Unidade II

Objetivos

Apresentar regras e estruturas adicionais sobre o uso de proposições. Conceituar implicação lógica, tautologias, e as propriedade sobre proposições. Apresentar os fundamentos da dedução, métodos dedutivos e técnicas de redução da quantidade de conectivos.

Introdução

Nesta unidade, serão apresentados temas mais avançados sobre proposições, o que permitirá ao aluno, técnicas adicionais as já estudadas na unidade anterior, possibilitando assim lidar com operações lógicas mais complexas.

3 OPERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE PROPOSIÇÕES

3.1 Implicação lógica

3.1.1 Definição

Uma proposição P (p, q, r,...) implica logicamente uma proposição Q (p, q, r,...) se Q (p, q, r,...) é verdadeira todas as vezes que P (p, q, r,...) for verdadeira.

Verifica-se facilmente a implicação observando-se a última coluna nas linhas da tabela-verdade da proposição P, quando elas apresentarem valor verdadeiro. Se, na linha correspondente da tabela-verdade de Q, obtém-se também o valor verdadeiro, conclui-se que "P implica Q".

A notação de que a proposição P (p, q, r,...) implica a proposição Q (p, q, r,...) por:

$P(p, q, r,...) \Rightarrow Q(p, q, r,...)$

3.1.2 Propriedades da implicação lógica

A implicação lógica tem as propriedades reflexiva e transitiva:

Reflexiva: $P(p, q, r,...) \Rightarrow P(p, q, r,...)$

Transitiva: Se $P(p, q, r,...) \Rightarrow Q(p, q, r,...)$ e

$Q(p, q, r,...) \Rightarrow R(p, q, r,...)$, então

$P(p, q, r,...) \Rightarrow R(p, q, r,...)$

Exemplos:

1. A tabela-verdade da proposição $(p \vee q) \wedge \sim p$:

Tabela 30

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Essa proposição é verdadeira somente na linha 3 e, nessa mesma linha, a proposição "q" também é verdadeira.

Logo, tem-se uma implicação lógica:

$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

2. A tabela-verdade das proposições: $p \wedge q$, $p \vee q$ $p \leftrightarrow q$ é:

Tabela 31

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira somente na linha 1 e, nessa linha, as proposições $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ também são verdadeiras. Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições.

Em símbolos:

$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ e $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

3. A tabela-verdade da proposição $(p \rightarrow q) \wedge p$ é:

Tabela 32

t	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Essa proposição é verdadeira somente na linha 1 e, nesta linha, a proposição q também é verdadeira.

Em símbolos:

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

4. A tabela-verdade das proposições $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e $\sim p$ são:

Tabela 33

p	q	p→ q	~q	(p → q) ∧ ~ q)	~p
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

A proposição $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ é verdadeira somente na linha 4, e nesta linha, a proposição $\sim p$ também é verdadeira.

Em símbolos:

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

3.1.3 Tautologias e implicação lógica

A proposição P (p, q, r,...) implica a proposição Q (p, q, r,...), isto é: $P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow$
$\Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$

Se e somente se a condicional:

$P(p, q, r, \ldots) \rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$ é tautológica

Portanto, a toda implicação lógica corresponde uma condicional tautológica e vice-versa (ALENCAR FILHO, 2002).

Daí, se $P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$, então, também se tem:

$P(P_0, Q_0, R_0, \ldots) \Rightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$

Quaisquer que sejam a proposições $P_0, Q_0, R_0, \ldots$

Observação

Observação: os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são distintos, pois o primeiro é de operação lógica (aplicado, por exemplo, às proposições p e q, dá a nova proposição $p \rightarrow q$), enquanto o segundo é de relação, estabelece que a condicional P (p, q, r,...) $\rightarrow$ Q (p, q, r,...) é tautológica (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

1. A condicional $p \wedge \sim p \rightarrow q$ é tautológica, pois a última coluna da sua tabela-verdade apresenta somente valores verdadeiros.

Tabela 34

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2. A proposição $(p \leftrightarrow q) \wedge p$ implica a proposição q, pois a condicional $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é tautológica, conforme se vê pela tabela-verdade:

Tabela 35

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

3.2 Equivalência lógica

3.2.1 Definição

Diz-se que duas ou mais proposições são logicamente equivalentes quando suas proposições possuem a mesma tabela-verdade. De maneira mais formal, tem-se:

> Uma proposição P (p, q, r,...) é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição Q (p, q, r,...) se as tabelas-verdade dessas duas proposições são idênticas (ALENCAR FILHO, 2002).

