Exercícios resolvidos do livro Introduction to the Theory of Statistics (MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C., 1974)

Ben Dêivide de Oliveira Batista

14 de agosto de 2016

Capítulo 1

Probabilidade

Questão 1. (MOOD, 1973. p. 43) Uma urna contém uma bola preta e uma bola dourada. A segunda urna contém uma bola branca e uma bola dourada. Uma bola é selecionada aleatoriamente em cada urna.

(a) Mostre o espaço amostral do experimento.

Desenvolvendo:
P - bola preta; **O** - Bola dourada; **B** - Bola branca.

$$(Urna_1, Urna_2)$$

$$\Omega = \{(P, B), (P, O), (O, B), (O, O)\}$$

(b) Mostre o espaço de eventos.

Desenvolvendo:

Seja $\boldsymbol{A}$ o espaço de eventos.

$A = \{\ \emptyset, \Omega, (P, B), (P, O), (O, O), ((P, B), (P, O)), ((P, B), (O, B)),$
$((P, B), (O, O)), ((P, O), (O, B)), ((P, O), (O, O)), ((O, B), (O, O)), ((P, B), (P, O), (O, B)),$
$((P, B), (P, O), (O, O)), ((P, B), (O, B), (O, O)), ((P, O), (O, B), (O, O))\}$

N° de subconjuntos $= 2^n = 2^4 = 16$ subconjuntos.

(c) Qual é a probabilidade ambas as bolas sejam da mesma cor?

Desenvolvendo:

Evento B - *bolas de mesma cor.* $B = \{(O, O)\}$ $N = 4$, e $B = 1$, então

$$P[B] = 1/4$$

(d) Qual a probabilidade que uma bola seja da cor verde?

Desenvolvendo:
Evento C - *bolas de cor verde.* $C = \{\emptyset\}$ $N = 4$, e $C = 0$, então

$$P[\emptyset] = 0$$

Questão 2. (MOOD, 1913. p. 43) Uma urna contém três bolas vermelhas, duas bolas brancas, e uma bola azul. A segunda urna contem uma bola vermelha, duas bolas brancas, e três bolas azuis.

(a) Uma bola é selecionada aleatoriamente de cada urna.

i) Descreva o espaço amostra para o experimento.

Desenvolvendo:
V - Bola vermelha; **B** - Bola branca; **A** - Bola amarela.

$$\text{Urna } 1 = \{V, V, V, B, B, A\}$$
$$\text{Urna } 2 = \{V, B, B, A, A, A\}$$

$\Omega = \{\ (V, V), (V, B), (V, A), (V, A), (V, A), (V, V), (V, B),$
$(V, B), (V, A), (V, A), (V, A), (V, V), (V, B), (V, B), (V, A), (V, A),$
$(V, A), (B, A), (B, B), (B, B), (B, A), (B, A), (B, A), (B, B), (B, B), (B, A),$
$(B, A), (B, A), (A, V), (A, B), (A, B), (A, A), (A, A), (A, A)\ \}$

ii) Encontre a probabilidade das bolas retiradas de cada urna serem da mesma cor.

Desenvolvendo:
Evento B - Bolas de mesma cor

$$B = \{(V, V), (V, V), (V, V), (B, B), (B, B), (B, B), (B, B), (A, A), (A, A), (A, A)\}$$

Sendo $B = 6$ e $N = 36$, então:

$$P[B] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

iii) A probabilidade das bolas vermelhas retiradas de ambas as urnas é maior do que a probabilidade das bolas brancas?

Desenvolvendo:
Sendo, $P[V_{urna_1}] = \frac{1}{2}$ e $P[V_{urna_2}] = \frac{1}{6}$,

$$P[V_1V_2] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Sendo, $P[B_{urna_1}] = \frac{1}{3}$ e $P[B_{urna_2}] = \frac{1}{3}$,

$$P[B_1B_2] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Portanto, a probabilidade de bolas vermelhas retiradas em ambas as urnas não é maior do que a probabilidade de retirar bolas brancas.

(b) As bolas das duas urnas são misturadas em uma única urna, e então é retirado uma amostra de três bolas. Encontre a probabilidade de que apareça as três cores,

i) com reposição

Desenvolvendo:

$$Urna_1 + Urna_2 = Urna_3 = \{V, V, V, V, B, B, B, B, A, A, A, A\}$$
$$P[VBC] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$
$$P[VAB] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$
$$P[BVA] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$
$$P[BAV] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$
$$P[ABV] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$
$$P[AVB] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

Portanto, a probabilidade que apareça as três cores com reposição será:

$$P[VBC] + P[VAB] + P[BVA] + P[BAV] + P[ABV] + P[AVB] =$$
$$= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{9}$$

ii) sem reposição

desenvolvendo:

$$Urna_1 + Urna_2 = Urna_3 = \{V, V, V, V, B, B, B, B, A, A, A, A\}$$
$$P[VBC] = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165}$$
$$P[VAB] = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165}$$
$$P[BVA] = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165}$$
$$P[BAV] = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165}$$
$$P[ABV] = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165}$$

$$P[AVB] = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{165}$$

Portanto, a probabilidade que apareça as três cores sem reposição será:

$$P[VBC] + P[VAB] + P[BVA] + P[BAV] + P[ABV] + P[AVB] =$$

$$= \frac{8}{165} + \frac{8}{165} + \frac{8}{165} + \frac{8}{165} + \frac{8}{165} + \frac{8}{165} = \frac{16}{55}$$

Questão 3. (MOOD, 1913. p. 43) Se A e B são eventos disjuntos, $P[A] = 0,50$, e $P[A \cup B] = 0,60$, qual a probabilidade $P[B]$?

Desenvolvendo:
Como A e B são eventos disjuntos, então

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] \Rightarrow 0,60 = 0,50 + P[B] \Rightarrow P[B] = 0,10$$

Questão 4. (MOOD, 1913. p. 43) Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5, em que as três primeiras são pretas e as outras duas são douradas. Uma amostra de tamanho 2 é retirada com reposição. Seja B_1 o evento em que a primeira bola seja preta e B_2 o evento em que a segunda bola seja preta.

(a) Descreva o espaço de eventos para o experimento, e mostre os eventos B_1, B_2, e B_1B_2.

Desenvolvendo:
P - Bolas pretas; **O** - Bolas douradas.

$$Urna = \{P_1, P_2, P_3, O_4, O_5\}$$

$\Omega = \{\ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3)(P_3, P_1), (P_3, P_2), (P_1, O_4),$
$(P_1, O_5), (P_2, O_4), (P_2, O_5), (P_3, O_4), (P_3, O_5), (O_4, O_5), (O_5, O_4),$
$(O_4, P_1), (O_4, P_2), (O_4, P_3), (O_5, P_1), (O_5, P_2), (O_5, P_3), (P_1, P_1),$
$(P_2, P_2), (P_3, P_3), (O_4, O_4), (O_5, O_5)\ \}$

$B_1 = \{\ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3)(P_3, P_1), (P_3, P_2), (P_1, O_4),$
$(P_1, P_1), (P_2, P_2), (P_3, P_3), (P_1, P_5), (P_2, O_4), (P_2, O_5), (P_3, O_4), (P_3, O_5)\ \}$

$B_2 = \{\ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3)(P_3, P_1), (P_3, P_2),$
$(O_4, P_1), (O_4, P_2), (O_4, P_3), (O_5, P_1), (O_5, P_2), (O_5, P_3), (P_1, P_1),$
$(P_2, P_2), (P_3, P_3)\ \}$

$B_1B_2 = \{\ (P_1, P_1), (P_2, P_2), (P_3, P_3), (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3)$
$(P_3, P_1), (P_3, P_2)\ \}$

(b) Encontre $P[B_1]$, $P[B_2]$ e $P[B_1B_2]$.

Desenvolvendo:

$$P[B_1] = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$P[B_2] = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$P[B_1B_2] = \frac{9}{25}$$

(c) Repita (a) e (b) para amostras sem reposição.

Desenvolvendo:
a)

$\Omega = \{\ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3)(P_3, P_1), (P_3, P_2), (P_1, O_4),$
$(P_1, O_5), (P_2, O_4), (P_2, O_5), (P_3, O_4), (P_3, O_5), (O_4, O_5), (O_5, O_4),$
$(O_4, P_1), (O_4, P_2), (O_4, P_3), (O_5, P_1), (O_5, P_2), (O_5, P_3)\ \}$

$B_1 = \{\ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3)(P_3, P_1), (P_3, P_2), (P_1, O_4),$
$(P_1, P_5), (P_2, O_4), (P_2, O_5), (P_3, O_4), (P_3, O_5)\ \}$

$B_2 = \{\ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3)(P_3, P_1), (P_3, P_2),$
$(O_4, P_1), (O_4, P_2), (O_4, P_3), (O_5, P_1), (O_5, P_2), (O_5, P_3)\ \}$

$B_1B_2 = \{\ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_2, P_1), (P_2, P_3), (P_3, P_1), (P_3, P_2)\ \}$

b)

$$P[B_1] = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P[B_2] = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P[B_1B_2] = \frac{6}{20}$$

Questão 9. (MOOD, 1913. p. 44) Se $P[A] = \frac{1}{3}$ e $P[\overline{B}] = \frac{1}{4}$, pode A e B serem disjuntos? Explique.

$$P[A] = \frac{1}{3}$$

$$P[B] = 1 - P[\overline{B}] \Rightarrow P[B] = \frac{3}{4}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[AB] \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - P[AB] \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{13}{12} - P[AB]$$

Como não existe probabilidade maior do 1, ou seja, $P[A \cup B] \leq 1$, obrigatoriamente, $P[AB] \neq 0$, portanto,

$$P[AB] \neq 0$$

Assim, A e B não podem ser disjuntos.

Questão 10. (MOOD, 1913. p. 44) Prove ou refute: Se $P[A] = P[B] = p$, então $P[AB] \leq p^2$.

Desenvolvendo:

CONTRA-EXEMPLO

$$P[AB] = P[AA] = P[A] = p$$

então,

$$P[A] = P[AB] = p \leq p^2$$

Se, por exemplo, $p = 0,50$, $p^2 = 0.25$, assim,

$$0,50 \leq 0,25$$

Isso não é verdade. Então, REFUTADO!

Questão 11. (MOOD, 1913. p. 44) Prove ou refute: Se $P[A] = P[\overline{B}]$, então $\overline{A} = B$.

Desenvolvendo:
$A \cup \overline{A} = \Omega$, e $B \cup \overline{B} = \Omega$, então

$$A \cup \overline{A} = B \cup \overline{B} \Rightarrow P[A] + P[\overline{A}] - P[A\overline{A}] = P[B] + P[\overline{B}] - P[B\overline{B}] \Rightarrow$$

Como, $P[A] = P[\overline{B}]$,

$$P[\overline{A}] - 0 = P[B] - 0 \Rightarrow P[\overline{A}] = P[B]$$

Porém, isso não implica que $\overline{A} = B$. Observe: Seja um experimento em que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o evento $A = \{1, 2\}$ e $\overline{A} = \{3, 4, 5\}$ e seja o evento $B = \{1, 3, 5\}$ e $\overline{B} = \{2, 4\}$. Observe que:

$$P[A] = \frac{2}{5} \Rightarrow P[\overline{A}] = \frac{3}{5}$$

$$P[B] = \frac{3}{5} \Rightarrow P[\overline{A}] = \frac{2}{5}$$

Percebe-se que $P[A] = P[\overline{B}]$, porém $\overline{A} \neq B$.

REFUTADO!

Questão 12. (MOOD, 1913. p. 44) Prove ou refute: Se $P[A] = 0$, então $A = \emptyset$.

Desenvolvendo:

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$P[A \cup \overline{A}] = P[A] + P[\overline{A}] - P[A\overline{A}] \Rightarrow P[\Omega] = P[A] + P[\overline{A}] - P[A\overline{A}]$$

Como $P[A\overline{A}] = 0$, e se $P[A] = 0$, então

$$P[\Omega] = P[A] + P[\overline{A}] - P[A\overline{A}] \Rightarrow P[\Omega] = P[\overline{A}]$$

Neste caso, observa-se que $\Omega = \overline{A}$, assim, para que $A \cup \overline{A} = \Omega$ satisfaça,

$$A \cup \overline{A} = \Omega \Rightarrow A = \emptyset$$

PROVADO!

Questão 13. (MOOD, 1913. p. 44) Prove ou refute: se $P[A] = 0$, então $P[AB] = 0$.

Desenvolvendo:

$$P[AB] = P[BA] = P[A|B].P[A]$$

Como $P[A] = 0$,

$$P[AB] = P[BA] = P[A|B].P[A] \Rightarrow P[AB] = P[BA] = P[A|B] \times 0 \Rightarrow P[AB] = 0$$

PROVADO!

Questão 14. (MOOD, 1913. p. 44) Prove ou refute: Se $P[\overline{A}] = \alpha$ e $P[B] = \beta$, então $P[AB] \geq 1 - \alpha - \beta$.

Desenvolvendo:

$P[\overline{A}] = 1 - P[A]$ e $P[\overline{B}] = 1 - P[B]$

$$P[AB] \geq 1 - P[\overline{A}] - P[\overline{B}] \Rightarrow P[AB] \geq 1 - [1 - P[A]] - [1 - P[B]] \Rightarrow$$

$$P[AB] \geq P[A] - 1 + P[B] \Rightarrow -P[A] - P[B] + P[AB] \geq -1 \Rightarrow$$

Multiplicando por (-1)

$$P[A] + P[B] - P[AB] \leq 1 \Rightarrow P[A \cup B] \leq 1$$

Como $P[A \cup B] \leq 1$ é uma verdade, portanto $P[AB] \geq 1 - \alpha - \beta$ é verdadeiro.

PROVADO!

Questão 22. (MOOD, 1913. p. 44) Num grupo de 25 pessoas, qual a probabilidade que todos os 25 tenham aniversários diferentes? (assuma que um ano tem 365 dias e todos os dias são igualmente prováveis).

Desenvolvendo:
A probabilidade de um grupo de n pessoas completando anos diferentes é:

$$P[X = 25] = \frac{365!}{365^n(365-n)!} = \frac{365!}{365^{25}(340)!} = \frac{365.364\ldots340!}{365^{25}(340)!} = \frac{365.364\ldots341}{365^{25}} = 0,4313$$

Questão 30. (MOOD, 1913. p. 46) Prove ou refute as seguintes sentenças (você pode assumir que nenhum dos eventos terá probabilidade zero):

(a) Se $P[A|B] > P[A]$, então $P[B|A] > P[B]$.

Desenvolvendo:
Seja,

$$P[A|B] > P[A] \Rightarrow \frac{P[AB]}{P[B]} > P[A] \Rightarrow P[AB] > P[A]P[B]$$

Como $P[AB] = P[BA] = P[B|A].P[A]$,

$$P[B|A].P[A] > P[A]P[B] \Rightarrow P[B|A] = \frac{P[A]P[B]}{P[A]} \Rightarrow P[B|A] = P[B]$$

PROVADO!

(b) Se $P[A] > P[B]$, então $P[A|C] > P[B|C]$.

Desenvolvendo:
CONTRA-EXEMPLO: Seja um experimento no arremesso de duas moedas honesta. (1 - Cara; 0 - Coroa).

$$\Omega = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

Evento $A \Rightarrow$ Pelo menos uma cara.
Evento $B \Rightarrow$ Cara na segunda moeda.
Evento $C \Rightarrow$ Cara nas duas moedas.

$P[A] = \frac{3}{4} \Rightarrow A = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$
$P[B] = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \{(0,1),(1,1)\}$
$P[C] = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \{(1,1)\}$
Então, $P[A] = \frac{3}{4} > P[B] = \frac{1}{2}$, porém, $P[A|C] = 1 > P[B|C] = 1$, e isso é falso.

REFUTADO!

Questão 34. (MOOD, 1913. p. 46) Prove ou refute:

(a) Se A e B são eventos independentes, então $P[AB|C] = P[A|C]P[B|C]$

Desenvolvendo:
CONTRA-EXEMPLO: Seja um experimento no arremesso de duas moedas honesta.(1 - Cara; 0 - Coroa).

$$\Omega = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

Evento $A \Rightarrow$ Cara na primeira moeda.
Evento $B \Rightarrow$ Cara na segunda moeda.
Evento $C \Rightarrow$ Pelo menos uma cara.

$P[A] = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \{(1,0),(1,1)\}$
$P[B] = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \{(0,1),(1,1)\}$
$P[C] = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$
Então, $P[AB|C] = \frac{1}{3}$, $P[A|C] = \frac{1}{3}$ e $P[B|C] = \frac{1}{3}$, porém, $P[AB|C] \neq P[A|C]P[B|C]$, e isso é falso.

ALGEBRICAMENTE

Sendo $C = A \cup B$,

$$P[AB|A \cup B] = \frac{P[AB \cap (A \cup B)]}{P[A \cup B]} = fracP[ABA \cup ABB]P[A \cup B] = \frac{P[AB]}{P[A \cup B}$$

$$P[A|A \cup B].P[B|A \cup B] = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P[A \cup B]} \frac{P[B \cap (A \cup B)]}{P[A \cup B]} = \frac{P[A].P[B]}{(P[A \cup B])^2}$$

Portanto,

$$\frac{P[AB]}{P[A \cup B} \neq \frac{P[A].P[B]}{(P[A \cup B])^2}$$

REFUTADO!

(b) Se $P[A|B] = P[B]$, então A e B são independentes.

Desenvolvendo:

$$P[A|B] = P[B] \Rightarrow \frac{P[AB]}{P[B]} = P[B] \Rightarrow P[AB] = P[B]P[B]$$

Assim, A e B são independentes $\Leftrightarrow P[AB] = P[A]P[B]$. Portanto,

REFUTADO!

Questão 35. (MOOD, 1913. p. 46) Prove ou refute:

(a) Se $P[A|B] \geq P[A]$, então $P[B|A] \geq P[B]$

Desenvolvendo:

Tendo,

$$P[B|A] = \frac{P[AB]}{P[B]} \Rightarrow P[AB] = P[B|A].P[A]$$

como,

$$P[A|B] \geq P[A] \Rightarrow \frac{P[AB]}{P[B]} \geq P[A] \Rightarrow \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]} \geq P[A] \Rightarrow$$

$$\frac{P[B|A]P[A]}{P[B]} \geq P[A] \Rightarrow P[B|A] \geq \frac{P[A]P[B]}{P[A]} \Rightarrow P[B|A] \geq P[B]$$

PROVADO!

(b) Se $P[B|\overline{A}] = P[B|A]$, então A e B são independentes.

Desenvolvendo:

Em (I), tem-se:

$$P[B|\overline{A}] = P[B|A] \Rightarrow \frac{P[B\overline{A}]}{P[\overline{A}]} = \frac{[BA]}{P[A]}$$

Em (II), tem-se:

$$B = B\overline{A} \cup BA \Rightarrow P[B] = P[B\overline{A}] + P[BA]$$

(II) em (I):

$$\frac{P[B] - P[BA]}{P[\overline{A}]} = \frac{P[BA]}{P[A]}$$

Sendo $P[\overline{A}] = 1 - P[A]$,

$$\frac{P[B] - P[BA]}{1 - P[A]} = \frac{P[BA]}{P[A]} \Rightarrow P[B]P[A] - P[BA]P[A] = P[BA] - P[BA]P[A] \Rightarrow$$

$$P[AB] = P[A]P[B]$$

PROVADO!

(c) Se $a = P[A]$ e $b = P[B]$, então $P[A|B] \geq (a + b - 1)/b$.

Desenvolvendo:

$$P[A|B] \geq \frac{P[A] + P[B] - 1}{P[B]} \Rightarrow P[A|B]P[B] \geq P[A]+P[B]-1 \Rightarrow P[AB] \geq P[A]+P[B]-1$$

Multiplicando (-1),

$$P[A] + P[B] - P[AB] \leq 1 \Rightarrow P[A \cup B] \leq 1$$

Isso é uma verdade, portanto,

$$P[A|B] \geq (a + b - 1)/b$$

PROVADO!

Capítulo 2

Variáveis aleatórias, função de distribuições e esperança

Questão 1. (MOOD, 1973. p. 81). (a) Mostre que as seguintes funções são funções densidade de probabilidade.

$$f_1(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$f_2(x) = 2e^{-2x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$f(x) = (\theta + 1) f_1(x) - \theta f_2(x) \ [0 < \theta < 1]$$

Desenvolvendo:
Para que uma função seja FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE, sendo $v.a.$ contínuas:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Inicialmente, observa-se que em $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f(x)$, todos têm $f(x) \geq 0$.

Para a função $e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$ qualquer valor de 0 a ∞, a função será sempre maior que zero, portanto, $f_1(x) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx \Rightarrow \int_{0}^{\infty} f_1(x) dx$$

Então,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx \Rightarrow -e^{-x}\Big|_0^{\infty} \Rightarrow -e^{-\infty} + e^0 = 1$$

Portanto, $f_1(x)$ é função densidade de probabilidade.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = 1}$$

Para a função $2e^{-2x}I_{(0,\infty)}(x)$ qualquer valor de 0 a ∞, a função será sempre maior que zero, portanto, $f_2(x) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx \Rightarrow \int_{0}^{\infty} f_2(x)dx \Rightarrow \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}dx \Rightarrow$$

$$2\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dx \Rightarrow 2\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^{\infty} = 2\left[\frac{e^{-2\times\infty}}{-2} + \frac{e^{-2\times 0}}{2}\right] \Rightarrow 2\left[0 + \frac{1}{2}\right] = 1$$

Portanto, $f_2(x)$ é função densidade de probabilidade.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx = 1}$$

Para $(\theta+1)e^{-x}I_{(0,\infty)}(x) - \theta 2e^{-2x}I_{(0,\infty)}(x)$,

$$(\theta+1)e^{-x}I_{(0,\infty)}(x) - \theta 2e^{-2x}I_{(0,\infty)}(x) \Rightarrow \frac{(\theta+1)}{e^x} - \frac{\theta}{2e^{2x}} \Rightarrow \frac{(\theta+1)e^x - \theta}{2e^{2x}}$$

Tem-se que $2e^{2x}I_{(0,\infty)}(x) \geq 0$; $e^xI_{(0,\infty)}(x) \geq 0$; $(\theta+1)e^x \geq \theta$ e as duas funções são positivas, portanto,

$$\frac{(\theta+1)e^x - \theta}{2e^{2x}} \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_{0}^{\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\theta+1)f_1(x) - \theta f_2(x)\right]dx$$

$$(\theta+1)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx - \theta\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx$$

Como $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são funções densidade de probabilidade, $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx = 1$. Assim,

$$(\theta+1)\times 1 - \theta\times 1 = 1$$

Portanto, $f(x)$ é função densidade de probabilidade.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$$

(b) Prove ou refute: se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são f.d.p. e se $\theta_1 + \theta_2 = 1$, então $\theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$ é uma f.d.p..

Desenvolvendo:
Sendo $f_1(x)$ e $f_2(x)$ f.d.p., $f_1(x) \geq 0$ e $f_2(x) \geq 0$, se θ_1 e θ_2 são constantes positivas, $(\theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)) \geq 0$.

