

# Riassunto Algebra e Geometria

Maicol Battistini

14 maggio 2025

## Indice

<b>1</b>	<b>Unità 1 - Lezioni 1, 2</b>	<b>3</b>
1.1	Insiemi . . . . .	3
1.2	Funzioni e applicazioni . . . . .	3
1.3	Numeri complessi . . . . .	6
1.4	Campo e spazio vettoriale . . . . .	6
1.5	Combinazione e Indipendenza lineare . . . . .	7
1.6	Base e dimensione . . . . .	9
1.6.1	Completamento e estrazione di una base . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Unità 2 - Lezioni 3, 4</b>	<b>11</b>
2.1	Approfondimenti sulle basi . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Unità 3 - Lezioni 5, 6, 7</b>	<b>15</b>
3.1	Approfondimento sulle funzioni . . . . .	15
3.2	Isomorfismi . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Unità 4 - Lezioni 8, 9</b>	<b>22</b>
4.1	Matrici . . . . .	22
4.1.1	Operazioni tra matrici . . . . .	22
4.1.2	Prodotto riga per colonna tra matrici . . . . .	23
4.1.3	Proprietà associativa . . . . .	23
4.1.4	Matrice identità . . . . .	24
4.1.5	Matrice inversa . . . . .	24
4.1.6	Matrici associate ad un'applicazione lineare . . . . .	25
4.1.7	Matrici invertibili . . . . .	27
4.1.8	Rango di una matrice . . . . .	28
4.1.9	Cambiamenti di base . . . . .	28
4.1.10	Similitudine tra matrici quadrate . . . . .	29
4.1.11	Conseguenze del teorema del rango . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Unità 5 - Lezioni 10, 11, 12</b>	<b>31</b>
5.1	Metodo di Gauss . . . . .	31
5.2	Algoritmo di Gauss-Jordan . . . . .	31
5.3	Determinante di una matrice . . . . .	32
5.3.1	Esercizio parametrico . . . . .	36
5.3.2	Geometria affine . . . . .	37
5.4	Matrici e sistemi lineari . . . . .	38
5.5	Applicazioni alla geometria analitica . . . . .	40
5.5.1	Retta passante per due punti . . . . .	40
5.5.2	Piano passante per tre punti . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Unità 6 - Lezioni 13, 14, 15</b>	<b>43</b>
6.1	Endomorfismi e autovettori . . . . .	43
6.1.1	Passo 1: Trovare gli autovalori di $f$ . . . . .	44
6.1.2	Passo 2: Trovare gli autovettori di $f$ per ogni autovalore . . . . .	47

<b>7</b>	<b>Unità 7 - Lezioni 16, 17</b>	<b>52</b>
7.1	Forme bilineari e prodotti scalari . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Unità 8 - Lezioni 18, 19, 20</b>	<b>57</b>
8.1	Isometrie . . . . .	59

# 1 Unità 1 - Lezioni 1, 2

## 1.1 Insiemi

### Definizione 1.1: Relazione di un insieme

Una relazione su un insieme  $A$  è un sottoinsieme  $R$  di  $A \times A$ .  
Scrivo  $a_1 R a_2$  se  $(a_1, a_2) \in R$  e dico “ $a_1$  è in relazione con  $a_2$ ”

### Definizione 1.2: Relazione di equivalenza

Una relazione  $R$  è una relazione di equivalenza se valgono le seguenti proprietà:

**Riflessiva:**  $a R a \forall a \in A$

**Simmetrica:**  $a R b \Rightarrow b R a$

**Transitiva:**  $a R a, b R c \Rightarrow a R c$

### Definizione 1.3: Congruenza

$$\mathbb{Z} = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

Sia  $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

$$a \equiv b (n)$$

“ $a$  è congruo a  $b$  modulo  $n$ ”

se  $a - b$  è multiplo di  $n$  (cioè  $\exists h \mid a - b = hn$ )

Esempi:

$$8 \equiv 23(5)$$

$$8 \not\equiv 17(5)$$

$$4 \equiv 10, 16, -2, -8(6)$$

$$4 \not\equiv 13(6)$$

**Osservazione.** Essere congrui modulo  $n$  è una relazione di equivalenza

*Dimostrazione.* Dimostro le tre proprietà della relazione di equivalenza:

Riflessiva:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \equiv a(n) \text{ perchè } a - a = 0 = 0 \cdot n$$

Simmetrica:

se  $a \equiv b(n)$ , allora  $b \equiv a(n)$  perchè se  $a - b = hn \Rightarrow b - a = -hn$

Transitiva:

se  $a \equiv b(n)$  e  $b \equiv c(n)$ , allora  $a \equiv c(n)$  perchè se  $a - b = hn$  e  $b - c = kn$ , allora  $a - c = (a - b) + (b - c) = (h + k)n$

□

## 1.2 Funzioni e applicazioni

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f(a) = b$$

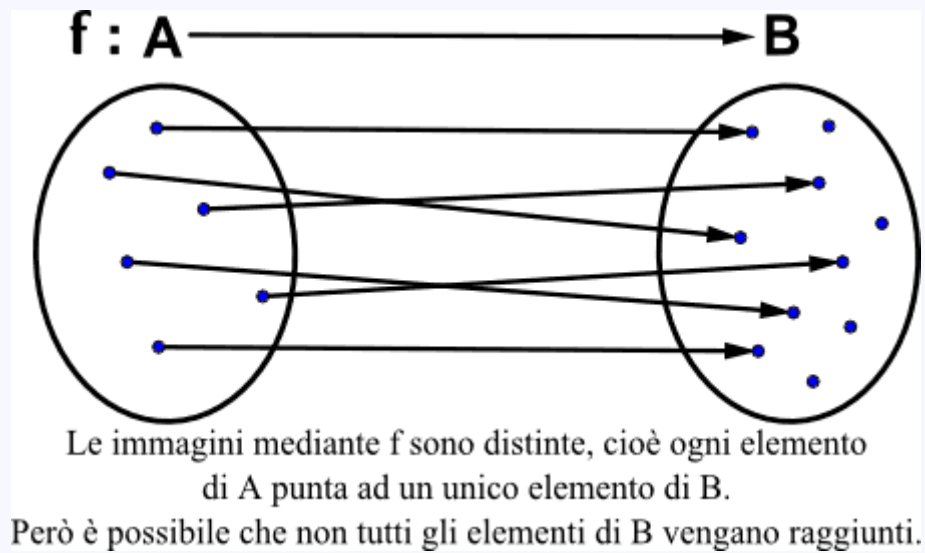
$f$  è una applicazione se ad ogni  $a \in X$  corrisponde uno e un solo  $b \in Y$

#### Definizione 1.4: Funzione iniettiva

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è iniettiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ovvero: “due elementi distinti di  $X$  vengono mandati in elementi distinti di  $Y$ ”

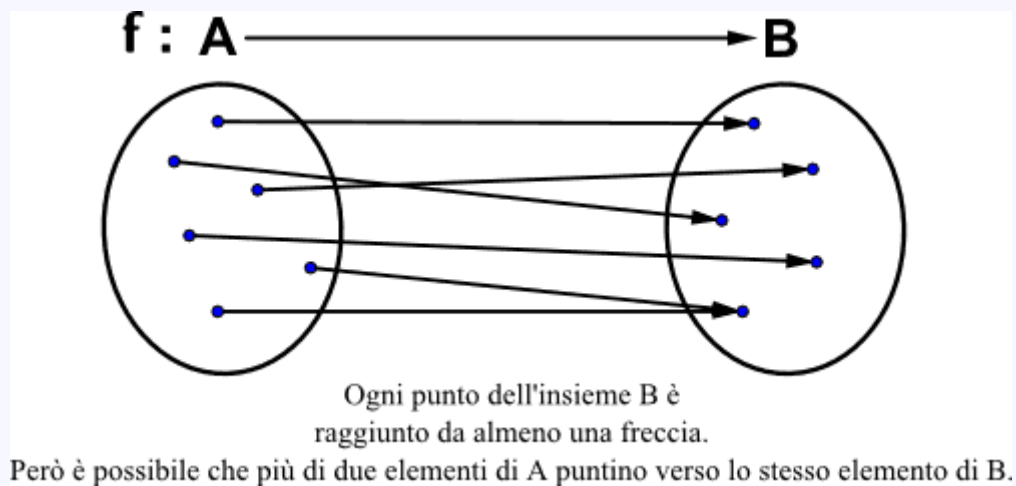


#### Definizione 1.5: Funzione suriettiva

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è suriettiva se:

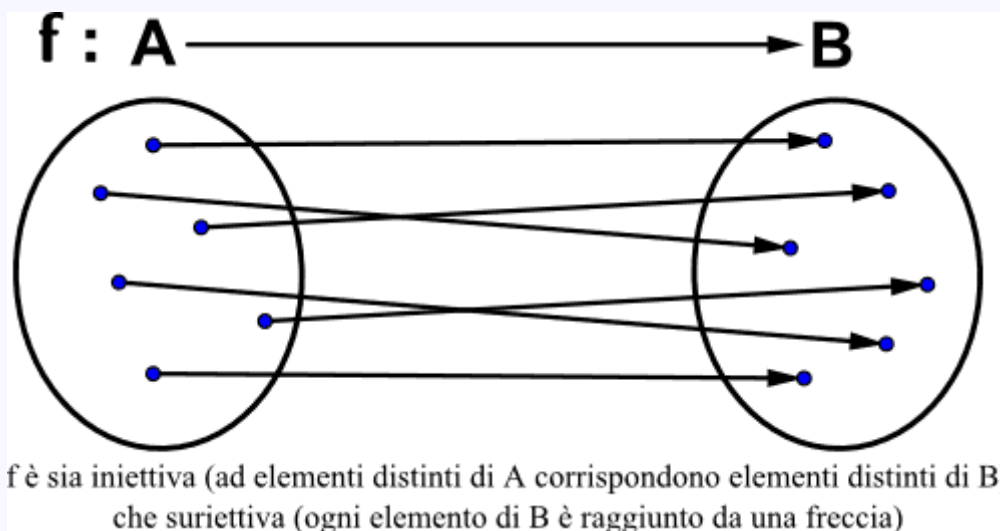
$$Y = \text{Im } f = \{y \in Y \mid \exists x \in X \mid f(x) = y\}$$

Ovvero: “ogni elemento di  $Y$  è immagine di almeno un elemento di  $X$ ”

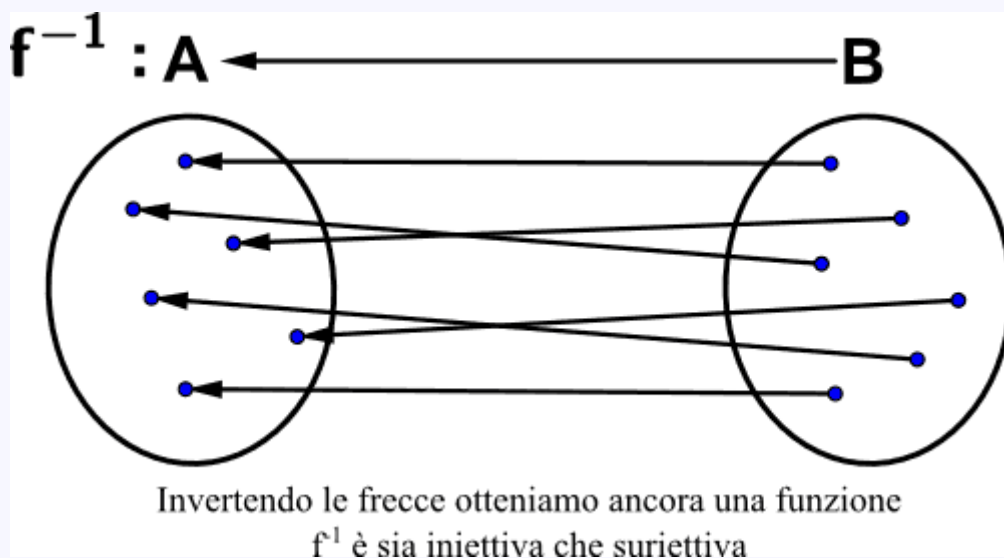


### Definizione 1.6: Funzione biunivoca

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è biunivoca se è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni  $y \in Y$  esiste un solo  $x \in X$  tale che  $f(x) = y$



**Esempio.** Una funzione biunivoca è invertibile, cioè  $\exists f^{-1} : Y \rightarrow X$  tale che  $f^{-1} \circ f = Id_X$  e  $f \circ f^{-1} = Id_Y$



**Esempio.**

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$$

Iniettiva? No, perchè  $f(-1) = f(1) = 1$

Suriettiva? No, perchè  $Im f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

Biunivoca? No, perchè non è iniettiva e non è suriettiva

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$$

Nota:  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

Iniettiva? No, perchè  $f(-1) = f(1) = 1$

Suriettiva? Sì, perchè  $Im f = \mathbb{R}^+$

Biunivoca? No, perchè non è iniettiva

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Iniettiva? Sì, perchè  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Suriettiva? No, perchè  $Im f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

Biunivoca? No, perchè non è suriettiva

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$$

Iniettiva? Sì, perchè  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Suriettiva? Sì, perchè  $Im f = \mathbb{R}^+$

Biunivoca? Sì, perchè è iniettiva e suriettiva

Inversa:  $\exists f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(y)$  è l'unico  $x \in \mathbb{R}^+$  tale che  $f(x) = y$  (cioè  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ )

### 1.3 Numeri complessi

#### Definizione 1.7: Numero complesso

Un numero complesso è un numero della forma:

$$z = a + ib$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i$  è l'unità immaginaria, cioè  $i^2 = -1$ .

Un numero complesso rientra nell'insieme dei numeri complessi, indicato con  $\mathbb{C}$ .

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

In questo modo  $x^2 + 1 = 0$  è risolto da  $x = \pm i$ . Ogni elemento non nullo di  $\mathbb{C}$  ha l'inverso:

$$z = a + ib \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

perchè:

$$z \cdot z^{-1} = (a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

#### Teorema 1.1: Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni equazione polinomiale a coefficienti in  $\mathbb{C}$  ha soluzioni in  $\mathbb{C}$ .

### 1.4 Campo e spazio vettoriale

#### Definizione 1.8: Campo

Un campo è un insieme  $\mathbb{K}$  con due operazioni **somma** e **prodotto**, commutative e associative, con proprietà distributiva, elementi neutri 0 e 1, opposto di ogni elemento e inverso di ogni elemento non nullo.

- Ogni elemento di  $X$  ha un opposto  $-x$ .
- Ogni elemento di  $X \neq 0$  ha un inverso  $x^{-1}$ .

**Esempio.**  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  non sono campi,  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sono campi.

**Esempio.**  $\mathbb{Z}_5$  è un campo? Cioè è vero che se  $[a] \neq [0]$  allora  $\exists [b] \mid [a] \cdot [b] = [1]$ ?

$$[2] \cdot [3] = [6] = [1] \Rightarrow [2]^{-1} = [3], [3]^{-1} = [2]$$

$$[4] \cdot [4] = [16] = [1] \Rightarrow [4]^{-1} = [4]$$

Quindi,  $\mathbb{Z}_5$  è un campo.

**Esempio.**  $\mathbb{Z}_4$  è un campo?

$$[2] \cdot [2] = [4] = [0] \Rightarrow \text{l'inverso non esiste}$$

$$[2] \cdot [0] = [0] \neq [1] \Rightarrow \text{l'inverso non esiste}$$

Quindi,  $\mathbb{Z}_4$  non è un campo.

**Osservazione.**  $\mathbb{Z}_p$  è un campo se  $p$  è un numero primo.

#### Definizione 1.9: Spazio vettoriale

Sia  $\mathbb{K}$  un campo. Uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  è un insieme  $V$  con due operazioni:

**Somma**  $+$  :  $\forall v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 + v_2 \in V$

**Prodotto per scalare**  $\cdot$  :  $\forall a \in \mathbb{K}, \forall v \in V \rightarrow a \cdot v \in V$

tali che valgano le seguenti proprietà:

**Somma:** Associativa, Commutativa, Elemento neutro 0, Elemento opposto  $-v$

**Prodotto per scalare:** Associativa, Distributiva rispetto alla somma, Elemento neutro 1

Dato uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $\mathbb{K}$ , gli elementi di  $V$  sono detti **vettori** e gli elementi di  $\mathbb{K}$  sono detti **scalari**.

#### Definizione 1.10: Sottospazio vettoriale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ . Un sottospazio vettoriale di  $V$  è un sottoinsieme  $U$  di  $V$  non vuoto (cioè  $0 \in U$ ) che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare, cioè:

$$u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$$

$$a \in \mathbb{K}, u \in U \Rightarrow a \cdot u \in U$$

**Esempio.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  perchè dati  $v_1 = (x, 2x), v_2 = (x', 2x') \in U$  e  $a \in \mathbb{R}$ :

**Non vuoto**  $0 = (0, 0) \in U$

**Somma**  $v_1 + v_2 = (x + x', 2x + 2x') = (x + x', 2(x + x')) \in U$

**Prodotto**  $a \cdot v_1 = a \cdot (x, 2x) = (a \cdot x, a \cdot 2x) = (a \cdot x, 2a \cdot x) \in U$

## 1.5 Combinazione e Indipendenza lineare

#### Definizione 1.11: Combinazione lineare

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . Diciamo che  $v \in V$  è una combinazione lineare di  $v_1, v_2, \dots, v_n$  se:

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

**Esempio.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, v_1 = (2, 0), v_2 = (0, -1), v = (1, 3)$  è una combinazione lineare di  $v_1$  e  $v_2$  perchè:

$$\frac{1}{2} v_1 + (-3) v_2 = (1, 0) + (0, 3) = (1, 3) = v$$

Se non li vedo ad occhio, posso risolvere il sistema per cercare i coefficienti:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = (2a_1, 0) + (0, -a_2) = (2a_1, -a_2) = (1, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ -a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -3 \end{cases}$$

**Esempio.**  $u_1 = (1, 0), u_2 = (-1, 0), u = (1, 3)$  NON è una combinazione lineare di  $u_1$  e  $u_2$  perchè  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 u_1 + a_2 u_2 = (2a_1, 0) + (-a_2, 0) = (2a_1 - a_2, 0) = (1, 3)$  non ha soluzione:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Infatti  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 u_1 + a_2 u_2 \neq u$

#### Definizione 1.12: Span

Uno spazio vettoriale  $V$  è detto **generato** da un insieme di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  se ogni  $v \in V$  è una combinazione lineare di tali vettori. In questo caso  $V$  è detto **span** di  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e si scrive:

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, v_1 = (2, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, -1, 0)$

$$\begin{aligned} U = \langle v_1, v_2 \rangle &= \{(a_1 v_1 + a_2 v_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, -a_2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2a_1, a_2, -a_2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \mid \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$   
 $p_1 = x, p_2 = x^2, q = 2x^2 - 7x$  è una combinazione lineare di  $p_1$  e  $p_2$  perchè  $q = 2x^2 - 7x = 2x^2 - 7x + 0 \cdot x = 2x^2 - 7x + 0 \cdot x^2$   
 $h = 3x^3 - 8x, l = 2x^2 + 3$  non sono combinazioni lineari di  $p_1$  e  $p_2$  perchè  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 p_1 + a_2 p_2 \neq h, l$ .  
 Il sottospazio vettoriale generato da  $p_1$  e  $p_2$  è  $\langle p_1, p_2 \rangle = \{a_1 p_1 + a_2 p_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_1 x + a_2 x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ , ovvero tutti i polinomi di grado  $\leq 2$  con termine noto nullo.

**Osservazione.** Un sottoinsieme non vuoto  $U$  di uno spazio vettoriale  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  se e solo se  $U$  contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi elementi (infatti, dati  $u_1, u_2 \in U$  e  $u_1 + u_2 \in U$  e  $a \in \mathbb{K}$  sono combinazioni lineari particolari)

#### Definizione 1.13: Indipendenza lineare

Un insieme di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  è detto **linearmente indipendente** se nessuno di loro è combinazione lineare degli altri o, equivalentemente, l'unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Invece, è detto **linearmente dipendente** se esiste almeno un vettore che è combinazione lineare degli altri.

**Esempio.**  $v_1 = (2, 0), v_2 = (-1, 0)$  sono linearmente dipendenti perchè  $v_1 = -2v_2$  ( $v_1$  è combinazione lineare di  $v_2$ ), ovvero:

$$\exists a_1 = 1, a_2 = 2 \mid a_1 v_1 + a_2 v_2 = 1 \cdot (2, 0) + (2) \cdot (-1, 0) = (0, 0)$$

**Esempio.**  $u_1 = (2, 0), u_2 = (0, -1)$  sono linearmente indipendenti perchè  $a_1 u_1 \neq u_2 \forall a_1 \in \mathbb{R}$ , ovvero:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0 &\Leftrightarrow (2a_1, -a_2) = (0, 0) \\ \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ -a_2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



## 1.6 Base e dimensione

### Definizione 1.14: Base

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ .

Un insieme di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  è detto **base** di  $V$  se sono linearmente indipendenti e generano  $V$ , cioè:

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$ ,  $v_3 = (2, 1)$  generano  $V$  ma non sono linearmente indipendenti perchè  $v_3 = 2v_1 + v_2$ . Invece  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$  sono linearmente indipendenti e generano  $V$  ( $a_1v_1 + a_2v_2 = (a_1, a_2)$ ), quindi sono una base di  $V$ .

