Appunti Algebra e Geometria

Maicol Battistini

3 luglio 2025

Indice

Lista delle definizioni

Lista dei teoremi

Lista dei corollari

1 Unità 1 - Lezioni 1, 2

1.1 Insiemi

Definizione 1.1: Relazione di un insieme
Una relazione su un insieme A è un sottoinsieme R di $A \times A$.
Scrivo $a_1 \ R \ a_2$ se $(a_1, a_2) \in R$ e dico "a_1 è in relazione con a_2"

Definizione 1.2: Relazione di equivalenza
Una relazione R è una relazione di equivalenza se valgono le seguenti proprietà:

Riflessiva: $a \ R \ a \ \forall a \in A$

Simmetrica: $a \ R \ b \ \Rightarrow b \ R \ A$

Transitiva: $a \ R \ a, b \ R \ c \ \Rightarrow a \ R \ c$

Definizione 1.3: Congruenza

$$\mathbb{Z} = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$$

Sia $n \in \mathbb{Z}, n >= 2$

$$a \equiv b \ (n) \qquad \text{“}a \text{ è congruo a } b \text{ modulo } n\text{”}$$

se $a - b$ è multiplo di n (cioè $\exists h \mid a - b = hn$)

Esempi:

$$8 \equiv 23(5) \qquad 8 \not\equiv 17(5) \qquad 4 \equiv 10, 16, -2, -8(6) \qquad 4 \not\equiv 13(6)$$

Osservazione. Essere congrui modulo n è una relazione di equivalenza

Dimostrazione. Dimostro le tre proprietà della relazione di equivalenza:

Riflessiva:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \ a \equiv a(n) \text{ perchè } a - a = 0 = 0 \cdot n$$

Simmetrica:
se $a \equiv b(n)$, allora $b \equiv a(n)$ perchè se $a - b = hn \Rightarrow b - a = -hn$

Transitiva:
se $a \equiv b(n)$ e $b \equiv c(n)$, allora $a \equiv c(n)$ perchè se $a - b = hn$ e $b - c = kn$, allora $a - c = (a - b) + (b - c) = (h + k)n$

□

1.2 Funzioni e applicazioni

$$f : X \to Y$$

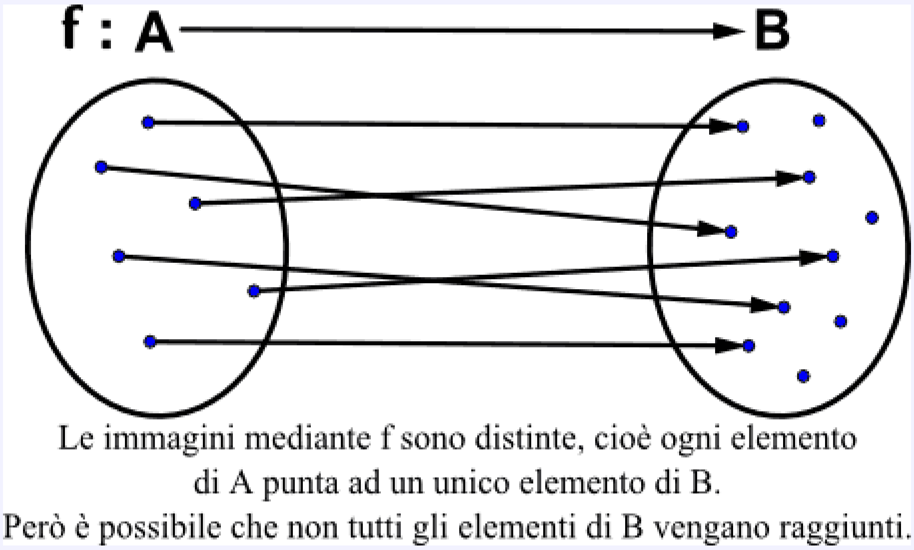
$$f(a) = b$$

f è una applicazione se ad ogni $a \in X$ corrisponde uno e un solo $b \in Y$

Definizione 1.4: Funzione iniettiva
Una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

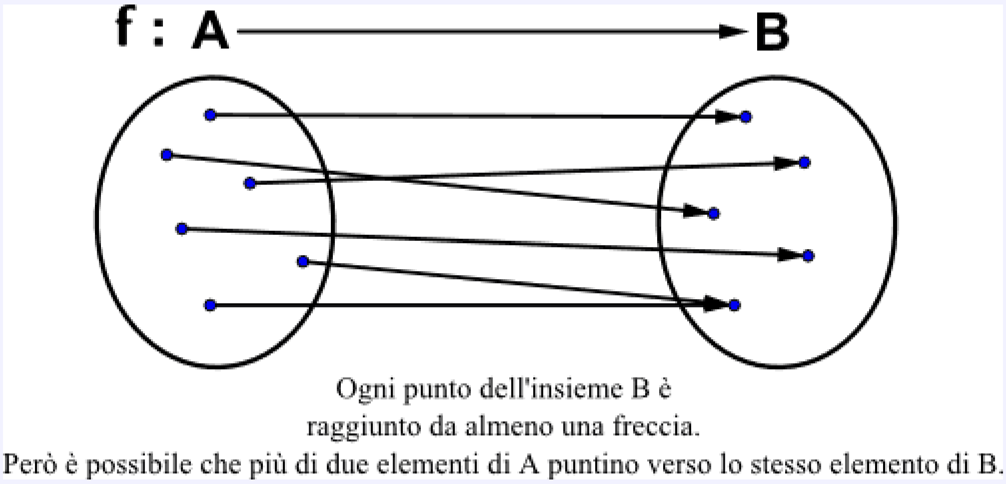
Ovvero: "due elementi distinti di X vengono mandati in elementi distinti di Y"



Definizione 1.5: Funzione suriettiva
Una funzione $f : X \to Y$ è suriettiva se:

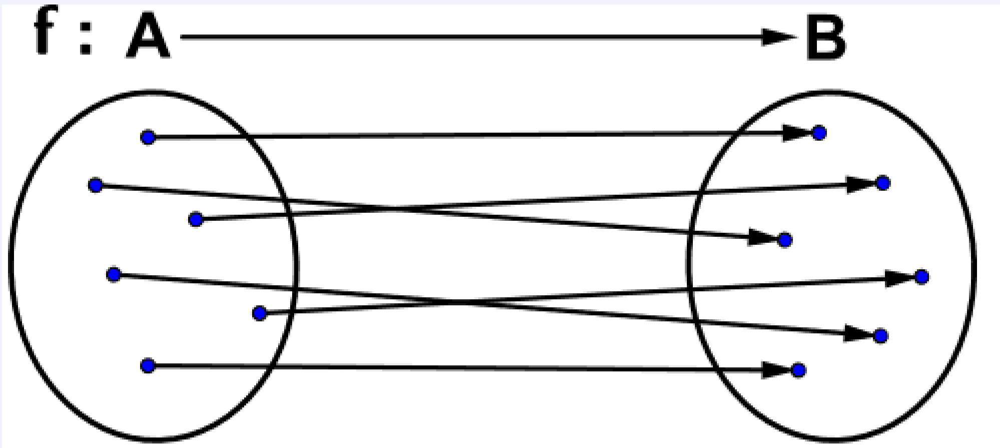
$$Y = Im\ f = \{y \in Y \mid \exists x \in X \mid f(x) = y\}$$

Ovvero: "ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X"



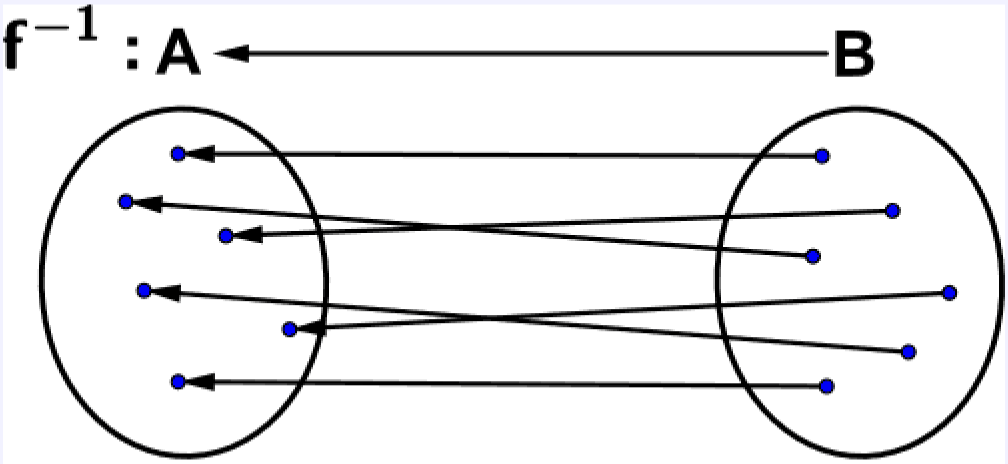
Definizione 1.6: Funzione biunivoca

Una funzione $f : X \to Y$ è biunivoca se è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste un solo $x \in X$ tale che $f(x) = y$



f è sia iniettiva (ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B) che suriettiva (ogni elemento di B è raggiunto da una freccia)

Esempio. Una funzione biunivoca è invertibile, cioè $\exists f^{-1} : Y \to X$ tale che $f^{-1} \circ f = Id_X$ e $f \circ f^{-1} = Id_Y$



Invertendo le frecce otteniamo ancora una funzione
f^{-1} è sia iniettiva che suriettiva

Esempio.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(1) = x^2$$

Iniettiva? No, perchè $f(-1) = f(1) = 1$

Suriettiva? No, perchè $Im\ f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

Biunivoca? No, perchè non è iniettiva e non è suriettiva

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$$

Nota: $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

Iniettiva? No, perchè $f(-1) = f(1) = 1$

Suriettiva? Sì, perchè $Im\ f = \mathbb{R}^+$

Biunivoca? No, perchè non è iniettiva

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Iniettiva? Sì, perchè $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Suriettiva? No, perchè $Im\ f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

Biunivoca? No, perchè non è suriettiva

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$$

Iniettiva? Sì, perchè $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Suriettiva? Sì, perchè $Im\ f = \mathbb{R}^+$

Biunivoca? Sì, perchè è iniettiva e suriettiva

Inversa: $\exists f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f^{-1}(y)$ è l'unico $x \in \mathbb{R}^+$ tale che $f(x) = y$ (cioè $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$)

1.3 Numeri complessi

Definizione 1.7: Numero complesso
Un numero complesso è un numero della forma:

$$z = a + ib$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria, cioè $i^2 = -1$.

Un numero complesso rientra nell'insieme dei numeri complessi, indicato con $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

In questo modo $x^2 + 1 = 0$ è risolto da $x = \pm i$. Ogni elemento non nullo di $\mathbb{C}$ ha l'inverso:

$$z = a + ib \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

perchè:

$$z \cdot z^{-1} = (a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Teorema 1.1: Teorema fondamentale dell'algebra
Ogni equazione polinomiale a coefficienti in $\mathbb{C}$ ha soluzioni in $\mathbb{C}$.

1.4 Campo e spazio vettoriale

Definizione 1.8: Campo
Un campo è un insieme $\mathbb{K}$ con due operazioni **somma** e **prodotto**, commutative e associative, con proprietà distributiva, elementi neutri 0 e 1, opposto di ogni elemento e inverso di ogni elemento non nullo.

- Ogni elemento di X ha un opposto $-x$.
- Ogni elemento di $X \neq 0$ ha un inverso x^{-1}.

Esempio. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ non sono campi, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono campi.

Esempio. $\mathbb{Z}_5$ è un campo? Cioè è vero che se $[a] \neq [0]$ allora $\exists [b] | [a] \cdot [b] = [1]$?

$$[2] \cdot [3] = [6] = [1] \Rightarrow [2]^{-1} = [3], [3]^{-1} = [2]$$

$$[4] \cdot [4] = [16] = [1] \Rightarrow [4]^{-1} = [4]$$

Quindi, $\mathbb{Z}_5$ è un campo.

Esempio. $\mathbb{Z}_4$ è un campo?

$$[2] \cdot [2] = [4] = [0] \Rightarrow \text{l'inverso non esiste}$$
$$[2] \cdot [0] = [0] \neq [1] \Rightarrow \text{l'inverso non esiste}$$

Quindi, $\mathbb{Z}_4$ non è un campo.

Osservazione. $\mathbb{Z}_p$ è un campo se p è un numero primo.

Definizione 1.9: Spazio vettoriale

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è un insieme V con due operazioni:

Somma $+ : \forall v_1, v_2 \in V \to v_1 + v_2 \in V$

Prodotto per uno scalare $\cdot : \forall a \in \mathbb{K}, \forall v \in V \to a \cdot v \in V$

tali che valgano le seguenti proprietà:

Somma: Associativa, Commutativa, Elemento neutro 0, Elemento opposto $-v$

Prodotto per uno scalare: Associativa, Distributiva rispetto alla somma, Elemento neutro 1

Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, gli elementi di V sono detti **vettori** e gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti **scalari**.

Definizione 1.10: Sottospazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme U di V non vuoto (cioè $0 \in U$) che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare, cioè:

$$u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$$
$$a \in \mathbb{K}, u \in U \Rightarrow a \cdot u \in U$$

Esempio. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ è un sottospazio vettoriale di V perchè dati $v_1 = (x, 2x), v_2 = (x', 2x') \in U$ e $a \in \mathbb{R}$:

Non vuoto $0 = (0, 0) \in U$

Somma $v_1 + v_2 = (x + x', 2x + 2x') = (x + x', 2(x + x')) \in U$

Prodotto $a \cdot v_1 = a \cdot (x, 2x) = (a \cdot x, a \cdot 2x) = (a \cdot x, 2a \cdot x) \in U$

1.5 Combinazione e Indipendenza lineare

Definizione 1.11: Combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Diciamo che $v \in V$ è una combinazione lineare di $v_1, v_2, ..., v_n$ se:

$$\exists a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

Esempio. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, v_1 = (2, 0), v_2 = (0, -1), v = (1, 3)$ è una combinazione lineare di v_1 e v_2 perchè:

$$\frac{1}{2} v_1 + (-3) v_2 = (1, 0) + (0, 3) = (1, 3) = v$$

Se non li vedo ad occhio, posso risolvere il sistema per cercare i coefficienti:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = (2a_1, 0) + (0, -a_2) = (2a_1, -a_2) = (1, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ -a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -3 \end{cases}$$

Esempio. $u_1 = (1,0), u_2 = (-1,0), u = (1,3)$ NON è una combinazione lineare di u_1 e u_2 perchè $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1u_1 + a_2u_2 = (2a_1, 0) + (-a_2, 0) = (2a_1 - a_2, 0) = (1,3)$ non ha soluzione:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Infatti $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1u_1 + a_2u_2 \neq u$

Definizione 1.12: Span

Uno spazio vettoriale V è detto **generato** da un insieme di vettori $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ se ogni $v \in V$ è una combinazione lineare di tali vettori. In questo caso V è detto **span** di $v_1, v_2, ..., v_n$ e si scrive:

$$V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$$

Esempio. $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, v_1 = (2,0,0,0), v_2 = (0,1,-1,0)$

$$\begin{aligned} U = \langle v_1, v_2 \rangle = \{(a_1v_1 + a_2v_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ \{(2a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, -a_2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ \{(2a_1, a_2, -a_2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \mid \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esempio. $V = \mathbb{R}[x] = \{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$
$p_1 = x, p_2 = x^2, q = 2x^2 - 7x$ è una combinazione lineare di p_1 e p_2 perchè $q = 2x^2 - 7x = 2x^2 - 7x + 0 \cdot x = 2x^2 - 7x + 0 \cdot x^2$
$h = 3x^3 - 8x, l = 2x^2 + 3$ non sono combinazioni lineari di p_1 e p_2 perchè $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1p_1 + a_2p_2 \neq h, l$.
Il sottospazio vettoriale generato da p_1 e p_2 è $\langle p_1, p_2 \rangle = \{a_1p_1 + a_2p_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, ovvero tutti i polinomi di grado ≤ 2 con termine noto nullo.

Osservazione. Un sottoinsieme non vuoto U di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow U$ contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi elementi (infatti, dati $u_1, u_2 \in U$ e $u_1 + u_2 \in U$ e $a \in \mathbb{K}$ sono combinazioni lineari particolari)

Definizione 1.13: Indipendenza lineare

Un insieme di vettori $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ è detto **linearmente indipendente** se nessuno di loro è combinazione linare degli altri o, equivalentemente, l'unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

Invece, è detto **linearmente dipendente** se esiste almeno un vettore che è combinazione lineare degli altri.

Esempio. $v_1 = (2,0), v_2 = (-1,0)$ sono linearmente dipendenti perchè $v_1 = -2v_2$ (v_1 è combinazione lineare di v_2), ovvero:

$$\exists a_1 = 1, a_2 = 2 \mid a_1v_1 + a_2v_2 = 1 \cdot (2,0) + (2) \cdot (-1,0) = (0,0)$$

Esempio. $u_1 = (2,0), u_2 = (0,-1)$ sono linearmente indipendenti perchè $a_1u_1 \neq u_2 \forall a_1 \in \mathbb{R}$, ovvero:

$$a_1u_1 + a_2u_2 = 0 \Leftrightarrow (2a_1, -a_2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2a_1 = 0 \\ -a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

1.6 Base e dimensione

Definizione 1.14: Base
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.
Un insieme di vettori $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ è detto **base** di V se sono linearmente indipendenti e generano V, cioè:

$$V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$$

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (2,1)$ generano V ma non sono linearmente indipendenti perchè $v_3 = 2v_1 + v_2$. Invece $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$ sono linearmente indipendenti e generano V $(a_1v_1 + a_2v_2 = (a_1, a_2))$, quindi sono una base di V.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, v_1 = (2,1), v_2 = (1,-3)$ sono una base di V? Verifichiamolo:

Linearmente indipendenti? $a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

$$a_1(2,1) + a_2(1,-3) = (0,0)$$
$$(2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2) = (0,0)$$
$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - 3a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Generano V? Ovvero che ogni $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ si scrive come combinazione lineare di v_1 e v_2.

$$(x,y) = a_1(2,1) + a_2(1,-3)$$
$$(x,y) = (2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2)$$
$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = x \\ a_1 - 3a_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3x-y}{7} \\ a_2 = \frac{x+y}{7} \end{cases}$$

Quindi, $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid a_1v_1 + a_2v_2 = v$.

Quindi $v_1 = (2,1), v_2 = (1,-3)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.

Esempio. *Dire se* $v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1)$ *sono una base di* $\mathbb{R}^3$

Passo 1 Verifico se sono linearmente indipendenti, ovvero se è vero che se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = (0,0,0) \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$

$$a_1(1,1,0) + a_2(0,1,1) + a_3(1,0,1) = (0,0,0)$$
$$(a_1 + a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3) = (0,0,0)$$
$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Sì perchè l'unica soluzione è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli. Quindi, v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Passo 2 Verifico se generano $\mathbb{R}^3$, ovvero se $\forall v \in \mathbb{R}^3, \exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$$(a_1 + a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3) = (x,y,z)$$
$$\begin{cases} a_1 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_2 + a_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = x - z \\ a_1 + a_2 = y \\ a_3 = z - a_2 \end{cases} \begin{cases} 2a_1 = x + y - z \\ -2a_2 = x - y + z \\ a_3 = z + \frac{x-y-z}{2} \end{cases} \begin{cases} a_1 = \frac{x+y-z}{2} \\ a_2 = \frac{x-y-z}{2} \\ a_3 = \frac{x-y+z}{2} \end{cases}$$

Quindi esiste una soluzione per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, quindi v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^3$. Di conseguenza, v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Esempio. *Dire se* $u_1 = (1,3,2), u_2 = (-1,0,1), u_3 = (2,1,-1)$ *sono una base di* $\mathbb{R}^3$

Passo 1 Verifico se sono linearmente indipendenti

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = (0,0,0)$$
$$a_1(1,3,2) + a_2(-1,0,1) + a_3(2,1,-1) = (0,0,0)$$
$$(a_1 - a_2 + 2a_3, 3a_1 + a_3, 2a_1 - a_2 - a_3) = (0,0,0)$$
$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_2 - 5a_3 = 0 \\ 3a_2 - 5a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

No perchè esiste una soluzione in cui non tutti i coefficienti sono nulli. Quindi u_1, u_2, u_3 non sono linearmente indipendenti.

Passo 2 Verifico se generano $\mathbb{R}^3$

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = (x,y,z)$$
$$(a_1 - a_2 + 2a_3, 3a_1 + a_3, 2a_1 - a_2 - a_3) = (x,y,z)$$
$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = x \\ 3a_1 + a_3 = y \\ 2a_1 + a_2 - a_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = x \\ 3a_2 - 5a_3 = y - 3x \\ 3a_2 - 5a_3 = z - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = y - 3x - z + 2x \Leftarrow x + z = y \\ \dots \end{cases}$$

Facendo combinazioni lineari di u_1, u_2, u_3 si ottengono solo vettori di $\mathbb{R}^3 \mid x+z = y$, quindi u_1, u_2, u_3 non generano $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1.15: Coordinate

$a_1, a_2, ..., a_n$ sono dette **coordinate** di v rispetto alla base $v_1, v_2, ..., v_n$.

