C^N , 都是位置的函数, 与上述情况类似, 我们无法知道确切的 m 时刻的位置, 因此 $m-1/2$ 时刻的位置只能进行外推。由于位置可能采用更缓慢的更新速度, 在做线性外推时采用以下方法:

$$(\)_{m-1/2} \approx (\)_{n-1} + \frac{(r-1/2)}{j} [(\)_{n-1} - (\)_{n-2}] \quad (2-6)$$

其中, n 为位置更新时刻; j 为位置更新周期内的速度更新次数; r 为从 t_{n-1} 时刻至 t_m 时刻的速度更新次数。易知, 当 $n=m$ 时, 及速度与位置的更新速率一致时, 式 2-4 与式 2-3 等价。

因为本文统一选用导航坐标系 (n 系) 进行公式推导, n 系采用 NED 的形式, 则对于式 2-2,

$$\omega_{IE_{m-1/2}}^N = \begin{bmatrix} \omega_E \cos \varphi_{m-1/2} \\ 0 \\ -\omega_E \sin \varphi_{m-1/2} \end{bmatrix}$$

$$\omega_{EN_{m-1/2}}^N = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{N+h} \\ \frac{-v_N}{M+h} \\ \frac{-v_E \tan \varphi}{N+h} \end{bmatrix}$$

也即在计算 $\omega_{IE_{m-1/2}}^N$, $\omega_{EN_{m-1/2}}^N$, M, N 时, 用到的位置为 $m-1/2$ 时刻的外推位置和速度, 外推方式为: 利用前两个历元的位置进行线性外推, 公式与速度外推一样

2.2 比力积分项

$$\Delta \underline{v}_{SF_m}^N = \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{N(m-1)}^{N(t)} C_{B(m-1)}^{N(m-1)} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{a}_{SF}^B dt \quad (2-7)$$

为将上式中的 $\int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{a}_{SF}^B dt$ 剥离出来, 则需对上述公式进行分部积分¹⁴, 得

¹⁴ 分部积分公式: $\int uv dx = uv - \int u'v dx$

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^N &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{N(m-1)}^{N(t)} C_{B(m-1)}^{N(m-1)} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{\mathbf{a}}_{SF}^B dt \\ &= C_{N(m-1)}^{N(m)} C_{B(m-1)}^{N(m-1)} \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{\mathbf{a}}_{SF}^B dt - \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{N(m-1)}^{N(t)} C_{B(m-1)}^{N(m-1)} \int_{t_{m-1}}^t C_{B(\tau)}^{B(m-1)} \underline{\mathbf{a}}_{SF}^B d\tau dt\end{aligned}\quad (2-8)$$

近似 3：将式 2-8 中的 $C_{N(m-1)}^{N(t)}$ 近似为常值矩阵，在积分项中用 $m-1$ 至 m 时刻的均值表示；将 $\int_{t_{m-1}}^t C_{B(\tau)}^{B(m-1)} \underline{\mathbf{a}}_{SF}^B d\tau$ 近似为时间的线性函数，详见 Savage《Strapdown analytics》，P7-34。

继续化简得到：

$$\Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^N \approx \frac{1}{2} \left(C_{N(m-1)}^{N(m)} + I \right) C_{B(m-1)}^{N(m-1)} \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{\mathbf{a}}_{SF}^B dt \quad (2-9)$$

定义：

$$\Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^{B(m-1)} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{\mathbf{a}}_{SF}^B dt \quad (2-10)$$

则有，

$$\Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^{N(m-1)} = C_{B(m-1)}^{N(m-1)} \Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^{B(m-1)} \quad (2-11)$$

因此，式 2-9 可最终化简为：

$$\Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^N \approx \Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^{N(m-1)} + \frac{1}{2} \left(C_{N(m-1)}^{N(m)} - I \right) \Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^{N(m-1)} \quad (2-12)$$

由式 2-9~2-12 可以看出， B 系和 N 系的更新可以独立进行，式子 2-10 中可以采用高速率对 B 系姿态进行更新，而 2-12 可以采用低速率对 N 系姿态进行更新。

2.2.1 N 系旋转改正项

近似 4：对于式 2-12，由于在更新周期内 $C_{N(m-1)}^{N(m)} \approx I$ ，在很多引用中可以将式子 2-12 右边第二项 $\frac{1}{2} \left(C_{N(m-1)}^{N(m)} - I \right) \Delta \underline{\mathbf{v}}_{SF_m}^{N(m-1)}$ 忽略（远小于很多其他的加速度误差），对于高精度应用场景，第二项不能忽略，但一般取至一阶项就能满足要求

$$C_{N(m-1)}^{N(m)} \approx I - (\zeta_{m-1,m} \times) \quad (2-13)$$

其中

$$\zeta_{m-1,m} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\underline{\omega}_{EN}^N + \underline{\omega}_{IE}^N) dt \approx (\underline{\omega}_{EN_{m-1/2}}^N + \underline{\omega}_{IE_{m-1/2}}^N)(t_m - t_{m-1}) \quad (2-14)$$

式 2-14 中用到的位置和速度，采用 $t_{m-1/2}$ 时刻的外推位置和速度。

2.2.2 B 系比力积分项

在该小节中主要推导 $\Delta \underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{a}_{SF}^B dt$ 的具体表达式，将积分项进行化简并得到离散化结果。

$$C_{B(t)}^{B(m-1)} = I + \frac{\sin \phi(t)}{\phi(t)} (\underline{\omega}(t) \times) + \frac{1 - \cos \phi(t)}{\phi(t)^2} (\underline{\omega}(t) \times)^2 \quad (2-15)$$

推导思路如下：

1，在多个假设和近似的基础上，推导出只包含速度旋转补偿项的 $\Delta \underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)}$ 的表达式。所做的假设和简化如下：

1) 将 $C_{B(t)}^{B(m-1)}$ 的表达式（式 2-15）简化为一阶近似，及式中设计旋转矢量的二阶项忽略不计，且认为在更新周期内旋转矢量近似为 B 系下的角增量（该近似在惯导算法中多处用到）

2) 假设角速度向量 $\underline{\omega}_{IB}^B$ 和比力向量 \underline{a}_{SF}^B 在 B 系下不存在方向旋转，且角速率与比力幅值之比为常数。这一假设可以扩展为： $\underline{\omega}_{IB}^B$ 与 \underline{a}_{SF}^B 在 B 系下均有固定的方向，且幅值的变化在时间上同步（比值固定）

由此得到的只包含速度旋转补偿项的 $\Delta \underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)}$ 的表达式为：

$$\begin{cases} \Delta \underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)} = \underline{v}_m + \frac{1}{2} \underline{\alpha}_m \times \underline{v}_m \\ \underline{\alpha}(t) = \int_{t_{m-1}}^t \underline{\omega}_{IB}^B d\tau \quad \underline{\alpha}_m = \underline{\alpha}(t_m) \\ \underline{v}(t) = \int_{t_{m-1}}^t \underline{a}_{SF}^B d\tau \quad \underline{v}_m = \underline{v}(t_m) \end{cases} \quad (2-16)$$

2, 将上述步骤中的假设 2) 修改为：角速度向量 $\underline{\omega}_{IB}^B$ 和比力向量 \underline{a}_{SF}^B 在 B 系下不存在方向旋转，而不要求 $\underline{\omega}_{IB}^B$ 与 \underline{a}_{SF}^B 的比例为常数；实际上，只有 $\underline{\omega}_{IB}^B$ 与 \underline{a}_{SF}^B 的方向固定，则积分项 $\int_{t_{m-1}}^t \underline{a}_{SF}^B d\tau$ 与 $\int_{t_{m-1}}^t \underline{\omega}_{IB}^B d\tau$ 必须考略旋转效应。根据上述假设，可以推导出带有 Sculling 项的速度积分式，

$$\Delta \underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)} = \underline{v}_m + \frac{1}{2} \underline{\alpha}_m \times \underline{v}_m + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{1}{2} (\underline{\alpha}(t) \times \underline{a}_{SF}^B + \underline{v}(t) \times \underline{\omega}_{IB}^B) dt \quad (2-17)$$

式 2-17 右边第二项即为 Sculling 项

3, 推导速度旋转补偿项的严格算法

使用 $C_{B(t)}^{B(m-1)}$ 的准确表达式进行推导得到完整表达式，并使用步骤 1 中的假设 2)，

如此，公式中的 Sculling 项则变为零，只留下 velocity rotation 项，从而得到 velocity rotation 的严格表达式。注意：此处的 rotation 并不是说 $\underline{\omega}_{IB}^B$ 与 \underline{a}_{SF}^B 的方向旋转，但是为什么叫做 rotation 项？？？

同时， $\underline{\omega}_{IB}^B$ 不旋转时， $\underline{\phi}(t) = \underline{\alpha}(t)$

4, 推导 Sculling 项的离散表达式

对 $\underline{\omega}_{IB}^B$ 与 \underline{a}_{SF}^B 做线性假设

2.2.3 程序实现

1. 对中间时刻的位置坐标进行外推（采用四元数进行外推）

位置格式：[latitude(deg), longitude(deg), height(deg)]'