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $v_1 = (2, 1)$ ,  $v_2 = (1, -3)$  sono una base di  $V$ ? Verifichiamolo:

**Linearmente indipendenti?**  $a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

$$a_1(2, 1) + a_2(1, -3) = (0, 0)$$

$$(2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - 3a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

**Generano  $V$ ?** Ovvero che ogni  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  si scrive come combinazione lineare di  $v_1$  e  $v_2$ .

$$(x, y) = a_1(2, 1) + a_2(1, -3)$$

$$(x, y) = (2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = x \\ a_1 - 3a_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3x-y}{7} \\ a_2 = \frac{x+y}{7} \end{cases}$$

Quindi,  $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid a_1v_1 + a_2v_2 = v$ .

Quindi  $v_1 = (2, 1)$ ,  $v_2 = (1, -3)$  sono una base di  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio.** Dire se  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$ ,  $v_3 = (1, 0, 1)$  sono una base di  $\mathbb{R}^3$

**Passo 1** Verifico se sono linearmente indipendenti, ovvero se è vero che se  $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$

$$a_1(1, 1, 0) + a_2(0, 1, 1) + a_3(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(a_1 + a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Sì perchè l'unica soluzione è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli. Quindi,  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti.

**Passo 2** Verifico se generano  $\mathbb{R}^3$ , ovvero se  $\forall v \in \mathbb{R}^3, \exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$$(a_1 + a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_2 + a_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = x - z \\ a_1 + a_2 = y \\ a_3 = z - a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 = x + y - z \\ -2a_2 = x - y + z \\ a_3 = z + \frac{x-y-z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{x+y-z}{2} \\ a_2 = \frac{x-y-z}{2} \\ a_3 = \frac{x-y+z}{2} \end{cases}$$

Quindi esiste una soluzione per ogni  $v \in \mathbb{R}^3$ , quindi  $v_1, v_2, v_3$  generano  $\mathbb{R}^3$ . Di conseguenza,  $v_1, v_2, v_3$  sono una base di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esempio.** Dire se  $u_1 = (1, 3, 2)$ ,  $u_2 = (-1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (2, 1, -1)$  sono una base di  $\mathbb{R}^3$

**Passo 1** Verifico se sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned}
 a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= (0, 0, 0) \\
 a_1(1, 3, 2) + a_2(-1, 0, 1) + a_3(2, 1, -1) &= (0, 0, 0) \\
 (a_1 - a_2 + 2a_3, 3a_1 + a_3, 2a_1 - a_2 - a_3) &= (0, 0, 0) \\
 \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_2 - 5a_3 = 0 \\ 3a_2 - 5a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

No perchè esiste una soluzione in cui non tutti i coefficienti sono nulli. Quindi  $u_1, u_2, u_3$  non sono linearmente indipendenti.

**Passo 2** Verifico se generano  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 &= (x, y, z) \\
 (a_1 - a_2 + 2a_3, 3a_1 + a_3, 2a_1 - a_2 - a_3) &= (x, y, z) \\
 \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = x \\ 3a_1 + a_3 = y \\ 2a_1 - a_2 - a_3 = z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = x \\ 3a_2 - 5a_3 = y - 3x \\ 3a_2 - 5a_3 = z - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = y - 3x - z + 2x \Leftarrow x + z = y \\ \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

Facendo combinazioni lineari di  $u_1, u_2, u_3$  si ottengono solo vettori di  $\mathbb{R}^3 \mid x+z=y$ , quindi  $u_1, u_2, u_3$  non generano  $\mathbb{R}^3$ .

#### Definizione 1.15: Coordinate

$a_1, a_2, \dots, a_n$  sono dette **coordinate** di  $v$  rispetto alla base  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

**Esempio.** Trovare le coordinate di  $v = (-4, -8)$  rispetto alla base  $v_1 = (2, 1), v_2 = (1, -3)$  di  $\mathbb{R}^2$ . Basta trovare gli unici  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tali che  $a_1 v_1 + a_2 v_2 = v$ :

$$\begin{aligned}
 a_1(2, 1) + a_2(1, -3) &= (-4, -8) \\
 (2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2) &= (-4, -8) \\
 \begin{cases} 2a_1 + a_2 = -4 \\ a_1 - 3a_2 = -8 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

#### 1.6.1 Completamento e estrazione di una base

Se si hanno dei vettori linearmente indipendenti che non generano  $V$ , si può “**completarli a una base**”, cioè aggiungere altri vettori fino ad ottenere una base.

**Esempio.**  $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)$  sono linearmente indipendenti ma non generano  $\mathbb{R}^3$ :  $\langle v_1, v_2 \rangle = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$

Aggiungendo  $v_3 = (0, 0, 1)$  si ottiene una base di  $\mathbb{R}^3$ :  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ .



$v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti perchè  $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .  $v_3$  poteva essere qualsiasi vettore con  $z \neq 0$

Se invece si hanno dei vettori che generano  $V$  si può “**estrarne una base**”, cioè rimuovere dei vettori linearmente dipendenti fino ad ottenere una base.

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2, v_1 = (1, 0), v_2 = (2, 0), v_3 = (0, 1), v_4 = (2, 5)$  generano  $V$  ma non sono linearmente indipendenti perchè  $v_4 = 2v_1 + 5v_3$  e  $v_2 = 2v_1$ . Scartando  $v_2$  e  $v_4$  si ottiene una base di  $\mathbb{R}^2$ :  $\langle v_1, v_3 \rangle = \mathbb{R}^2$ . Un'altra estrazione possibile sarebbe stata  $\langle v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^2$ .

## 2 Unità 2 - Lezioni 3, 4

### 2.1 Approfondimenti sulle basi

#### Teorema 2.1: Teorema delle coordinate

Un insieme di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è una base di uno spazio vettoriale  $V$  se e solo se ogni vettore  $v \in V$  può essere scritto in modo unico come combinazione lineare di  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , ovvero:

$$\forall v \in V, \exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$



Nota: Il simbolo  $\exists!$  vuol dire “esiste ed è unico”.

*Dimostrazione.* Dimostrazione del teorema delle coordinate per i due versi:

$\Rightarrow$  Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una base di  $V$ , cioè generano  $V$  e sono linearmente indipendenti.

Quindi,  $\forall v \in V, \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ .

Per dimostrare l'unicità, supponiamo che esistano  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{K} \mid v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$ .

Sottraendo,  $0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + (a_n - b_n)v_n$ .

Poichè  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti, allora  $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ . Per cui,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono uniche.

$\Leftarrow$  Per ipotesi  $\forall v \in V, \exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ .

Dunque  $v_1, v_2, \dots, v_n$  generano  $V$  e, poichè  $0 \in V$ , gli unici coefficienti pesibili sono  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

Per cui,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti. e quindi sono una base di  $V$ .

□

#### Teorema 2.2: Teorema della dimensione

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ . Tutte le basi di  $V$  hanno lo stesso numero di elementi, detto **dimensione** di  $V$  e indicato con  $\dim V$ .

#### Teorema 2.3: Teorema di completamento ed estrazione

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $\dim V = d$ .

Allora:

1. Qualunque insieme linearmente indipendente di  $V$  è composto da  $k \leq d$  vettori. Posso completare l'insieme a una base di  $V$  aggiungendo  $d - k$  vettori.
2. Qualunque insieme che genera  $V$  è composto da  $h$  vettori con  $h \geq d$ . Posso estrarre una base di  $V$  selezionando  $d$  vettori.

#### Corollario 2.1

Se  $V$  ha  $\dim n$ , un insieme  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è linearmente indipendente se e solo se genera  $V$ .

**Esempio.** Determinare la dimensione di  $\mathbb{R}^3$

Una base di  $\mathbb{R}^3$  è formata da tre vettori linearmente indipendenti che generano  $\mathbb{R}^3$ .

Ad esempio,  $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$  è una base di  $\mathbb{R}^3$  e quindi  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

### Definizione 2.1: Base canonica

Una base è detta **canonica** se è formata dai vettori della base standard, cioè:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\rightarrow \text{Base canonica} \\ \mathbb{R}^1 &\rightarrow (1) \\ \mathbb{R}^2 &\rightarrow (1, 0), (0, 1) \\ \mathbb{R}^3 &\rightarrow (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \\ \mathbb{R}^4 &\rightarrow (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \\ \mathbb{R}^n &\rightarrow (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$

**Esempio.** Determinare una base canonica di  $\mathbb{R}^3$

Una base canonica di  $\mathbb{R}^3$  è formata dai vettori  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ . Dato però il vettore  $(3/2, 7, 4)$ , determinare le sue coordinate rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}(3/2, 7, 4) &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ (3/2, 7, 4) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ (3/2, 7, 4) &= (a_1, a_2, a_3) \\ &\begin{cases} a_1 = 3/2 \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

**Osservazione.** Uno spazio vettoriale ha tante basi diversi. Le coordinate di un vettore rispetto a una base dipendono dalla base scelta.

### Definizione 2.2: Forma cartesiana e parametrica

Sia  $U$  un sottospazio di dimensione  $\dim U = k$  in uno spazio  $V$  di dimensione  $\dim V = n$  con  $(k \leq n)$ .

In forma parametrica  $U$  esprime tutti i suoi vettori in funzione di  $k$  parametri.

In forma cartesiana  $U$  esprime tutti i suoi vettori in funzione di  $n - k$  equazioni cartesiane.

**Esempio.** Dati  $V = \mathbb{R}^5, v_1 = (1, 2, 0, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0, -1)$  posso scrivere il sottospazio generato da  $v_1$  e  $v_2$  in forma cartesiana e parametrica.

**Forma cartesiana**  $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 = 2x_1, x_4 = 0, x_5 = x_1 - x_2\}$

**Forma parametrica**  $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \{tv_1 + sv_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2t, s, 0, t - s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

In questo caso  $\dim U = 2$  perchè  $v_1, v_2$  sono linearmente indipendenti e generano  $U$ . Nella forma parametrica,  $t$  e  $s$  sono detti **parametri** mentre in quella cartesiana è individuata da 3 ( $5 - 2$ ) equazioni cartesiane.

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^3$  e

$$\begin{aligned}U &= \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \{t(1, 1, 0) + s(0, 0, 1) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\} \\ W &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, -1) \rangle = \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, -1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Calcolare  $U \cap W$ .

Per calcolare l'intersezione tra due sottospazi vettoriali, trasformo i vettori in forma cartesiana:

$$\begin{aligned}U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\} \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z\}\end{aligned}$$

A questo punto, calcolo l'intersezione tra le due equazioni:

$$U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, y = -z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$$

In forma parametrica:

$$U \cap W = \{t(1, 1, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Le dimensioni di  $U$  e  $W$  sono rispettivamente 2 e 2, quindi  $\dim(U \cap W) = 1$ .

**Proposizione.** Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $U \cap W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ . In altri termini, “l’intersezione di due sottospazi è un sottospazio”.

*Dimostrazione.* Siano  $u_1, u_2 \in U \cap W, u_1, u_2 \in U$  e  $U$  è un sottospazio vettoriale, quindi  $u_1 + u_2 \in U$ . Analogamente,  $u_1, u_2 \in W$  e  $W$  è un sottospazio vettoriale, quindi  $u_1 + u_2 \in W$ .

Quindi,  $u_1 + u_2 \in U \cap W$ .

Allo stesso modo si dimostra che  $\forall a \in \mathbb{K}, u \in U \cap W \Rightarrow a \cdot u \in U \cap W$ .  $\square$

**Osservazione.** In generale, l’unione di due sottospazi vettoriali ( $U \cup W$ ) non è un sottospazio vettoriale.

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

L’unione è  $U \cup W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}$

Se prendiamo un vettore di ogni sottospazio possiamo facilmente dimostrare che  $U \cup W$  non è un sottospazio vettoriale.

$$u = (0, 1) \in U, w = (1, 0) \in W \Rightarrow u + w = (0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin U \cup W$$

### Definizione 2.3: Somma di sottospazi

Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$ . La somma di  $U$  e  $W$  è il sottospazio vettoriale  $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ .

**Proposizione.**  $U + W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Se  $u_1, u_2 \in U + W \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in W, u_1, u_2 \in U \mid v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2$ .

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

Si nota che  $u_1 + u_2 \in U$  e  $w_1 + w_2 \in W$ .

Allo stesso modo si dimostra che  $\forall a \in \mathbb{K}, v \in U + W \Rightarrow a \cdot v \in U + W$ .  $\square$

**Esempio.** Dati  $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\}, W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0, x_4 = 0\}$

Calcolare  $U + W$ .

**Passo 1** Scrivere  $U$  e  $W$  in forma parametrica

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} & \dim U &= 2 \\ W &= \{(0, t, s, 0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} & \dim W &= 2 \end{aligned}$$

**Passo 2** Calcolare  $U + W$

$$\begin{aligned} U + W &= \{u + w \mid u \in U, w \in W\} = \{(a, b, 0, 0) + (0, t, s, 0) \mid a, b, t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, b + t, s, 0) \mid a, b, t, s \in \mathbb{R}\} & \dim U + W &= 3 \end{aligned}$$

In forma cartesiana,  $U + W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0 \vee x_4 = 0\}$ .

### Teorema 2.4: Formula di Grassman

Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$ . Allora

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

*Dimostrazione.* Otteniamo progressivamente le basi di  $U \cap W$ ,  $U$  e  $W$  e le loro dimensioni.

**U  $\cap$  W** Sia  $v_1, \dots, v_k$  una base di  $U \cap W$  e quindi  $\dim(U \cap W) = l$ .

**U** Completiamo la base di  $U \cap W$  a una base di  $U$ :  $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m$ . Quindi  $\dim U = l + m$ .

**W** Completiamo la base di  $U \cap W$  a una base di  $W$ :  $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n$ . Quindi  $\dim W = l + n$ .

**U + W** Unendo le basi di  $U$  e  $W$  si ottiene la base di  $U + W$ :  $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ . Quindi  $\dim(U + W) = l + m + n$ .

□

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_4 = 0\}$ ,  $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_2, x_4 = 0\}$

$$U \cap W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = -x_2 = 0, x_4 = 0\} = \{(0, 0, x_3, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Una possibile base di  $U \cap W$  è  $(0, 0, 1, 0)$ , quindi  $\dim(U \cap W) = 1$ .

Una possibile base di  $U$  è  $(1, 1, x_3, 0), (0, 0, 0, 1)$ , quindi  $\dim U = 2$ .

Una possibile base di  $W$  è  $(1, -1, x_3, 0), (0, 0, 0, 1)$ , quindi  $\dim W = 2$ .

Per la formula di Grassman,  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$ .

In effetti, una base di  $U + W$  è data da  $v_1, u_1, w_1$ , cioè  $U + W = \{tu + su, rw, t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, t, 0), (s, s, 0, 0), (r, -r, 0, 0) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(s + r, s - r, t, 0) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$ .

#### Definizione 2.4: Somma diretta

La somma di due sottospazi  $U + W$  è detta **diretta** se  $U \cap W = \{0\}$ . In tal caso, si scrive  $U \oplus W$ .

**Proposizione.**  $U, W$  formano una somma diretta  $\Leftrightarrow$  ogni vettore  $v \in U \oplus W$  può essere scritto in modo unico come somma di un vettore  $u \in U$  e un vettore  $w \in W \Leftrightarrow$  l'unione di una base di  $U$  e una base di  $W$  è una base di  $U \oplus W$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo entrambe le implicazioni:

$\Rightarrow$  Se  $V = U \oplus W$  allora  $V = U + W$ , quindi  $\forall v \in V \exists u \in U, w \in W \mid v = u + w$ .

Supponiamo che  $\exists u' \in U, w' \in W \mid v = u' + w' = u + w \Rightarrow u - u' = w - w'$  in cui  $u - u' \in U$  e  $w - w' \in W$ .

Tuttavia, dato che  $U \cap W = \{0\}$ , allora  $u - u' = w - w' = 0 \Rightarrow u = u', w = w'$ . Viceversa se ogni  $v$  si scrive in modo unico, la somma deve essere diretta per lo stesso ragionamento.

$\Leftarrow$  Se  $u_1, \dots, u_n$  è una base di  $U$  e  $w_1, \dots, w_m$  è una base di  $W$ , allora ogni  $v \in V$  si scrive in modo unico come  $v = u + w$  con  $u \in U, w \in W$ . Quindi:  $v = (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) + (b_1 w_1 + \dots + b_m w_m)$ , perciò  $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$  è una base di  $V$ . Similmente il viceversa.

□

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  $W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$U \cap W = \{0\}$ . D'altra parte, ogni  $(x, y) \in V$  si scrive in modo unico come  $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ .

Quindi  $V = U + W = U \oplus W$ .

Una base di  $U$  è  $(1, 0)$ , una base di  $W$  è  $(0, 1)$ , quindi una base di  $V$  è  $(1, 0), (0, 1)$ .

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $U = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ ,  $W = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$

$U \cap W = \{(x, y, z) \mid z = 0, x = 0\} \neq \{(0, 0, 0)\}$ .

Quindi  $V = U + W$  ma  $V \neq U \oplus W$ .

Infatti, ogni vettore di  $V$  si scrive come somma di un vettore di  $U$  e un vettore di  $W$ , ma non in modo unico.

Ad esempio,  $(2, 7, -3) = (2, 7, 0) + (0, 0, -3) = (2, 0, 0) + (0, 7, -3)$ .

### 3 Unità 3 - Lezioni 5, 6, 7

#### 3.1 Approfondimento sulle funzioni

##### Definizione 3.1: Applicazione lineare

Siano  $V$  e  $U$  due spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ . Un'applicazione  $f : V \rightarrow U$  è **lineare** se valgono entrambe le proprietà:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) & \forall v_1, v_2 \in V \\ f(a \cdot v) &= a \cdot f(v) & \forall a \in \mathbb{K}, \forall v \in V \end{aligned}$$

Oppure, equivalentemente,  $f$  è lineare  $\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ :

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)$$

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2z, x + y)$  è lineare?

Dati due vettori  $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$  e uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , verifico se le operazioni sono compatibili:

**Somma:**

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (2(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (2z_1, x_1 + y_1) + (2z_2, x_2 + y_2) = (2z_1 + 2z_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ &= (2(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \end{aligned}$$

**Prodotto per scalare:**

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay, az) = (2az, ax + ay) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (2z, x + y) = (2az, ax + ay) \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è lineare, dato che i risultati coincidono.

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x, y^2)$  è lineare?

Dati due vettori  $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  e uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , verifico se le operazioni sono compatibili:

**Somma:**

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)^2) = (2(x_1 + x_2), y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (2x_1, y_1^2) + (2x_2, y_2^2) = (2(x_1 + x_2), y_1^2 + y_2^2) \end{aligned}$$

**Prodotto per scalare:**

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay) = (2ax, (ay)^2) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (2x, y^2) = (2ax, ay^2) \end{aligned}$$

Quindi  $f$  non è lineare, dato che i risultati non coincidono.

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (0, x + y, 1)$  è lineare?

Dati due vettori  $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  e uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , verifico se le operazioni sono compatibili:

**Somma:**

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 1) = (0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 1) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (0, x_1 + y_1, 1) + (0, x_2 + y_2, 1) = (0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2) \end{aligned}$$

### Prodotto per scalare:

$$\begin{aligned}f(a \cdot v) &= f(ax, ay) = (0, ax + ay, 1) \\a \cdot f(v) &= a \cdot (0, x + y, 1) = (0, ax + ay, a)\end{aligned}$$

Quindi  $f$  non è lineare, dato che i risultati non coincidono.

Sia  $f : V \rightarrow U$  un'applicazione lineare.  $f$  è suriettiva  $\Leftrightarrow \text{Im } f = U$ .

**Proposizione.**  $\text{Im } f$  è un sottospazio vettoriale di  $U$ .

*Dimostrazione.*  $\text{Im } f = \{u \in U \mid \exists v \in V \mid f(v) = u\}$ .

Siano  $u_1, u_2 \in \text{Im } f$ , quindi  $\exists v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = u_1$  e  $f(v_2) = u_2$ .

Allora  $u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$ , quindi  $u_1 + u_2 \in \text{Im } f$  (un elemento di  $V$  è mandato in  $u_1 + u_2$ ).

Allo stesso modo,  $\forall a \in \mathbb{K}, u \in \text{Im } f \Rightarrow \exists v \in V \mid f(v) = u \Rightarrow f(av) = a \cdot f(v) = a \cdot u \in \text{Im } f$ .

Quindi  $\text{Im } f$  è un sottospazio vettoriale di  $U$ . □

### Definizione 3.2: Nucleo di un'applicazione lineare

Sia  $f : V \rightarrow U$  un'applicazione lineare. Il **nucleo** di  $f$  è l'insieme dei vettori di  $V$  che risultano in 0 dopo l'applicazione di  $f$ :

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

**Proposizione.**  $\ker f$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Devo verificare che le proprietà di un sottospazio vettoriale siano rispettate, sapendo che, dato un  $v \in \ker f$ , per definizione  $f(v) = 0$ :

$\ker f$  non è vuoto perchè  $0 \in \ker f$  (dato che  $f(v - v) = f(v) - f(v) = 0$ ).

Se  $v_1, v_2 \in \ker f \Rightarrow$  anche  $v_1 + v_2 \in \ker f$ , perchè  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0$ .

Se  $v \in \ker f$  e  $a \in \mathbb{K} \Rightarrow f(av) = af(v) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow av \in \ker f$ .