Esempio. Trovare le coordinate di $v = (-4,-8)$ rispetto alla base $v_1 = (2,1), v_2 = (1,-3)$ di $\mathbb{R}^2$. Basta trovare gli unici $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che $a_1v_1 + a_2v_2 = v$:

$$a_1(2,1) + a_2(1,-3) = (-4,-8)$$
$$(2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2) = (-4,-8)$$
$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = -4 \\ a_1 - 3a_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

1.6.1 Completamento e estrazione di una base

Se si hanno dei vettori linearmente indipendenti che non generano V, si può "**completarli a una base**", cioè aggiungere altri vettori fino ad ottenere una base.

Esempio. $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)$ sono linearmente indipendenti ma non generano $\mathbb{R}^3$: $\langle v_1, v_2 \rangle = \{(x,y,z) \mid z = 0\}$
Aggiungendo $v_3 = (0,0,1)$ si ottiene una base di $\mathbb{R}^3$: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti perchè $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$. v_3 poteva essere qualsiasi vettore con $z \neq 0$

Se invece si hanno dei vettori che generano V si può "**estrarne una base**", cioè rimuovere dei vettori linearmente dipendenti fino ad ottenere una base.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, v_1 = (1,0), v_2 = (2,0), v_3 = (0,1), v_4 = (2,5)$ generano V ma non sono linearmente indipendenti perchè $v_4 = 2v_1 + 5v_3$ e $v_2 = 2v_1$. Scartando v_2 e v_4 si ottiene una base di $\mathbb{R}^2$: $\langle v_1, v_3 \rangle = \mathbb{R}^2$. Un'altra estrazione possibile sarebbe stata $\langle v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^2$.

2 Unità 2 - Lezioni 3, 4

2.1 Approfondimenti sulle basi

Teorema 2.1: Teorema delle coordinate

Un insieme di vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ è una base di uno spazio vettoriale $V \Leftrightarrow$ ogni vettore $v \in V$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare di $v_1, v_2, ..., v_n$, ovvero:

$$\forall v \in V, \exists! a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

Nota: Il simbolo $\exists!$ vuol dire "esiste ed è unico".

Dimostrazione. Dimostrazione del teorema delle coordinate per i due versi:

$\Rightarrow$ Siano $v_1, v_2, ..., v_n$ una base di V,cioè generano V e sono linearmente indipendenti.
Quindi, $\forall v \in V, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$.
Per dimostrare l'unicità, supponiamo che esistano $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{K} \mid v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n$.
Sottraendo, $0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + ... + (a_n - b_n)v_n$.
Poichè $v_1, v_2, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = ... = a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$. Per cui, $a_1, a_2, ..., a_n$ sono uniche.

$\Leftarrow$ Per ipotesi $\forall v \in V, \exists! a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$.
Dunque $v_1, v_2, ..., v_n$ generano V e, poichè $0 \in V$, gli unici coefficienti possibili sono $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.
Per cui, $v_1, v_2, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti. e quindi sono una base di V.

$\square$

Teorema 2.2: Teorema della dimensione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi, detto **dimensione** di V e indicato con $\dim V$.

Teorema 2.3: Teorema di completamento ed estrazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = d$.
Allora:

1. Qualunque insieme linearmente indipendente di V è composto da $k \leq d$ vettori. Posso completare l'insieme a una base di V aggiungendo $d - k$ vettori.
2. Qualunque insieme che genera V è composto da h vettori con $h \geq d$. Posso estrarre una base di V selezionando d vettori.

Corollario 2.1

Se V ha $\dim n$, un insieme $v_1, v_2, ..., v_n$ è linearmente indipendente se e solo se genera V.

Esempio. *Determinare la dimensione di* $\mathbb{R}^3$
Una base di $\mathbb{R}^3$ è formata da tre vettori linearmente indipendenti che generano $\mathbb{R}^3$.
Ad esempio, $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e quindi $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Definizione 2.1: Base canonica

Una base è detta **canonica** se è formata dai vettori della base standard, cioè:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^n \to \text{Base canonica}\\
&\mathbb{R}^1 \to (1)\\
&\mathbb{R}^2 \to (1,0),(0,1)\\
&\mathbb{R}^3 \to (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\\
&\mathbb{R}^4 \to (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\\
&\mathbb{R}^n \to (1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)
\end{aligned}$$

Esempio. *Determinare una base canonica di* $\mathbb{R}^3$
Una base canonica di $\mathbb{R}^3$ è formata dai vettori $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Dato però il vettore $(3/2,7,4)$, determinare le sue coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(3/2,7,4) &= a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)\\
(3/2,7,4) &= (a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)\\
(3/2,7,4) &= (a_1,a_2,a_3)\\
&\begin{cases} a_1 = 3/2\\ a_2 = 7\\ a_3 = 4\end{cases}
\end{aligned}$$

Osservazione. Uno spazio vettoriale ha tante basi diversi. Le coordinate di un vettore rispetto a una base dipendono dalla base scelta.

Definizione 2.2: Forma cartesiana e parametrica

Sia U un sottospazio di dimensione $\dim U = k$ in uno spazio V di dimensione $\dim V = n$ con $(k \leq n)$.
In forma parametrica U esprime tutti i suoi vettori in funzione di k parametri.
In forma cartesiana U esprime tutti i suoi vettori in funzione di $n-k$ equazioni cartesiane.

Esempio. Dati $V = \mathbb{R}^5, v_1 = (1,2,0,0,1), v_2 = (0,0,1,0,-1)$ posso scrivere il sottospazio generato da v_1 e v_2 in forma cartesiana e parametrica.

$$\begin{aligned}
\textbf{Forma cartesiana} \quad & U = \langle v_1, v_2\rangle = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 = 2x_1, x4 = 0, x_5 = x_1 - x_2\}\\
\textbf{Forma parametrica} \quad & U = \langle v_1, v_2\rangle = \{tv_1 + sv_2 \mid t,s \in \mathbb{R}\} = \{(t,2t,s,0,t-s) \mid t,s \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

In questo caso $\dim U = 2$ perchè v_1, v_2 sono linearmente indipendenti e generano U. Nella forma parametrica, t e s sono detti **parametri** mentre in quella cartesiana è individuata da 3 (5 - 2) equazioni cartesiane.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned}
U &= \langle (1,1,0),(0,0,1)\rangle = \{t(1,1,0)+s(0,0,1) \mid t,s \in \mathbb{R}\} = \{(t,t,s) \mid t,s \in \mathbb{R}\}\\
W &= \langle (1,0,0),(0,1,-1)\rangle = \{a(1,0,0)+b(0,1,-1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a,b,-b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Calcolare $U \cap W$.
Per calcolare l'intersezione tra due sottospazi vettoriali, trasformo i vettori in forma cartesiana:

$$\begin{aligned}
U &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}\\
W &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z\}
\end{aligned}$$

A questo punto, calcolo l'intersezione tra le due equazioni:

$$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, y = -z\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$$

In forma parametrica:

$$U \cap W = \{t(1,1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Le dimensioni di U e W sono rispettivamente 2 e 2, quindi $\dim(U \cap W) = 1$.

Proposizione. Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V. In altri termini, "l'intersezione di due sottospazi è un sottospazio".

Dimostrazione. Siano $u_1, u_2 \in U \cap W, u_1, u_2 \in U, u_1, u_2 \in W$.
Dato che U e W sono sottospazi vettoriali $u_1 + u_2 \in U$ e $u_1 + u_2 \in W$ (perchè U e W sono chiusi rispetto alla somma). Quindi, $u_1 + u_2 \in U \cap W$.
Allo stesso modo si dimostra che $\forall a \in \mathbb{K}, u \in U \cap W \Rightarrow a \cdot u \in U \cap W$. □

Osservazione. In generale, l'unione di due sottospazi vettoriali ($U \cup W$) non è un sottospazio vettoriale.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$
L'unione è $U \cup W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \lor y = 0\}$
Se prendiamo un vettore di ogni sottospazio possiamo facilmente dimostrare che $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale.

$$u = (0, 1) \in U, w = (1, 0) \in W \Rightarrow u + w = (0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin U \cup W$$

Definizione 2.3: Somma di sottospazi
Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. La somma di U e W è il sottospazio vettoriale $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.

Proposizione. $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Se $u_1, u_2 \in U + W \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in W, u_1, u_2 \in U \mid v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2$.

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

Si nota che $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$.
Allo stesso modo si dimostra che $\forall a \in \mathbb{K}, v \in U + W \Rightarrow a \cdot v \in U + W$. □

Esempio. Dati $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\}, W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0, x_4 = 0\}$
Calcolare $U + W$.

Passo 1 Scrivere U e W in forma parametrica

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} & \dim U = 2 \\ W &= \{(0, t, s, 0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} & \dim W = 2 \end{aligned}$$

Passo 2 Calcolare $U + W$

$$\begin{aligned} U + W &= \{u + w \mid u \in U, w \in W\} = \{(a, b, 0, 0) + (0, t, s, 0) \mid a, b, t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, b + t, s, 0) \mid a, b, t, s \in \mathbb{R}\} & \dim U + W = 3 \end{aligned}$$

In forma cartesiana, $U + W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0 \lor x_4 = 0\}$.

Teorema 2.4: Formula di Grassman
Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Dimostrazione. Otteniamo progressivamente le basi di $U \cap W$, U e W e le loro dimensioni.

U ∩ W Sia $v_1, ..., v_l$ una base di $U \cap W$ e quindi $\dim(U \cap W) = l$.

U Completiamo la base di $U \cap W$ a una base di U: $v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_m$. Quindi $\dim U = l + m$.

W Completiamo la base di $U \cap W$ a una base di W: $v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n$. Quindi $\dim W = l + n$.

U + W Unendo le basi di U e W si ottiene la base di $U + W$:$v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ Quindi $\dim(U + W) = l + m + n$.

□

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_4 = 0\}, W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_2, x_4 = 0\}$

$$U \cap W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = -x_2 = 0, x_4 = 0\} = \{(0, 0, x_3, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Una possibile base di $U \cap W$ è $(0, 0, 1, 0)$, quindi $\dim(U \cap W) = 1$.
Una possibile base di U è $(1, 1, x_3, 0), (0, 0, 0, 1)$, quindi $\dim U = 2$.
Una possibile base di W è $(1, -1, x_3, 0), (0, 0, 0, 1)$, quindi $\dim W = 2$.
Per la formula di Grassman, $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$. In effetti, una base di $U + W$ è data da v_1, u_1, w_1, cioè $U + W = \{tu + su, rw, t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, t, 0), (s, s, 0, 0), (r, -r, 0, 0) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(s + r, s - r, t, 0) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$.

Definizione 2.4: Somma diretta
La somma di due sottospazi $U + W$ è detta **diretta** se $U \cap W = \{0\}$. In tal caso, si scrive $U \oplus W$.

Proposizione. U, W formano una somma diretta $\Leftrightarrow$ ogni vettore $v \in U \oplus W$ può essere scritto in modo unico come somma di un vettore $u \in U$ e un vettore $w \in W$ $\Leftrightarrow$ l'unione di una base di U e una base di W è una base di $U \oplus W$.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le implicazioni:

$\Leftrightarrow$ Se $V = U \oplus W$ allora $V = U + W$, quindi $\forall v \in V \exists u \in U, w \in W \mid v = u + w$.
Supponiamo che $\exists u' \in U, w' \in W \mid v = u' + w' = u + w \Rightarrow u - u' = w - w'$ in cui $u - u' \in U$ e $w - w' \in W$.
Tuttavia, dato che $U \cap W = \{0\}$, allora $u - u' = w - w' = 0 \Rightarrow u = u', w = w'$. Viceversa se ogni v si scrive in modo unico, la somma deve essere diretta per lo stesso ragionamento.

$\Leftrightarrow$ Se $u_1, ..., u_n$ è una base di U e $w_1, ..., w_m$ è una base di W, allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$. Quindi: $v = (a_1 u_1 + ... + a_n u_n) + (b_1 w_1 + ... + b_m w_m)$, perciò $u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m$ è una base di V. Similarmente il viceversa.

□

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$
$U \cap W = \{0\}$. D'altra parte, ogni $(x, y) \in V$ si scrive in modo unico come $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$.
Quindi $V = U + W = U \oplus W$.
Una base di U è $(1, 0)$, una base di W è $(0, 1)$, quindi una base di V è $(1, 0), (0, 1)$.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, y, z) \mid z = 0\}, W = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$
$U \cap W = \{(x, y, z) \mid z = 0, x = 0\} \neq \{(0, 0, 0)\}$.
Quindi $V = U + W$ ma $V \neq U \oplus W$.
Infatti, ogni vettore di V si scrive come somma di un vettore di U e un vettore di W, ma non in modo unico.
Ad esempio, $(2, 7, -3) = (2, 7, 0) + (0, 0, -3) = (2, 0, 0) + (0, 7, -3)$.

3 Unità 3 - Lezioni 5, 6, 7

3.1 Approfondimento sulle funzioni

Definizione 3.1: Applicazione lineare
Siano V e U due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione $f : V \to U$ è **lineare** se valgono entrambe le proprietà:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) && \forall v_1, v_2 \in V \\ f(a \cdot v) &= a \cdot f(v) && \forall a \in \mathbb{K}, \forall v \in V \end{aligned}$$

Oppure, equivalentemente, f è lineare $\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$:

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)$$

Esempio. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2z, x + y)$ è lineare?
Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

Somma:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (2(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (2z_1, x_1 + y_1) + (2z_2, x_2 + y_2) = (2z_1 + 2z_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ &= (2(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Prodotto per uno scalare:

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay, az) = (2az, ax + ay) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (2z, x + y) = (2az, ax + ay) \end{aligned}$$

Quindi f è lineare, dato che i risultati coincidono.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x, y^2)$ è lineare?
Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

Somma:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)^2) = (2(x_1 + x_2), y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (2x_1, y_1^2) + (2x_2, y_2^2) = (2(x_1 + x_2), y_1^2 + y_2^2) \end{aligned}$$

Prodotto per uno scalare:

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay) = (2ax, (ay)^2) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (2x, y^2) = (2ax, ay^2) \end{aligned}$$

Quindi f non è lineare, dato che i risultati non coincidono.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (0, x + y, 1)$ è lineare?
Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

Somma:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 1) = (0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 1) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (0, x_1 + y_1, 1) + (0, x_2 + y_2, 1) = (0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2) \end{aligned}$$

Prodotto per uno scalare:

$$f(a \cdot v) = f(ax, ay) = (0, ax + ay, 1)$$
$$a \cdot f(v) = a \cdot (0, x + y, 1) = (0, ax + ay, a)$$

Quindi f non è lineare, dato che i risultati non coincidono.

Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare. f è suriettiva $\Leftrightarrow$ Im $f = U$.

Proposizione. Im f è un sottospazio vettoriale di U.

Dimostrazione. Im $f = \{u \in U \mid \exists v \in V \mid f(v) = u\}$.
Siano $u_1, u_2 \in$ Im f, quindi $\exists v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = u_1$ e $f(v_2) = u_2$.
Allora $u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$, quindi $u_1 + u_2 \in$ Im f (un elemento di V è mandato in $u_1 + u_2$).
Allo stesso modo, $\forall a \in \mathbb{K}, u \in$ Im $f \Rightarrow \exists v \in V \mid f(v) = u \Rightarrow f(av) = a \cdot f(v) = a \cdot u \in$ Im f.
Quindi Im f è un sottospazio vettoriale di U. □

Definizione 3.2: Nucleo di un'applicazione lineare
Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare. Il **nucleo** di f è l'insieme dei vettori di V che risultano in 0 dopo l'applicazione di f:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Proposizione. $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Devo verificare che le proprietà di un sottospazio vettoriale siano rispettate, sapendo che, dato un $v \in \ker f$, per definizione $f(v) = 0$:

$\ker f$ non è vuoto perchè $0 \in \ker f$ (dato che $f(v - v) = f(v) - f(v) = 0$).

Se $v_1, v_2 \in \ker f \Rightarrow$ anche $v_1 + v_2 \in \ker f$, perchè $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0$.

Se $v \in \ker f$ e $a \in \mathbb{K} \Rightarrow f(av) = af(v) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow av \in \ker f$.

Quindi $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V. □

Proposizione. f è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi:

$\Rightarrow$ Devo dimostrare che se f è iniettiva allora $\ker f = \{0\}$.
Dalla precedente dimostrazione, $f(0) = 0$ è sempre vero, quindi $0 \in \ker f$. Se esistesse un altro $v \in V$ tale che $f(v) = 0$, contraddirrebbe la definizione di iniettività. Quindi $\ker f = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Devo dimostrare che se $\ker f = \{0\}$ allora f è iniettiva.
Quindi, supponiamo che $\ker f = \{0\}$. Vogliamo mostrare che se $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.
Dato che f è lineare e sappiamo che $f(v_1) = f(v_2)$, $f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$.
Quindi $v_1 - v_2 \in \ker f = \{0\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.
Di conseguenza, f è iniettiva per definizione.

□

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ è iniettiva?
Devo verificare se Ker $f = \{0\}$.

$$f(x, y) = (x + y, 2x + 2y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi Ker $f = \{0\}$ e f è iniettiva. Inoltre, Im $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 3.1: Teorema del rango
Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare. Allora:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$$

Dimostrazione. Sia $v_1, v_2, ..., v_k$ una base di $\ker f$ e completiamola a una base di V:
$v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n$.
Sia $u \in \ \mathrm{Im}\ f$, cioè $u \in U$ e $\exists v \in V \mid f(v) = u$.
Poichè $v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n$ sono una base di V, $\exists! a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ per il teorema delle coordinate.
Quindi $u = f(v) = f(a_1v_1 + ... + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + ... + a_nv_n) = a_1f(v_1) + ... + a_kf(v_k) + a_{k+1}f(v_{k+1}) + ... + a_nf(v_n)$.
Cioè $\forall u \in \ \mathrm{Im}\ f \exists! a_{k+1}, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_{k+1}f(v_{k+1}) + ... + a_nf(v_n)$, infatti $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = 0$ perchè $v_1, v_2, ..., v_k \in \ker f$.
Quindi $f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathrm{Im}\ f$. Perciò $\dim \ker f = k, \dim V = n, \dim\ \mathrm{Im}\ f = n - k$. □

Esempio. $V = \mathbb{R}^3 = U, f : V \to U, f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ è iniettiva o suriettiva? Qual'è la dimensione di $\ker f$? Definire anche $\mathrm{Im}\ f$.
Devo verificare se $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$.
Formalmente, $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in V \mid x = y = z\} = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Quindi, $\dim \ker f = 1 \neq 0$, quindi f non è iniettiva.
Per il teorema del rango, $\dim V = \dim \ker f + \dim\ \mathrm{Im}\ f$, quindi $\dim\ \mathrm{Im}\ f = \dim V - \dim \ker f = 3 - 1 = 2 \neq 3$, quindi f non è suriettiva.

Troviamo $\mathrm{Im}\ f$: Troviamo una base di $\ker f$: $v_1 = (1, 1, 1)$. Completiamolo ora a una base di V: $v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (0, 1, 0)$.
$f(v_1) = (0, 0, 0)$, $f(v_2) = (1, 0, -1)$, $f(v_3) = (-1, 1, 0)$.
$f(v_2), f(v_3)$ sono linearmente indipendenti e non nulli, quindi formano una base di $\mathrm{Im}\ f$.
Quindi $\mathrm{Im}\ f = \{t(1, 0, -1) + s(-1, 1, 0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t - s, s, -t) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0\}$.

Esempio. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, U = V,\ f : V \to U, f(p(x)) = p'(x) = 2ax + b$.
Trovare $\ker f$ e $\mathrm{Im}\ f$ e le loro dimensioni.
$\mathrm{Im}\ f = \{\text{polinomi di grado } \leq 1\} = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.
$\ker f = \{p(x) \in V \mid p'(x) = 0\} = \{ax^2 + bx + c \mid 2ax + b = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0\} = \{c \mid c \in \mathbb{R}\}$.
Quindi $\dim \ker f = 1$, $\dim\ \mathrm{Im}\ f = 2$.
Per il teorema del rango, $\dim V = \dim \ker f + \dim\ \mathrm{Im}\ f = 1 + 2 = 3$.

Proposizione. Conseguenze del teorema del rango, data un'applicazione lineare $f : V \to U$:

1. Se $\dim V > \dim U$, f non è iniettiva.
2. Se $\dim V < \dim U$, f non è suriettiva.
3. Se $\dim V = \dim U$, allora f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f è suriettiva.

Dimostrazione. Dimostriamo i tre punti:

1. $\dim \ker f = \dim V - \dim\ \mathrm{Im}\ f \geq \dim V - \dim U > 0 \Rightarrow \ker f \neq \{0\}$.
   Quindi f non è iniettiva.
2. $\dim\ \mathrm{Im}\ f = \dim V - \dim \ker f < \dim U \Rightarrow\ \mathrm{Im}\ f \neq U$.
   Quindi f non è suriettiva.
3. $\dim V = \dim\ \mathrm{Im}\ f + \dim \ker f = \dim U$
   Se f è iniettiva, $\dim \ker f = 0$, quindi $\dim\ \mathrm{Im}\ f = \dim U$ cioè $\mathrm{Im}\ f = U$ e f è suriettiva.
   Viceversa, se f è suriettiva, $\dim\ \mathrm{Im}\ f = \dim U$, quindi $\dim \ker f = 0$ e f è iniettiva.