通过四元数运算得到： $q_{N(m-1/2)}^{E(m-1/2)} = q_{E(m-1)}^{E(m-1/2)} q_{N(m-1)}^{E(m-1)} q_{N(m-1/2)}^{N(m-1)}$ ，其中 $q_{N(m-1)}^{E(m-1)}$ 为 m-1 时刻的四元数， $q_{E(m-1)}^{E(m-1/2)}$ 表示 E 系自身的旋转可以准确算出其旋转矢量， $q_{N(m-1/2)}^{N(m-1)}$ 则可以采用常用的更新方式；具体方式如下：

(1) 根据 t_{m-1} 时刻的位置 (latitude 分量，注意转换为弧度) 计算 $\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1})$ ，计

算公式为： $\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1}) = \begin{bmatrix} \omega_e \cos \varphi_{t_{m-1}} \\ 0 \\ -\omega_e \sin \varphi_{t_{m-1}} \end{bmatrix}$ ，其中 ω_e 为地球自转速率；

(2) 根据 t_{m-1} 时刻的位置 (latitude 分量，注意转换成弧度) 计算子午圈半径 M 和卯酉圈半径 N ，所用函数为 rc_meridian.m 和 rc_primevertical.m；

(3) 根据 t_{m-1} 时刻的速度，计算 $\underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1})$ ，计算公式为：

$$\underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1}) = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{N+h} \\ \frac{-v_N}{M+h} \\ \frac{-v_E \tan \varphi}{N+h} \end{bmatrix}$$

(4) 计算 $t_{m-1/2}$ 时刻的 N 系相对于 t_{m-1} 时刻的等效旋转矢量 $\zeta_{k-1/2}$, 计算公式为:

$$\underline{\zeta}_{k-1/2} = [\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1}) + \underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1})] T_m / 2, \text{ 其中 } T_m \text{ 为更新周期}$$

(5) 计算 t_{m-1} 时刻 E 系相对于 $t_{m-1/2}$ 时刻 E 系的等效旋转矢量(在 E 系下表示),

计算公式为: $\underline{\xi}_{k-1/2} = \underline{\omega}_{IE}^E T_m / 2$, 其中 $\underline{\omega}_{IE}^E = [0 \ 0 \ \omega_E]$;

(6) 计算四元数 $q_{N(m-1/2)}^{N(m-1)}$ 和 $q_{E(m-1)}^{E(m-1/2)}$, 计算公式如下:

$$q_{N(m-1/2)}^{N(m-1)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5 \zeta_{k-1/2} \\ \frac{\sin 0.5 \zeta_{k-1/2}}{\zeta_{k-1/2}} \zeta_{k-1/2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{8} \zeta_{k-1/2}^2 \\ \frac{1}{2} \zeta_{k-1/2} \end{bmatrix}$$

$$q_{E(m-1)}^{E(m-1/2)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5 \xi_{k-1/2} \\ -\frac{\sin 0.5 \xi_{k-1/2}}{\xi_{k-1/2}} \xi_{k-1/2} \end{bmatrix}$$

(7) 计算 $q_{N(m-1/2)}^{E(m-1/2)}$

计算公式为: $q_{N(m-1/2)}^{E(m-1/2)} = q_{E(m-1)}^{E(m-1/2)} q_{N(m-1)}^{E(m-1)} q_{N(m-1)}^{N(m-1)}$

(8) 根据 $q_{N(m-1/2)}^{E(m-1/2)}$ 计算位置信息, 采用函数为 quat2pos.m(后续还得研究该函数),

得到 $t_{m-1/2}$ 时刻的经纬度 (latitude, longitude, 注意: 单位是弧度)

(9) 对高程进行外推

根据上一时刻的速度, 和上一时刻的高程, 推算当前历元的高程, 计算公式为:

$$h_{m-1/2} = h_{m-1} - \frac{v_D(t_{m-1}) T_m}{2}$$

其中 $v_D(t_{k-1})$ 为前一时刻的垂向速度, 式中负号主要因为速度采用的是 NED 形式。

至此则完成了整个位置的外推。

讨论: 高程外推的方法有很多种, 该方法只设计到前一历元的速度和位置, 而不需用到前两个历元的信息, 可以减少函数的输入量。Savage 推荐使用的方法需要利用前两个历元的信息。这在精度上是否有明显的差异还需进一步分析。还有采用四元数对位置进行外推时, 也只需使用前一历元的信息, 这与 Savage 的方法是否有明显差异, 也许进一步分析。

2. 根据前两个历元的速度对中间时刻的速度进行线性外推

速度格式: [north (m/s), east (m/s), down (m/s)]'

$$t_{m-1/2} \text{ 时刻的速度计算公式为: } v_{m-1/2}^N = v_{m-1}^N + \frac{1}{2} \Delta v_{m-1}^N,$$

其中 Δv_{m-1}^N 为上一历元的速度增量, 计算公式为:

$\Delta v_{m-1}^N = \underline{\Delta v}_{SF_{m-1}}^N + \underline{\Delta v}_{G/COR_{m-1}}^N$, 这就意味着在程序中也需要保存当前历元的速度增量。

3. 计算 $\underline{\Delta v}_{G/COR_m}^N$ 项,

(1) 根据步骤 1 中 $t_{m-1/2}$ 时刻的位置 (latitude 分量, 注意转换成弧度) 计算正常重力 $\underline{g}_{P_{m-1/2}}^N$, 公式参考 Shin 硕士论文 p24。

(2) 根据步骤 1 中 $t_{m-1/2}$ 时刻的位置 (latitude 分量, 注意转换成弧度) 计算 $\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1/2})$, 计算公式为: $\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1/2}) = \begin{bmatrix} \omega_e \cos \varphi_{t_{m-1/2}} \\ 0 \\ -\omega_e \sin \varphi_{t_{m-1/2}} \end{bmatrix}$, 其中 ω_e 为地球自转速率

(3) 根据步骤 1 中 $t_{m-1/2}$ 时刻的位置 (latitude 分量, 注意转换成弧度) 计算子午圈半径 M 和卯酉圈半径 N , 所用函数为 rc_meridian.m 和 rc_primevertical.m

(4) 步骤 2 中 $t_{m-1/2}$ 时刻的速度, 计算 $\underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1/2})$, 计算公式为:

$$\underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1/2}) = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{N+h} \\ \frac{-v_N}{M+h} \\ \frac{-v_E \tan \varphi}{N+h} \end{bmatrix}$$

最后, 哥氏项的计算公式为 $\underline{\Delta v}_{G/COR_m}^N \approx \left\{ \underline{g}_{P_{m-1/2}}^N - \left[2\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1/2}) + \underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1/2}) \right] \times \underline{v}_{m-1/2}^N \right\} T_m$, 其中 T_m 为更新周期, 一般情况下, $T_m = \Delta t = 0.005s$

4. 计算 $\underline{\Delta v}_{SF_m}^N$ 项中的 N 系更新 $C_{N(m-1)}^{N(m)}$

(1) 根据步骤 3 中计算得到的 $\underline{\omega}_{IE}^N$ 和 $\underline{\omega}_{EN}^N$, 计算 “表征 N 系 m 时刻相对于 N 系

$m-1$ 时刻的等效旋转矢量 $\zeta_{m-1,m}$ ”，计算公式为：

$$\zeta_{m-1,m} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\underline{\omega}_{EN}^N + \underline{\omega}_{IE}^N) dt \approx (\underline{\omega}_{EN_{m-1/2}}^N + \underline{\omega}_{IE_{m-1/2}}^N) T_m$$

(2) 计算 $C_{N(m-1)}^{N(m)}$ ，公式为 $C_{N(m-1)}^{N(m)} \approx I - (\zeta_{m-1,m} \times)$ ，其中 I 表示单位矩阵

5. 计算 $\Delta\underline{v}_{SF_m}^N$ 中 $\Delta\underline{v}_{SF_m}^{N(m-1)}$ 项的 $\Delta\underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)}$ 项，其定义为 $\Delta\underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{B(t)}^{B(m-1)} \underline{a}_S^B dt$ ，计算公式为：

$$\Delta\underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)} = \Delta\underline{v}_m + \frac{1}{2} \Delta\theta_m \times \Delta\underline{v}_m + \frac{1}{12} (\Delta\theta_{m-1} \times \Delta\underline{v}_m + \Delta\underline{v}_{m-1} \times \Delta\theta_m)$$

其中， $\Delta\theta_{m-1}$ ， $\Delta\underline{v}_{m-1}$ 为 $m-1$ 时刻的 B 系下的角增量和速度增量输出（也就陀螺和加速计输出）， $\Delta\theta_m$ ， $\Delta\underline{v}_m$ 为 m 时刻的 B 系下的角增量和速度增量输出。