Quindi  $\ker f$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ . □

**Proposizione.**  $f$  è iniettiva  $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

*Dimostrazione.* Dimostriamo entrambi i versi:

$\Rightarrow$  Devo dimostrare che se  $f$  è iniettiva allora  $\ker f = \{0\}$ .

Dalla precedente dimostrazione,  $f(0) = 0$  è sempre vero, quindi  $0 \in \ker f$ . Se esistesse un altro  $v \in V$  tale che  $f(v) = 0$ , contraddirebbe la definizione di iniettività. Quindi  $\ker f = \{0\}$ .

$\Leftarrow$  Devo dimostrare che se  $\ker f = \{0\}$  allora  $f$  è iniettiva.

Quindi, supponiamo che  $\ker f = \{0\}$ . Vogliamo mostrare che se  $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$ .

Dato che  $f$  è lineare e sappiamo che  $f(v_1) = f(v_2)$ ,  $f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$ .

Quindi  $v_1 - v_2 \in \ker f = \{0\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$ .

Di conseguenza,  $f$  è iniettiva per definizione. □

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$  è iniettiva?

Devo verificare se  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

$$f(x, y) = (x + y, 2x + 2y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi  $\text{Ker } f = \{0\}$  e  $f$  è iniettiva. Inoltre,  $\text{Im } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .



### Teorema 3.1: Teorema del rango

Sia  $f : V \rightarrow U$  un'applicazione lineare. Allora:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

*Dimostrazione.* Sia  $v_1, v_2, \dots, v_k$  una base di  $\ker f$  e completiamola a una base di  $V$ :

$v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ .

Sia  $u \in \operatorname{Im} f$ , cioè  $u \in U$  e  $\exists v \in V \mid f(v) = u$ .

Poichè  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  sono una base di  $V$ ,  $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$  per il teorema delle coordinate.

Quindi  $u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_k f(v_k) + a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n)$ .

Cioè  $\forall u \in \operatorname{Im} f \exists! a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n)$ , infatti  $f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_k) = 0$  perchè  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \ker f$ .

Quindi  $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$  sono linearmente indipendenti e formano una base di  $\operatorname{Im} f$ . Perciò  $\dim \ker f = k$ ,  $\dim V = n$ ,  $\dim \operatorname{Im} f = n - k$ .  $\square$

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^3 = U$ ,  $f : V \rightarrow U$ ,  $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$  è iniettiva o suriettiva? Qual'è la dimensione di  $\ker f$ ? Definire anche  $\operatorname{Im} f$ .

Devo verificare se  $\ker f = \{0\}$ .

Formalmente,  $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in V \mid x = y = z\} = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

Quindi,  $\dim \ker f = 1 \neq 0$ , quindi  $f$  non è iniettiva.

Per il teorema del rango,  $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ , quindi  $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f = 3 - 1 = 2 \neq 3$ , quindi  $f$  non è suriettiva.

Troviamo  $\operatorname{Im} f$ : Troviamo una base di  $\ker f$ :  $v_1 = (1, 1, 1)$ . Completiamolo ora a una base di  $V$ :  $v_2 = (1, 0, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0)$ .

$f(v_1) = (0, 0, 0)$ ,  $f(v_2) = (1, 0, -1)$ ,  $f(v_3) = (-1, 1, 0)$ .

$f(v_2), f(v_3)$  sono linearmente indipendenti e non nulli, quindi formano una base di  $\operatorname{Im} f$ .

Quindi  $\operatorname{Im} f = \{t(1, 0, -1) + s(-1, 1, 0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t - s, s, -t) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0\}$ .

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ,  $U = V$ ,  $f : V \rightarrow U$ ,  $f(p(x)) = p'(x) = 2ax + b$ . Trovare  $\ker f$  e  $\operatorname{Im} f$  e le loro dimensioni.

$\operatorname{Im} f = \{\text{polinomi di grado } \leq 1\} = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ .

$\ker f = \{p(x) \in V \mid p'(x) = 0\} = \{ax^2 + bx + c \mid 2ax + b = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0\} = \{c \mid c \in \mathbb{R}\}$ .

Quindi  $\dim \ker f = 1$ ,  $\dim \operatorname{Im} f = 2$ .

Per il teorema del rango,  $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + 2 = 3$ .

**Proposizione.** Conseguenze del teorema del rango, data un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow U$ :

1. Se  $\dim V > \dim U$ ,  $f$  non è iniettiva.
2. Se  $\dim V < \dim U$ ,  $f$  non è suriettiva.
3. Se  $\dim V = \dim U$ , allora  $f$  è iniettiva  $\Leftrightarrow f$  è suriettiva.

*Dimostrazione.* Dimostriamo i tre punti:

1.  $\dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f \geq \dim V - \dim U > 0 \Rightarrow \ker f \neq \{0\}$ .  
Quindi  $f$  non è iniettiva.
2.  $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f < \dim U \Rightarrow \operatorname{Im} f \neq U$ .  
Quindi  $f$  non è suriettiva.
3.  $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim U$   
Se  $f$  è iniettiva,  $\dim \ker f = 0$ , quindi  $\dim \operatorname{Im} f = \dim U$  cioè  $\operatorname{Im} f = U$  e  $f$  è suriettiva.  
Viceversa, se  $f$  è suriettiva,  $\dim \operatorname{Im} f = \dim U$ , quindi  $\dim \ker f = 0$  e  $f$  è iniettiva.

$\square$

## 3.2 Isomorfismi

### Definizione 3.3: Isomorfismo

Un'applicazione lineare è chiamata **isomorfismo** se è biunivoca.

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$  è un isomorfismo?

Devo verificare se  $f$  è lineare e se è biunivoca.

**Linearità** Dati due vettori  $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  e uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , verifico se le operazioni sono compatibili:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay) = (ax + ay, ax - ay) = a(x + y, x - y) = a \cdot f(v) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (x + y, x - y) = (ax + ay, ax - ay) = f(ax, ay) \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è lineare.

**Iniettività** Devo verificare se  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

$$f(x, y) = (x + y, x - y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi  $\text{Ker } f = \{0\}$  e  $f$  è iniettiva.

**Suriiettività** Devo verificare se  $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ .

$$\text{Im } f = \{(x + y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Quindi  $f$  è suriettiva.

Quindi  $f$  è lineare e biunivoca, quindi è un isomorfismo.

**Osservazione.** Una applicazione lineare  $f : V \rightarrow U$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow \text{ker } f = \{0\}$  e  $\text{Im } f = U$ .

### Definizione 3.4: Isomorfismo di spazi vettoriali

Due spazi vettoriali  $V$  e  $U$  su un campo  $\mathbb{K}$  si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo  $f : V \rightarrow U$  e scriviamo  $V \cong U$ .

**Proposizione.** "Essere isomorfi" è una relazione di equivalenza.

*Dimostrazione.* Devo verificare che la relazione sia riflessiva, simmetrica e transitiva:

**Riflessività** Se  $V$  è uno spazio vettoriale, allora  $f : V \rightarrow V, f(v) = v$  è un isomorfismo ( $V$  è isomorfo a se stesso).

**Simmetria** Se  $V$  è isomorfo a  $U$ , allora esiste un isomorfismo  $f : V \rightarrow U$ . Allora  $f^{-1} : U \rightarrow V$  è un isomorfismo, quindi  $U$  è isomorfo a  $V$ .

**Transitività** Se  $V$  è isomorfo a  $U$  e  $U$  è isomorfo a  $W$ , allora esistono due isomorfismi  $f : V \rightarrow U$  e  $g : U \rightarrow W$ .

Allora la composizione  $g \circ f : V \rightarrow W$  è un isomorfismo, quindi  $V$  è isomorfo a  $W$ .

□

**Esempio.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}, U = \mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}, f : V \rightarrow U, f(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$  è un isomorfismo?

$f$  è lineare, iniettiva e suriettiva, quindi è un isomorfismo.

Quindi  $V$  e  $U$  sono isomorfi, quindi  $V \cong U$ .

**Proposizione.** 1. La composizione di applicazioni lineari è un'applicazione lineare.

2. La composizione di isomorfismi è un isomorfismo.

3. L'applicazione inversa di un isomorfismo è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Siano  $f : V \rightarrow U, g : U \rightarrow W$  due applicazioni lineari.

1. Devo verificare che la composizione  $g \circ f : V \rightarrow W$  sia lineare, ovvero  $\forall v_1, v_2 \in V, a \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(v_1 + v_2) &= g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + g(f(v_2)) \\ &= (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2) \\ (g \circ f)(av) &= g(f(av)) = g(af(v)) = ag(f(v)) = a(g \circ f)(v)\end{aligned}$$

Quindi  $g \circ f$  è lineare.

2. Dalla definizione, la composizione di applicazioni iniettive è iniettiva e la composizione di applicazioni suriettive è suriettiva.

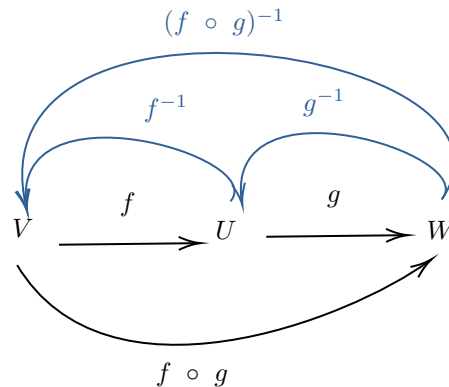
Infatti, se  $f$  e  $g$  sono iniettive allora  $\ker f = \{0\}, \ker g = \{0\} \Rightarrow \ker(g \circ f) = \ker g \circ \ker f = \{0\}$ . Analogamente, se  $f$  e  $g$  sono suriettive allora  $\text{Im } f = V, \text{Im } g = U \Rightarrow \text{Im } (g \circ f) = \text{Im } g \circ \text{Im } f = W$ . Quindi  $g \circ f$  è iniettiva e suriettiva (biunivoca), ovvero è un isomorfismo.

3. Sappiamo che se  $f$  è biunivoca, allora esiste  $f^{-1}$ . Mostriamo che se  $f$  è lineare, anche  $f^{-1}$  lo è: Siano  $u_1, u_2 \in U$ , vogliamo mostrare che  $f^{-1}(u_1 + u_2) = f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)$ .

Poichè  $f$  è biunivoca,  $\exists! v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = u_1$  e  $f(v_2) = u_2$ .

Allora  $f^{-1}(u_1 + u_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)$ .

Analogamente  $\forall a \in \mathbb{K}, u \in U, \exists v \in V \mid f(v) = u, f^{-1}(au) = f^{-1}(af(v)) = f^{-1}(f(av)) = av = af^{-1}(u)$ .



□

**Esempio.** Dire se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + y, x - y)$  è un isomorfismo e, se sì, calcolare  $f^{-1}$ .  
 $\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$ , cioè:

$$f(x, y) = (2x + y, x - y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + x = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Quindi  $\ker f = \{0\}$  e  $f$  è iniettiva.

Dalla dimensione dell'immagine,  $\dim \text{Im } f = \dim V - \dim \ker f = 2 - 0 = 2$  (dal teorema del rango), quindi  $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$  e  $f$  è suriettiva.

Quindi  $f$  è un isomorfismo.

Calcoliamo  $f^{-1}$ , ovvero cerchiamo l'unico  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $f(x, y) = (t, s)$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) = (2x + y, x - y) = (t, s) &\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = t \\ x - y = s \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+s}{3} \\ y = \frac{t-2s}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi  $f^{-1}(t, s) = \left(\frac{t+s}{3}, \frac{t-2s}{3}\right)$ .

### Teorema 3.2: Teorema dell'estensione lineare

Siano  $V, U$  spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una base di  $V$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_n$  vettori di  $U$ .

Allora  $\exists! f : V \rightarrow U$  tale che  $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, \dots, f(v_n) = u_n$ .

*Dimostrazione.* Sia  $v \in V$ . Poichè  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono una base di  $V$ ,  $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ .

Per la linearità  $f(v) = f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ .

Quindi  $f$  esiste ed è unica (associa univocamente ogni  $v \in V$  a un  $u \in U$ ).  $\square$

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2 = U, v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), v = (3, 1), u_1 = 2v_1 - v_2, u_2 = 3v_1 - 2v_2$ .

Sia  $f : V \rightarrow U$  tale che  $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$ .

Calcolare  $f(v)$ .

Sapendo che  $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$ , calcoliamo  $a_1$  e  $a_2$ :

$$v = (3, 1) = a_1(1, 1) + a_2(1, -1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 3 \\ a_1 - a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi  $v = 2v_1 + 1v_2$ .

Calcoliamo  $f(v)$ :

$$f(v) = f(2v_1 + v_2) = 2f(v_1) + f(v_2) = 2u_1 + u_2 = 2(2v_1 - v_2) + (3v_1 - 2v_2) = (7v_1 - 4v_2)$$

Quindi  $f(v) = 7v_1 - 4v_2 = (3, 11)$ .

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^2, l_1 = (1, 0), l_2 = (0, 1)$ , dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  tale che  $f(l_1) = (2, 1), f(l_2) = (-1, 3)$ .

Poichè  $l_1, l_2$  è una base di  $V$ , per il teorema dell'estensione lineare esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  tale che  $f(l_1) = (2, 1), f(l_2) = (-1, 3)$ . In effetti ogni vettore  $v = (x, y) \in V$  si può scrivere come  $v = xl_1 + yl_2$  e quindi  $f(v) = xf(l_1) + yf(l_2) = x(2, 1) + y(-1, 3) = (2x - y, x + 3y)$ .

**Esempio.** Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v_1 = (2, -1), v_2 = (4, -2)$ . Esiste un'unica applicazione lineare tale che  $f(v_1) = (1, 0), f(v_2) = (3, -1)$ ?

Osserviamo che  $v_2 = 2v_1$ , quindi  $f(v_2) = 2f(v_1)$ . Ma  $f(v_2) = (3, -1) \neq 2(1, 0) = (2, 0)$ .

Quindi non esiste un'unica applicazione lineare che soddisfi le condizioni.

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v_1 = (2, -1), v_2 = (4, -2)$ . Esiste un'applicazione lineare tale che  $f(v_1) = (1, 1), f(v_2) = (2, 2)$ ? Se sì, è unica?

Osserviamo che  $v_2 = 2v_1$ , quindi  $f(v_2) = 2f(v_1)$ : le condizioni sono soddisfatte.

Completiamo  $v_1$  a una base di  $\mathbb{R}^2$ :  $v_1, v_2$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ .

Per ogni scelta di  $v_2$  non esiste un'unica applicazione lineare che soddisfi le condizioni (per il teorema dell'estensione lineare), ma ce ne sono infinite.

Il teorema dell'estensione lineare indica che per sapere chi è  $f$  è sufficiente conoscere cosa fa sui vettori di una base di  $V$ .

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2, U = \mathbb{R}^2, v_1 = (3, -2)$ . Esiste una e una sola applicazione lineare  $f : V \rightarrow U$  tale che  $f(v_1) = l_1 = (1, 0)$ ?

Osserviamo che  $v_1$  non è una base di  $V$ , quindi non posso applicare il teorema dell'estensione lineare. Infatti, posso completare  $v_1$  a una base di  $V$ , ad esempio  $v_1 = (3, -2), v_2 = (1, 1)$ .

So che  $f(v_1) = (1, 0)$  ma  $f(v_2)$  può essere scelto arbitrariamente (ad esempio  $f(v_2) = (0, 1)$  o  $f(v_2) = (1, 1)$ ).

Quindi  $f$  esiste ma non è unica.

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^3, v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (2, 3, 0)$ .

Dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow U$  tale che  $f(v_1) = (1, 1, 0), f(v_2) = (0, 0, 1), f(v_3) = (5, 5, 7)$ .

Osserviamo che  $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ , quindi  $f(v_3) = 2f(v_1) + 3f(v_2)$ . Di conseguenza,  $v_1, v_2, v_3$  non è una base di  $V$ .

Quindi, se  $f$  esiste ed è lineare,  $(5, 5, 7) = f(v_3) = 2f(v_1) + 3f(v_2) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 2, 3)$ , che non è possibile.

Quindi non esiste un'applicazione lineare  $f$  che soddisfi le condizioni.

Esiste invece un'applicazione lineare  $g : V \rightarrow U$  tale che  $g(v_1) = (1, 1, 0), g(v_2) = (0, 0, 1), g(v_3) = (2, 2, 3)$ ?

Sì, infatti  $g(v_3) = 2g(v_1) + 3g(v_2) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 2, 3)$ , ma non è unica.

Posso infatti completare  $v_1, v_2$  a una base di  $V$ , ad esempio  $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 1)$  e posso scegliere  $g(v_4)$  arbitrariamente.

### Teorema 3.3: Isomorfismi e basi

Un'applicazione lineare è un isomorfismo  $\Leftrightarrow$  manda basi in basi.

Cioè se  $f : V \rightarrow U$  è un isomorfismo e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è una base di  $V$ , allora  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  è una base di  $U$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione:

$\Rightarrow$  Sia  $f : V \rightarrow U$  un isomorfismo e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sia una base di  $V$ . Si vuole dimostrare che  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  è una base di  $U$ .

Sia  $u \in U$ . Poichè  $f$  è un isomorfismo,  $\exists! v \in V \mid f(v) = u$ .

Poichè  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è una base di  $V$ ,  $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ .

Poichè  $f$  è lineare,  $u = f(v) = f(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + \dots + a_nf(v_n)$ .

Quindi  $\forall u \in U \exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + \dots + a_nf(v_n)$ .

Quindi  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  è una base di  $U$ .

$\Leftarrow$  Sia  $f : V \rightarrow U$  un'applicazione lineare, e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sia una base di  $V$  e sia  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  una base di  $U$ .

Si vuole dimostrare che  $f$  è un isomorfismo, cioè che  $\forall u \in U \exists! v \in V \mid f(v) = u$ .

Per il teorema delle coordinate  $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + \dots + a_nf(v_n) = f(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n)$ , perchè  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  è una base di  $U$ .

Poichè  $f$  è lineare,  $u = f(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n)$ .

Poichè  $a_1, \dots, a_n$  esistono e sono unici,  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$  è unico.

Quindi  $v \in V \mid f(v) = u$ , quindi  $f$  è un isomorfismo.

□

**Esempio.** Dati  $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), u_1 = (0, 2), u_2 = (-1, 0)$ , dire se:

1. Esiste un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$ . Se esiste, è unica?
2.  $f$  è un isomorfismo?
3.  $f(v_1), f(v_2)$  è una base?

Soluzione:

1. Poichè  $v_1, v_2$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ , esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$ .
2. Poichè  $u_1, u_2$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  è un isomorfismo.
3. Poichè  $l_1 = (0, 0), l_2 = (-1, 0)$  è una base e poichè  $f$  è un isomorfismo e manda basi in basi,  $f(v_1), f(v_2)$  è una base.

**Esempio.** 1. Esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$  dove  $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), u_1 = (-1, 2), u_2 = (2, -4)$ ?

2. In tal caso,  $f$  è un isomorfismo?

3. Trovare  $\text{Im } f$  e  $\text{Ker } f$ .

Soluzione:

- Poichè  $v_1, v_2$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ , esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$ .
- Poichè  $u_1, u_2$  non è una base di  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  non è un isomorfismo. Si può verificare che  $u_2 = 2u_1$ , quindi non sono linearmente indipendenti (quindi non è una base).
- Sia  $v \in \mathbb{R}^2$ . Poichè  $v_1, v_2$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\exists! a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Rightarrow f(v) = a_1 u_1 + a_2 u_2 = a_1(-1, 2) + a_2(2, -4) = (-a_1 + 2a_2, 2a_1 - 4a_2)$ .  
Quindi  $\text{Im } f = \{f(v), v \in V\} = \{(-a_1 + 2a_2, 2a_1 - 4a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(-t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .  
Poichè  $\dim \text{Im } f = 1$ , per il teorema del rango  $\dim \text{Ker } f = 2 - 1 = 1$ , quindi  $\text{Ker } f$  è dato da una equazione cartesiana in  $\mathbb{R}^2$ .  
Poichè  $u_2 = -2u_1$ , cioè  $2u_1 + u_2 = 0$  allora  $f(2v_1 + v_2) = 2f(v_1) + f(v_2) = 2u_1 + u_2 = 0$ , quindi  $2v_1 + v_2 = (3, 1) \in \text{Ker } f$ .  
Dunque  $\text{Ker } f = \langle (3, 1) \rangle = \{(3s, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$ .

### Corollario 3.1: Isomorfismo e dimensione

Due spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$  con la stessa dimensione sono isomorfi tra loro.

*Dimostrazione.* Siano  $V$  e  $U$  due spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$  con  $\dim V = \dim U = n$ . Inoltre, siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una base di  $V$  e  $u_1, u_2, \dots, u_n$  una base di  $U$ .

Per il teorema dell'estensione lineare, esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow U$  tale che  $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, \dots, f(v_n) = u_n$ .

Per il teorema dell'isomorfismo e basi  $f$  è un isomorfismo.  $\square$

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^n$  e  $U = \mathbb{R}[x]_{<n} = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1} = \{\text{polinomi di grado } < n\} \Leftrightarrow \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}\}$ . Base di  $V$ :  $l_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), l_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, l_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ .

Base di  $U$ :  $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2, \dots, u_n = x^{n-1}$ .