A notação para uma proposição P (p, q, r,...) ser equivalente a uma proposição Q (p, q, r,...) é dada por:

P (p, q, r,...) ⇔ Q (p, q, r,...)

3.2.2 Propriedades da equivalência lógica

A equivalência lógica tem as seguintes propriedades: é reflexiva, simétrica e transitiva.

Em símbolos:

Reflexiva: P (p, q, r,...) ⇔ P (p, q, r,...)

Simétrica: Se P (p, q, r,...) ⇔ Q (p, q, r,...)

Q (p, q, r,...) ⇔P(p, q, r,...)

Transitiva: Se P (p, q, r,...) ⇔ Q (p, q, r,...)

Q (p, q, r) ⇔ R (p, q, r,...)

P (p, q, r) ⇔ R (p, q, r,...)

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

1. As proposições ~~p e p são equivalentes, isto é, ~~p ⇔ p (regra da dupla negação). É o que demonstra a tabela-verdade:

Tabela 36

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

Notam-se as colunas destacadas, logo, a dupla negação equivale à afirmação.

2. As proposições ~p → p e p são equivalentes, isto é, ~p → p ⇔ p é o que demonstra a tabela:

Tabela 37

p	~ p	~p → p
V	F	V
F	V	F

3. A condicional $p \to q$ e a disjunção $\sim p \vee q$ têm tabelas-verdade idênticas:

Tabela 38

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Por consequência, as duas proposições são equivalentes: $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

4. As condicionais $p \to p \wedge q$ e $p \to q$ são equivalentes, isto é $p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$. É o que demonstra a tabela.

Tabela 39

p	q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$	$p \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

5. A bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a conjunção $(p \to q) \wedge (q \to p)$ têm tabelas-verdade idênticas:

Tabela 40

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Por consequência, as duas proposições são equivalentes:

$P \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

3.2.3 Tautologias e equivalência lógica

A proposição P (p, q, r,...) é equivalente à proposição Q (p, q, r,...), isto é:

$P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$

Se e somente se a bicondicional:

$P(p, q, r, ...) \leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica (ALENCAR FILHO, 2002).

Logo, toda a equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica e vice-versa.

Se P (p, q, r,...) $\Leftrightarrow$ Q (p, q, r,...), então também se tem:

P (P_0, Q_0, R_0,...) $\Leftrightarrow$ Q (P_0, Q_0, R_0,...)

Quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0,...

Observação

Os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos, pois o primeiro é de operação lógica (aplicado, por exemplo, às proposições p e q, dá a nova proposição p $\leftrightarrow$ q), enquanto o segundo é de relação (estabelece que a bicondicional P (p, q, r,...) $\leftrightarrow$ Q (p, q, r,...) é tautológica (ALENCAR FILHO, 2002).

3.2.4 Proposições associadas a uma condicional

Dada a condicional p $\rightarrow$ q, chamam-se proposições associadas a p $\rightarrow$ q as três seguintes proposições condicionais que contêm p e q:

a) Proposição recíproca de p $\rightarrow$ q: q $\rightarrow$ p

b) Proposição contrária de p $\rightarrow$ q: ~p $\rightarrow$ ~q

c) Proposição contrapositiva de p $\rightarrow$ q: ~q $\rightarrow$ ~ p

As tabelas-verdade dessas quatro proposições são:

Tabela 41

p	q	p → q	q → p	~p → ~q	~ q → ~p
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

E demonstram duas importantes propriedades:

A condicional p $\rightarrow$ q e a sua contrapositiva ~q $\rightarrow$ ~p são equivalentes, ou seja:

p $\rightarrow$ q $\Leftrightarrow$ ~p $\rightarrow$ ~q

A recíproca q $\rightarrow$ p e a contrária ~p $\rightarrow$ ~q da condicional p $\rightarrow$ q são equivalentes, ou seja:

$q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$

As mesmas tabelas-verdade também demonstram que a condicional $p \rightarrow q$ e a sua recíproca $q \rightarrow p$ ou a sua contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ não são equivalentes.

