Trabalho 1 - Aula 1

Metaheurística

PG Biometria

Discente: *Maicon Centner Germano*

PROFA. HELENICE DE OLIVEIRA FLORENTINO SILVA

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Campus de Botucatu

Sumário

1

O que é a Teoria de Otimização?

A teoria da otimização é uma área da matemática e da ciência da computação que estuda como encontrar a melhor solução possível para um problema específico, geralmente definido através de uma função objetivo e um conjunto de restrições. O objetivo é maximizar ou minimizar a função objetivo, dependendo do contexto do problema. Essa teoria é amplamente aplicada em diversas áreas, como engenharia, economia, ciência da computação, física, finanças, logística, entre outras. Ela pode ser usada para resolver problemas práticos do mundo real, como planejamento de produção, alocação de recursos, roteamento de veículos, programação de projetos, investimento financeiro, entre muitos outros. A teoria da otimização abrange várias técnicas e métodos, como programação linear, programação não linear, programação inteira, algoritmos genéticos, busca heurística, otimização por enxame de partículas, entre outras. Cada método é adequado para resolver diferentes tipos de problemas de otimização, dependendo da natureza da função objetivo e das restrições envolvidas. Em resumo, a teoria da otimização é uma importante disciplina matemática que visa encontrar as melhores soluções possíveis para problemas complexos, maximizando benefícios ou minimizando custos, dadas as restrições impostas.

2

Fale um pouco do histórico da Otimização (Um parágrafo)

A pesquisa operacional ganhou notoriedade de suas atividades e aplicações durante a Segunda Guerra Mundial. Teve origem nas forças militares da Inglaterra e dos Estados Unidos, na qual era utilizada como suporte para tomada de decisões militares, tendo como princípio a aplicação de modelos matemáticos para a melhor utilização dos recursos disponíveis. Após a guerra essas aplicações foram adaptadas, para a necessidade e benefício da sociedade como um todo. A pesquisa operacional foi aplicada oficialmente pela primeira vez em 1938, na Inglaterra por um grupo de especialistas. Destacado entre eles estava Patrick Blackett, que foi considerado o pai da pesquisa operacional e o primeiro a aplicá-la no exército e na marinha. O primeiro estudo de pesquisa operacional se deu no reposicionamento de radares britânicos. No decorrer da guerra a aplicação da pesquisa operacional se tornava cada vez maior, e, motivado pelos êxitos das aplicações na Inglaterra, os Estados Unidos, em 1940, criou o National Defense Research Committee (NDRC). O gênero inicial da pesquisa operacional nos Estados Unidos também foi o estudo de problemas voltados à aplicação do radar. Após a guerra, um dos resultados do desenvolvido da pesquisa operacional foi o Algortimo Simplex, desenvolvido na Força Aérea dos Estados Unidos.

3

Outras nomenclaturas para a Otimização

Pesquisa Operacional, Programação Matemática, Otimização Combinatória, Otimização Multiobjetivo, Metaheurísticas etc.

4

O que é um problema de Otimização (ou modelo matemático de otimização)?

Um problema de otimização, também conhecido como modelo matemático de otimização, é um tipo específico de problema em que se busca encontrar a melhor solução possível, chamada de solução ótima, dentro de um conjunto de soluções viáveis, respeitando um conjunto de restrições impostas. A melhor solução é aquela que maximiza ou minimiza uma função objetivo específica, dependendo do contexto do problema.

5

Nomenclatura dos principais elementos de um Problema de Otimização

x é o vetor das variáveis de decisão, f(x) é a função objetivo, e ômega é o conjunto de restrições.

6

Dê um exemplo de um problema de otimização (pode ser um problema didático)

Um exemplo de problema de otimização pode ser o problema da dieta, onde estamos interessados em determinar a melhor combinação de alimentos que atenda às necessidades nutricionais/calorias, a um menor custo (minimização).

7 Baseado nos elementos de um problema de Otimização responda:

Problema de Programação Linear (PPL): problemas reais cujos modelos são representados por expressões lineares e que são comumente chamados de problemas de programação linear (PPL). Tais problemas consistem em maximizar ou minimizar uma função linear, denominada função objetivo, respeitando-se um conjunto de igualdades ou desigualdades que recebem o nome de restrições do modelo, que determinam uma região viável, onde será obtida, caso exista, a melhor das soluções viáveis do problema, ou seja, a solução ótima do PPL.