Esiste un'unica applicazione lineare  $f : V \rightarrow U$  tale che  $f(l_1) = u_1, f(l_2) = u_2, \dots, f(l_n) = u_n$  e tale  $f$  è un isomorfismo.

**Esempio.** Sia  $V = M_{2,3}(\mathbb{R}) = \{\text{matrici } 2 \times 3 \text{ a coefficienti in } \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$ .

$V$  è uno spazio vettoriale rispetto alla somma coefficiente per coefficiente e al prodotto per uno scalare.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2} & 11 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 33 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Qual'è la dimensione di  $V$ ?

Cerchiamo una base di  $V$ . Sia  $l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, l_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$  è una base di  $V$  perchè  $\forall \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \in V \exists! (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \mid \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = al_1 + bl_2 + cl_3 + dl_4 + el_5 + fl_6$ .

Quindi  $\dim V = 6$  e  $V$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^6$ .

## 4 Unità 4 - Lezioni 8, 9

### 4.1 Matrici

#### 4.1.1 Operazioni tra matrici

$$M_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$  è lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 3$  a coefficienti reali.  
La somma è data da:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$

Il prodotto per uno scalare è dato da:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$  con queste operazioni è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Che dimensione ha?

#### Matrici elementari

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queste matrici sono linearmente indipendenti e generano  $M_{2,3}(\mathbb{R})$ .  
Quindi  $\dim M_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$  e  $M_{2,3}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^6$ . Infatti:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a \cdot e_{11} + b \cdot e_{12} + c \cdot e_{13} + d \cdot e_{21} + e \cdot e_{22} + f \cdot e_{23}$$

Inoltre,  $M_{2,3}(\mathbb{R})$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^6$ .

#### 4.1.2 Prodotto riga per colonna tra matrici

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R}), N \in M_{s,t}(\mathbb{R})$$

Per calcolare il prodotto  $M \cdot N$  è necessario che il numero di colonne di  $M$  sia uguale al numero di righe di  $N$ .

**Esempio.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

**Nota:**  $M \cdot N \in M_{r,t}(\mathbb{R})$ .

In generale, il prodotto  $M \cdot N$  è una matrice  $r \times t$  e ha alla  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna l'elemento:

$$(M \cdot N)_{ij} = \sum_{k=1}^s M_{ik} \cdot N_{kj}$$

#### 4.1.3 Proprietà associativa

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R}), N \in M_{s,t}(\mathbb{R}), R \in M_{t,u}(\mathbb{R})$$

$$(MN)R = M(NR)$$

dove:

- $(MN)R \in M_{r,t}(\mathbb{R});$

- $M(NR) \in M_{s,u}(\mathbb{R})$ ;

**Esempio.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (MN)R = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$NR = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M(NR) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.4 Matrice identità

##### Definizione 4.1: Matrice identità

La matrice identità  $I_n$  è la matrice quadrata  $n \times n$  che ha 1 sulla diagonale principale e 0 altrove. Ad esempio su  $\mathbb{R}^3$ :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Osservazione.**

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R})$$

$$MI_s = I_r M = M$$

**Esempio.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MI_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$$I_2 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

#### 4.1.5 Matrice inversa

##### Definizione 4.2: Matrice invertibile

Una matrice  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  è invertibile se esiste una matrice  $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  tale che:

$$AB = BA = I_n$$

La matrice  $B$  è chiamata matrice inversa di  $A$ .

**Esempio.** Mostriamo che la matrice  $A$  è invertibile utilizzando la matrice  $B$  come matrice inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Quindi  $A$  è invertibile e  $B$  è la matrice inversa di  $A$ .



**Osservazione.** Un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow U$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow$  è invertibile, cioè  $\exists f^{-1} : U \rightarrow V \mid f \circ f^{-1} = id_U$  e  $f^{-1} \circ f = id_V$ . In altre parole, se  $A$  è la matrice di  $f$  in una base  $v_1, v_2, \dots, v_n$  di  $V$  allora  $f$  è invertibile  $\Leftrightarrow A$  è invertibile, cioè esiste una matrice  $A^{-1}$  tale che  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$  ( $A^{-1}$  è la matrice di  $f^{-1}$ ).

#### 4.1.6 Matrici associate ad un'applicazione lineare

##### Definizione 4.3: Matrice associata ad un'applicazione lineare

Sia  $f : V \rightarrow U$  un'applicazione lineare. Siano  $B$  una base di  $V$  e  $C$  una base di  $U$ .  
La **matrice associata** ad  $f$  rispetto alle basi  $B$  e  $C$  è la matrice  $M_C^B(f)$  che ha nella colonna  $j$  le coordinate dell'immagine del  $j$ -esimo vettore della base  $B$  rispetto alla base  $C$ :

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$ .

Date le basi canoniche  $E^3$  e  $E^2$  di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ , la matrice associata ad  $f$  rispetto a queste basi è:

$$M_{E^2}^{E^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 0) = 1e_1 + 0e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 1) = 1e_1 + 1e_2 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, -1) = 0e_1 - 1e_2 \end{aligned}$$

Se aggiungiamo una nuova base  $C = ((1, 1), (1, -1))$  di  $\mathbb{R}^2$ , la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $E^3$  e  $C$  è:

$$M_C^{E^3}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) + 0(0, 0) \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) + 0(0, 0) \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, -1) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) + (-\frac{1}{2})(0, 0) \end{aligned}$$

Per il teorema dell'estensione lineare, la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi  $B$  e  $C$  determina univocamente  $f$ .

**Osservazione.** La matrice ottenuta dipende dalle basi scelte. Se scelgo basi diverse, ottengo matrici diverse.

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, f : V \rightarrow U, f(x, y, z) = (2x + y, x - 3z)$ .

Consideriamo la base  $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)$  di  $V$  e la base  $u_1 = (0, -1), u_2 = (2, 0)$  di  $U$ .

Scriviamo la matrice associata ad  $f$  rispetto a queste basi.

Calcoliamo  $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ :

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(1, -1, 0) = (2 \cdot 1 + (-1), 1 \cdot (-1)) = (1, -1) = -1u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ f(v_2) &= f(2, 1, 0) = (2 \cdot 2 + 1, 2 - 3 \cdot 0) = (5, 2) = -2u_1 + \frac{5}{2}u_2 \\ f(v_3) &= f(0, 1, 1) = (2 \cdot 0 + 1, 0 - 3 \cdot 1) = (1, -3) = -2u_1 + \frac{1}{2}u_2 \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi scelte è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Matrice associata e prodotto tra matrici** Sia  $f : V \rightarrow U$  un'applicazione lineare e siano  $B$  e  $C$  due basi di  $V$  e  $U$  rispettivamente.

La matrice associata ad  $f$  rispetto a  $B$  e  $C$  è la matrice  $A = M_C^B(f)$ . Per calcolare  $f(v)$  per ogni  $v \in V$  si può calcolare  $A \cdot v$ , in quanto le coordinate di  $v$  rispetto alla base  $C$  si ottengono tramite il prodotto tra la matrice associata e il vettore  $v$ .

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, f : V \rightarrow U, f(x, y, z) = (2x + y, x - 3z)$ .

$$A = M_{E_3}^{E_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare  $f(2, 3, 1)$ .

$$f(2, 3, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi  $f(2, 3, 1) = (5, 2)$ .

**Esempio.**  $id : V \rightarrow V$  con  $id(v) = v \forall v \in V$ . Sia  $B$  una base di  $V$ . Chi è  $M_B^B(id)$ ?

$$M_B^B(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

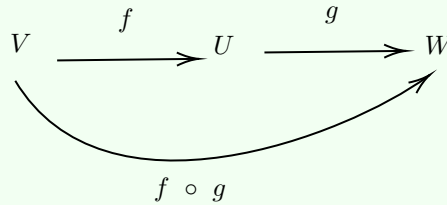
Infatti:

$$id(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

$$id(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$$

$$id(v_3) = v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

#### Teorema 4.1: Teorema della composizione



Siano  $B$  una base di  $V$ ,  $C$  una base di  $U$  e  $D$  una base di  $W$ .

Siano  $M_C^B(f)$  e  $M_D^C(g)$  le matrici associate rispettivamente ad  $f$  e  $g$  rispetto a  $B, C$  e  $C, D$ .

Allora la matrice associata alla composizione  $g \circ f$  rispetto a  $B$  e  $D$  è data da:

$$M_D^B(g \circ f) = M_D^C(g) \cdot M_C^B(f)$$

*Dimostrazione.*  $v = (x_1, \dots, x_n)_B \in V$ .  $f(v) = ?$ .

$M_C^B(f)$  ha le colonne  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ , quindi moltiplicandolo per  $v$  otteniamo:

$$M_C^B(f) \cdot v = M_C^B(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Quindi  $f(v) = (y_1, \dots, y_m)_C$ .

$$M_D^C(g) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Quindi  $g(f(v)) = (z_1, \dots, z_r)_D$ . Ora sostituiamo i due risultati:

$$M_D^C(g) \cdot M_C^B(f) \cdot v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Per la proprietà associativa del prodotto tra matrici, possiamo scrivere:

$$M_D^C(g \circ f) \cdot v = (M_D^C(g) \cdot M_C^B(f)) \cdot v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

□

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f(x, y) = (2x - y, x + y)$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $g(x, y) = (x - y, y + 3x)$ . Calcolare la matrice associata alla composizione  $g \circ f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .

La matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica è:

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata ad  $g$  rispetto alla base canonica è:

$$M_E^E(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata alla composizione  $g \circ f$  rispetto alla base canonica è:

$$M_E^E(g \circ f) = M_E^E(g) \cdot M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

**Osservazione.**  $M_C^B(f)$  è invertibile e  $M_C^B(f)^{-1} = M_B^C(f^{-1})$ .

#### 4.1.7 Matrici invertibili

**Proposizione.**  $f : U \rightarrow V$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow$  la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $B$  e  $C$  ( $M_C^B(f)$ ) è invertibile.

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$  Se  $f$  è un isomorfismo, allora esiste un'applicazione lineare  $g : V \rightarrow U$  tale che  $g \circ f = id_U$  e  $f \circ g = id_V$ .

La matrice associata ad  $g$  rispetto a  $C$  e  $B$  è  $M_B^C(g) = M_C^B(f)^{-1}$ .

Infatti:

$$M_B^C(g) \cdot M_C^B(f) = M_B^C(g \circ f) = M_B^B(id_U) = I_n$$

$\Leftarrow$  Se  $M_C^B(f)$  è invertibile, allora esiste una matrice  $A^{-1}$  tale che  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ .

Definiamo  $g : V \rightarrow U$  in modo che le immagini dei vettori di  $C$  abbiano le coordinate rispetto a  $B$  date da  $A^{-1}$ , ovvero vogliamo  $M_B^C(g) = A^{-1}$ .

Utilizzando la composizione:

$$M_B^C(g) \cdot M_C^B(f) = M_C^C(g \circ f)$$

dove  $M_C^C(f) = A \cdot A^{-1} = I_n$ . Quindi  $f \circ g = id$ .

□

#### Teorema 4.2: Invertibilità

Una matrice quadrata  $A$   $n \times n$  è invertibile  $\Leftrightarrow$  le sue colonne sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione.* Poniamo  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $M_E^E(f) = A$ . Per la proprietà precedente,  $A$  è invertibile  $\Leftrightarrow f$  è un isomorfismo.

Per il teorema isomorfismi e basi,  $f$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow$  le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.  $\square$

**Esempio.** Consideriamo la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . I vettori  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  sono linearmente indipendenti, perchè  $av_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} \neq v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  quindi  $v_1, v_2$  sono una base. Per il teorema precedente,  $A$  è invertibile. In effetti esiste ed è unica un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f(1, 0) = (2, 1)$  e  $f(0, 1) = (5, 3)$ . La sua matrice è  $A$ , perchè  $f(1, 0) = v_1 = 2l_1 + l_2$  e  $f(0, 1) = v_2 = 5l_1 + 3l_2$ , ovvero  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Se  $v \in \mathbb{R}^2$  allora  $v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xl_1 + yl_2$  e  $f(v) = xf(l_1) + yf(l_2) = xv_1 + yv_2 = (2x + 5y, x + 3y)$ . In effetti  $f(x, y) = (2x + 5y, x + 3y)$  è invertibile. Sia  $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid u = f(v)$  cioè  $u = (2x + 5y, x + 3y) = (a, b)$ . Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ x + 3y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3a-5b}{1} \\ y = \frac{2b-a}{1} \end{cases} \Rightarrow (3a - 5b, 2b - a)$$

Quindi  $\forall u \in \mathbb{R}^2 \exists! v = (x, y) \mid f(v) = u$  ovvero  $f^{-1}(u) = (3a - 5b, -a + 2b)$ .

Quindi la matrice di  $f^{-1}$  è  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Esempio.** Consideriamo la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ . I vettori  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2v_1$  non sono linearmente indipendenti. Quindi per il teorema dell'Invertibilità,  $A$  non è invertibile.

In effetti l'unica applicazione tale che  $f(l_1) = v_1$  e  $f(l_2) = v_2$  è  $f(x, y) = (-x + 2y, 3x - 6y)$ .

Inoltre,  $\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y\}$  quindi  $\dim \text{ker } f = 1$  e  $\dim \text{Im } f = 2 - 1 = 1$ . Per questo  $f$  non è iniettiva, nè suriettiva e quindi non è invertibile, cioè  $\nexists f^{-1} \mid f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f$ . Quindi non esiste una matrice  $A^{-1}$  tale che  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ .

#### 4.1.8 Rango di una matrice

##### Definizione 4.4: Rango di una matrice

Il rango di una matrice  $A$  qualunque è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

**Esempio.**  $rK \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$ ,  $rK \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 1$ ,  $rK \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ,  $rK \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$ .

**Proposizione.** Una matrice  $A$   $n \times n$  è invertibile  $\Leftrightarrow$  il suo rango è massimo, cioè  $rK(A) = n$ .

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}[x]_{<4}$ ,  $d : V \rightarrow V, p(x) \mapsto p'(x)$  nella base  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ .

La matrice di  $d$  è  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $rK(D) = 3$ . I vettori colonna non sono linearmente indipendenti perchè  $v_1 = 0$ .

Quindi  $D$  non è invertibile cioè non esiste  $D^{-1}$ . Inoltre,  $d$  non è un isomorfismo.

#### 4.1.9 Cambiamenti di base

Sia  $f : V \rightarrow U$  un'applicazione lineare e siano  $B, B'$  due basi di  $V$  e  $C, C'$  due basi di  $U$ .

La matrice associata ad  $f$  rispetto a  $B$  e  $C$  è  $M_C^B(f)$ , mentre la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $B'$  e  $C'$  è  $M_{C'}^{B'}(f)$ .

Se  $B'$  è una base di  $V$  e  $C'$  è una base di  $U$ , allora la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $B'$  e  $C'$  è data da:

$$M_{C'}^{B'}(f) = M_C^{C'}(f) \cdot M_C^B(f) \cdot M_B^{B'}(v)$$

dove  $M_B^{B'}(v)$  è la matrice del cambiamento di base da  $B$  a  $B'$ .

**Esempio.** Siano  $b_1 = (0, 1, 1)$ ,  $b_2 = (1, 1, 0)$ ,  $b_3 = (0, 0, 1)$ .  $B = (b_1, b_2, b_3)$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da  $M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 44 & -5 \\ 31 & -6 \end{pmatrix}$ .

a. Verificare che  $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Basta calcolare  $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$ :

$$f(b_1) = f(0, 1, 1) = (0, 1, 1) = 3(0, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-4)(0, 0, 1)$$

$$f(b_2) = f(1, 1, 0) = (1, 3, -1) = 3(0, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-4)(0, 0, 1)$$

$$f(b_3) = f(0, 0, 1) = (4, -5, -6) = (3)(0, 1, 1) + (4)(1, 1, 0) + (-5)(0, 0, 1)$$

b. Determinare  $M_E^E(f)$ .

$$\begin{aligned} M_E^E(f) &= M_E^B(f) \cdot M_B^E(v) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(3) + (-4)(-2) + (1)(0) \\ (-2)(-4) + (-1)(-2) + (3)(0) \\ (3)(-2) + (1)(-2) + (-6)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.1.10 Similitudine tra matrici quadrate

##### Definizione 4.5: Matrici simili

Due matrici  $A, A'$   $n \times n$  si dicono simili se esiste una matrice  $n \times n$  invertibile  $H$  tale che:

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$$

**Esempio.**

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } M = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \text{ sono simili perchè } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ Data } M \text{ precedente e } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M \text{ e } I_2 \text{ non sono simili perchè } \forall B, B^{-1} \cdot I_2 \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_2 \neq M.$$

**Proposizione.** Due matrici simili rappresentano uno stesso endomorfismo (un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  in cui dominio e codominio coincidono) rispetto a basi diverse.

*Dimostrazione.* Siano  $A, A'$  due matrici simili e sia  $H$  la matrice invertibile tale che  $A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$ . Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $M_E^E(f) = A$ .

(cioè  $f$  è l'endomorfismo che manda i vettori della base canonica nelle colonne di  $A$ ).

Sia  $B$  la base data dalle colonne di  $H$  (ricordiamo che se  $H$  è invertibile, le sue colonne formano una base), cioè  $H = M_E^B(f)$ .

$$\begin{aligned} A' &= H^{-1} \cdot A \cdot H \\ M_B^B(f) &= H^{-1} \cdot M_E^E(f) \cdot H \end{aligned}$$

Quindi  $M_B^B(f) = A'$ . □

#### 4.1.11 Conseguenze del teorema del rango

##### Corollario 4.1: Teorema del rango per le righe

$$rk(A) = rk(A^T)$$

##### Corollario 4.2: Rango di una matrice e immagine

$$rk(A) = \dim \operatorname{Im} f$$

Il corollario precedente è una conseguenza del teorema del rango per le righe perchè data una matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un'applicazione lineare, allora  $M_E^E(f) = A$ , cioè  $f(e_i) = i$ -esima colonna di  $A$

**Osservazione.**  $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ , quindi  $\dim \ker f = n - rk(A)$  ( $n$  – il numero di equazioni indipendenti).

Possiamo anche verificarlo con la formula di Grassmann:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \Rightarrow n = \dim rk(A) + (n - rk(A))$$

##### Definizione 4.6: Matrice a scala

Una matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  è a scala se:

- Le righe nulle di  $A$  sono tutte in fondo alla matrice.
- Il primo coefficiente non nullo di ogni riga non nulla è più a destra del primo coefficiente non nullo della riga precedente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è a scala.}$$

**Osservazione.** Se  $A$  è una matrice a scala, il rango di  $A$  è uguale al numero di righe non nulle.

##### Definizione 4.7: Matrice trasposta

La matrice trasposta  $A^T$  di una matrice  $A$  è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne, cioè facendo una riflessione rispetto alla diagonale principale.

**Esempio.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$

**Osservazione.** Per come è definito il prodotto riga per colonna tra matrici,  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$

## 5 Unità 5 - Lezioni 10, 11, 12

### 5.1 Metodo di Gauss

**Esempio.** Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

**Passo 1** Sommo a ciascuna equazione (dalla seconda in poi) la prima moltiplicata per un coefficiente tale che il termine  $x_1$  nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{ll} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2\text{R1} + \text{R2} & \mathbf{0x_1} + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -3 \\ \text{R1} + \text{R3} & \mathbf{0x_1} - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -\frac{1}{2}\text{R1} + \text{R4} & \mathbf{0x_1} + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 0x_4 = 1 \end{array}$$

**Passo 2** Vado avanti di una equazione. Non tocco più la prima e neanche la seconda, ma sommo a ciascuna equazione (dalla terza in poi) la seconda moltiplicata per un coefficiente tale che il termine  $x_2$  nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{ll} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ \text{R2} & x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -3 \\ 2\text{R2} + \text{R3} & \mathbf{0x_2} - 8x_3 - 7x_4 = -4 \\ -\frac{3}{2}\text{R2} + \text{R4} & \mathbf{0x_2} + 8x_3 + \frac{15}{2}x_4 = 6 \end{array}$$

**Passo 3** Vado avanti di una equazione. Non tocco più la prima, la seconda e neanche la terza, ma sommo a ciascuna equazione (dalla quarta in poi) la terza moltiplicata per un coefficiente tale che il termine  $x_3$  nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{ll} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ \text{R2} & -5x_3 - 5x_4 = -3 \\ \text{R3} & -8x_3 - 7x_4 = -4 \\ \text{R3} + \text{R4} & \mathbf{0x_3} + \frac{1}{2}x_4 = 2 \end{array}$$

**Passo 4** Finite le equazioni per trovare la soluzione del sistema, risalgo dall'ultima risolvendo le equazioni e sostituendo le incognite di volta in volta:

$$\begin{array}{ll} \text{R4} & \frac{1}{2}x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 4 \\ \text{R3} & -8x_3 - 7 \cdot 4 = -4 \Rightarrow x_3 = 1 \\ \text{R2} & -5 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -3 \Rightarrow x_2 = 17 \\ \text{R1} & 2x_1 - 17 + 1 + 2 \cdot 4 = 1 \Rightarrow x_1 = -3 \end{array}$$

Ho trovato così l'unica soluzione del sistema:  $x_1 = -3, x_2 = 17, x_3 = 1, x_4 = 4$ .

Quando ci sono infinite soluzioni, il metodo di gauss permette di trovare una soluzione generale.