A contrária de $p \rightarrow q$ também é denominada a inversa de $p \rightarrow q$, e a contrapositiva de $p \rightarrow q$ é a contrária da recíproca de $p \rightarrow q$, por isso também é denominada contrarrecíproca de $p \rightarrow q$. Também se diz que $p \rightarrow q$ é a direta em relação às associadas (ALENCAR FILHO, 2002).

Exemplos adaptados de Alencar Filho (2002):

1. Seja a condicional relativa a um quadrilátero Q:

$p \rightarrow q$: se Q é quadrado, então Q é retângulo

A recíproca dessa proposição é:

$q \rightarrow p$: se Q é retângulo, então é quadrado.

Aqui, a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas a sua recíproca $q \rightarrow p$ é falsa.

2 A contrapositiva da condicional:

$p \rightarrow q$: Se João é professor, então é miserável.

$\sim q \rightarrow \sim p$: Se João não é miserável, então não é professor.

3. Encontre a positiva da condicional "Se x é maior que zero, então x não é negativo".

O primeiro passo é inferir as proposições básicas e a elas atribuir uma letra das variáveis proposicionais. Logo, representando por p a proposição "x é maior que zero" e por q a proposição "x é negativo", note que em q não foi usada a negação. A condicional na forma simbólica fica:

$p \rightarrow \sim q$

Daí que a sua contrapositiva é:

$\sim\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$

Isso é, em linguagem corrente: "Se x é negativo, então x não é maior que zero".

4. Seja demonstrada a proposição condicional:

$p \rightarrow q$: se x^2 é ímpar, então x é ímpar.

A contrapositiva dessa condicional é:

$\sim q \rightarrow \sim p$: se x é par, então x^2 é par.

3.3 Negação conjunta de duas proposições

A conjunção de duas proposições p e q negadas é a proposição "não p e não q". Esse tipo de negação é denominado de negação conjunta (ALENCAR FILHO, 2002).

Em símbolos:

$\sim p \wedge \sim q$

A negação conjunta de duas proposições p e q também se indica pela notação $p \downarrow q$, em que é apresentada uma seta para baixo. Note que o sentido da seta é contrário ao vértice do símbolo de conjunção, ou seja, seta para baixo, o vértice para cima.

Em símbolos:

$p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Como a proposição "$\sim p \wedge \sim q$" é verdadeira somente no caso em que p e q são ambas falsas, então a tabela-verdade de "$p \downarrow q$" é a seguinte:

Tabela 42

P	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3.4 Negação disjunta de duas proposições

A negação disjunta de duas proposições p e q é a proposição "não p ou não q", isto é, simbolicamente "$\sim p \vee \sim q$" (ALENCAR FILHO, 2002).

A negação disjunta de duas proposições p e q também se indica pela notação "$p \uparrow q$". Note que o sentido da seta é contrário ao vértice do símbolo de disjunção, ou seja, seta para cima, o vértice para baixo.

Em símbolos:

$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Como a proposição "$\sim p \vee \sim q$" é falsa somente no caso em que p e q são ambas verdadeiras, então a tabela-verdade de "$p \uparrow q$" é a seguinte :

Tabela 43

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Os símbolos "$\downarrow$" e "$\uparrow$" são conhecidos como conectivos de Scheffer.

4 PROPRIEDADES DAS PROPOSIÇÕES E FUNDAMENTOS DA DEDUÇÃO

4.1 Propriedades das principais proposições

A seguir, serão apresentas as propriedades relacionadas às proposições. A demonstração destas será realizada por meio das tabelas-verdade.

4.1.1 Propriedades da conjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples, cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso (ALENCAR FILHO, 2002).

1. Idempotente: $p \wedge p \Leftrightarrow p$.

Para demonstrar a equivalência dessas duas proposições, verifica-se que as tabelas-verdade das proposições $p \wedge p$ e p são idênticas, ou seja, a bicondicional $p \wedge p \leftrightarrow p$ é **tautológica**:

Tabela 44

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

2. Identidade: $p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$.

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge t$ e p, $p \wedge c$ e c são idênticas respectivamente, ou seja, as bicondicionais $p \wedge t \leftrightarrow p$ e $p \wedge c \leftrightarrow c$ são tautológicas:

Tabela 45

p	t	c	$p \wedge t$	$p \wedge c$	$p \wedge t \leftrightarrow p$	$p \wedge c \leftrightarrow c$
V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V

3. Associativa: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.

Tabela 46

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ é tautológica.