Problema de Programação Não Linear (PPNL): Um Problema de Programação Não Linear (PPNL) é um tipo de problema de otimização em que a função objetivo e/ou as restrições não são lineares. Isso torna o problema mais complexo, pois não existem soluções analíticas diretas. Em vez disso, métodos numéricos iterativos são usados para encontrar soluções aproximadas.

Programação Linear Inteira (PPLI): Um problema de Programação Linear Inteira (PLI) é um problema de Programação Linear (PL) em que todas ou alguma(s) das suas variáveis são discretas (têm de assumir valores inteiros).

Programação Linear Binária ou 0-1 (PPLB): Programação Linear Binária (PLB) é um tipo de problema de programação linear em que as variáveis de decisão são restritas a assumir apenas valores binários (0 ou 1).

Problema de Programação Linear Inteira Mista (PPLIM): envolve uma combinação de variáveis inteiras e variáveis contínuas.

Problema de Programação Não Linear Inteira (PPNLI): é uma classe de problemas de otimização que combina restrições não lineares com restrições discretas (as variáveis de decisão devem ser números inteiros).

Problema de Programação Não Linear Binária ou 0-1 (PPNLB): é uma classe de problemas de otimização que combina elementos da programação não linear com variáveis binárias. Nesse tipo de problema, as variáveis de decisão só podem assumir valores binários, ou seja, 0 ou 1, em vez de valores contínuos. As variáveis binárias representam decisões de "sim"ou "não", "ativado"ou "desativado", ou qualquer outra escolha discreta entre duas opções mutuamente exclusivas.

Problema de Programação Não Linear Inteira Mista (PPNLIM): é uma classe de problemas de otimização que combina elementos da programação não linear com restrições inteiras e possivelmente variáveis contínuas. Nesse tipo de problema, algumas variáveis de decisão são restritas a assumir apenas valores inteiros, enquanto outras podem assumir valores contínuos.

8 Convexidade

Um conjunto convexo é um conjunto de pontos em que, para qualquer par de pontos pertencentes ao conjunto, a linha que os conecta também está totalmente contida dentro do conjunto. Formalmente, um conjunto C é convexo se, para todos os pontos x e y pertencentes a C e para todo no intervalo [0, 1], o ponto x + (1 -)y também pertence a C. A convexidade é uma propriedade crucial em problemas de otimização, pois traz diversas vantagens e garante a existência e unicidade de soluções ótimas em muitos casos. A importância da convexidade pode ser resumida nas seguintes razões: Unicidade da solução ótima; Eficiência na busca; Garantia de otimalidade local; Facilita o uso de métodos analíticos; Robustez.

9

Para um problema de otimização, defina:

Solução factível: é aquela que atende o conjunto de restrições; Solução infactível: quando pelo menos uma restrição não é atendida; Solução ótima: é quando a solução encontrada atende todas as restrições e o valor da fo é o máximo ou mínimo (depende do objetivo), dentro da região factível; Problema infactível: é quando o problema é modelado de maneira que impossibilite encontrar uma solução factível, ou seja, não é possível a solução do problema.

10

Busca de solução para um Problema de otimização:

Métodos exatos para solução de problemas de otimização são algoritmos matemáticos que buscam encontrar a solução ótima de forma precisa e completa, sem usar aproximações. Eles exploram todo o espaço de busca e garantem a melhor solução possível, tornando-os úteis quando a precisão é fundamental. Alguns exemplos incluem programação linear, inteira, não linear, algoritmos de ramificação e corte, entre outros. Métodos aproximativos são algoritmos que buscam encontrar soluções próximas ou razoavelmente boas para problemas de otimização sem garantir a solução ótima. São mais rápidos e eficientes, adequados para problemas complexos, mas não oferecem garantias de convergência para a solução globalmente ótima. Use métodos exatos quando a precisão e a convergência global são fundamentais, especialmente em problemas convexos e de baixa complexidade. Use métodos aproximativos em problemas de grande escala, intratáveis ou com restrições de tempo, buscando soluções aceitáveis mais rapidamente, mesmo sem garantia de otimalidade global. A combinação de ambos (métodos híbridos) pode ser útil para alcançar eficiência e alta qualidade de solução em problemas complexos.