### 5.2 Algoritmo di Gauss-Jordan

Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  invertibile. Dalla matrice  $(A|I_n)$  si può ottenere la matrice  $(I_n|A^{-1})$  applicando l'algoritmo di Gauss. Allora  $B = A^{-1}$ .

**Esempio.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Costruisco la matrice  $(A|I_2)$  fino ad ottenere  $(I_n|B)$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 1 & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R1 \\ -\frac{2}{3}R1 + R2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{3}R1 \\ \frac{3}{2}R2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow R1 - \frac{5}{3}R2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ , che è uguale a quella ottenuta con  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{cof}(A)^T$ .

### 5.3 Determinante di una matrice

#### Definizione 5.1: Determinante di una matrice

Il determinante di una matrice è una funzione  $\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  tale che  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow rk(A) = n \Leftrightarrow A$  è invertibile.

**Matrici  $1 \times 1$ ,  $A = (a)$ :** È invertibile  $\Leftrightarrow a \neq 0$ , quindi  $A^{-1} = (a^{-1})$  e  $\det A = a$ , ovvero il suo unico elemento.

**Matrici  $2 \times 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ :** Poniamo  $\det A = ad - bc$ .

**Matrici  $n \times n$ :** Per  $n > 1$ , riduciamo il calcolo del determinante al determinante di matrici più piccoli mediante la **regola di Laplace**:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

dove  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  e  $A_{ij}$  è la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  ottenuta da  $A$  cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$ .

Oppure possiamo utilizzare le righe:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

**Approfondimento sulle matrici  $2 \times 2$**  Verifichiamo che si ha  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$  è invertibile, o equivalentemente  $\det A = 0 \Leftrightarrow A$  non è invertibile.

$\Rightarrow$  Sia  $\det A = ad - bc = 0$ , vogliamo quindi mostrare che  $rk(A) < 2$  cioè che le righe di  $A$  sono linearmente dipendenti.

Consideriamo la prima riga  $r_1 = (a, b)$ :

- se  $(a, b) = (0, 0)$  allora  $r_1$  è la riga nulla e quindi  $rk(A) < 2$ .
- se  $(a, b) \neq (0, 0)$  allora abbiamo  $a \neq 0$  oppure  $b \neq 0$ . Nel caso in cui  $a \neq 0$ , si ha  $d = \frac{bc}{a}$  e quindi  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$ . Da qui poniamo  $\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \alpha \cdot a$  e  $d = \frac{bc}{a} = \alpha \cdot b$ . Quindi  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \end{pmatrix}$  e quindi la seconda riga è un multiplo della prima, quindi  $rk(A) < 2$ .

$\Leftarrow$  Supponiamo che le due righe siano linearmente indipendenti, cioè che  $A$  sia invertibile, cioè che  $(a, b) = \alpha \cdot (c, d)$ : Allora  $\det \begin{pmatrix} \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha^2 \cdot (ad - bc) = 0$ .



**Esempio.**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot \det A^{(1,2)} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det A^{(2,2)} + 0 \cdot \det A^{(3,2)} + 0 \cdot \det A^{(4,2)} = \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \det 1 = 8 \end{aligned}$$

Dato che  $\det A = 8 \neq 0$ ,  $A$  è invertibile.

**Esempio.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calcoliamo il determinante di  $A$  utilizzando la seconda colonna:

$$\begin{aligned} \det A &= -a_{12} \cdot \det A^{(1,2)} + a_{22} \cdot \det A^{(2,2)} - a_{32} \cdot \det A^{(3,2)} \\ &= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det A^{(2,2)} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= -2(4 \cdot 2 - 5 \cdot 1) - 3(1 \cdot 5 - 3 \cdot 4) \\ &= -6 + 21 \\ &= 15 \end{aligned}$$

#### Definizione 5.2: Proprietà della funzione determinante

**Alternante** Il determinante cambia segno se scambiamo due righe o due colonne, ovvero  $\det A' = -\det A$  se  $A'$  è la matrice trasformata.

**Multilineare** Siano  $A, B$  due matrici che hanno tutte le colonne uguali tranne la colonna  $j$ . Sia  $C$  la matrice che ha le colonne diverse da  $j$  uguali a quelle di  $A$  e la colonna  $j$  di  $C$  è  $a$  volte la colonna  $j$  di  $A$  più  $b$  volte la colonna  $j$  di  $B$ .

Quindi  $C_{ij} = a \cdot A_{ij} + b \cdot B_{ij}$  e  $\det C = a \cdot \det A + b \cdot \det B$ .

La stessa cosa vale anche per le righe.

**Determinante dell'identità**  $\det I_n = 1$ .

**Determinante della trasposta**  $\det A = \det A^T$ .

**Invertibilità**  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$  è invertibile.

**Osservazione.** Il determinante è l'unica funzione  $f : M_{n,m}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  che soddisfa le prime tre proprietà.

**Osservazione.** Se moltiplico una riga di  $A$  per un numero  $k$ , il determinante di  $A$  viene moltiplicato per  $k$ :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \det B = -2 \cdot \det A \end{aligned}$$

**Osservazione.** La trasformazione elementare di Gauss (cioè sommare a una riga un multiplo di un'altra) non cambia il determinante, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 - R_1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \det A$$

Per la multilinearità:  $\det C = \det A - \det B = \det A$  con  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

**Proposizione.** Il determinante di una matrice a scala è il prodotto dei coefficienti sulla diagonale principale.

*Dimostrazione.*

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a \cdot \det \begin{pmatrix} b & f \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

□

**Esempio.** Verificare se i seguenti vettori formano una base di  $\mathbb{R}^4$ :

$$v_1 = (-3, 7, 2, 1), v_2 = (0, 2, 0, 0), v_3 = (0, 11, -1, 0), v_4 = (4, 9, 3, 0)$$

Soluzione utilizzando il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{è invertibile}$$

$\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$  sono linearmente indipendenti  $\Leftrightarrow$  sono una base di  $\mathbb{R}^4$ .

#### Teorema 5.1: Teorema di Binet

Date  $A$  e  $B$  due matrici  $n \times n$ , si ha:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

**Osservazione.** NON è vero che  $\det(A + B) = \det A + \det B$ .

#### Corollario 5.1: Determinante di una matrice inversa

Se  $A$  è invertibile, allora  $\det A^{-1} = \det(A)^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Per il teorema di Binet,  $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1$ . □

#### Corollario 5.2: Determinante di due matrici simili

Se due matrici  $A$  e  $B$  sono simili, allora hanno lo stesso determinante:  $\det A = \det B$ .

*Dimostrazione.* Se  $A$  e  $A'$  sono simili, allora  $\exists H$  invertibile tale che  $A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$ . Quindi  $\det A' = \det(H^{-1}) \cdot \det A \cdot \det H = \det A$ . □

**Osservazione.** Se due matrici hanno determinanti diversi, allora non sono simili.

#### Definizione 5.3: Determinante di un'applicazione lineare

Data  $f : V \rightarrow V$  un'applicazione lineare, definiamo  $\det(f) = \det(A)$  dove  $A$  è la matrice di  $f$  rispetto a una base di  $V$ . Per la proposizione precedente, il determinante non dipende dalla base scelta. Inoltre, se  $f$  è un isomorfismo, allora  $\det(f) \neq 0$ .

## Prodotto vettoriale

### Definizione 5.4: Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$  è un vettore  $\in \mathbb{R}^3$  definito come il determinante della matrice formata dai tre vettori:

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \underline{l}_1 & \underline{l}_2 & \underline{l}_3 \end{pmatrix}$$

dove  $\underline{l}$  è un vettore unitario (cioè di modulo 1) che non appartiene al piano generato da  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$ .

**Esempio.**  $\underline{u} = (1, 3, 0)$ ,  $\underline{v} = (2, -5, 1)$ .

Calcoliamo il prodotto vettoriale  $\underline{u} \wedge \underline{v}$ :

$$\begin{aligned} \underline{u} \wedge \underline{v} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ \underline{l}_1 & \underline{l}_2 & \underline{l}_3 \end{pmatrix} = \underline{l}_1(3 \cdot 1 - 0 \cdot (-5)) - \underline{l}_2(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) + \underline{l}_3(1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2) \\ &= \underline{l}_1(3) - \underline{l}_2(1) + \underline{l}_3(-11) = (3, -1, -11) \end{aligned}$$

**Osservazione.** Il vettore  $\underline{u} \wedge \underline{v}$  è perpendicolare al piano individuato da  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  in  $\mathbb{R}^3$ , se sono linearmente indipendenti.

**Calcolo delle equazioni di un sottospazio utilizzando il determinante e il rango** Sia  $V$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $k$  vettori linearmente indipendenti  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k$ .

**Caso 1:  $k = n - 1$**  Sia  $n = 4$  e  $U = \{(1, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ .

Un vettore generico  $(x, y, z, t)$  appartiene a  $V$  se e solo se è combinazione lineare dei 3 vettori della base, ovvero:

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 0$$

Facciamo lo sviluppo rispetto alla quarta riga:

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \\ &= -x \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - z \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -x + 2y - 2z + t(4 + 1) = -x + 2y - 2z + 5t = 0 \end{aligned}$$

**Caso 2:  $k < n - 1$**  Sia  $n = 4$  e  $U = \{(1, 2, 0, 1), (3, 1, 2, 0)\}$ .

$\dim U = 2 \Rightarrow$  il sottospazio  $V$  è generato da  $4 - 2 = 2$  equazioni.

Un vettore generico  $(x, y, z, t)$  appartiene a  $V$  se e solo se è combinazione lineare dei 2 vettori della base, ovvero:

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 2$$

Riduciamo la matrice a scala:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow \begin{matrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - xR_1 \end{matrix} \\
 & \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & y-2x & z & t-x \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow 5R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 5(y-2x) & 5z & 5(t-x) \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow R_3 + (y-2x)R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5z+2(y-2x) & 5(t-x)-3 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} 5z+2(y-2x)=0 \\ 5(t-x)-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+2y+5z=0 \\ x-3y+5t=0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il determinante permette di formulare anche una regola per calcolare il **prodotto vettoriale**, cioè un'operazione  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f(u, v) = u \wedge v$ , molto usata in fisica. Se  $u = (a_1, a_2, a_3)$  e  $v = (b_1, b_2, b_3)$ , allora  $u \wedge v = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} = l_1(a_2b_3 - a_3b_2) - l_2(a_1b_3 - a_3b_1) + l_3(a_1b_2 - a_2b_1)$ .

**Esempio.**  $(1, 2, 3) \wedge (-1, 0, 2) = (4, -5, 2)$ .

Il prodotto vettoriale eredita le proprietà del determinante:

- Altalenante:  $u \wedge v = -v \wedge u$ .
- Multilineare:  $(au + bv) \wedge w = a(u \wedge w) + b(v \wedge w)$ .

### 5.3.1 Esercizio parametrico

**Esempio.** Al variare del parametro  $t$ , determinare il rango della matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t \\ 0 & 1 & 2 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

$$\det(A) = 0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & t \\ t & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ t & -1 \end{pmatrix} = -6 - t^2 - 2(-3 + 2t) = -6 - t^2 + 6 - 4t = -t^2 - 4t = -t(t + 4).$$

- Se  $t \neq 0, -4 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rk(A) = 3$ .  $A$  è invertibile.
- Se  $t = 0, -4, rk(A) < 3$ :

$$- t = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A) = 2. \text{ (I vettori colonna 1 e 2 sono linearmente indipendenti).}$$

$$- t = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A) = 2. \text{ (I vettori colonna 1 e 2 sono linearmente indipendenti).}$$

**Esempio.** Al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , calcolare la dimensione di Im e Ker dell'applicazione  $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f_t(x, y, z) = (3x - 2y + tz, y + 2z, tx - y - 27)$ . Nella base canonica  $l_1 = (1, 0, 0), l_2 = (0, 1, 0), l_3 = (0, 0, 1)$ , la matrice di  $f_t$  è  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t \\ 0 & 1 & 2 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Quindi, se  $t \neq 0, -4 \Rightarrow \dim \text{Im} f_t = rk(A) = 3$  e  $\dim \ker f_t = 3 - 3 = 0 \Rightarrow f_t$  è un isomorfismo. Se  $t = 0, -4 \Rightarrow \dim \text{Im} f_t = rk(A) = 2$  e  $\dim \ker f_t = 3 - 2 = 1 \Rightarrow f_t$  non è nè iniettiva nè suriettiva.

### 5.3.2 Geometria affine

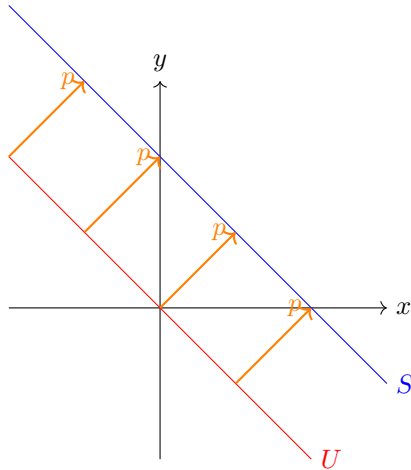
#### Definizione 5.5: Sottospazio affine

Un sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{K}^n$  è detto sottospazio affine se è ottenuto traslando un sottospazio vettoriale  $U$  per un vettore  $v$ :

$$S = \{U + v \mid v \in \mathbb{K}^n\}$$

Inoltre,  $\dim S = \dim U$ .

**Esempio.** Consideriamo in  $\mathbb{R}^2$   $U = \langle(-1, 1)\rangle$  e  $S = U + (1, 1)$ .



$U$  è  $x + y = 0$  e  $S$  è  $x + y = 2$ .

**Osservazione.** Il vettore  $p$  di translazione NON è unico, ad esempio possiamo prendere anche  $(3, -1)$ .

#### Teorema 5.2: Sistema lineare omogeneo associato

Sia  $Ax = b$  un sistema lineare e  $A$  la matrice  $m \times n$  dei coefficienti.

Consideriamo il sistema lineare omogeneo associato  $Ax = 0$ . Allora:

1. L'insieme  $U$  delle soluzioni del sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^n$  di dimensione  $n - \text{rk}(A)$ .
2. L'insieme  $S$  delle soluzioni del sistema non omogeneo, se non è vuoto, è un sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$  di dimensione  $n - \text{rk}(A)$ , ottenuto traslando  $U$  con qualsiasi  $p \in S$  cioè  $S = \{p + u \mid u \in U\}$ .

*Dimostrazione.* Verifichiamo i due punti:

1. Siano  $u_1, u_2 \in U$  (cioè  $Au_1 = 0, Au_2 = 0$ , quindi  $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = 0 + 0 = 0$ ). Analogamente, se  $u \in U$  e  $k \in \mathbb{K}$ , allora  $A(ku) = kAu = k0 = 0$ , quindi  $ku \in U$ . Alla luce di questi risultati,  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^n$ .
2. Sia  $u \in U$  (cioè  $Au = 0$ ) e  $p \in S$  (cioè  $Ap = b$ ). Allora  $u + p \in S$  perchè  $A(u + p) = Au + Ap = 0 + b = b$ , quindi  $\{p + u \mid u \in U\} \subseteq S$ .  
Siano  $p, p' \in S$  (cioè  $Ap = b, Ap' = b$ ); allora  $A(p - p') = Ap - Ap' = b - b = 0$ , cioè  $p - p' \in U$ . Quindi  $p' = p + u$  con  $u \in U$ , cioè  $S \subseteq \{p + u \mid u \in U\} \Rightarrow S = \{p + u \mid u \in U\}$ .

□

## 5.4 Matrici e sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto nella forma matriciale  $A \cdot x = B$  dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e si chiamano rispettivamente matrice dei coefficienti, vettore delle incognite e vettore dei termini noti. Inoltre, data una applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $A = M_{E_n}^{E_m}(f)$ , il sistema  $Ax = b$  è equivalente a  $f(x) = b$ .

**Osservazione.** La scrittura di un sistema  $Ax = b$  è comoda anche per svolgere rapidamente il metodo di Gauss.

**Osservazione.** Risolvere il sistema vuol dire esprimere il vettore  $b$  come combinazione lineare delle colonne della matrice  $A$ , cioè:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema è risolubile se e solo se la colonna  $b$  è combinazione lineare delle colonne della matrice  $A$ .

**Esempio.** Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Inizio a fare le operazioni secondo il metodo di Gauss:

$$\begin{array}{l} R1 \\ -2R1 + R2 \\ R1 + R3 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R1 \\ R2 \\ -\frac{3}{5}R2 + R3 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}z = -\frac{2}{5} \Rightarrow z = -\frac{2}{3} \\ -5y + 3z = 1 \Rightarrow -5y + 3 \cdot (-\frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x + 2y - z = 1 \Rightarrow x + 2 - (-\frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

### Teorema 5.3: Teorema di Rouché-Capelli

Il sistema lineare  $Ax = b$  è risolubile se e solo se  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b)$ .

*Dimostrazione.* Per l'osservazione precedente, il sistema è risolubile se e solo se il numero di colonne indipendenti in  $A|b$  non aumenta rispetto ad  $A$  (cioè  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b)$ ).  $\square$

**Conseguenza** Per capire se un sistema è risolvibile, possiamo considerare la matrice completa  $A|b$ , ridurla tramite Gauss ad una matrice a scala  $A'|b'$  e verificare se  $\text{rk}(A') = \text{rk}(A'|b')$ .

**Esempio.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_3 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & -10 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_2 - 2R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -12 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 2R_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \text{rk}(A) &= 2 \\ \text{rk}(A|b) &= 2 \\ \text{rk}(A) &= \text{rk}(A|b) \Rightarrow \text{il sistema è risolvibile.} \end{aligned}$$

**Esempio.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$

Trovare  $x$  tale che  $Ax = b$ .

$$A|b = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array} \right).$$

$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = 1$ , per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette soluzione, cioè  $\exists x_1, x_2 \mid \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Cioè  $\exists x_1, x_2 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$  cioè il sistema ammette soluzioni.

**Esempio.** Trovare, se esiste, un polinomio di grado  $\leq 2$  tale che  $p(2) = 0, p(1) = 3, p(0) = 1, p(-1) = 2$ .

Sia  $p(x) = ax^2 + bx + c$ .

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 3 \\ c = 1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{rk}(A) = 3, \text{rk}(A|b) = 4 \text{ perchè } \det A|b = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 28 \neq 0.$$

Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzione.

#### Teorema 5.4

Consideriamo il sistema  $Ax = b$  con  $n$  incognite:

1. Se  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = n$ , il sistema ha una soluzione unica.
2. Se  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) < n$ , il sistema ha infinite soluzioni (se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).

**Dimostrazione.** 1. Riduciamo il sistema ad uno a scala ed eliminiamo le righe nulle in fondo.

Quindi  $A'x = b'$  dove la matrice  $A'$ , avendo  $n$  colonne, essendo in scala e non avendo righe nulle

è della forma  $n \times n$ , ovvero:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza,  $A'$  è invertibile.

Moltiplichiamo l'equazione  $A'x = b'$  per  $A'^{-1}$  e otteniamo  $x = A'^{-1}b'$ . Quindi il sistema ha una soluzione unica.

2. Caso speciale:  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$  e quindi  $Ax = 0$ .

L'insieme delle soluzioni è proprio  $\ker F$  (dove  $F$  era tale che  $A = M_{E_n}^{E_m}(F)$ ). Sappiamo che  $\dim \ker F = n - \dim(\operatorname{Im} F) = n - \operatorname{rk}(A) > 0$ . Quindi  $\ker F$  contiene infiniti elementi.

Caso generale con  $b$  qualunque: chiamiamo  $U = \ker F$  determinato nel caso precedente. Quindi se  $u \in U \Rightarrow Au = 0$ . Per il teorema di Rouché-Capelli, sappiamo che esiste una soluzione e la chiamiamo  $v \in \mathbb{R}^n$ , quindi:  $A \cdot v = b$ .

Inoltre,  $\forall u \in U$  si ha che  $u + v$  è ancora una soluzione, infatti:  $A(u + v) = Au + Av = 0 + b = b$ .  $\square$

**Esempio.**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 7y - 5z = 1 \\ -x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Consideriamo il sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 5z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z - 2y = -z$$

Quindi  $U = \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ . Quindi passiamo alla matrice associata al sistema originale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1|1 \\ 2 & 7 & -5|1 \\ -1 & 1 & -2|-2 \end{pmatrix} \Rightarrow A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1|1 \\ 0 & 3 & -3|-1 \\ 0 & 3 & -3|-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 3y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \\ x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow v = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è  $S = \{(-z, z, z) + (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{5}{3} - z, -\frac{1}{3} + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ .

## 5.5 Applicazioni alla geometria analitica

### 5.5.1 Retta passante per due punti

Consideriamo due punti  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  in  $\mathbb{R}^2, P_1 \neq P_2$ . Trovare la retta che passa per  $P_1$  e  $P_2$ . Una retta in  $\mathbb{R}^2$  è data dall'equazione  $ax + by = c$ . Si vuole quindi trovare  $a, b, c$ .

**Osservazione.** Se  $ax + by = c$  è l'equazione di una retta, anche  $2ax + 2by = 2c$  lo è. Quindi  $a, b, c$  non sono univoci.

**Esempio.**  $P_1(1, 3), P_2(3, 2)$ .

La retta passante per  $P_1$  e  $P_2$  è data da  $ax + by = c$ .

$$\begin{cases} a + 3b = c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & c \\ 3 & 2 & | & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R1 \\ R2 - 3R1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & c \\ 0 & -7 & | & -2c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7b = -2c \Rightarrow b = \frac{2}{7}c \\ a + 3 \cdot \frac{2}{7}c = c \Rightarrow a = \frac{5}{7}c \end{cases}$$

Quindi:  $S = \{(\frac{1}{7}t, \frac{2}{7}t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .



