

RELACIONES Y FUNCIONES

M.C. Mireya Tovar Vidal

IDEA INTUITIVA DE RELACIÓN

- Una relación es una correspondencia entre dos elementos de dos conjuntos con ciertas propiedades.
- En computación las relaciones se utilizan en estructuras y bases de datos, redes, autómatas y lenguajes
- Por ejemplo:
 - Los datos de un trabajador (número de control, rfc, puesto, antigüedad, salario) se guardan en una base de datos, para relacionar estos datos con otra información, se establece un campo relación con los datos de una persona, de manera que un trabajador además es una persona con nombre, apellidos, género.



DEFINICIÓN FORMAL DE RELACIÓN

- Dados dos conjuntos no vacíos **A** y **B**, una relación **R** es un conjunto de pares ordenados en donde el primer elemento **a** está relacionado con el segundo elemento **b** por medio de cierta propiedad o característica.
- Se denota como aRb
 $R = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$



EJEMPLO DE RELACIÓN

Maestro	Materia
Jorge	Sistemas Digitales
Domingo	Lenguajes algorítmicos
Ignacio	Estructuras de Datos
Jorge	Graficación
Raymundo	Programación II
Manuel	Sistemas Operativos
Ezequiel	Sistemas Digitales

En este caso

$A = \{x \mid x \text{ es un Maestro}\}$, $B = \{y \mid y \text{ es una materia de ingeniería en computación}\}$

$R = \{(Jorge, \text{Sistemas Digitales}), (Jorge, \text{Graficación}), (Domingo, \text{Lenguajes Algorítmicos}), \dots, (Ezequiel, \text{Sistemas Digitales})\}$

Las relaciones se forman si cumplen cierta proposición, por ejemplo, “Imparten la materia”, es decir Jorge **imparte la materia** Sistemas Digitales \equiv Jorge **R** Sistemas Digitales

PRODUCTO CARTESIANO

- El producto cartesiano de dos conjuntos A y B , se denota como $A \times B$, es el conjunto que resulta de la combinación de todos los elementos del conjunto A con todos los elementos del conjunto B .
- En teoría de conjuntos equivale al conjunto universo.



EJEMPLO DE PRODUCTO CARTESIANO

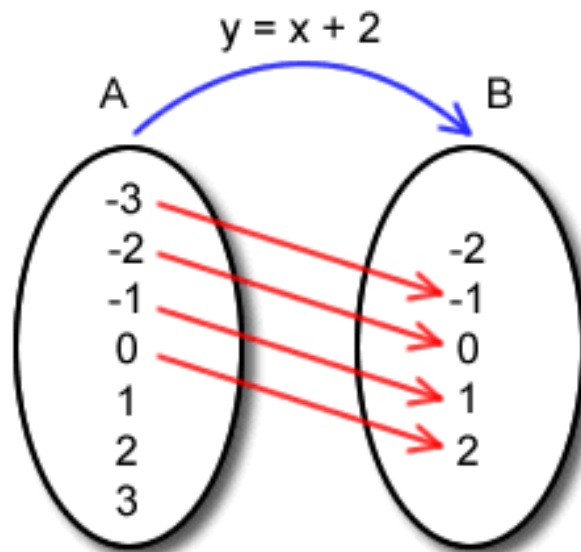
- Sean los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b\}$

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$



DIAGRAMA DE FLECHAS

- El dominio de la relación es el conjunto $D = \{-3, -2, -1, 0\}$. Note que $D \subset A$
- El rango de la relación es el conjunto $I = \{-1, 0, 1, 2\}$. Notemos que $I \subset B$.



EJERCICIOS

1. Sean los conjuntos $A=\{a \mid a \in \mathbb{Z}; 10 < a < 30\}$, $B=\{b \mid b \in \mathbb{Z}^+ b \leq 20\}$ y R es una relación de A en B , en donde el elemento $a \in A$ es divisible entre 13 y $b \in B$ es primo.
2. Sea A el conjunto de los continentes $A=\{\text{América, Europa, Asia, África}\}$ y B el conjunto de los países, $B=\{\text{México, Rusia, Japón, Francia, India, Italia, Egipto, China, Angola, EU}\}$, enumera los elementos del conjunto $A \times B$. Dibuje su diagrama de flechas
3. Escribe un ejemplo de una relación con sus conjuntos respectivos.



