

## 第二章 离散时间信号与系统

### 1. 离散时间信号

幅度连续和幅度离散

$P_s$ :最小量化单位

序列中的第  $n$  个数据  $x[n]$  可视为模拟信号  $x_a(t)$  在时刻  $nT$  处的采样点

序列的运算

#### 1. 移位

当  $m > 0$  时,  $x[n-m]$  表示依次右移  $m$  位;  $x[n+m]$  表示依次左移  $m$  位

#### 2. 翻褶

如果有  $x[n]$ , 则  $x[-n]$  是以  $n=0$  为对称轴将  $x[n]$  加以翻褶的序列

#### 3. 和

两序列的和是指同序号  $n$  的序列值逐项对应相加得一新序列

#### 4. 乘积

指同一序号  $n$  的序列值逐项对应相乘

#### 5. 尺度变换

(1) 抽取  $x[n] \rightarrow x[Mn]$

(2) 插值  $x[n] \rightarrow x[n/M]$

单位样本序列

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

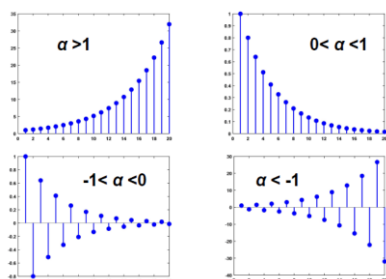
任何序列都可以用一组不同延迟的单位样本序列的加权和来表示、

单位跃迁序列

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \rightarrow u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k], \quad u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

指数序列

$$x[n] = A\alpha^n (\alpha \text{ 为实数})$$



$$x[n] = A\alpha^n (\alpha \text{ 为复数}) \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0} \quad A = |A|e^{j\phi}$$

$$x[n] = A\alpha^n = |A|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n}$$

$$= |A| |\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

$$= |A| |\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A| |\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi)$$

## 序列的周期性

讨论复指数信号  $x[n] = Ae^{j\omega n}$  或实信号  $x[n] = A\cos(\omega n + \Phi)$  只需考虑  $2\pi$  频率范围即可。

$$\omega N = 2\pi k \rightarrow N = 2\pi k / \omega$$

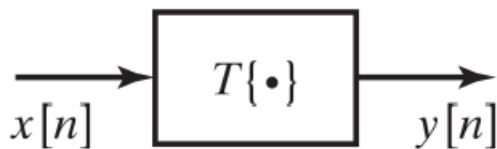
## 模拟频率、模拟角频率、数字频率

模拟频率:  $f = 1/T$ , [Hz] or [1/s]

模拟角频率:  $\Omega = 2\pi f$ , [rad/s]

数字角频率:  $\omega = \Omega T_s = 2\pi f / f_s$ , [rad]

## 2. 离散时间系统



$$y[n] = T\{x[n]\}$$

滑动平均:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \cdots + x[n] \\ &\quad + x[n-1] + \cdots + x[n-M_2]\}. \end{aligned}$$

该系统输出序列的第  $n$  个样本  $y[n]$ , 是输入序列第  $n$  个样本  $x[n]$  前后共  $M_1 + M_2 + 1$  个样本的平均值

## 无记忆系统和有记忆系统

无记忆系统: 系统输出  $y[n]$  仅取决于当前时刻的输入  $x[n]$

记忆系统: 当前时刻的输出, 不仅与过去时刻的输入或输出有关, 也可能与未来时刻的输入或输出有关

## 线性系统和非线性系统

叠加定理 = 齐次性 + 可加性

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$

齐次性

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

可加性

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

## 时不变系统和时变系统

时不变系统: 输入信号的时移导致输出信号相同的时移

判定方法: 令  $x_1[n] = x[n-n_0]$ ,  $y_1[n]$  与  $y[n-n_0]$  是否相等

$$y_1[n] = x_1[-n] = x[-n-n_0]$$

$$y[n-n_0] = x[-(n-n_0)] = x[-n+n_0]$$

Eg:  $y[n] = x[-n]$  -->

$$y_1[n] \neq y[n-n_0]$$

系统输出仅取决于当前时刻或过去时刻的输入，与未来时刻的输入无关（输入没有变化之前，输出不变）  
稳定系统和非稳定系统

$$|x[n]| < B_x, \quad B_x < \infty \quad \Leftrightarrow \quad |y[n]| < B_y, \quad B_y < \infty$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$\begin{array}{rrrrrr} & & 4 & 2 & 3 & 1 & x[n] \\ & & & 2 & 4 & 1 & h[n] \\ \hline & & 4 & 2 & 3 & 1 & \\ & 16 & 8 & 12 & 4 & & \\ 8 & 4 & 6 & 2 & & & \\ \hline 8 & 20 & 18 & 16 & 7 & 1 & y[n] \end{array}$$