### 5.5.2 Piano passante per tre punti

Consideriamo tre punti  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$  in  $\mathbb{R}^3$ ,  $P_1, P_2, P_3$  non allineati. Trovare il piano che passa per  $P_1, P_2, P_3$ . Un piano in  $\mathbb{R}^3$  è dato dall'equazione  $ax + by + cz = d$ . Si vuole quindi trovare  $a, b, c, d$ .

**Esempio.**  $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 1), P_3 = (2, 0, -1)$ .

La retta passante per  $P_1, P_2, P_3$  è data da  $ax + by + cz = d$ .

$$\begin{cases} a + b = d \\ b + c = d \\ 2a - c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = d - c = 0 \\ c = -d + 2a = t \\ d = t \end{cases}$$

Quindi:  $S = \{(t, 0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Una equazione del piano è  $x + z = 1$ .

**Osservazione.**  $p$  è un sottospazio affine di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^3$ .  $S$  è un sottospazio affine di dimensione 1 di  $\mathbb{R}^4$ .

**Esempio.**  $P_1 = (2, 0, -1), P_2 = (3, 1, 0), P_3 = (4, 2, 1)$ .

La retta passante per  $P_1, P_2, P_3$  è data da  $ax + by + cz = d$ .

$$\begin{cases} 2a - c = d \\ 3a + b = d \\ 4a + 2b + c = d \end{cases} \Rightarrow \text{gauss} \begin{cases} 2a - c = d \\ b + \frac{3}{2}c = -\frac{1}{2}d \\ 2b + 3c = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - c = d \\ b + \frac{3}{2}c = -\frac{1}{2}d \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c+d}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s \\ b = -\frac{1}{2}d - \frac{3}{2}c = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s \\ c = s \\ d = t \end{cases}$$

Quindi:  $S = \{(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s, -\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ . Abbiamo ottenuto un sottospazio affine di dimensione 2 perchè  $P_1, P_2, P_3$  sono allineati, quindi  $P$  non è unico.

#### Definizione 5.6: Sottospazi in geometria analitica

- Un punto in  $\mathbb{R}^n$  è un sottospazio affine di dimensione 0.
- Una retta in  $\mathbb{R}^n$  è un sottospazio affine di dimensione 1.
- Un piano in  $\mathbb{R}^n$  è un sottospazio affine di dimensione 2.
- Un iperpiano in  $\mathbb{R}^n$  è un sottospazio affine di dimensione  $n - 1$ .

Dati due punti distinti di  $\mathbb{K}^n$ , esiste un'unica retta che li contiene.

Dati tre punti non allineati di  $\mathbb{K}^n$ , esiste un unico piano che li contiene. Se invece i tre punti sono allineati, esistono infiniti piani che li contengono.

**Osservazione.** Un piano in  $\mathbb{R}^3$  passante per tre punti esiste ed è unico se i tre punti non sono allineati, cioè se i vettori  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$  non sono proporzionali/paralleli.

**Esempio.**  $P_1 = (2, 0, -1), P_2 = (3, 1, 0), P_3 = (4, 2, 1)$ .

$\overrightarrow{P_1P_2} = (3 - 2, 1 - 0, 0 - (-1)) = (1, 1, 1)$  e  $\overrightarrow{P_1P_3} = (4 - 2, 2 - 0, 1 - (-1)) = (2, 2, 2)$ .

Quindi  $\overrightarrow{P_1P_2}$  è parallelo a  $\overrightarrow{P_1P_3}$  e quindi i tre punti sono allineati.

**Osservazione.** Le rette sono iperpiani di  $\mathbb{R}^2$  e i piani sono iperpiani di  $\mathbb{R}^3$ .

**Osservazione.** Gli iperpiani sono determinati da un'equazione del tipo  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ .

**Esempio.** Determinare la retta passante per i punti  $P(3, 1, -1), Q(2, 2, 1)$ .

$\overrightarrow{PQ} = (2 - 3, 2 - 1, 1 - (-1)) = (-1, 1, 2)$ .

Quindi la retta è data da  $\{P + t\overrightarrow{PQ}, t \in \mathbb{R}\} = \{(3, 1, -1) + t(-1, 1, 2), t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - t, 1 + t, -1 + 2t), t \in \mathbb{R}\}$ . Posso esprimere la retta  $r = \{3 - t, 1 + t, -1 + 2t\}$  anche tramite equazioni cartesiane con  $x = 3 - t, y = 1 + t, z = -1 + 2t$ .

$$\begin{cases} x + y = 4 (= 3 - t + 1 + t) \\ 2x + z = 5 (= 6 - 2t - 1 + 2t) \end{cases}$$

Bastano due equazioni ( $\dim \mathbb{R}^3 - \dim M = 3 - 1 = 2$ ) per determinare la retta, ma non sono uniche, perchè ci sono infiniti piani che passano per una retta.

**Esempio.** Trovare l'intersezione della retta  $r = \{3-t, t+1, 2t-1\}$  con il piano di equazione  $x+2y-z=3$ .

Trovo  $t$  sostituendo  $x, y, z$  con le equazioni della retta:

$$\begin{aligned} 3-t+2(t+1)-(2t-1) &= 3 \\ (3-t)+2(t+1)-(2t-1) &= 3 \\ 3-t+2t+2-2t+1 &= 3 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Sostituendo in  $r$  ho il punto di intersezione:  $(3-3, 3+1, 2 \cdot 3-1) = (0, 4, 5)$ .

**Esempio.** Trovare la retta  $r'$  parallela alla retta  $r = \{3-t, t+1, 2t-1\}$  e passante per il punto  $P(5, -2, 3)$ .

Se  $r'$  è parallela a  $r$ , allora avrà lo stesso vettore di direzione  $\vec{v} = (-1, 1, 2)$  di  $r$ . Inoltre, poichè  $r'$  passa per  $P$ , allora  $r' = \{P' + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}\} = \{(5, -2, 3) + t(-1, 1, 2), t \in \mathbb{R}\} = \{(-t+5, t-2, 2t+3), t \in \mathbb{R}\}$ .

**Esempio.** Trovare, se esiste, l'intersezione tra la retta  $r = \{3-t, t+1, 2t-1\}$  e il piano  $x+2y-z=3$  e la retta  $r'' = \{(2s-1, 3s+1, s+5), s \in \mathbb{R}\}$ .

Se esiste un punto di intersezione esistono  $t, s \in \mathbb{R}$  tali che:

$$\begin{cases} 3-t=2s-1 \\ t+1=3s+1 \\ 2t-1=s+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-3s=2s-1 \\ t=3s \\ 6s-1=s+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=5s \\ t=3s \\ 6=5s \end{cases}$$

Quindi non c'è soluzione:  $r, r''$  sono parallele e non si intersecano. D'altra parte, non sono paralleli perchè i vettori di direzione  $(-1, 1, 2)$  e  $(2, 3, 1)$  non sono l'uno il multiplo dell'altro. In questo caso,  $r, r''$  sono sghembe.

**Esempio.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ . Trovare tutti gli elementi del piano di  $\mathbb{K}$  di equazione  $2x+y+z=1$ .

Osserviamo che poichè  $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ , allora ha  $3^3 = 27$  elementi e un piano in esso avrà  $3^2 = 9$  elementi.  $p = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}, \bar{1})\}$ .

**Esempio.** Trovare tutti i polinomi  $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  tali che  $\begin{cases} p(1) = 4 \\ p'(1) = 1 \\ p''(1) = -2 \end{cases}$ .

Sappiamo che  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Costruisco il sistema calcolando le derivate:

$$\begin{cases} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ p''(x) = 6ax + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=4 \\ 3a+2b+c=1 \\ 6a+2b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=t \\ b=-1-3t \\ c=3t+3 \\ d=-t+2 \end{cases}$$

L'insieme dei polinomi che verificano queste condizioni è  $\{tx^3 + (-1-3t)x^2 + (3t+3)x + (-t+2), t \in \mathbb{R}\}$ .

Se invece cerco un polinomio che, oltre a soddisfare le condizioni precedenti, verifichi anche  $p'''(1) = -6$ , allora la soluzione è unica:  $p'''(x) = 6a$ , quindi  $6a = -6 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow t = -1$  e sostituendo  $p(x) = -x^3 + 2x^2 + 3$ .

**Esempio.** Trovare il piano passante per i punti  $P_0(1, 0, 1), P_1(2, -1, 0), P_2(-1, 1, 1)$ .

Per prima cosa trovo i vettori di direzione:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \overrightarrow{P_0P_1} = (2-1, -1-0, 0-1) = (1, -1, -1) \\ \vec{v}_2 &= \overrightarrow{P_0P_2} = (-1-1, 1-0, 1-1) = (-2, 1, 0) \end{aligned}$$

Quindi il piano è dato da  $\{P_0 + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2, t, s \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0, 1) + t(1, -1, -1) + s(-2, 1, 0), t, s \in \mathbb{R}\} = \{(1+t-2s, -t+s, 1-t), t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0\}$ .

## 6 Unità 6 - Lezioni 13, 14, 15

### 6.1 Endomorfismi e autovettori

#### Definizione 6.1: Endomorfismo

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Un endomorfismo è una applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$ .

#### Definizione 6.2: Matrice diagonale

Una matrice  $D(n \times n)$  è detta **diagonale** se  $d_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$  (cioè se è nulla al di fuori della diagonale principale).

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

**Osservazione.** Due matrici diagonali sono semplici da moltiplicare tra loro:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$DE = \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}e_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}e_{nn} \end{pmatrix}$$

Inoltre,  $\det D = d_{11}d_{22}\dots d_{nn}$  e se  $\det D \neq 0$  (cioè  $d_i \neq 0 \forall i$ ) allora  $D$  è invertibile e  $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}$ .

Inoltre  $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, D^m = \begin{pmatrix} d_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^m \end{pmatrix}$ .

#### Definizione 6.3: Autovettore

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Un vettore  $v \in V, v \neq 0$  è detto **autovettore** di  $f$  se  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, f(v) = \lambda v$ .  $\lambda$  è detto **autovalore** di  $f$ .

**Esempio.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, f : V \rightarrow V, f(x, y) = (2y, 2x)$

- $l_1$  non è un autovettore perchè  $f(l_1) = f(1, 0) = 2l_2 = (0, 2) \neq \lambda(1, 0)$ .
- $l_2$  non è un autovettore perchè  $f(l_2) = f(0, 1) = 2l_1 = (2, 0) \neq \lambda(0, 1)$ .
- $v_1 = (1, 1)$  è un autovettore di autovalore 2 perchè  $f(v_1) = f(1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1) = 2v_1$ .
- $v_2 = (1, -1)$  è un autovettore di autovalore -2 perchè  $f(v_2) = f(1, -1) = (-2, 2) = -2(1, -1) = -2v_2$ .

Matrici di  $f$ :

Base $l_1, l_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	Non è diagonale
Base $v_1, v_2$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	È diagonale

**Osservazione.** Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è una base di  $V$  composta da autovettori di  $f$  allora:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ f(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Quindi la matrice di  $f$  rispetto alla base  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Passi generali per rispondere alle domande "Si può diagonalizzare  $f$ ?", "Si può trovare una base di  $V$  in cui la matrice di  $f$  è diagonale?", "esiste una base di  $V$  composta da autovettori di  $f$ ?"

1. Trovare gli autovalori di  $f$  (se esistono).
2. Per ogni autovalore  $\lambda$  trovare gli autovettori corrispondenti.

#### 6.1.1 Passo 1: Trovare gli autovalori di $f$

##### Definizione 6.4: Polinomio caratteristico

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Il polinomio  $p(\lambda) = \det(f - \lambda I)$  è detto **polinomio caratteristico** di  $f$ .

##### Teorema 6.1: Autovalori e polinomio caratteristico

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ ,  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo e  $p(x)$  il suo polinomio caratteristico. Allora  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $p(\lambda_i) = 0$ .

*Dimostrazione.*  $\lambda_i$  è un autovalore di  $f \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0$  tale che  $f(v) = \lambda_i v \Leftrightarrow (f - \lambda_i I)(v) = 0 \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \mid (f - \lambda_i I)(v) = f(v) - \lambda_i v = \lambda_i v - \lambda_i v = 0 \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \mid v \in \ker(f - \lambda_i I) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda_i I) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda_i I$  non è iniettiva e quindi non è un isomorfismo  $\Leftrightarrow p(\lambda_i) = \det(f - \lambda_i I) = 0$ .  $\square$

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2y, 2x)$ . Scrivo la matrice di  $f$  in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (0, 2) = 0(1, 0) + 2(0, 1) = 2e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 1) = 2e_1 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

Quindi gli autovalori di  $f$  sono  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$ .

Per definizione gli autovettori sono i vettori  $v \neq 0$  tali che  $f(v) = \lambda v$ , quindi, dato un vettore  $v = (x, y)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2v \\ (2y, 2x) &= (2x, 2y) \\ \begin{cases} 2y = 2x \\ 2x = 2y \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y = x \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  sono i vettori  $(x, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ad esempio  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$ , ....  
Analogamente per  $\lambda_2 = -2$  dato un vettore  $v = (x, y)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -2v \\ (2y, 2x) &= (-2x, -2y) \\ \begin{cases} 2y = -2x \\ 2x = -2y \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow y = -x \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  sono i vettori  $(x, -x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ad esempio  $(1, -1)$ ,  $(2, -2)$ ,  $(3, -3)$ , ....

**Esempio.**  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (2x, -4x - 2y - 8z, -4z)$ .

Scrivo la matrice di  $f$  in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (2, -4, 0) = 2e_1 - 4e_2 + 0e_3 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (0, -2, 0) = 0e_1 - 2e_2 + 0e_3 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, -4) = 0e_1 + 0e_2 - 4e_3 \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-4-\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -4 \end{aligned}$$

Troviamo gli autovettori per ciascun autovalore, dato un vettore  $v = (x, y, z)$ :

- $\lambda_1 = 2$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (2x, 2y, 2z) \\ \begin{cases} 2x = 2x \\ -4x - 2y - 8z = 2y \\ -4z = 2z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4y = -4x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda_1 = 2$  sono i vettori  $(x, -x, 0)$ , ad esempio  $(1, -1, 0)$ ,  $(2, -2, 0)$ ,  $(3, -3, 0)$ , ....

- $\lambda_2 = -2$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_2 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (-2x, -2y, -2z) \\ \begin{cases} 2x = -2x \\ -4x - 2y - 8z = -2y \\ -4z = -2z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ -2y = -2x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda_2 = -2$  sono i vettori  $(0, y, 0)$ , ad esempio  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$ , ....

- $\lambda_3 = -4$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_3 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (-4x, -4y, -4z) \\ \begin{cases} 2x = -4x \\ -4x - 2y - 8z = -4y \\ -4z = -4z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ -2y + 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4z \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda_3 = -4$  sono i vettori  $(0, 4z, z)$ , ad esempio  $(0, 4, 1)$ ,  $(0, 8, 2)$ ,  $(0, 12, 3)$ , ....

Possiamo verificare che  $v_1 = (1, -1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 4, 1)$  sono una base di  $\mathbb{R}^3$  composta da autovettori di  $f$ . Sappiamo già da  $f(v) = \lambda v$  che la matrice di  $f$  rispetto a questa base è diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tuttavia, se il polinomio caratteristico non ha i suoi zeri in  $\mathbb{K}$ , allora non è detto che esistano autovettori.

**Esempio.**  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ,  $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ ,  $f(x, y) = (2y, x)$ ,  $\mathbb{Q} = \{ \text{numeri razionali} \}$ .

Scrivo la matrice di  $f$  in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (0, 1) = 0e_1 + 1e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (2, 0) = 2e_1 + 0e_2 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Quindi  $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$  non può essere diagonalizzata, ma può essere diagonalizzata in  $\mathbb{R}^2$  (perchè  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ).

**Esempio.**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (y, -x)$ . Scrivo la matrice di  $f$  in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (0, -1) = 0e_1 - 1e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (1, 0) = 1e_1 + 0e_2 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i \notin \mathbb{R}$$

Quindi  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  non può essere diagonalizzata, ma può essere diagonalizzata in  $\mathbb{C}^2$  (perchè  $i \in \mathbb{C}$ ). Troviamo gli autovettori per ciascun autovalore, dato un vettore  $v = (x, y)$ :

- $\lambda_1 = i$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 v \Rightarrow (y, -x) = (iy, -ix) \\ \begin{cases} y = iy \\ -x = -ix \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = ix \\ x = iy \end{cases} \Rightarrow y = ix \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda_1 = i$  sono i vettori  $(x, ix)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ad esempio  $(1, i)$ ,  $(2, 2i)$ ,  $(3, 3i)$ , ....

- $\lambda_2 = -i$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_2 v \Rightarrow (y, -x) = (-iy, -ix) \\ \begin{cases} y = -iy \\ -x = -ix \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = -ix \\ x = -iy \end{cases} \Rightarrow y = -ix \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda_2 = -i$  sono i vettori  $(x, -ix)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ad esempio  $(1, -i)$ ,  $(2, -2i)$ ,  $(3, -3i)$ , ....

### 6.1.2 Passo 2: Trovare gli autovettori di $f$ per ogni autovalore

#### Definizione 6.5: Autospazio

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ ,  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo e  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  un autovalore di  $f$ . L'**autospazio** di  $f$  relativo all'autovalore  $\lambda_i$  è l'insieme  $V_{\lambda_i} = \{v \in V \mid f(v) = \lambda_i v\}$ .

**Proposizione.**  $V_{\lambda_i}$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Se  $v_1, v_2 \in V_{\lambda_i} \Rightarrow f(v_1) = \lambda_i v_1$  e  $f(v_2) = \lambda_i v_2 \Rightarrow f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda_i v_1 + \lambda_i v_2 = \lambda_i(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 \in V_{\lambda_i}$ .

Analogamente, se  $a \in \mathbb{K}$ ,  $f(av) = af(v) = a\lambda_i v = \lambda_i(av)$ , quindi  $av \in V_{\lambda_i}$ .  $\square$

**Proposizione.** Se  $\lambda_i \neq \lambda_j$  allora  $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$ , con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Allora  $\lambda_i v = f(v) = \lambda_j v \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)v = 0 \Rightarrow v = 0$ .

Nota:  $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$  perchè  $\lambda_i \neq \lambda_j$ .  $\square$

#### Definizione 6.6: Molteplicità algebrica e geometrica

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ ,  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo e  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  un autovalore di  $f$ . La **molteplicità geometrica** di  $\lambda_i$  è la dimensione dell'autospazio  $V_{\lambda_i}$ , cioè  $m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$ . La **molteplicità algebrica** di  $\lambda_i$  è la sua molteplicità come soluzione dell'equazione  $p(\lambda) = 0$ , cioè quante volte  $\lambda_i$  annulla il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$ .

**Esempio.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (3x + y, 3y)$ .

Scrivo la matrice di  $f$  in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (3, 0) = 3e_1 + 0e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (1, 3) = 1e_1 + 3e_2 \\ A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2$$

Calcolo la molteplicità algebrica di  $\lambda = 3$ :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \\ m_a(3) &= 2 \text{ (perchè annulla 2 volte } p(x)) \end{aligned}$$

Troviamo gli autovettori per  $\lambda = 3$ , dato un vettore  $v = (x, y)$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda v \Rightarrow (3x + y, 3y) = (3x, 3y) \\ \begin{cases} 3x + y = 3x \\ 3y = 3y \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3y = 3y \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda = 3$  sono i vettori  $(x, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ad esempio  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 0)$ , .... L'autospazio  $V_3$  è quindi  $V_3 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 3v\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ .

La molteplicità geometrica di  $\lambda = 3$  è  $m_g(3) = \dim V_3 = 1$ .

**Proposizione.** Sia  $\lambda_i$  un autovalore di  $f : V \rightarrow V$ . Allora  $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ .

*Dimostrazione.*  $m_g(\lambda_i) \geq 1$  perchè se  $m_g(\lambda_i) = 0$  allora  $V_{\lambda_i} = \{0\}$  e quindi non ci sarebbero vettori  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  tali che  $f(v) = \lambda_i v$  e quindi  $\lambda_i$  non sarebbe un autovalore di  $f$ , contraddicendo la definizione stessa di autovalore.

Sia ora  $h = m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$  e mostriamo che  $m_a(\lambda_i) \geq h$ .

Preso una base  $\{v_1, v_2, \dots, v_h\}$  di  $V_{\lambda_i}$ , completiamola ad una base di  $V$  aggiungendo  $v_{h+1}, \dots, v_n$ . Scriviamo la matrice di  $f$  rispetto a questa base:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_i v_1 = \lambda_i v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ f(v_2) &= \lambda_i v_2 = 0v_1 + \lambda_i v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ f(v_h) &= \lambda_i v_h = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_i v_h \\ f(v_{h+1}) &= \lambda_i v_{h+1} = a_{1,h+1}v_1 + a_{2,h+1}v_2 + \dots + a_{h,h+1}v_h + \lambda_i v_{h+1} \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_i v_n = a_{1,n}v_1 + a_{2,n}v_2 + \dots + a_{h,n}v_h + \lambda_i v_n \end{aligned}$$

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,h+1} \\ 0 & \lambda_i - \lambda & \dots & 0 & a_{2,h+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & a_{h,h+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Quindi  $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_i - \lambda)^h \cdot q(\lambda)$ , dove  $q(\lambda)$  è un polinomio di grado  $n - h$ . Quindi il fattore  $(\lambda_i - \lambda)^h$  è presente nel polinomio caratteristico  $p(\lambda)$  almeno  $h$  volte, cioè  $m_a(\lambda_i) \geq h$ .  $\square$

### Teorema 6.2: Criterio di diagonalizzabilità

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  i suoi autovalori.  $f$  è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

1.  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, k$ , ovvero tutti gli autovalori sono nel campo.
2.  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, k$ , ovvero la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica per ogni autovalore.