Como, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são f.d.p., $\int_0^\infty f_1(x)dx = 1$ e $\int_0^\infty f_2(x)dx = 1$. Assim,

$$\int_0^\infty \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)dx \Rightarrow \theta_1 \int_0^\infty f_1(x)dx + \theta_2 \int_0^\infty f_2(x)dx \Rightarrow \theta_1 \times 1 + \theta_2 \times 1$$

Como, $\theta_1 + \theta_2 = 1$,

$$\int_0^\infty \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)dx = 1$$

Portanto, é uma função densidade de probabilidade.

Questão 3. (MOOD, 1913. p. 81). Encontre a constante K para que $f(x)$ seja uma f.d.p.

$$f(x) = Kx^2 I_{(-K,K)}(x)$$

Desenvolvendo:

$$\int_{-K}^{K} Kx^2 dx = 1 \Rightarrow K \int_{-K}^{K} x^2 dx = 1 \Rightarrow K \frac{x^3}{3}\Big|_{-K}^{K} = 1 \Rightarrow K\left[\frac{(K)^3}{3} + \frac{(-K)^3}{3}\right] = 1$$

$$2\frac{K^4}{3} = 1 \Rightarrow K = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

Questão 5. (MOOD, 1913. p. 82). O experimento é arremeçar duas bolas em quatro caixas de tal modo que cada bola tem a mesma probabilidade de cair em qualquer caixa. Seja X o número de bolas na primeira caixa.
(a) Qual a função densidade acumulada de X?
Desenvolvendo:
Seja,

$$Evento = (Bola_1, Bola_2)$$

$$\Omega = \{ \underbrace{(C_2,C_2),(C_2,C_3),(C_2,C_4),(C_3,C_3),(C_3,C_2),(C_3,C_4),C_4,C_4),(C_4,C_2),(C_4,C_3)}_{\textbf{\textit{Evento:}}\ \textit{zero bolas na caixa 1}},$$
$$\underbrace{(C_1,C_2),(C_2,C_1),(C_1,C_3),(C_3,C_1),(C_1,C_4),(C_4,C_1)}_{\textbf{\textit{Evento:}}\ \textit{uma bola na caixa 1}}, \qquad \underbrace{(C_1,C_1)}_{\textbf{\textit{Evento:}}\ \textit{duas bolas na caixa 1}} \qquad \}$$

$$X \begin{cases} 0 & \text{nenhuma bola na primeira caixa} \\ 1 & \text{uma bola na primeira caixa} \\ 2 & \text{duas bolas na primeira caixa} \end{cases}$$

x	0	1	2
P[x]	9/16	6/16	1/16

Portanto, a função densidade acumulada será:

$$F_x(X) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{9}{16} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{15}{16} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

(b) Qual a função densidade de X?

Desenvolvendo:

$$X \begin{cases} 0 & \text{nenhuma bola na primeira caixa} \\ 1 & \text{uma bola na primeira caixa} \\ 2 & \text{duas bolas na primeira caixa} \end{cases}$$

A probabilidade de qualquer bola cair em qualquer caixa será:

$$P[X] = \frac{1}{4}$$

e a probabilidade de não cair será:

$$P[X] = \frac{3}{4}$$

A probabilidade de cair nenhuma das duas bolas será:

$$P[X = 0] = \left(\underbrace{\frac{3}{4}}_{1^{\text{a}}\ bola} \times \underbrace{\frac{3}{4}}_{2^{\text{a}}\ bola} \right) = \frac{9}{16}$$

A probabilidade de uma bola cair na primeira caixa será:

$$P[X = 1] = \left(\underbrace{\frac{1}{4}}_{1^{\text{a}}\ bola} \times \underbrace{\frac{3}{4}}_{2^{\text{a}}\ bola} \right) + \left(\underbrace{\frac{3}{4}}_{1^{\text{a}}\ bola} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{2^{\text{a}}\ bola} \right) = \frac{6}{16}$$

A probabilidade de duas bolas caírem na primeira caixa:

$$P[X = 2] = \left(\underbrace{\frac{1}{4}}_{1^{\text{a}}\ bola} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{2^{\text{a}}\ bola} \right) = \frac{1}{16}$$

Outra forma de resolver esse problema é utilizar a distribuição binomial:

$$P[X = x] = C_x^n \times p^x q^{n-x}$$

$$P[X = 0] = C_0^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2-0} = \frac{9}{16}$$

$$P[X = 1] = C_1^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} = \frac{6}{16}$$

$$P[X = 2] = C_2^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2-2} = \frac{1}{16}$$

x	0	1	2
P[x]	9/16	6/16	1/16

(c) Encontre a média e a variância de X.

Desenvolvendo:
MÉDIA
Para esse caso em que as $v.a.$ são discretas, a média ou esperança matemática fica:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P[x_i]$$

$$E[X] = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{6}{16} + 2 \times \frac{1}{16} \Rightarrow E[X] = \frac{1}{2}$$

Outra forma pela distribuição binomial:

$$E[X] = np = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

VARIÂNCIA
Para esse caso em que as $v.a.$ são discretas, a variância fica:

$$VAR[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$$

$E[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P[x_i] = 0^2 \times \frac{9}{16} + 1^2 \times \frac{6}{16} + 2^2 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{8}$
$[E[X]]^2 = \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$

$$VAR[X] = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Outra forma pela distribuição binomial:

$$VAR[X] = npq = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Questão 6. (MOOD, 1913. p. 82) Uma moeda honesta é lançada até aparecer uma cara. Seja X o número de lançamentos necessários para aparecer “cara”na face superior.

(a) Encontre a função densidade de X.

Desenvolvendo:

Lançamento	Resultado				P[X]
1	1				$\frac{1}{2}$
2	0	1			$\frac{1}{4}$
3	0	0	1		$\frac{1}{8}$
4	0	0	0	1	$\frac{1}{16}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞					0

Portanto, a função densidade,

$$P[X] = \frac{1}{2^x}$$

Provar que é função densidade,

Isso é um P.G. decrescente

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = 1 \tag{2.1}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} \Rightarrow Sn = \frac{a_1}{(1-q)} \Rightarrow Sn = \frac{1/2}{(1-1/2)} \Rightarrow Sn = 1$$

Provado, portanto, $P[X] = \frac{1}{2^x}$ é função densidade.

(b)Encontre a média e a variância de X.

MÉDIA
Desenvolvendo:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} xP[x] \Rightarrow E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{1}{2^x}$$

fazendo uma mudança de variável, $x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1$,

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{1}{2^x} \Rightarrow E[X] = \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \times \frac{1}{2^{(y+1)}} \Rightarrow E[X] = \sum_{y=0}^{\infty} y \times \frac{1}{2^{(y+1)}} + \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^{(y+1)}} \Rightarrow$$

$$E[X] = \sum_{y=0}^{\infty} y \times \frac{1}{2^y} \times \frac{1}{2} + \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y} \times \frac{1}{2} \Rightarrow E[X] = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} y \times \frac{1}{2^y}}_{E[Y]} + \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + 0\right)}_{P.G.} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a_1}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times (2)$$

Observe que $E[X] = E[Y]$, portanto,

$$E[X] = \frac{1}{2} E[X] + \frac{1}{2} \times 2 \Rightarrow E[X] - \frac{1}{2} E[X] = \frac{2}{2} \Rightarrow E[X] = \frac{1}{1/2} \Rightarrow E[X] = 2$$

VARIÂNCIA

$$VAR[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$$

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 P[X = x] \Rightarrow E[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \times \frac{1}{2^2}$$

fazendo uma mudança de variável, $x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1$,

$$E[X^2] = \sum_{y}^{\infty} (y+1)^2 \times \frac{1}{2^{(y+1)}} \Rightarrow E[X^2] = \sum_{y=0}^{\infty} (y^2 + 2y + 1) \times \frac{1}{2^{(y+1)}} \Rightarrow$$

$$E[X^2] = \sum_{y=0}^{\infty} (y^2 + 2y + 1) \times \frac{1}{2^y} \times \frac{1}{2^1} \Rightarrow E[X^2] = \frac{1}{2^1} \sum_{y=0}^{\infty} (y^2 + 2y + 1) \times \frac{1}{2^y} \Rightarrow$$

$$E[X^2] = \frac{1}{2^1} \sum_{y=0}^{\infty} (y^2) \times \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^1} \sum_{y}^{\infty} (2y) \times \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^1} \sum_{y}^{\infty} (1) \times \frac{1}{2^y} \Rightarrow$$

$$E[X^2] = \frac{1}{2^1} \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} (y^2) \times \frac{1}{2^y}}_{E[Y^2]} + 2 \times \frac{1}{2^1} \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} (y) \times \frac{1}{2^y}}_{E[Y]} + \frac{1}{2^1} \sum_{y=0}^{\infty} (1) \times \frac{1}{2^y}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + 0\right)}_{P.G.} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a_1}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} 1 \times \frac{1}{2^y} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times (2)$$

$$E[X^2] = \frac{1}{2} E[Y^2] + 2 \times \frac{1}{2} E[Y] + \frac{1}{2} \times 2$$

Observe que $E[X] = E[Y] = 1$, e $E[Y]^2 = E[X^2]$, portanto,

$$E[X^2] = \frac{1}{2} E[X^2] + E[X] + \frac{2}{2} \Rightarrow E[X^2] - \frac{1}{2} E[X^2] = 12 + 1 \Rightarrow E[X^2] = \frac{3}{1/2} \Rightarrow$$

$$E[X^2] = 6$$

Assim,

$$VAR[X] = E[X^2] - [E[X]]^2 \Rightarrow VAR[X] = 6 - (2)^2 = 2$$

(c)Encontre a função geradora de momento de X.

Desenvolvendo:

$$m(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} P[X] \Rightarrow E[e^{tx}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \times \frac{1}{2^x} \Rightarrow$$

$$E[e^{tx}] = \sum_{x=1}^{\infty} \left(e^t \times \frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow E[e^{tx}] = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^x = \underbrace{\frac{e^t}{2} + \left(\frac{e^t}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t}{2}\right)^3 + \ldots}_{P.G.} = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow$$

$$E[e^{tx}] = \frac{\frac{e^t}{2}}{1 - \frac{e^t}{2}} = \frac{e^t}{2 - e^t}$$

Questão 10. (MOOD, 1913. p. 82) Seja $F_x(x) = \frac{1}{2}\left\{\theta I_{(0,1)} + I_{[1,2]} + (1-\theta) I_{(2,3)}(x)\right\}$, onde θ é uma constante que satisfaz $0 \leq \theta \leq 1$.

(a) Encontre a função densidade acumulada de X.

Desenvolvendo:
Inicialmente, deduz-se a função densidade:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{(1-\theta)}{2} & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

A função acumulada,

$$F_X(X) = \int_0^x \frac{\theta}{2} dx + \int_1^x \frac{1}{2} dx + \int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx$$

Para facilitar o cálculo veja,
$\int_0^x \frac{\theta}{2} dx = \frac{\theta}{2} x + c$
$\int_1^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + c$
$\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx = \frac{(1-\theta)}{2} x - \frac{2(1-\theta)}{2} + c$
Observe que $\int_1^x \frac{1}{2} dx$ e $\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx$ não são realmente esses resultados, já que a os intervalos se acumulam, ou seja,

$$\int_1^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\theta}{2} x}_{\int_0^x \frac{\theta}{2} dx}$$

Porém, $\int_0^x \frac{\theta}{2} dx$ está limitado até 1, $I_{(0,1)}$, assim,

$$\int_1^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\theta}{2} \times 1}_{\int_0^1 \frac{\theta}{2} dx} \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\theta}{2}}_{\int_0^1 \frac{\theta}{2} dx}$$

Para $\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx$,

$$\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx = \frac{(1-\theta)}{2} x - \frac{2(1-\theta)}{2} + \underbrace{\frac{1x - 1 + \theta}{2}}_{\int_1^x \frac{1}{2} dx}$$

Porém, $\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx$ está limitado até 2, $I_{(1,2)}$, assim,

$$\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx = \frac{(1-\theta)}{2} x - \frac{2(1-\theta)}{2} + \underbrace{\frac{1 \times 2 - 1 + \theta}{2}}_{\int_1^2 \frac{1}{2} dx} \Rightarrow$$

$$\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx = \frac{(1-\theta)}{2} x - \frac{2(1-\theta)}{2} + \underbrace{\frac{1 \times 2 - 1 + \theta}{2}}_{\int_1^2 \frac{1}{2} dx} \Rightarrow$$

$$\int_2^x \frac{(1-\theta)}{2} dx = \frac{(1-\theta)}{2} x - \frac{2(1-\theta)}{2} + \underbrace{\frac{1 + \theta}{2}}_{\int_1^2 \frac{1}{2} dx}$$

Assim,

$$F_X(X) = \left(\frac{\theta}{2} x\right) I_{(0,1)} + \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\theta}{2}}_{\int_0^1 \frac{\theta}{2} dx}\right) I_{(1,2)} + \left(\frac{(1-\theta)}{2} x - \frac{2(1-\theta)}{2} + \underbrace{\frac{1+\theta}{2}}_{\int_1^2 \frac{1}{2} dx}\right) I_{(2,3)}$$

(b) Encontre a média, mediana e variância de X.

Desenvolvendo:
Para o cálculo de todas as medidas, será utilizado como artifício para o cálculo a "função geradora de momentos".

MÉDIA

$$m(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_x(x) dx$$

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f_x(x) dx$$

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = \frac{\theta}{2} \int_0^1 x e^{tx} dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x e^{tx} dx + \frac{(1-\theta)}{2} \int_2^3 x e^{tx} dx$$

$$\frac{\partial m(0)}{\partial t} = E[X] = \frac{\theta}{2} \int_0^1 x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x dx + \frac{(1-\theta)}{2} \int_2^3 x dx$$

$$\frac{\partial m(0)}{\partial t} = E[X] = \frac{\theta}{2} \times \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{(1-\theta)}{2} \times \frac{x^2}{2}\Big|_2^3$$

$$E[X] = \frac{\theta}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{(1-\theta)}{2} \times \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right)$$

$$\boxed{E[X] = 2 - \theta}$$

VARIÂNCIA

$$VAR[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$$

Tendo,

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f_x(x)dx$$

$$\frac{\partial^2 m(t)}{\partial^2 t} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f_x(x)dx$$

$$\frac{\partial^2 m(0)}{\partial^2 t} = E[X^2] = \frac{\theta}{2}\int_0^1 x^2dx + \frac{1}{2}\int_1^2 x^2dx + \frac{(1-\theta)}{2}\int_2^3 x^2dx$$

$$\frac{\partial^2 m(0)}{\partial^2 t} = E[X^2] = \frac{\theta}{2} \times \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{(1-\theta)}{2} \times \frac{x^3}{3}\Big|_2^3$$

$$E[X^2] = \frac{\theta}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{(1-\theta)}{2} \times \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right)$$

$$E[X^2] = \frac{\theta}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} + \frac{(1-\theta)}{2} \times \frac{19}{3}$$

$$\boxed{E[X^2] = \tfrac{13}{3} - 3\theta}$$

Portanto,

$$VAR[X] = \left[\frac{13}{3} - 3\theta\right] - [2-\theta]^2$$

$$VAR[X] = \left[\frac{13}{3} - 3\theta\right] - [2^2 + \theta^2 - 4\theta]$$

$$VAR[X] = \frac{13}{3} - 4 + 4\theta - 3\theta - \theta^2$$

$$VAR[X] = \frac{13}{3} - 4 + \theta - \theta^2$$

$$\boxed{VAR[X] = \tfrac{1}{3} + \theta(1-\theta)}$$

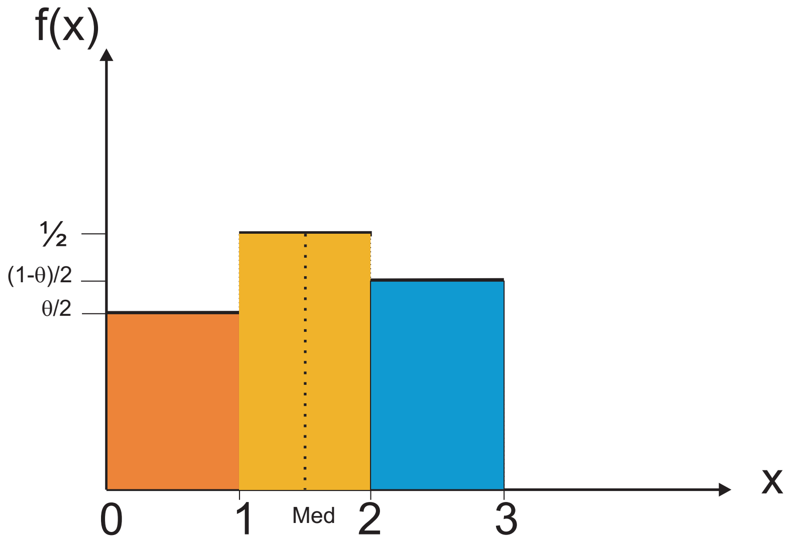


Figura 2.1: Função densidade

MEDIANA

1º resolução da questão

Esse raciocínio será simplesmente visualizando as áreas nos intervalos na figura [2.1], observa-se que o valor da mediana é o ponto em que 50% dos valores estão abaixo e 50% acima deste. Assim, como a área do intervalo $(0,1)$ é menor que 50%, pois o intervalo $(1,2)$ corresponde a 50% de toda a área, somando cumulativamente as áreas, percebe-se que a mediana estará no intervalo $(1,2)$. Assim,

$$\frac{\theta}{2} + \frac{med - 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow med = 2 - \theta$$

2º resolução da questão (Outra forma de cálculo)

Sabendo em que intervalo a mediana se encontra, basta usar a $F_x(X)$ desse intervalo.

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\theta}{2}}_{\int_0^1 \frac{\theta}{2}dx} \right) I_{(1,2)} = 0,50$$

Nesse caso, como se deseja a área igual a 50%, correspondente a área do intervalo de $(0, med)$, pode-se dizer que $x = med$, assim,

$$\left(\frac{1}{2}med - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\theta}{2}}_{\int_0^1 \frac{\theta}{2}dx}\right) I_{(1,2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{med - 1 + \theta}{2}\right) I_{(1,2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow med{-}1{+}\theta = \frac{2}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{med = 2 - \theta}$$

Questão 11. (MOOD, 1913. p. 82) Seja $f(x;\theta) = \theta f(x;1) + (1-\theta)f(x;0)$, onde θ é uma constante fixa que satisfaz $0 \leq \theta \leq 1$. Assuma que $f(.;0)$ e $f(.;1)$ são funções densidade de probabilidade.

(a) Veja se $f(.;\theta)$ também é uma função densidade de probabilidade.

Desenvolvendo:

$f(x;1)$ $f(x;0)$ são maiores ou iguais a zero, pois são f.d.p., θ e $(1-\theta)$ são valores positivos, pois $0 \leq \theta \leq 1$, assim,

$$(f(x;\theta) = \theta f(x;1) + (1-\theta)f(x;0)) \geq 0$$

Então $f(.;0)$ e $f(.;1)$ funções densidade de probabilidade, $\int_0^\infty f(.;0)dx = 1$ e $\int_1^\infty f(.;\theta)dx = 1$, dessa forma,

$$\int_0^\infty f(x;\theta)dx = \int_0^\infty [\theta f(x;1){+}(1{-}\theta)f(x;0)]dx = \int_0^\infty \theta f(x;1)dx{+}\int_0^\infty (1{-}\theta)f(x;0)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f(x;\theta)dx = \theta\int_0^\infty f(x;1)dx + (1-\theta)\int_0^\infty f(x;0)dx$$

$$\int_0^\infty f(x;\theta)dx = \theta \times 1 + (1-\theta) \times 1 = 1$$

Portanto,

$$\boxed{\int_0^\infty f(x;\theta)dx = 1}$$

(b) Encontre a média e variância de $f(.;\theta)$ em termos da média e variância de $f(.;0)$ e $f(.;1)$, respectivamente.

Desenvolvendo:

MÉDIA

$$E_\theta[X] = \int_{-\infty}^\infty xf(x;\theta)dx$$

$$f(x;\theta) = \theta f(x;1) + (1-\theta)f(x;0)$$
$$E_\theta[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x[\theta f(x;1) + (1-\theta)f(x;0)]dx$$
$$E_\theta[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\theta f(x;1)dx + \int_{-\infty}^{\infty} x(1-\theta)f(x;0)dx$$
$$E_\theta[X] = \theta\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;1)dx + (1-\theta)\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;0)dx$$

$$\boxed{E_\theta[X] = \theta E_1[X] + (1-\theta)E_0[X]}$$

VARIÂNCIA

$$VAR[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$$
$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x;\theta)dx = \theta E_1[X^2] + (1-\theta)E_0[X^2]$$

$$[E[X]]^2 = [\theta E_1[X] + (1-\theta)E_0[X]]^2$$
$$VAR[X] = \theta E_1[X^2] + (1-\theta)E_0[X^2] - [\theta E_1[X] + (1-\theta)E_0[X]]^2$$

(c) Encontre a função geradora de momentos de $f(.;\theta)$ em termos da média e variância de $f(.;0)$ e $f(.;1)$.

Desenvolvendo

$$m(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f_x(x;\theta)dx \Rightarrow m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f_x(x;1)dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f_x(x;0)dx$$
$$m(t) = \theta m(t)_{f_x(x;1)} + (1-\theta)m(t)_{f_x(x;0)}$$

Questão 14. (MOOD, 1913. p. 83) (a) Se X é uma $v.a.$ em que $E[X] = 3$ e $E[X^2] = 13$, use a desigualdade de Chebyshev para determinar o limite inferior de $P[-2 < X < 8]$.

Desenvolvendo:

$$P[\underbrace{\mu_x - r\sigma_x}_{-2} < x < \underbrace{\mu_x + r\sigma_x}_{8}] \geq \underbrace{1 - \frac{1}{r^2}}_{limite\ inferior}$$

Como $\mu_x = E[x] = 3$ e $\sigma_x = \sqrt{VAR[X]} = \sqrt{13 - (3)^2} = 2$, então

$$\mu_x - r\sigma_x = -1 \Rightarrow 3 - 2r = -2 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$

Portanto,

$$P[\underbrace{\mu_x - r\sigma_x}_{-2} < x < \underbrace{\mu_x + r\sigma_x}_{8}] \geq \underbrace{1 - \frac{1}{(\frac{5}{2})^2}}_{limite\ inferior} \Rightarrow$$

$$\boxed{P[\underbrace{\mu_x - r\sigma_x}_{-2} < x < \underbrace{\mu_x + r\sigma_x}_{8}] \geq \underbrace{0,84}_{limite\ inferior}}$$

(b) Seja X uma $v.a.$ discreta com densidade,

$$f(x) = \frac{1}{8}I_{(-1)}(x) + \frac{6}{8}I_{(0)}(x) + \frac{1}{8}I_{(1)}(x)$$

Para $k = 2$ avalie $P[|X - \mu_X| \geq k\sigma_X]$.

desenvolvendo:

$$E[X] = (-1) \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{6}{8} + 1 \times \frac{1}{8} = 0$$

$$VAR[X] = E[(x-\mu)^2] = \sum_{x=1}^{\infty}(x-\mu)^2 \times P[X] \Rightarrow$$

$$VAR[X] = (-1-0)^2 \times \frac{1}{8} + (0-0)^2 \times \frac{6}{8} + (1-0)^2 \times \frac{1}{8} = 0,25 \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,25} = 0,50$$

$$P[|X - \mu_X| \geq k\sigma_X] \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow P[|X| \geq \mu_X + k\sigma_X] \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow$$

$$P\left[|X| \geq 0 + 2 \times \frac{1}{2}\right] \leq \frac{1}{(2)^2} \Rightarrow P\left[|X| \geq 1\right] \leq \frac{1}{4}$$

(c) Se X é uma $v.a.$ com $E[X] = \mu$ satisfazendo $P[X \leq 0] = 0$, mostre que $P[X > 2\mu] \leq \frac{1}{2}$.