□

3.2 Isomorfismi

Definizione 3.3: Isomorfismo
Un'applicazione lineare è chiamata **isomorfismo** se è biunivoca.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ è un isomorfismo?
Devo verificare se f è lineare e se è biunivoca.

Linearità Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

$$f(v_1 + v_2) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$$
$$f(v_1) + f(v_2) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$$

$$f(a \cdot v) = f(ax, ay) = (ax + ay, ax - ay) = a(x + y, x - y) = a \cdot f(v)$$
$$a \cdot f(v) = a \cdot (x + y, x - y) = (ax + ay, ax - ay) = f(ax, ay)$$

Quindi f è lineare.

Iniettività Devo verificare se Ker $f = \{0\}$.

$$f(x, y) = (x + y, x - y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi Ker $f = \{0\}$ e f è iniettiva.

Suriettività Devo verificare se Im $f = \mathbb{R}^2$.

$$\text{Im } f = \{(x + y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Quindi f è suriettiva.

Quindi f è lineare e biunivoca, quindi è un isomorfismo.

Osservazione. Una applicazione lineare $f : V \to U$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ ker $f = \{0\}$ e Im $f = V$.

Definizione 3.4: Isomorfismo di spazi vettoriali
Due spazi vettoriali V e U su un campo $\mathbb{K}$ si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $f : V \to U$ e scriviamo $V \cong U$.

Proposizione. "Essere isomorfi" è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Devo verificare che la relazione sia riflessiva, simmetrica e transitiva:

Riflessività Se V è uno spazio vettoriale, allora $f : V \to V, f(v) = v$ è un isomorfismo (V è isomorfo a se stesso).

Simmetria Se V è isomorfo a U, allora esiste un isomorfismo $f : V \to U$.
Allora $f^{-1} : U \to V$ è un isomorfismo, quindi U è isomorfo a V.

Transitività Se V è isomorfo a U e U è isomorfo a W, allora esistono due isomorfismi $f : V \to U$ e $g : U \to W$.
Allora la composizione $g \circ f : V \to W$ è un isomorfismo, quindi V è isomorfo a W.

□

Esempio. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}, U = \mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}, f : V \to U, f(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$ è un isomorfismo?
f è lineare, iniettiva e suriettiva, quindi è un isomorfismo.
Quindi V e U sono isomorfi, quindi $V \cong U$.

Proposizione.
1. La composizione di applicazioni lineari è un'applicazione lineare.
2. La composizione di isomorfismi è un isomorfismo.
3. L'applicazione inversa di un isomorfismo è un isomorfismo.

Dimostrazione. Siano $f : V \to U, g : U \to W$ due applicazioni lineari.

1. Devo verificare che la composizione $g \circ f : V \to W$ sia lineare, ovvero $\forall v_1, v_2 \in V, a \in \mathbb{K}$:
$$\begin{aligned}(g \circ f)(v_1 + v_2) &= g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + g(f(v_2)) \\ &= (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2) \\ (g \circ f)(av) &= g(f(av)) = g(af(v)) = ag(f(v)) = a(g \circ f)(v)\end{aligned}$$
Quindi $g \circ f$ è lineare.

2. Dalla definizione, la composizione di applicazioni iniettive è iniettiva e la composizione di applicazioni suriettive è suriettiva.
Infatti, se f e g sono iniettive allora $\ker f = \{0\}, \ker g = \{0\} \Rightarrow \ker(g \circ f) = \ker g \circ \ker f = \{0\}$.
Analogamente, se f e g sono suriettive allora $\text{ Im } f = V$, $\text{Im } g = U \Rightarrow \text{ Im } (g \circ f) = \text{ Im } g \circ \text{ Im } f = W$. Quindi $g \circ f$ è iniettiva e suriettiva (biunivoca), ovvero è un isomorfismo.

3. Sappiamo che se f è biunivoca, allora esiste f^{-1}. Mostriamo che se f è lineare, anche f^{-1} lo è:
Siano $u_1, u_2 \in U$, vogliamo mostrare che $f^{-1}(u_1 + u_2) = f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)$.
Poichè f è biunivoca, $\exists! v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = u_1$ e $f(v_2) = u_2$.
Allora $f^{-1}(u_1 + u_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)$.
Analogamente $\forall a \in \mathbb{K}, u \in U, \exists v \in V \mid f(v) = u, f^{-1}(au) = f^{-1}(af(v)) = f^{-1}(f(av)) = av = af^{-1}(u)$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right=50, "g \circ f"'] & U \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend right=60, "f^{-1}"'] & W \arrow[l, bend right=60, "g^{-1}"'] \arrow[ll, bend right=70, "(g \circ f)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

□

Esempio. Dire se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + y, x - y)$ è un isomorfismo e, se sì, calcolare f^{-1}.
$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$, cioè:
$$f(x, y) = (2x + y, x - y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + x = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$
Quindi $\ker f = \{0\}$ e f è iniettiva.
Dalla dimensione dell'immagine, $\dim \text{ Im } f = \dim V - \dim \ker f = 2 - 0 = 2$ (dal teorema del rango), quindi $\text{ Im } f = \mathbb{R}^2$ e f è suriettiva.
Quindi f è un isomorfismo.
Calcoliamo f^{-1}, ovvero cerchiamo l'unico $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (t, s)$:
$$\begin{aligned} f(x, y) = (2x + y, x - y) = (t, s) &\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = t \\ x - y = s \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+s}{3} \\ y = \frac{t-2s}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi $f^{-1}(t,s) = \left(\frac{t+s}{3}, \frac{t-2s}{3}\right)$.

Teorema 3.2: Teorema dell'estensione lineare
Siano V, U spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, ..., v_n$ una base di V, $u_1, u_2, ..., u_n$ vettori di U.
Allora $\exists! f : V \to U$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, ..., f(v_n) = u_n$.

Dimostrazione. Sia $v \in V$. Poichè $v_1, v_2, ..., v_n$ sono una base di V, $\exists! a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$.
Per la linearità $f(v) = f(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + ... + a_nf(v_n) = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n$.
Quindi f esiste ed è unica (associa univocamente ogni $v \in V$ a un $u \in U$). □

Esempio. $V = \mathbb{R}^2 = U, v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1), v = (3,1), u_1 = 2v_1 - v_2, u_2 = 3v_1 - 2v_2$.
Sia $f : V \to U$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$.
Calcolare $f(v)$.
Sapendo che $v = a_1v_1 + a_2v_2$, calcoliamo a_1 e a_2:

$$v = (3,1) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 3 \\ a_1 - a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi $v = 2v_1 + 1v_2$.
Calcoliamo $f(v)$:

$$f(v) = f(2v_1 + v_2) = 2f(v_1) + f(v_2) = 2u_1 + u_2 = 2(2v_1 - v_2) + (3v_1 - 2v_2) = (7v_1 - 4v_2)$$

Quindi $f(v) = 7v_1 - 4v_2 = (3,11)$.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2, e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$, dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(e_1) = (2,1), f(e_2) = (-1,3)$.
Poichè e_1, e_2 è una base di V, per il teorema dell'estensione lineare esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(e_1) = (2,1), f(e_2) = (-1,3)$. In effetti ogni vettore $v = (x,y) \in V$ si può scrivere come $v = xe_1 + ye_2$ e quindi $f(v) = xf(e_1) + yf(e_2) = x(2,1) + y(-1,3) = (2x - y, x + 3y)$.

Esempio. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v_1 = (2,-1), v_2 = (4,-2)$. Esiste un'unica applicazione lineare tale che $f(v_1) = (1,0), f(v_2) = (3,-1)$?
Osserviamo che $v_2 = 2v_1$, quindi $f(v_2) = 2f(v_1)$. Ma $f(v_2) = (3,-1) \neq 2(1,0) = (2,0)$.
Quindi non esiste un'unica applicazione lineare che soddisfi le condizioni.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v_1 = (2,-1), v_2 = (4,-2)$. Esiste un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = (1,1), f(v_2) = (2,2)$? Se sì, è unica?
Osserviamo che $v_2 = 2v_1$, quindi $f(v_2) = 2f(v_1)$: le condizioni sono soddisfatte.
Completiamo v_1 a una base di $\mathbb{R}^2$: v_1, v_2 è una base di $\mathbb{R}^2$.
Per ogni scelta di v_2 non esiste un'unica applicazione lineare che soddisfi le condizioni (per il teorema dell'estensione lineare), ma ce ne sono infinite.

Il teorema dell'estensione lineare indica che per sapere chi è f è sufficiente conoscere cosa fa sui vettori di una base di V.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, U = \mathbb{R}^2, v_1 = (3,-2)$. Esiste una e una sola applicazione lineare $f : V \to U$ tale che $f(v_1) = l1 = (1,0)$?
Osserviamo che v_1 non è una base di V, quindi non posso applicare il teorema dell'estensione lineare.
Infatti, posso completare v_1 a una base di V, ad esempio $v_1 = (3,-2), v_2 = (1,1)$.
So che $f(v_1) = (1,0)$ ma $f(v_2)$ può essere scelto arbitrariamente (ad esempio $f(v_2) = (0,1)$ o $f(v_2) = (1,1)$).
Quindi f esiste ma non è unica.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^3, v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (2,3,0)$.
Dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \to U$ tale che $f(v_1) = (1,1,0), f(v_2) = (0,0,1), f(v_3) = (5,5,7)$.

Osserviamo che $v_3 = 2v_1 + 3v_2$, quindi $f(v_3) = 2f(v_1) + 3f(v_2)$. Di conseguenza, v_1, v_2, v_3 non è una base di V.
Quindi, se f esiste ed è lineare, $(5, 5, 7) = f(v_3) = 2f(v_1) + 3f(v_2) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 2, 3)$, che non è possibile.
Quindi non esiste un'applicazione lineare f che soddisfi le condizioni.
Esiste invece un'applicazione lineare $g : V \to U$ tale che $g(v_1) = (1, 1, 0), g(v_2) = (0, 0, 1), g(v_3) = (2, 2, 3)$?
Sì, infatti $g(v_3) = 2g(v_1) + 3g(v_2) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 2, 3)$, ma non è unica.
Posso infatti completare v_1, v_2 a una base di V, ad esempio $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 1)$ e posso scegliere $g(v_4)$ arbitrariamente.

Teorema 3.3: Isomorfismi e basi
Un'applicazione lineare è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ manda basi in basi.
Cioè se $f : V \to U$ è un isomorfismo e $v_1, v_2, ..., v_n$ è una base di V, allora $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ è una base di U.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione:

- $\Rightarrow$ Sia $f : V \to U$ un isomorfismo e $v_1, v_2, ..., v_n$ sia una base di V. Si vuole dimostrare che $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ è una base di U.
  Sia $u \in U$. Poichè f è un isomorfismo, $\exists! v \in V \mid f(v) = u$.
  Poichè $v_1, v_2, ..., v_n$ è una base di V, $\exists! a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$.
  Poichè f è lineare, $u = f(v) = f(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + ... + a_nf(v_n)$.
  Quindi $\forall u \in U\ \exists! a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + ... + a_nf(v_n)$.
  Quindi $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ è una base di U.

- $\Leftarrow$ Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare, e $v_1, v_2, ..., v_n$ sia una base di V e sia $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ una base di U.
  Si vuole dimostrare che f è un isomorfismo, cioè che $\forall u \in U\ \exists! v \in V \mid f(v) = u$.
  Per il teorema delle coordinate $\exists! a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + ... + a_nf(v_n) = f(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n)$, perchè $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ è una base di U.
  Poichè f è lineare, $u = f(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n)$.
  Poichè $a_1, ..., a_n$ esistono e sono unici, $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ è unico.
  Quindi $v \in V \mid f(v) = u$, quindi f è un isomorfismo.

□

Esempio. Dati $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), u_1 = (0, 2), u_2 = (-1, 0)$, dire se:

1. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$. Se esiste, è unica?
2. f è un isomorfismo?
3. $f(v_1), f(v_2)$ è una base?

Soluzione:

1. Poichè v_1, v_2 è una base di $\mathbb{R}^2$, esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$.
2. Poichè u_1, u_2 è una base di $\mathbb{R}^2$, f è un isomorfismo.
3. Poichè $e_1 = (0, 0), e_2 = (-1, 0)$ è una base e poichè f è un isomorfismo e manda basi in basi, $f(v_1), f(v_2)$ è una base.

Esempio.
1. Esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$ dove $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), u_1 = (-1, 2), u_2 = (2, -4)$?
2. In tal caso, f è un isomorfismo?
3. Trovare Im f e Ker f.
   Soluzione:

1. Poichè v_1, v_2 è una base di $\mathbb{R}^2$, esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$.

2. Poichè u_1, u_2 non è una base di $\mathbb{R}^2$, f non è un isomorfismo. Si può verificare che $u_2 = 2u_1$, quindi non sono linearmente indipendenti (quindi non è una base).

3. Sia $v \in \mathbb{R}^2$. Poichè v_1, v_2 è una base di $\mathbb{R}^2$, $\exists! a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 \Rightarrow f(v) = a_1u_1 + a_2u_2 = a_1(-1, 2) + a_2(2, -4) = (-a_1 + 2a_2, 2a_1 - 4a_2)$.
   Quindi Im $f = \{f(v), v \in V\} = \{(-a_1 + 2a_2, 2a_1 - 4a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(-t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
   Poichè $\dim Imf = 1$, per il teorema del rango dim Ker $f = 2 - 1 = 1$, quindi Ker f è dato da una equazione cartesiana in $\mathbb{R}^2$.
   Poichè $u_2 = -2u_1$, cioè $2u_1 + u_2 = 0$ allora $f(2v_1 + v_2) = 2f(v_1) + f(v_2) = 2u_1 + u_2 = 0$, quindi $2v_1 + v_2 = (3, 1) \in$ Ker f.
   Dunque Ker $f = \langle(3, 1)\rangle = \{(3s, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$.

Corollario 3.1: Isomorfismo e dimensione
Due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con la stessa dimensione sono isomorfi tra loro.

Dimostrazione. Siano V e U due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con $\dim V = \dim U = n$. Inoltre, siano $v_1, v_2, ..., v_n$ una base di V e $u_1, u_2, ..., u_n$ una base di U.
Per il teorema dell'estensione lineare, esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \to U$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, ..., f(v_n) = u_n$.
Per il teorema dell'isomorfismo e basi f è un isomorfismo. □

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^n$ e $U = \mathbb{R}[x]_{<n} = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1} = \{$polinomi di grado ¡ n$\} \Leftrightarrow \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}\}$. Base di V: $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.
Base di U: $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2, ..., u_n = x^{n-1}$.
Esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to U$ tale che $f(e_1) = u_1, f(e_2) = u_2, ..., f(e_n) = u_n$ e tale f è un isomorfismo.

Esempio. Sia $V = M_{2,3}(\mathbb{R}) = \{$ matrici 2×3 a coefficienti $\in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$.
V è uno spazio vettoriale rispetto alla somma coefficiente per coefficiente e al prodotto per uno scalare.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2} & 11 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 33 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Qual'è la dimensione di V?
Cerchiamo una base di V. Sia $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ è una base di V perchè $\forall \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \in V \ \exists!(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \mid \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5 + fe_6$.
Quindi $\dim V = 6$ e V è isomorfo a $\mathbb{R}^6$.

4 Unità 4 - Lezioni 8, 9

4.1 Matrici

4.1.1 Operazioni tra matrici

$$M_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici 2×3 a coefficienti reali.
La somma è data da:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$

Il prodotto per uno scalare è dato da:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Che dimensione ha?

Matrici elementari

$$e_{1_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{1_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{1_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$, e_{2_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{2_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{2_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queste matrici sono linearmente indipendenti e generano $M_{2,3}(\mathbb{R})$.
Quindi $\dim M_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$ e $M_{2,3}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^6$. Infatti:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a \cdot e_{1_1} + b \cdot e_{1_2} + c \cdot e_{1_3} + d \cdot e_{2_1} + e \cdot e_{2_2} + f \cdot e_{2_3}$$

Inoltre, $M_{2,3}(\mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathbb{R}^6$.

4.1.2 Prodotto riga per colonna tra matrici

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R}), N \in M_{s,t}(\mathbb{R})$$

Per calcolare il prodotto $M \cdot N$ è necessario che il numero di colonne di M sia uguale al numero di righe di N.

Esempio.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \cdot N &= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota: $M \cdot N \in M_{r,t}(\mathbb{R})$.

In generale, il prodotto $M \cdot N$ è una matrice $r \times t$ e ha alla i-esima riga e j-esima colonna l'elemento:

$$(M \cdot N)_{ij} = \sum_{k=1}^{s} M_{ik} \cdot N_{kj}$$

4.1.3 Proprietà associativa

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R}), N \in M_{s,t}(\mathbb{R}), R \in M_{t,u}(\mathbb{R})$$
$$(MN)R = M(NR)$$

dove:

- $(MN)R \in M_{r,t}(\mathbb{R})$;

- $M(NR) \in M_{s,u}(\mathbb{R})$;

Esempio.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (MN)R = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$NR = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(NR) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4.1.4 Matrice identità

Definizione 4.1: Matrice identità

La matrice identità I_n è la matrice quadrata $n \times n$ che ha 1 sulla diagonale principale e 0 altrove. Ad esempio su $\mathbb{R}^3$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione.

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R})$$
$$MI_s = I_r M = M$$

Esempio.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MI_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$$I_2 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

4.1.5 Matrice inversa

Definizione 4.2: Matrice invertibile

Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se esiste una matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che:

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B è chiamata matrice inversa di A.

Esempio. Mostriamo che la matrice A è invertibile utilizzando la matrice B come matrice inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Quindi A è invertibile e B è la matrice inversa di A.

Osservazione. Un'applicazione lineare $f : V \to U$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ è invertibile, cioè $\exists f^{-1} : U \to V \mid f \circ f^{-1} = id_u$ e $f^{-1} \circ f = id_v$. In altre parole, se A è la matrice di f in una base $v_1, v_2, ..., v_n$ di V allora f è invertibile $\Leftrightarrow$ A è invertibile, cioè esiste una matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ (A^{-1} è la matrice di f^{-1}).

4.1.6 Matrici associate ad un'applicazione lineare

Definizione 4.3: Matrice associata ad un'applicazione lineare

Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare. Siano B una base di V e C una base di U.
La **matrice associata** ad f rispetto alle basi B e C è la matrice $M_C^B(f)$ che ha nella colonna j le coordinate dell'immagine del j-esimo vettore della base B rispetto alla base C.

Esempio. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$.
Date le basi canoniche E^3 e E^2 di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, la matrice associata ad f rispetto a queste basi è:

$$M_{E^2}^{E^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,0) = 1e_1 + 0e_2 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,1) = 1e_1 + 1e_2 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,-1) = 0e_1 - 1e_2 \end{aligned}$$

Se aggungiamo una nuova base $C = ((1,1),(1,-1))$ di $\mathbb{R}^2$, la matrice associata ad f rispetto a E^3 e C è:

$$M_C^{E^3}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) + 0(0,0) \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,1) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) + 0(0,0) \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,-1) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) + (-\frac{1}{2})(0,0) \end{aligned}$$

Per il teorema dell'estensione lineare, la matrice associata ad f rispetto alle basi B e C determina univocamente f.

Osservazione. La matrice ottenuta dipende dalle basi scelte. Se scelgo basi diverse, ottengo matrici diverse.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, f : V \to U, f(x, y, z) = (2x + y, x - 3z)$.
Consideriamo la base $v_1 = (1,-1,0), v_2 = (2,1,0), v_3 = (0,1,1)$ di V e la base $u_1 = (0,-1), u_2 = (2,0)$ di U.
Scriviamo la matrice associata ad f rispetto a queste basi.
Calcoliamo $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(1,-1,0) = (2 \cdot 1 + (-1), 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = (1,1) = -1u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ f(v_2) &= f(2,1,0) = (2 \cdot 2 + 1, 2 - 3 \cdot 0) = (5,2) = -2u_1 + \frac{5}{2}u_2 \\ f(v_3) &= f(0,1,1) = (2 \cdot 0 + 1, 0 - 3 \cdot 1) = (1,-3) = -2u_1 + \frac{1}{2}u_2 \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata ad f rispetto alle basi scelte è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrice associata e prodotto tra matrici Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare e siano B e C due basi di V e U rispettivamente.
La matrice associata ad f rispetto a B e C è la matrice $A = M_C^B(f)$. Per calcolare $f(v)$ per ogni $v \in V$ si può calcolare $A \cdot v$, in quanto le coordinate di v rispetto alla base C si ottengono tramite il prodotto tra la matrice associata e il vettore v.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, f : V \to U, f(x, y, z) = (2x + y, x - 3z)$.

$$A = M_{E_3}^{E_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $f(2, 3, 1)$.

$$f(2,3,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi $f(2, 3, 1) = (5, 2)$.