*Dimostrazione.* Supponiamo che valga la condizione 1, cioè  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{K}$  e consideriamo gli autospazi  $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_t}$ .

Sia  $U = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$ , cioè  $U$  è la somma diretta degli autospazi (perchè  $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$  se  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ).

Sia  $\mathcal{B}_1$  una base di  $V_{\lambda_1}$ ,  $\mathcal{B}_2$  una base di  $V_{\lambda_2}$ , ...,  $\mathcal{B}_t$  una base di  $V_{\lambda_t}$ ; quindi poichè la somma è diretta  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_t$  è una base di  $U$ . Quindi  $\dim U = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_t} = m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \dots + m_g(\lambda_t)$ .

D'altra parte  $\dim V = m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \dots + m_a(\lambda_t)$ .

Se vale la condizione 2 allora  $\dim U = \dim V$  e quindi  $U = V$  e quindi  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$  composta da autovettori di  $f$  e quindi la matrice di  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è diagonale.

Se non vale la condizione 2 allora  $\dim U = m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \dots + m_g(\lambda_t) < m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \dots + m_a(\lambda_t) = \dim V$  e quindi  $\mathcal{B}$  non è una base di  $V$ . Posso completare  $\mathcal{B}$  ad una base di  $V$  ma i vettori che aggiungo non sono autovettori di  $f$  e quindi la matrice di  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  non è diagonale.  $\square$

**Osservazione.** Se valgono 1 e 2 la dimostrazione ci fornisce un algoritmo esplicito per trovare la base di autovettori di  $V$ : basta unire le basi degli autospazi.

**Esempio.** Consideriamo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $f : V \rightarrow V$ ,  $f(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$ . Trovare, se possibile, una base di  $\mathbb{R}^3$  in cui la matrice di  $f$  è diagonale.

Scrivo la matrice di  $f$  in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 =$



$(0, 0, 1)$ :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 3, 6) = 1e_1 + 3e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (-3, -5, -6) = -3e_1 - 5e_2 - 6e_3 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (3, 3, 4) = 3e_1 + 3e_2 + 4e_3 \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$$

Quindi gli autovalori di  $f$  sono  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$  con molteplicità algebrica rispettivamente  $m_a(-2) = 2, m_a(4) = 1$ .

Troviamo gli autovettori per  $\lambda_1 = -2$ , dato un vettore  $v = (x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -2v\} \\ f(v) = \lambda_1 v &\Rightarrow (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z) = (-2x, -2y, -2z) \\ \begin{cases} x - 3y + 3z = -2x \\ 3x - 5y + 3z = -2y \\ 6x - 6y + 4z = -2z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + z = y \Rightarrow m_g(-2) = 2 \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda_1 = -2$  sono i vettori  $(x, x+z, z), x, z \in \mathbb{R}$ , ad esempio  $(1, 1, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 0), \dots$ . Di conseguenza la base  $\mathbb{B}_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  è la base di  $V_{\lambda_1}$ .

Troviamo gli autovettori per  $\lambda_2 = 4$ , dato un vettore  $v = (x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 4v\} \\ f(v) = \lambda_2 v &\Rightarrow (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z) = (4x, 4y, 4z) \\ \begin{cases} x - 3y + 3z = 4x \\ 3x - 5y + 3z = 4y \\ 6x - 6y + 4z = 4z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -6x = -3z \\ -6x = -3z \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow m_g(4) = 1 \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di  $f$  per  $\lambda_2 = 4$  sono i vettori  $(t, t, 2t), t \in \mathbb{R}$ , ad esempio  $(1, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 6), \dots$ . Di conseguenza la base  $\mathbb{B}_2 = \{(1, 1, 2)\}$  è la base di  $V_{\lambda_2}$ .

Per il teorema di diagonalizzabilità  $f$  è diagonalizzabile se e solo se  $m_a(-2) = m_g(-2)$  e  $m_a(4) = m_g(4)$ , cioè se e solo se  $m_a(-2) = 2 = m_g(-2)$  e  $m_a(4) = 1 = m_g(4)$ .

La base di autovettori di  $f$  è quindi  $\mathcal{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ . In questa base la matrice di  $f$  è diagonale:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) &= 0v_1 - 2v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) &= 0v_1 + 0v_2 + 4v_3 \\ D &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Esempio.** Dati  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x, y, z, w) = (y, z, w, 0)$ . Dire se  $f$  è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di autovettori.

Scrivo la matrice di  $f$  in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica  $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 =$

$(0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$ :

$$f(e_1) = f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$f(e_4) = f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-\lambda)^3 = \lambda^4$$

Quindi l'unico autovalore di  $f$  è  $\lambda = 0$  con molteplicità algebrica  $m_a(0) = 4$ .

$f(x, y, z, w) = 0 \cdot (x, y, z, w) \Rightarrow (y, z, w, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow y = z = w = 0$ . Quindi l'autospazio  $V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 0v\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = w = 0\} = \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  con base  $\{e_1\} = \{(1, 0, 0, 0)\} \Rightarrow m_g(0) = 1$ .

Per il teorema di diagonalizzabilità  $f$  è diagonalizzabile se e solo se  $m_a(0) = m_g(0)$ , cioè se e solo se  $4 = 1$ , che è falso.

Quindi  $f$  non è diagonalizzabile.

#### Definizione 6.7: Endomorfismo nilpotente

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo.

$f$  si dice **nilpotente** se esiste un  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $f^n = 0$ , cioè  $f \circ f \circ \dots \circ f(v) = 0 \forall v \in V$ .

#### Definizione 6.8: Matrice nilpotente

Sia  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

$A$  si dice **nilpotente** se esiste un  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $A^n = 0$ , cioè  $A \cdot A \cdot \dots \cdot A = 0$  (la matrice ha tutti gli elementi nulli).

#### Teorema 6.3: Endomorfismo nilpotente non diagonalizzabile

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo.

Se  $f$  è nilpotente allora  $f$  non è diagonalizzabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda$  un autovalore di  $f$  e sia  $v$  un autovettore relativo ad  $\lambda$ , cioè  $f(v) = \lambda v$ .

Poichè  $f$  è nilpotente esiste un  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $f^n = 0$ , cioè  $f \circ f \circ \dots \circ f(v) = 0$ , in particolare  $f^n(v) = 0$ .

D'altra parte  $f^n(v) = f^{n-1}(\lambda v) = \lambda f^{n-1}(v) = \dots = \lambda^n v$ .

Quindi  $\lambda^n = 0$  (perchè  $f^n(v) = 0$ ) e quindi  $\lambda = 0$ .

Quindi l'unico autovalore di  $f$  è  $\lambda = 0$ . Di conseguenza, se  $f$  fosse diagonalizzabile, avrebbe come matrice una matrice diagonale con tutti gli elementi nulli, cioè la matrice nulla, che è assurdo.  $\square$

**Esempio.**  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  è una matrice non diagonalizzabile.  $A$  si può scrivere come somma di una matrice diagonalizzabile (anzi già diagonale) e di una matrice nilpotente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$  quindi non è nilpotente ma non si diagonalizza.

### Definizione 6.9: Blocco di Jordan

Sia  $A \in M_n(\mathbb{K})$  una matrice non diagonalizzabile.

Un **blocco di Jordan** di  $A$  è una matrice quadrata  $J \in M_k(\mathbb{K})$  della forma:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

dove  $\lambda$  è l'autovalore di  $A$  e  $k$  è la molteplicità geometrica di  $\lambda$ .

In sostanza, un blocco di Jordan è una matrice diagonale con tutti gli elementi uguali a  $\lambda$  e con una riga di 1 sulla diagonale superiore.

$p(\lambda) = (\lambda_i - \lambda) \cdot \det J_{\lambda_i, n-1} = \dots = (\lambda_i - \lambda)^n \Rightarrow$  l'unico autovalore di  $J$  è  $\lambda_i$  e la molteplicità algebrica è  $m_a(\lambda_i) = n$ .  $\forall n > 1 J_{\lambda_i, n}$  non è diagonalizzabile. Notiamo che  $J_{\lambda_i, 1}$  è somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente.

**Esempio.**  $J_{7,3} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$  è un blocco di Jordan di ordine 3. Controllare se è diagonalizzabile:

$$p(\lambda) = \det(J_{7,3} - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = 7 \Rightarrow m_a(7) = 3$$

$$V_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid J_{7,3}(x_1, x_2, x_3) = 7(x_1, x_2, x_3)\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \\ 7x_3 \end{pmatrix}\}$$

$\Rightarrow \begin{cases} 7x_1 + x_2 = 7x_1 \\ 7x_2 + x_3 = 7x_2 \\ 7x_3 = 7x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$  Quindi  $V_7 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  e  $m_g(7) = 1 \Rightarrow J_{7,3}$  non è diagonalizzabile.

### Teorema 6.4: Decomposizione canonica di Jordan

Sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  gli autovalori di  $f$ .

Allora:

1.  $f$  è somma di una applicazione diagonalizzabile  $f_d$  e di una applicazione nilpotente  $f_n$ . Tale decomposizione  $f = f_d + f_n$  è unica e  $f$  è diagonalizzabile se e solo se  $f_n = 0$ .
2. Esiste una base di  $V$  in cui la matrice di  $f$  è la forma canonica di Jordan (dove per ciascun autovalore  $\lambda_i$  si hanno  $m_g(\lambda_i)$  blocchi di Jordan, la cui somma delle dimensioni è  $m_a(\lambda_i)$ ).

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1, n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2, n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_k, n_k} \end{pmatrix}$$

**Esempio.** Supponiamo di avere  $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  con autovalori  $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$  con molteplicità algebrica rispettivamente  $m_a(7) = 3, m_a(3) = 2, m_a(-2) = 1$ . Supponiamo inoltre che tutte le molteplicità geometriche siano  $-1$  (quindi  $f$  non è diagonalizzabile).

Per il teorema della decomposizione canonica di Jordan, esiste una base di  $\mathbb{R}^6$  in cui la matrice di  $f$  è:

$$\begin{pmatrix} J_{7,3} & 0 & 0 \\ 0 & J_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{-2,1} \end{pmatrix}$$

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 3} = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{K}\}$ . Consideriamo l'endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  definito da  $f(p(x)) = p'(x)$ , cioè la derivata di  $p(x) = b + 2cx + 3dx^2$ . Dire se  $f$  è diagonalizzabile.  $d^4(p(x)) = 0 \forall p(x)$  di grado  $\leq 3$ .  $d'' = 0, d \neq 0 \Rightarrow d$  non è diagonalizzabile.

## 7 Unità 7 - Lezioni 16, 17

### 7.1 Forme bilineari e prodotti scalari

#### Definizione 7.1: Forma bilineare

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ .

Una **forma bilineare** su  $V$  è una funzione  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  che è lineare rispetto ad entrambe le variabili, cioè:

1.  $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z) \quad \forall x, y, z \in V$
2.  $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z) \quad \forall x, y, z \in V$
3.  $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

**Esempio.**  $V : \mathbb{R}^2, \beta(v, u) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2, v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2), v' = (x'_1, x'_2)$ . Verificare se  $\beta$  è una forma bilineare.

$$\beta(v + v', u) = 2(x_1 + x'_1)y_1 + (x_1 + x'_1)y_2 + 3(x_2 + x'_2)y_1 - (x_2 + x'_2)y_2 = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 2x'_1y_1 + x'_1y_2 + 3x'_2y_1 - x'_2y_2 = \beta(v, u) + \beta(v', u).$$

Analogamente si verifica che  $\beta(v, u + u') = \beta(v, u) + \beta(v, u')$ .

$$\beta(av, u) = 2(ax_1)y_1 + (ax_1)y_2 + 3(ax_2)y_1 - (ax_2)y_2 = a(2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2) = a\beta(v, u).$$

Analogamente si verifica che  $\beta(v, au) = a\beta(v, u)$ .

Quindi  $\beta$  è una forma bilineare.

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^2$  su  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e sia  $v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$ .

Verificare se  $\beta(v, u) = x_1y_1 + x_2y_2$  è una forma bilineare.

$$\beta(av, u) = (ax_1)(x_2) + y_1y_2 = a^2x_1y_1 + a^2x_2y_2 = a^2\beta(v, u) \neq a\beta(v, u).$$

Quindi  $\beta$  non è una forma bilineare.

#### Definizione 7.2: Forma bilineare simmetrica

Una forma bilineare  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  si dice **simmetrica** se  $\beta(v, u) = \beta(u, v) \quad \forall v, u \in V$ . Una forma bilineare  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  si dice **antisimmetrica** se  $\beta(v, u) = -\beta(u, v) \quad \forall v, u \in V$ .

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^2$  su  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e sia  $v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$ .

1. Verificare se  $\beta(v, u) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2$  è simmetrica.

$$\beta(u, v) = 2y_1x_1 - 3y_1x_2 - 3y_2x_1 + 4y_2x_2 = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2 = \beta(v, u).$$

Quindi  $\beta$  è simmetrica.

2. Verificare se  $\beta(v, u) = x_1y_2 - x_2y_1$  è antisimmetrica.

$$\beta(u, v) = y_1x_2 - y_2x_1 = -x_1y_2 + x_2y_1 = -\beta(v, u).$$

Quindi  $\beta$  è antisimmetrica.

**Osservazione.**  $\beta = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$

3. Verificare se  $\beta(v, u) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$  è simmetrica o antisimmetrica.

$$\beta(u, v) = 2y_1x_2 - 3y_2x_1 = 2x_2y_1 - 3x_1y_2 \neq \beta(v, u) \neq -\beta(v, u).$$

Quindi  $\beta$  non è simmetrica né antisimmetrica. Lo si può vedere anche con un esempio numerico:

$$\beta((1, 0), (1, 1)) = 2, \beta((1, 1), (1, 0)) = -3.$$

4. Può esistere una forma bilineare che sia sia simmetrica che antisimmetrica?

$$\beta(v, u) = \beta(u, v) = -\beta(v, u) \Rightarrow \beta(v, u) = -\beta(v, u) \Rightarrow 2\beta(v, u) = 0 \Rightarrow \beta(v, u) = 0 \quad \forall v, u \in V.$$

Quindi solo la forma bilineare nulla è sia simmetrica che antisimmetrica.

**Osservazione.** Ogni forma bilineare  $\beta$  si può scrivere come somma di una forma bilineare simmetrica  $\beta_s$  e di una forma bilineare antisimmetrica  $\beta_a$ :

$$\begin{aligned}\beta(v, u) &= \beta_s(v, u) + \beta_a(v, u) \\ \beta_s(v, u) &= \frac{\beta(v, u) + \beta(u, v)}{2} \\ \beta_a(v, u) &= \frac{\beta(v, u) - \beta(u, v)}{2}\end{aligned}$$

**Definizione 7.3: Matrice di una forma bilineare**

la matrice di una forma bilineare  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  rispetto ad una base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  di  $V$  è la matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  tale che  $a_{ij} = \beta(v_i, v_j)$ .

**Osservazione.** Se  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, u = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$  allora  $\beta(v, u) = (a_1, a_2, \dots, a_n)A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

**Esempio.** Sia  $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$  una base di  $V = \mathbb{R}^2$  e  $\beta(v, u) = x_1y_1 + 2x - 1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$  una forma bilineare su  $V$ . Trovare la matrice di  $\beta$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ .

$$\begin{aligned}\beta(v_1, v_1) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \\ \beta(v_1, v_2) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -3 \\ \beta(v_2, v_1) &= -3 \\ \beta(v_2, v_2) &= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -7 \\ A &= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Definizione 7.4: Matrice simmetrica e antisimmetrica**

Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  si dice **simmetrica** se  $A = A^T$  e si dice **antisimmetrica** se  $A = -A^T$ .

**Esempio.** 1.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  è simmetrica.

2.  $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  è antisimmetrica.

3.  $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  non è nè simmetrica nè antisimmetrica.

**Osservazione.** Una forma bilineare  $\beta$  è simmetrica se e solo se la sua matrice rispetto ad una base è simmetrica. Analogamente, una forma bilineare  $\beta$  è antisimmetrica se e solo se la sua matrice rispetto ad una base è antisimmetrica.

**Definizione 7.5: Matrici congruenti**

Due matrici  $A, M$  si dicono **congruenti** se esiste una matrice invertibile  $B$  tale che  $A = B^T M B$ .

**Teorema 7.1: Matrici congruenti e forme bilineari**

Due matrici  $A, M$  sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare rispetto a basi diverse.

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  due basi di  $V$ . Siano  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$  e  $u = b_1v_1 + \dots + b_nv_n = y_1u_1 + \dots + y_nu_n$ .

Sia  $B$  la matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , cioè  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ .

Allora  $\beta(v, u) = (a_1 \cdots a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n) B^T A B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n) M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ .  $\square$

**Osservazione.** Se  $\beta$  è simmetrica si può sempre trovare una base diagonalizzante.

### Teorema 7.2: Diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica

Sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineare simmetrica.

Allora esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  tale che la matrice di  $\beta$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è diagonale.

In altre parole, se  $A$  è una matrice simmetrica allora esiste una matrice diagonale che è congruente ad  $A$ .

*Dimostrazione.* Definiamo una base qualsiasi di  $V : \mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ .

1. Se  $\beta(w_1, w_1) \neq 0$  vado allo step 2.  
 Se  $\beta(w_1, w_1) = 0$  ma esiste  $i$  tale che  $\beta(w_i, w_i) \neq 0$  allora scambio  $w_1$  con  $w_i$  e vado allo step 2.  
 Se  $\beta(w_i, w_i) = 0 \forall i \neq 1$  allora cerco  $i, j$  tali che  $\beta(w_i, w_j) \neq 0$  e scambio  $w_1$  con  $w_i + w_j$ ,  $w_2$  con  $w_j$ ,  $w_i$  con  $w_1$  e  $w_j$  con  $w_2$  e vado allo step 2.
2. Dal passo 1,  $\beta(w_1, w_1) \neq 0$ . Definiamo una nuova base  $w'_1, w'_2, \dots, w'_n$  tale che  $w'_1 = w_1$  e  $w'_i = w_i - \frac{\beta(w_i, w_1)}{\beta(w_1, w_1)} w_1 \forall i \neq 1$ .  
 In questo modo  $\beta(w'_i, w'_1) = \beta(w_i, w_1) - \frac{\beta(w_i, w_1)}{\beta(w_1, w_1)} \beta(w_1, w_1) = 0 \forall i \neq 1$ .  
 Ora  $w'_1$  non lo tocco più e riapplico il passo 1 e passo 2 a  $w'_2, \dots, w'_n$ .

Dopo  $n - 1$  iterazioni si ottiene una base  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tale che la matrice  $\beta$  rispetto a tale base è diagonale.  $\square$

### Teorema 7.3: Teorema di Sylvester

Sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineare simmetrica.

Esiste una base  $u_1, u_2, \dots, u_n$  di  $V$  tale che la matrice di  $\beta$  rispetto a tale base è diagonale con  $r$  elementi 1,  $s$  elementi  $-1$  e  $n - r - s$  elementi 0. I numeri  $r, s$  dipendono solo da  $\beta$  e non dalla base scelta e sono detti **segnatura** di  $\beta$ .

*Dimostrazione.* Per il teorema di diagonalizzazione esiste una base  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tale che la matrice di  $\beta$  rispetto a tale base è diagonale.

Quindi:

$$\begin{aligned} \beta(v_i, v_i) &> 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \\ \beta(v_i, v_i) &< 0 \quad \forall i = r + 1, r + 2, \dots, r + s \\ \beta(v_i, v_i) &= 0 \quad \forall i = r + s + 1, r + s + 2, \dots, n \end{aligned}$$

Consideriamo la base  $u_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i, v_i)|}} & \text{se } i \leq r + s \\ v_i & \text{se } i > r + s \end{cases}$

così che  $\beta(u_1, u_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, 2, \dots, r \\ -1 & \text{se } i = r + 1, r + 2, \dots, r + s \\ 0 & \text{se } i = r + s + 1, r + s + 2, \dots, n \end{cases}$ .  $\square$

**Teorema 7.4: Teorema di Sylvester per le forme quadratiche**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e sia  $\beta$  una forma bilineare simmetrica su  $V$ . Allora esiste una base  $u_1, u_2, \dots, u_n$  di  $V$  tale che la matrice di  $\beta$  rispetto a tale base è diagonale del tipo:

$$\left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

dove  $r$  è il rango della matrice.

*Dimostrazione.* Come nella dimostrazione precedente, salvo che  $\forall i = r+1, r+2, \dots, r+s$  si ha  $\beta(v_i, v_i) = 0$ . Definisco  $u_i = \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i, v_i)|}} v_i$  così che  $\beta(u_i, u_i) = (\frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i, v_i)|}})^2 \beta(v_i, v_i) = 1$ .  $\square$

**Corollario 7.1: Congruenza e segnatura**

Due matrici simmetriche  $A, B$  sono congruenti su  $\mathbb{R}$  se e solo se hanno la stessa segnatura. Sono invece congruenti su  $\mathbb{C}$  se e solo se hanno lo stesso rango.

