$X \sim f(\cdot / \theta)$ θ , $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$

$X_1, \dots, X_n$ a.a X

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ → informação amostral

X_1, X_n → variáveis
x_1, x_n → valores observados da variável

Θ: espaço paramétrico

$X \sim$ Bernoulli (θ)

$P(X = 1/\theta) = \theta$: prob. de sucesso

$\theta \in [0, 1]$ → espaço paramétrico

Slide 29

Ex: Determine o espaço paramétrico correspondente de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) $\sigma^2 = 1$ e $\theta = \mu$

$\Theta = \{(\mu, \sigma^2): -\infty < \mu < +\infty, \sigma^2 = 1\}$

b) $\mu = 0$, $\theta = \sigma^2$

$\Theta = \{(\mu, \sigma^2): \mu = 0, \sigma^2 > 0\}$

c) ambos desconhecidos

$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < +\infty, \sigma^2 > 0\}$

Slide 31

Ex: Determine a distribuição do máximo

$X \sim U(0,\theta) \Rightarrow f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot I_{(0,\theta)}(x)$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta}\,dt = \frac{t}{\theta}\Big|_0^x = \frac{x}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$

A função acumulada do máximo $Y_n = X_{(n)}$ é:

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n = \left[\frac{y}{\theta}\right]^n \quad \text{para } 0 < y < \theta$$ * Teorema

$$f_{Y_n}(y) = n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^{n-1}} \cdot \frac{1}{\theta} = n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^n} \quad \text{para } 0 < y < \theta \quad \begin{cases} 0 < x_1 < \theta \\ 0 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \end{cases}$$

$$\boxed{0 < y_n < \theta}$$

Técnica da f.g.m

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t\sum x_i}) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{tx_i}\right) = \prod_{i=1}^n E(e^{tx_i}) = \prod_{i=1}^n m_{x_i}(t)$$

Slide 33

Ex: $X_1, \dots, X_n$ independentes com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

f.g.m $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $m_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 . t^2}{2}\right)$

pelo teorema temos que $m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)$, então

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 . t^2}{2}\right) = \left[\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 . t^2}{2}\right)\right]^n =$$

$$= \exp\left(n\mu t + \frac{n\sigma^2 . t^2}{2}\right)$$, Assim $Y = \sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

Estatística suficiente:

Slide 35

Seja X_1, X_2, X_3 uma a.a (amostra aleatória) de tamanho 3 de uma Dist. Bernoulli (p). Verifique se as estatísticas são suficientes:

a) $S(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$

$X \sim$ Bernoulli (p) então $P(X = x \mid p) = p^x . (1-p)^{1-x} . I_{(0,1)}(x)$

Vamos construir a distribuição de probabilidade de $S = X_1 + X_2 + X_3$, $T = X_1 \cdot X_2 + X_3$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \prod_{i=1}^{3} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{3} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} =$$

$$= p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{3-\sum x_i}$$

$(x_1\ x_2\ x_3)$	$(0,0,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(0,1,1)$	$(1,1,1)$
$P(X_1=x_1, X_2=x_2, X_3=x_3)$	$(1-p)^3$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^2(1-p)$	$p^2(1-p)$	p^3
$S = x_1+x_2+x_3$	0	1	1	1	2	2	2	3
$T = x_1 \cdot x_2 + x_3$	0	0	0	1	1	1	1	2

Vamos verificar se $S = X_1 + X_2 + X_3$ é uma estatística suficiente para p

$$P(X_1=0, X_2=0, X_3=0 \mid p, S=0) = \frac{P(X_1=0, X_2=0, X_3=0, S=0 \mid p)}{P(S=0 \mid p)} =$$

$$= \frac{(1-p)^3}{(1-p)^3} = 1$$

$$P(X_1=1, X_2=0, X_3=0 \mid p, S=1) = \frac{P(\{1,0,0\}, S=1 \mid p)}{P(S=1 \mid p)} = \frac{p(1-p)^2}{3p(1-p)^2} = \frac{1}{3}$$

$$P(X_1=1, X_2=1, X_3=1 \mid p, S=3) = \frac{P(\{1,1,1\}, S=3 \mid p)}{P(S=3 \mid p)} = \frac{p^3}{p^3} = 1$$

Verificando todos os possíveis eventos, temos que a estatística $S = X_1 + X_2 + X_3$ é suficiente para p.