Esempio. $id : V \to V$ con $id(v) = v \ \forall v \in V$. Sia B una base di V. Chi è $M_B^B(id)$?

$$M_B^B(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Infatti:

$$\begin{aligned} id(v_1) &= v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ id(v_2) &= v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 \\ id(v_3) &= v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \end{aligned}$$

Teorema 4.1: Teorema della composizione

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & U \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Siano B una base di V, C una base di U e D una base di W.
Siano $M_C^B(f)$ e $M_D^C(g)$ le matrici associate rispettivamente ad f e g rispetto a B, C e C, D.
Allora la matrice associata alla composizione $g \circ f$ rispetto a B e D è data da:

$$M_D^B(g \circ f) = M_D^C(g) \cdot M_C^B(f)$$

Dimostrazione. $v = (x_1, ..., x_n)_B \in V$. $f(v) = ?$.
$M_C^B(f)$ ha le colonne $f(v_1), ..., f(v_n)$, quindi moltiplicandolo per v otteniamo:

$$M_C^B(f) \cdot v = M_C^B(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Quindi $f(v) = (y_1, ..., y_m)_C$.

$$M_D^C(g) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Quindi $g(f(v)) = (z_1, ..., z_r)_D$. Ora sostituiamo i due risultati:

$$M_D^C(g) \cdot M_C^B(f) \cdot v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Per la proprietà associativa del prodotto tra matrici, possiamo scrivere:

$$M_D^C(g \circ f) \cdot v = (M_D^C(g) \cdot M_C^B(f)) \cdot v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

□

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (2x-y, x+y)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(x, y) = (x-y, y+3x)$. Calcolare la matrice associata alla composizione $g \circ f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è:

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata ad g rispetto alla base canonica è:

$$M_E^E(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata alla composizione $g \circ f$ rispetto alla base canonica è:

$$M_E^E(g \circ f) = M_E^E(g) \cdot M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione. $M_C^B(f)$ è invertibile e $M_C^B(f)^{-1} = M_B^C(f^{-1})$.

4.1.7 Matrici invertibili

Proposizione. $f : U \to V$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ la matrice associata ad f rispetto a B e C ($M_C^B(f)$) è invertibile.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se f è un isomorfismo, allora esiste un'applicazione lineare $g : V \to U$ tale che $g \circ f = id_U$ e $f \circ g = id_V$.
La matrice associata ad g rispetto a C e B è $M_B^C(g) = M_C^B(f)^{-1}$.
Infatti:

$$M_B^C(g) \cdot M_C^B(f) = M_B^C(g \circ f) = M_B^B(id_U) = I_n$$

$\Leftarrow$ Se $M_C^B(f)$ è invertibile, allora esiste una matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.
Definiamo $g : V \to U$ in modo che le immagini dei vettori di C abbiano le coordinate rispetto a B date da A^{-1}, ovvero vogliamo $M_B^C(g) = A^{-1}$.
Utilizzando la composizione:

$$M_B^C(g) \cdot M_C^B(f) = M_C^C(g \circ f)$$

dove $M_C^B(f) = A \cdot A^{-1} = I_n$. Quindi $f \circ g = id$.

□

Teorema 4.2: Invertibilità

Una matrice quadrata A $n \times n$ è invertibile $\Leftrightarrow$ le sue colonne sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Poniamo $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ e $M_E^E(f) = A$. Per la proprietà precedente, A è invertibile $\Leftrightarrow$ f è un isomorfismo.
Per il teorema isomorfismi e basi, f è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ le colonne di A sono linearmente indipendenti. $\square$

Esempio. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, perchè $av_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} \neq v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ quindi v_1, v_2 sono una base. Per il teorema precedente, A è invertibile. In effetti esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,0) = (2,1)$ e $f(0,1) = (5,3)$. La sua matrice è A, perchè $f(1,0) = v_1 = 2e_1 + e_2$ e $f(0,1) = v_2 = 5e_1 + 3e_2$, ovvero $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Se $v \in \mathbb{R}^2$ allora $v = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$ e $f(v) = xf(e_1) + yf(e_2) = xv_1 + yv_2 = (2x+5y, x+3y)$. In effetti $f(x,y) = (2x+5y, x+3y)$ è invertibile.
Sia $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid u = f(v)$ cioè $u = (2x+5y, x+3y) = (a,b)$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ x + 3y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3a-5b}{1} \\ y = \frac{2b-a}{1} \end{cases} \Rightarrow (3a-5b, 2b-a)$$

Quindi $\forall u \in \mathbb{R}^2 \ \exists! v = (x,y) \mid f(v) = u$ ovvero $f^{-1}(u) = (3a-5b, -a+2b)$.
Quindi la matrice di f^{-1} è $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Esempio. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2v_1$ non sono linearmente dipendenti. Quindi per il teorema dell'Invertibilità, A non è invertibile.
In effetti l'unica applicazione tale che $f(e_1) = v_1$ e $f(e_2) = v_2$ è $f(x,y) = (-x+2y, 3x-6y)$.
Inoltre, Ker $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y\}$ quindi $\dim \ker f = 1$ e $\dim \mathrm{Im} f = 2 - 1 = 1$. Per questo f non è iniettiva, nè suriettiva e quindi non è invertibile, cioè $\nexists f^{-1} \mid f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f$. Quindi non esiste una matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$.

4.1.8 Rango di una matrice

Definizione 4.4: Rango di una matrice
Il rango di una matrice A qualunque è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

Esempio. $rK \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2, rK \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 1, rK \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, rK \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2.$

Proposizione. Una matrice A $n \times n$ è invertibile $\Leftrightarrow$ il suo rango è massimo, cioè $rK(A) = n$.

Esempio. $V = \mathbb{R}[x]_{<4}, d : V \to V, p(x) \mapsto p'(x)$ nella base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.
La matrice di d è $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rK(D) = 3$. I vettori colonna non sono linearmente indipendenti perchè $v_1 = 0$.
Quindi D non è invertibile cioè non esiste D^{-1}. Inoltre, d non è un isomorfismo.

4.1.9 Cambiamenti di base

Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare e siano B, B' due basi di V e C, C' due basi di U.
La matrice associata ad f rispetto a B e C è $M_C^B(f)$, mentre la matrice associata ad f rispetto a B' e C' è $M_{C'}^{B'}(f)$.
Se B' è una base di V e C' è una base di U, allora la matrice associata ad f rispetto a B' e C' è data da:

$$M_{C'}^{B'}(f) = M_{C'}^{C}(f) \cdot M_C^B(f) \cdot M_B^{B'}(v)$$

dove $M_B^{B'}(v)$ è la matrice del cambiamento di base da B a B'.

Esempio. Siano $b_1 = (0,1,1), b_2 = (1,1,0), b_3 = (0,0,1)$. $B = (b_1, b_2, b_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 13-1 \\ 44-5 \\ 31-6 \end{pmatrix}$.

a. Verificare che $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Basta calcolare $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$:

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f(0,1,1) = (0,1,1) = 3(0,1,1) + 1(1,1,0) + (-4)(0,0,1) \\ f(b_2) &= f(1,1,0) = (1,3,-1) = 3(0,1,1) + 1(1,1,0) + (-4)(0,0,1) \\ f(b_3) &= f(0,0,1) = (4,-5,-6) = (3)(0,1,1) + (4)(1,1,0) + (-5)(0,0,-2) \end{aligned}$$

b. Determinare $M_E^E(f)$.

$$\begin{aligned} M_E^E(f) &= M_E^B(f) \cdot M_B^B(v) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(3) + (-4)(-2) + (1)(0) \\ (-2)(-4) + (-1)(-2) + (3)(0) \\ (3)(-2) + (1)(-2) + (-6)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.1.10 Similitudine tra matrici quadrate

Definizione 4.5: Matrici simili
Due matrici A, A' $n \times n$ si dicono simili se esiste una matrice $n \times n$ invertibile H tale che:

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$$

Esempio.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$ sono simili perchè $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Data M precedente e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, M e I_2 non sono simili perchè $\forall B, B^{-1} \cdot I_2 \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_2 \neq M$.

Proposizione. Due matrici simili rappresentano uno stesso endomorfismo (un'applicazione lineare $f : V \to V$ in cui dominio e codominio coincidono) rispetto a basi diverse.

Dimostrazione. Siano A, A' due matrici simili e sia H la matrice invertibile tale che $A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $M_E^E(f) = A$.
(cioè f è l'endomorfismo che manda i vettori della base canonica nelle colonne di A).
Sia B la base data dalle colonne di H (ricordiamo che se H è invertibile, le sue colonne formano una base), cioè $H = M_E^B(f)$.

$$\begin{gathered} A' = H^{-1} \cdot A \cdot H \\ M_B^B(f) = H^{-1} \cdot M_E^E(f) \cdot H \end{gathered}$$

Quindi $M_B^B(f) = A'$. □

4.1.11 Conseguenze del teorema del rango

Corollario 4.1: Teorema del rango per le righe

$$rK(A) = rK(A^T)$$

Corollario 4.2: Rango di una matrice e immagine

$$rK(A) = \dim\ \text{Im}\ f$$

Il corollario precedente è una conseguenza del teorema del rango per le righe perchè data una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare, allora $M_E^E(f) = A$, cioè $f(e_i) = i$-esima colonna di A

Osservazione. $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, quindi $\dim \ker f = n - rK(A)$ ($n-$ il numero di equazioni indipendenti.
Possiamo anche verificarlo con la formula di Grassmann:

$$\dim V = \dim\ \text{Im}\ f + \dim \ker f \Rightarrow n = \dim rk(A) + (n - rk(A))$$

Definizione 4.6: Matrice a scala
Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è a scala se:

- Le righe nulle di A sono tutte in fondo alla matrice.
- Il primo coefficiente non nullo di ogni riga non nulla è più a destra del primo coefficiente non nullo della riga precedente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è a scala.}$$

Osservazione. Se A è una matrice a scala, il rango di A è uguale al numero di righe non nulle.

Definizione 4.7: Matrice trasposta
La matrice trasposta A^T di una matrice A è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne, cioè facendo una riflessione rispetto alla diagonale principale.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Osservazione. Per come è definito il prodotto riga per colonna tra matrici, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

5 Unità 5 - Lezioni 10, 11, 12

5.1 Metodo di Gauss

Esempio. Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Passo 1 Sommo a ciascuna equazione (dalla seconda in poi) la prima moltiplicata per un coefficiente tale che il termine x_1 nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{rr} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ \text{-2R1 + R2} & \mathbf{0x_1} + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -3 \\ \text{R1 + R3} & \mathbf{0x_1} - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -\frac{1}{2}\text{R1 + R4} & \mathbf{0x_1} + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 0x_4 = 1 \end{array}$$

Passo 2 Vado avanti di una equazione. Non tocco più la prima e neanche la seconda, ma sommo a ciascuna equazione (dalla terza in poi) la seconda moltiplicata per un coefficiente tale che il termine x_2 nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{rr} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ \text{R2} & x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -3 \\ \text{2R2 + R3} & \mathbf{0x_2} - 8x_3 - 7x_4 = -4 \\ -\frac{3}{2}\text{R2 + R4} & \mathbf{0x_2} + 8x_3 + \frac{15}{2}x_4 = 6 \end{array}$$

Passo 3 Vado avanti di una equazione. Non tocco più la prima, la seconda e neanche la terza, ma sommo a ciascuna equazione (dalla quarta in poi) la terza moltiplicata per un coefficiente tale che il termine x_3 nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{rr} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ \text{R2} & -5x_3 - 5x_4 = -3 \\ \text{R3} & -8x_3 - 7x_4 = -4 \\ \text{R3 + R4} & \mathbf{0x_3} + \frac{1}{2}x_4 = 2 \end{array}$$

Passo 4 Finite le equazioni per trovare la soluzione del sistema, risalgo dall'ultima risolvendo le equazioni e sostituendo le incognite di volta in volta:

$$\begin{array}{lr} \text{R4} & \frac{1}{2}x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 4 \\ \text{R3} & -8x_3 - 7 \cdot 4 = -4 \Rightarrow x_3 = 1 \\ \text{R2} & -5 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -3 \Rightarrow x_2 = 17 \\ \text{R1} & 2x_1 - 17 + 1 + 2 \cdot 4 = 1 \Rightarrow x_1 = -3 \end{array}$$

Ho trovato così l'unica soluzione del sistema: $x_1 = -3, x_2 = 17, x_3 = 1, x_4 = 4$.

Quando ci sono infinite soluzioni, il metodo di gauss permette di trovare una soluzione generale.

5.2 Algoritmo di Gauss-Jordan

Sia A una matrice $m \times n$ invertibile. Dalla matrice $(A|I_n)$ si può ottenere la matrice $(I_n|A^{-1})$ applicando l'algoritmo di Gauss. Allora $B = A^{-1}$.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Costruisco la matrice $(A|I_2)$ fino ad ottenere $(I_n|B)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 1 & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R1 \\ -\frac{2}{3}R1 + R2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}R_1 \frac{3}{2}R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow R_1 - \frac{5}{3}R_2 R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{3} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, che è uguale a quella ottenuta con $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{cof}(A)^T$.

5.3 Determinante di una matrice

Definizione 5.1: Determinante di una matrice
Il determinante di una matrice è una funzione $\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che $\det A \neq 0 \Leftrightarrow rk(A) = n \Leftrightarrow A$ è invertibile.

Matrici 1×1, $A = (a)$: È invertibile $\Leftrightarrow a \neq 0$, quindi $A^{-1} = (a^{-1})$ e $\underline{\det A = a}$, ovvero il suo unico elemento.

Matrici 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: Poniamo $\underline{\det A = ad - bc}$.

Matrici $n \times n$: Per $n > 1$, riduciamo il calcolo del determinante al determinante di matrici più piccoli mediante la **regola di Laplace**:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

dove $i, j \in \{1, .., n\}$ e A_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j.
Oppure possiamo utilizzare le righe:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Approfondimento sulle matrici 2×2 Verifichiamo che si ha $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile, o equivalentemente $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ non è invertibile.
$\Rightarrow$ Sia $\det A = ad - bc = 0$, vogliamo quindi mostrare che $rk(A) < 2$ cioè che le righe di A sono linearmente dipendenti.
Consideriamo la prima riga $r_1 = (a, b)$:

- se $(a, b) = (0, 0)$ allora r_1 è la riga nulla e quindi $rk(A) < 2$.
- se $(a, b) \neq (0, 0)$ allora abbiamo $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$. Nel caso in cui $a \neq 0$, si ha $d = \frac{bc}{a}$ e quindi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$. Da qui poniamo $\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \alpha \cdot a$ e $d = \frac{bc}{a} = \alpha \cdot b$. Quindi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \end{pmatrix}$ e quindi la seconda riga è un multiplo della prima, quindi $rk(A) < 2$.

$\Leftarrow$ Supponiamo che le due righe siano linearmente indipendenti, cioè che A sia invertibile, cioè che $(a, b) = \alpha \cdot (c, d)$: Allora $\det \begin{pmatrix} \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha^2 \cdot (ad - bc) = 0$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \cancel{0 \cdot \det A^{(1,2)}} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det A^{(2,2)} + \cancel{0 \cdot \det A^{(3,2)}} + \cancel{0 \cdot \det A^{(4,2)}} = \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \det 1 = 8 \end{aligned}$$

Dato che $\det A = 8 \neq 0$, A è invertibile.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo il determinante di A utilizzando la seconda colonna:

$$\begin{aligned} \det A &= -a_{12} \cdot \det A^{(1,2)} + a_{22} \cdot \det A^{(2,2)} - a_{32} \cdot \det A^{(3,2)} \\ &= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \cancel{0 \cdot \det A^{(2,2)}} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= -2(4 \cdot 2 - 5 \cdot 1) - 3(1 \cdot 5 - 3 \cdot 4) \\ &= -6 + 21 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Definizione 5.2: Proprietà della funzione determinante

Alternante Il determinante cambia segno se scambiamo due righe o due colonne, ovvero $\det A' = -\det A$ se A' è la matrice trasformata.

Multilineare Siano A, B due matrici che hanno tutte le colonne uguali tranne la colonna j. Sia C la matrice che ha le colonne diverse da j uguali a quelle di A e la colonna j di C è a volte la colonna j di A più b volte la colonna j di B.
Quindi $C_{ij} = a \cdot A_{ij} + b \cdot B_{ij}$ e $\det C = a \cdot \det A + b \cdot \det B$.
La stessa cosa vale anche per le righe.

Determinante dell'identità $\det I_n = 1$.

Determinante della trasposta $\det A = \det A^T$.

Invertibilità $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile.

Osservazione. Il determinante è l'unica funzione $f : M_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che soddisfa le prime tre proprietà.

Osservazione. Se moltiplico una riga di A per un numero k, il determinante di A viene moltiplicato per k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det B = -2 \cdot \det A$$

Osservazione. La trasformazione elementare di Gauss (cioè sommare a una riga un multiplo di un'altra) non cambia il determinante, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 - R_1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \det A$$

Per la multilinearità: $\det C = \det A - \det B = \det A$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Proposizione. Il determinante di una matrice a scala è il prodotto dei coefficienti sulla diagonale principale.

Dimostrazione.

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a \cdot \det \begin{pmatrix} b & f \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

□

Esempio. Verificare se i seguenti vettori formano una base di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (-3, 7, 2, 1), v_2 = (0, 2, 0, 0), v_3 = (0, 11, -1, 0), v_4 = (4, 9, 3, 0)$$

Soluzione utilizzando il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{è invertibile}$$

$\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ sono una base di $\mathbb{R}^4$.

Teorema 5.1: Teorema di Binet
Date A e B due matrici $n \times n$, si ha:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Osservazione. **NON** è vero che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Corollario 5.1: Determinante di una matrice inversa
Se A è invertibile, allora $\det A^{-1} = \det(A)^{-1}$.

Dimostrazione. Per il teorema di Binet, $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1$. □

Corollario 5.2: Determinante di due matrici simili
Se due matrici A e B sono simili, allora hanno lo stesso determinante: $\det A = \det B$.

Dimostrazione. Se A e A' sono simili, allora $\exists H$ invertibile tale che $A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$. Quindi $\det A' = \cancel{\det(H^{-1})} \cdot \det A \cdot \cancel{\det H} = \det A$. □

Osservazione. Se due matrici hanno determinanti diversi, allora non sono simili.

Definizione 5.3: Determinante di un'applicazione lineare
Data $f : V \to V$ un'applicazione lineare, definiamo $det(f) = \det(A)$ dove A è la matrice di f rispetto a una base di V. Per la proposizione precedente, il determinante non dipende dalla base scelta. Inoltre, se f è un isomorfismo, allora $det(f) \neq 0$.

Prodotto vettoriale

Definizione 5.4: Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ è un vettore $\in \mathbb{R}^3$ definito come il determinante della matrice formata dai tre vettori:

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \underline{e_1} & \underline{e_2} & \underline{e_3} \end{pmatrix}$$

dove l è un vettore unitario (cioè di modulo 1) che non appartiene al piano generato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Esempio. $\underline{\text{u}} = (1, 3, 0)$, $\underline{\text{v}} = (2, -5, 1)$.
Calcoliamo il prodotto vettoriale $\underline{u} \wedge \underline{v}$:

$$\begin{aligned} \underline{u} \wedge \underline{v} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ \underline{e_1} & \underline{e_2} & \underline{e_3} \end{pmatrix} &= \underline{e_1}(3 \cdot 1 - 0 \cdot (-5)) - \underline{e_2}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) + \underline{e_3}(1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2) \\ &= \underline{e_1}(3) - \underline{e_2}(1) + \underline{e_3}(-11) = (3, -1), -11) \end{aligned}$$

Osservazione. Il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$ è perprendicolare al piano individuato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente indipendenti.

Calcolo delle equazioni di un sottospazio utilizzando il determinante e il rango Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato da k vettori linearmente indipendenti $\underline{u_1}, \underline{u_2}, \ldots, \underline{u_k}$.

Caso 1: $\mathbf{k = n - 1}$ Sia $n = 4$ e $U = \{(1, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\}$.
Un vettore generico (x, y, z, t) appartiene a $V \Leftrightarrow$ è combinazione lineare dei 3 vettori della base, ovvero:

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 0$$

Facciamo lo sviluppo rispetto alla quarta riga:

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \\ &= -x \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - z \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -x + 2y - 2z + t(4 + 1) = -x + 2y - 2z + 5t = 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $\mathbf{k < n - 1}$ Sia $n = 4$ e $U = \{(1, 2, 0, 1), (3, 1, 2, 0)\}$.
$\dim U = 2 \Rightarrow$ il sottospazio V è generato da $4 - 2 = 2$ equazioni.
Un vettore generico (x, y, z, t) appartiene a $V \Leftrightarrow$ è combinazione lineare dei 2 vettori della base, ovvero:

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 2$$

Riduciamo la matrice a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - xR_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & y-2x & z & t-x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 5(y-2x) & 5z & 5(t-x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_3 + (y-2x)R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5z+2(y-2x) & 5(t-x)-3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5z+2(y-2x)=0 \\ 5(t-x)-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+2y+5z=0 \\ x-3y+5t=0 \end{cases}$$

Il determinante permette di formulare anche una regola per calcolare il **prodotto vettoriale**, cioè un'operazione $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(u,v) = u \wedge v$, molto usata in fisica. Se $u = (a_1, a_2, a_3)$ e $v = (b_1, b_2, b_3)$, allora $u \wedge v = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = e_1(a_2b_3 - a_3b_2) - e_2(a_1b_3 - a_3b_1) + e_3(a_1b_2 - a_2b_1)$.