6. 计算 $\Delta\underline{v}_{SF_m}^N$ ，公式为： $\Delta\underline{v}_{SF_m}^N = \frac{1}{2} (C_{N(m-1)}^{N(m)} + I) C_{B(m-1)}^{N(m-1)} \Delta\underline{v}_{SF_m}^{B(m-1)}$ ，其中 $C_{B(m-1)}^{N(m-1)}$ 为上一历元的姿态方向余弦矩阵，可根据姿态更新算法中得到的姿态角四元数计算得到。

7. 计算 t_m 时刻的速度更新增量： $\Delta\underline{v}_m^N = \Delta\underline{v}_{SF_m}^N + \Delta\underline{v}_{G/COR_m}^N$

8. 计算 t_m 时刻的速度，计算公式为： $\underline{v}_m^N = \underline{v}_{m-1}^N + \Delta\underline{v}_m^N = \underline{v}_{m-1}^N + \Delta\underline{v}_{SF_m}^N + \Delta\underline{v}_{G/COR_m}^N$ ，

其中 \underline{v}_{m-1}^N 为上一历元的速度

第3章 位置更新

3.1 公式推导

位置更新思路：N系相对于E系之间的旋转四元数里包含了经纬度信息，因此位置更新可采用四元数连乘进行解算：

$$q_{N(m)}^{E(m)} = q_{E(m-1)}^{E(m)} q_{N(m-1)}^{E(m-1)} q_{N(m-1)}^{N(m-1)} \quad (3-1)$$

其中，

$$q_{N(m)}^{N(m-1)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5\zeta_k \\ \frac{\sin 0.5\zeta_k}{\zeta_k} \zeta_k \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

$$q_{E(m-1)}^{E(m)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5\xi_k \\ -\frac{\sin 0.5\xi_k}{\xi_k} \xi_k \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

其中， $\xi_m = \underline{\omega}_{IE}^E T_m$ ， $\underline{\zeta}_m = [\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1/2}) + \underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1/2})]T_m$ ，其中在计算 $\underline{\zeta}_m$ 时，由于 t_{m-1} 和 t_m 的速度均已知，可以重新计算 $t_{m-1/2}$ 时刻的速度（而不是用外推的速度，但是位置还是得用外推的位置）。更新后的经纬度信息可以从上述四元数 $q_{N(m)}^{E(m)}$ 中提取出来。高程方向上的更新可采用：

$$h_m = h_{m-1} - v_D(t_{m-1/2})T_m \quad (3-4)$$

3.2 程序实现

- (1) 计算 $t_{m-1/2}$ 时刻的速度，计算公式为 $v_{m-1/2}^N = \frac{1}{2}(v_{m-1}^N + v_m^N)$ ，其中 v_m^N 为速度更新得到的当前历元的速度（最新速度信息），注意速度格式为[VN, VE, VD(m/s)]'
- (2) 根据速度更新计算哥氏项时得到的 $t_{m-1/2}$ 时刻的 $\underline{\omega}_{IE}^N(t_{m-1/2})$ ，子午圈半径 M 和卯酉圈半径 N
- (3) 根据步骤(1)中 $t_{m-1/2}$ 时刻的准确速度，重新计算 $\underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1/2})$ ，计算公式

为:

$$\underline{\omega}_{EN}^N(t_{m-1/2}) = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{N \cdot h} \\ \frac{-v_N}{M \cdot h} \\ \frac{-v_E \tan \varphi}{N \cdot h} \end{bmatrix}$$

(4) 计算 ζ_m , 计算公式为: $\zeta_m = \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\underline{\omega}_{EN}^N + \underline{\omega}_{IE}^N) dt \approx (\underline{\omega}_{EN_{m-1/2}}^N + \underline{\omega}_{IE_{m-1/2}}^N) T_m$

(5) 计算四元数:

$$q_{N(m)}^{N(m-1)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5 \zeta_k \\ \frac{\sin 0.5 \zeta_k}{\zeta_k} \underline{\zeta}_k \end{bmatrix}, \quad q_{E(m-1)}^{E(m)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5 \xi_k \\ -\frac{\sin 0.5 \xi_k}{\xi_k} \underline{\xi}_k \end{bmatrix}$$

(6) 计算 $q_{N(m)}^{E(m)}$, 计算公式为: $q_{N(m)}^{E(m)} = q_{E(m-1)}^{E(m)} q_{N(m-1)}^{E(m-1)} q_{N(m)}^{N(m-1)}$

(7) 计算高程分量: $h_m = h_{m-1} - v_D(t_{m-1/2}) T_m$

(8) 从步骤(6)中的四元数提取经纬度信息, 得到当前历元 t_m 的完整位置信息

第4章 惯导误差分析

惯导误差方程：1) 选取一组误差参数，例如，用什么量来表示

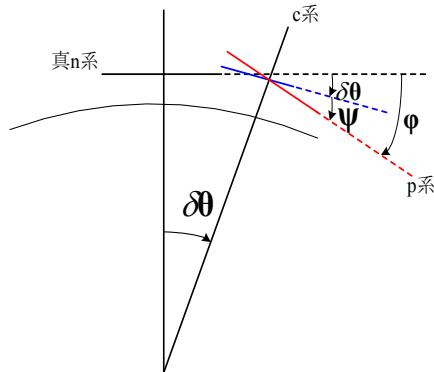
4.1 Psi 角误差模型

在推导惯导系统误差方程时，首先需理解三个坐标系统：1) 由 INS 系统所在真实位置确定的导航坐标系 N；2) 由陀螺控制，也即由 INS 机械编排或组合导航解算得到的姿态角所确定的坐标系；3) 由 INS 计算得到的位置所确定的导航坐标系，被称为计算坐标系 C。

其中 1) 和 3) 的区别在于：INS 解算的位置并不是 INS 系统所在的真实位置，因此，二者之间存在一个小角度的旋转和平移，该旋转和平移由 INS 位置计算误差引起，也可以认为是计算的 N 系存在误差。2) 与 3) 之间的区别在于：由于姿态解算存在误差，由姿态角确定的坐标系（尤其是水平面）并不与当地水平坐标系的水平面一致，二者之间存在一个倾角误差。

4.1.1 姿态误差方差

选用 Psi 误差模型，目标为 Psi 角的微分方程，而 Psi 角包含在 C_B^N 中，因此需要求 δC_B^N 的表达式：1) 对 C_B^N 表达式做扰动分析；2) 求 δC_B^N 微分；3) 令 1) 2) 得到的 δC_B^N 表达式相等，得到 Psi 的微分方程。



$$C_B^N = C_B^N (\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N \quad (4-1)$$

对式 (4-1) 做误差扰动分析, 得:

$$\delta C_B^N = \delta C_B^N (\underline{\omega}_{IB}^B \times) + C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) \delta C_B^N \quad (4-2)$$

又

$$\hat{C}_B^N = C_B^P = C_C^P C_B^C = (I - \underline{\psi}^P \times) C_B^C \quad (4-3)$$

故有:

$$\delta C_B^N = \hat{C}_B^N - C_B^N = (I - \underline{\psi}^P \times) C_B^C - C_B^N \quad (4-4)$$

将式 (4-4) 带入式 (4-2) 可得:

$$\begin{aligned} \delta C_B^N &= (I - \underline{\psi}^P \times) C_B^C (\underline{\omega}_{IB}^B \times) - C_B^N (\underline{\omega}_{IB}^B \times) + C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N \\ &\quad - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) (I - \underline{\psi}^P \times) C_B^C + (\underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N \end{aligned} \quad (4-5)$$

对式 (4-4) 求微分, 可得:

$$\delta C_B^N = -(\underline{\psi}^P \times) C_B^C + (I - \underline{\psi}^P \times) C_B^C - C_B^N \quad (4-6)$$

由式 (4-1) 可得,

$$C_B^C = C_B^C (\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) C_B^C \quad (4-7)$$

将式 (4-1) 和式 (4-7) 带入式 (4-6), 得:

$$\begin{aligned} \delta C_B^N &= -(\underline{\psi}^P \times) C_B^C + (I - \underline{\psi}^P \times) [C_B^C (\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) C_B^C] \\ &\quad - [C_B^N (\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N] \end{aligned} \quad (4-8)$$

比较式 (4-5) 与式 (4-8), 可得:

$$\begin{aligned} (\underline{\psi}^P \times) + (I - \underline{\psi}^P \times) (\underline{\omega}_{IC}^C \times) &= -C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) (C_B^C)^T + (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N (C_B^C)^T \\ &\quad + (\underline{\omega}_{IN}^N \times) (I - \underline{\psi}^P \times) C_B^C (C_B^C)^T \end{aligned} \quad (4-9)$$

对式 (4-9) 进行整理得到:

$$\begin{aligned} (\underline{\psi}^P \times) &= -C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) (C_B^C)^T + (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N (C_B^C)^T + (\underline{\omega}_{IN}^N \times) - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) \\ &\quad + (\underline{\psi}^P \times) (\underline{\omega}_{IC}^C \times) - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) (\underline{\psi}^P \times) \end{aligned} \quad (4-10)$$