Dsenvolvendo:

$$P[X \geq k] \leq \frac{E[X]}{k}$$

Como $E[X] = \mu$, então,

$$P[X > 2\mu] \leq \frac{E[X] = \mu}{k = 2\mu} \Rightarrow P[X > 2\mu] \leq \frac{1}{2}$$

Questão 15. (MOOD, 1913. p. 83) Seja X um $v.a.$ com função densidade dada por

$$f_X(x) = |1 - x| I_{[0,2]}(x)$$

Encontre a média e variância de X.

Desenvolvendo:

$$f_x(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{se} \quad 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ -|1-x| & \text{se} \quad -(1-x) > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

$$f_X(x) = |1-x| I_{[0,2]}(x) = (1-x) I_{[0,1)} + (x-1) I_{(1,2]}$$

MÉDIA

$$E[X] = \int_0^1 x \times (1-x) dx + \int_1^2 x \times (x-1) dx \Rightarrow$$

$$E[X] = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

VARIÂNCIA

$$VAR[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \times (1-x) dx + \int_1^2 x^2 \times (x-1) dx \Rightarrow$$

$$E[X^2] = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{3}{2}$$

$$VAR[X] = \frac{3}{2} - [1]^2 = \frac{1}{2}$$

Questão 18. (MOOD, 1913. p. 84) Uma urna contém bolas numeradas 1, 2, 3. A primeira bola é retira da urna, e então uma moeda honesta é jogada n vezes o número da bola retirada. Encontre o número esperado de caras.

Desenvolvendo:
Considerando 1 - cara e 0 - coroa, o número de caras nos lançamentos será:

1: (1,0)

2: (1,0), (0,1), (1,1), (0,0)

3: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,0), (1,1,1)

Tem-se que o número de caras que são esperados nos lançamentos é dependente da probabilidade de cada bola, da qual $P[B_j] = \frac{1}{3}$, portanto,

$$P[Cara] = \sum P[Cara|B_j].P[B_j]$$

Ocorrendo zero cara,

$$P[X=0] = P[X=0|B_1].P[B_1] + P[X=0|B_2].P[B_2] + P[X=0|B_3].P[B_3]$$

$$P[X=0] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

Ocorrendo uma cara

$$P[X=1] = P[X=1|B_1].P[B_1] + P[X=1|B_2].P[B_2] + P[X=1|B_3].P[B_3]$$

$$P[X=1] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

Ocorrendo duas caras

$$P[X=2] = P[X=2|B_1].P[B_1] + P[X=2|B_2].P[B_2] + P[X=2|B_3].P[B_3]$$

$$P[X=2] = 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

Ocorrendo três caras

$$P[X=3] = P[X=3|B_1].P[B_1] + P[X=3|B_2].P[B_2] + P[X=3|B_3].P[B_3]$$

$$P[X=3] = 0 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

Assim,

$$E[X] = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{5}{24} + 3 \times \frac{1}{24} = 1$$

Questão 22. (MOOD, 1913. p. 84) Seja $f(x) = Ke^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})I_{(0,\infty)}(x)$.

(a) Encontre K para que $f(.)$ seja uma função densidade.

Desenvolvendo:

$$f(x) = Ke^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})I_{(0,\infty)}(x) = 1 \Rightarrow \int_0^\infty Ke^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})dx = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty Ke^{-\alpha x}dx - \int_0^\infty K(e^{-\alpha x})^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^\infty Ke^{-\alpha x}dx - \int_0^\infty Ke^{-2\alpha x}dx = 1 \Rightarrow$$

$$K\left[\left(\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right)\Big|_0^\infty + \left(\frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha}\right)\Big|_0^\infty\right] = 1 \Rightarrow K\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right] = 1 \Rightarrow K = 2\alpha$$

(b) Encontre a função densidade acumulada correspondente.

Desenvolvendo:

Para tornar $f(x) = Ke^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})I_{(0,\infty)}(x)$ uma função densidade, basta substituir $K = 2\alpha$, sendo,

$$f(x) = \int_0^\infty 2\alpha \times e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})I_{(0,\infty)}(x) = 1$$

A função densidade acumulada:

$$F_x(X) = \int_0^x 2\alpha \times e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})I_{(0,\infty)}(x) \Rightarrow$$

$$\int_0^x 2\alpha \times e^{-\alpha x} dx - \int_0^x 2\alpha \times e^{-2\alpha x} dx \Rightarrow$$

$$2\alpha \left[\int_0^x e^{-\alpha x} dx - \int_0^x e^{-2\alpha x} dx \right] \Rightarrow$$

$$2\alpha \left[-\frac{e^{-ax}}{a} + \frac{e^{-2ax}}{2a} \right]_0^x = 2\alpha \left[\left(-\frac{}{a} + \frac{e^{-2ax}}{2a} \right) - \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \right) \right] = -2e^{-ax} + e^{-2ax} + 2 - 1 \Rightarrow$$

$$F_x(X) = -2e^{-ax} + e^{-2ax} + 1$$

(c) Encontre $P[X > 1]$.

$$P[X < 1] = -2e^{-a \times (1)} + e^{-2a \times (1)} + 1 \Rightarrow P[X < 1] = -2e^{-a} + e^{-2a} + 1$$

Portanto,

$$P[X > 1] = 1 - P[X < 1] \Rightarrow P[X > 1] = 1 - (-2e^{-a} + e^{-2a} + 1) \Rightarrow$$

$$P[X > 1] = 2e^{-a} - e^{-2a}$$

Capítulo 3

Distribuições condicional e conjunta, independência estocástica, e esperança

1. (MOOD, 1973. Questão 3. p. 169). Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes com distribuição dada por $P[X_i = -1] = P[X_i = 1] = \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2$, então X_1 e X_1X_2 são independentes?

   Desenvolvendo:

X_1	X_2	$X_1.X_2$
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

   Caso $X_1 = -1$, então,

   $$P[X_1X_2|X_1 = -1] = \frac{P[X_1X_2 \cap X_1 = -1]}{P[X_1 = -1]} = \frac{P[X_1].P[X_2].P[X_1 = -1]}{P[X_1 = -1]} = P[X_1].P[X_2]$$

   Portanto,

   $$P[X_1X_2|X_1 = -1] = P[X_1].P[X_2]$$

   X_1X_2 e $X_1 = -1$ são independentes.

2. (MOOD, 1973. Questão 4. p. 169). São lançados uma moeda de 1 centavo e uma de 10 centavos. Seja X o número de caras na face superior da moeda. A moeda de 1 centavo é jogada novamente. Seja Y o número de caras na moeda de 1 centavo do primeiro lançamento e na de 1 centavo no segundo lançamento.

   (a) Encontre a distribuição condicional de Y dado $X = 1$.

(b) Encontre a covariância de X e Y.

Desenvolvendo:

$\Omega = \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(C,K,K),(K,C,C),(C,K,C),(C,C,K),(C,C,C)\}$

Seja,
X - O número de caras.
Y - O número de caras da moeda de 10 centavos (1º Lançamento) e da moeda de 1 centavo (2º Lançamento).

$$C - Cara$$

$$K - Coroa$$

Evento	X	Y	P[.]
(C,C,C)	3	2	1/8
(C,C,K)	2	1	1/8
(C,K,C)	2	1	1/8
(K,C,C)	2	2	1/8
(K,K,C)	1	1	1/8
(K,C,K)	1	1	1/8
(C,K,K)	1	0	1/8
(K,K,K)	0	0	1/8

Y	0	1	2
$P[Y\|X=1]$	$\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}$	$\frac{2/8}{3/8}=\frac{2}{3}$	0

(b).

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X].E[Y]$$

$E[XY] = 0\times 0\times \frac{1}{8} + 1\times 0\times \frac{1}{8} + 1\times 1\times \frac{2}{8} + 2\times 1\times \frac{2}{8} + 2\times 2\times \frac{1}{8} + 3\times 2\times \frac{1}{8} = 2$
$E[X] = 0\times \frac{1}{8} + 1\times \frac{3}{8} + 2\times \frac{3}{8} + 3\times \frac{1}{8} = \frac{12}{8}$
$E[Y] = 0\times \frac{2}{8} + 1\times \frac{4}{8} + 2\times \frac{2}{8} = 1$

$$Cov[X,Y] = 2 - \frac{12}{8}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{Cov[X,Y] = \frac{1}{2}}$$

3. (MOOD, 1973. Questão 5. p. 169). Se X e Y têm distribuição dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 2I_{(0,y)}(x)I_{(0,1)}(y)$$

   (a) Encontre a Cov[X,Y].
   (b) Encontre a distribuição condicional de Y dado X=x.

Desenvolvendo:
(a).

$$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X].E[Y]$$

Os limites de integração da função:

Assim,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2I_{(0,y)}(x)I_{(0,1)}(y)dy \Rightarrow$$

$$f_X(x) = 2I_{(0,y)}(x)\int_x^1 dy = (2-2x)I_{(0,y)}(x)$$

$$\boxed{f_x(x) = (2-2x)I_{(0,y)}(x)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2I_{(0,y)}(x)I_{(0,1)}(y)dy \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = 2I_{(0,1)}(y)\int_0^y dx = 2yI_{(0,1)}(y)$$

$$\boxed{f_y(y) = 2yI_{(0,1)}(y)}$$

Calculando-se as esperanças:

$$E[X] = \int_0^1 xf_x(x)dx = \int_0^1 x(2-2x)dx = \int_0^1 (2x-2x^2)dx = (2\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{E[X] = \tfrac{1}{3}}$$

$$E[Y] = \int_0^1 yf_y(y)dy = \int_0^1 y.2ydy = \frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{E[Y] = \frac{2}{3}}$$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_y^0 xyf_x(x)f_y(y)dxdy = \int_0^1 \int_y^0 2xydxdy = 2\int_0^1 \int_y^0 xydxdy \Rightarrow$$

$$E[XY] = 2\int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\bigg|_0^y\right]dy = 2\int_0^1 y\left[\frac{y^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]dy = \frac{2}{2}\int_0^1 y^3dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{E[XY] = \frac{1}{4}}$$

Portanto,

$$Cov[X,Y] = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

$$\boxed{Cov[X,Y] = \frac{1}{36}}$$

(b).

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{2}{(2-2x)}I_{(x,1)}(y)$$

com $0 < x < 1$.

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x) = \frac{2}{(2-2x)}I_{(x,1)}(y) \text{ com } 0 < x < 1}$$

4. (MOOD, 1973. Questão 6. p. 170). Considere uma amostra de tamanho 2 sem reposição numa urna contendo três bolas, numeradas 1, 2 e 3. Seja X o número da primeira bola e Y o maior número das bolas.

   (a) Encontre a função densidade conjunta de X e Y.

   (b) Encontre $P[X = 1|Y = 3]$.

   (c) Encontre $Cov[X,Y]$.

   Desenvolvendo:

   (a).
   A densidade conjunta pode ser observada na figura [3.3]

   (b).

   $$P[X = 1|Y = 3] = \frac{1/6}{4/6} = \frac{1}{4}$$

   (c).

   $$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X].E[Y]$$

$E[XY] = \sum xy.f_{X,Y}(x,y) = 1\times 2\times \frac{1}{6} + 1\times 3\times \frac{1}{6} + 2\times 2\times \frac{1}{6} + 2\times 3\times \frac{1}{6} + 3\times 3\times \frac{2}{6} = \frac{33}{6}$
$E[X] = \sum x f_X(x) = 1\times \frac{2}{6} + 2\times \frac{2}{6} + 3\times \frac{2}{6} = 2$
$E[Y] = \sum y f_Y(y) = 1\times 0 + 2\times \frac{2}{6} + 3\times \frac{4}{6} = \frac{8}{3}$
Portanto,

$$Cov[X,Y] = \frac{33}{6} - 2\times \frac{8}{3} = \frac{1}{6}$$

5. (MOOD, 1973. Questão 7. p. 170). Sejam X e Y tais que $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}xyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x)$.

   (a) Determinar as distribuições marginais de X e Y.

   (b) X e Y são independentes?

   Desenvolvendo:

   Os limites de integração da função:
   (a).

$$f_X(x) = \int_0^x f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^x \frac{1}{2}xyI_{(0,2)}(x)dy = I_{(0,2)}(x).\frac{1}{2}.x\int_0^x ydy = I_{(0,2)}(x).\frac{x}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x \Rightarrow$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{x^3}{4}I_{(0,2)}(x)}$$

$$f_Y(y) = \int_y^2 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_y^2 \frac{1}{2}xy.I_{(0,2)}(y)dx = I_{(0,2)}(y).\frac{1}{2}.y\int_y^2 xdx = I_{(0,2)}(y).\frac{y}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{f_Y(y) = y - \frac{y^3}{4}I_{(0,2)}(y)}$$

   (b).
   X e Y são independentes se $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$. Então,

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}xyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x)$$

$$f_X(x) = \frac{x^3}{4}I_{(0,2)}(x)$$

$$f_Y(y) = y - \frac{y^3}{4}I_{(0,2)}(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

$$\frac{1}{2}xyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x) = \left[\frac{x^3}{4}I_{(0,2)}(x)\right].\left[y - \frac{y^3}{4}I_{(0,2)}(y)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}xyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x) = \left(\frac{x^3.y}{4}\right).\left(y - \frac{y^3}{4}\right)I_{(0,2)}(y)I_{(0,2)}(x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}xyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x) = \frac{4x^3.y - x^3.y^3}{16}I_{(0,2)}(y)I_{(0,2)}(x)$$

Portanto,

$$\boxed{\tfrac{1}{2}xyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x) \neq \tfrac{4x^3.y-x^3.y^3}{16}I_{(0,2)}(y)I_{(0,2)}(x)}$$

X e X não são independentes.

6. (MOOD, 1973. Questão 10. p. 170). Sejam X e Y variáveis aleatórias independetes, cada uma tendo a mesma distribuição geométrica. Encontre $P[X = Y] =$.

   Desenvolvendo:

   Seja,

$$P[X = x] = f_X(x) = p(1-p)^x I_{0,1,\dots}(x)$$
$$P[Y = y] = f_Y(y) = p(1-p)^y I_{0,1,\dots}(y)$$

   Como X e Y são independentes, a conjunta é equivalente ao produto das marginais.

$$P[X = x, Y = y]f_X, Y(x,y) = f_X(x).f_Y(y) = [p(1-p)^x].[p(1-p)^y]I_{0,1,\dots}(x)I_{0,1,\dots}(y)$$

   $P[X = Y = 0] = [p(1-p)^0].[p(1-p)^0] = p^2$
   $P[X = Y = 1] = [p(1-p)^1].[p(1-p)^1] = p^2(1-p)^2$
   $\vdots$
   $P[X = Y = n] = [p(1-p)^n].[p(1-p)^n] = p^2(1-p)^{2n}$
   Assim, a probabilidade de $P[X = Y]$ é a soma de uma P.G. de todas essas probabilidades,

$$Sn = \frac{a_1}{1-q}$$

$$a_1 = P[X = Y = 0] = [p(1-p)^0].[p(1-p)^0] = p^2$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{p^2(1-p)^2}{p^2} = (1-p)^2$$

   Portanto,

$$P[X = Y] = S_n = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{1-[1-2p+p^2]} = \frac{p^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p}$$

$$\boxed{P[X = Y] = \tfrac{p}{2-p}}$$

7. (MOOD, 1973. Questão 13. p. 170). Um lançamento de três moedas. Seja X o número de caras nas duas primeiras moedas, e Y o número de caras nas duas últimas moedas.

(a) Encontre a distribuição conjunta de X e Y.
(b) Encontre a condicional de Y dado $X = 1$.
(c) Encontre a $Cov[X, Y]$.

Desenvolvendo:
(a).

$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K), (K, K, K)\}$

Evento	X	Y	P[.]
(C,C,C)	2	0	1/8
(C,C,K)	2	1	1/8
(C,K,C)	1	1	1/8
(K,C,C)	1	0	1/8
(K,K,C)	0	1	1/8
(K,C,K)	1	1	1/8
(C,K,K)	1	2	1/8
(K,K,K)	0	2	1/8

A distribuição conjunta representada no gráfico abaixo:
(b).

$$f_{Y|X=1}(y|x = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_{X=1}(x = 1)}$$

Y	0	1	2
$f_{Y\|X=1}(y\|x = 1)$	$\frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$	$\frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$	$\frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$

(c).

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X].E[Y]$$

$E[XY] = \sum xy.f_{X,Y}(x, y) = 1 \times 1 \times \frac{2}{8} + 1 \times 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times 1 \times \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$
$E[X] = \sum x f_X(x) = 1 \times \frac{4}{8} + 2 \times \frac{2}{8} = 1$
$E[Y] = 1 \times \frac{4}{8} + 2 \times \frac{2}{8} = 1$
Portanto,

$$Cov[X, Y] = \frac{3}{4} - 1 \times 1 = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{Cov[X, Y] = -\tfrac{1}{4}}$$

8. (MOOD, 1973. Questão 14. p. 170). Seja X uma v.a. com densidade $f_X(.)$, distribuição acumulada $F_X(.)$, média μ_X e variância σ^2_X. Defina $Y = \alpha + \beta X$ ($-\infty < \alpha < \infty$ e $\beta > 0$).

   (a) escolher α e β tais que Y tenha média 0 e variância 1.

   (b) Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

   (c) Determine a distribuição acumulada de Y em termos de α, β, e $F_X(.)$.

   (d) Se X tem distribuição simétrica em relação a μ_X, Y é necessariamente simétrico em relação à sua média?[Dica: Z tem distribuição simétrica em relação a C se Z-C e -(Z-C) têm mesma distribuição].

   Desenvolvendo:
   (a).
   Seja,

$$Y = \alpha + \beta X$$

Aplicando-se a variância em ambos os membros,

$$Var[Y] = Var[\alpha + \beta X] = \beta^2.Var[X]$$

Se deseja um α e β tais que Y tenha média 0 e variância 1. Então,

$$Var[Y] = \sigma^2_Y$$

$$Var[X] = \sigma^2_X$$

$$\sigma^2_Y = 1 \Rightarrow \beta^2.\sigma^2_X = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sigma_X}$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma_X} \tag{3.1}$$

Aplicando-se a esperança em ambos os membros,

$$E[Y] = E[\alpha + \beta X] = E[\alpha] + E[\beta X] = \alpha + \beta E[X] = \alpha + \beta\mu_X$$

Se deseja um α e β tais que Y tenha média 0 e variância 1. Então,

$$E[Y] = \mu_Y = 0$$

$$\mu_Y = \alpha + \beta\mu_X$$

$$\alpha + \beta\mu_X = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta\mu_X$$

$$\alpha = -\beta\mu_X \tag{3.2}$$

Substituindo, eq.[3.1] em eq.[3.2],

$$\alpha = -\beta\mu_X \Rightarrow \alpha = -\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)\mu_X \Rightarrow \alpha = -\frac{\mu_X}{\sigma_X}$$

Portanto, um α e β tais que Y tenha média 0 e variância 1, será

$$\boxed{\alpha = -\frac{\mu_X}{\sigma_X}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sigma_X}}$$

(b).

$$Cov[X, Y] = E[XY] - \mu_X.\mu_Y$$

$$E[XY] = E[X \times (\alpha + \beta X)] = E[\alpha X + \beta X^2] = \alpha E[X] + \beta E[X^2]$$

Sendo, $\alpha = -\frac{\mu_X}{\sigma_X}$, $E[X] = \mu$, $\beta = \frac{1}{\sigma_X}$, e $E[X^2] = Var[X] + [E[X]]^2$. Sabe-se que $Var[X] = \sigma_X^2$ e $E[X] = \mu_X$. Então,

$$E[XY] = \alpha E[X] + \beta E[XY] = \left(-\frac{\mu_X}{\sigma_X}\right) \times \mu_X + \left(\frac{1}{\sigma_X}\right) \times (\sigma_X^2 + \mu_X^2) \Rightarrow$$

$$E[XY] = \frac{\sigma_X^2 + \mu_X^2 - \mu_X^2}{\sigma_X} = \sigma_X$$

Assim,

$$Cov[X, Y] = \sigma_X - \mu_X \times 0 = \sigma_X$$

Portanto,

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Sabe-se que $\sigma_Y = 1$, então,

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_X}{\sigma_X \times 1} = \frac{1}{1} = 1$$

(c).

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = P[\alpha + \beta X \leq y] = P\left[X \leq \frac{y - \alpha}{\beta}\right] = F_X\left[\frac{y - \alpha}{\beta}\right] = F_X(x)$$

Sabendo que $x = \left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)$.

(d).
X tem distribuição simétrica em relação a μ_X se e somente se,

$$F_X(x) = 1 - F_X(x + 2(\mu_X - x)) = 1 - F_X(2\mu_X - x)$$

Queremos saber se, dado que $Y = \alpha + \beta X$, $F_Y(y) = 1 - F_Y(2\mu_Y - y)$? Vejamos:

$$1 - F_Y(2\mu_Y - y) = 1 - F_X\left(\frac{2\mu_Y - y - \alpha}{\beta}\right) = 1 - F_X\left(\frac{2(\alpha + \beta\mu_X) - (\alpha + \beta X) - \alpha}{\beta}\right) \Rightarrow$$

$$1 - F_Y(2\mu_Y - y) = 1 - F_X\left(\frac{2\alpha + 2\beta\mu_X - \alpha - \beta x - \alpha}{\beta}\right) = 1 - F_X\left(\frac{2\beta\mu_X - \beta x}{\beta}\right)$$

$$1 - F_Y(2\mu_Y - y) = 1 - F_X(2\mu_X - x)$$

Portanto,

$$\boxed{F_X(x) = F_Y(y)}$$

9. (MOOD, 1973. Questão 15. p. 170). Seja X uniforme no intervalo (0,1), ou seja,

$$f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$$

. Suponha Y uma v.a. com distribuição condicional $Y|X\ Bin(n, p = x)$, isto é,

$$f_{Y|X}(y|x) = \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y}$$

$y = 0, 1, 2, ...$

(a) Determinar $E[Y]$.

(b) Determinar a distribuição de Y.