Vamos verificar se $T = X_1 . X_2 + X_3$ é suficiente

$$P(X_1=0, X_2=0, X_3=0 \mid T=0, p) = \frac{(1-p)^3}{(1-p)^3+2p(1-p)^2} =$$

$$= \frac{(1-p)^2 (1-p)}{(1-p)^2 . ((1-p)+2p)} = \frac{1-p}{1-p+2p} = \frac{1-p}{1+p}$$

logo, a estatística $T = X_1 . X_2 + X_3$ não é suficiente para p

Critério de Fatoração de Neymam

Slide 37

Ex: $X_1, \dots, X_n$ a.a. Poisson (λ)

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para λ?

$X \sim$ Poisson (λ) então $P(X=x \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{x}}{x!}$

A distribuição conjunta da amostra

$$P(X=x \mid \lambda) = P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n \mid \lambda) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{x_i}}{x_i!} = \underbrace{e^{-n\lambda} . \lambda^{\sum x_i}}_{g(S(x).\lambda)} . \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}}_{h(x)}$$

Assim, $S(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para λ.

Ex 2:

$X_1, \ldots, X_n$ a.a. Uniforme$(0,\theta)$

$X \sim U(0,\theta)$ então $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x)$

Pelo critério de Fatoração de Neymann.

$$f(\underline{x}|\theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i) = \begin{cases} 0 < x_1 < \theta \\ 0 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \\ 0, \text{ c.c} \end{cases} \Rightarrow y_n < \theta$$

$$f(x|\theta) = \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \cdot I_{(0,\theta)}(y_n)}_{g(S(x),\theta)} \quad h(x) = 1$$

em que $y_n = \text{máx}\{x_1, \ldots, x_n\}$

Assim, $S(x) = y_n = \text{máx}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma tentativa suficiente para θ

Slide 40

① $X_1 \dots X_n$ uma a.a. $N(\mu,\sigma^2)$

Estatística conjuntamente suficiente para μ e σ^2

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ então $f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

Pelo critério da fatoração temos:

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot \exp\left\{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\sum(x_i^2-2\mu x_i+\mu^2)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right\} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\sum x_i^2 - 2\mu\sum x_i + n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}}_{g(t_1(x),\, t_2(x),\, \mu,\, \sigma^2)} \qquad h(x) = 1$$

Portanto, $t_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ e $t_2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, são estatísticas conjuntamente suficientes para μ e σ^2

2) $X_1 \dots X_n$ a.a. $U\left(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)$

$y_1 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ e $y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$X \sim U\left(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)$ então $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} I_{\left(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)}(x)$

pelo critério de fatoração de Neymann temos:

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot I_{\left(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{\left(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)}(x)$$

$y_1 > -\frac{\theta}{2}$

$$\prod_{i=1}^{n} I_{\left(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right)}(x) = \begin{cases} 1, & \begin{array}{l} -\frac{\theta}{2} < x_1 < \frac{\theta}{2} \\ -\frac{\theta}{2} < x_2 < \frac{\theta}{2} \\ \vdots \\ -\frac{\theta}{2} < x_n < \frac{\theta}{2} \end{array} \Rightarrow I_{\left(-\frac{\theta}{2}, y_n\right)}(y_1) \; I_{\left(y_1, \frac{\theta}{2}\right)}(y_n) \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$y_n < \frac{\theta}{2}$

logo, $t_1(\underline{x}) = y_1 = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ e

$t_2(\underline{x}) = y_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$

são estatísticas conjuntamente suficientes para θ