对式 (4-10) 进行简化处理, 主要是忽略二阶小量,

$$\left\{ \begin{array}{l} -C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) (C_B^C)^T \approx -C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) (C_B^N)^T \\ (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N (C_B^C)^T \approx (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N (C_B^N)^T = (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) \\ (\underline{\omega}_{IN}^N \times) - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) \approx (\underline{\omega}_{IN}^N \times) - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) \approx -(\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times) \\ (\underline{\psi}^P \times) (\underline{\omega}_{IC}^C \times) - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) (\underline{\psi}^P \times) \approx (\underline{\psi}^P \times) (\underline{\omega}_{IC}^C \times) - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) (\underline{\psi}^P \times) \end{array} \right. \quad (4-11)$$

将式 (4-11) 带入式 (4-10), 得:

$$(\underline{\psi}^P \times) = -C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) (C_B^N)^T + (\underline{\psi}^P \times) (\underline{\omega}_{IC}^C \times) - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) (\underline{\psi}^P \times) \quad (4-12)$$

将式 (4-12) 转换为向量形式可得:

$$\underline{\psi}^P = -\underline{\omega}_{IC}^C \times \underline{\psi}^P - C_B^N \delta \underline{\omega}_{IB}^B \quad (4-13)$$

因为 $\underline{\psi}$ 为 C_C^P 所对应的等效旋转矢量, 则 $\underline{\psi}$ 在两个坐标系 (C, P) 中的投影相等,

也即,

$$\underline{\psi}^P = \underline{\psi}^C \quad (4-14)$$

所以根据式 (4-13) 可得:

$$\underline{\psi}^C = -\underline{\omega}_{IC}^C \times \underline{\psi}^C - C_B^N \delta \underline{\omega}_{IB}^B \quad (4-15)$$

注意(CQJ): 式 4-15 中等号左右的三个向量不在同一个坐标系中(C 系和 N 系), 这是由式 4-11 的简化带来的, 不可避免。所以这个误差方程之适用于小角度误差, 即 N 系与 C 系之间的误差角非常小, 否则上述误差方程不成立。

4.1.2 速度误差方程

由式 2-1 可知, 地速的微分方程为

$$\underline{v}^N = C_B^N \underline{a}_{SF}^B + \underline{g}_P^N - (\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{IE}^N) \times \underline{v}^N \quad (4-16)$$

则, 将速度微分方程表示在 C 系, 则有同样的表达形式:

$$\underline{v}^C = \underline{a}_{SF}^C + \underline{g}_P^C - (\underline{\omega}_{EC}^C + 2\underline{\omega}_{IE}^C) \times \underline{v}^C \quad (4-17)$$

式 4-17 中, $\hat{\underline{v}}^C = \underline{v}^C + \delta \underline{v}^C$, $\hat{\underline{g}}_P^C = \underline{g}_P^C + \delta \underline{g}_P^C$, $\hat{\underline{v}}^C = \underline{v}^C + \delta \underline{v}^C$, 因为 C 系是根据惯导系统 (或者组合导航系统) 位置解算结果确定的当地水平坐标系 (NED), 则该坐标系每一历元都是确定的, 没有误差。因此 $\underline{\omega}_{EC}^C$, $\underline{\omega}_{IE}^C$ 也不存在误差。式中 P 系为根据惯导姿态解算结果确定的坐标系, 可直接用于比力的投影计算, 而 C 系要重新计算,

因此将比力投影到 P 系进行分析（体现在 4-20 式中），因此对式 4-17 做扰动分析，可得

$$\underline{v}^C + \delta\underline{v}^C = \delta\underline{a}_{SF}^P + \underline{a}_{SF}^P + \underline{g}_P^C + \delta\underline{g}_P^C - (\underline{\omega}_{EC}^C + 2\underline{\omega}_{IE}^C) \times (\underline{v}^C + \delta\underline{v}^C) \quad (4-18)$$

又，式 4-18 不是严格成立，以为 P 系

$$\underline{a}_{SF}^P = C_C^P \underline{a}_{SF}^C = \underline{a}_{SF}^C - \underline{\psi}^C \times \underline{a}_{SF}^C \quad (4-19)$$

将式 4-19 带入式 4-18，整理得到：

$$\delta\underline{v}^C = \underline{a}_{SF}^C \times \underline{\psi}^C - (2\underline{\omega}_{IE}^C + \underline{\omega}_{EC}^C) \times \delta\underline{v}^C + \delta\underline{g}_P^C + C_B^P \delta\underline{a}_{SF}^B \quad (4-20)$$

式 4-20 中， $\delta\underline{a}_{SF}^B$ 为加速度计的比力测量值误差，包含加速度计零偏，标度因子误差等。其中，

$$\delta\underline{g}_P^C = \begin{bmatrix} -g\delta r_N & -g\delta r_E & 2g\delta r_D \\ \frac{-g\delta r_N}{M+h} & \frac{-g\delta r_E}{N+h} & \frac{2g\delta r_D}{\sqrt{MN+h}} \end{bmatrix}^T \approx \begin{bmatrix} -\omega_s^2 \delta r_N & -\omega_s^2 \delta r_E & 2\omega_s^2 \delta r_D \end{bmatrix}^T \quad (4-21)$$

其中， ω_s 为 Schuler Frequency，为线频率；Schuler 周期 $T = 84.4$ min，对应的是角频率，所以 $\omega_s = 2\pi/84.4/60$ 。

因此，速度误差方程可写作：

$$\delta\underline{v}^C = M_S \delta\underline{r} - (2\underline{\omega}_{IE}^C + \underline{\omega}_{EC}^C) \times \delta\underline{v}^C + \underline{a}_{SF}^C \times \underline{\psi}^C + C_B^P \delta\underline{a}_{SF}^B \quad (4-22)$$

$$\text{其中, } M_S = \begin{bmatrix} -\omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_s^2 \end{bmatrix}$$

如何计算 \underline{a}_{SF}^C ？？

4.1.3 位置误差方程

由哥氏定理可得位置微分方程如下：

$$\left. \frac{d\underline{r}}{dt} \right|_E^C = \left. \frac{d\underline{r}}{dt} \right|_C^C + \underline{\omega}_{EC}^C \times \underline{r}^C \quad (4-23)$$

令 $\underline{r}^C = \left. \frac{d\underline{r}}{dt} \right|_C^C$ ，则上式整理为：

$$\underline{r}^C = -\underline{\omega}_{EC}^C \times \underline{r}^C + \underline{v}_E^C \quad (4-24)$$

其中, \underline{v}_E^C 为地速在 C 系下的投影; $\underline{\omega}_{EC}^C$ 表示 C 系相对于 E 系的转动角速度, 由于 C 系是由位置向量计算得到, 为已知量, 因此 $\underline{\omega}_{EC}^C$ 无误差; 对式 4-22 做扰动分析, 可得:

$$\delta \underline{r}^C = -\underline{\omega}_{EC}^C \times \delta \underline{r}^C + \delta \underline{v}_E^C \quad (4-25)$$

4.1.4 惯性传感器误差

虽然惯性传感器的误差在数据输出时已作了补偿 (仅限于高精度惯导), 但是仍然存在残余误差, 需扩展到状态向量中, 与位置速度姿态一并估计。如果同时考虑传感器的零偏和比例因子, 则传感器误差可表示如下:

$$\delta \underline{a}_{SF}^B = \underline{b}_a + \text{diag}(\underline{a}_{SF}^B) \underline{s}_a + \underline{w}_a \quad (4-26)$$

$$\delta \underline{\omega}_{IB}^B = \underline{b}_g + \text{diag}(\underline{\omega}_{IB}^B) \underline{s}_g + \underline{w}_g \quad (4-27)$$

惯性传感器误差的微分方程为:

$$\begin{cases} \dot{\underline{b}}_a = \text{diag}(\underline{c}_{ab}) \underline{b}_a + \underline{w}_{ab} \\ \dot{\underline{b}}_g = \text{diag}(\underline{c}_{gb}) \underline{b}_g + \underline{w}_{gb} \\ \dot{\underline{s}}_a = \text{diag}(\underline{c}_{as}) \underline{s}_a + \underline{w}_{as} \\ \dot{\underline{s}}_g = \text{diag}(\underline{c}_{gs}) \underline{s}_g + \underline{w}_{gs} \end{cases} \quad (4-28)$$

其中传感器残余误差 (噪声) 建模为随机常数、随机游走、一阶高斯马尔可夫过程均可用上述微分方程, 但是使用不同的噪声模型, 则参数 $\underline{c}, \underline{w}$ 均有所不同。在实现 Kalman 时将上述噪声项建模为一阶高斯马尔可夫过程, 表达式如下:

$$\begin{cases} \dot{\underline{b}}_g = -\frac{1}{T_{gb}} \underline{b}_g + \underline{w}_{gb} \\ \dot{\underline{b}}_a = -\frac{1}{T_{ab}} \underline{b}_a + \underline{w}_{ab} \\ \dot{\underline{s}}_g = -\frac{1}{T_{gs}} \underline{s}_g + \underline{w}_{gs} \\ \dot{\underline{s}}_a = -\frac{1}{T_{as}} \underline{s}_a + \underline{w}_{as} \end{cases} \quad (4-29)$$