4. Comutativa: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$.

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e $q \wedge q$ são idênticas, ou seja, a bicondicional $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ é tautológica:

Tabela 47

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

4.1.2 Propriedades da disjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples, cujos valores lógicos respectivos são V (verdadeiro) e F (falso) (ALENCAR FILHO, 2002).

1. Idempotente: $p \vee p \Leftrightarrow p$.

As tabelas-verdade das proposições $p \vee p$ e p são idênticas, ou seja, a bicondicional $p \vee p \leftrightarrow p$ é tautológica.

Tabela 48

p	p ∨ p	p ∨ p ↔ p
V	V	V
F	F	V

3. Identidade: p ∨ t ⇔ t e p ∨ c ⇔ p.

As tabelas-verdade das proposições p ∨ t e t, p ∨ c e c são idênticas respectivamente, ou seja, as bicondicionais p ∨ t ↔ t e p ∨ c ↔ p são tautológicas:

Tabela 49

p	t	c	p ∨ t	p ∨ c	p ∨ t ↔ t	p ∨ c ↔ p
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

3. Associativa: (p ∨ q) ∨ r ⇔ p ∨ (q ∨ r).

As tabelas-verdade das proposições (p ∨ q) ∨ r e p ∨ (q ∨ r) são idênticas. Logo, a bicondicional (p ∨ q) ∨ ↔ p ∨ (q ∨ r) é tautológica.

Tabela 50

p	q	r	p ∨ q	(p ∨ q) ∨ r	q ∨ r	p ∨ (q ∨ r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

4. Comutativa: p ∨ q ⇔ q ∨ p.

As tabelas-verdade das proposições p ∨ q e q ∨ p são idênticas, ou seja, a bicondicional p ∨ q ↔ q ∨ p é tautológica:

Tabela 51

p	q	p ∨ q	q ∨ q	p ∨ q ↔ q ∨ p
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

4.1.3 Propriedades da conjunção e da disjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer.

1. Distributivas:

a. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

b. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são idênticas:

Tabela 52

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Logo, a bicondicional $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é tautológica.

Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

Tabela 53

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Logo, a bicondicional $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é tautológica.

2. Absorção:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ e $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p são respectivamente idênticas, ou seja, a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ é tautológica:

Tabela 54

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p, ou seja, a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ é tautológica:

Tabela 55

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

3. Regras de De Morgan:

Essas propriedades são muito utilizadas nos mais diversos ramos da computação, logo, são muito importantes.

a. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$;

b. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

As tabelas-verdade das proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são idênticas:

Tabela 56

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Logo, a bicondicional $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é tautológica.

Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$:

Tabela 57

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V

Logo, a bicondicional $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ é tautológica.

As regras de De Morgan mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação:

$p \vee q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$;

$p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$.

4.1.4 Negação da condicional

Como $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, negando-se a condicional, tem-se:

$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

O pode ser verificado pela tabela-verdade das proposições $\sim(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \sim q$, que são idênticas:

Tabela 58

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

4.1.5 Negação da bicondicional

Sabendo-se que $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ e $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$, que foram examinados nos tópicos anteriores, e aplicando-se a negação da condicional, obtém-se de forma análoga a negação da condicional:

$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$

$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \wedge \sim p)$

Portanto:

$\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ não possui a propriedade idempotente, pois é imediato que não são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow p$ e p, mas possui as propriedades comutativa e associativa (ALENCAR FILHO, 2002).

4.2 Método dedutivo

As implicações e equivalências foram demonstradas usando-se as tabelas-verdade. Essa abordagem é perfeitamente válida, porém, quando as sentenças lógicas tornam-se mais complexas, seu uso torna-se inviável. Neste tópico, as demonstrações das implicações e equivalências serão realizadas por um método mais eficiente, denominado método dedutivo. Nele, usar-se-á com frequência as propriedades das proposições estudas anteriormente (ALENCAR FILHO, 2002).

Para auxílio nas demonstrações, serão realizadas as seguintes suposições: serão dadas as proposições simples p, q, r, a proposição t sempre é verdadeira e a proposição c é sempre falsa. Elas serão substituídas, respectivamente, por proposições compostas P, Q, R, T (tautologia) e C (contradição) quando for o caso.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2002):

1. Demonstrar as implicações:

a. $c \Rightarrow p$

b. $p \Rightarrow t$

onde p é uma proposição qualquer, c e t são proposições cujos valores lógicos respectivos são F e V.