Desenvolvendo:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$

Para encontrar $f_Y(y)$,

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \int_x f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx$$

Definição 21 (MOOD, 1973, p. 157):

$$E[g(X,Y)|X] = \sum_y g(x, y|X = x) f_{X,Y}(y|x)$$

Teorema 6 (MOOD, 1973, p. 158):

$$E[g(Y)] = E[E[g(Y)|X]]$$

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

(a).

$$E[Y|X] = \sum_{y=0}^{n} y \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y} = \sum_{y=0}^{n} y \times \frac{n}{y} \binom{n-1}{y-1} x^y (1-x)^{n-y}$$

$$E[Y|X] = n\sum_{y=0}^{n}\binom{n-1}{y-1}x^{y}(1-x)^{n-y}$$

Fazendo $z = y - 1$,

$$E[Y|X] = n\sum_{z=1}^{n-1}\binom{n-1}{z}x^{z+1}(1-x)^{n-(1+z)} = n\sum_{z=1}^{n-1}\binom{n-1}{z}x^{z+1}(1-x)^{n-1-z} \Rightarrow$$

$$E[Y|X] = n.x\underbrace{\sum_{z=1}^{n-1}\binom{n-1}{z}x^{z}(1-x)^{n-1-z}}_{Binom(\mathbf{n}=n-1;\mathbf{p}=x)} = nx \times 1 = nx$$

Sabe-se que $E[X] = \frac{(a+b)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$
Portanto,

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = E[nX] = nE[X] = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\boxed{E[Y] = \frac{n}{2}}$$

(b).

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \int_x f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx = \int_x \binom{n}{y}x^{y}(1-x)^{n-y}I_{(0,1)}(x)dx$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \binom{n}{y}x^{y}(1-x)^{n-y}dx = \binom{n}{y}\int_0^1 x^{y}(1-x)^{n-y}dx$$

Observe que $Beta(y+1, n-y+1) = \int_0^1 x^{y}(1-x)^{n-y}dx$ (MOOD, 1973, p. 535)

$$Beta(y+1, n-y+1) = \frac{\Gamma(y+1)\times\Gamma(n-y+1)}{\Gamma[(y+1)+(n-y+1)]} = \frac{\Gamma(y+1)\times\Gamma(n-y+1)}{\Gamma[(n+2)]}$$

Então,

$$f_Y(y) = \binom{n}{y} \times Beta(y+1, n-y+1) = \frac{n!}{y!(n-y)!} \times \frac{\Gamma(y+1)\times\Gamma(n-y+1)}{\Gamma[(n+2)]}$$

Sabe-se que $\Gamma(y+1) = y!$, $\Gamma[(n-y)+1] = (n-y)!$ e $\Gamma(n+2) = (n+1)!$ (MOOD, 1973, p. 534). Assim,

$$f_Y(y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} \times \frac{y!\times(n-y)!}{(n+1)!} = \frac{n!}{y!(n-y)!} \times \frac{y!\times(n-y)!}{(n+1).n!} = \frac{1}{n+1}$$

Portanto,

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{n+1}}$$

10. (MOOD, 1973. Questão 17. p. 171). Considere o lançamento de 2 tetraedros com as faces numeradas de 1 a 4. Seja Y_1 a menor das faces e Y_2 a maior delas.
    (a) Determinar a distribuição conjunta de Y_1 e Y_2.
    (b) Determinar $P[Y_1 \geq 2, Y_2 \geq 2]$.
    (c) Determinar as médias e as variâncias de Y_1 e Y_2.
    (d) Determinar $P[Y_2|Y_1]$ para todos os valores de Y_1.
    (e) Determinar o coeficientes de correlação entre Y_1 e Y_2.

Desenvolvendo:
(a).

(T_1, T_2)	Y_1	Y_2	$f_{X,Y}(x,y)$
(1,1)	1	1	$\frac{1}{16}$
(1,2)	1	2	$\frac{1}{16}$
(1,3)	1	3	$\frac{1}{16}$
(1,4)	1	4	$\frac{1}{16}$
(2,1)	1	2	$\frac{1}{16}$
(2,2)	2	2	$\frac{1}{16}$
(2,3)	2	3	$\frac{1}{16}$
(2,4)	2	4	$\frac{1}{16}$
(3,1)	1	3	$\frac{1}{16}$
(3,2)	2	3	$\frac{1}{16}$
(3,3)	3	3	$\frac{1}{16}$
(3,4)	3	4	$\frac{1}{16}$
(4,1)	1	4	$\frac{1}{16}$
(4,2)	2	4	$\frac{1}{16}$
(4,3)	3	4	$\frac{1}{16}$
(4,4)	4	4	$\frac{1}{16}$

A distribuição conjunta:

(b).

$$P[Y_1 \geq 2, Y_2 \geq 2] = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

(c).
A média de Y_1

$$E[Y_1] = \sum y_1 f_{Y_1} = 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{3}{16} + 4 \times \frac{2}{16} = 1,875$$

$$\boxed{E[Y_1] = 1,875}$$

A variância de Y_1.

$$Var[Y_1] = E[Y_1^2] - [E[Y_1]]^2$$

$$E[Y_1^2] = \sum y_1^2 f_{y_1} = 1^2 \times \frac{7}{16} + 2^2 \times \frac{5}{16} + 3^2 \times \frac{3}{16} + 4^2 \times \frac{1}{16} = 4,375$$

$$Var[Y_1] = 4,375 - [1,875]^2 = 0,859$$

$$\boxed{Var[Y_1] = 0,859}$$

A média de Y_2

$$E[Y_2] = \sum y_2 f_{Y_2} = 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} = 3,125$$

$$\boxed{E[Y_2] = 3,125}$$

A variância de Y_2.

$$Var[Y_2] = E[Y_2^2] - [E[Y_2]]^2$$

$$E[Y_2^2] = \sum y_2^2 f_{y_2} = 1^2 \times \frac{1}{16} + 2^2 \times \frac{3}{16} + 3^2 \times \frac{5}{16} + 4^2 \times \frac{7}{16} = 10,625$$

$$Var[Y_2] = 5,375 - [2,125]^2 = 0,859$$

$$\boxed{Var[Y_2] = 0,859}$$

(d).

Y_2	1	2	3	4
$P[Y_2\|Y_1 = 1]$	$\frac{1/16}{7/16} = 1/7$	$\frac{2/16}{7/16} = 2/7$	$\frac{2/16}{7/16} = 2/7$	$\frac{2/16}{7/16} = 2/7$
$P[Y_2\|Y_1 = 2]$	0	$\frac{1/16}{5/16} = 1/5$	$\frac{2/16}{5/16} = 2/5$	$\frac{2/16}{5/16} = 2/5$
$P[Y_2\|Y_1 = 3]$	0	0	$\frac{1/16}{3/16} = 1/3$	$\frac{2/16}{3/16} = 2/3$
$P[Y_2\|Y_1 = 4]$	0	0	0	$\frac{1/16}{1/16} = 1$

(e).

$$Cov[Y_1, Y_2] = E[Y_1Y_2] - E[Y_1].E[Y_2]$$

$E[Y_1Y_2] = \sum y_1 y_2 f_{y_1 y_2}(y_1 y_2) = 1 \times 1 \times \frac{1}{16} + 1 \times 2 \times \frac{2}{16} + 1 \times 3 \times \frac{2}{16} + 1 \times 4 \times \frac{2}{16} + 2 \times 2 \times \frac{1}{16} + 2 \times 3 \times \frac{2}{16} + 2 \times 4 \times \frac{2}{16} + 3 \times 3 \times \frac{1}{16} + 3 \times 4 \times \frac{2}{16} + 4 \times 4 \times \frac{1}{16} = 6,25$

$E[Y_1]$ e $E[Y_2]$ foram resolvidos na alternativa anterior. Portanto,

$$Cov[Y_1, Y_2] = 6,25 - 1,875 \times 3,125 = 0,3906$$

$$\boxed{Cov[Y_1, Y_2] = 0,3906}$$

11. (MOOD, 1973. Questão 18. p. 171). Seja $f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$.

 (a) Determinar $P[X > 1]$.
 (b) Determinar $P[1 < X + Y < 2]$.
 (c) Determinar $P[X < Y | Y < 2Y]$.
 (d) Determinar m tal que $P[X + Y < m] = \frac{1}{2}$.
 (e) Determinar $P[0 < X < 1 | Y = 2]$.
 (f) Determinar o coeficiente de correlação de X e Y.

Desenvolvendo:
Inicialmente, determina-se as marginais:

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-(x+y)} I_{(0,\infty)}(x) dy = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) \left[e^{-y}\right]_0^\infty = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)[1-0] = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty e^{-(x+y)} I_{(0,\infty)}(y) dx = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y) \left[e^{-y}\right]_0^\infty = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)[1-0] = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)$$

Observe que:

$$f_X(x) \times f_Y(y) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) \times e^{-y} I_{(0,\infty)}(y) = e^{-(x+y)} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$$

Portanto, como $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$, X e Y são independentes.
(a).

$$P[X > 1] = \int_1^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = 0 - [-e^{-1}] = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(b).

$$P[1 < X + Y < 2] = \text{Área 1} + \text{Área 2}$$
$$\text{Área 1} = \int_0^1 \int_{1-x}^{2-x} e^{-(x+y)} dydx$$
$$\text{Área 2} = \int_1^2 \int_0^{2-x} e^{-(x+y)} dydx$$

$$P[1 < X + Y < 2] = \int_0^1 \int_{1-x}^{2-x} e^{-(x+y)} dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} e^{-(x+y)} dydx \Rightarrow$$
$$P[1 < X + Y < 2] = \int_0^1 e^{-x} \left[\frac{e^{-y}}{-1}\right]_{1-x}^{2-x} dx + \int_1^2 e^{-x} \left[\frac{e^{-y}}{-1}\right]_0^{2-x} dx \Rightarrow$$
$$P[1 < X + Y < 2] = \int_0^1 -e^{-x}(e^{-2+x} - e^{-1+x})dx + \int_1^2 -e^{-x}(e^{-2+x} - e^0)dx \Rightarrow$$
$$P[1 < X+Y < 2] = (e^{-1}-e^{-2})y\Big|_0^1 -e^{-x}\Big|_1^2 = e^{-1}-e^{-2}-e^{-2}+e^{-1}-2e^{-2}+e^{-2} = 2e^{-1}-3e^{-2}$$

$$\boxed{P[1 < X + Y < 2] = 2e^{-1} - 3e^{-2}}$$

(c).

$$P[X < Y|X < 2Y] = \frac{P[(X < Y) \cap (X < 2Y)]}{P[X < 2Y]}$$
$$P[X < Y|X < 2Y] = \frac{P[(X < Y)]}{P[X < 2Y]}$$

Observe na figura [3.8].

$$P[X < Y] = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-x}e^{-y}dydx = \int_0^\infty e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_x^\infty dx \Rightarrow$$
$$P[X < Y] = \int_0^\infty e^{-x}[0-(-e^{-x})]dx = \int_0^\infty e^{-2x}dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\infty = 0-\left(-\frac{e^{-2.0}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$P[X < 2Y] = \int_0^\infty \int_{\frac{x}{2}}^\infty e^{-(x+y)}dydx = \int_0^\infty e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_{\frac{x}{2}}^\infty dx \Rightarrow$$
$$\int_0^\infty e^{-x} \left[0 - (-e^{-\frac{x}{2}})\right] dx = \int_0^\infty e^{-\frac{3x}{2}} dx = \frac{2}{3}$$

$$P[X < Y|X < 2Y] = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{P[X < Y|X < 2Y] = \tfrac{3}{4}}$$

(d).

$$P[X+Y<m]=\frac{1}{2}$$
$$P[X+Y<m]=\int_0^m\int_0^{m-x}e^{-(x+y)}dydx=\int_0^m e^{-x}\left[\int_0^{m-x}e^{-y}\right]dx\Rightarrow$$
$$P[X+Y<m]=\int_0^m e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{m-x}dx=\int_0^m e^{-x}[-e^{-m+x}+e^0]dx\Rightarrow$$
$$P[X+Y<m]=\int_0^m -e^{-x}.e^{x}.e^{-m}+e^{-x}dx=\int_0^m -1.e^{-m}dx+\int_0^m e^{-x}dx$$
$$P[X+Y<m]=-e^{-m}\int_0^m dx+\int_0^m e^{-x}dx=-e^{-m}[m-0]+[-e^{-m)}+e^0]$$
$$P[X+Y<m]=-me^{-m}-e^{-m}+1$$

Como $P[X+Y<m]=\frac{1}{2}$, então,

$$-me^{-m}-e^{-m}+1=\frac{1}{2}\Rightarrow(m+1)e^{-m}=\frac{1}{2}$$

(e).

$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-x}e^{-y}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)}{e^{-y}I_{(0,\infty)}(y)}=e^{-x}I_{(0,\infty)}(x)$$

Percebe-se que, como as variáveis X e Y são independentes, a condicional de X dado Y=y, a variável Y em nada irá influenciar o resultado da condicional. Assim,

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_0^x e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^x=(-e^{-x}+1)I_{(0,\infty)}(x)$$

Portanto,

$$P[0<X<1|Y=2]=-e^{-1}+1=0,6321$$

Observe que $Y=2$ em nada influencia na condicional.

(f).

$$\rho_{X,Y}=\frac{E[XY]-E[X].E[Y]}{\sqrt{Var[X].Var[Y]}}$$

De acordo com o **Teorema 14** (MOOD, 1973, p.166) X e Y serão independentes, se e somente se, X e Y são não correlacionados, ou seja, $\rho_{X,Y}=0$. Entretanto, para mostrar que de fato acontece, segue,

$$E[XY]=\int_0^\infty\int_0^\infty xy.f_{X,Y}(x,y)dydx=\int_0^\infty\int_0^\infty xy.e^{-x}e^{-y}dydx\Rightarrow$$

$$E[XY] = \left[\int_0^\infty xe^{-x}dx\right].\left[\int_0^\infty ye^{-y}dy\right]$$

Utilizando o método de integração por partes,

$$f(y) = y \Rightarrow f'(y) = 1$$

$$g'(y) = e^{-y} \Rightarrow g(y) = -e^{-y}$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$$

$$\int_0^\infty ye^{-y}dy = f(y).g(y) - \int f'(y).g(y)dy = \left[-y.e^{y} - e^{-y}\right]_0^\infty = 1$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx = \left[-x.e^{x} - e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

Portanto,

$$E[XY] = 1$$

$$E[X] = \int_0^\infty x.f_X(x)dx = x.e^{-x}dx$$

Utilizando o método de integração por partes,

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx = \left[-x.e^{x} - e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

Então,

$$E[X] = 1$$

$$E[X] = \int_0^\infty y.f_Y(y)dy = y.e^{-y}dy$$

Utilizando o método de integração por partes,

$$f(y) = y \Rightarrow f'(y) = 1$$

$$g'(y) = e^{-y} \Rightarrow g(y) = -e^{-y}$$

$$\int_0^\infty ye^{-y}dy = f(y).g(y) - \int f'(y).g(y)dy = \left[-y.e^{y} - e^{-y}\right]_0^\infty = 1$$

Então,

$$E[Y] = 1$$

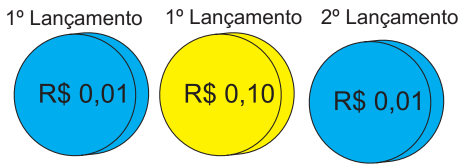
Assim,

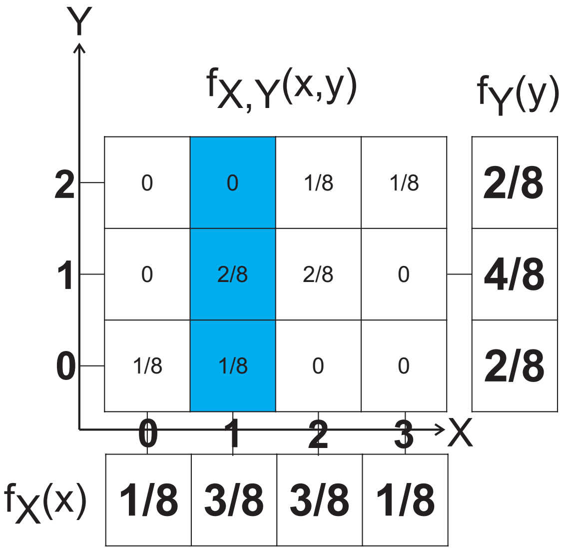
$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X].E[Y] = 1 - 1.1 = 0$$

Independente dos valores de σ_X e σ_Y, $\rho_{X,Y} = 0$

Portanto,

$$\boxed{\rho_{X,Y} = 0}$$


1º Lançamento
R$ 0,01
1º Lançamento
R$ 0,10
2º Lançamento
R$ 0,01


Y
$f_{X,Y}(x,y)$
$f_Y(y)$
2
1
0
0
0
1/8
1/8
2/8
0
2/8
2/8
0
4/8
1/8
1/8
0
0
2/8
0
1
2
3
X
$f_X(x)$
1/8
3/8
3/8
1/8

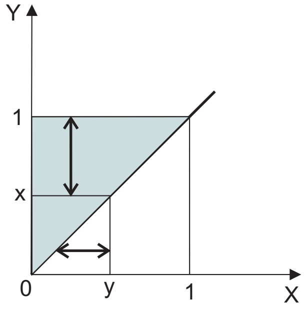


Figura 3.1: Limites de integração da função.

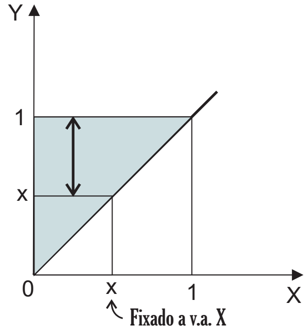
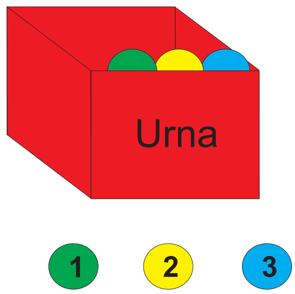


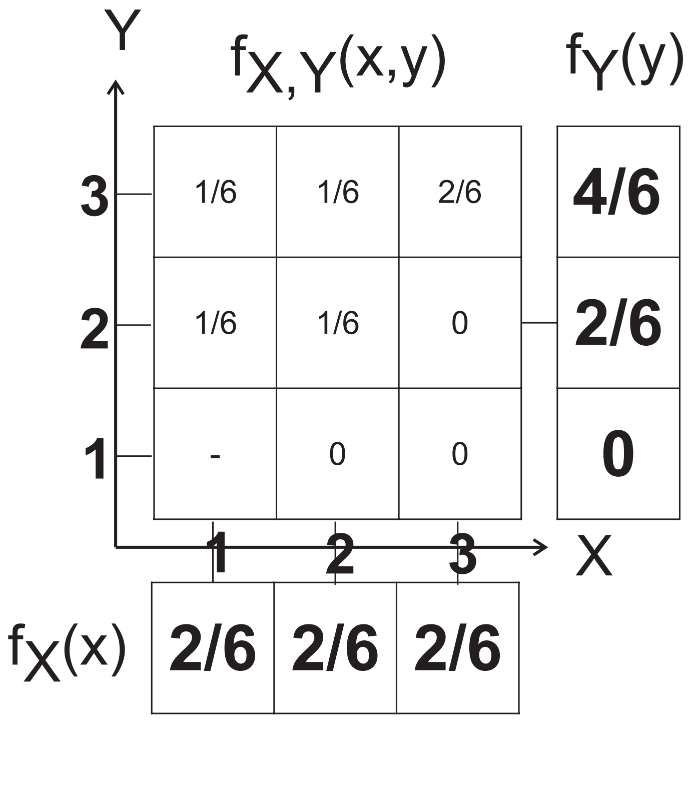
Figura 3.2: Limites de integração da função condicional.



$$\Omega = \{(1\ 2)\ (1\ 3)\ (2\ 1)\ (2\ 3)\ (3\ 1)\ (3\ 2)\}$$

	X	Y	P[.]
(1 2)	1	2	1/6
(1 3)	1	3	1/6
(2 1)	2	2	1/6
(2 3)	2	3	1/6
(3 1)	3	3	1/6
(3 2)	3	3	1/6

Figura 3.3: Eventos possíveis com suas probabilidades.


Y
$f_{X,Y}(x,y)$
$f_Y(y)$
3
2
1
1/6
1/6
2/6
1/6
1/6
0
-
0
0
4/6
2/6
0
1
2
3
X
$f_X(x)$
2/6
2/6
2/6

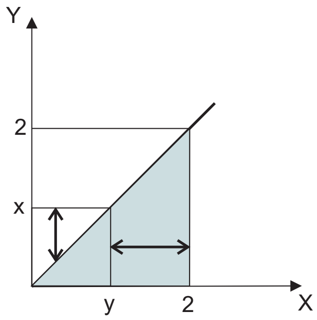
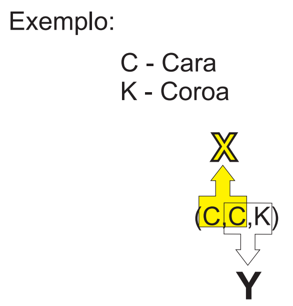
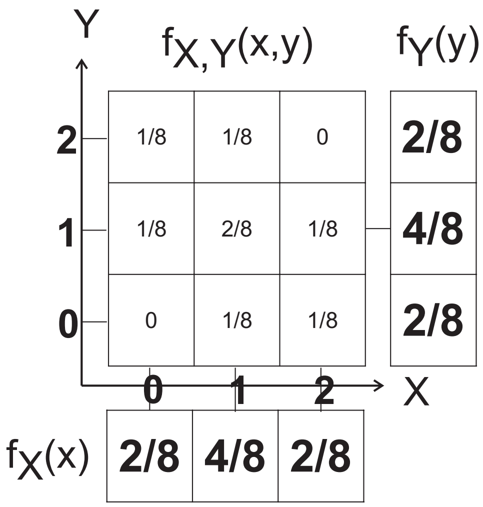
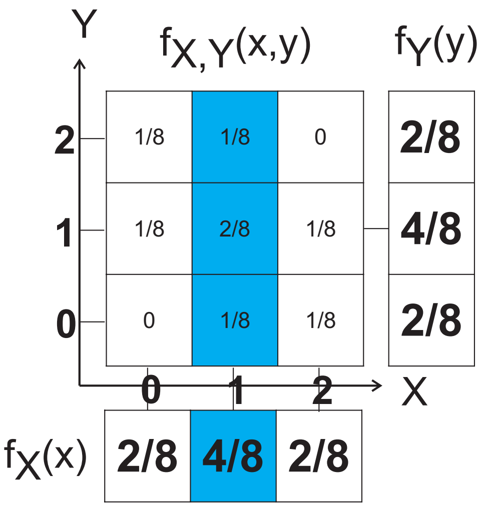


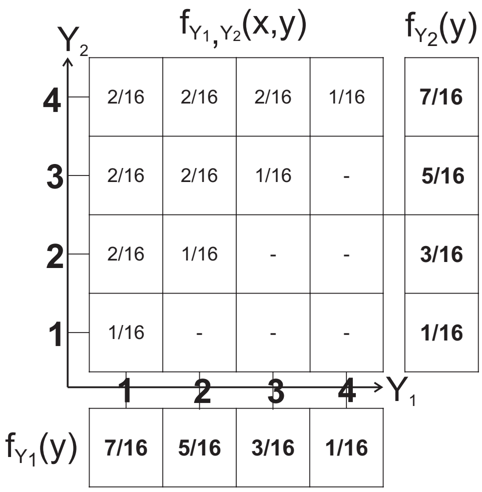
Figura 3.5: Limites de integração da função.

