Slide 55

① $X_1, \ldots, X_n$ a.a. Bernoulli (θ). EMV de θ?

$X \sim$ Bernoulli (θ), então $f(x|\theta) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x} \cdot I_{(0,1)}(x)$

Sabemos que a Dist. de Bernoulli pertence à Família Exponencial, então as condições de regularidade estão satisfeitas.

A função de verossimilhança de θ é dada por

$$L(\theta | \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} \cdot (1-\theta)^{1-x_i} \cdot I_{(0,1)}(x_i) =$$

$$= \theta^{\sum x_i} \cdot (1-\theta)^{n-\sum x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(0,1)}(x_i)$$

Calculamos o logaritmo natural da função de verossimilhança.

$$\ln L(\theta|\underline{x}) = \sum x_i \cdot \ln \theta + (n - \sum x_i) \cdot \ln(1-\theta) + \ln\left[\prod_{i=1}^{n} I_{(0,1)}(x)\right]$$

$$\frac{d \ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{(n-\sum x_i)}{1-\theta}$$

$$\frac{\sum x_i}{\hat{\theta}} - \frac{(n - \sum x_i)}{1-\hat{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{(1-\hat{\theta})\sum x_i - \hat{\theta}(n - \sum x_i)}{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} = 0$$

$$\frac{\sum x_i - \hat{\theta}\sum x_i - \hat{\theta}.n + \hat{\theta}\sum x_i}{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i - \hat{\theta} n}{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} = 0$$

$$\sum x_i - \hat{\theta} n = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

Verificando se $\hat{\theta} = \bar{x}$ é ponto de máximo

$$\frac{d \ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{(n - \sum x_i)}{1-\theta}$$

$$\frac{d^2 \ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} - \frac{(n - \sum x_i)}{(1-\theta)^2}$$

$$\left.\frac{d^2 \ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{-\sum x_i}{\frac{(\sum x_i)^2}{n^2}} - \frac{(n - \sum x_i)}{\left(1 - \frac{\sum x_i}{n}\right)^2} =$$

$$= -\frac{n^2 \sum x_i}{(\sum x_i)^2} - \frac{(n - \sum x_i)}{1 - 2\frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sum x_i^2}{n^2}} = -\frac{n^2}{\sum x_i} - \frac{(n - \sum x_i)}{\frac{n^2 - n2\sum x_i + \sum x_i^2}{n^2}} =$$

$$= -\frac{n^2}{\sum x_i} - \frac{n^2(n - \sum x_i)}{(n - \sum x_i)^2} = \frac{-n^2}{\sum x_i} - \frac{n^2}{n - \sum x_i} =$$

$$= \underbrace{-\overset{>0}{n^2}\left(\frac{1}{\sum x_i} + \frac{1}{\underbrace{n - \sum x_i}_{>0}}\right)}_{<0}$$

logo $\hat{\theta} = \bar{x}$ é ponto de máximo.

② $X_1, \ldots, X_n$ a.a. $N(\mu, \sigma^2)$ μ e σ^2 desconhecidos

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Sabemos que a Distribuição Normal com μ e σ^2 Desconhecidos pertence à Família exponencial, logo, as condições regularizadas estão satisfeitas.

A Função de verossimilhança de $\theta = (\mu, \sigma^2)$

$$L(\underline{\theta} | \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \underline{\theta}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot I_{(-\infty, \infty)}(x_i) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \cdot \exp\left\{ -\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty, \infty)}(x_i)$$

O Logaritmo da Função de verossimilhança é dado por:

$$\ln L(\underline{\theta} | \underline{x}) = \ln (2\pi\sigma^2)^{-n/2} - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} + \ln \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty, \infty)}(x_i)$$

$$\frac{\partial \ln L(\underline{\theta} | \underline{x})}{\partial \mu} = \frac{-2 \sum (x_i - \mu) . (-1)}{2\sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)}{\sigma^2} = \frac{\sum x_i - n\mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\underline{\theta} | \underline{x})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

Igualando a zero temos:

$$\frac{\sum x_i - n\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} = 0 \Rightarrow \sum x_i - n\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{-n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum(x_i-\hat{\mu})^2}{2(\hat{\sigma}^2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{n\hat{\sigma}^2 - \sum(x_i-\bar{x})^2}{2(\hat{\sigma}^2)^2} = 0$$

$$n\hat{\sigma}^2 = \sum(x_i-\bar{x})^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

Após avaliar a segunda derivada, podemos concluir que $\bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ são os EMV $\underset{\sim}{\theta} = (\mu, \sigma^2)$.

calcular depois

③ $X_1, \dots, X_n$ a.a. $U(0,\theta)$, $\theta > 0$ EMV de θ.

$X \sim U(0,\theta)$, então $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot \underset{(0,\theta)}{I}(x)$

Como a distribuição Uniforme não pertence à família exponencial, então não satisfaz às condições de regularidade.

A função de verossimilhança de θ é

$$L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot \underset{(0,\theta)}{I}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \underset{(0,\theta)}{I}(x_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n} \underset{(0,\theta)}{I}(x_i) = \begin{cases} 1, & \begin{array}{l} 0 < x_1 < \theta \\ 0 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \end{array} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow X_{(n)} = Y_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

$0 < y_n < \theta$

$$L(\theta|\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \underset{(y_n,\infty)}{I}(\theta)$$

Pelo gráfico $\hat{\theta} = Y_n$ é o EMV de θ.