Esempio. $(1,2,3) \wedge (-1,0,2) = (4,-5,2)$.

Il prodotto vettoriale eredita le proprietà del determinante:

- Altalenante: $u \wedge v = -v \wedge u$.
- Multilineare: $(au + bv) \wedge w = a(u \wedge w) + b(v \wedge w)$.

5.3.1 Esercizio parametrico

Esempio. Al variare del parametro t, determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t \\ 0 & 1 & 2 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = 0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & t \\ t & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ t & -1 \end{pmatrix} = -6 - t^2 - 2(-3+2t) = -6 - t^2 + 6 - 4t = -t^2 - 4t = -t(t+4)$.

- Se $t \neq 0, -4 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rK(A) = 3$. A è invertibile.
- Se $t = 0, -4, rk(A) < 3$:
  - $t = 0 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rK(A) = 2$. (I vettori colonna 1 e 2 sono linearmente indipendenti).
  - $t = -4 \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rK(A) = 2$. (I vettori colonna 1 e 2 sono linearmente indipendenti).

Esempio. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di Im e Ker dell'applicazione $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_t(x,y,z) = (3x - 2y + tz, y + 2z, tx - y - 27)$. Nella base canonica $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$, la matrice di f_t è $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t \\ 0 & 1 & 2 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Quindi, se $t \neq 0, -4 \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f_t = rk(A) = 3$ e $\dim \ker f_t = 3 - 3 = 0 \Rightarrow f_t$ è un isomorfismo. Se $t = 0, -4 \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f_t = rk(A) = 2$ e $\dim \ker f_t = 3 - 2 = 1 \Rightarrow f_t$ non è nè iniettiva nè suriettiva.

5.3.2 Geometria affine

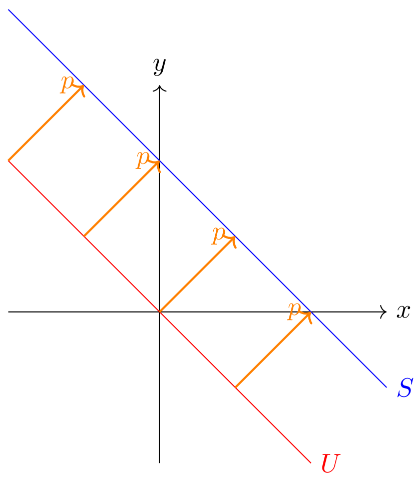
Definizione 5.5: Sottospazio affine

Un sottoinsieme S di $\mathbb{K}^n$ è detto sottospazio affine se è ottenuto traslando un sottospazio vettoriale U per un vettore v:

$$S = \{U + v \mid v \in \mathbb{K}^n\}$$

Inoltre, $\dim S = \dim U$.

Esempio. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ $U = \langle(-1, 1)\rangle$ e $S = U + (1, 1)$.



U è $x + y = 0$ e S è $x + y = 2$.

Osservazione. Il vettore p di translazione NON è unico, ad esempio possiamo prendere anche $(3, -1)$.

Teorema 5.2: Sistema lineare omogeneo associato

Sia $Ax = b$ un sistema lineare e A la matrice $m \times n$ dei coefficienti.
Consideriamo il sistema lineare omogeneo associato $Ax = 0$. Allora:

1. L'insieme U delle soluzioni del sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ di dimensione $n - \mathrm{rk}(A)$.

2. L'insieme S delle soluzioni del sistema non omogeneo, se non è vuoto, è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ di dimensione $n - \mathrm{rk}(A)$, ottenuto traslando U con qualsiasi $p \in S$ cioè $S = \{p + u \mid u \in U\}$.

Dimostrazione. Verifichiamo i due punti:

1. Siano $u_1, u_2 \in U$ (cioè $Au_1 = 0, Au_2 = 0$, quindi $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = 0 + 0 = 0$).
Analogamente, se $u \in U$ e $k \in \mathbb{K}$, allora $A(ku) = kAu = k0 = 0$, quindi $ku \in U$.
Alla luce di questi risultati, U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

2. Sia $u \in U$ (cioè $Au = 0$) e $p \in S$ (cioè $Ap = b$). Allora $u + p \in S$ perchè $A(u + p) = Au + Ap = 0 + b = b$, quindi $\{p + u \mid u \in U\} \subseteq S$.
Siano $p, p' \in S$ (cioè $Ap = b, Ap' = b$); allora $A(p - p') = Ap - Ap' = b - b = 0$, cioè $p - p' \in U$.
Quindi $p' = p + u$ con $u \in U$, cioè $S \subseteq \{p + u \mid u \in U\} \Rightarrow S = \{p + u \mid u \in U\}$.

□

5.4 Matrici e sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto nella forma matriciale $A \cdot x = B$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

e si chiamano rispettivamente matrice dei coefficienti, vettore delle incognite e vettore dei termini noti. Inoltre, data una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $A = M_{E_n}^{E_m}(f)$, il sistema $Ax = b$ è equivalente a $f(x) = b$.

Osservazione. La scrittura di un sistema $Ax = b$ è comoda anche per svolgere rapidamente il metodo di Gauss.

Osservazione. Risolvere il sistema vuol dire esprimere il vettore b come combinazione lineare delle colonne della matrice A, cioè:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema è risolubile se e solo se la colonna b è combinazione lineare delle colonne della matrice A.

Esempio. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 3 \\ -1 & 1 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Inizio a fare le operazioni secondo il metodo di Gauss:

$$\begin{array}{r} R1 \\ -2R1 + R2 \\ R1 + R3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} R1 \\ R2 \\ -\frac{3}{5}R2 + R3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & | & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}z = -\frac{2}{5} \Rightarrow z = -\frac{2}{3} \\ -5y + 3z = 1 \Rightarrow -5y + 3 \cdot (-\frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x + 2y - z = 1 \Rightarrow x + 2 - (-\frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Teorema 5.3: Teorema di Rouché-Capelli
Il sistema lineare $Ax = b$ è risolvibile se e solo se $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$.

Dimostrazione. Per l'osservazione precedente, il sistema è risolvibile se e solo se il numero di colonne indipendenti in $A|b$ non aumenta rispetto ad A (cioè $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$). □

Conseguenza Per capire se un sistema è risolvibile, possiamo considerare la matrice completa $A|b$, ridurla tramite Gauss ad una matrice a scala $A'|b'$ e verificare se $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A'|b')$.

Esempio.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_3 = -10 \end{cases}$$

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 0 & 3 & | & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_2 - 2R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & -2 & 2 & | & -12 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 2R_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \text{rk}(A) &= 2 \\ \text{rk}(A|b) &= 2 \\ \text{rk}(A) &= \text{rk}(A|b) \Rightarrow \text{il sistema è risolvibile.} \end{aligned}$$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Trovare x tale che $Ax = b$.
$A|b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ -2 & 4 & | & -6 \end{pmatrix}$.
$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = 1$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette soluzione, cioè $\exists x_1, x_2 \mid \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Cioè $\exists x_1, x_2 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$ cioè il sistema ammette soluzioni.

Esempio. Trovare, se esiste, un polinomio di grado ≤ 2 tale che $p(2) = 0, p(1) = 3, p(0) = 1, p(-1) = 2$.
Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 3 \\ c = 1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|b = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{rk}(A) = 3, \text{rk}(A|b) = 4$ perchè $\det A|b = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 28 \neq 0$.
Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzione.

Teorema 5.4
Consideriamo il sistema $Ax = b$ con n incognite:

1. Se $\text{rk}(A) = rk(A|b) = n$, il sistema ha una soluzione unica.
2. Se $\text{rk}(A) = rk(A|b) < n$, il sistema ha infinite soluzioni (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Dimostrazione. 1. Riduciamo il sistema ad uno a scala ed eliminiamo le righe nulle in fondo. Quindi $A'x = b'$ dove la matrice A', avendo n colonne, essendo in scala e non avendo righe nulle è della forma $n \times n$, ovvero:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, A' è invertibile.
Moltiplichiamo l'equazione $A'x = b'$ per A'^{-1} e otteniamo $x = A'^{-1}b'$. Quindi il sistema ha una soluzione unica.

2. Caso speciale: $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi $Ax = 0$.

   L'insieme delle soluzioni è proprio $\ker F$ (dove F era tale che $A = M_{E_n}^{E_m}(F)$). Sappiamo che $\dim \ker F = n - \dim(\text{ Im } F) = n - \text{rk}(A) > 0$. Quindi $\ker F$ contiene infiniti elementi.
   Caso generale con b qualunque: chiamamo $U = \ker F$ determinato nel caso precedente. Quindi se $u \in U \Rightarrow Au = 0$. Per il teorema di Rouché-Capelli, sappiamo che esiste una soluzione e la chiamiamo $v \in \mathbb{R}^n$, quindi: $A \cdot v = b$.
   Inoltre, $\forall u \in U$ si ha che $u + v$ è ancora una soluzione, infatti: $A(u + v) = Au + Av = 0 + b = b$.
   □

Esempio.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 7y - 5z = 1 \\ -x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Consideriamo il sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 5z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z - 2y = -z$$

Quindi $U = \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Quindi passiamo alla matrice associata al sistema originale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1|1 \\ 2 & 7 & -5|1 \\ -1 & 1 & -2|-2 \end{pmatrix} \Rightarrow A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1|1 \\ 0 & 3 & -3|-1 \\ 0 & 3 & -3|-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 3y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \\ x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow v = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{(-z, z, z) + (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{5}{3} - z, -\frac{1}{3} + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

5.5 Applicazioni alla geometria analitica

5.5.1 Retta passante per due punti

Consideriamo due punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2, P_1 \neq P_2$. Trovare la retta che passa per P_1 e P_2. Una retta in $\mathbb{R}^2$ è data dall'equazione $ax + by = c$. Si vuole quindi trovare a, b, c.

Osservazione. Se $ax + by = c$ è l'equazione di una retta, anche $2ax + 2by = 2c$ lo è. Quindi a, b, c non sono univoci.

Esempio. $P_1(1, 3), P_2(3, 2)$.
La retta passante per P_1 e P_2 è data da $ax + by = c$.

$$\begin{cases} a + 3b = c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & c \\ 3 & 2 & | & c \end{pmatrix} \underset{R2 - 3R1}{\overset{R1}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & c \\ 0 & -7 & | & -2c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7b = -2c \Rightarrow b = \frac{2}{7}c \\ a + 3 \cdot \frac{2}{7}c = c \Rightarrow a = \frac{5}{7}c \end{cases}$$

Quindi: $S = \{(\frac{1}{7}t, \frac{2}{7}t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

5.5.2 Piano passante per tre punti

Consideriamo tre punti $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ in $\mathbb{R}^3, P_1, P_2, P_3$ non allineati. Trovare il piano che passa per P_1, P_2, P_3. Un piano in $\mathbb{R}^3$ è dato dall'equazione $ax + by + cz = d$. Si vuole quindi trovare a, b, c, d.

Esempio. $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 1), P_3 = (2, 0, -1)$.
La retta passante per P_1, P_2, P_3 è data da $ax + by + cz = d$.

$$\begin{cases} a+b=d \\ b+c=d \\ 2a-c=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=t \\ b=d-c=0 \\ c=-d+2a=t \\ d=t \end{cases}$$

Quindi: $S = \{(t, 0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Una equazione del piano è $x + z = 1$.

Osservazione. p è un sottospazio affine di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$. S è un sottospazio affine di dimensione 1 di $\mathbb{R}^4$.

Esempio. $P_1 = (2, 0, -1), P_2 = (3, 1, 0), P_3 = (4, 2, 1)$.
La retta passante per P_1, P_2, P_3 è data da $ax + by + cz = d$.

$$\begin{cases} 2a-c=d \\ 3a+b=d \\ 4a+2b+c=d \end{cases} \Rightarrow gauss \begin{cases} 2a-c=d \\ b+\frac{3}{2}c=-\frac{1}{2}d \\ 2b+3c=-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-c=d \\ b+\frac{3}{2}c=-\frac{1}{2}d \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{c+d}{2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s \\ b=-\frac{1}{2}d-\frac{3}{2}c=-\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}s \\ c=s \\ d=t \end{cases}$$

Quindi: $S = \{(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s, -\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Abbiamo ottenuto un sottospazio affine di dimensione 2 perchè P_1, P_2, P_3 sono allineati, quindi P non è unico.

Definizione 5.6: Sottospazi in geometria analitica

- Un punto in $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio affine di dimensione 0.
- Una retta in $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio affine di dimensione 1.
- Un piano in $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio affine di dimensione 2.
- Un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio affine di dimensione $n-1$.

Dati due punti distinti di $\mathbb{K}^n$, esiste un'unica retta che li contiene.
Dati tre punti non allineati di $\mathbb{K}^n$, esiste un unico piano che li contiene. Se invece i tre punti sono allineati, esistono infiniti piani che li contengono.

Osservazione. Un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per tre punti esiste ed è unico se i tre punti non sono allineati, cioè se i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ non sono proporzionali/paralleli.

Esempio. $P_1 = (2, 0, -1), P_2 = (3, 1, 0), P_3 = (4, 2, 1)$.
$\overrightarrow{P_1P_2} = (3-2, 1-0, 0-(-1)) = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (4-2, 2-0, 1-(-1)) = (2, 2, 2)$.
Quindi $\overrightarrow{P_1P_2}$ è parallelo a $\overrightarrow{P_1P_3}$ e quindi i tre punti sono allineati.

Osservazione. Le rette sono iperpiani di $\mathbb{R}^2$ e i piani sono iperpiani di $\mathbb{R}^3$.

Osservazione. Gli iperpiani sono determinati da un'equazione del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$.

Esempio. Determinare la retta passante per i punti $P(3, 1, -1), Q(2, 2, 1)$.
$\overrightarrow{PQ} = (2-3, 2-1, 1-(-1)) = (-1, 1, 2)$.
Quindi la retta è data da $\{P + t\overrightarrow{PQ}, t \in \mathbb{R}\} = \{(3, 1, -1) + t(-1, 1, 2), t \in \mathbb{R}\} = \{(3-t, 1+t, -1+2t), t \in$

$\mathbb{R}\}$. Posso esprimere la retta $r = \{3-t, 1+t, -1+2t\}$ anche tramite equazioni cartesiane con $x = 3-t, y = 1+t, z = -1+2t$.

$$\begin{cases} x+y = 4(= 3-t+t+1) \\ 2x+z = 5(= 6-2t-1+2t) \end{cases}$$

Bastano due equazioni ($\dim \mathbb{R}^3 - \dim M = 3-1 = 2$) per determinare la retta, ma non sono uniche, perchè ci sono infiniti piani che passano per una retta.

Esempio. Trovare l'intersezione della retta $r = \{3-t, t+1, 2t-1\}$ con il piano di equazione $x+2y-z = 3$.
Trovo t sostituendo x, y, z con le equazioni della retta:

$$\begin{aligned} 3-t+2(t+1)-(2t-1) &= 3 \\ (3-t)+2(t+1)-(2t-1) &= 3 \\ 3-t+2t+2-2t+1 &= 3 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Sostituendo in r ho il punto di intersezione: $(3-3, 3+1, 2\cdot 3-1) = (0, 4, 5)$.

Esempio. Trovare la retta r' parallela alla retta $r = \{3-t, t+1, 2t-1\}$ e passante per il punto $P(5, -2, 3)$.
Se r' è parallela a r, allora avrà lo stesso vettore di direzione $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 2)$ di r. Inoltre, poichè r' passa per P, allora $r' = \{P' + t\overrightarrow{v}, t \in \mathbb{R}\} = \{(5, -2, 3) + t(-1, 1, 2), t \in \mathbb{R}\} = \{(-t+5, t-2, 2t+3), t \in \mathbb{R}\}$.

Esempio. Trovare, se esiste, l'intersezione tra la retta $r = \{3-t, t+1, 2t-1\}$ e il piano $x+2y-z = 3$ e la retta $r'' = \{(2s-1, 3s+1, s+5), s \in \mathbb{R}\}$.
Se esiste un punto di intersezione esistono $t, s \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{cases} 3-t = 2s-1 \\ t+1 = 3s+1 \\ 2t-1 = s+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-3s = 2s-1 \\ t = 3s \\ 6s-1 = s+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 5s \\ t = 3s \\ 6 = 5s \end{cases}$$

Quindi non c'è soluzione: r, r'' sono parallele e non si intersecano. D'altra parte, non sono paralleli perchè i vettori di direzione $(-1, 1, 2)$ e $(2, 3, 1)$ non sono l'uno il multiplo dell'altro. In questo caso, r, r'' sono sghembe.

Esempio. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$. Trovare tutti gli elementi del piano di $\mathbb{K}$ di equazione $2x+y+z = 1$.
Osserviamo che poichè $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$, allora ha $3^3 = 27$ elementi e un piano in esso avrà $3^2 = 9$ elementi. $p = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{2}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{2}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{2}, \overline{1})\}$.

Esempio. Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tali che $\begin{cases} p(1) = 4 \\ p'(1) = 1 \\ p''(1) = -2 \end{cases}$.
Sappiamo che $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Costruisco il sistema calcolando le derivate:

$$\begin{cases} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ p''(x) = 6ax + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d = 4 \\ 3a+2b+c = 1 \\ 6a+2b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = -1-3t \\ c = 3t+3 \\ d = -t+2 \end{cases}$$

L'insieme dei polinomi che verificano queste condizioni è $\{tx^3 + (-1-3t)x^2 + (3t+3)x + (-t+2), t \in \mathbb{R}\}$.

Se invece cerco un polinomio che, oltre a soddisfare le condizioni precedenti, verifichi anche $p'''(1) = -6$, allora la soluzione è unica: $p'''(x) = 6a$, quindi $6a = -6 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow t = -1$ e sostituendo $p(x) = -x^3 + 2x^2 + 3$.

Esempio. Trovare il piano passante per i punti $P_0(1,0,1), P_1(2,-1,0), P_2(-1,1,1)$.
Per prima cosa trovo i vettori di direzione:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{P_0P_1} = (2-1,-1-0,0-1) = (1,-1,-1)\\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{P_0P_2} = (-1-1,1-0,1-1) = (-2,1,0)\end{aligned}$$

Quindi il piano è dato da $\{P_0 + t\overrightarrow{v_1} + s\overrightarrow{v_2}, t,s \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,1) + t(1,-1,-1) + s(-2,1,0), t,s \in \mathbb{R}\} = \{(1+t-2s, -t+s, 1-t), t,s \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0\}$.

6 Unità 6 - Lezioni 13, 14, 15

6.1 Endomorfismi e autovettori

Definizione 6.1: Endomorfismo
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un endomorfismo è una applicazione lineare $f : V \to V$.

Definizione 6.2: Matrice diagonale
Una matrice $D(n \times n)$ è detta **diagonale** se $d_{ij} = 0\ \forall i \neq j$ (cioè se è nulla al di fuori della diagonale principale).

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Osservazione. Due matrici diagonali sono semplici da moltiplicare tra loro:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$DE = \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}e_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}e_{nn} \end{pmatrix}$$

Inoltre, $\det D = d_{11}d_{22}...d_{nn}$ e se $\det D \neq 0$ (cioè $d_i \neq 0 \forall i$) allora D è invertibile e $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}$.

Inoltre $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, D^m = \begin{pmatrix} d_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^m \end{pmatrix}$.

Definizione 6.3: Autovettore
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f : V \to V$ un endomorfismo. Un vettore $v \in V, v \neq 0$ è detto **autovettore** di f se $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f(v) = \lambda v$. λ è detto **autovalore** di f.

Esempio. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, f : V \to V, f(x,y) = (2y, 2x)$

- e_1 non è un autovettore perchè $f(e_1) = f(1,0) = 2e_2 = (0,2) \neq \lambda(1,0)$.

- e_2 non è un autovettore perchè $f(e_2) = f(0,1) = 2e_1 = (2,0) = 2(0,1)$.
- $v_1 = (1,1)$ è un autovettore di autovalore 2 perchè $f(v_1) = f(1,1) = (2,2) = 2(1,1) = 2v_1$.
- $v_2 = (1,-1)$ è un autovettore di autovalore -2 perchè $f(v_2) = f(1,-1) = (-2,2) = -2(1,-1) = -2v_2$.

Matrici di f:

$$\text{Base}\, e_1, e_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Non è diagonale}$$

$$\text{Base}\, v_1, v_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{È diagonale}$$

Osservazione. Se $f : V \to V$ è un endomorfismo e $v_1, v_2, ..., v_n$ è una base di V composta da autovettori di f allora:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n \\ f(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + 0v_n \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Quindi la matrice di f rispetto alla base $v_1, v_2, ..., v_n$ è diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Passi generali per rispondere alle domande "Si può diagonalizzare f?", "Si può trovare una base di V in cui la matrice di f è diagonale?", "esiste una base di V composta da autovettori di f?":

1. Trovare gli autovalori di f (se esistano).
2. Per ogni autovalore λ trovare gli autovettori corrispondenti.

6.1.1 Passo 1: Trovare gli autovalori di f

Definizione 6.4: Polinonio caratteristico

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f : V \to V$ un endomorfismo. Il polinomio $p(\lambda) = \det(f - \lambda I)$ è detto **polinomio caratteristico** di f.