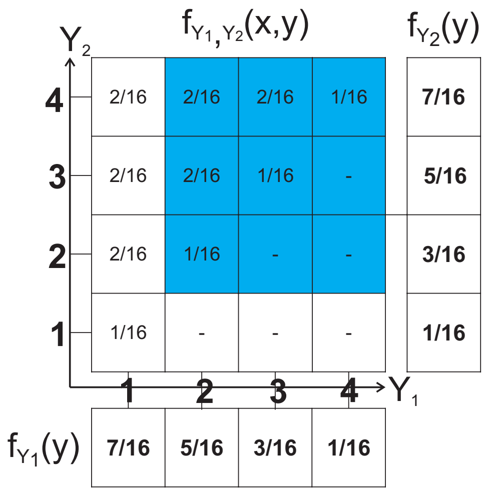

Exemplo:
C - Cara
K - Coroa
X
(C,C,K)
Y


Y
fX,Y(x,y)
fY(y)
2
1
0
1/8 1/8 0
1/8 2/8 1/8
0 1/8 1/8
2/8
4/8
2/8
0 1 2
X
fX(x)
2/8 4/8 2/8

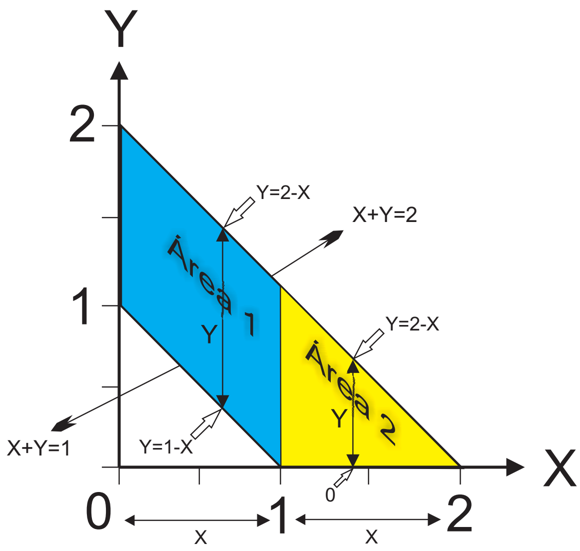


Y
fX,Y(x,y)
fY(y)
2
1
0
1/8
1/8
0
1/8
2/8
1/8
0
1/8
1/8
2/8
4/8
2/8
0
1
2
X
fX(x)
2/8
4/8
2/8


$f_{Y_1,Y_2}(x,y)$
$f_{Y_2}(y)$
Y_2
4
2/16 2/16 2/16 1/16
7/16
3
2/16 2/16 1/16 -
5/16
2
2/16 1/16 - -
3/16
1
1/16 - - -
1/16
1 2 3 4
Y_1
$f_{Y_1}(y)$
7/16 5/16 3/16 1/16



$f_{Y_1,Y_2}(x,y)$
$f_{Y_2}(y)$
Y_2
4
3
2
1
2/16 2/16 2/16 1/16
2/16 2/16 1/16 -
2/16 1/16 - -
1/16 - - -
7/16
5/16
3/16
1/16
1 2 3 4
Y_1
$f_{Y_1}(y)$
7/16 5/16 3/16 1/16


Y
2
1
0
1
2
X
Y=2-X
X+Y=2
Área 1
Y
Y=2-X
Área 2
Y
X+Y=1
Y=1-X
0
x
x

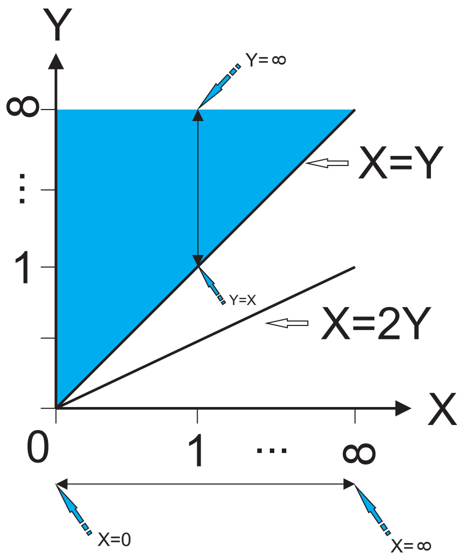


Figura 3.6: $P[X < Y]$

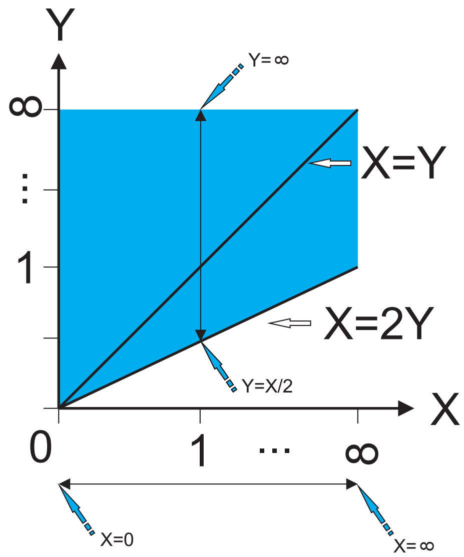


Figura 3.7: $P[X < 2Y]$

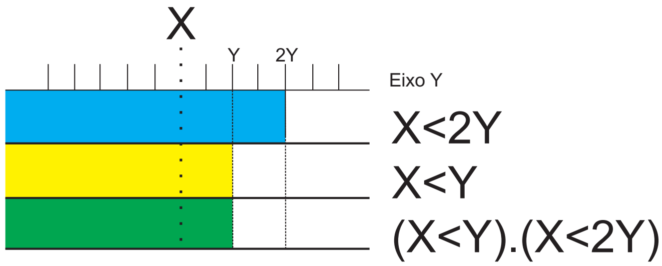


Figura 3.8: $P[(X < Y) \cap (X < 2Y)]$.

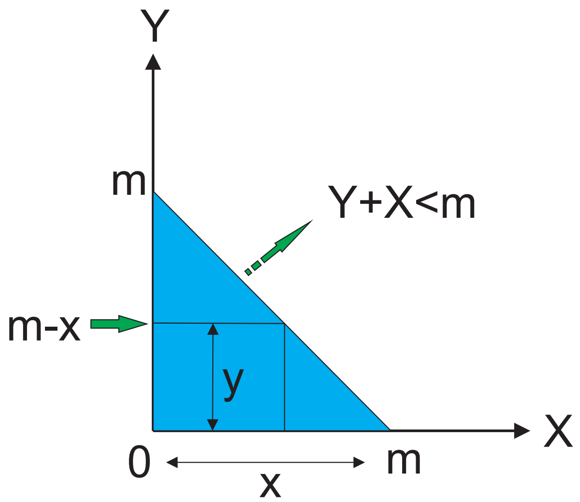


Figura 3.9: Limites de integração.

Capítulo 4

Distribuições de funções de variáveis aleatórias

1. (MOOD, 1973. Questão 1. p. 212). Quesito:

   (a) Seja X_1, X_2 e X_3 variáveis são não correlacionadas com variância σ^2 comum. Encontre o coeficiente entre $X_1 + X_2$ e $X_2 + X_3$.

   (b) seja X_1 e X_2 variáveis aleatórias não correlacionadas. Encontre o coeficiente de correlação entre $X_1 + X_2$ e $X_2 - X_1$ em termos de $Var[X_1]$ e $Var[X_2]$.

   (c) Seja X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independente distribuídas com média comum μ e variância comum σ^2. Encontre o coeficiente de correlação entre $X_2 - X_1$ e $X_3 - X_1$.

   Desenvolvendo:
   (a).
   Seja,

$$Z = X_1 + X_2$$

$$Y = X_2 + X_3$$

Para desenvolver o coeficiente de correlação:

$$\rho_{Z,Y} = \frac{Cov[Z, Y]}{\sigma_Z \sigma_Y}$$

$cov[Z, Y] = E[ZY] - E[Z].E[Y]$
$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_Z^2}$
$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2}$
Assim,
$cov[Z, Y] = E[ZY] - E[Z].E[Y] = E[(X_1 + X_2).(X_2 + X_3)] - E[(X_1 + X_2)].E[(X_2 + X_3)] = E[X_1.X_2 + X_1.X_3 + X_2.X_2 + X_2.X_3] - [E[X_1] + E[X_2]].[E[X_2] + E[X_3]] =$

$E[X_1X_2]+E[X_1X_3]+E[X_2X_2]+E[X_2X_3]-E[X_1]E[X_2]-E[X_1].E[X_3]-E[X_2].E[X_2]-E[X_2].E[X_3] = \underbrace{E[X_1X_2]-E[X_1].E[X_2]}_{Cov[X_1,X_2]} + \underbrace{E[X_1X_3]-E[X_1].E[X_3]}_{Cov[X_1,X_3]} + \underbrace{E[X_2X_3]-E[X_2].E[X_3]}_{Cov[X_2,X_3]} + \underbrace{E[X_2X_2]-E[X_2].E[X_2]}_{Cov[X_2,X_2=Var[X_2]} + \Rightarrow cov[Z,Y] = Var[X] = \sigma^2$

Observe que como as variáveis são não correlacionadas, implica que $Cov[X_1, X_2] = Cov[X_1, X_3] = Cov[X_2, X_3] = 0$, e que $Var[X_2] = Var[X] = \sigma^2$, pois as variâncias das variáveis são em comum, ou seja, $Var[X_1] = Var[X_2] = Var[X_3] = \sigma^2$.

$$\sigma_Z = \sqrt{Var[Z]} = \sqrt{Var[X_1 + X_2]}$$

$Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2] = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \times 0 = 2\sigma^2$

$$\sigma_Z = \sqrt{2\sigma^2}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var[Y]} = \sqrt{Var[X_2 + X_3]}$$

$Var[X_2 + X_3] = Var[X_2] + Var[X_3] + 2Cov[X_2, X_3] = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \times 0 = 2\sigma^2$

$$\sigma_Y = \sqrt{2\sigma^2}$$

Portanto,

$$\rho_{Z,Y} = \frac{Cov[Z,Y]}{\sigma_Z \sigma_Y} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2} \times \sqrt{2\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\rho_{Z,Y} = \tfrac{1}{2}}$$

(b).
Seja,

$$W = X_1 + X_2$$

$$V = X_2 - X_1$$

Para desenvolver o coeficiente de correlação:

$$\rho_{W,V} = \frac{Cov[W,V]}{\sigma_W \sigma_V}$$

$cov[W, V] = E[WV] - E[W].E[V]$
$\sigma_W = \sqrt{\sigma_W^2}$
$\sigma_V = \sqrt{\sigma_V^2}$
Assim,

$cov[W,V] = E[WV]-E[W].E[V] = E[(X_1+X_2).(X_2-X_1)]-E[(X_1+X_2)].E[(X_2-X_1)] = E[X_1.X_2 - X_1.X_1 + X_2.X_2 - X_2.X_1] - [E[X_1]+E[X_2]].[E[X_2]-E[X_1]] = E[X_1X_2]-E[X_1X_1]+E[X_2X_2]-E[X_1X_2]-[E[X_1]E[X_2]-E[X_1].E[X_1]+E[X_2].E[X_2]-E[X_2].E[X_1]] = -E[X_1X_1]+E[X_2X_2]-[-E[X_1].E[X_1]+E[X_2].E[X_2]] = E[X_2^2]-[E[X_2]]^2 - [E[X_1]^2 - [E[X_1]]^2] = Var[X_2] - Var[X_1]$ As variâncias,

$$\sigma_W = \sqrt{Var[X_1+X_2]} = \sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]+2Cov[X_1,X_2]} \Rightarrow$$

$$\sigma_W = \sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]+2.0} = \sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]}$$

$$\sigma_V = \sqrt{Var[X_2-X_1]} = \sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]-2Cov[X_1,X_2]} \Rightarrow$$

$$\sigma_V = \sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]-2.0} = \sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]}$$

Observe que como as variáveis são não correlacionadas, implica que $Cov[X_1,X_2] = Cov[X_1,X_3] = Cov[X_2,X_3] = 0$, portanto,

$$\rho_{W,V} = \frac{Var[X_2]-Var[X_1]}{\sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]} \times \sqrt{Var[X_1]+Var[X_2]}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho_{W,V} = \frac{Var[X_2]-Var[X_1]}{Var[X_1]+Var[X_2]}}$$

(c).

$$Z = X_2 - X_1$$

$$Y = X_3 - X_1$$

$$\rho_{Z,Y} = \frac{Cov[Z,Y]}{\sigma_Z\sigma_Y}$$

$cov[Z,Y] = E[ZY]-E[Z].E[Y]$
$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_Z^2}$
$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2}$
Assim,
$cov[Z,Y] = E[ZY]-E[Z].E[Y] = E[(X_2-X_1).(X_3-X_1)]-E[(X_2-X_1)].E[(X_3-X_1)] = E[X_2X_3 - X_2X_1 - X_1X_3 + X_1X_1] - [E[X_2]-E[X_1]].[E[X_3]-E[X_1]] = E[X_2X_3]-E[X_2X_1]-E[X_1X_3]+E[X_1^2]-E[X_2].E[X_3]+E[X_2].E[X_1]+E[X_1].E[X_3]-[E[X_1]]^2 = E[X_2X_3]-E[X_2].E[X_3]-[E[X_2X_1]-E[X_2].E[X_1]]-[E[X_1X_3]-E[X_1].E[X_3]]+E[X_1^2]-[E[X_1]]^2 = Cov[X_2,X_3]-Cov[X_2,X_1]-Cov[X_1,X_3]+Var[X_1] = 0-0-0+Var[X_1]$

Observe que como as variáveis são não correlacionadas, implica que $Cov[X_1, X_2] = Cov[X_1, X_3] = Cov[X_2, X_3] = 0$, e que $Var[X_1] = Var[X] = \sigma^2$, pois as variâncias das variáveis são em comum, ou seja, $Var[X_1] = Var[X_2] = Var[X_3] = \sigma^2$.

$$\sigma_Z = \sqrt{Var[Z]} = \sqrt{Var[X_2 - X_1]}$$

$$Var[X_2 - X_1] = Var[X_1] + Var[X_2] - 2Cov[X_1, X_2] = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \times 0 = 2\sigma^2$$

$$\sigma_Z = \sqrt{2\sigma^2}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var[Y]} = \sqrt{Var[X_3 - X_1]}$$

$$Var[X_3 - X_1] = Var[X_3] + Var[X_1] - 2Cov[X_3, X_1] = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \times 0 = 2\sigma^2$$

$$\sigma_Y = \sqrt{2\sigma^2}$$

Portanto,

$$\rho_{Z,Y} = \frac{Cov[Z,Y]}{\sigma_Z \sigma_Y} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2} \times \sqrt{2\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

2. (MOOD, 1973. Questão 7. p. 213). A área do retângulo é obtido primeiro medindo o comprimento e largura e posteriormente, multiplicando as duas medidas juntas. Seja X a medida do comprimento, Y a medida da largura. Assuma que as medidas X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta dada por $f_{X,Y}(x, y) = kI_{[0,9L;1,1L]}(x)I_{[0,8W;1,2W]}(y)$, onde L e W são parâmetros que satisfazem $L \geq W \geq 0$ e k é uma constante que pode depender de L e W.

   (a) Encontre $E[XY]$ e $Var[XY]$.

   (b) Encontre a distribuição de XY.

   Desenvolvendo:
   (a).

   Calculando k:

   $$\text{Área}= (1,2W - 0,8W) \times (1,1L - 0,9L) \times k = 1 \Rightarrow k = \tfrac{1}{0,08L.W}$$

   Inicialmente, verifica-se se X e Y são independentes,

   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} kI_{[0,9L;1,1L]}(x)I_{[0,8W;1,2W]}(y)dy \Rightarrow$$

   $$f_X(x) = \int_{0,8W}^{1,2W} kI_{[0,9L;1,1L]}(x)dy = [ky]_{0,8W}^{1,2W} I_{[0,9L;1,1L]}(x) = k(1,2W-0,8W)I_{[0,9L;1,1L]}(x) \Rightarrow$$

$$f_X(x) = k \times 0,4W I_{[0,9L;1,1L]}(x) = \frac{1}{0,08L.W} \times 0,4W I_{[0,9L;1,1L]}(x) = \frac{5}{L} I_{[0,9L;1,1L]}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) I_{[0,8W;1,2W]}(y) dx = \int_{0,9W}^{1,1W} k I_{[0,8W;1,2W]}(y) dx \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = [kx]_{0,9L}^{1,1L} I_{[0,8W;1,2W]}(y) = k(1,1L - 0,9L) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = k \times 0,2L I_{[0,8W;1,2W]}(y) = \frac{1}{0,08L.W} \times 0,2L I_{[0,8W;1,2W]}(y) = \frac{2,5}{W} I_{[0,8W;1,2W]}(y)$$

A densidade conjunta,

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{0,08L.W} I_{[0,9L;1,1L]}(x) I_{[0,8W;1,2W]}(y) \Rightarrow$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{12,5}{L.W} I_{[0,9L;1,1L]}(x) I_{[0,8W;1,2W]}(y)$$

E o produto das marginais,

$$f_X(x).f_Y(y) = \frac{5}{L} \times \frac{2,5}{W} I_{[0,9L;1,1L]}(x) I_{[0,8W;1,2W]}(y) = \frac{12,5}{L.W} I_{[0,9L;1,1L]}(x) I_{[0,8W;1,2W]}(y)$$

Assim,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Portanto, X e Y são independentes, então, $E[X,Y] = E[X] \times E[Y]$. Assim,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x) dx = \int_{0,9L}^{1,1L} x \times \frac{5}{L} dx = \left[\frac{5x^2}{2L}\right]_{0,9L}^{1,1L} = 3,025L - 2,025L = 1L$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_Y(y) dy = \int_{0,8W}^{1,2W} y \times \frac{2,5}{W} dy = \frac{2,5}{W} \times [(1,2W)^2 - (0,8W)^2] = 1W$$

Assim,

$$\boxed{E[XY] = 1L \times 1W = 1LW}$$

A variância de X e Y como estes são independentes,

$$Var[XY] = \mu_Y^2 Var[X] + \mu_X^2 Var[Y] + Var[X].Var[Y]$$

Assim,

$$Var[X] = E[X^2] - [E[X]]^2$$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)dx = \int_{0,9L}^{1,1L} x^2 \times \frac{5}{L}dx = \left[\frac{5xs}{3L}\right]_{0,9L}^{1,1L} = 1,003L^2$
$E[X] = L$

$$Var[X] = 1,003L^2 - (L)^2 = 0,003L^2$$

e

$$Var[Y] = E[Y^2] - [E[Y]]^2$$

$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \times f_Y(y)dy = \int_{0,8W}^{1,2W} y^2 \times \frac{2,5}{W}dy = \left[\frac{y^3}{3} \times \frac{2,5}{W}\right]_{0,8W}^{1,2W} = 1,013W^2$
$E[Y] = 1,013W^2 - W^2 = 0,013W^2$

$$Var[Y] = 1,013W^2 - W^2 = 0,013W^2$$

Portanto,

$$Var[XY] = 1W^2 \times 0,003L^2 + 1L^2 \times 0,013WL^2 + 0,003L^2 \times 0,013W^2 \Rightarrow$$

$$Var[XY] = 0,003W^2L^2 + 0,013W^2L^2 + 0,00004L^2W^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{Var[XY] = 0,01604W^2L^2}$$

(b).

Sendo $Z = XY$, tem-se que:

$$Y = \frac{Z}{X} \Rightarrow Y' = \frac{1}{X}$$

Assim, pelo **teorema 8** (MOOD, 1973, p. 187),

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} \times f_{XY}(x, \frac{z}{x})dx$$

tendo,

$$f_{X,Y}(x, y) = kI_{[0,9L;1,1L]}(x)I_{[0,8W;1,2W]}(y)$$

logo,

$$f_{X,\frac{Z}{X}}(x, y) = kI_{[0,9L;1,1L]}(x)I_{[0,8W;1,2W]}(\frac{z}{x})$$

então,

$$0,8W < \frac{z}{x} < 1,2W \Rightarrow 0,8WX < Z < 1,2WX$$

Daí,

$$f_{X,\frac{Z}{X}}(x, \frac{z}{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} k \times \Big[I_{(0,9L;\frac{z}{0,8W})}(x) \times I_{(0,72WL;0,88WL)}(z) + \ldots$$

$$\ldots + I_{(0,9L;1,1L)}(x) \times I_{(0,88WL;1,08WL)}(z) + I_{(\frac{z}{1,2W};1,1L)}(x) \times I_{(1,08WL;1,32WL)}(z)\Big]\, dx$$

Portanto,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} k \times \Big[I_{(0,9L;\frac{Z}{0,8W})}(x) \times I_{(0,72WL;0,88WL)}(z) + \ldots$$

$$\ldots + I_{(0,9L;1,1L)}(x) \times I_{(0,88WL;1,08WL)}(z) + I_{(\frac{z}{1,2W};1,1L)}(x) \times I_{(1,08WL;1,32WL)}(z)\Big]\, dx$$

$$f_Z(z) = k \times \left[I_{(0,72WL;0,88WL)}(z) \int_{0,9L}^{z/0,8W} \frac{1}{x} dx + I_{(0,88WL;1,08WL)}(z) \int_{0,9L}^{1,1L} \frac{1}{x} dx + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + I_{(1,08WL;1,32WL)}(z) \int_{Z/1,2W}^{1,1L} \frac{1}{x} dx \right] \Rightarrow$$

$$f_Z(z) = k \times \left[\left(ln\left(\frac{z}{0,8w}\right) - ln(0,9L) \right) I_{(0,72WL;0,88WL)}(z) + \ldots \right.$$

$$\ldots + (ln(1,1L) - ln(0,9L)) I_{(0,88WL;1,08WL)}(z) + \ldots$$

$$\left. \ldots + \left(ln(1,1L) - ln\left(\frac{z}{1,2w}\right)\right) I_{(1,08WL;1,32WL)}(z) \right] \Rightarrow$$

$$f_Z(z) = k \times \left[ln\left(\frac{z/0,8W}{0,9L}\right) I_{(0,72WL;0,88WL)}(z) + ln\left(\frac{1,1L}{0,9L}\right) I_{(0,88WL;1,08WL)}(z) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + ln\left(\frac{1,1L}{Z/1,2W}\right) I_{(1,08WL;1,32WL)}(z) \right]$$

Sendo, $k = \frac{1}{0,08LW}$, então,

$$f_Z(z) = \frac{1}{0,08LW} \times \left[ln\left(\frac{Z}{0,72WL}\right) I_{(0,72WL;0,88WL)}(z) + ln\left(\frac{1,1}{0,9}\right) I_{(0,88WL;1,08WL)}(z) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + ln\left(\frac{1,32WL}{Z}\right) I_{(1,08WL;1,32WL)}(z) \right]$$

3. (MOOD, 1973. Questão 9. p. 213). Projéteis são disparados de um sistema de coordenada xy. Suponha que o ponto seja "hit", digamos (X,Y), consiste em um par de variáveis aleatórias inpendentes com normal padrão. Por dois projéteis disparados independentemente um do outro, seja (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) representam os pontos que são atingidos e seja Z a distância entre os pontos. Encontre a distribuição de Z^2. Sugestão: Qual é a distribuição $(X_2 - X_1)^2$? $(Y_2 - Y_1)^2$? $(X_2 - X_1)^2$ é independente de $(Y_2 - Y_1)^2$?