11 Modelagem

A modelagem ou formulação de um problema de otimização envolve a tradução de um problema do mundo real para uma estrutura matemática que possa ser resolvida por algoritmos de otimização. Os principais passos para modelar um problema de otimização são:

Definir a função objetivo: A primeira etapa é identificar a quantidade que você deseja otimizar (maximizar ou minimizar). Essa quantidade é conhecida como função objetivo e geralmente é representada por uma função matemática que depende das variáveis de decisão do problema. Por exemplo, em um problema de planejamento de produção, a função objetivo pode ser maximizar o lucro total da produção.

Identificar as variáveis de decisão: As variáveis de decisão são as quantidades que você pode controlar ou alterar para influenciar a função objetivo. Elas representam as escolhas que devem ser feitas para resolver o problema. Por exemplo, em um problema de planejamento de produção, as variáveis de decisão podem ser a quantidade de cada produto a ser produzido em cada período de tempo.

Estabelecer as restrições: As restrições são as condições que devem ser atendidas para que a solução seja viável. Elas limitam as combinações possíveis das variáveis de decisão. As restrições podem ser lineares ou não lineares, e podem incluir restrições de igualdade ou desigualdade. Por exemplo, em um problema de alocação de recursos, as restrições podem limitar a quantidade de recursos disponíveis para serem alocados aos diferentes projetos.

Formular a função objetivo e as restrições matematicamente: Uma vez que a função objetivo e as restrições são identificadas, elas devem ser traduzidas em equações ou inequações matemáticas, representando a relação entre as variáveis de decisão e os objetivos ou limitações do problema.

Definir o domínio das variáveis de decisão: O domínio de cada variável de decisão é o conjunto de valores possíveis que ela pode assumir. Essa definição deve ser baseada em considerações práticas e restrições físicas ou operacionais do problema. Por exemplo, se uma variável representa a quantidade de um item, seu domínio deve ser não negativo.

Especificar o tipo de solução procurada: Determine se a solução desejada é um valor único ou um conjunto de soluções, e se as soluções devem ser inteiras ou contínuas.

Validar e revisar o modelo: Verifique se o modelo matemático criado representa corretamente o problema do mundo real. Faça revisões para garantir que todos os aspectos importantes do problema estejam incluídos e que a formulação seja consistente com os objetivos e as restrições.

Após a etapa de modelagem, o problema pode ser resolvido usando algoritmos de otimização, que encontrarão as melhores combinações de variáveis de decisão para atender às restrições e otimizar a função objetivo de acordo com os critérios definidos.

Problema da dieta: O problema da dieta foi um dos primeiros sobre otimização. George Joseph Stigler, no final da década de 30, levantou o problema da dieta ideal para tentar satisfazer a preocupação do exército americano, que procurava a maneira mais econômica de alimentar as suas tropas, garantindo ao mesmo tempo, certos requisitos nutricionais.

Este tipo de problema pode ser enfocado de diferentes formas, tais como: minimizar os custos de aquisição, dieta para o gado, dieta de emagrecimento que atenda a determinados níveis de calorias, proteínas, hidratos de carbono etc. Exemplo:

Propõe-se alimentar o gado de uma fazenda com a dieta mais econômica. Tal dieta deve conter quatro tipos de nutrientes identificados como: A, B, C e D. Estes componentes encontram-se em dois tipos de ração: M e N. A quantidade, em gramas, de cada componente por quilo destes alimentos para animais é dada na tabela a seguir:

	A	B	C	D
M	100	-	100	200
N	-	100	200	100

A dieta diária de um animal deve ser composta por pelo menos 0,4 Kg do componente A, 0,6 Kg do componente B, 2 Kg do componente C, e 1,7 Kg do componente D. O composto M custa 0,2 €/Kg e o composto N custa 0,08 €/Kg. Qual é a quantidade que deve ser adquirida de ração M e N para que o gasto em alimentos seja o menor possível?

Solução: Pretende-se misturar os tipos de rações para obter uma dieta equilibrada contendo as quantidades diárias recomendadas de cada nutriente para os animais.