4.2 卡尔曼滤波器设计

4.2.1 离散时间系统

线性离散系统方程

$$\underline{x}(t) = F(t)\underline{x}(t) + G(t)\underline{w}(t) \quad (4-30)$$

其中，

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} (\delta \underline{r}^c)^T & (\delta \underline{v}^c)^T & \underline{\psi}^T & \underline{b}_g^T & \underline{b}_a^T & \underline{s}_g^T & \underline{s}_a^T \end{bmatrix}^T \quad (4-31)$$

$\underline{w}(t)$ 为白噪声向量，由协方差矩阵描述为：

$$E[\underline{w}(t)\underline{w}(t)^T] = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (4-32)$$

Q 阵又叫做谱密度矩阵，一般根据加速度计和陀螺白噪声，零偏驱动白噪声，比例因子误差驱动白噪声水平给定，该参数一般由传感器的标定参数给出。

惯导一般具有较高的数据采样率，满足对真实信号的采样定理；将连续时间微分方程 (4-30) 转换为离散时间差分方程形式，表示如下：

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)G(\tau)\underline{w}(\tau)d\tau \quad (4-33)$$

可简写为

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi_k \underline{x}_k + \underline{w}_k \quad (4-34)$$

其中， $\Phi_k = \Phi(t_{k+1}, t_k)$ 为系统状态方程转移矩阵， $\underline{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)G(\tau)\underline{w}(\tau)d\tau$ 为由输入白噪声而带来的驱动响应。

当 $\Delta t_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ 很小时，状态转移矩阵可简写为

$$\Phi_k = \exp(F(t_k)\Delta t_{k+1}) \approx I + F(t_k)\Delta t_{k+1} \quad (4-35)$$

$$E[\underline{w}_k \underline{w}_i^T] = \begin{cases} Q_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (4-36)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= E[\underline{w}_k \underline{w}_k^T] \\ &= E \left\{ \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \xi)G(\xi)\underline{w}(\xi)d\xi \right] \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \eta)G(\eta)\underline{w}(\eta)d\eta \right]^T \right\} \quad (4-37) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \xi)G(\xi)E[\underline{w}(\xi)\underline{w}(\xi)^T]\Phi^T(t_{k+1}, \eta)G^T(\eta)d\xi d\eta \end{aligned}$$

对上式应用梯形积分，在 (t_k, t_{k+1}) 采样间隔内可将 $G(t)Q(t)G^T(t)$ 近似为常值，则 Q_k 可表示为：

$$Q_k \approx \frac{1}{2} [\Phi_k G(t_k) Q(t_k) G^T(t_k) + G(t_k) Q(t_k) G^T(t_k) \Phi_k^T] \Delta t_{k+1} \quad (4-38)$$

后面需要搞懂式 4-38 是如何推导得到的，需要学习现代控制理论，并结合 Maybeck 的书。

4.2.2 线性观测模型

4.2.2.1 位置观测值

由 IMU 位置经由杆臂推算的 GPS 天线相位中心的位置；GPS 测量值。而这之差作为位置的观测值。

1) 由 IMU 位置推算的 GPS 天线相位中心位置的表达式为：

$$\underline{r}_{\text{GPS}}^N = \underline{r}_{\text{IMU}}^N + D_R^{-1} C_B^N \underline{l}_{\text{GPS}}^B \quad (4-39)$$

考虑上式中各项误差，其中认为杆臂量测值 $\underline{l}_{\text{GPS}}^B$ 没有误差；忽略 D_R^{-1} 的计算误差，

其中 $D_R^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{R_M + h}, \frac{1}{(R_N + h)\cos\phi}, -1\right)$ ¹⁵，对上式做扰动分析可得：

$$\begin{aligned} \hat{\underline{r}}_{\text{GPS}}^N &= \hat{\underline{r}}_{\text{IMU}}^N + D_R^{-1} \hat{C}_B^N \underline{l}_{\text{GPS}}^B \\ &= \underline{r}_{\text{IMU}}^N + D_R^{-1} \delta \underline{r}_{\text{IMU}}^N + D_R^{-1} [I - (\underline{\phi} \times)] C_B^N \underline{l}_{\text{GPS}}^B \\ &= \underline{r}_{\text{IMU}}^N + D_R^{-1} C_B^N \underline{l}_{\text{GPS}}^B + D_R^{-1} \delta \underline{r}_{\text{IMU}}^N + D_R^{-1} (C_B^N \underline{l}_{\text{GPS}}^B \times) \underline{\phi} \\ &= \underline{r}_{\text{GPS}}^N + D_R^{-1} \delta \underline{r}_{\text{IMU}}^N + D_R^{-1} (C_B^N \underline{l}_{\text{GPS}}^B \times) \underline{\phi} \end{aligned} \quad (4-40)^{16}$$

2) GPS 解算的到的位置可表示如下：

$$\underline{r}_{\text{GPS}}^N = \underline{r}_{\text{GPS}}^N + D_R^{-1} \underline{e}_r \quad (4-41)$$

其中， $\underline{r}_{\text{GPS}}^N$ 表示由 GPS 解算得到的 GPS 天线相位中心的位置，表示为经纬高 (BLH)； \underline{e}_r^N 为 GPS 位置误差，在 N 系下表示，单位为 m，在 GPS 解算软件中以

¹⁵因为用的是经纬度表示位置，而杆臂的单位为 m，因此需要将长度转换为经纬度对应的弧度，因此才需要出现 D_R^{-1} 。

¹⁶上式中， $\delta \underline{r}_{\text{IMU}}^N$ 之所以要写成 $D_R^{-1} \delta \underline{r}_{\text{IMU}}^N$ ，是因为 $\delta \underline{r}_{\text{IMU}}^N$ 表示的 N 系下误差单位为 m。

北东高方向的位置标准差 STD 形式给出。

计算由 IMU 推算的 GPS 位置和实测 GPS 位置之差，作为位置观测值 $\delta \underline{z}_r$ ，位置观测值方程为：

$$\delta \underline{z}_r = D_R (\hat{\underline{r}}_{GPS}^N - \underline{r}_{GPS}^N) = \delta \underline{r}_{IMU}^N + (C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \times) \underline{\phi} - \underline{e}_r \quad (4-42)$$

上式中 $\delta \underline{z}_r$ 单位为 m。将 $\underline{\phi} = \underline{\psi} + \delta \underline{\theta}$ 带入上式，忽略二阶小量和 $(C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \times) \delta \underline{\theta}$ 可得：

$$\begin{aligned} \delta \underline{z}_r &= C_C^N \delta \underline{r}_{IMU}^C + (C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \times) (\underline{\psi} + \delta \underline{\theta}) - \underline{e}_r \\ &\approx \delta \underline{r}_{IMU}^C + (C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \times) \underline{\psi} - \underline{e}_r \end{aligned} \quad (4-43)$$

上式左边，位置差观测值如果直接使用 $\delta \underline{z}_r = D_R (\hat{\underline{r}}_{GPS}^N - \underline{r}_{GPS}^N)$ ，则在极地和穿越 180 度经线时存在问题：例如 180 度经线左右两侧分别为 +177.999 和 -179.999，如果经度计算存在误差，直接相减则可能导致很大的位置误差。一种更稳定的算法为：将位置从大地坐标系转换至笛卡尔坐标系，再求差

$$\delta \underline{z}_r = C_E^N (\hat{\underline{r}}_{GPS}^E - \underline{r}_{GPS}^E) = C_E^N (\hat{\underline{r}}_{IMU}^E - \underline{r}_{GPS}^E) + C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \quad (4-44)$$

其中， C_E^N 由 GPS 位置解算得到。

4.2.2.2 速度观测值

推导杆臂误差的速度效应时，采用以下公式：

$$\hat{\underline{r}}_{GPS}^N = \hat{\underline{r}}_{IMU}^N + \hat{C}_B^N \underline{l}_{GPS}^B \quad (4-45)$$

对式 4-45 求导，其中认为杆臂测量值 \underline{l}_{GPS}^B 没有误差，得，

$$\hat{\underline{v}}_{GPS}^N = \hat{\underline{v}}_{IMU}^N + (\hat{C}_B^N (\hat{\omega}_{IB}^B \times) - (\hat{\omega}_{IN}^N \times) \hat{C}_B^N) \underline{l}_{GPS}^B \quad (4-46)$$

