X v.a. $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$ → ESPAÇO PARAMÉTRICO

↳ PARÂMETRO CONHECIDO FIXO

Estatística - $T(\underset{\sim}{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$

- MÉDIA $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$
- Mínimo $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$
- MÁXIMO $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$
- VARIÂNCIA $S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{n-1}$

} Estimador de θ } $\hat{\theta}$

Propriedade Suficiência:

$$f(x|\theta) = f(x_1, \dots, x_n | \theta) = g(\underbrace{S(x)}_{\text{Estatística suficiente}}, \theta)\, h(x)$$

$X \sim$ Bernoulli (θ)

↳ UM PARÂMETRO

$X \sim$ Normal (μ, σ^2)

↳ DOIS PARÂMETROS

$$\underset{\sim}{\theta} = (\mu, \sigma^2)$$

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot I_{(-\infty, \infty)}(x)$$

Família Exponencial

$$f(x|\theta) = a(\theta) \cdot b(x) \cdot e^{c(\theta) \cdot d(x)}$$

Slide 42

$X_1, \dots, X_n$ a.a $N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu, \sigma^2$ desconhecidos

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(\underset{\sim}{x} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot e^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot e^{-\frac{\sum x_i^2 - n2\mu\sum x_i + n\mu^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot e^{-\frac{\sum x_i^2 - 2n\mu.\bar{x} + n\mu^2}{2\sigma^2}}$$

Considerando dois pontos amostrais $\underline{x}$ e $\underline{y}$, temos:

$$\frac{f(\underset{\sim}{x} \mid \theta)}{f(\underset{\sim}{y} \mid \theta)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\sum x_i^2 - 2n\mu\bar{x} + n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\sum y_i^2 - 2n\mu\bar{y} + n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}}$$

$$\frac{f(\underset{\sim}{x} \mid \theta)}{f(\underset{\sim}{y} \mid \theta)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \left(\sum x_i^2 - \sum y_i^2 - 2n\mu\left[\bar{x} - \bar{y}\right]\right)\right\}$$

Sabemos que:

$$S_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} \Rightarrow \sum x_i^2 = n\bar{x}^2 + (n-1)S_x^2$$

Substituindo na Equação

$$\frac{f(\underset{\sim}{x} \mid \theta)}{f(\underset{\sim}{y} \mid \theta)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + (n-1)\left(S_x^2 - S_y^2\right) - 2n\mu(\bar{x}-\bar{y})\right]\right\}$$

Sendo $T(\underset{\sim}{x}) = (\bar{x}, S_x^2)$, a equação acima será constante em função de (μ, σ^2) quando $\bar{x} = \bar{y}$ e $S_x^2 = S_y^2$. Dessa forma, $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$ e $S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

são estatísticas suficiente minimais para μ e σ^2

Slide 43

Exemplo: $X_1, \ldots, X_n$ a.a. Bernoulli(p)

$T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é completa?

Sabemos que $T_1 \sim Bin(n, p)$

$$P(T_1 = t \mid p) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(t)$$

$$E(g(T_1)) = \sum_{t=0}^{n} g(t) \cdot \binom{n}{t} p^t \cdot (1-p)^{n-t} =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} g(t) \underbrace{\binom{n}{t}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{t}}_{>0} \cdot (1-p)^{n}, \quad p \in (0,1)$$

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

A equação acima será nula somente se $g(t) = 0$ para todo t. Logo, $T_1(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística completa.

$T_2 = X_2 - X_1$ é completa?

Considere $\boxed{g(t) = t}$ então

$$E(g(t_2)) = E(X_2 - X_1) = E(X_2) - E(X_1) = p - p = 0$$

Assim, como $E(g(T_2)) = 0$ para $g(t) = t$, então $T_2 = X_2 - X_1$ não é uma estatística completa.

Família Exponencial $\quad X \sim f(x|\theta)$

$$f(x|\theta) = a(\theta) b(x) \cdot e^{c(\theta) \cdot d(x)}$$

$X_1, \dots, X_n$ a.a.

$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)$ é uma estatística suficiente minimal completa

Slide 44

Exemplo: $X_1, \ldots, X_n$ a.a. Poisson(λ)

$X \sim P(\lambda)$, então

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \cdot I_{\{0,1,\ldots\}}(x) =$$

$$= \underbrace{e^{-\lambda}}_{a(\lambda)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x!} \cdot I_{\{0,1,\ldots\}}(x)}_{b(x)} \cdot e^{\overset{d(x)}{x} \overset{\to c(\lambda)}{\ln \lambda}}$$

Como a distribuição Poisson e $\lambda \in \Theta = (0, \infty)$ pertence a família exponencial, então

$$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} d(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$ é uma estatística suficiente minimal completa

Slide 46

Exemplo: $X_1, \ldots, X_n$ a.a. $N(\mu, \sigma^2)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad \underline{\theta} = (\mu, \sigma^2)$

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I_{(-\infty,\infty)}(x) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x\right\}$$

temos que $c_1(\underset{\sim}{\theta}) = -\frac{1}{2}\sigma^2 \in (-\infty, 0)$ e

$c_2(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2} \in (-\infty, \infty)$, então

$$T(\underline{X}) = \left(\sum d_1(\underline{X}), \sum d_2(\underline{X})\right) = \left(\sum X_i^2, \sum X_i\right)$$

são estatísticas conjuntamente suficientes e completa.

Método de Momentos

momentos populacionais X momentos amostrais

$$\mu'_r = E(X^r) \qquad m'_j = \frac{\sum X_i^j}{n}$$

Slide 48

Exemplo: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a.a. $X \sim Exp(\theta)$

$r = 1 \Rightarrow \mu'_1 = E(X) = \frac{1}{\theta}$ (1º momento populacional)

$m'_1 = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$ (1º momento amostral)

Pelo método de momentos temos que

$\frac{1}{\hat{\theta}} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ é o estimador de θ pelo método de momentos

b) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a.a. $N(\mu, \sigma^2)$

Momentos populacionais

$$\begin{cases} \mu_1' = E(X) = \mu \\ \mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

Momentos amostrais

$$\begin{cases} m_1' = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X} \\ m_2' = \frac{\sum X_i^2}{n} \end{cases}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Comparando os momentos populacionais e amostrais, temos:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - 2\bar{X} \cdot \sum X_i + n\bar{X}^2$$

$$= \sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$

Logo, $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$ são os estimadores de μ e σ^2 pelo método de momentos

Slide 50

X: Face cara no lançamento de uma moeda
θ: probabilidade de sair a face cara

X_1 e X_2 a.a. X

$X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$

$$P(X=x\mid\theta) = \theta^{x} \cdot (1-\theta)^{1-x} \cdot I_{(0,1)}(x)$$

A função de verossimelhança é dada por

$$L(\theta\mid\underline{x}) = f(x_1, x_2\mid\theta) = \prod_{i=1}^{2} f(x_i\mid\theta) =$$

$$= \theta^{x_1} \cdot (1-\theta)^{1-x_1} \cdot \theta^{x_2} \cdot (1-\theta)^{1-x_2} =$$

$$= \theta^{x_1+x_2} \cdot (1-\theta)^{2-x_1-x_2}$$

Vamos simular as possibilidades

- $(x_1, x_2) = (0, 0)$

$$L(\theta\mid\underline{x}) = (1-\theta)^2$$

- $(x_1, x_2) = (1, 1)$

$$L(\theta\mid\underline{x}) = \theta^2$$

$\theta \in (0,1)$

- $(x_1, x_2) = (0, 1)$

$$L(\theta\mid\underline{x}) = \theta(1-\theta)$$