Demonstração:

Sabe-se, do exposto no tópico sobre implicações, que $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são proposições equivalentes, e que uma implicação é verdadeira se a condicional é tautológica, logo, se provamos que a condicional referente à implicação é tautológica, provamos então que a proposição é válida.

Da equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ e do fato que $V(c) = F$ e $V(t)=V$, seguem-se:

a. $c \rightarrow p \Leftrightarrow \sim c \vee p \Leftrightarrow t \vee p \Leftrightarrow t$;

b. $p \rightarrow t \Leftrightarrow \sim p \vee t \Leftrightarrow t$.

As tabelas-verdade de $c \rightarrow p$ e $p \rightarrow t$ mostram que essas condicionais são tautológicas:

Tabela 59

p	c	t	$c \to p$	$p \to t$
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

Porém, a meta aqui é não usar o artifício da tabela-verdade para demonstrar a proposição.

2. Demonstrar a implicação: $p \wedge q \Rightarrow p$ (simplificação):

Demonstração:

Parte-se da equivalência $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, depois, usa-se a propriedade de De Morgan que afirma que a negação de uma conjunção é a disjunção das negações e, por fim, pela comutação da disjunção, prova-se a tautologia T.

$p \wedge q \to p \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee p \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow T \vee \sim q \Leftrightarrow T$

3. Demonstrar a implicação: $p \Rightarrow p \vee q$ (adição).

Demonstração:

Se a condicional for tautológica, prova-se a implicação. Para isso, usa-se a equivalência $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ aplicada à proposição que se deseja demonstrar, a partir da qual se chega a uma expressão com duas disjunções, sobre as quais se aplica a propriedade distributiva, de onde obtém-se a tautologia.

$p \to p \vee q \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee p \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T$

4. Demonstrar a implicação $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$ (*modus ponens*).

Demonstração:

$(p \to q) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow C \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q \Rightarrow q$

5. Demonstrar a implicação $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (*modus tollens*).

Demonstração:

$(p \to q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim q)$
$(\sim p \wedge \sim q) \vee C \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

6. Demonstrar a implicação $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (silogismo disjuntivo).

Demonstração:

$(p \vee q) \wedge \sim p \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow C \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow q \wedge \sim p \Rightarrow q$

7. Demonstrar a implicação $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Demonstração:

$p \wedge q \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \Leftrightarrow T \vee T \Leftrightarrow T$

8. Demonstrar a implicação $p \Rightarrow q \rightarrow p$.

Demonstração:

$p \rightarrow (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee p) \Leftrightarrow (\sim q \vee p) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow T \vee \sim q \Leftrightarrow T$

9. Demonstrar a implicação $p \Rightarrow \sim p \rightarrow q$.

Demonstração:

$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T$

10. Demonstrar a implicação: $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$.

Demonstração:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \wedge r \rightarrow q)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim)p \wedge r) \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \vee q) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q)) \vee \sim r \\
&\Leftrightarrow T \vee \sim r \Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

4.3 Redução do número de conectivos

São cinco conectivos fundamentais ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$). Ver-se-á que é possível que três deles podem ser expressos em termos de apenas dois dos seguintes pares:

1. $\sim$ e $\vee$

2. $\sim$ e $\wedge$

3. $\sim$ e $\rightarrow$

Demonstração:

1. $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ pode ser escrito em função de ~ e $\vee$:

$p \wedge q \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim\sim q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee q))$

2. $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ pode ser escrito em função de ~ e $\wedge$:

$p \vee q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee \sim\sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \wedge\sim(\sim p \wedge q)$

3. $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ pode ser escrito em função de ~e $\rightarrow$:

$p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$

$p \vee q \Leftrightarrow \sim \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p))$

4.4 Forma normal das proposições

Uma proposição está na forma normal (FN) se e somente se a proposição contém apenas os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$.