对式 4-45 做扰动分析，忽略二阶小量和 $\delta \underline{\omega}_{IN}^N$ 项，得

$$\begin{aligned} \hat{\underline{v}}_{GPS}^N &= \hat{\underline{v}}_{IMU}^N + (\hat{C}_B^N (\hat{\omega}_{IB}^B \times) - (\hat{\omega}_{IN}^N \times) \hat{C}_B^N) \underline{l}_{GPS}^B \\ &= \underline{v}_{IMU}^N + \delta \underline{v}_{IMU}^N + (C_B^N - (\underline{\phi} \times) C_B^N) ((\underline{\omega}_{IB}^B \times) + (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times)) \underline{l}_{GPS}^B \\ &\quad - ((\underline{\omega}_{IN}^N \times) + (\delta \underline{\omega}_{IN}^N \times)) (C_B^N - (\underline{\phi} \times) C_B^N) \underline{l}_{GPS}^B \\ &\approx \underline{v}_{IMU}^N + (C_B^N (\underline{\omega}_{IB}^B \times) + (\underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N) \underline{l}_{GPS}^B + \delta \underline{v}_{IMU}^N - (\underline{\phi} \times) C_B^N (\underline{\omega}_{IB}^B \times) \underline{l}_{GPS}^B \\ &\quad C_B^N (\delta \underline{\omega}_{IB}^B \times) \underline{l}_{GPS}^B + (\underline{\omega}_{IN}^N \times) (\underline{\phi} \times) C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \\ &= \underline{v}_{GPS}^N + \delta \underline{v}_{IMU}^N - (\underline{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \underline{\phi} - C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \delta \underline{\omega}_{IB}^B - C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times \underline{\omega}_{IB}^B) \times \underline{\phi} \end{aligned} \quad (4-47)$$

忽略 C_C^N , 也即 $\delta\theta, \phi \approx \psi^{17}$, 则上式可化为:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{v}}_{GPS}^N &= \underline{v}_{GPS}^N + \delta\underline{v}_{GPS}^N = \underline{v}_{GPS}^N + \delta\underline{v}_{IMU}^N - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \underline{\psi} \\ &\quad - C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \delta\underline{\omega}_{IB}^B - C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times \underline{\omega}_{IB}^B) \times \underline{\psi}\end{aligned}\quad (4-48)$$

GPS 速度观测方程为:

$$\underline{v}_{GPS}^N = \underline{v}_{GPS}^N + \underline{e}_v \quad (4-49)$$

因此, 速度误差观测方程为:

$$\begin{aligned}\delta\underline{z}_v &= \hat{\underline{v}}_{GPS}^N - \underline{v}_{GPS}^N \\ &\approx \delta\underline{v}_{IMU}^C - (\underline{\omega}_{IC}^C \times) C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \underline{\psi} - C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \delta\underline{\omega}_{IB}^B - C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times \underline{\omega}_{IB}^B) \times \underline{\psi} - \underline{e}_v\end{aligned}\quad (4-50)$$

4. 2. 2. 3 观测方程

1) 确定观测值

$$\delta\underline{z}_r = \left[\left(\delta\underline{z}_r \right)^T, \left(\delta\underline{z}_v \right)^T \right]^T = \left[\begin{array}{c} C_E^N (\hat{\underline{r}}_{IMU}^E - \underline{r}_{GPS}^E) + C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \\ \hat{\underline{v}}_{IMU}^N + \left(\hat{C}_B^N (\hat{\underline{\omega}}_{IB}^B \times) - (\hat{\underline{\omega}}_{IN}^N \times) \hat{C}_B^N \right) \underline{l}_{GPS}^B - \underline{v}_{GPS}^N \end{array} \right] \quad (4-51)$$

2) 确定观测阵 H

$$H_k = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \left((C_B^N \underline{l}_{GPS}^B) \times \right) & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & H_{23} & C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) & 0_{3 \times 3} & H_{26} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

其中

$$\begin{cases} H_{23} = -(\underline{\omega}_{IC}^C \times) C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) - C_B^N ((\underline{l}_{GPS}^B \times) \underline{\omega}_{IB}^B) \\ H_{26} = C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \text{diag}(\underline{\omega}_{IB}^B) \end{cases} \quad (4-53)$$

¹⁷ 此处做了简化, 简化会带来多大的误差?

4.2.3 程序实现

4.2.3.1 F 阵

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & (\underline{a}_{SF}^C \times) & 0 & C_B^P & 0 & F_{27} \\ 0 & 0 & F_{33} & -C_B^P & 0 & F_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{77} \end{bmatrix}$$

其中， $F_{11} = -(\underline{\omega}_{EC}^C \times)$ ， $F_{21} = \text{diag}(-\omega_s^2, -\omega_s^2, 2\omega_s^2)$ ， $F_{22} = -((2\underline{\omega}_{IE} + \underline{\omega}_{EC}^C) \times)$ ，
 $F_{27} = C_B^P \text{diag}(\underline{a}_{SF}^B)$ ， $F_{33} = -((\underline{\omega}_{IE}^C + \underline{\omega}_{EC}^C) \times)$ ， $F_{36} = -C_B^P \text{diag}(\underline{\omega}_{IB}^B)$ ， $F_{44} = \text{diag}(\underline{c}_{gb})$ ，
 $F_{55} = \text{diag}(\underline{c}_{ab})$ ， $F_{66} = \text{diag}(\underline{c}_{gs})$ ， $F_{77} = \text{diag}(\underline{c}_{as})$ 。

由 F 计算状态转移矩阵 $\Phi_k = \exp(F(t_k)\Delta t_{k+1}) \approx I + F(t_k)\Delta t_{k+1}$ ，下面对 F 阵参数一一进行说明：

$F_{11} = -(\underline{\omega}_{EC}^C \times)$ ，用到的 C 系，即由机械编排得到的位置 \hat{r} （即 nav.r）所确定的导航坐标系，C 系水平面无误差，即 $F_{11} = -(\underline{\omega}_{EC}^C \times) = -(\underline{\omega}_{EN}^N \times)$ ，即 INS_Mechanization 函数解算得到的 `nav.w_en_n`

$$F_{21} = \left[\frac{-g}{M+h} \quad \frac{-g}{N+h} \quad \frac{2g}{\sqrt{MN+h}} \right]^T \approx \left[-\omega_s^2 \quad -\omega_s^2 \quad 2\omega_s^2 \right]^T, \quad \text{nav.g_ep}, \quad \text{nav.Rm},$$

`nav.Rn, nav.r(3)`

F_{22} 中的 $\underline{\omega}_{IE}^C$ ， $\underline{\omega}_{EC}^C$ 即上一历元的的导航参数 `nav.w_ie_n` 和 `nav.w_en_n` $(\underline{a}_{SF}^C \times)$ ，在机械编排中，用 $\Delta \underline{v}_{SF(m)}^{N(m)}$ 即为 \underline{a}_{SF}^C 的时间积分，但是此处所用的 C 系，是由外推位置所确定的 C 系，与真正的 C 系有微小区别，在后续算法中应该加以改正。此处直接使用： $\underline{a}_{SF}^C = \Delta \underline{v}_{SF(m)}^{N(m)} / dt$ 。`nav.dv_sf_n / dt`， $dt = t(i) - t(i-1)$ ， i 为当前解算的历元

P 系是通过机械编排得到的姿态所确定的导航坐标系，因此 $C_B^P = \text{nav.C.bn}$ 。

$F_{27} = C_B^P \text{diag}(\underline{a}_{SF}^B)$ 中 \underline{a}_{SF}^B 为加速度计原始比力测量值，如果加表的原始数据为增量形式的话， $\underline{a}_{SF}^B(t_k) = \Delta v(t_k) / dt$, $dt = t_k - t_{k-1}$ ，其中 t_k 为当前历元，需要计算该历元的误差，并推算下一历元的导航状态。将 $\underline{a}_{SF}^B(t_k)$ 赋值给结构体 nav；

$F_{36} = -C_B^P \text{diag}(\omega_{IB}^B)$ 中的 ω_{IB}^B 为陀螺输出的角速率，如果是增量形式，做法与加表类似。将 $\omega_{IB}^B(t_k)$ 赋值给结构体 nav。

将加表、陀螺的零偏和比力因子建模为一阶高斯马尔可夫过程，则 F_{44} , F_{55} , F_{66} , F_{77} 是连续微分方程的系数 $-1/T_{\text{cor}}$ 。GM 的离散方程中认为 $dt = 1/d_{\text{rate}}$ ，因此误差模型可以认为是线性时不变系统，Phi 阵的这些参数不随时间变化！

4.2.3.2 G 阵

连续时间系统微分方程中的白噪声驱动项如下：

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{w}_v^T & \underline{w}_\psi^T & \underline{w}_{gb}^T & \underline{w}_{ab}^T & \underline{w}_{gs}^T & \underline{w}_{as}^T \end{bmatrix}^T$$

对应的 G 阵如下：

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_B^P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_B^P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