Desenvolvendo:
1º Método de resolução:

$$Z^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

Seja,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi \times \sigma_{x_1} \times \sigma_{x_2}} e^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}}\right)^2\right]} I_{(-\infty,+\infty)}(x_1) I_{(-\infty,+\infty)}(x_2)$$

como, $\mu_{x_1} = \mu_{x_2} = 0$ e $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 1$, então,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} I_{(-\infty,+\infty)}(x_1) I_{(-\infty,+\infty)}(x_2)$$

Sendo $X = (X_2 - X_1)^2$, então,

$$M_X(t) = E\left[e^{t.X}\right] = E\left[e^{(X_2-X_1)^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(X_2-X_1)^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+(x_2-x_1)^2 t} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)t} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x_2^2 t - \frac{x_2^2}{2}} e^{-2x_1x_2 + x_1^2 t - \frac{x_1^2}{2}} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2(1/2-t)} e^{-(x_1[1/2-t])+2x_1x_2t} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2(1/2-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1[1/2-t])+2x_1x_2t} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2(1/2-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[x_1^2+\frac{2x_1x_2}{1/2-t}\right]} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2(1/2-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[x_1^2+\frac{2x_1x_2}{1/2-t}+\frac{x_2^2 t}{(1/2-t)^2}-\frac{x_2^2t^2}{(1/2-t)^2}\right]} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2(1/2-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2-\frac{x_2^2t^2}{(1/2-t)^2}\right]} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2(1/2-t)+(1/2-t)\frac{x_2^2t^2}{(1/2-t)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2\right]} dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[(1/2-t)-\frac{(1/2-t)t^2}{(1/2-t)^2}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2\right]}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[(1/2-t)-\frac{t^2}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2\right]}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{(1/2-t)^2-t^2}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2\right]}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t+t^2-t^2}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2\right]}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2\right]}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2t)\left[\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2\right]}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\times(1-2t)\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}\right)^2}{(1-2t)}}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}}{\sqrt{(1-2t)}}\right)^2}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{\sqrt{(1-2t)}}{\sqrt{(1-2t)}}\times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}}{\sqrt{(1-2t)}}\right)^2}dx_1dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{(1-2t)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\times e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}\times\ldots$$

$$\ldots\times\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{1/\sqrt{(1-2t)}}\times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\frac{x_2^2}{(1/2-t)^2}}{1/\sqrt{(1-2t)}}\right)^2}dx_1}_{1}dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{(1-2t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1/4-t}{(1/2-t)}\right]}dx_2 \Rightarrow$$

Observe que $\frac{1/4-t}{(1/2-t)} = \frac{4(1/4-t)}{\frac{1-2t}{2}} = \frac{1-4t}{\frac{1-2t}{2}}$, então,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1-4t}{\frac{1-2t}{2}}\right]} dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1}{2}\times\frac{1-4t}{1-2t}\right]} dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1-2t}{1-4t}}\right]} dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[-\frac{1}{2}\times\frac{x_2^2}{\frac{1-2t}{1-4t}}\right]} dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_2-0}{\sqrt{\frac{1-2t}{1-4t}}}\right]^2} dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{\frac{1-2t}{1-4t}}}{\sqrt{\frac{1-2t}{1-4t}}} \times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_2-0}{\sqrt{\frac{1-2t}{1-4t}}}\right]^2} dx_2 \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \frac{\sqrt{\frac{1-2t}{1-4t}}}{\sqrt{(1-2t)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1-2t}{1-4t}}} \times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_2-0}{\sqrt{\frac{1-2t}{1-4t}}}\right]^2} dx_2 \Rightarrow}_{1}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \times \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{1-4t}} = \frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \left(\frac{1}{1-4t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

De acordo com Mood (1973, p. 541), a função geradora de momentos da função gama,

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

sendo λ e r parâmetros da distribuição. Portanto,

$$M_X(t) = \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a distribuição de $(X_2 - X_1)^2$ é uma distribuição gama com parâmetros $\lambda = \frac{1}{4}$ e $r = \frac{1}{2}$, ou seja, $(X_2 - X_1)^2 \sim Gama\left(r = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{4}\right)$.

Analogamente, $(Y_2 - Y_1)^2 \sim Gama\left(r = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{4}\right)$. Sendo X e Y independentes, então,

$$M_{Z^2}t = E[e^{Z^2t}] = E[e^{[(X_2-X_2)^2+(Y_2-Y_2)^2]t}] = E[e^{[(X_2-X_2)^2]t}].E[e^{[(X_2-X_2)^2]t}] \Rightarrow$$

$$M_{Z^2}t = \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-t}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-t}\right)^{1}$$

Potanto, a distribuição de Z^2 é uma distribuição gama com parâmetros $\lambda = \frac{1}{4}$ e $r = 1$, entrando numa classe de distribuiçao específica dentro da distribuição gama, chamada de **distribuição exponencial**, assim, $Z^2 \sim exp\left(\lambda = \frac{1}{4}\right)$.

2º método de resolução:

Seja,

$$X_i \sim N(0,1)$$

com, $= i = 1, 2$, e,

$$Y_j \sim N(0,1)$$

com, $= j = 1, 2$, sendo X e Y $v.a.$'s independentes. Deseja-se encontrar a distribuição $Z^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$. Seja,

$$U_1 = (X_2 - X_1)$$

$$U_2 = (X_2 + X_1)$$

utilizando o método jacobiano,

$$f_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = |J| f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\left(g_1^{-1}(u_1, u_2), g_2^{-1}(u_1, u_2)\right)$$

Fazendo a inversa de U_1 e U_2,

$$g_1^{-1}(u_1, u_2) = X_1 = \frac{U_2 - U_1}{2}$$

$$g_2^{-1}(u_1, u_2) = X_2 = \frac{U_2 + U_1}{2}$$

$$J = det\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dU_1} & \frac{dx_1}{dU_2} \\ \frac{dx_2}{dU_1} & \frac{dx_1}{dU_2} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$f_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = \left|\frac{1}{2}\right| \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_2+u_1}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$f_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = \left|\frac{1}{2}\right| \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(u_2-u_1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{4}(u_2-u_1)^2} \Rightarrow$$

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=\left|\frac{1}{2}\right|\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\left(u_1^2-2u_1u_2+u_2^2\right)}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(u_1^2+2u_1u_2+u_2^2\right)}\Rightarrow$$

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=\left|\frac{1}{2}\right|\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\left[(u_1^2-2u_1u_2+u_2^2)+(u_1^2+2u_1u_2+u_2^2)\right]}\Rightarrow$$

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=\left|\frac{1}{2}\right|\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\left[2u_1^2+2u_2^2\right]}\Rightarrow$$

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=\left|\frac{1}{2}\right|\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left[u_1^2+u_2^2\right]}\Rightarrow$$

Como o que interessa é a marginal $f_{U_1}(u_1)$, então,

$$f_{U_1}(u_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left[u_1^2+u_2^2\right]}du_2\Rightarrow$$

$$f_{U_1}(u_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_1^2}{2}\right]}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_2^2}{2}\right]}du_2\Rightarrow$$

$$f_{U_1}(u_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_2-0}{\sqrt{2}}\right]^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_2-0}{\sqrt{2}}\right]^2}du_2}_{1}\Rightarrow$$

$$f_{U_1}(u_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_2-0}{\sqrt{2}}\right]^2}$$

Seja $R=U_1^2$, e que,

$$g^{-1}(r)=\pm\sqrt{r}$$

$$J=\left(g^{-1}(r)\right)'=\pm\frac{1}{2\sqrt{r}}$$

Pelo método jacobiano,

$$f_R(r)=|J|f_{U_1}(g^{-1}(r))\Rightarrow$$

$$f_R(r)=\underbrace{2}_{Alerta}\times\frac{1}{2\sqrt{r}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right)^2}\Rightarrow$$

Alerta!
Observe a função: Se deseja calcular a área de $f_{U_1}(u_1)$ em $I_{-\infty,\infty}(u_1)$ em que o domínio de X é simétrico, então basta calcular a área de $f_{U_1}(u_1)$ no domínio de $I_{0,\infty}(u_1)$ multiplicado por 2.

$$f_R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right)^2}\Rightarrow$$

$$f_R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right)^2}\Rightarrow$$

$$f_R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow$$

Observe que $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, e que $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} = r^{-\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}-1}$, e $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f_R(r) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times r^{\frac{1}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}\times\frac{r}{2}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{f_R(r) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times r^{\frac{1}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{4}\times r}}_{Gama\left(r=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{4}\right)}$$

Analogamente, para $W = (Y_2 - Y_1)^2$, a distribuição será, $Gama\left(r = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{4}\right)$. Porém, deseja-se saber a distribuição $Z^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$. Sabe-se que a soma de duas *v.a.*'s com distribuição gama será outra *v.a.*'s com distribuição, desde que λ sejam iguais, somando-se apenas o parâmetro r. Assim,

$$Z^2 = \underbrace{\underbrace{(X_2 - X_1)^2}_{Gama\left(r=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{4}\right)} + \underbrace{(Y_2 - Y_1)^2}_{Gama\left(r=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{4}\right)}}_{Gama\left(r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\lambda=\frac{1}{4}\right)}$$

Portanto, $Z^2 \sim Gama\left(r = 1, \lambda = \frac{1}{4}\right)$, e que será um caso específico,

$$\boxed{Z^2 \sim exp\left(\lambda = \frac{1}{4}\right)}$$

4. (MOOD, 1973. Questão 14. p. 214). Seja X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuiçao normal padrão. Encontre a função geradora de momentos de XY.

   Desenvolvendo:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{txy}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dxdy \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+txy}dxdy \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-2txy\right)}dxdy \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2txy+(ty)^2-(ty)^2+y^2\right)}dxdy \Rightarrow$$

Sabe-se que $x^2 - 2txy + (ty)^2 = (x - ty)^2$, assim,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left((x-ty)^2-(ty)^2+y^2\right)}dxdy \Rightarrow$$

Sabe-se que $-(ty)^2 + y^2 = y^2(1-t^2)$, assim,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-ty)^2+y^2(1-t^2)\right)} dxdy \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-ty)^2\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2(1-t^2)\right)} dxdy \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-ty)^2\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2(1-t^2)\right)} dxdy \Rightarrow$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-ty)^2\right)} dx\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2(1-t^2)\right)} dy \Rightarrow$$

Temos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-ty)^2\right)}$ é uma integral de uma normal padrão com media $\mu = ty$ e variância $\sigma^2 = 1$, observe,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-ty)^2}{1^2}\right)} dx = 1$$

então,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2(1-t^2)\right)} dy \Rightarrow$$

Sendo, $y^2(1-t^2) = \frac{y^2}{\frac{1}{(1-t^2)}} = \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}}\right)^2 = \left(\frac{y-0}{\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}}\right)^2$, então,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-0}{\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}}\right)^2} dy \tag{4.1}$$

Para que eq.[4.1] seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = 1$$

temos,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-0}{\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}}\right)^2} dy$$

Observe que agora,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-0}{\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}}\right)^2} dy = 1$$

Assim,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}} = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^2$$

Portanto,

$$\boxed{M_X(t) = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^2}$$

5. (MAGALHÃES, 2006. Exemplo 5.24. p. 272). Sendo $X \sim N(0,1)$, determine a função geradora de momentos de $Y = X^2$.

Desenvolvendo:

$$M_Y(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2(1-2t)} dx \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{\frac{1}{(1-2t)}}} dx \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{(1-2t)}}}\right)^2} dx \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}}} e^{\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{(1-2t)}}}\right)^2} dx \Rightarrow}_{1}$$

$$\boxed{M_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

6. (MOOD, 1973. Questão 15. p. 214). Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma tendo distribuição normal padrão.

   (a) Encontre a distribuição conjunta de $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ e $(X_2 - X_1)/\sqrt{2}$.

Desenvolvendo:
Se X_1 e X_2 são independentes com distribuição normal padrão, a distribuição conjunta será:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

Seja,

$$W = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$$

$$X_1 + X_2 = \sqrt{2} \times W \tag{4.2}$$

$$X_2 - X_1 = \sqrt{2} \times V \Rightarrow X_2 = X_1 + V\sqrt{2} \tag{4.3}$$

Substituindo eq.[4.3] em eq.[4.2],

$X_1 + X_2 = \sqrt{2} \times W \Rightarrow X_1 + (X_1 + V\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times W \Rightarrow 2X_1 + V\sqrt{2} = \sqrt{2} \times W \Rightarrow 2X_1 = W\sqrt{2} - V\sqrt{2} \Rightarrow X_1 = \frac{W\sqrt{2} - V\sqrt{2}}{2} \Rightarrow X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(W - V)$

$$X_1 = g_1^{-1}(w, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(W - V) \tag{4.4}$$

Substituindo eq.[4.4] em eq.[4.2],

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(W - V)\right] + X_2 = \sqrt{2} \times W \Rightarrow X_2 = \sqrt{2} \times W - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(W - V)\right] \Rightarrow X_2 = \sqrt{2} \times W - \frac{\sqrt{2}}{2}W + \frac{\sqrt{2}}{2}V \Rightarrow X_2 = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)W + \frac{\sqrt{2}}{2}V \Rightarrow X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}W + \frac{\sqrt{2}}{2}V \Rightarrow X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(W + V)$

$$X_2 = g_2^{-1}(w, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(W + V) \tag{4.5}$$

Utilizando o método Jacobiano,

$$J = det \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dW} & \frac{dx_1}{dV} \\ \frac{dx_2}{dW} & \frac{dx_1}{dV} \end{bmatrix}$$

$$f_{W,V}(w, v) = |J| \times f_{X_1,X_2}(g_1^{-1}(w, v), g_2^{-1}(w, v))$$

Assim,

$$J = det \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dW} & \frac{dx_1}{dV} \\ \frac{dx_2}{dW} & \frac{dx_1}{dV} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = 1$$

$$f_{W,V}(w, v) = |1| \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(w-v)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(w+v)\right)^2\right]} \Rightarrow$$

$$f_{W,V}(w, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{4}(w-v)^2\right) + \left(\frac{2}{4}(w+v)^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$f_{W,V}(w, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{4}\left(w^2 - 2wv + v^2 + w^2 + 2wv + v^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$f_{W,V}(w,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{4}\left(w^2+v^2+w^2+v^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$f_{W,V}(w,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{4}\left(2w^2+2v^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$f_{W,V}(w,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[w^2+v^2\right]} \Rightarrow$$

$$\boxed{f_{W,V}(w,v) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[w^2\right]} \times \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[v^2\right]}}$$

7. (MOOD, 1973. Questão 20. p. 215):

   (a) Se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição gama, qual é a distribuição de $X_1 + \ldots + X_n$?

   (b) Se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição gama, e se X_i tem parâmetro r_i e λ, $i = 1, \ldots, n$, qual é a distribuição de $X_1 + \ldots + X_n$?

   Desenvolvendo:
   (a).
   1º Método de resolução:

   Seja $Y = \sum X$, sendo $X_i \sim Gama(x; r, \lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, e que a função geradora de momentos,

$$M_Y(t) = E[e^{Yt}] = \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r}$$

   Dessa forma,

$$M_Y(t) = E[e^{Yt}] = E[e^{\sum_{i=1}^n X_i t}] = E[e^{(X_1+\ldots+X_n)t}] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{t.X_i}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[e^{t.X_i}\right] \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = E\left[\prod_{i=1}^n e^{t.X_i}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[e^{t.X_i}\right] = E[e^{t.X_1}] \times \ldots \times E[e^{t.X_n}] \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r} \times \ldots \times \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r} = \left(\frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r}\right)^n = \frac{\lambda^{nr}}{(\lambda - t)^{nr}}$$

$$\boxed{M_Y(t) = \tfrac{\lambda^{nr}}{(\lambda - t)^{nr}}}$$

   Portanto, $Y \sim Gama(x; nr, \lambda)$.

2º Método de resolução:

Utilizando um caso restrito, em que, $Y_1 = X_1 + X_2$, pode-se expandir a solução para $Y_2 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Assim,

$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$W_1 = \frac{X_1}{X_2}$$

(b).

Seja $Y = \sum_{i=1}^{n} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, em que $X_j \sim Gama(x; r_j, \lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, e que a função geradora de momentos,

$$M_Y(t) = E[e^{Yt}] = \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r}$$

Dessa forma,

$$M_Y(t) = E[e^{Yt}] = E[e^{\sum_{i=1}^{n} X_i t}] = E[e^{(X_1 + \ldots + X_n)t}] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{t.X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{t.X_i}\right] \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{t.X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{t.X_i}\right] = E[e^{t.X_1}] \times \ldots \times E[e^{t.X_n}] \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \frac{\lambda^{r_j}}{(\lambda - t)^{r_j}} = \frac{\lambda^{r_1}}{(\lambda - t)^{r_1}} \times \ldots \times \frac{\lambda^{r_n}}{(\lambda - t)^{r_n}} = \frac{\lambda^{r_1 + \ldots + r_n}}{(\lambda - t)^{r_1 + \ldots + r_n}}$$

$$\boxed{M_Y(t) = \frac{\lambda^{r_1 + \ldots + r_n}}{(\lambda - t)^{r_1 + \ldots + r_n}}}$$

Portanto, $Y \sim Gama(x; r_1 + \ldots + r_n, \lambda)$.

8. (MOOD, 1973. Questão 25. p. 215). Se X tem distribuição uniforme padrão sobre o intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, encontre a distribuição de $Y = tangX$.

Desenvolvendo:

Seja,

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a} I_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}} I_{(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} I_{(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x) = \frac{1}{\pi} I_{(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x)$$

Agora,

$$y = tgx \Rightarrow x = arctgy \Rightarrow g^{-1}(y) = arctgy$$

$$\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{1 + y^2}$$

Daí, pelo método jacobiano,

$$f_Y(y) = \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \times f_X(g^{-1}(y)) \times I_D(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{1+y^2} \times \frac{1}{\pi}$$

para todo $y \in \Re$.

9. (MOOD, 1973. Questão 26. p. 215). Se X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2, encontre a distribuição, média e variância de $Y = e^X$.

   Desenvolvendo:
   Sabe-se que a distribuição de X,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} I_{(-\infty,+\infty)}(x)$$

   Agora,

$$g^{-1}(y) = x = ln(y)$$

   O intervalos das $v.a.$'s:

$$X \Rightarrow I_{(-\infty,+\infty)}(x)$$
$$Y \Rightarrow I_{(0,+\infty)}(y)$$

   Daí,

$$f_Y(y) = \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \times f_X(g^{-1}(y)) I_D(y)$$

   Assim,

$$f_Y(y) = \left|\frac{1}{y}\right| \times \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2} I_{(0,+\infty)}(y)$$

   A distribuição de Y:

$$\boxed{f_Y(y) = \left|\frac{1}{y}\right| \times \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2} I_{(0,+\infty)}(y)}$$

   A esperança de Y:

$$E[Y] = \int_0^\infty y \times \left|\frac{1}{y}\right| \times \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

fazendo mudança de variável:

$$t = ln(y)$$

$$y = e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t \Rightarrow dy = e^t dt$$

Dessa forma,

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} e^t dt \Rightarrow$$

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 - 2t\right]} dt \Rightarrow$$

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2-2t\mu+\mu^2}{\sigma^2}+2t\right]} dt \Rightarrow$$

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2-2t\mu+\mu^2-2\sigma^2 t}{\sigma^2}\right]} dt \Rightarrow$$

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2-2t(\mu+\sigma^2)+\mu^2}{\sigma^2}\right]} dt \Rightarrow$$

Observe que $\frac{t^2-2t(\mu+\sigma^2)+\mu^2}{\sigma^2} = \frac{t^2-2t(\mu+\sigma^2)+(\mu+\sigma^2)^2-(\mu+\sigma^2)^2+\mu^2}{\sigma^2}$, então,

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2-2t(\mu+\sigma^2)+(\mu+\sigma^2)^2-(\mu+\sigma^2)^2+\mu^2}{\sigma^2}\right]} dt \Rightarrow$$

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2-2t(\mu+\sigma^2)+(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}+\frac{+\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right]} dt \Rightarrow$$

Veja que $t^2 - 2t(\mu+\sigma^2) + (\mu+\sigma^2)^2 = [t - (\mu+\sigma^2)]^2$, assim,

$$E[Y] = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right]} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]^2}{\sigma^2}\right]} dt \Rightarrow$$

$$E[Y] = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right]} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]}{\sigma}\right]^2}}_{N(\mu=(\mu+\sigma^2),\sigma^2=\sigma^2)} dt \Rightarrow$$

$$E[Y] = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right]} \times 1 \Rightarrow$$

$$E[Y] = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu^2-[\mu^2+2\mu\sigma^2+\sigma^4]}{\sigma^2}\right]} \Rightarrow$$

$$E[Y] = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{-2\mu\sigma^2-\sigma^4}{\sigma^2}\right]} \Rightarrow$$

$$\boxed{E[Y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}$$

A variância de Y:

$$Var[Y] = E[Y^2] - [E[Y]]^2$$

Assim,

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} y^2 \times \frac{1}{y} \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

Fazendo,

$$t = ln(y)$$

$$y = e^t \Rightarrow dy = e^t dt$$

Portanto,

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} e^t \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} e^t dt \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} e^{2t} dt \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 - 4t\right]} dt \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^2-2t\mu+\mu^2}{\sigma^2}\right) - 4t\right]} dt \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-2t\mu+\mu^2-4t\sigma^2}{\sigma^2}\right)} dt \Rightarrow$$

Observe que $t^2 - 2t\mu + \mu^2 - 4t\sigma^2 = t^2 - 2t(\mu + \sigma^2) + \mu^2 + (\mu + \sigma^2)^2 - (\mu + \sigma^2)^2$,

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-2t(\mu+\sigma^2)+\mu^2+(\mu+\sigma^2)^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right)} dt \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-2t(\mu+\sigma^2)+(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2} + \frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right)} dt \Rightarrow$$

Tem-se que $t^2 - 2t(\mu + \sigma^2) + (\mu + \sigma^2)^2 = (t - (\mu + 2\sigma^2))^2$,

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(t-(\mu+2\sigma^2))^2}{\sigma^2}\right)} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right)} dt \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(t-(\mu+2\sigma^2))^2}{\sigma^2}\right)}} dt \Rightarrow$$

Sabe-se que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(t-(\mu+2\sigma^2))^2}{\sigma^2}\right)} dt = 1$, portanto,

$$E[Y^2] = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right)} \times 1 \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2-(\mu+\sigma^2)^2}{\sigma^2}\right)} \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2-[\mu^2+4\mu\sigma^2+4\sigma^4]}{\sigma^2}\right)} \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-4\mu\sigma^2-4\sigma^4]}{\sigma^2}\right)} \Rightarrow$$

$$E[Y^2] = e^{2\mu+2\sigma^2}$$

Assim,

$$Var[Y] = e^{2\mu+2\sigma^2} - \left[e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{Var[Y] = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}}$$

10. (MOOD, 1973. Questão 27. p. 215). Suponha que X tem função densidade acumulada por $F_X(x) = exp[-e^{-(x-\alpha)/\beta}]$. Qual é a distribuição de $Y = exp[-(x-\alpha)/\beta$.