**Esempio.** Le matrici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  sono congruenti su  $\mathbb{C}$  perchè hanno entrambe rango 2 ma non sono congruenti su  $\mathbb{R}$  perchè hanno segnature diverse (rispettivamente 2, 0 e 1, 1).

**Definizione 7.6: Forma quadratica**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineare simmetrica. La **forma quadratica** associata a  $\beta$  è la funzione  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$  definita da  $q(v) = \beta(v, v) \forall v \in V$ .

**Osservazione.** Data  $q$  posso ricostruire  $\beta$ , perchè  $\beta(v, u) = \frac{1}{2}(q(v+u) - q(v) - q(u))$ .

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^2, v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2), \beta(v, u) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$ . La forma quadratica associata a  $\beta$  è  $q(v) = \beta(v, v) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$ .

**Osservazione.** Si chiama forma quadratica perchè  $\forall a \in \mathbb{K}, q(av) = a^2q(v)$ . Se  $q(0) = \beta(0, 0) = 0$

**Definizione 7.7: Forma quadratica definita positiva, negativa, semidefinita, indefinita**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma quadratica.  $q$  è:

- **definita positiva** se  $q(v) > 0 \forall v \neq 0, v \in V$
- **definita negativa** se  $q(v) < 0 \forall v \neq 0, v \in V$
- **semidefinita positiva** se  $q(v) \geq 0 \forall v \in V$
- **semidefinita negativa** se  $q(v) \leq 0 \forall v \in V$
- **indefinita** se esistono  $v_1, v_2 \in V$  tali che  $q(v_1) > 0$  e  $q(v_2) < 0$

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^2, v = (x_1, x_2)$ .

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  è definita positiva, perchè  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \forall x_1, x_2 \neq 0$ .
- $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$  è definita negativa, perchè  $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 < 0 \forall x_1, x_2 \neq 0$ .
- $q(x_1, x_2) = x_1^2$  è semidefinita positiva, perchè  $q(x_1, x_2) = x_1^2 \geq 0 \forall x_1, x_2$ , ma  $q(0, 1) = 0$ .
- $q(x_1, x_2) = -x_1^2$  è semidefinita negativa, perchè  $q(x_1, x_2) = -x_1^2 \leq 0 \forall x_1, x_2$ , ma  $q(0, 1) = 0$ .
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$  è indefinita, perchè  $q(1, 0) = 1 > 0$  e  $q(0, 1) = -1 < 0$ .

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2$  è semidefinita positiva, perchè  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2 = (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 = -3x_2 \forall x_1, x_2$ . Dunque ad esempio  $q(-3, 1) = 0$ .

**Osservazione.** •  $q$  è definita positiva se e solo se la segnatura di  $\beta$  è  $(n, 0)$ , ovvero esiste una base in cui la matrice di  $\beta$  è  $I_n$ .

- $q$  è definita negativa se e solo se la segnatura di  $\beta$  è  $(0, n)$ .
- $q$  è semidefinita positiva se e solo se la segnatura di  $\beta$  è  $(r, n-r)$  con  $r \leq n$ .
- $q$  è semidefinita negativa se e solo se la segnatura di  $\beta$  è  $(n-r, r)$  con  $r \leq n$ .
- $q$  è indefinita se e solo se la segnatura di  $\beta$  è  $(r, s)$  con  $r, s \neq 0$ .

#### Definizione 7.8: Matrice hessiana

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  e sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di  $n$  variabili, derivabile due volte.

Dato  $v \in \mathbb{R}^n$ , la **matrice hessiana** di  $f$  in  $v$  è la matrice  $Hf(v) \in M_n(\mathbb{R})$  tale che  $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(v)$ .

Se le derivate seconde sono continue allora  $Hf(v)$  è simmetrica.

Inoltre, se  $Hf(v)$  è:

- definita positiva allora  $f$  ha un minimo locale in  $v$
- definita negativa allora  $f$  ha un massimo locale in  $v$
- indefinita allora  $f$  ha un punto di sella in  $v$

#### Definizione 7.9: Prodotto scalare

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

Un **prodotto scalare** su  $V$  è una forma bilineare simmetrica  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  che è definita positiva.

**Esempio.** •  $V = \mathbb{R}^n, v = (x_1, x_2, \dots, x_n), u = (y_1, y_2, \dots, y_n), \beta(v, u) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$  è un prodotto scalare standard. Infatti, la sua matrice nella base canonica è  $I_n$ .

- $V = \{\text{funzioni } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}, \beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$  è un prodotto scalare? No, la funzione è bilineare e simmetrica ma non è definita positiva perchè  $\beta(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$  ma  $\beta(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ .
- $U = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}, \beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$  è un prodotto scalare? Sì, perchè è bilineare, simmetrica e definita positiva perchè sia  $t \neq 0$  allora  $\exists p \in ]a, b[$  tale che  $f(p) \neq 0$  e quindi  $\int_a^b f^2(x)dx > 0$ .

#### Definizione 7.10: Versore

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  un prodotto scalare.

Un vettore  $v \in V$  si dice **versore** se  $\beta(v, v) = 1$ . Inoltre,  $v, u$  sono ortogonali se  $\beta(v, u) = 0$ .

Un insieme di vettori sono **ortonormali** se sono versori tra loro ortogonali, cioè se  $\forall i, j, \beta(V_i, V_j) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

#### Teorema 7.5: Base e prodotto scalare

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  un prodotto scalare.

Allora esiste una base ortonormale di  $V$  rispetto a  $\beta$ .



*Dimostrazione.* Per il teorema di Sylvester, poichè il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica, esiste una base  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tale che la matrice di  $\beta$  rispetto a tale base è diagonale con  $r$  elementi 1,  $s$  elementi  $-1$  e  $n - r - s$  elementi 0.

Poichè è definita positiva, la segnatura è  $(n, 0)$ , quindi  $r = n$  e  $s = 0$ , cioè la matrice è  $I_n$ .

Dunque  $(V_i, V_j) = (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ . □

## 8 Unità 8 - Lezioni 18, 19, 20

**Proposizione.** Il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto scalare standard dei vettori delle loro coordinate rispetto ad una base ortonormale.

*Dimostrazione.* Sappiamo che, se  $\beta$  è una forma lineare e  $A$  è la sua matrice rispetto a una base  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , e se  $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$  e  $u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$ , allora  $\beta(v, u) =$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ora, se  $\beta$  è un prodotto scalare e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è una base ortonormale, allora  $A = I_n$  e quindi  $(v, u) =$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad \square$$

**Proposizione.** Se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono vettori tra loro ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $(v_i, v_j) = 0$  per  $i \neq j$  e vogliamo mostrare che se  $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$  allora  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

In effetti, per ogni  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  abbiamo che  $(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, v_i) = a_1 (v_1, v_i) + a_2 (v_2, v_i) + \dots + a_n (v_n, v_i) = a_i (v_i, v_i) = 0$ . Quindi  $(v_i, a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = (v_i, 0) = 0$ . □

**Esempio.** Consideriamo la forma bilineare su  $\mathbb{R}^2$ ,  $v = (a_1, a_2)$ ,  $u = (b_1, b_2)$  e  $\beta(v, u) = a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1$ .

$\beta$  è un prodotto scalare?

Osserviamo che è bilineare e simmetrica perchè  $\beta(v, u) = a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 = a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 = \beta(u, v)$ .

è definita positiva?

Nella base canonica, la matrice di  $\beta$  è  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Ponendo  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = e_2 - 2e_1 = -2e_1 + e_2 = (-2, 1)$ , abbiamo che  $\beta(v_1, v_2) = 0$  e  $\beta(v_2, v_2) = 1$ .

Nella base  $\{v_1, v_2\}$ , la matrice di  $\beta$  è  $I_2$ , di conseguenza la segnatura di  $\beta$  è  $(2, 0)$  e quindi  $\beta$  è definita positiva, cioè è un prodotto scalare.

**Proposizione. Disuguaglianza di Carichy-Schwartz**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  un prodotto scalare.

Allora  $\forall v, u \in V$  vale che  $|\beta(v, u)| \leq \sqrt{\beta(v, v)} \sqrt{\beta(u, u)}$  e l'uguaglianza vale se e solo se  $v$  e  $u$  sono linearmente dipendenti.

### Definizione 8.1: Angolo convesso

L'angolo convesso tra  $v, u \in V$  è  $\theta = \arccos \left( \frac{\beta(v, u)}{\sqrt{\beta(v, v)} \sqrt{\beta(u, u)}} \right)$ .

### Definizione 8.2: Distanza euclidea

La distanza euclidea tra due punti  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  è  $d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ .

**Esempio.**  $P = (3, 1), Q = (5, 0)$ . Calcolare la distanza euclidea tra  $P$  e  $Q$ .  
 $d(P, Q) = \sqrt{(3-5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ .

### Teorema 8.1: Proprietà distanza euclidea

La distanza euclidea gode delle seguenti proprietà:

1.  $d(P, Q) \geq 0$  e  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
2.  $d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in V$
3.  $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \quad \forall P, Q, R \in V$  (disuguaglianza triangolare)

*Dimostrazione.* 1. Poichè un prodotto scalare è definito positivo,  $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \geq 0$  e quindi  $\|\overrightarrow{PQ}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$ .

2. Se  $a \in \mathbb{R}, \|av\| = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{a^2(v, v)} = |a|\sqrt{(v, v)} = |a|\|v\|$ .  
 In particolare, se  $a = -1, d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = d(Q, P)$ .

3.  $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \leq \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{RQ}\| = d(P, R) + d(R, Q)$ .

4. Se  $v, w \in V, \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$  perchè  $\|v+w\|^2 = (v+w, v+w) = (v, v) + 2(v, w) + (w, w) \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$ . In particolare per  $v = \overrightarrow{PR}, w = \overrightarrow{RQ}, v+w = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \leq \overrightarrow{PQ}$ .

□

### Definizione 8.3: Sottospazio ortogonale

Sia  $U$  un sottospazio vettoriale. Il **sottospazio ortogonale** di  $U$  è  $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U, \beta(v, u) = 0\}$ .

**Osservazione.** Se  $v_1, v_2, \dots, v_n \in U^\perp$  allora  $(v_1, u) = 0, (v_2, u) = 0, \dots, (v_n, u) = 0 \quad \forall u \in U$  e quindi  $(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in U^\perp$ . Analogamente, se  $v \in U^\perp$  e  $a \in \mathbb{K}$  allora  $(av, u) = a(v, u) = 0 \Rightarrow av \in U^\perp$ .

**Osservazione.** Osserviamo anche che  $U \cap U^\perp = \{0\}$ , infatti se  $u \in U, U^\perp$  allora  $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$ .

Inoltre, se  $u_1, u_2, \dots, u_n$  è una base di  $U$  allora  $U^\perp \Leftrightarrow (v, u_1) = 0, (v, u_2) = 0, \dots, (v, u_n) = 0$ .  
 Quindi, se  $\dim U = k$  allora  $\dim V = n, \dim U^\perp = n - k$  (è descritto da  $k$  equazioni cartesiane).  
 Pertanto,  $V = U \oplus U^\perp$ .

**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^5, U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V \text{ tale che } x_1 - 2x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = x_2 + x_5\}$ .

$U = \{(2t, t, 0, t+s, s), s, t \in \mathbb{R}\}$ .

Una base di  $U$  è  $u_1 = (2, 1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1, 1, 1)$ .

Rispetto al prodotto scalare standard,  $U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0 \forall u \in U\} = \{v \in V \mid (v, u_1) = 0, (v, u_2) = 0\}$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi  $\dim U^\perp = 5 - 2 = 3$  e  $U^\perp = \{\frac{a-c}{2}, c, b, -a, a \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

**Esempio.** Trovare in  $V = \mathbb{R}^2$  la retta  $r$  perpendicolare a  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$  e passante per il punto  $P = (2, 3)$ .

Rispetto al prodotto scalare standard,  $U = \langle u_1 = (2, -1) \rangle \Rightarrow U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (v, u_1) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$ .

La retta  $r$  è parallela a  $U^\perp$  e passante per  $P = (2, 3)$ , quindi  $r = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 2 \cdot 2 - 3 = 1\}$ .

L'equazione di  $r$  è  $2x - y = 1$ .

## 8.1 Isometrie

### Definizione 8.4: Isometria

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  un prodotto scalare.  
Un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  è un'**isometria** se preserva il prodotto scalare, cioè  $(f(v), f(u)) = (v, u) \forall v, u \in V$ .

**Osservazione.** "Isometria" = "stessa misura"

**Proposizione.**  $f$  è un isometria  $\Leftrightarrow \forall v, u \in V, \|f(v)\| = \|v\|$ .

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$  Se  $f$  è un'isometria, allora  $\|f(v)\| = \sqrt{(f(v), f(v))} = \sqrt{(v, v)} = \|v\|$ .

$\Leftarrow$  Dati  $v, u \in V$ , calcoliamo  $\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2 = (v+u, v+u) - (v-u, v-u) = 4(v, u) \Rightarrow (v, u) = \frac{\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2}{4}$ .

Quindi se  $f$  conserva la norma  $(v, u) = \frac{\|f(v)+f(u)\|^2 - \|f(v)-f(u)\|^2}{4} = \frac{\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2}{4} = (f(v), f(u))$ .  $\square$

**Esempio.** Sia  $V = \mathbb{R}^2$  con il prodotto scalare standard. Dato  $v = (x, y) \in V$ , consideriamo l'applicazione  $f : V \rightarrow V$  definita da  $f(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ .  
 $f$  è un'isometria?

Sì, perchè  $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\|f(v)\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 + (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|v\|$ .

**Osservazione.** Una isometria conserva le distanze

**Proposizione.** Se  $f$  è un'isometria, allora  $f$  conserva gli angoli.

*Dimostrazione.* In effetti, l'angolo convesso tra  $v, u$  è:

$$\arccos\left(\frac{(v, u)}{\sqrt{(v, v)}\sqrt{(u, u)}}\right) = \arccos\left(\frac{(f(v), f(u))}{\|f(v)\|\|f(u)\|}\right)$$

che è l'angolo convesso tra  $f(v), f(u)$ .  $\square$

**Osservazione.** Non vale il contrario, cioè se  $f$  conserva gli angoli non è detto che sia un'isometria.

### Teorema 8.2: Isometrie e isomorfismo

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  un prodotto scalare.  
Allora  $f : V \rightarrow V$  è un'isometria se e solo se è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Sia  $V$  uno spazio vettoriale con un prodotto scalare e sia  $f : V \rightarrow V$  un'isometria rispetto a quel prodotto scalare.

Mostriamo prima che  $f$  è iniettiva.

Poichè un prodotto scalare è definito positivo,  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .

Ora, se  $v \in \ker f$  allora  $f(v) = 0 \Rightarrow \|f(v)\| = 0$  ma poichè  $f$  è un'isometria,  $\|f(v)\| = \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$ .

Quindi  $f$  è iniettiva.

Mostriamo ora che  $f$  è suriettiva: per il teorema del rango,  $\dim \text{Im} f = \dim V - 0$  e quindi  $f$  è suriettiva.  $\square$

**Esempio.** Non vale il contrario, cioè se  $f$  è un isomorfismo non è detto che sia un'isometria.

### Definizione 8.5: Matrice ortogonale

Una matrice  $A$  è **ortogonale** se  $A^t A = I_n$ .

**Esempio.**  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$  è ortogonale perchè  $A^t A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ .

**Osservazione.**  $A$  è ortogonale se e solo se le colonne di  $A$  formano una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

### Teorema 8.3: Basi ortonormali e matrice del cambio di base

ia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ .

Sia  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una base ortonormale di  $V$ . Allora sia  $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  un'altra base ortonormale di  $V$  se e solo se la matrice del cambio di base è ortogonale.

*Dimostrazione.* Poichè  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è una base ortonormale, cioè  $(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ , allora la

matrice di tale prodotto scalare in base  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è  $I_n$ .

Quindi se  $B$  è la matrice del cambio di base, la matrice del prodotto scalare in base  $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  è  $B^t I_n B = B^t B = I_n$ .

Quindi  $B$  è ortogonale. □

### Teorema 8.4: Isometrie e basi ortogonali

na applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  è un'isometria se e solo se manda basi ortonormali in basi ortonormali.

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$  Sia  $f$  una isometria e sia  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una base ortonormale di  $V$ .

Allora  $(f(v_i), f(v_j)) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ , cioè  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  è una base ortonormale di  $V$ .

$\Leftarrow$  Sia  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una base ortonormale di  $V$  tale che  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  è una base ortonormale di  $V$ .

Si vuole mostrare che  $f$  è un'isometria.

Dati  $v, u \in V$ , scriviamo  $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$  e  $u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$ .

Poichè  $f$  è lineare,  $f(v) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n)$  e  $f(u) = b_1 f(v_1) + b_2 f(v_2) + \dots + b_n f(v_n)$ .

Allora  $(v, u) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (f(v), f(u)) \quad \forall v, u \in V$  cioè  $f$  è

un'isometria. □

### Teorema 8.5: Isometrie e matrici ortogonali

n'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  è un'isometria se e solo se la sua matrice in una qualsiasi base ortonormale è ortogonale.

*Dimostrazione.* Sia  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una base ortonormale di  $V$  e sia  $A$  la matrice di  $f$  in tale base, cioè:

$$f(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$f(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

$\vdots$

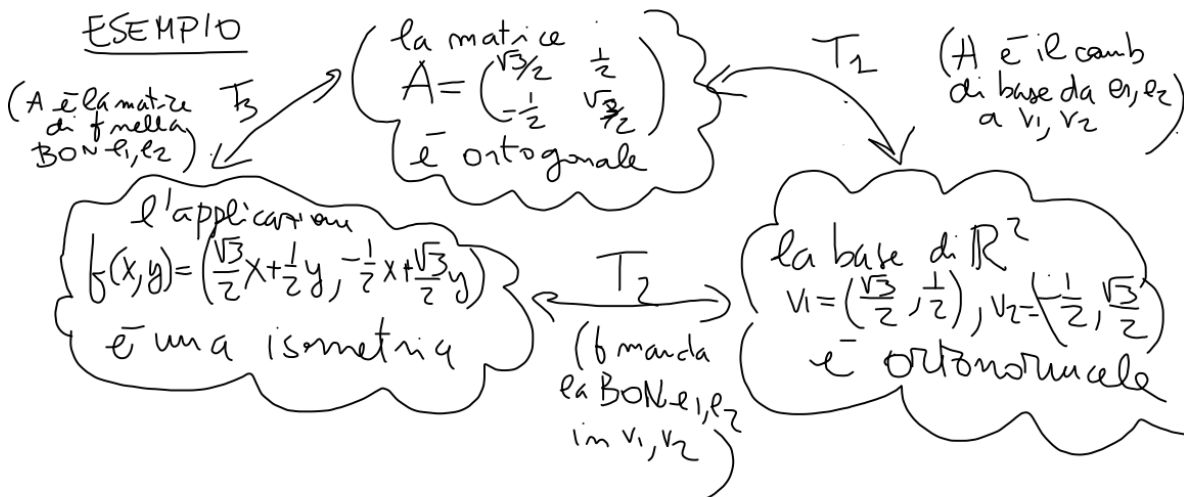
$$f(v_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(f(v_i), f(v_j)) = (a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ni}v_n, a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n) = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = (v_i, v_j) = (AA^T)_{ij}.$$

Quindi  $f(f(v_i), f(v_j)) = (v_i, v_j) \Rightarrow AA^T = I_n$ .  $f$  è un'isometria se e solo se  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  è una base ortonormale di  $V$  se e solo se  $A$  è ortogonale.

$$\text{Quindi } \Leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow A^T A = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow A^T A = I_n \Leftrightarrow A \text{ è ortogonale. } \quad \square$$



**Esempio.**  $V = \mathbb{R}^2$  con il prodotto scalare standard.

$f : V \rightarrow V$  definita da  $f(x, y, z) = (z, x, y)$ .  $f$  è un'isometria?

Sì perchè  $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = \|(z, x, y)\|$ .

**Osservazione.** Le nozioni di base ortonormale e isometria dipendono dal prodotto scalare su  $V$ .

**Proposizione.** Sia  $f$  un'isometria. Allora  $\det f = \pm 1$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo una base ortonormale  $v_1, v_2, \dots, v_n$  di  $V$ .

In tale base la matrice  $A$  di  $f$  è ortogonale, cioè  $A^T A = I_n$ .

$$1 = \det I_n = \det(A^T A) = \det A^T \det A = (\det A)^2 \Rightarrow \det A = \pm 1. \quad \square$$

**Osservazione.** Non vale l'inversa!

**Proposizione.** Sia  $f : V \rightarrow V$  un'isometria e  $\lambda$  un suo autovalore. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  allora  $\lambda = \pm 1$ .

*Dimostrazione.* Se  $\lambda$  è un autovalore di  $f$  allora  $\exists v \in V, v \neq 0$  tale che  $f(v) = \lambda v$  e quindi  $\|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1. \quad \square$

**Osservazione.** Può succedere che una isometria  $f : V \rightarrow V$  abbia autovalori non reali (ad esempio, numeri complessi).