为什么 W 阵中，位置维度中没有白噪声？

在速度误差方程中 $C_B^P \delta \underline{a}_{SF}^B$ 项表示的是加速度比力输出误差，包括残余零偏和比例因子误差和白噪声。位置误差方程中，不会引入白噪声项。 \underline{w}_v^T 表示的是加速度计输出误差中白噪声的整体水平；同理 \underline{w}_ψ^T 表示的是陀螺输出误差中白噪声的整体水平； \underline{w}_{gb}^T , \underline{w}_{ab}^T 表示的是陀螺和加速度计零驱动偏噪声； \underline{w}_{gs}^T , \underline{w}_{as}^T 表示的是陀螺和加速度计比例因子误差驱动白噪声。

G 矩阵为稀疏矩阵，在计算 GQG^T 时，只取其非零元素参与计算，而不是用矩阵直接计算，以减小计算量。

4.2.3.3 Q 阵

连续时间系统状态方程：

$$\delta \underline{x}(t) = \underset{21 \times 1}{F(t)} \delta \underline{x}(t) + \underset{21 \times 1}{G(t)} \underline{w}(t)$$

连续时间系统状态噪声方差阵 $Q(t)$ （也称功率谱密度矩阵），虽然写成时间 t 的函数，但该矩阵由 IMU 性能决定，是非时变量，形式如下：

$$E[\underline{w}(t)\underline{w}(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$$

$$\begin{aligned} Q(t) = & [v_{rw}^2, v_{rw}^2, v_{rw}^2, a_{rw}^2, a_{rw}^2, a_{rw}^2, \\ & \frac{2\sigma_{gb}^2}{T_{gb}}, \frac{2\sigma_{gb}^2}{T_{gb}}, \frac{2\sigma_{gb}^2}{T_{gb}}, \frac{2\sigma_{ab}^2}{T_{ab}}, \frac{2\sigma_{ab}^2}{T_{ab}}, \frac{2\sigma_{ab}^2}{T_{ab}}, \\ & \frac{2\sigma_{gs}^2}{T_{gs}}, \frac{2\sigma_{gs}^2}{T_{gs}}, \frac{2\sigma_{gs}^2}{T_{gs}}, \frac{2\sigma_{as}^2}{T_{as}}, \frac{2\sigma_{as}^2}{T_{as}}, \frac{2\sigma_{as}^2}{T_{as}}]^T \end{aligned}$$

将状态方程离散化后得到的离散状态方程中的 \underline{w}_k 不是白噪声，这容易引起误解，

\underline{w}_k 为系统对系统输入白噪声的响应 ($\underline{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) \underline{w}(\tau) d\tau$)，所以需要进一步推导对应的误差传播律。

$$\begin{aligned} Q_k & \approx \frac{1}{2} [\Phi_k G(t_k) Q(t_k) G^T(t_k) + G(t_k) Q(t_k) G^T(t_k) \Phi_k^T] \Delta t_{k+1} \\ & = \frac{1}{2} [\Phi_k G(t_k) Q G^T(t_k) + G(t_k) Q G^T(t_k) \Phi_k^T] \Delta t_{k+1} \end{aligned}$$

其中 $Q(t_k)$ 为 CFG.Q.

4.2.3.4 离散状态方程的时间问题

主要梳理哪些是已知量，那些是未知量，哪些是待求量，哪些是测量值

当前时刻为： t_k

已知

$$\Phi_k = \Phi(t_{k+1}, t_k) \approx I + F(t_k) \Delta t_{k+1}$$

4.2.3.5 Kalman 滤波

主要想清楚以下问题：Kalman 滤波到底有什么意义？1) 在惯导机械编排中，能够得到每个历元的 PVA，为什么还需要在做一步 Kalman 滤波预测；2) 为何状态量

为状态量，如 PVA 的误差，而非 PVA。

INS MECH 能够推算惯导的 PVA，但是并不能给出 PVA 对应的误差，无法与其他更新量进行加权，Kalman 滤波通过给定的初始权阵，给出每个历元的预测误差即 $P_{predict}$ 阵。是否意味着，通过 Kalman 滤波预测，得到的 PVA 误差可以加到 INS MECH 推算的 PVA 上，进行改正，得到更优的 PVA 呢？形式上显然是这样，但是 PVA 的改正数将一直为 0，相当于没有做任何改正，而只是预测了方差，只有这样才与常识相符。给定初始导航状态，则初始的 PVA 改正数为 0，而后会一直为 0.

4.2.3.6 正向滤波

	LINS812
数据采集率	200 Hz
陀螺零偏稳定性 σ_{gb}	0.01 deg/h
加速度计零偏稳定性 σ_{ab}	10 mGal
陀螺比例因子标准差 σ_{gs}	10 ppm
加速度计比例因子标准差 σ_{as}	10 ppm
角度随机游走 (arw)	0.002 deg/ \sqrt{h} deg/ \sqrt{h}
速度随机游走 (vrw)	0.001 m/s/ \sqrt{h}
相关时间 ($T_{gb}, T_{ab}, T_{gs}, T_{as}$) ($T_{gb}, T_{ab}, T_{gs}, T_{as}$)	4 h

$$\begin{aligned}
 P_0 = \text{diag}\{ & (0.01m)^2, (0.01m)^2, (0.01m)^2, \\
 & (0.002m/s)^2, (0.002m/s)^2, (0.002m/s)^2, \\
 & (0.01)^2, (0.01)^2, (0.01)^2, \\
 & (0.01/h)^2, (0.01/h)^2, (0.01/h)^2, \\
 & (1 \times 10^{-4}m/s^2)^2, (1 \times 10^{-4}m/s^2)^2, (1 \times 10^{-4}m/s^2)^2, \\
 & (1 \times 10^{-5})^2, (1 \times 10^{-5})^2, (1 \times 10^{-5})^2, \\
 & (1 \times 10^{-5})^2, (1 \times 10^{-5})^2, (1 \times 10^{-5})^2 \}
 \end{aligned}$$

注意：在算法实现过程中，所有的单位均要转换成国际单位，时间单位用 s，长度用 m，角度用 rad，由此类推，在程序中注意转换 P_0 数值。

1) 观测值 Z

$$\delta \underline{Z}_r = \left[(\delta \underline{Z}_r)^T, (\delta \underline{Z}_v)^T \right]^T = \begin{bmatrix} C_E^N (\hat{\underline{f}}_{IMU}^E - \underline{r}_{GPS}^E) + C_B^N \underline{l}_{GPS}^B \\ \hat{\underline{v}}_{IMU}^N + (\hat{C}_B^N (\hat{\underline{\omega}}_{IB}^B \times) - (\hat{\underline{\omega}}_{IN}^N \times) \hat{C}_B^N) \underline{l}_{GPS}^B - \underline{v}_{GPS}^N \end{bmatrix}$$

2) H 阵

$$H_k = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & ((C_B^N \underline{l}_{GPS}^B) \times) & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & H_{23} & C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) & 0_{3 \times 3} & H_{26} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} H_{23} = -(\underline{\omega}_{IC}^C \times) C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) - C_B^N ((\underline{l}_{GPS}^B \times) \underline{\omega}_{IB}^B \times) \\ H_{26} = C_B^N (\underline{l}_{GPS}^B \times) \text{diag}(\underline{\omega}_{IB}^B) \end{cases}$$

3) R 阵

4.2.3.7 输出导航结果

状态向量: $\underline{x} = \left[(\delta \underline{r}^C)^T \quad (\delta \underline{v}^C)^T \quad \underline{\psi}^T \quad \underline{b}_g^T \quad \underline{b}_a^T \quad \underline{s}_g^T \quad \underline{s}_a^T \right]^T$, 其中:

$\delta \underline{r}^C = [\delta r_N \quad \delta r_E \quad \delta r_D]^T$, 位置表示在 NED 坐标系下, 位置误差为 N,E,D 分量的误差, 单位为 m; 改正数如下:

$$\begin{aligned} \delta B &= \frac{\delta r_N}{M + h} \\ \delta L &= \frac{\delta r_E}{(N + h) \cos(B + \delta B)} \\ \delta h &= -\delta r_D \end{aligned} \tag{4-54}$$

C 系下的速度应该转换至真实 n 系下

$$\underline{v}^N = C_C^N (\underline{v}^C + \delta \underline{v}^C) \tag{4-55}$$

$$C_N^C = I - (\delta \underline{\theta} \times) \tag{4-56}$$

$$\delta \theta = \begin{bmatrix} \delta r_E / (N + h) \\ -\delta r_N / (M + h) \\ -\delta r_E \tan \varphi / (N + h) \end{bmatrix} \tag{4-57}$$

机械编排得到的方向余弦矩阵 nav1.C_bn, 其实是 C_bp, 最终的导航结果需要从 C_bn 中提取出 b 系相对于真实 n 系的夹角。

$$\begin{aligned} C_B^N &= C_P^N C_B^P \\ C_N^P &= I - (\underline{\phi} \times) \\ \underline{\phi} &= \psi + \delta \underline{\theta} \end{aligned} \tag{4-58}$$

第 5 章 反向平滑算法

Ref: Maybeck, P.S. Stochastic Models, Estimation, and Control: volume 2, chapter 8.