Desenvolvendo:
Temos que,

$$F_X(x) = e^{-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}$$

daí:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \Rightarrow f_X(x) = -\frac{1}{\beta} \times \left(-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right) \times e^{-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}} \Rightarrow$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \times e^{-\frac{x-\alpha}{\beta} - e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}$$

Agora,

$$y = e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} \Rightarrow y = e^{-\frac{x}{\beta}} \times e^{\frac{\alpha}{\beta}} \Rightarrow \frac{y}{e^{\frac{\alpha}{\beta}}} = e^{-\frac{x}{\beta}} \Rightarrow y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}} = e^{-\frac{x}{\beta}} \Rightarrow y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \left(e^{-\frac{1}{\beta}}\right)^x$$

Observe que $log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, portanto,

$$y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \left(e^{-\frac{1}{\beta}}\right)^x \Rightarrow x = log_{e^{-\frac{1}{\beta}}}\left[y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]$$

logo,

$$g^{-1}(y) = log_{e^{-\frac{1}{\beta}}}\left[y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]$$

com $y > 0$. Sendo, $w = log_a x \Rightarrow w = \frac{lnx}{lna} \Rightarrow (w)' = \left(lnx \times \frac{1}{lna}\right)' \Rightarrow (w)' = \frac{1}{x \times lna}$, assim,

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}} \times ln(e^{-\frac{1}{\beta}})} \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{1}{y \times \left(-\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{1}{-\frac{y}{\beta}} = -\frac{\beta}{y}$$

Ora,

$$g^{-1}(y) = log_{e^{-\frac{1}{\beta}}}[y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}}] = -\beta \times log_e[y \times e^{-\frac{\alpha}{\beta}}] = -\beta \times [ln(y) + lne^{-\frac{\alpha}{\beta}}] = -\beta \times [ln(y) - \frac{\alpha}{\beta} \times lne] \Rightarrow$$

$$g^{-1}(y) = -\beta \times [ln(y) - \frac{\alpha}{\beta} \times 1] = -\beta ln(y) + \alpha$$

e $Y = exp[-(x - \alpha)/\beta]$,

$$-\frac{1}{\beta}[g^{-1}(y) - \alpha] = -\frac{1}{\beta}[(-\beta ln(y) + \alpha) - \alpha] = ln(y)$$

Portanto,

$$f_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{\beta} \times e^{-\frac{1}{\beta} \times [g^{-1}(y) - \alpha]} \times e^{-e^{-\frac{1}{\beta} \times [g^{-1}(y) - \alpha]}}$$

Sabe-se que $-\frac{1}{\beta}[g^{-1}(y) - \alpha] = ln(y)$, então,

$$f_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{\beta} \times e^{ln(y)} \times e^{-e^{ln(y)}} \Rightarrow$$

$$f_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{\beta} \times y \times e^{-y}$$

Assim, $f_Y(y)$, pelo método jacobiano,

$$f_Y(y) = \left|-\frac{\beta}{y}\right| \times \frac{1}{\beta} \times y \times e^{-y} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{\beta}{\beta} \times \frac{y}{y} \times e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)$$

$$\boxed{f_Y(y) = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)}$$

11. (MOOD, 1973. Questão 31. p. 216). Se $f_X(x) = 2xe^{-x^2} I_{(0,\infty)}(x)$, encontre a densidade de $Y = X^2$.

    Desenvolvendo:
    Sendo,

$$Y = X^2 \Rightarrow X = \pm\sqrt{Y}$$

Porém, X será sempre positivo, devido $I_{(0,\infty)}(x)$. Então,

$$X = g'(Y) = +\sqrt{Y}$$

Utilizando o método Jacobiano,

$$|J| = \frac{dg'(y)}{dy} = \left|\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$f_Y(y) = |J| \times f_X(g'(y))I_{(0,\infty)}(y)$$

Portanto,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \times 2(\sqrt{y}).e^{-(\sqrt{y})^2}I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \times 2(\sqrt{y}).e^{-y}I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$\boxed{f_Y(y) = e^{-y}I_{(0,\infty)}(y)}$$

12. (MOOD, 1973. Questão 32. p. 216). Se X tem distribuição beta, qual é a distribuição de $1 - X$?

    Desenvolvendo:

    A função beta,

    $$f_X(x) = \frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}I_{(0,1)}(x)$$

    com $a > 0$ e $b > 0$. Seja $Y = 1 - X$,

    $$y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow g^{-1}(y)1 - y$$

    Assim,

    $$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -1$$

    Portanto, pelo método jacobiano,

    $$f_Y(y) = \frac{1}{B(b,a)} \times (1-y)^{a-1} \times y^{b-1}I_{(0,1)}(y)$$

    $Y \sim Beta(b,a)$.

13. (MOOD, 1973. Questão 43. p. 216). Se $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$, encontre a densidade de $Y = 3X + 1$.

Desenvolvendo:

$$y = 3X + 1 \Rightarrow 3x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$$

Se,

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 4$$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{3}$$

Pelo método jacobiano,

$$\boxed{f_Y(y) = \tfrac{1}{3} I_{(1,4)}(y)}$$

14. (MOOD, 1973. Questão 45. p. 216). Se $f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$, encontre a densidade de $Z = \frac{X+Y}{2}$.

Desenvolvendo:

$$W = 2Z = X + Y$$

Usando a fórmula da convolução:

$$f_W(w) = f_{X+Y}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(w-x).f_X(x)dx$$

Observe que: $f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y) = e^{-x} e^{-y} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$, logo, X e Y são independentes.

Assim,

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(w-x)} I_{(0,\infty)}(x) e^{-y} I_{(0,\infty)}(w-x)dx$$

Seja,

$$x \in (0,\infty) \Rightarrow x > 0$$

$$(w-x) \in (0,\infty) \Rightarrow w - x > 0 \Rightarrow x < w$$

Assim,

$$f_W(w) = \int_0^w e^{-x} e^{-w+x} dx = \int_0^w e^{-w} dx = \left[x.e^{-w}\right]_0^w = we^{-w} I_{(0,\infty)}(w)$$

Sabe-se que $\Gamma(2) = (2-1)! = 1$, portanto,

$$f_W(w) = we^{-w} I_{(0,\infty)}(w) = \frac{(1)^2}{\Gamma(2)} \times w^{2-1} \times e^{-w} I_{(0,\infty)}(w)$$

em que $W \sim gama(\lambda = 1, r = 2)$.

Agora,

$$W = 2Z \Rightarrow \frac{dw}{dz} = 2$$

Portanto,

$$f_Z(z) = \left|\frac{dw}{dz}\right| f_W(g^{-1}(z)) I_D(z) \Rightarrow$$

$$f_Z(z) = |2| \times 2z \times e^{-2z} I_{(0,\infty)}(z) \Rightarrow$$

$$f_Z(z) = 4z \times e^{-2z} I_{(0,\infty)}(z) \Rightarrow$$

$$f_Z(z) = \frac{(2)^2}{\Gamma(2)} \times z^{2-1} \times e^{-2z} I_{(0,\infty)}(z)$$

em que $Z \sim gama(2, 2)$.

15. Se $X \sim N(0, \sigma^2)$, encontre a função densidade de $Y = X^2$.

Desenvolvendo:

1º Método de resolução:

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{\sigma^2} + tx^2} dx \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2 - 2tx^2\sigma^2}{\sigma^2}\right]} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2(1-2\sigma^2)}{\sigma^2}\right]} dx \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{x^2}{\sigma^2}}{1-2t\sigma^2}\right]} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{x}{\sigma}}{\sqrt{1-2t\sigma^2}}\right]^2} dx \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{x}{\sigma}}{\sqrt{1-2t\sigma^2}}\right]^2} dx = \frac{1}{\sqrt{1-2t\sigma^2}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{1-2t\sigma^2}} \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{x}{\sigma}}{\sqrt{1-2t\sigma^2}}\right]^2} dx}_{1} \Rightarrow$$

$$M_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\sigma^2}} = \frac{1}{(1-2t\sigma^2)^{1/2}} = \left[\frac{1}{1-2t\sigma^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2t\sigma^2(\frac{1}{2t\sigma^2} - t)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\frac{1}{2t\sigma^2}}{(\frac{1}{2t\sigma^2} - t)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Portanto, a função geradora de momento encontrada é de uma gama com parâmetros $r = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, ou seja,

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{\frac{1}{2\sigma^2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2\sigma^2} y\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y} I_{[0,\infty)}(y)}$$

2º Método de resolução:
Sendo,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

e que,

$$X \sim N(0, \sigma^2)$$
$$Y = X^2 \Rightarrow X = g^{-1}(y) = \pm\sqrt{Y}$$

Os intervalos das *v.a.*'s:

$$X = -\infty \Rightarrow Y = +\infty$$
$$X = +\infty \Rightarrow Y = +\infty$$

Alerta! Como X tem uma distribuição simétrica, pode-se obter a área dessa função considerando $I_{(0,\infty)}(x)$ multiplicado por 2 como visto na fig.[4.1]. Assim, os intervalos ficarão:

$$X = 0 \Rightarrow Y = 0$$
$$X = +\infty \Rightarrow Y = +\infty$$

Tendo,

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = \pm\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

pelo método jacobiano, tem-se:

$$f_Y(y) = \left|(g^{-1}(y)\right| \times f_X\left(g^{-1}(y)\right) I_D(y)$$

$$f_Y(y) = \underbrace{2}_{Alerta!} \times \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right)^2} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \times \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\times y} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\times y} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = (y)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\times y} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = (y)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\times y} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

De acordo com o Mood (1973, p.535), $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, portanto,

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \times \left(\frac{1}{2\sigma^2} \times y\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\times y} I_{(0,\infty)}(y) \Rightarrow$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \left(\frac{1}{2\sigma^2} \times y\right)^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\times y} I_{(0,\infty)}(y)}$$

Assim, $Y \sim gama\left(r = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

FUNÇÃO GAMA:

$$f_Y(y; r, \lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \times (\lambda y)^{r-1} \times e^{-\lambda y} I_{(0,\infty)}(y)$$

16. Sejam X_1 e X_2 duas distribuições normais independentes com média zero e variância um, isto é, $X_1 \sim N(0,1)$ e $X_2 \sim N(0,1)$. Prove que $Z = X_1 + X_2$ tem distribuição normal com média zero e variância dois, isto é , $Z \sim N(0,2)$.

Desenvolvendo:

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{t(X_1+X_2)}] = E[e^{tX_1} \times e^{tX_1}] = E[e^{tX_1}] \times E[e^{tX_2}] \Rightarrow$$
$$M_Z(t) = M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \times e^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{2t^2}{2}}$$

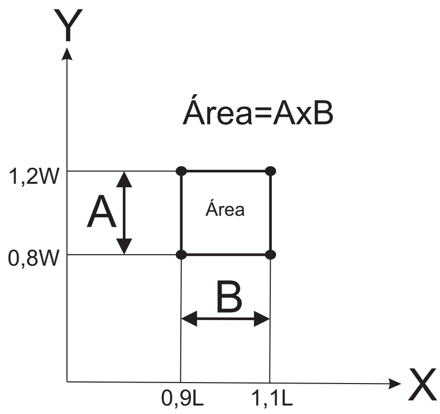
Sabe-se que:

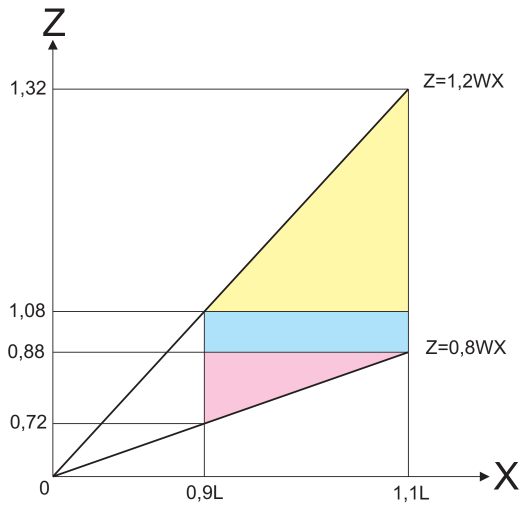
$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

então,

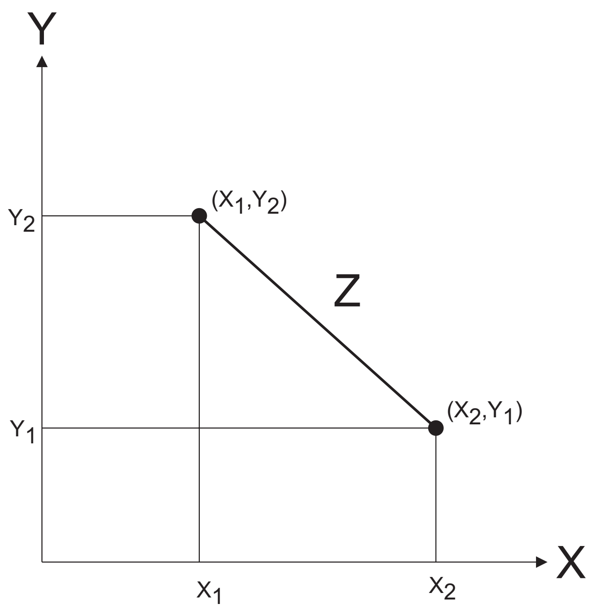
$$M_Z(t) = e^{\frac{2t^2}{2}} = e^{0\times t + 2\times\frac{t^2}{2}}$$

Portanto, $Z \sim N(0,2)$.

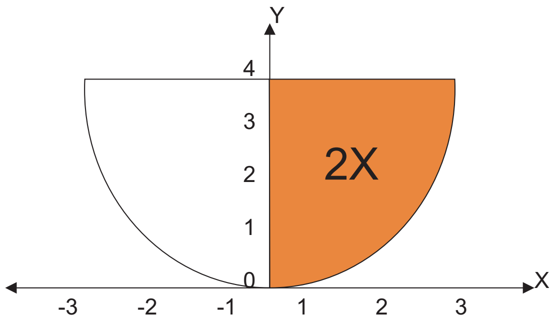

Y
Área=AxB
1,2W
A
Área
0,8W
B
0,9L
1,1L
X



X	Reta Z	
	0,8WX	1,2WX
0,9L	0,72WL	1,08WL
1,1L	0,88WL	1,32WL



Y
Y_2
(X_1,Y_2)
Z
Y_1
(X_2,Y_1)
X_1
X_2
X


Y
X
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
1
2
3
2X

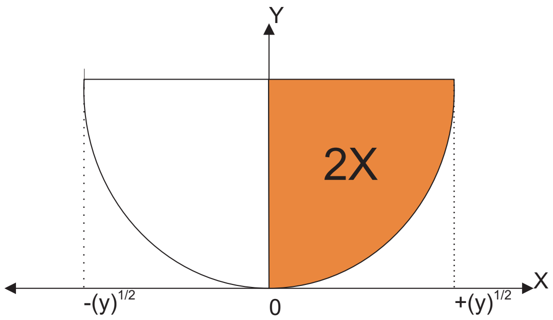


Figura 4.1: Limites de integração.

Capítulo 5

Amostragem e distribuições de amostragem

1. (MOOD, 1973. Questão 1. p. 265). Quesito:

   (a) Dê um exemplo onde a população-alvo é a mesma que a população amostral.
   Desenvolvendo:
   Um pesquisador deseja saber sobre o índice de satisfação da população de Pau dos Ferros, RN, bairro São Judas Tadeu quanto ao serviço de coleta de lixo desse bairro.
   POPULAÇÃO-ALVO: moradores do bairro São Judas Tadeu do município de Pau dos Ferros, RN.
   POPULAÇÃO-AMOSTRAL: moradores do bairro São Judas Tadeu do município de Pau dos Ferros, RN.

   (b) Dê um exemplo onde a população-alvo não é a mesma que a população amostral.
   Desenvolvendo:
   Um pesquisador deseja saber sobre o índice de satisfação da população de Pau dos Ferros, RN, quanto ao serviço de coleta de lixo desse município.
   POPULAÇÃO-ALVO: habitantes do município de Pau dos Ferros, RN.
   POPULAÇÃO-AMOSTRAL: moradores de cada bairro de Pau dos Ferros, RN, que frequentam o ambulatório do seu bairro.

2. (MOOD, 1973. Questão 7. p. 266). Quesito:

   (a) Use a desigualdade de Chebyshev para determinar o número de vezes que se deve lançar uma moeda honesta para que seja, no mínimo, igual a 90% a probabilidade de que $\overline{X}$ esteja entre 0,4 e 0,6.
   Desenvolvendo:

$$X_i \begin{cases} 1(cara) \\ 0(coroa) \end{cases}$$

O tamanho $n = ?$, para $P[0,4 \leq \overline{X}_n \leq] \geq 0,9$
Tem-se que:

$$P[0,4 \leq \overline{X}_n \leq 0,6] = P\left[0,4 \leq \frac{\sum X_i}{n} \leq 0,6\right] = P[0,4n \leq \sum X_i \leq 0,6n]$$

Observe que $\sum X_i = Y$, sendo $Y \sim binomial\left(n, \frac{1}{2}\right)$ com média $\frac{n}{2}$ e variância $\frac{n}{4}$. Assim,

$$P[0,4n \leq \sum X_i \leq 0,6n] = P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] \Rightarrow$$

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = P[0,4n - 0,5n \leq Y - 0,5n \leq 0,6n - 0,5n] \Rightarrow$$

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = P[-0,1n \leq Y - 0,5n \leq 0,1n] \Rightarrow$$

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = P[-0,1n \leq Y - 0,5n \leq 0,1n] \Rightarrow$$

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = P[|Y - 0,5n| \leq 0,1n] = P[|Y - \mu_Y| \leq 0,1n] \Rightarrow$$

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = 1 - P[|Y - \mu_Y| \geq 0,1n]$$

Usando a desigualdade de Chebyshev: $P[|Y - \mu_Y| \geq t] \leq \frac{\sigma_Y^2}{t^2}$,

$$P[0,4n \leq \overline{X}_n \leq] = 1 - \frac{\sigma_Y^2}{(0,1n)^2} = 1 - \frac{n/4}{0,01n^2} = 1 - \frac{1}{0,04n}$$

Se deseja,

$$1 - \frac{1}{0,04n} \geq 0,9 \Rightarrow \frac{-1}{0,04n} \geq -0,10 \Rightarrow -1 \geq -0,0004n \Rightarrow 1 \leq 0,0004n \Rightarrow$$

$$\boxed{n \geq 250}$$

(b) Como se pode resolver a parte (a) com maior precisão, ou seja, fazer a probabilidade muito próxima 90%? Qual é o número de lançamentos?
Desenvolvendo:
Usando a aproximação binomial pela normal, se $Y \sim binomial(n, \frac{1}{2})$, então $Z = \frac{(Y - M_Y)}{\sigma_Y}$ tem distribuição aproximadamente normal padrão. Segue que:

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = P\left[\frac{0,4n - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{0,4n - \mu_Y}{\sigma_Y}\right] \Rightarrow$$

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = P\left[\frac{0,4n - 0,5n}{\sqrt{n/4}} \leq Z \leq \frac{0,4n - 0,5n}{\sqrt{n/4}}\right] \Rightarrow$$

$$P[0,4n \leq Y \leq 0,6n] = P[-0,2\sqrt{n} \leq Z \leq +0,2\sqrt{n}] \geq 0,90$$

Tendo que $P[-z \leq Z \leq z] \geq 0,90 \Rightarrow Z = 1,64$, e portanto,

$$0,2\sqrt{n} \geq 1,64 \Rightarrow n \geq \left(\frac{1,64}{0,2}\right)^2 \Rightarrow n \geq 68$$

3. (MOOD, 1973. Questão 9. p. 266). Suponha que $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ sejam médias de amostras aleatórias de tamanho n de uma população com variância σ^2. Determine n de modo que a probabilidade de que as médias difiram de mais que *sigma* seja cerca de 10%.

   Desenvolvendo:
   Seja $Y = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$. Deseja-se determinar n tal que $P[|Y| \geq \sigma] \cong 0,1$

$$E[Y] = E[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = E[\overline{X}_1] - [\overline{X}_2] = \mu - \mu = 0$$

$$Var[Y] = Var[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = Var[\overline{X}_1] + Var[\overline{X}_2] = 2Var[\overline{X}] \Rightarrow$$

$$E[Y] = 2\left[\frac{\sum X}{n}\right] = \frac{2}{n^2} \times \sum Var[X] = \frac{2}{n^2} \times 2n\sigma^2 = 2\frac{\sigma^2}{n}$$

   Usando a aproximação pela normal $Z = \frac{x-E[Y]}{\sqrt{Var[Y]}}$,

$$P[|Y| \geq \sigma] \cong 0,1 \Rightarrow P[-\sigma \leq Y \leq \sigma] \cong 0,9 \Rightarrow$$

$$P\left[\frac{-\sigma - 0}{\sqrt{\frac{2}{n}\sigma^2}} \leq \frac{y-0}{\sqrt{\frac{2}{n}\sigma^2}} \leq \frac{y-0}{\sqrt{\frac{2}{n}\sigma^2}}\right] \cong 0,9 \Rightarrow$$

$$P\left[\frac{-\sigma}{\sigma \times \sqrt{\frac{2}{n}}} \leq Z \leq \frac{\sigma}{\sigma \times \sqrt{\frac{2}{n}}}\right] \cong 0,9 \Rightarrow$$

$$P\left[\frac{-\sigma}{\sigma \times \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq Z \leq \frac{\sigma}{\sigma \times \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \cong 0,9 \Rightarrow$$

$$P\left[-1 \times \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq Z \leq 1 \times \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \cong 0,9 \Rightarrow$$

$$P\left[-\frac{\sqrt{n}}{2} \leq Z \leq +\frac{\sqrt{n}}{2}\right] \cong 0,9$$

   Assim,

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \cong 1,64 \Rightarrow \frac{n}{2} \cong 2,689 \Rightarrow n \cong 5,37 \Rightarrow n \cong 6$$

4. (MOOD, 1973. Questão 10. p. 266). Suponha que lâmpadas fabricadas por um processo padrão tenham vida média 2000 horas com desvio padrão 250 horas, e suponha que se considere vantajoso substituir o processo se a vida média puder ser aumentada em pelo menos 10%. Um engenheiro deseja testar um novo processo proposto, sob hipótese de que ao desvio padrão do novo processo seja o mesmo. Determine que quantidade de lâmpadas deve ser testada para que 1% a probabilidade de que o novo processo seja rejeitado, quando na realidade produz lâmpadas com vida média de 2250 horas.