Teorema 6.1: Autovalori e polinomio caratteristico

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $f : V \to V$ un endomorfismo e $p(x)$ il suo polinomio caratteristico. Allora $\lambda_i \in \mathbb{K}$ è un autovalore di $f \Leftrightarrow p(\lambda_i) = 0$.

Dimostrazione. λ_i è un autovalore di $f \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda_i v \Leftrightarrow (f - \lambda_i I)(v) = 0 \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \mid (f - \lambda_i I)(v) = f(v) - \lambda_i v = \lambda_i v - \lambda_i v = 0 \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \mid v \in \ker(f - \lambda_i V) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda_i I) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda_i I$ non è iniettiva e quindi non è un isomorfismo $\Leftrightarrow p(\lambda_i) = \det(f - \lambda_i I) = 0$. ☐

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (2y, 2x)$. Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (0,2) = 0(1,0) + 2(0,1) = 2e_2 \\ f(e_2) &= f(0,1) = (2,0) = 2(1,0) + 0(0,1) = 2e_1 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

Quindi gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$.
Per definizione gli autovettori sono i vettori $v \neq 0$ tali che $f(v) = \lambda v$, quindi, dato un vettore $v = (x, y)$:

$$f(x, y) = 2v$$
$$(2y, 2x) = (2x, 2y)$$
$$\begin{cases} 2y = 2x \\ 2x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y = x$$

Quindi gli autovettori di f sono i vettori $(x, x), x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots$.
Analogamente per $\lambda_2 = -2$ dato un vettore $v = (x, y)$:

$$f(x, y) = -2v$$
$$(2y, 2x) = (-2x, -2y)$$
$$\begin{cases} 2y = -2x \\ 2x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow y = -x$$

Quindi gli autovettori di f sono i vettori $(x, -x), x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, -1), (2, -2), (3, -3), \ldots$.

Esempio. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x, -4x - 2y - 8z, -4z)$.
Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$:

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, -4, 0) = 2e_1 - 4e_2 + 0e_3$$
$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, -2, 0) = 0e_1 - 2e_2 + 0e_3$$
$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 0, -4) = 0e_1 + 0e_2 - 4e_3$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ -4 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda)(-4 - \lambda) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -4$$

Troviamo gli autovettori per ciascun autovalore, dato un vettore $v = (x, y, z)$:

- $\lambda_1 = 2$:

$$f(v) = \lambda_1 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (2x, 2y, 2z)$$
$$\begin{cases} 2x = 2x \\ -4x - 2y - 8z = 2y \\ -4z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4y = -4x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

  Quindi gli autovettori di f per $\lambda_1 = 2$ sono i vettori $(x, -x, 0)$, ad esempio $(1, -1, 0), (2, -2, 0), (3, -3, 0), \ldots$.

- $\lambda_2 = -2$:

$$f(v) = \lambda_2 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (-2x, -2y, -2z)$$
$$\begin{cases} 2x = -2x \\ -4x - 2y - 8z = -2y \\ -4z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ -2y = -2x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  Quindi gli autovettori di f per $\lambda_2 = -2$ sono i vettori $(0, y, 0)$, ad esempio $(0, 1, 0), (0, 2, 0), (0, 3, 0), \ldots$.

- $\lambda_3 = -4$:

$$f(v) = \lambda_3 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (-4x, -4y, -4z)$$

$$\begin{cases} 2x = -4x \\ -4x - 2y - 8z = -4y \\ -4z = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ -2y + 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4z \end{cases}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_3 = -4$ sono i vettori $(0, 4z, z)$, ad esempio $(0, 4, 1), (0, 8, 2), (0, 12, 3), ...$

Possiamo verificare che $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 4, 1)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di f. Sappiamo già da $f(v) = \lambda v$ che la matrice di f rispetto a questa base è diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tuttavia, se il polinomio caratteristico non ha i suoi zeri in $\mathbb{K}$, allora non è detto che esistano autovettori.

Esempio. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, f(x, y) = (2y, x), \mathbb{Q} = \{$ numeri razionali $\}$.
Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$:

$$f(e_1) = f(1, 0) = (0, 1) = 0e_1 + 1e_2$$
$$f(e_2) = f(0, 1) = (2, 0) = 2e_1 + 0e_2$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Quindi $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ non può essere diagonalizzata, ma può essere diagonalizzata in $\mathbb{R}^2$ (perchè $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$).

Esempio. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, -x)$. Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$:

$$f(e_1) = f(1, 0) = (0, -1) = 0e_1 - 1e_2$$
$$f(e_2) = f(0, 1) = (1, 0) = 1e_1 + 0e_2$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i \notin \mathbb{R}$$

Quindi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non può essere diagonalizzata, ma può essere diagonalizzata in $\mathbb{C}^2$ (perchè $i \in \mathbb{C}$).
Troviamo gli autovettori per ciascun autovalore, dato un vettore $v = (x, y)$:

- $\lambda_1 = i$:

$$f(v) = \lambda_1 v \Rightarrow (y, -x) = (iy, -ix)$$

$$\begin{cases} y = iy \\ -x = -ix \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ix \\ x = iy \end{cases} \Rightarrow y = ix$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_1 = i$ sono i vettori $(x, ix), x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, i), (2, 2i), (3, 3i), ...$

- $\lambda_2 = -i$:

$$f(v) = \lambda_2 v \Rightarrow (y, -x) = (-iy, -ix)$$

$$\begin{cases} y = -iy \\ -x = -ix \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -ix \\ x = -iy \end{cases} \Rightarrow y = -ix$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_2 = -i$ sono i vettori $(x, -ix), x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, -i), (2, -2i), (3, -3i), ...$

6.1.2 Passo 2: Trovare gli autovettori di f per ogni autovalore

Definizione 6.5: Autospazio
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $f : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore di f.
L'**autospazio** di f relativo all'autovalore λ_i è l'insieme $V_{\lambda_i} = \{v \in V \mid f(v) = \lambda_i v\}$.

Proposizione. V_{λ_i} è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Se $v_1, v_2 \in V_{\lambda_i} \Rightarrow f(v_1) = \lambda_i v_1$ e $f(v_2) = \lambda_i v_2 \Rightarrow f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda_i v_1 + \lambda_i v_2 = \lambda_i(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 \in V_{\lambda_i}$.
Analogamente, se $a \in \mathbb{K}$, $f(av) = af(v) = a\lambda_i v = \lambda_i(av)$, quindi $av \in V_{\lambda_i}$. □

Proposizione. Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ allora $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$.

Dimostrazione. Sia $v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$. Allora $\lambda_i v = f(v) = \lambda_j v \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)v = 0 \Rightarrow v = 0$.
Nota: $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ perchè $\lambda_i \neq \lambda_j$. □

Definizione 6.6: Molteplità algebrica e geometrica
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $f : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore di f.
La **molteplicità geometrica** di λ_i è la dimensione dell'autospazio V_{λ_i}, cioè $m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$.
La **molteplicità algebrica** di λ_i è la sua molteplicità come soluzione dell'equazione $p(\lambda) = 0$, cioè quante volte λ_i annulla il polinomio caratteristico $p(\lambda)$.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x + y, 3y)$.
Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (3,0) = 3e_1 + 0e_2 \\ f(e_2) &= f(0,1) = (1,3) = 1e_1 + 3e_2 \\ A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2$$

Calcolo la molteplicità algebrica di $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \\ m_a(3) &= 2 \text{ (perchè annulla 2 volte } p(x)) \end{aligned}$$

Troviamo gli autovettori per $\lambda = 3$, dato un vettore $v = (x, y)$:

$$f(v) = \lambda v \Rightarrow (3x + y, 3y) = (3x, 3y)$$
$$\begin{cases} 3x + y = 3x \\ 3y = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3y = 3y \end{cases}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda = 3$ sono i vettori $(x, 0), x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, 0), (2, 0), (3, 0), \ldots$.
L'autospazio V_3 è quindi $V_3 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 3v\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.
La molteplicità geometrica di $\lambda = 3$ è $m_g(3) = \dim V_3 = 1$.

Proposizione. Sia λ_i un autovalore di $f : V \to V$. Allora $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$.

Dimostrazione. $m_g(\lambda_i) \geq 1$ perchè se $m_g(\lambda_i) = 0$ allora $V_{\lambda_i} = \{0\}$ e quindi non ci sarebbero autovettori $v \in V, v \neq 0$ tali che $f(v) = \lambda_i v$ e quindi λ_i non sarebbe un autovalore di f, contraddicendo la definizione stessa di autovalore.
Sia ora $h = m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$ e mostriamo che $m_a(\lambda_i) \geq h$.

Presa una base $\{v_1, v_2, ..., v_h\}$ di V_{λ_i}, completiamola ad una base di V aggiungendo $v_{h+1}, ..., v_n$. Scriviamo la matrice di f rispetto a questa base:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= \lambda_i v_1 = \lambda_i v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n \\
f(v_2) &= \lambda_i v_2 = 0v_1 + \lambda_i v_2 + ... + 0v_n \\
&\vdots \\
f(v_h) &= \lambda_i v_h = 0v_1 + 0v_2 + ... + \lambda_i v_h \\
f(v_{h+1}) &= \lambda_i v_{h+1} = a_{1,h+1}v_1 + a_{2,h+1}v_2 + ... + a_{h,h+1}v_h + \lambda_i v_{h+1} \\
&\vdots \\
f(v_n) &= \lambda_i v_n = a_{1,n}v_1 + a_{2,n}v_2 + ... + a_{h,n}v_h + \lambda_i v_n
\end{aligned}
$$

$$
A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,h+1} \\ 0 & \lambda_i - \lambda & \cdots & 0 & a_{2,h+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & a_{h,h+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}
$$

Quindi $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_i - \lambda)^h \cdot q(\lambda)$, dove $q(\lambda)$ è un polinomio di grado $n - h$. Quindi il fattore $(\lambda_i - \lambda)^h$ è presente nel polinomio caratteristico $p(\lambda)$ almeno h volte, cioè $m_a(\lambda_i) \geq h$. □

6.2 Diagonalizzabilità

Teorema 6.2: Criterio di diagonalizzabilità
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e siano $\lambda_1, ..., \lambda_k$ i suoi autovalori. f è diagonalizzabile se e solo se valgono entrambe le condizioni:

1. $\lambda_i \in \mathbb{K}$ per ogni $i = 1, 2, ..., k$, ovvero tutti gli autovalori sono nel campo.
2. $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ per ogni $i = 1, 2, ..., k$, ovvero la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica per ogni autovalore.

Dimostrazione. Supponiamo che valga la condizione 1, cioè $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ e consideriamo gli autospazi $V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_k}$.
Sia $U = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$, cioè U è la somma diretta degli autospazi (perchè $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$ se $\lambda_i \neq \lambda_j$).
Sia $\mathcal{B}_1$ una base di V_{λ_1}, ..., $\mathcal{B}_t$ una base di V_{λ_k}; quindi poichè la somma è diretta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_t$ è una base di U. Quindi $\dim U = \dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_k} = m_g(\lambda_1) + ... + m_g(\lambda_k)$.
D'altra parte $\dim V = n =$ grado di $p(x) = m_a(\lambda_1) + ... + m_a(\lambda_k)$.
Se vale la condizione 2 allora $\dim U = \dim V$ e quindi $U = V$ e quindi $\mathcal{B}$ è una base di V composta da autovettori di f e quindi la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale.
Se non vale la condizione 2 allora $\dim U = m_g(\lambda_1) + ... + m_g(\lambda_k) < m_a(\lambda_1) + ... + m_a(\lambda_k) = \dim V$ e quindi B è una base di U, ma non di V. Posso completarla ad una base di V solo aggiungendo vettori che non sono autovettori di f e quindi la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ non è diagonale. □

Osservazione. Se valgono 1 e 2 la dimostrazione ci fornisce un algoritmo esplicito per trovare la base di autovettori di V: basta unire le basi degli autospazi.

Esempio. Consideriamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, f : V \to V, f(x, y, z) = (x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z)$.
Trovare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ in cui la matrice di f è diagonale.
Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 =$

$(0,0,1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,3,6) = 1e_1 + 3e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (-3,-5,-6) = -3e_1 - 5e_2 - 6e_3 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (3,3,4) = 3e_1 + 3e_2 + 4e_3 \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

Quindi gli autovalori di f sono $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica rispettivamente $m_a(-2) = 2, m_a(4) = 1$.
Troviamo gli autovettori per $\lambda_1 = -2$, dato un vettore $v = (x,y,z)$:

$$V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -2v\}$$
$$f(v) = \lambda_1 v \Rightarrow (x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z) = (-2x,-2y,-2z)$$
$$\begin{cases} x-3y+3z = -2x \\ 3x-5y+3z = -2y \\ 6x-6y+4z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3y+3z = 0 \\ 3x-3y+3z = 0 \\ 6x-6y+6z = 0 \end{cases} \Rightarrow x+z = y \Rightarrow m_g(-2) = 2$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_1 = -2$ sono i vettori $(x, x+z, z), x, z \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1,1,0), (2,2,0), (3,3,0), \ldots$.
Di conseguenza la base $\mathbb{B}_1 = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ è la base di V_{λ_1}.
Troviamo gli autovettori per $\lambda_2 = 4$, dato un vettore $v = (x,y,z)$:

$$V_{\lambda_2} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 4v\}$$
$$f(v) = \lambda_2 v \Rightarrow (x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z) = (4x,4y,4z)$$
$$\begin{cases} x-3y+3z = 4x \\ 3x-5y+3z = 4y \\ 6x-6y+4z = 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x = -3z \\ -6x = -3z \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow m_g(4) = 1$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_2 = 4$ sono i vettori $(t,t,2t), t \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1,1,2), (2,2,4), (3,3,6), \ldots$.
Di conseguenza la base $\mathbb{B}_2 = \{(1,1,2)\}$ è la base di V_{λ_2}.
Per il teorema di diagonalizzabilità f è diagonalizzabile se e solo se $m_a(-2) = m_g(-2)$ e $m_a(4) = m_g(4)$, cioè se e solo se $m_a(-2) = 2 = m_g(-2)$ e $m_a(4) = 1 = m_g(4)$.
La base di autovettori di f è quindi $\mathcal{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,2)\}$. In questa base la matrice di f è diagonale:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) &= 0v_1 - 2v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) &= 0v_1 + 0v_2 + 4v_3 \\ D &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esempio. Dati $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, f(x,y,z,w) = (y,z,w,0)$, dire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di autovettori.
Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 =$

$(0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0,0) = (0,0,0,0) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ f(e_2) &= f(0,1,0,0) = (1,0,0,0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ f(e_3) &= f(0,0,1,0) = (0,1,0,0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ f(e_4) &= f(0,0,0,1) = (0,0,1,0) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-\lambda)^3 = \lambda^4$$

Quindi l'unico autovalore di f è $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica $m_a(0) = 4$.
$f(x,y,z,w) = 0 \cdot (x,y,z,w) \Rightarrow (y,z,w,0) = (0,0,0,0) \Rightarrow y = z = w = 0$. Quindi l'autospazio $V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 0v\} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = w = 0\} = \{(x,0,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ con base $\{e_1\} = \{(1,0,0,0)\} \Rightarrow m_g(0) = 1$.
Per il teorema di diagonalizzabilità f è diagonalizzabile se e solo se $m_a(0) = m_g(0)$, cioè se e solo se $4 = 1$, che è falso.
Quindi f non è diagonalizzabile.

Definizione 6.7: Endomorfismo nilpotente
Un endomorfismo $f : V \to V$ si dice **nilpotente** se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = 0$, cioè $f \circ ... \circ f(v) = 0 \; \forall v \in V$.

Osservazione. f è nilpotente $\Leftrightarrow$ la matrice di f rispetto ad una base di V è nilpotente, cioè esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $A^n = 0$.

Teorema 6.3: Endomorfismo nilpotente non diagonalizzabile
Se un endomorfismo $f : V \to V$ è nilpotente allora f non è diagonalizzabile.

Dimostrazione. Sia λ un autovalore di f e sia v un suo autovettore, cioè $v \neq 0, f(v) = \lambda v$.
Poichè f è nilpotente esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(v)^n = 0$, cioè $f(v) \circ ... \circ f(v) = 0$.
D'altra parte $f^n(v) = f^{n-1}(\lambda v) = \lambda f^{n-1}(v) = ... = \lambda^n v$.
Quindi $\lambda^n v = 0 \Rightarrow \lambda^n = 0$ (perchè $f^n(v) = 0$) e quindi $\lambda = 0$.
Quindi l'unico autovalore di f è $\lambda = 0$. Quindi poichè $f \neq 0$, l'autospazio V_0 non è tutto lo spazio V, cioè $m_g(0) < \dim V$ e quindi $m_a(0) = m_g(0) < \dim V$. Quindi f non è diagonalizzabile. □

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ è una matrice non diagonalizzabile. A si può scrivere come somma di una matrice diagonalizzabile (anzi già diagonale) e di una matrice nilpotente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A quindi non è nilpotente ma non si diagonalizza.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3[x]_{\leq 3} = \{a_x^3 + b_x^2 + c_x + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$.
$d : V \to V, d(p(x)) = p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ è un endomorfismo nilpotente perchè $d^4(p(x)) = 0 \forall p(x) \in$

V.
In effetti nella base $1, x, x^2, x^3$ la matrice di d è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenuta calcolando $d(1) = 0, d(x) = 1, d(x^2) = 2x, d(x^3) = 3x^2$.
Quindi $d^4(p(x)) = 0 \forall p(x) \in V$ e quindi d è nilpotente.

6.3 Blocco di Jordan e decomposizione canonica di Jordan

Definizione 6.8: Blocco di Jordan
Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice non diagonalizzabile.
Un **blocco di Jordan** di A è una matrice quadrata $J \in M_k(\mathbb{K})$ della forma:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

dove λ è l'autovalore di A e k è la molteplicità geometrica di λ.
In sostanza, un blocco di Jordan è una matrice diagonale con tutti gli elementi uguali a λ e con una riga di 1 sulla diagonale superiore.

$p(\lambda) = (\lambda_i - \lambda) \cdot \det J_{\lambda_i, n-1} = ... = (\lambda_i - \lambda)^n \Rightarrow$ l'unico autovalore di J è λ_i e la molteplicità algebrica è $m_a(\lambda_i) = n$. $\forall n > 1 J_{\lambda_i,n}$ non è diagonalizzabile. Notiamo che $J_{\lambda_i,1}$ è somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente.

Esempio. $J_{7,3} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ è un blocco di Jordan di ordine 3. Controllare se è diagonalizzabile:

$$p(\lambda) = \det(J_{7,3} - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = 7 \Rightarrow m_a(7) = 3$$

$V_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid J_{7,3}(x_1, x_2, x_3) = 7(x_1, x_2, x_3)\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \\ 7x_3 \end{pmatrix} \} = \begin{cases} 7x_1 + x_2 = 7x_1 \\ 7x_2 + x_3 = 7x_2 \\ 7x_3 = 7x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ Quindi $V_7 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $m_g(7) = 1 \Rightarrow J_{7,3}$ non è diagonalizzabile.