Fixed-interval

$$\hat{\mathbf{x}}(t_i^+) = E\{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{Z}(t_i, \omega_j) = \mathbf{Z}_i\} \quad (5-1)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_i^-) = E\{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{Z}(t_{i-1}, \omega_j) = \mathbf{Z}_{i-1}\} \quad (5-2)$$

The measurement data is collected over the interval from initial time t_0 to final time t_f , $[t_0, t_f]$. Offline computation are inherently involved in generating the optimal fixed-interval smoothed estimate,

$$\hat{\mathbf{x}}(t_i/t_f) = E\{\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{Z}(t_f) = \mathbf{Z}_f\} \quad (5-3)$$

$$t_i = t_0, t_1, \dots, t_f; \quad t_f = \text{fixed final time}$$

5.1 FIXED-INTERVAL SMOOTHING

The optimal fixed-interval smoothed estimate and associated error covariance can be evaluated totally in terms of quantities available from the *forward* and *backward* filters,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t_i/t_f) &= \mathbf{P}(t_i/t_f) [\mathbf{P}^{-1}(t_i^+) \hat{\mathbf{x}}(t_i^+) + \mathbf{P}_b^{-1}(t_i^-) \hat{\mathbf{x}}_b(t_i^-)] \\ &= \mathbf{P}(t_i/t_f) [\mathbf{P}^{-1}(t_i^+) \hat{\mathbf{x}}(t_i^+) + \hat{\mathbf{y}}_b(t_i^-)] \end{aligned} \quad (5-4)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(t_i/t_f) = \mathbf{P}^{-1}(t_i^+) + \mathbf{P}_b^{-1}(t_i^-) \quad (5-5)$$

A way of thinking of this process is to consider the backward filter output $\hat{\mathbf{x}}_b(t_i^-)$ as providing an additional “measurement” with which to update the forward filter. *Note that*, we choose to process $\mathbf{z}(t_i, \omega_k) = \mathbf{z}_i$ in the forward filter; we could just as easily have chosen to process it in the backward filter instead, as long as this data does not enter into both filter and thus be counted twice in the smoothed estimate.

Analogy to the forward filter result, a way of deriving (5-4) and (5-5) is presented here by starting from an estimate $\hat{\mathbf{x}}(t_i^-)$ and associated error covariance $\mathbf{P}(t_i^-)$ just before the measurement $\mathbf{z}(t_i, \omega_k) = \mathbf{z}_i$ is incorporated.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t_i^+) = \hat{\mathbf{x}}(t_i^-) + \mathbf{K}(t_i) [\mathbf{z}_i - \mathbf{H}(t_i) \hat{\mathbf{x}}(t_i^-)] \\ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_i) \mathbf{H}(t_i)] \hat{\mathbf{x}}(t_i^-) + \mathbf{K}(t_i) \mathbf{z}_i \\ \mathbf{K}(t_i) = \mathbf{P}(t_i^-) \mathbf{H}^T(t_i) [\mathbf{H}(t_i) \mathbf{P}(t_i^-) \mathbf{H}^T(t_i) + \mathbf{R}(t_i)]^{-1} \\ = \mathbf{P}(t_i^+) \mathbf{H}^T(t_i) \mathbf{R}(t_i)^{-1} \\ \mathbf{P}(t_i^+) = \mathbf{P}(t_i^-) - \mathbf{K}(t_i) \mathbf{H}(t_i) \mathbf{P}(t_i^-) \\ \mathbf{P}^{-1}(t_i^+) = \mathbf{P}^{-1}(t_i^-) + \mathbf{H}^T(t_i) \mathbf{R}(t_i)^{-1} \mathbf{H}(t_i) \end{cases} \quad (5-6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_i^+) = \mathbf{P}(t_i^+) [\mathbf{P}^{-1}(t_i^-) \hat{\mathbf{x}}(t_i^-) + \mathbf{H}^T(t_i) \mathbf{R}(t_i)^{-1} \mathbf{z}_i] \quad (5-7)$$

Now consider the analogous problem of having an estimate $\hat{\mathbf{x}}(t_i^+)$ and associated $\mathbf{P}(t_i^+)$, based on all measurements up to and including \mathbf{z}_i , and now it is desired to update that estimate with the “measurement” $\hat{\mathbf{x}}_b(t_i^-)$ with an associated “measurement error” covariance matrix $\mathbf{P}_b(t_i^-)$. Since $\hat{\mathbf{x}}_b(t_i^-)$ would represent a “measurement” of the entire state, the $\mathbf{H}(t_i)$ would be the identity matrix. Using these replacement, (5-4) and (5-5) can be derived. (*Deriving the equation form of 5-6b is critical*).

The smoother algorithm can be shown to be equivalent to the optimal fixed-interval smoother obtained by Meditch. Computationally, this alternate method entails performing the forward filter computations and storing $\hat{\mathbf{x}}(t_i^-)$, $\mathbf{P}(t_i^-)$, $\hat{\mathbf{x}}(t_i^+)$ and $\mathbf{P}(t_i^+)$ for all time over the interval $[t_0, t_f]$. Then starting from the boundary condition

$$\hat{\mathbf{x}}(t_f/t_f) = \hat{\mathbf{x}}(t_f^+) \quad (5-8)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t_f/t_f) = \hat{\mathbf{x}}(t_f^+) \\ \mathbf{P}(t_f/t_f) = \mathbf{P}(t_f^+) \\ \mathbf{A}(t_i) = \mathbf{P}(t_i^+) \Phi^T(t_{i+1}, t_i) \mathbf{P}^{-1}(t_{i+1}) \\ \hat{\mathbf{x}}(t_i/t_f) = \hat{\mathbf{x}}(t_i^+) + \mathbf{A}(t_i) [\hat{\mathbf{x}}(t_{i+1}/t_f) - \hat{\mathbf{x}}(t_{i+1}^-)] \\ \mathbf{P}(t_i/t_f) = \mathbf{P}(t_i^+) + \mathbf{A}(t_i) [\mathbf{P}(t_{i+1}/t_f) - \mathbf{P}(t_{i+1}^-)] \mathbf{A}^T(t_i) \end{cases} \quad (5-9)$$

5.2 需要解释的问题

由于在实现 Kalman 滤波中状态向量为误差，因此在实现反向平滑算法时应该注意以下问题：

1. 中间文件将会非常大，如果每个历元都存完整的 P 阵的话，5000s, 200Hz 的数据，用 double 类型存储 P 阵所需的空间为： $8 \times 21 \times 21 \times 5000 \times 200 / 1024 / 1024 =$

3.2G，由于 P 阵必定是对称矩阵，因此只需存储其中的上三角和对角元素即可，如此光存 P 阵，需要的空间为 $8 \times 231 \times 5000 \times 200 / 1024 / 1024 = 1.7G$ 。并且需要同时保存 Predict 和 update，因此分两个文件分别保存上述数据，注意时间同步，每个历元均需存储对应的时间。

2. 一步转移矩阵 Φ , 21×21 , 非对称矩阵,
3. 在 Kalman predict 之后马上记录估计的状态量 $\hat{x}(t_i^-)$ 及 $P(t_{i+1}^-)$ ，并在 Kalman update 循环之后及时记录估计的状态量 $\hat{x}(t_i^+)$ 及 $P(t_{i+1}^+)$ ，记录一步转移矩阵
4. 状态量 $\hat{x}(t_i^+)$ 表示的是误差，是 Kalman update 得到的状态量，需要用 smoothed 状态量对机械编排的结果进行反馈和改正。因此需要记录机械编排结果 nav1 的 PVA
5. 如果进行了零偏反馈，则需要记录 g_bias , a_bias , 如果 g_sf 和 a_sf 也做了反馈，同样需要记录，没有反馈的话则存储在状态量中。
- 6.

第 6 章 需要解释的问题

1. 秦永元书上的双子样系数为什么与 Savage 的不一致
2. 用旋转矢量表示方向余弦矩阵和四元数时的方向问题
3. 速度更新中 Shin 所用的方法与 Savage 方法之间优劣性，及二者是否有显著差异？
4. C_{b_n} 的表达式如何推导， q_{b_n} 如何推导，如何从上述姿态四元数中提取出经纬度信息
5. 什么是游移坐标系（wander frame）
6. w_{en_n} 中 h 前面的符号与所选取的坐标系有关系，注意在 NED 和 ENU 中的区别
7. 统一程序中向量的表示形式，统一使用列向量表示
8. 描述 N 系的旋转时，是在哪个坐标系下观察？
9. 无法直接从四元数中提取出欧拉角信息，可先将四元数转换为 DCM，再将 DCM 转换为欧拉角
10. 确定位置时，如果直接对经纬度的微分式进行积分运算，在两极地区容易出现歧义。
11. 对于高精度惯导系统来说，P 阵如果用国际单位制的话，其数值非常小，很可能在计算中存在截断误差。

第7章 惯性导航误差方程

本章主要通过将传感器误差和重力模型误差带入到惯导导航微分方差，分析位置、速度和姿态的误差传播定律。