DOMINIO E IMAGEN DE UNA RELACIÓN

- En toda relación de pares ordenados no vacía se tienen dos conjuntos:
 - Dominio de R ($\text{Dom}(R)$), que es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares de una relación el cual es un subconjunto del conjunto A, $\text{Dom}(R) \subset A$
 - Codominio o imagen de R ($\text{Cod}(R)$) o $\text{Imag}(R)$, que es el conjunto que está formado por los segundos elementos de los pares de la relación R y es $\text{Cod}(R) \subset B$.
- En particular si los elementos de la relación son pares ordenados a la relación se le denomina binaria.



EJEMPLO DE DOMINIO Y CODOMINIO

- $A=\{2,4,5,6,7,11\}$ y $B=\{b \mid b \in \mathbb{Z}; 1 \leq b \leq 10\}$
- Considérese aRb si y sólo si b es divisible entre a , por tanto:
 - $R=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(4,4),(4,8),(5,5),(5,10),(6,6),(7,7)\}$

$\text{Dom}(R)=\{2,4,5,6,7\}$

$\text{Cod}(R)=\{2,4,5,6,7,8,10\}$



TIPOS DE RELACIÓN

- Considerando que $A = B$ las relaciones se clasifican de la siguiente forma:
 - Reflexiva
 - Antireflexiva
 - Simétrica
 - Asimétrica
 - Antisimétrica
 - Transitiva



RELACIÓN REFLEXIVA

- Cumple la propiedad cuando todo elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo.
- Por ejemplo, sea $A=\{1,2,3,4\}$
 - $R=\{(1,1), (1,3), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (4,4)\}$



RELACIÓN IRREFLEXIVA

- Cumple la propiedad cuando ningún elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo.
- Por ejemplo, sea $A=\{1,2,3,4\}$
 - $R=\{(1,3),(1,4),(2,4),(3,2),(4,3)\}$



RELACIÓN SIMÉTRICA

- Cumple la propiedad cuando para cada par $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$.
- Si (a,b) está en la relación pero (b,a) no, entonces la relación no es simétrica.
- Por ejemplo, sea $A=\{1,2,3,4\}$
 - $R=\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$



RELACIÓN ASIMÉTRICA

- Cumple la propiedad cuando para cada $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \notin R$, además de que ningún elemento deberá estar relacionado consigo mismo.
- Por ejemplo, sea $A = \{1,2,3,4\}$
 - $R = \{(1,3), (3,2), (3,4)\}$



RELACIÓN ANTISIMÉTRICA

- Cumple la propiedad cuando para cada (a,b) , $(a,b) \notin R$ o $(b,a) \notin R$, inclusive si es válido si existen las parejas (a,a) .
- Por ejemplo, sea $A=\{1,2,3,4\}$
 - $R=\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$



RELACIÓN TRANSITIVA

- Cumple la propiedad cuando para cada par $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces existe el par $(a,c) \in R$.
- Por ejemplo, sea $A = \{1,2,3,4\}$
 - $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,3), (4,3), (4,4)\}$



PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Propiedad	Condición
Reflexiva	$\forall a \in A \rightarrow aRa$ $x \in A \rightarrow (x,x) \in R$
Irreflexiva	$\forall a \in A \rightarrow (a,a) \notin R$
Simétrica	Si $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R \quad \forall a, b \in A$
Asimétrica	Cuando $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$ $\forall a, b \in A$
Antisimétrica	$(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R \rightarrow x=y$
Transitiva	Si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R. \quad \forall a, b, c \in A$



EJERCICIOS

1. Sean las siguientes relaciones, indica si son reflexivas, irreflexivas, simétricas, asimétricas, antisimétricas o transitivas, justifica tu respuesta.
 1. “es hermana de”
 2. “es padre de”
 3. “tienen los mismos padres”
 4. “es menor o igual a”

2. Dados $S = \{ 1, 2, \dots, 10 \}$ y la relación $R = \{ (x, y) \mid x + y = 10 \}$ sobre S , ¿Cuáles son las propiedades de R ?



RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

- Se dice que R es una relación de equivalencia si es:
 - Reflexiva
 - Simétrica
 - Transitiva
- Por ejemplo, sea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$
 - $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3), (4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$



RELACIÓN DE ORDEN PARCIAL

- Se dice que R es una relación de orden parcial si es:
 - Reflexiva
 - Antisimétrica
 - Transitiva
- Por ejemplo, sea $A=\{a,b\}$
 - $R= \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$



EJERCICIOS

- En el conjunto $A=\{a,b,c,d\}$ se definen las relaciones
 - $R=\{(b,b),(b,c),(a,d),(d,b)\}$
 - $S=\{(a,b),(c,a),(d,a)\}$.

Determina si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas, transitiva.



EJERCICIOS

- Dada la relación determina
 - Relación de orden parcial
 - Relación de equivalencia
- $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$