Teorema 6.4: Decomposizione canonica di Jordan
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e siano $\lambda_1, ..., \lambda_k$ i suoi autovalori. Allora:

1. $f = f_d + f_n$, dove f_d è una applicazione diagonalizzabile mentre f_n una una applicazione nilpotente. Tale decomposizione è unica e diagonalizzabile $\Leftrightarrow f_n = 0$.
2. Esiste una base di V in cui la matrice di f è la forma canonica di Jordan (dove per ciascun autovalore λ_i si hanno $m_g(\lambda_i)$ blocchi di Jordan, la cui somma delle dimensioni è $m_a(\lambda_i)$):

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_k,n_k} \end{pmatrix}$$

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ con autovalori $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$ e con $m_a(\lambda_1) = 3, m_a(\lambda_2) = 2, m_a(\lambda_3) = 1$. e $mg(\lambda_1) = mg(\lambda_2) = mg(\lambda_3) = 1$ (quindi f non è diagonalizzabile).
Per il teorema precedente, esiste una base di $\mathbb{R}^6$ in cui la matrice di f è:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{7,3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{3,2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{-2,1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

7 Unità 7 - Lezioni 16, 17

7.1 Forme bilineari

Definizione 7.1: Forma bilineare
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Una **forma bilineare** su V è una applicazione $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ che è lineare rispetto a ciascuna variabile, cioè:

1. $\beta(a_1v_1 + a_2v_2, u) = a_1\beta(v_1, u) + a_2\beta(v_2, u)$
2. $\beta(v, a_1u_1 + a_2u_2) = a_1\beta(v, u_1) + a_2\beta(v, u_2)$

Esempio. Siano $V : \mathbb{R}^2, \beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \beta(v, u) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_2, v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$.
Verificare se β è una forma bilineare.
Definiamo $v' = (x_1', x_2')$, dobbiamo verificare che $\beta(av+a'v', u) = a\beta(v, u)+a'\beta(v', u)$ e $\beta(v, au+au') = a\beta(v, u) + a'\beta(v, u')$.

$$\begin{aligned} av + a'v' &= a(x_1, x_2) + a'(x_1', x_2') = (ax_1 + a'x_1', ax_2 + a'x_2') \\ \beta(av + a'v', u) &= 2(ax_1 + a'x_1')y_1 + (ax_1 + a'x_1')y_2 - (ax_2 + a'x_2')y_2 \\ &= 2ax_1y_1 + 2a'x_1'y_1 + ax_1y_2 + a'x_1'y_2 - ax_2y_2 - a'x_2'y_2 \\ &= a(2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_2) + a'(2x_1'y_1 + x_1'y_2 - x_2'y_2) \\ &= a\beta(v, u) + a'\beta(v', u) \end{aligned}$$

La prima condizione è verificata. La seconda condizione è simile:

$$\begin{aligned} au + a'u' &= a(y_1, y_2) + a'(y_1', y_2') = (ay_1 + a'y_1', ay_2 + a'y_2') \\ \beta(v, au + a'u') &= 2x_1(ay_1 + a'y_1') + x_1(ay_2 + a'y_2') - x_2(ay_2 + a'y_2') \\ &= 2ax_1y_1 + 2a'x_1'y_1 + ax_1y_2 + a'x_1'y_2 - ax_2y_2 - a'x_2'y_2 \\ &= a(2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_2) + a'(2x_1'y_1 + x_1'y_2 - x_2'y_2) \\ &= a\beta(v, u) + a'\beta(v, u') \end{aligned}$$

Quindi β è una forma bilineare.

Esempio. Siano $V = \mathbb{R}^2, v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2), v' = (x'_1, x'_2)$.
Verificare se $\beta(v, u) = x_1x_2 + y_1y_2$ è una forma bilineare.

$$\begin{aligned}\beta(av + a'v', u) &= (ax_1 + a'x'_1)(ax_2 + a'x'_2) + y_1y_2 \\ &= a^2x_1x_2 + a'^2x'_1x'_2 + aa'x'_1x_2 + y_1y_2 \\ &\neq a\beta(v, u) + a'\beta(v', u) \\ &= ax_1x_2 + ay_1y_2 + a'x'_1x'_2 + a'y'_1y'_2\end{aligned}$$

Quindi β non è una forma bilineare.

Esempio. Sia $V = \mathbb{K}^n, v = (x_1, x_2, ..., x_n), u = (y_1, y_2, ..., y_n)$ e sia $\beta(v, u) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ un "prodotto scalare standard". Si verifica facilmente che β è bilineare, quindi è un prodotto scalare.

Esempio. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $V = \{\text{funzioni continue } f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$. Date $f, g \in V$, ovvero $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, si definisce $\beta(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Questa è una forma bilineare perchè $\int_a^h (f(t) + h(t))g(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b h(t)g(t)dt$ e $\int_a^b h(f(t) + g(t))dt = h\int_a^b f(t)g(t)dt$

> **Definizione 7.2: Forma bilineare simmetrica**
> Una forma bilineare $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice **simmetrica** se $\beta(v, u) = \beta(u, v)\ \forall v, u \in V$.
> Una forma bilineare $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice **antisimmetrica** se $\beta(v, u) = -\beta(u, v)\ \forall v, u \in V$.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2$ su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e siano $v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$.

1. Verificare se $\beta(v, u) = 2x_1y_1 - 3x1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2$ è simmetrica.
   $\beta(u, v) = 2y_1x_1 - 3y_1x_2 - 3y_2x_1 + 4y_2x_2 = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2 = \beta(v, u)$.
   Quindi β è simmetrica.

2. Verificare se $\beta(v, u) = x_1y_2 - x_2y_1$ è antisimmetrica.
   $\beta(u, v) = y_1x_2 - y_2x_1 = -x_1y_2 + x_2y_1 = -\beta(v, u)$.
   Quindi β è antisimmetrica.

   Osservazione. $\beta = \det(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}))$.

3. Verificare se $\beta(v, u) = 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_1$ è simmetrica o antisimmetrica.
   $\beta(u, v) = 2y_1x_2 - 5x_1y_2 + 3y_2x_1 \neq \beta(v, u)$.
   $\beta(u, v) = 2y_1x_2 - 5x_1y_2 + 3y_2x_1 \neq -\beta(v, u)$.
   Quindi β non è simmetrica ne antisimmetrica.
   Lo si può vedere anche con un esempio numerico: $\beta((1, 0), (1, 1)) = 2$ e $\beta((1, 1), (1, 0)) = 3$.

4. Può esistere una forma bilineare che sia sia simmetrica che antisimmetrica?
   $\beta(v, u) = \beta(u, v) = -\beta(v, u) \Rightarrow \beta(v, u) = -\beta(v, u) \Rightarrow 2\beta(v, u) = 0 \Rightarrow \beta(v, u) = 0\ \forall v, u \in V$.
   Quindi solo la forma bilineare nulla è sia simmetrica che antisimmetrica.

Osservazione. Ogni forma bilineare β si può scrivere come somma di una forma bilineare simmetrica β_s e di una forma bilineare antisimmetrica β_a:

$$\begin{aligned}\beta(v, u) &= \beta_s(v, u) + \beta_a(v, u) \\ \beta_s(v, u) &= \frac{\beta(v, u) + \beta(u, v)}{2} \\ \beta_a(v, u) &= \frac{\beta(v, u) - \beta(u, v)}{2}\end{aligned}$$

> **Definizione 7.3: Matrice di una forma bilineare**
> La matrice di una forma bilineare $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ di V è la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $A_{ij} = \beta(v_i, v_j)$.

Osservazione. Se $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n, u = b_1v_1 + ... + b_nv_n$ allora $\beta(v,u) = (a_1,...,a_n)A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Esempio. Sia $v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)$ una base di $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta(v,u) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ una forma bilineare su V. Trovare la matrice di β rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

$$\beta(v_1,v_1) = 1 + 2 - 1 + 3 = 5$$
$$\beta(v_1,v_2) = 1 - 2 - 1 - 3 = -5$$
$$\beta(v_2,v_1) = 1 + 2 + 1 - 3 = 1$$
$$\beta(v_2,v_2) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3$$
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definizione 7.4: Matrice simmetrica e antisimmetrica

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice **simmetrica** se $A = A^T$ e si dice **antisimmetrica** se $A = -A^T$.

Esempio.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica.
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ non è nè simmetrica nè antisimmetrica.
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 7 & 9 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ è simmetrica.
5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -5 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica.
6. $F = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -5 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ non è nè simmetrica nè antisimmetrica.

Osservazione. Una forma bilineare β è simmetrica $\Leftrightarrow$ la sua matrice rispetto ad una base è simmetrica.
Analogamente, una forma bilineare β è antisimmetrica $\Leftrightarrow$ la sua matrice rispetto ad una base è antisimmetrica.

Osservazione. Se una forma bilineare β è antisimmetrica e $\beta \neq 0$ allora sicuramente non è diagonale. L'unica matrice antisimmetrica che è anche diagonale è la matrice nulla.
Se invece β è simmetrica allora si può trovare una base in cui la sua matrice è diagonale.

Definizione 7.5: Matrici congruenti

Due matrici A, M si dicono **congruenti** se esiste una matrice invertibile B tale che $M = B^TAB$.

Teorema 7.1: Matrici congruenti e forme bilineari

Due matrici A, M sono congruenti $\Leftrightarrow$ rappresentano la stessa forma bilineare.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ due basi di V.
Siano $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n = x_1u_1 + ... + x_nu_n$ e $u = b_1v_1 + ... + b_nv_n = y_1u_1 + ... + y_nu_n$.

Sia B la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, cioè $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Allora $\beta(v,u) = (a_1, ..., a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B^T A B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. □

Osservazione. Se β è simmetrica si può sempre trovare una base diagonalizzante.

I tre usi delle matrici

Sistemi lineari La matrice di un sistema lineare $Ax = b$ è la matrice in cui sono scritti i coefficienti del sistema. Due matrici A, M rappresentano sistemi **equivalenti** (cioè hanno la stessa soluzione) $\Leftrightarrow$ applicando l'algoritmo di Gauss si ottiene la stessa matrice a scala.

Applicazioni lineari La matrice di un'applicazione lineare $f : V \to W$ è la matrice in cui A_{ij} è l'i-esima coordinata del vettore $f(v_j)$ nella base $v_1, ..., v_n$. Due matrici A, M rappresentano la stessa applicazione lineare $\Leftrightarrow$ sono **simili**, cioè $\exists B$ tale che $M = B^{-1}AB$.

Forme bilineari La matrice di una forma bilineare è la matrice in cui $A_{ij} = \beta(v_i, v_j)$. Due matrici A, M rappresentano la stessa forma bilineare $\Leftrightarrow$ sono **congruenti**, cioè $\exists B$ tale che $M = B^T AB$.

Teorema 7.2: Diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica
Sia $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.
Allora esiste una base $u_1, ..., u_n$ di V tale che la matrice di β rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale ($\beta(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$).
In altre parole, se A è una matrice simmetrica allora esiste una matrice diagonale che è congruente ad A.

Dimostrazione. Definiamo una base qualsiasi di $V : \{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

1. Se $\beta(w_1, w_1) \neq 0$ vado allo step 2.
   Se $\beta(w_1, w_1) = 0$ ma $\exists i \mid \beta(w_i, w_i) \neq 0$ allora scambio w_1 con w_i e vado allo step 2.
   Se $\beta(w_i, w_i) = 0$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$ allora cerco i, j tali che $\beta(w_i, w_j) \neq 0$ e scambio w_1 con $w_i + w_j$, w_2 con w_j, w_i con w_1 e w_j con w_2 e vado allo step 2.

2. Dal passo 1, $\beta(w_1, w_1) \neq 0$. Definiamo una nuova base $w_1', w_2', ..., w_n'$ tale che $w_1' = w_1$ e $w_i' = w_i - \frac{\beta(w_i, w_1)}{\beta(w_1, w_1)} w_1$ $\forall i \neq 1$, in questo modo $\beta(w_1', w_i) = \beta(w_1, w_i) - \frac{\beta(w_1, w_i)}{\cancel{\beta(w_1, w_1)}} \cancel{\beta(w_1, w_1)} = 0$ $\forall i = \{2, ..., n\}$.
   Ora w_1' non lo tocco più e riapplico il passo 1 e passo 2 a $w_2', ..., w_n'$.

Dopo $n-1$ iterazioni si ottiene una base $u_1, u_2, ..., u_n$ tale che la matrice β rispetto a tale base è diagonale. □

Esempio. Sia $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $B(e_1, e_1) = 2, B(e_1, e_2) = 3, B(e_2, e_1) = 3, B(e_2, e_2) = 1$. Quindi $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A è simmetrica, quindi per il teorema precedente esiste una base u_1, u_2 di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice di B rispetto a tale base è diagonale.

Passo 1 $\beta(u_1, u_1) = 2 \neq 0$, quindi vado al passo 2.

Passo 2 Definisco $w_1' = e_1, w_2' = e_2 - \frac{\beta(e_2, e_1)}{\beta(e_1, e_1)} e_1 = e_2 - \frac{3}{2} e_1$ in modo che $\beta(w_1', w_2') = \beta(e_1, e_2) - \frac{\beta(e_1, e_2)}{\beta(e_1, e_1)} \beta(e_1, e_1) = 3 - \frac{3}{2} 2 = 0$ e $\beta(w_2', w_2') = \beta(e_2, e_2) - \frac{\beta(e_2, e_1)}{\beta(e_1, e_1)} \beta(e_1, e_2) = 1 - \frac{3}{2} 3 = -\frac{7}{2}$.

Nella nuova base $\{w_1', w_2'\}$ la matrice di B è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di B rispetto alla base $\{w_1', w_2'\}$ è diagonale.

7.2 Teorema di Sylvester

Definizione 7.6: Segnatura di una forma bilineare

Sia $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V di dimensione finita.
La **segnatura** di β è la tripletta (n_+, n_-, n_0) dove:

- n_+ è il numero di autovettori positivi di β;
- n_- è il numero di autovettori negativi di β;
- n_0 è il numero di autovettori nulli di β.

La segnatura è indipendente dalla base scelta.

Teorema 7.3: Teorema di Sylvester

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.
Allora esiste una base $u_1, u_2, ..., u_n$ di V tale che la matrice di β rispetto a tale base è diagonale con n_+ elementi 1, n_- elementi -1 e n_0 elementi 0:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Per il teorema di diagonalizzazione esiste una base $u_1, ..., u_n$ tale che la matrice di β rispetto a tale base è diagonale.
Quindi:

(a) $\beta(u_i, u_j) = a_i > 0 \ \forall i = \{1, ..., n_+\}$

(b) $\beta(u_i, u_j) = a_i < 0 \ \forall i = \{n_+ + 1, ..., n_+ + n_-\}$

(c) $\beta(u_i, u_j) = 0 \ \forall i = \{n_+ + n_- + 1, ..., n\}$

Ora, nei casi (a) e (b) posso definire $v_i = \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} u_i$ in modo che $\beta(v_i, v_i) = 1$ nel caso a e $\beta(v_i, v_i) = -1$ nel caso b.
Per il caso (c) posso definire $v_i = u_i$ in modo che $\beta(v_i, v_i) = 0$. Omettiamo la seconda parte della dimostrazione (la segnatura non dipende dalla base scelta ma solo da β. □

Teorema 7.4: Teorema di Sylvester per le forme quadratiche

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia β una forma bilineare simmetrica su V.
Allora esiste una base $u_1, u_2, ..., u_n$ di V tale che la matrice di β rispetto a tale base è diagonale del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c} r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dove $r = n_+ + n_-$ indica r volte 1.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione precedente, ma nel caso (b) definisco $v_i = \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} u_i$ in modo che $\beta(v_i, v_i) = 1$ anche nel caso b. □

Osservazione. r è il rango della matrice di β rispetto alla base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$.

Corollario 7.1: Congruenza e segnatura

Due matrici simmetriche $n \times n$ sono congruenti su $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hanno la stessa segnatura.
Sono invece congruenti su $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ hanno lo stesso rango.

Dimostrazione. Due matrici sono congruenti $\Leftrightarrow$ rappresentano la stessa forma bilineare.
Quindi, per il teorema precedente, sono tra loro congruenti $\Leftrightarrow$ sono congruenti alla stessa matrice. □

Esempio. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ sono congruenti su $\mathbb{C}$ perchè hanno entrambe rango 2 ma non sono congruenti su $\mathbb{R}$ perchè hanno segnature diverse (rispettivamente $n_{+_A} = 2, n_{-_A} = 0$ e $n_{+_B} = 1, n_{-_B} = 1$).

7.3 Forme quadratiche e matrice hessiana

Definizione 7.7: Forma quadratica

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.
La **forma quadratica** associata a β è la funzione $q : V \to \mathbb{R}$:

$$q(v) = \beta(v, v) \ \forall v \in V$$

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2, v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2), \beta(v, u) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$.
La forma quadratica associata a β è $q(v) = \beta(v, v) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$.

Osservazione. Si chiama forma quadratica perchè se $a \in \mathbb{R} e v \in V$, $q(av) = \beta(av, av) = a \cdot a \cdot \beta(v, v) = a^2 q(v)$.

Osservazione. $q(0) = 0$ perchè $q(0) = \beta(0, 0) = \beta(v - v, v - v) = \beta(v, v) - \beta(v, v) = 0$.

Definizione 7.8: Caratterizzazione di una forma quadratica

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una forma quadratica $q : V \to \mathbb{K}$ può essere:

- **definita positiva** se $q(v) > 0 \ \forall v \neq 0, v \in V$
- **definita negativa** se $q(v) < 0 \ \forall v \neq 0, q \in V$
- **semidefinita positiva** se $q(v) \geq 0 \ \forall v \in V$
- **semidefinita negativa** se $q(v) \leq 0 \ \forall v \in V$
- **indefinita** se $\exists v_1, v_2 \in V \mid q(v_1) > 0$ e $q(v_2) < 0$

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2, v = (x_1, x_2)$.

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ è definita positiva, perchè $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \ \forall x_1, x_2 \neq 0$.
- $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ è definita negativa, perchè $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 < 0 \ \forall x_1, x_2 \neq 0$.
- $q(x_1, x_2) = x_1^2$ è semidefinita positiva, perchè $q(x_1, x_2) = x_1^2 \geq 0 \ \forall x_1, x_2$, ma $q(0, x_2) = 0$.
- $q(x_1, x_2) = -x_1^2$ è semidefinita negativa, perchè $q(x_1, x_2) = -x_1^2 \leq 0 \ \forall x_1, x_2$, ma $q(0, x_2) = 0$.
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ è indefinita, perchè $q(1, 0) = 1 > 0$ e $q(0, 1) = -1 < 0$.
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2$ è semidefinita positiva, perchè $q(e_1) = 1 > 0, q(e_2) = -1 < 0$.
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 = (x_1 + 3x_2)^2$ è semidefinita positiva, perchè $e = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3x_2$ e quindi $q(-3, 1) = 0$.

Osservazione.
- q è definita positiva $\Leftrightarrow$ la segnatura di β è $(n_+ = n, n_- = 0, n_0 = 0) \Leftrightarrow$ ha solo autovalori positivi $\Leftrightarrow$ esiste una base in cui la matrice di β è I_n.

- q è definita negativa $\Leftrightarrow$ la segnatura di β è $(n_+ = 0, n_- = n, n_0 = 0) \Leftrightarrow$ ha solo autovalori negativi.
- q è semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ la segnatura di β è $(n_+ = r, n_- = 0, n_0 = n - r)$ con $r \leq n \Leftrightarrow$ ha r autovalori positivi, $n - r$ autovalori nulli e nessun autovalore negativo.
- q è semidefinita negativa $\Leftrightarrow$ la segnatura di β è $(n_+ = 0, n_- = r, n_0 = n - r)$ con $r \leq n \Leftrightarrow$ ha r autovalori negativi, $n - r$ autovalori nulli e nessun autovalore positivo.
- q è indefinita $\Leftrightarrow$ la segnatura di β è $(n_+ > 0, n_- > 0, n_0 = 0) \Leftrightarrow$ ha almeno un autovalore positivo e uno negativo.

Definizione 7.9: Matrice hessiana
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di n variabili, derivabile due volte.
Dato $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, la **matrice hessiana** di f in v è la matrice $Hf(v)$ tale che:

$$Hf(v)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(v)$$

Se le derivate seconde sono continue allora $Hf(v)$ è simmetrica.
La matrice hessiana serve per capire la natura dei punti critici ($\nabla f = 0$). Infatti, se $Hf(v)$ è:

- definita positiva $\Rightarrow f$ ha un punto di minimo locale in v.
- definita negativa $\Rightarrow f$ ha un punto di massimo locale in v.
- indefinita $\Rightarrow f$ ha un punto di sella in v.

7.4 Prodotto scalare e base ortonormale

Definizione 7.10: Prodotto scalare
Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica e definita positiva.
Notazioni quando β è un prodotto scalare:

- $\beta(v, u) = (v, u) = \langle v, u \rangle = v \cdot u$.
- $q(v) = ||v||^2$, cioè $||v|| = \sqrt{(v, u)}$.

Esempio.
- $V = \mathbb{R}^n, v = (x_1, x_2, ..., x_n), u = (y_1, y_2, ..., y_n), \beta(v, u) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ è un prodotto scalare standard. Infatti, la sua matrice nella base canonica è I_n.
- $V = \{\text{funzioni } [a, b] \to \mathbb{R}\}, \beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare? No, la funzione è bilineare e simmetrica ma non è definita positiva perchè $\beta(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$ ma $\beta(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$.
- $U = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}, \beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare? Sì, perchè è bilineare, simmetrica e definita positiva peerchè sia $t \neq 0$ allora $\exists p \in]a, b[$ tale che $f(p) \neq 0$ e quindi $\int_a^b f^2(x)dx > 0$.

Definizione 7.11: Versore
Sia $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare.
Un vettore $v \in V$ si dice **versore** se $||v|| = 1$ cioè se $(v, v) = 1$.
Inoltre, v, u sono **ortogonali** se $(v, u) = 0$.
Un insieme di vettori $v_1, ..., v_n$ sono **ortonormali** se sono versori tra loro ortogonali, cioè se $(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Teorema 7.5: Base ortonormale
Per ogni prodotto scalare esiste una base ortonormale.

Dimostrazione. Poichè un prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica definita positiva, esiste una base $v_1, ..., v_n$ tale che la matrice di β rispetto a tale base è I_n e quindi $(v_i, v_j) = (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ (cioè $v_1, ..., v_n$ è una base ortonormale). □

Esempio. Siano $V = \mathbb{R}^n, v = (x_1, ..., x_n), u = (y_1, ..., y_n)$.
$(v, u) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva (perchè nella base canonica la matrice è I_n) $\Rightarrow$ è un prodotto scalare (detto **prodotto scalare standard**).
Quindi $e_1, ..., e_n$ è una base ortonormale di V e $||v|| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Esempio. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$.
Definiamo il prodotto scalare $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ (cioè $||f|| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}$).
È definita positiva perchè $\int_a^b (f(t))^2 dt > 0$ per $f \neq 0$.