④ $X_1, \dots, X_n$ a.a. $U(\theta-1, \theta+1)$ Emv de θ.

$X \sim U(\theta-1, \theta+1)$, então $f(x|\theta) = \frac{1}{2} \cdot I_{(\theta-1,\theta+1)}(x_i)$

Como a distribuição Uniforme não pertence à Família exponencial, então não satisfaz às condições de regularidade.

A função de verossimilhança de θ é

$$L(\theta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot I_{(\theta-1,\theta+1)}(x_i) = \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta-1,\theta+1)}(x_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta-1,\theta+1)}(x) = \begin{cases} 1, & \begin{matrix} \theta-1 < x_1 < \theta+1 \\ \theta-1 < x_2 < \theta+1 \\ \vdots \\ \theta-1 < x_n < \theta+1 \end{matrix} \\ 0, & \text{e.c} \end{cases}$$

$x_{(n)} < \theta+1 \therefore \theta > x_{(n)}-1$

$\theta-1 < x_1 \therefore \theta < x_{(1)}+1$

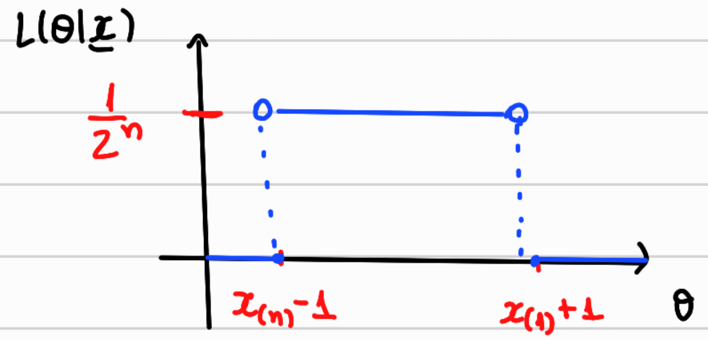
$\Downarrow$

$x_{(n)}-1 < \theta < x_{(1)}+1$

$$L(\theta|\underline{x}) = \frac{1}{2^n} \cdot I_{(x_{(n)}-1,\, x_{(1)}+1)}(x)$$

em que $x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$

e $x_{(n)} = \text{máx}\{x_1, \dots, x_n\}$



O Emv de θ pode ser escrito como

$$\hat{\theta} = \alpha(X_{(n)}-1) + (1-\alpha)(X_{(1)}+1) \text{ com } \alpha \in (0,1)$$

e $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$.

Slide 56

Demostração do Teorema

$X_1, \dots, X_n$ a.a. X com $f(x|\theta)$ e $T = T(X_1, \dots, X_n)$ uma estatística suficiente.

A função de verossimilhança é
$L(\theta|\underline{x}) = f(\underline{x}|\theta) = g(T(\underline{x}); \theta) h(\underline{x})$, pela fatoração de Neymann.

Assim, $g(T(\underline{x}), \theta)$ depende da amostra somente através de T e maximizar a função de verossimilhança em relação a θ equivale a máximizar $g(T(\underline{x}), \theta)$. Assim o EMV de θ será função de T.

Slide 57

1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ a.a. Bernoulli (θ) EMV de $g(\theta) = \theta(1-\theta)$

$g(\theta) = \theta(1-\theta) = Var(X)$

Sabemos que o EMV de $\theta = \bar{X}$ (Slide 55), então pela propriedade da invariância dos EMV temos que $\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}) = \hat{\theta}(1-\hat{\theta}) = \bar{X}(1-\bar{X})$ é o EMV de $g(\theta)$

2) $X_1, \dots, X_n$ a.a. $N(\mu, 1)$ EMV $g(\mu) = P(X \leq 0)$

$X \sim N(\mu, 1)$, então

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2} \right\} \cdot I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

Como pertence à família exponencial, as condições de regularidade estão satisfeitas.

A função de verossimilhança para μ é

$$L(\mu|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}\right\} \cdot I_{(-\infty,\infty)}(x_i) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{2}\right\} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

O logaritmo da função de verossimilhança é

$$\ln L(\mu|\underline{x}) = n\ln(\sqrt{2\pi}) - \sum\frac{(x_i-\mu)^2}{2} + \ln\prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

$$\frac{d\ln L(\mu|\underline{x})}{d\mu} = \sum(x_i-\hat{\mu}) = 0$$

$$\sum x_i - n\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

Após verificar a segunda derivada (Fazer) temos que $\hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$ é o EMV de μ.

Pela propriedade de invariância dos EMV, temos que

$$g(\mu) = P(X \leq 0) = P\left(\frac{X-\mu}{1} \leq -\frac{\mu}{1}\right) = P(Z \leq -\mu)$$

em que Z tem distribuição normal com média zero e variância um.

E $\widehat{g(\mu)} = g(\hat{\mu}) = P(Z \leq -\mu)$ é o EMV de
$g(\mu) = P(X \leq 0)$