Desenvolvendo:

$$\mu_X = 2000horas$$

Com o novo processo,

$$\mu_X = 2000 + 2000 \times 0,01 = 2200horas$$

$$\sigma_X = 250horas$$

Assim, $X \sim N(2250, 250^2)$, $n = ?$, tal que $P[\overline{X}_n < 2200] < 0,01$,

$$P[\overline{X}_n < 2200] = P\left[\frac{\overline{X}_n - 2250}{250/\sqrt{n}} < \frac{2200 - 2250}{250/\sqrt{n}}\right] = P\left[Z < -\frac{\sqrt{n}}{5}\right] \Rightarrow$$

$$P\left[Z < -\frac{\sqrt{n}}{5}\right] < 0,01 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{5} = 2,326 \Rightarrow \sqrt{n} = 2,326 \times 5 \Rightarrow n \cong 135$$

5. (MOOD, 1973. Questão 17. p. 267). Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma distribuição $Normal(\mu, \sigma^2)$, determine a média e a variância de $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2}{n-1}}$.
Desenvolvendo:
Sabe-se que de acordo com o teorema 8 - iii' (MOOD, 1973, p. 245):

(a) $Y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \times y^{\frac{n-1}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}y} I_{(0,\infty)}(y)$$

(b) Se $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} \Rightarrow E[S^2] = \sigma^2$
Prova:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i + \mu - \mu - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \mu) - (\overline{x} - \mu)]^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)(\overline{x} - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - \mu)^2 \Rightarrow$$

Como $(\overline{x} - \mu)$ é uma constante, $\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - \mu) = n(\overline{x} - \mu)$, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - n(\overline{x} - \mu)^2$$

Portanto,

$$E[S^2] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\overline{x}-\mu)^2}{n-1}\right] \Rightarrow$$

$$E[S^2] = \frac{1}{n-1} \times \left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] - E\left[n(\overline{x}-\mu)^2\right]\right\} \Rightarrow$$

$$E[S^2] = \frac{1}{n-1} \times [nV(X) - nV(\overline{x})] \Rightarrow$$

$$E[S^2] = \frac{1}{n-1} \times \left[n\sigma^2 - n \times \frac{\sigma^2}{n}\right] \Rightarrow$$

$$E[S^2] = \frac{n-1}{n-1} \times \sigma^2 \Rightarrow$$

$$E[S^2] = \sigma^2$$

(c) $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 \times \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{(n-1)\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \sqrt{y}$

Sendo assim, a média será

$$E[S] = \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \sqrt{y} \times \frac{1}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \times y^{\frac{n-1}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}y}dy \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{1}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \times \int_0^\infty \sqrt{y} \times y^{\frac{n-1}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}y}dy \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{1}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \times \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \times y^{\frac{n-1}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}y}dy \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} \ldots$$

$$\ldots \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma[n/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \times y^{\frac{n}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}y}dy}_{1} \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{(n-1)}{2} - \frac{n}{2}\right]} \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{(n-n-1)}{2}\right]} \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{(-1)}{2}\right]} \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{(1)}{2}\right]}} \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \Rightarrow$$

$$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{E[S] = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]}}$$

Agora, a variância,

$$Var[S] = E[S^2] - [E[S]]^2$$

$$Var[S] = \sigma^2 - \left[\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]}\right]^2 \Rightarrow$$

$$Var[S] = \sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{n-1} \times \left[\frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{Var[S] = \sigma^2 \left[1 - \frac{2\sigma^2}{n-1} \times \left(\frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]}\right)^2\right]}$$

6. (MOOD, 1973. Questão 18. p. 267). Considerando a distribuição F:

   (a) Determine a variância da distribuição.

   (b) Se $X \sim F(m, n)$ mostre que $\frac{1}{X} \sim F(n, m)$.

   (c) Se $X \sim F(m, n)$ mostre que $W = \frac{mX/n}{1+mX/n}$ tem distribuição beta.

   (d) Use o resultado (c) e a função beta para determinar a média e a variância da distribuição F. Sugestão: encontre os dois primeiros momentos de $mX/n = \frac{W}{1-W}$.

(a).
Desenvolvendo:
$U \sim \chi^2_m$ e $V \sim \chi^2_n$, então $W = \frac{U/m}{V/n} \sim F_{m,n}$.

$$E[W] = \frac{n}{(n-2)}$$

para $n > 2$.

$$Var[W] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

para $m > 4$, com U e V independentes.

Prova:
Dizer que $U \sim \chi^2_m$ e $V \sim \chi^2_n$ é o mesmo que $U \sim \Gamma\left(r = \frac{m}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)$ e $V \sim \Gamma\left(r = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)$. Então,

$$E[U] = \int_0^\infty u \times \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \times (\lambda u)^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U] = \int_0^\infty u \times \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times u^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \int_0^\infty u \times u^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda^{r+1}} \times \int_0^\infty \frac{\lambda^{r+1}}{\Gamma(r+1)} \times u \times u^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda^{r+1}} \times \underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda^{r+1}}{\Gamma(r+1)} \times u^{(r+1)-1} \times e^{-\lambda u} du}_{1} \Rightarrow$$

$$E[U] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda^{r+1}} \Rightarrow$$

Observe que $\Gamma(r+1) = r \times \Gamma(r)$, dessa forma,

$$E[U] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{r \times \Gamma(r)}{\lambda^{r+1}} = r \times \frac{\lambda^r}{\lambda^{r+1}} = r \times \lambda^r \times \lambda^{-(r+1)} = r \times \lambda^{-1} \Rightarrow$$

$$E[U] = \frac{r}{\lambda}$$

Como, $r = \frac{m}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, então,

$$E[U] = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{m}{2} \times \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$E[U] = m$$

Similarmente, conclui-se que,

$$E[V] = n$$

Sendo assim,

$$E[W] = E\left[\frac{U/m}{V/n}\right] = \frac{1/m}{1/n} \times E[U] \times E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{n}{m} \times E[U] \times E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{n}{m} \times m \times E\left[\frac{1}{V}\right] \Rightarrow$$

$$E[W] = n \times E\left[\frac{1}{V}\right]$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{v} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \times v^{\frac{n}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty v^{-1} v^{\frac{n}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty v^{\frac{n-2}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \times v^{\frac{n-2}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv}_{1} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \Rightarrow$$

Sabe-se que $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n-2}{2} \times \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)$, então,

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\frac{n-2}{2} \times \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\frac{n-2}{2}} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \times \frac{2}{n-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(n-2)}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{2}{n-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-(n-2)}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{2}{n-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{2}{n-2} \times \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{1}{n-2}$$

Portanto,

$$E[W] = n \times E\left[\frac{1}{V}\right] = n \times \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$$

para $n > 2$.

Sendo a variância,

$$Var[W] = E[W^2] - [E[W]]^2$$

$$E[W^2] = E\left[\left(\frac{U/m}{V/n}\right)^2\right] = \frac{1/m^2}{1/n^2} \times E[U^2] \times E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{n^2}{m^2} \times E[U^2] \times E\left[\frac{1}{V^2}\right]$$

$$E[U^2] = \int_0^\infty u^2 \times \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \times (\lambda u)^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U^2] = \int_0^\infty u^2 \times \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times u^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U^2] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \int_0^\infty u^2 \times u^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U^2] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^{r+2}} \times \int_0^\infty \frac{\lambda^{r+2}}{\Gamma(r+2)} \times u^2 \times u^{r-1} \times e^{-\lambda u} du \Rightarrow$$

$$E[U^2] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^{r+2}} \times \underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda^{r+2}}{\Gamma(r+2)} \times u^{(r+2)-1} \times e^{-\lambda u} du}_{1} \Rightarrow$$

$$E[U^2] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^{r+2}} \Rightarrow$$

Observe que $\Gamma(r+2) = (r+1) \times r \times \Gamma(r)$, dessa forma,

$$E[U^2] = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \times \frac{(r+1) \times r \times \Gamma(r)}{\lambda^{r+2}} \Rightarrow$$

$$E[U^2] = (r+1) \times r \times \frac{\lambda^r}{\lambda^{r+2}} = (r+1) \times r \times \lambda^r \times \lambda^{-(r+2)} = (r+1) \times r \times \lambda^{-2} \Rightarrow$$

$$E[U^2] = \frac{(r+1) \times r}{\lambda^2}$$

Como, $r = \frac{m}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, então,

$$E[U^2] = \frac{\left(\frac{m}{2}+1\right) \times \frac{m}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{m^2}{4} + \frac{m}{2}\right) \times \frac{4}{1} \Rightarrow$$

$$E[U^2] = m^2 + 2m$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{v^2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \times v^{\frac{n}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty v^{-2} \times v^{\frac{n}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty v^{\frac{n-4}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-4}{2}}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)} \times v^{\frac{n-4}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv}_{1} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-4}{2}}} \Rightarrow$$

Sabe-se que $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n-2}{2} \times \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right) \times \left(\frac{n-4}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)$, então,

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right) \times \left(\frac{n-4}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-4}{2}}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right) \times \left(\frac{n-4}{2}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-4}{2}}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \times \frac{2}{(n-2)(n-4)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(n-4)}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{4}{(n-2)(n-4)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-(n-4)}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{4}{(n-2)(n-4)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{4}{(n-2)(n-4)} \times \left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V^2}\right] = \frac{1}{(n-2)(n-4)}$$

para $n > 4$.

Assim,

$$E[W^2] = \frac{n^2}{m^2} \times \left[m^2 + 2m\right] \times \left[\frac{1}{(n-2)(n-4)}\right] = \frac{n^2(m^2+2m)}{m^2(n-2)(n-4)} = \frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)}$$

Portanto,

$$Var[W] = \frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)} - \left[\frac{n}{(n-2)}\right]^2 \Rightarrow$$

$$Var[W] = \frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2} \Rightarrow$$

$$Var[W] = \frac{n^2(m+2) - n^2 m(n-4)}{m(n-2)^2(n-4)} \Rightarrow$$

$$Var[W] = \frac{n^2[mn - 2m + 2n - 4 - mn + 4m]}{m(n-2)^2(n-4)} \Rightarrow$$

$$\boxed{Var[W] = \frac{2n^2[m+n-2]}{m(n-2)^2(n-4)}}$$

(b).
Desenvolvendo:
$U \sim \chi^2_m$ e $V \sim \chi^2_n$, então $X = \frac{U/m}{V/n} \sim F_{m,n}$. Agora $Y = \frac{1}{X}$,

$$Y = \frac{1}{X} = \frac{1}{\frac{U/m}{V/n}} = \frac{V/n}{U/m} \sim F(n,m)$$

(c).
Desenvolvendo:

$$X \sim F(m,n)$$

Distribuição F:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \times \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}} I_{(0,\infty)}(x)$$

Sendo,

$$W = \frac{mX/n}{1+mX/n} \Rightarrow Wn + wnX = mX \Rightarrow Wn + wnX - mX = 0 \Rightarrow$$

$$[wnX - mX = -Wn] \times (-1) \Rightarrow WmX + mX = Wn \Rightarrow X(m - Wm) = Wn \Rightarrow$$

$$X = g^{-1}(w) = \frac{n}{m} \times \frac{W}{1-W}$$

X pode ser dado também por:

$$X = g^{-1}(w) = \frac{n}{m} \times \frac{W}{1-W} = \frac{nW}{m-mW}$$

então,

$$\frac{dX}{dW} = \frac{n(m-mW)+m(nW)}{(m-mW)^2} = \frac{mn - mnW + m(nW)}{m^2 - 2m^2W + (mW)^2} = \frac{m[n - nW + nW]}{m^2[-2W+W^2]} \Rightarrow$$

$$\frac{dX}{dW} = \frac{m[n-nW+nW]}{m^2[-2W+W^2]} = \frac{n}{m[-2W+W^2]} = \frac{n}{m} \times \frac{1}{(1-W)^2}$$

Os limites de integração,

$$X \to I_{(0,\infty)}(x)$$

$$W = \frac{mX}{n+mX}$$

Se $X \to 0$,

$$W = lim_{X \to 0} \frac{mX}{n + mX} = \frac{m \times 0}{n + m \times 0} = \frac{0}{n} = 0$$

Se $X \to \infty$,

$$W = lim_{X \to \infty} \frac{mX}{n + mX} = lim_{X \to \infty} \frac{m \times X}{X(\frac{n}{X} + m)} = lim_{X \to \infty} \frac{m}{\frac{n}{X} + m} = \frac{m}{m} = 1$$

Portanto,

$$X \to 0 \Rightarrow W \to 0$$

$$X \to \infty \Rightarrow W \to 1$$

Pelo método jacobiano,

$$f_W(w) = f_X(g^{-1}(x)) \times |J|$$

lembrando que $J = \frac{dW}{dX}$.

No apêndice A do Mood (1973, p. 534):

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a) \times \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}$$

sendo que,

$$\frac{\Gamma\left[\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{m}{2}\right] \times \Gamma\left[\frac{n}{2}\right]} = \frac{1}{\frac{\Gamma\left[\frac{m}{2}\right] \times \Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right]}} = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}$$

$$f_W(w) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2) \times \Gamma(n/2)} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \times \frac{\left(\frac{n}{m} \times \frac{w}{1-w}\right)^{(m-2)/2}}{\left[1 + \left(\frac{m}{n}\right) \times \left(\frac{n}{m} \times \frac{w}{1-w}\right)\right]^{(m+n)/2}} \times \ldots$$

$$\ldots \frac{n}{m} \times \frac{1}{(1-w)^2} I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2) \times \Gamma(n/2)} \times \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \times \left(\frac{n}{m}\right)^{(m-2)/2} \times \left(\frac{w}{1-w}\right)^{(m-2)/2}}{\left[1 + \left(\frac{m}{n}\right) \times \left(\frac{n}{m} \times \frac{w}{1-w}\right)\right]^{(m+n)/2}} \times \ldots$$

$$\ldots \frac{n}{m} \times \frac{1}{(1-w)^2} I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2} - 1 - \frac{m-2}{2}} \times \frac{\left(\frac{w}{1-w}\right)^{(m-2)/2}}{\left[1 + \frac{w}{1-w}\right]^{(m+n)/2}} \times \frac{1}{(1-w)^2} I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m-2}{2}+\frac{-m+2}{2}} \times \frac{\left(\frac{w}{1-w}\right)^{(m-2)/2}}{\left[1+\frac{w}{1-w}\right]^{(m+n)/2}} \times \frac{1}{(1-w)^2} I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m-m+2-2}{2}} \times \frac{(w)^{(m-2)/2} \times (1-w)^{-(m-2)/2}}{\left[\frac{1(1-w)+w}{1-w}\right]^{(m+n)/2}} \times \frac{1}{(1-w)^2} I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times 1 \times \frac{(w)^{(m-2)/2} \times (1-w)^{-(m-2)/2} \times (1-w)^{-2}}{\left[\frac{1}{1-w}\right]^{(m+n)/2}} I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times (w)^{(m-2)/2} \times (1-w)^{-(m-2)/2} \times (1-w)^{-2} \times (1-w)^{(m+n)/2} I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times (w)^{(m-2)/2} \times (1-w)^{-(m-2)/2-2+(m+n)/2}\, I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times (w)^{(m-2)/2} \times (1-w)^{-\frac{m}{2}+1-2+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}}\, I_{(0,1)}(w) \Rightarrow$$

$$\boxed{f_W(w) = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times (w)^{\frac{m}{2}-1} \times (1-w)^{\frac{n}{2}-1}\, I_{(0,1)}(w)}$$

Portanto, $W \sim \beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$.

(d).

$$\frac{mX}{n} = \frac{W}{1-W}$$

A média,

$$E\left[\frac{mX}{n}\right] = E\left[\frac{W}{1-W}\right] \Rightarrow \frac{m}{n}E[X] = E\left[\frac{W}{1-W}\right] \Rightarrow E[X] = \frac{n}{m} \times E\left[\frac{W}{1-W}\right]$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right] = \int_0^1 \frac{w}{1-w} \times \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times w^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \times (1-w)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} dw \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\int_0^1\frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\times w^1\times(1-w)^{-1}\times w^{\left(\frac{m}{2}-1\right)}\times(1-w)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}dw\Rightarrow$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\times\beta\left(\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}-1\right)\times\dots$$

$$\dots\times\underbrace{\int_0^1\frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}-1\right)}\times w^{\left(\frac{m}{2}\right)}\times(1-w)^{\left(\frac{n}{2}-2\right)}dw\Rightarrow}_{1}$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\times\beta\left(\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}-1\right)\Rightarrow$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{1}{\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}}\times\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1+\frac{n}{2}-1\right)}\Rightarrow$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{\frac{m}{2}\times\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\left(\frac{n}{2}-1\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\Rightarrow$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{\frac{m}{2}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{m}{2}\times\frac{2}{(n-2)}=\frac{m}{(n-2)}$$

Então,

$$E[X]=\frac{n}{m}\times E\left[\frac{W}{1-W}\right]=\frac{n}{m}\times\frac{m}{(n-2)}\Rightarrow$$

$$\boxed{E[X]=\frac{n}{n-2}}$$

A variância,

$$Var\left[\frac{mX}{n}\right] = \frac{m^2}{n^2} \times Var[X] = Var\left[\frac{W}{1-W}\right] = E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{W}{1-W}\right)\right]^2$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \int_0^1 \left(\frac{W}{1-W}\right)^2 \times \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times w^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \times (1-w)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} dw \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times \int_0^1 \frac{W^2}{(1-W)^2} \times w^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \times (1-w)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} dw \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times \int_0^1 w^2 \times (1-W)^{-2} \times w^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \times (1-w)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} dw \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times \int_0^1 w^{\left(\frac{m}{2}-1+2\right)} \times (1-w)^{\left(\frac{n}{2}-1-2\right)} dw \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times \int_0^1 w^{\left(\frac{m}{2}+1\right)} \times (1-w)^{\left(\frac{n}{2}-3\right)} dw \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{\beta\left(\frac{m}{2}+2,\frac{n}{2}-2\right)}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \times \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2}+2,\frac{n}{2}-2\right)} \times w^{\left(\frac{m}{2}+1\right)} \times (1-w)^{\left(\frac{n}{2}-3\right)} dw}_{1} \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{\beta\left(\frac{m}{2}+2,\frac{n}{2}-2\right)}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}+\frac{n-4}{2}\right)}}{\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}+\frac{n-4}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+2+\frac{n}{2}-2\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right]=\frac{\left[\left(\frac{m}{2}+1\right)\times\left(\frac{m}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\times\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\times\left(\frac{n}{2}-2\right)\times\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]}\Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right]=\frac{\left(\frac{m}{2}+1\right)\times\left(\frac{m}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\times\left(\frac{n}{2}-2\right)}\Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right]=\frac{\frac{(m+2)\times m}{4}}{\frac{(n+2)(n+4)}{4}}\Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right]=\frac{(m+2)\times m}{4}\times\frac{4}{(n+2)(n+4)}\Rightarrow$$

$$E\left[\left(\frac{W}{1-W}\right)^2\right]=\frac{(m+2)\times m}{(n+2)(n+4)}$$

A variância fica,

$$Var[X]=\frac{n^2}{m^2}\left[\frac{(m+2)m}{(n-2)(n-4)}-\left(\frac{m}{n-2}\right)^2\right]\Rightarrow$$

$$Var[X]=n^2\left[\frac{1}{m^2}\left\{\frac{(m+2)m}{(n-2)(n-4)}-\left(\frac{m}{n-2}\right)^2\right\}\right]\Rightarrow$$

$$Var[X]=n^2\left[\frac{(m+2)m}{m(n-2)(n-4)}-\frac{m}{(n-2)^2}\right]\Rightarrow$$

$$Var[X]=n^2\left[\frac{(m+2)(n-2)-m(n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}\right]\Rightarrow$$

$$Var[X]=n^2\left[\frac{mn-2m+2n-4-mn+4m}{m(n-2)^2(n-4)}\right]\Rightarrow$$

$$Var[X]=n^2\left[\frac{2n+2m-4}{m(n-2)^2(n-4)}\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{Var[X] = \frac{2n^2(2n+2m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}}$$

7. (MOOD, 1973. Questão 19. p. 268). ***t*** com ***k*** graus de liberdade:

$$f_X(x) = \frac{[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)} \times \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \times \frac{1}{(1+x^2/k)^{(k+1)/2}}$$

(a) Determine a média e a variância da distribuição (com a existência).

Desenvolvendo:

Z tem distribuição normal padrão, ***U*** tem distribuição chi-quadrado com ***k*** graus de liberdade ***Z*** e ***V*** são independentes, então,

$$X = \frac{Z}{\sqrt{V/k}} \sim t(k)$$

Sendo assim,

$$E[X] = E\left[\frac{Z}{\sqrt{V/k}}\right] = E[Z] \times E\left[\frac{1}{\sqrt{V/k}}\right] = 0$$

para $k > 0$

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - [E[X]]^2 = E[X^2] - [0]^2 \Rightarrow \\
&= \left[\frac{Z^2}{V/k}\right] \Rightarrow \\
&= E[Z^2] \times E\left[\frac{k}{V}\right] \Rightarrow \\
&= E[Z^2] \times k \times E\left[\frac{1}{V}\right] \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$E[Z^2] = E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}E[(x-\mu)^2] = \frac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{v} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(k/2)} \times v^{\frac{k}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty v^{-1} v^{\frac{k}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty v^{\frac{k-2}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(k/2)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{2}}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)} \times v^{\frac{k-2}{2}-1} \times e^{-\frac{1}{2}v} dv}_{1} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(k/2)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{2}}} \Rightarrow$$

Sabe-se que $\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \left(\frac{k}{2} - 1\right) \times \Gamma\left(\frac{k}{2} - 1\right) = \frac{k-2}{2} \times \Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)$, então,

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\frac{k-2}{2} \times \Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{2}}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\frac{k-2}{2}} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{2}}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \times \frac{2}{k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{(k-2)}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{2}{k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-(k-2)}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{2}{k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}} \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{2}{k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$E\left[\frac{1}{V}\right] = \frac{1}{k-2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[Z^2] \times k \times E\left[\frac{1}{V}\right] \Rightarrow \\ &= 1 \times k \times \frac{1}{k-2} \\ &= \frac{k}{k-2} \end{aligned}$$

(b) Mostre que a densidade $\boldsymbol{t}$ se aproxima da normal padrão conforme aumentam os graus de liberdade.

Desenvolvendo:

$$f_X(x) = C \times \frac{1}{(1 + x^2/k)^{(k+1)/2}} = C\left(1 + x^2/k\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

Lembrando que $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-k\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(c) Se $X \sim t(k)$ mostre que $Y = X^2 \sim F$.

Desenvolvendo:

$$Y = X^2 \Rightarrow X = \pm\sqrt{Y} dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

Limites de integração,

$$X = 0 \Rightarrow Y = 0$$

$$X = \pm\infty \Rightarrow Y = \infty$$

$$\begin{aligned} f_Y &= |J| f_X(g^{-1}(y)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y} \times \underbrace{2}_{\text{limites de integração}} \times} \end{aligned}$$