Esempio. Siano $V = \mathbb{R}^2, \beta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.
β è bilineare, simmetrica e la sua matrice rispetto alla base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$w_1 = e_1, w_2 = e_2 - \frac{1}{2}e_1$ e in questa base la matrice di β è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $v_2 = \sqrt{2}w_2 = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.
In questa base $\beta(v_1, v_1) = \frac{2}{\sqrt{2}^2} = 1$, $\beta(v_2, v_2) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1$ e la sua matrice è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perciò β è un prodotto scalare e v_1, v_2 è una base ortonormale rispetto a β (non rispetto al prodotto scalare standard).

8 Unità 8 - Lezioni 18, 19, 20

8.1 Approfondimenti sul prodotto scalare

Proposizione. Il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto scalare standard delle loro coordinate rispetto a una base ortonormale.

Dimostrazione. Siano $v, u \in V$ e $v_1, ..., v_n$ una base ortonormale. Siano $(a_1, ..., a_n)$ e $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^2$ le coordinate di v e u rispetto alla base ortonormale:

$$v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$$
$$u = b_1v_1 + ... + b_nv_n$$

Allora:

$$\begin{aligned} (v, u) &= (a_1v_1 + ... + a_nv_n,\ b_1v_1 + ... + b_nv_n) \\ &= a_1b_1(v_1, v_1) + ... + a_nb_n(v_n, v_n) \\ &= a_1b_1 + ... + a_nb_n \\ &= ((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \end{aligned}$$

□

Proposizione. Se dei vettori $v_1, ..., v_n$ sono ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Siano $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ e $a_1v_1 + ... + a_kv_k = 0$. Dobbiamo mostrare che $a_1 = ... = a_k = 0$. Per v_1:

$$0 = (v_1, 0) = (v_1, a_1v_1 + ... + a_kv_k) = a_1(v_1, v_1) + ... + a_k(v_1, v_k) = a_1(v_1, v_1) \Rightarrow a_1 = 0$$

Si noti che $(v_1, v_1) \neq 0$ perchè un prodotto scalare è definito positivo, mentre $(v_1, v_k) = 0$ perchè i vettori sono ortogonali. Lo stesso vale per ogni altro vettore (v_1, v_i) con $i = 2, ..., k$.
Analogamente si verifica che:

$$\begin{gathered} 0 = (v_2, 0) \Longrightarrow a_2 = 0 \\ \vdots \\ 0 = (v_k, 0) \Longrightarrow a_k = 0 \end{gathered}$$

Quindi $a_1 = ... = a_k = 0$ e sono linearmente indipendenti. □

Esempio. Consideriamo la forma bilinare su $\mathbb{R}^2, v = (a_1, a_2), u = (b_1, b_2)$ e $\beta(v, u) = a_1b_1 + 5a_2b_2 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$.
β è un prodotto scalare?
Osserviamo che è bilineare e simmetrica perchè $\beta(v, u) = a_1b_1 + 5a_2b_2 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 = a_1b_1 + 5a_2b_2 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 = \beta(u, v)$.
è definita positiva?
Nella base canonica, la matrice di β è $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Ponendo $v_1 = (1, 0), v_2 = e_2 - 2e_1 = -2e_1 + e_2 = (-2, 1)$, abbiamo che $\beta(v_1, v_2) = 0$ e $\beta(v_2, v_2) = 1$.
Nella base $\{v_1, v_2\}$, la matrice di β è I_2, di conseguenza la segnatura di β è $(2, 0)$ e quindi β è definita positiva, cioè è un prodotto scalare.

Esempio. Sia $V = \{\text{matrici } 2 \times 2 \text{ a coefficienti in } \mathbb{R} \text{ simmetriche}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ con la forma bilineare $\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \right\rangle = ax + 2by + cz$.
Osserviamo che è simmetrica e che, dati $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e tale che $(A, B) = 0 = (A, C) = (B, C) \Rightarrow A, B, C$ sono ortogonali $\Rightarrow$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ formano una base ortogonale di V.
Sono versori? $||A|| = 1, ||C|| = 1$, ma $||B|| = \sqrt{(B, B)} = \sqrt{2} \neq 1$ quindi non sono versori. Definisco $B^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ e B^{-1} è un versore.
Quindi la funzione bilineare data è un prodotto scalare e, rispetto ad essa, la base $\{A, B^{-1}, C\}$ è una base ortonormale.

8.2 Distanza euclidea e angolo convesso

Proposizione. Disuguaglianza di Carichy-Schwartz
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare.
Allora $\forall v, u \in V$ $|(v, u)| \leq ||v|| \cdot ||u||$ e l'uguaglianza vale se e solo se v e u sono linearmente dipendenti.

Definizione 8.1: Angolo convesso
L'angolo convesso tra $v, u \in V$ è $\theta = \arccos\left(\frac{(v,u)}{||v|| \cdot ||u||}\right)$.

Definizione 8.2: Distanza euclidea
La distanza euclidea tra due punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$ è:

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Esempio. $P = (3, 1), Q = (5, 0)$. Calcolare la distanza euclidea tra P e Q.
$d(P, Q) = \sqrt{(3-5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Proposizione. La distanza euclidea gode delle seguenti proprietà $\forall P, Q, R \in V$:

1. $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$

Dimostrazione. Dimostriamo le proprietà:

1. Poichè un prodotto scalare è definito positivo, $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \geq 0$ e quindi $||\overrightarrow{PQ}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
2. Se $a \in \mathbb{R}, ||av|| = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{a^2(v, v)} = \sqrt{a^2}\sqrt{(v, v)} = |a|\sqrt{(v, v)} = |a| \cdot ||v||$.
   In particolare, se $a = -1$, ho che $|| - v|| = ||v||$. Quindi $d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = || - \overrightarrow{QP}|| = d(Q, P)$.
3. Se $v, w \in V \Rightarrow ||v + w||^2 = (v + w, v + w) = (v, v) + 2(v, w) + (w, w) \leq ||v||^2 + 2|v, w| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$ (per la disuguaglianza di Carichy-Schwartz $2(v, w) \leq 2||v|| \cdot ||w||$).
   In particolare, per $v = \overrightarrow{PR}, w = \overrightarrow{RQ}, v + w = \overrightarrow{PQ}$, ho la disuguaglianza cercata.

$\square$

Definizione 8.3: Sottospazio ortoganale
Sia U un sottospazio vettoriale su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$.
Il **sottospazio ortogonale** a U è $U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0 \ \forall u \in U\}$.

Osservazione. $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V. Se $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in U^\perp$ allora $a_1v_1 + a_2v_2 \in U^\perp$ perchè $(a_1v_1 + a_2v_2, u) = a_1(v_1, u) + a_2(v_2, u) = 0 + 0 = 0 \ \forall u \in U$.
Inoltre, se u_1, u_k è una base di U allora $v \in U^\perp \Leftrightarrow (v, u_1) = 0, ..., (v, u_k) = 0$. In questo modo, $U^\perp$ è descritto da k equazioni cartesiane in V, quindi $\dim U^\perp = n - k = \dim V - \dim U$. Quindi $V = U \oplus U^\perp$ (cioè V è la somma diretta di U e $U^\perp$).

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\}$. Base di $U : u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (1, 2, 1)$.
$U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0 \forall u \in U \Leftrightarrow (v, u_1) = 0, (v, u_2) = 0\}$.
Calcoliamo il prodotto scalare rispetto al prodotto scalare standard:

$$(v, u_1) = (x, y, z) \cdot (1, 2, 0) = x + 2y + 0z = 0$$
$$(v, u_2) = (x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = x + 2y + z = 0$$

Quindi le equazioni cartesiane che definiscono $U^\perp$ sono:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Se invece ho il prodotto scalare $((x, y, z), (a, b, c)) = 5xa + 2xb + 2ya + yb + 3zc$, allora:

$$(v, u_1) = (x, y, z) \cdot (1, 2, 0) = 5x + 4x + 2y + 2y + 0z = 0$$
$$(v, u_2) = (x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = 5x + 4x + 2y + 2y + 3z = 0$$

Quindi le equazioni cartesiane che definiscono $U^\perp$ rispetto a questo prodotto scalare sono:

$$\begin{cases} 9x + 4y = 0 \\ 9x + 4y + 3z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

Esempio. $V = \mathbb{R}^5, U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$ tale che $x_1 - 2x_2 = 0, x_3 = 0 e x_4 = x_2 + x_5\}$.
$U = \{(2t, t, 0, t + s, s), s, t \in \mathbb{R}\}$.
Una base di U è $u_1 = (2, 1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 0, 0, 1, 1)$.

Rispetto al prodotto scalare standard, $U^\perp = \{v \in V \mid (v, u_) = 0 \forall u \in U\} = \{v \in V \mid (v, u_1) = 0, (v, u_2) = 0\}$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\dim U^\perp = 5 - 2 = 3$ e $U^\perp = \{\frac{a-c}{2}, c, b, -a, a \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Esempio. Trovare in $V = \mathbb{R}^2$ la retta r perprendicolare a $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$ e passante per il punto $P = (2, 3)$.
Rispetto al prodotto scalare standard, $U = \langle u_1 = (2, -1)\rangle \Rightarrow U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (v, u_1) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$.
La retta r è parallela a $U^\perp$ e passante per $P = (2, 3)$, quindi $r = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 2 \cdot 2 - 3 = 1\}$.
L'equazione di r è $2x - y = 1$.

8.3 Isometrie

Definizione 8.4: Isometria
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare.
Un'applicazione lineare $f : V \to V$ è un'**isometria** di V se preserva il prodotto scalare, cioè:

$$(f(v), f(u)) = (v, u) \ \forall v, u \in V$$

Osservazione. "Isometria" = "stessa misura"

Proposizione. f è un isometria $\Leftrightarrow ||f(v)|| = ||v|| \ \forall v, u \in V$.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le implicazioni:

$\Rightarrow$ Se f è un'isometria, allora $||f(v)||^2 = (f(v), f(v)) = (v, v) = ||v||^2$.

$\Leftarrow$ Dati $v, u \in V$, se f conserva le norme, calcoliamo:

$$\begin{aligned} ||v + u||^2 - ||v - u||^2 &= (v + u, v + u) - (v - u, v - u) \\ &= \cancel{(v, u)} + \cancel{(u, u)} + 2(v, u) - \cancel{(v, v)} - \cancel{(u, u)} + 2(v, u) \\ &= 4(v, u) \\ &\Rightarrow (v, u) = \frac{||v + u||^2 - ||v - u||^2}{4} \end{aligned}$$

Quindi se f conserva le norme allora conserva anche il prodotto scalare.

□

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard. Dato $v = (x, y) \in V$, consideriamo l'applicazione $f : V \to V$ definita da:

$$f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

f è un'isometria?
Sì, perchè $||v|| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $||f(v)|| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 + (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = ||v||$.

Osservazione. Una isometria conserva le distanze tra i punti e conserva anche gli angoli:

$$\arccos\left(\frac{(v, u)}{\sqrt{(v, v)}\sqrt{(u, u)}}\right) = \arccos\left(\frac{(f(v), f(u))}{||f(v)||||f(u)||}\right)$$

(angolo convcesso tra v e u, angolo convesso tra $f(v)$ e $f(u)$).

Osservazione. Non vale il contrario, cioè se f conserva gli angoli non è detto che sia un'isometria.

Esempio. $f : V \to V, f(v) = 2y \in V$. L'angolo tra v e u è:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(v,u)}{||v|| \cdot ||u||}\right) = \arccos\left(\frac{(2y,2y)}{||2y|| \cdot ||2y||}\right) = \arccos\left(\frac{\cancel{4}(y,y)}{\cancel{4}||y||^2}\right)$$

Quindi f conserva gli angoli, ma non è un'isometria perchè $||f(v)|| = ||2y|| = 2||y|| \neq ||y||$.

Teorema 8.1: Isometrie e isomorfismo
Ogni isometria è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia f un'isometria. Se $v \in \ker f$, allora $f(v) = 0$ e quindi $||v|| = ||f(v)|| = 0$.
Ma allora $v = 0$ e quindi $\ker f = \{0\}$. Quindi f è iniettiva.
Di conseguenza, per il teorema del rango è anche suriettiva (perchè $\dim V = \dim\ \mathrm{Im}\ f + \dim\ker f$ e $\dim\ker f = 0$). □

Osservazione. Non vale il contrario, cioè se f è un isomorfismo non è detto che sia un'isometria. Ad esempio, $f = 2I$, ovvero $f(v) = 2v\ \forall V \in V$, è un isomorfismo ma non è un'isometria perchè $||f(v)|| = 2||v|| \neq ||v||$.

Proposizione. Sua $f : V \to V$ è un'isometria e sia λ un autovalore di f. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

Dimostrazione. Se λ è un autovalore di f, allora $\exists v \in V, v \neq 0 \mid f(v) = \lambda v$ e quindi:

$$\begin{aligned} ||f(v)|| &= ||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \\ &= ||v|| \quad \text{(perchè } f \text{ è un'isometria)} \\ &\Rightarrow |\lambda| = 1 \end{aligned}$$

□

Osservazione. f può avere autovalori non reali, ad esempio se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, data da $f(x,y) = (y,-x)$ è un'isometria rispetto al prodotto scalare standard (perchè $||(x,y)|| = x^2 + y^2 = ||(y,-x)||$) ma $\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$, allora ha come autovalori $\lambda = i$ e $\lambda = -i$, entrambi $\in \mathbb{C}$.

Definizione 8.5: Matrice ortogonale
Una matrice A è **ortogonale** se $A^tA = I_n$ (cioè $A^t = A^{-1}$). In altre parole i vettori colonna di A formano una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale perchè $A^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ è ortogonale perchè $A^tA = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Proposizione. Se A è ortogonale $det(A) = \pm 1$.

Dimostrazione. Per definizione: $1 = \det(I_n) = \det(A^tA) = \det(A^t) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$. □

Osservazione. Non vale il contrario, cioè se $\det(A) = \pm 1$ non è detto che A sia ortogonale. Ad esempio, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ha $\det(A) = 1$ ma non è ortogonale perchè $A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq I_2$.

Teorema 8.2: Basi ortonormali e matrice del cambio di base (T1)
Sia $v_1, ..., v_n$ una base ortonormale (BON). Allora anche $w_1, ..., w_n$ è una base ortonormale $\Leftrightarrow$ la matrice del cambio di base è ortogonale.

Dimostrazione. Poichè $(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$,
allora la matrice del prodotto scalare nella base $v_1, ..., v_n$ è I_n.
Quindi se B è la matrice del cambiamento di base, la matrice del prodotto scalare in base $w_1, ..., w_n$ è $B^t I_n B = B^t B$. Quindi $w_1, ..., w_n$ è una BON $\Leftrightarrow B^t B = I_n \Leftrightarrow B$ è ortogonale. □

Teorema 8.3: Isometrie e basi ortogonali (T2)
Una applicazione lineare $f : V \to V$ è un'isometria $\Leftrightarrow$ manda basi ortonormali in basi ortonormali.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le implicazioni:

- $\Rightarrow$ Se f è una isometria e $v_1, ..., v_n$ una base ortonormale di V, allora $(f(v_i), f(v_j)) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, cioè $f(v_1), ..., f(v_n)$ è una base ortonormale di V.
- $\Leftarrow$ Sia $f : V \to V$ lineare, sia $v_1, ..., v_n$ una base ortonormale di V tale che anche $f(v_1), ..., f(v_n)$ è una base ortonormale di V. Vogliamo mostrare che f è un'isometria.
  Dati $v, u \in V$, scriviamo $v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$ e $u = b_1 v_1 + ... + b_n v_n$.
  Poichè f è lineare, $f(v) = a_1 f(v_1) + ... + a_n f(v_n)$ e $f(u) = b_1 f(v_1) + ... + b_n f(v_n)$.
  Quindi $(v, u) = a_1 b_1 + ... + a_n b_n = (f(v), f(u))$ $\forall v, u \in V$ cioè f è un'isometria.

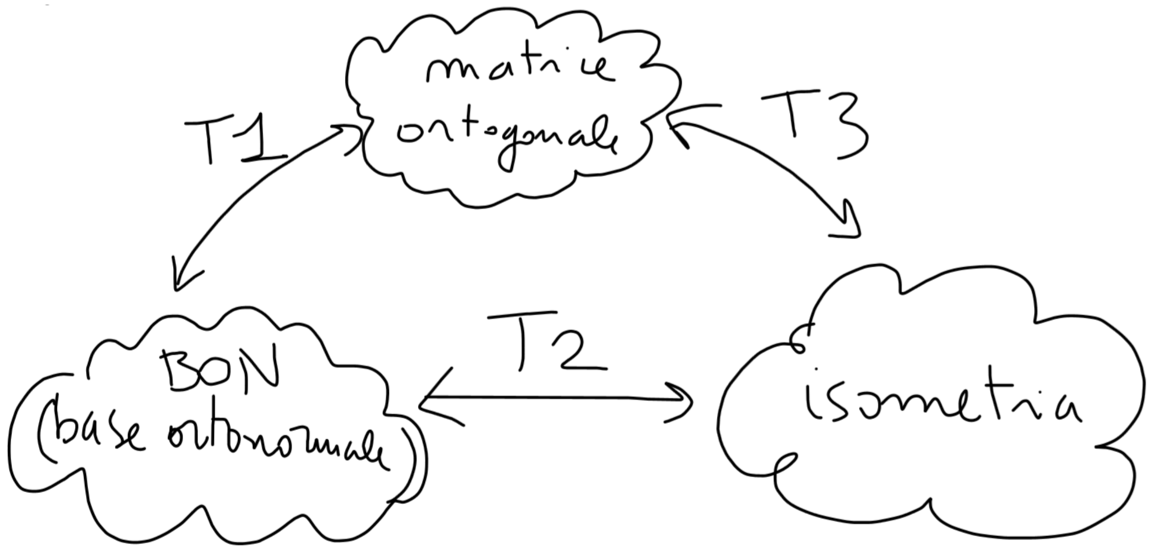
□

Teorema 8.4: Isometrie e matrici ortogonali (T3)
Un'applicazione lineare $f : V \to V$ è un'isometria $\Leftrightarrow$ la sua matrice in una qualsiasi base ortonormale è una matrice ortogonale.

Dimostrazione. Sia $v_1, ..., v_n$ una base ortonormale di V e sia A la matrice di f in tale base, cioè:

$$f(v_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + ... + a_{n1} v_n$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + ... + a_{nn} v_n$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dunque $(f(v_i), f(v_j)) = a_{1i} a_{1j} + ... + a_{ni} a_{nj}$ = prodotto scalare standard tra la i-esima e la j-esima colonna di $A = (A^t A)_{ij}$.
Quindi f è un'isometria $\Leftrightarrow$ (utilizzando il teorema precedente) $f(v_i), ..., f(v_n)$ è una base ortonormale di
$\Leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow (A^T A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow (A^T A)_{ij} = I_n \Leftrightarrow A$ è ortogonale. □



Esempio. $V = \mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. $f : V \to V$ definita da $f(x, y, z) = (z, -x, y)$. f è un'isometria?

Soluzione 1 Calcoliamo le norme: $||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = ||(z, -x, y)||$. Quindi f è un'isometria.

Soluzione 2 f manda la base ortonormale e_1, e_2, e_3 in $f(e_1) = (0, -1, 0) = -e_2, f(e_2) = (0, 0, 1) = e_3, f(e_3) = (1, 0, 0) = e_1$ che è una base ortonormale di V. Quindi f è un'isometria per il teorema T2.

Soluzione 3 La matrice di f rispetto alla base ortonormale e_1, e_2, e_3 è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $A^T A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.
Quindi f è un'isometria per il teorema T3.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard.
$f : V \to V$ definita da $f(x, y, z) = (z, x, y)$. f è un'isometria?
Sì perchè $||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = ||(z, x, y)||$.

Esempio. Dimostrare che se due matrici A, M sono congruenti, allora i loro determinanti hanno lo stesso segno.
Se A e M sono congruenti, allora esiste una matrice invertibile B tale che $M = B^t AB$.
Allora $\det(M) = \det(B^t AB) = \det(B^t) \det(A) \det(B) = (\det(B))^2 \det(A)$.
Ma $(\det(B))^2 \geq 0$ e quindi $\det(M)$ e $\det(A)$ hanno lo stesso segno.

Osservazione. In particolare, la matrice di un prodotto scalare deve avere determinante positivo, perchè è congruente alla matrice I_n per il teorema di Sylvester.

Esempio TEST esame Data $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ è vero che l'unica soluzione è $a_1 = a_2 = a_3 = 0$?
No, non è vero. Infatti, se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, allora l'unica soluzione è $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
Se invece sono linearmente dipendenti, allora esistono $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tali che $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ con almeno uno tra a_1, a_2, a_3 diverso da zero.