Exemplos:

As proposições a seguir estão na FN:

a. $\sim p \wedge \sim q$

b. $\sim(\sim p \vee \sim q)$

c. $(p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$

Observação: Toda proposição pode ser levada para uma FN equivalente pela eliminação dos conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, se existirem, isto é, pela substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

4.5 Princípio de dualidade

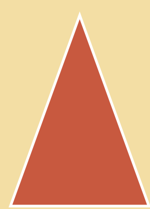
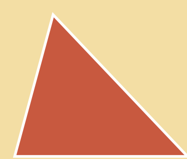
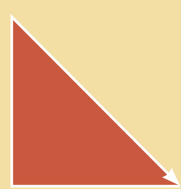
Seja P uma proposição que só contém os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$. A proposição que resulta de P trocando cada símbolo $\wedge$ por $\vee$ e cada símbolo $\vee$ por $\wedge$ chama-se dual de P. Assim, por exemplo, a dual de $\sim((p \wedge q) \vee \sim r)$ é $\sim((p \vee q) \wedge \sim r)$.

Princípio de dualidade: se P e Q são proposições equivalentes que só contêm os conectivos ~, $\wedge$ e V, então as suas duais respectivas P_1 e Q_1 também são equivalentes.

Assim, por exemplo, da equivalência $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ deduz-se, pelo princípio de dualidade, a equivalência $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

Analogamente, a partir de $(p \wedge \sim p) \vee q \Leftrightarrow q$ deduz-se, pelo princípio de dualidade: $(p \vee \sim p) \wedge q \Leftrightarrow q$ (ALENCAR FILHO, 2002).

Tabela 60

Tipos de triângulos			
Triângulo	equilátero (3 lados iguais)	isósceles (2 lados iguais)	escaleno (todos os lados diferentes)
Acutângulo ângulos internos < 90º			
Retângulo 1 ângulo = 90º			
Obtusângulo 1 ângulo > 90º			

Resumo

Nesta unidade, foram apresentados aspectos mais avançados da lógica proposicional, entre eles, o que é uma equivalência. Além disso, verificou-se o que é recíproca, contrária e contrapositiva, e a relação entre tautologia e implicação.

Finalmente, demonstrou-se o método dedutivo e verificou-se que o uso das propriedades das proposições é fundamental nesse método.

Exercícios

Questão 1. (ICMS, 1997, adaptado) Se Rodrigo mentiu, então ele é culpado. Logo:

A) Rodrigo é culpado.

B) Se Rodrigo não mentiu então ele não é culpado.

C) Rodrigo mentiu.

D Se Rodrigo não é culpado, então ele não mentiu.

E) Se Rodrigo é culpado, então ele mentiu.

Resposta correta: alternativa D.

Análise das alternativas

Se Rodrigo mentiu, então ele é culpado:

- Se p então q ou p → q.
- Onde o p é antecedente e condição suficiente para que ocorra q.
- Onde o q é consequente e condição necessária para que ocorra p.
- Dado que p → q, posso afirmar que ~p → ~q.

Analisando as alternativas, tome cuidado com a alternativa B, pois ao negar o antecedente (negando a condição suficiente) nada sei sobre o consequente (nada posso afirmar quanto à condição necessária). Já a alternativa D, é a verificação lógica, pois ao negar a condição necessária (o consequente) eu nego a condição suficiente (o antecedente).

Há a possibilidade de engano com a alternativa E, ou seja, se Rodrigo é culpado então ele mentiu. Veja que esta afirmação pode ser representada por q → p. Na tabela-verdade é possível comprovar que (Se Rodrigo mentiu, então ele é culpado: p → q) e (Se Rodrigo é culpado, então ele mentiu: q → p) não são equivalentes lógicas. Observe:

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Observe que as proposições $p \to q$ e $q \to p$ não apresentam os mesmos valores lógicos, ou seja, afirmar uma não quer dizer afirmar a outra. Sendo assim:

A) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela-verdade construída.

B) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela-verdade construída.

C) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela-verdade construída.

D) Alternativa correta.

Justificativa: Condiz com a análise inicial

E) Alternativa incorreta.

Justificativa: não condiz com a análise inicial e nem com a tabela-verdade construída.

Questão 2. (SAE-PE/2008) Leonardo disse a Fernanda: - Eu jogo futebol ou você não joga golfe. Fernanda retrucou: - isso não é verdade.

Sabendo que Fernanda falou a verdade, é correto afirmar que:

A) Leonardo joga futebol e Fernanda joga golfe.

B) Leonardo joga futebol e Fernanda não joga golfe.

C) Leonardo não joga futebol e Fernanda joga golfe.

D) Leonardo não joga futebol e Fernanda não joga golfe.

E) Leonardo não joga futebol ou Fernanda joga golfe.

Resolução desta questão na Plataforma.