Determinar as variáveis de decisão e expressá-las algebricamente. Neste caso:

X1: quantidade de ração M em Kg X2: quantidade de ração N em Kg Determinar as restrições e expressá-las como equações ou inequações dependentes das variáveis de decisão. Tais restrições são deduzidas da composição necessária para a dieta diária (em Kg):

Componente A: 0.1·X1 + 0·X2 0.4

Componente B: 0·X1 + 0.1·X2 0.6

Componente C: 0.1·X1 + 0.2·X2 2

Componente D: 0.2·X1 + 0.1·X2 1.7

Expressar todas as condições estabelecidas implicitamente pela natureza das variáveis: que não possam ser negativas, que sejam inteiras, que somente possam ter determinados valores. Neste caso, a única restrição é que as quantidades de ração que fazem parte da dieta não podem ser negativas:

X1 0

X2 0

Determinar a função objetivo:

Minimizar Z = 0.2·X1 + 0.08·X2

Resolver o problema utilizando algum método.

12 Softwares comerciais

Existem vários softwares especializados em resolver problemas de otimização em diversas áreas. Abaixo estão alguns exemplos populares e o tipo de problema que eles são capazes de resolver:

CPLEX: O IBM CPLEX é uma ferramenta poderosa para resolver problemas de Programação Linear (PL), Programação Inteira (PI), Programação Quadrática (QP) e Programação Não Linear (PNL). É amplamente utilizado em áreas como logística, planejamento de produção, transporte e design de redes.

Gurobi: O Gurobi é outro software avançado de otimização, semelhante ao CPLEX, que resolve problemas de PL, PI, QP e PNL. É amplamente utilizado em indústrias como logística, transporte, manufatura e finanças.

LINDO/LINGO: O LINDO e o LINGO são softwares especializados em resolver problemas de Programação Linear e Inteira. São usados em várias aplicações, como planejamento de produção, programação de projetos e alocação de recursos.

SCIP: SCIP (Solving Constraint Integer Programs) é uma biblioteca de código aberto para resolver problemas de Programação Inteira e Mista. É adequado para problemas complexos e de grande escala.

MATLAB Optimization Toolbox: A Optimization Toolbox do MATLAB oferece várias funções para resolver problemas de otimização contínua e discreta, incluindo Programação Linear, Quadrática e Não Linear. É amplamente utilizado em pesquisa acadêmica e na indústria.

PuLP: O PuLP é uma biblioteca de código aberto para resolver problemas de otimização lineares e inteiras usando a linguagem de programação Python. É adequado para problemas de pequeno a médio porte.

AMPL: O AMPL (A Mathematical Programming Language) é uma linguagem de modelagem para resolver problemas de otimização lineares, não lineares, inteiras e mistas. É usado em pesquisa acadêmica e em aplicações em várias indústrias.

Pyomo: O Pyomo é uma biblioteca de modelagem e otimização em Python que suporta uma ampla gama de problemas de otimização, incluindo Programação Linear, Não Linear, Inteira e Mista.

13 Leia e discuta sobre complexidade computacional de um problema de otimização:

Complexidade computacional é uma medida que busca avaliar o consumo de recursos computacionais (como tempo e espaço) necessários para resolver um problema em função do tamanho da entrada. Em geral, quanto maior o tamanho da entrada, mais recursos são necessários para resolver o problema.

Problemas P (polinomiais) são problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial. Isso significa que existe um algoritmo que encontra a resposta em um tempo que cresce no máximo de forma polinomial com o tamanho da entrada do problema. Problemas P são considerados eficientemente solucionáveis. Por outro lado, problemas NP (não-polinomiais) são problemas de decisão para os quais, se a resposta é "sim", é possível verificar em tempo polinomial a validade dessa resposta. Ou seja, mesmo que não exista um algoritmo polinomial conhecido para encontrar a resposta diretamente, é possível verificar a resposta em tempo polinomial se ela for fornecida. Os problemas NP não têm necessariamente uma solução que possa ser encontrada em tempo polinomial.

Um problema NP-Completo é um problema que pertence à classe NP e possui uma propriedade especial: todos os problemas em NP podem ser transformados, em tempo polinomial, em instâncias deste problema. Ou seja, se encontrássemos um algoritmo polinomial para resolver qualquer problema NP-Completo, poderíamos resolver eficientemente qualquer problema em NP.

Um problema NP-Difícil (ou Hard) é um problema para o qual não sabemos se pertence à classe NP ou não, mas sabemos que todos os problemas em NP podem ser transformados, em tempo polinomial, em instâncias deste problema. Diferentemente dos problemas NP-Completos, não é necessário que o próprio problema NP-Difícil seja resolvido em tempo polinomial.

A principal diferença entre NP-Completo e NP-Difícil é que os problemas NP-Completos pertencem à classe NP, enquanto os problemas NP-Difíceis podem ou não pertencer a NP. Ambos possuem a propriedade de que todos os problemas em NP podem ser transformados em instâncias desses problemas, mas apenas os NP-Completos têm a garantia de pertencer à classe NP.

14

O que é uma Heurística? O que é uma Metaheurística? O que é uma Mateheurística? Quando podemos usá-las?

Uma heurística é uma técnica ou estratégia que busca encontrar soluções aproximadas para problemas complexos de forma mais rápida, embora não haja garantia de que a solução encontrada seja a melhor ou ótima. As heurísticas são geralmente baseadas em regras simples, intuições ou métodos que exploram o espaço de busca de maneira eficiente, mas não seguem uma abordagem sistemática ou matematicamente rigorosa.

Uma metaheurística é uma classe mais ampla de algoritmos que guiam a busca de soluções em espaços de busca complexos e de alta dimensão, combinando ou adaptando várias heurísticas em uma estrutura mais geral. Diferentemente das heurísticas tradicionais, as metaheurísticas são mais flexíveis e podem ser aplicadas em diferentes tipos de problemas sem a necessidade de conhecimento específico do domínio. Portanto, uma metaheurística é uma heurística que abrange uma abordagem mais abrangente para resolver problemas de otimização, usando diferentes técnicas e combinando-as para explorar de forma inteligente o espaço de busca em busca de soluções aceitáveis.

As metaheurísticas são úteis em situações em que os métodos exatos são inviáveis devido à complexidade do problema ou ao tamanho do espaço de busca. Elas podem ser usadas quando: O problema é intratável ou NP-difícil: Problemas para os quais não existem algoritmos exatos eficientes e, portanto, requerem abordagens aproximativas.

Problemas de grande escala: Quando o espaço de busca é extenso e os métodos exatos são computacionalmente inviáveis.

Soluções aproximadas são suficientes: Em problemas onde a solução global ótima não é essencial, mas soluções razoáveis são aceitáveis.

Flexibilidade: As metaheurísticas são aplicáveis a uma ampla variedade de problemas sem a necessidade de adaptar o algoritmo para cada caso específico.

Exemplos de metaheurísticas incluem algoritmos genéticos, algoritmos de enxame (como o PSO - Particle Swarm Optimization), busca tabu, otimização por colônia de formigas (ACO - Ant Colony Optimization), simulated annealing, entre outros. Essas técnicas são amplamente utilizadas em pesquisa, indústria e ciência para resolver problemas complexos em diversas áreas, como logística, engenharia, aprendizado de máquina, planejamento e otimização.

Referências

OYAMA FILHO, Wilson Kataota; SANTANA, Saymon Henrique Santos. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

ALVES, Rui; DELGADO, Catarina. Programação linear inteira. 1997.

OYAMA FILHO, Wilson Kataota; SANTANA, Saymon Henrique Santos. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

BONINI, Anderson Carlos et al. Um estudo teórico sobre a história da pesquisa operacional. Anais do EVINCI-UniBrasil, v. 1, n. 4, p. 1666-1670, 2015.

ARROYO, José Elias Claudio et al. Heurísticas e metaheurísticas para otimização combinatória multiobjetivo. Doutorado em Engenharia Elétrica (Tesede doutorado)-Faculdade de EngenhariaElétrica e de Computação da UniversidadeEstadual de Campinas, Campinas, 2002.

ROJAS, Alexandre. Resolvendo problemas de programação linear com o MS solver. Cadernos do IME-Série Informática, v. 13, p. 69-76, 2002.