单位脉冲响应:  $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

级联系统：

移位单位样本序列与任何信号  $x[n]$  的卷积，只是将  $x[n]$  作相同的移位

$$x[n] * \delta[n-n_d] = \delta[n-n_d] * x[n] = x[n-n_d]$$

## 5. 线性常系数差分方程

$$y(n) \sim x(n): \quad \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

阶数  $N$ ：输出序列  $y[n]$  移位数的最大值与最小值之差

线性： $y(n-k)$  都只有一次幂，且没有  $y(n-k)$  彼此相乘。只包含输入序列和输出序列的一次幂项，不包含高次项或交叉乘积项，否则为非线性

线性常系数差分方程的求解：

### (1) 时域经典法

先分别求齐次解与特解，然后代入边界条件求待定系数

### (2) 迭代法

简单、适合计算机，只能得到数值解，不能给出完整的解析式（闭式解）

### (3) 零输入响应与零状态响应

利用求齐次解的方法得到零输入响应，利用卷积和求零状态响应

### (4) 变换域法

利用  $z$  变换法解差分方程

### (1) 时域经典法

$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$  其中， $y_p[n]$  为特解（unique solution） $y_h[n]$  为齐次解（homogeneous solution）

齐次解时假设  $x[n]=0$  时求得的解。

第一步：求差分方程的齐次解

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n \quad (\text{含 } N \text{ 个未知系数 } A_m)$$

第二步：求差分方程的特解

第三步：写出差分方程的通解（含  $N$  个未知系数）

第四步：根据边界条件（初始条件），求出通解中的  $N$  个未知系

数的值，即可写出差分方程的完全解

### (2) 迭代法——简单、适合计算机

线性常系数差分方程在单独取出  $y[n]$  可以得到下面的等式

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k].$$

如果对所有  $n$  的输入  $x[n]$  以及一组辅助值，如  $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$  都给定的话，那么  $y[0]$  就能通过上面的式子求出，然后又能够通过同样的方法求出  $y[1]$ ，以此类推。最终能递推地得到任意  $n$  上的输出值  $y[n]$

补：初始松弛条件：

满足因果性的 LTI 系统在未开始输入的情况下是不会有输出的

LTI 系统的“因果性”与“初始松弛条件”等价：“零输入时零输出”

## 6. 离散时间信号与系统的频域表示

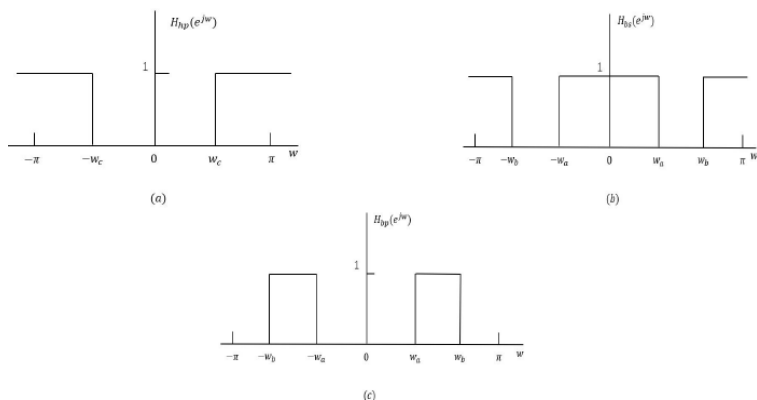
信号可以表示成多个不同频率的复指数的线性组合的形式，而根据叠加定理，信号经过线性时不变系统后得到响应的输出。

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n} \quad y[n] = \sum_k a_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$

频率响应  $H(e^{j\omega})$  频率为  $\omega$ ，周期为  $2\pi$ 。在区间  $-\pi < \omega \leq \pi$  上，靠近 0 处为低频，靠近  $\pm\pi$  处频率为高频。

理想频率选择性滤波器

其频率响应在某一频率范围内为 1，其余频率上为 0



图(a)高通滤波器；(b)带阻滤波器；(c)带通滤波器

## 7. 用傅里叶变换表示序列

**DTFT:**  $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

**IDTFT:**  $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

DTFT 的收敛性

要求级数收敛，就要求  $|X(e^{j\omega})| < \infty$

若  $x(n)$  绝对可和，则  $x(n)$  的傅里叶变换一定存在。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^N x(n) e^{-j\omega n} \right| = 0$$

**一致收敛条件 uniform convergence**

## 8. 傅里叶变换的性质

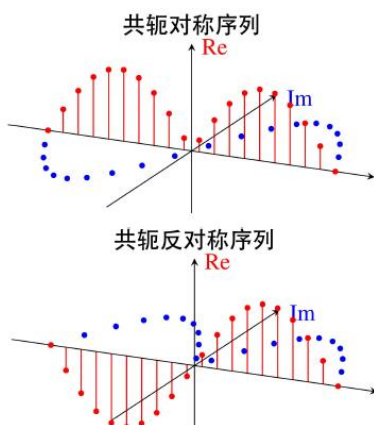
共轭对称序列：

$$x_e[n] = x_e^*[-n]$$

共轭反对称序列：

$$x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

\*记作复数共轭



Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$ )
4. $j\Im\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$ )
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$ )	$X_R(e^{j\omega}) = \Re\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$ )	$jX_I(e^{j\omega}) = j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$ X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega}) $ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$ )	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$ )	$jX_I(e^{j\omega})$

## 9. 傅里叶变换定理

Sequence	Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ ( $n_d$ an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $n x[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$
7. $x[n] y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
Parseval's theorem:	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega$	

线性

时移

频移

时间倒置

频域微分

卷积

调制或加窗

帕斯瓦尔定理

## 第三章 z 变换

### 1. z 变换

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

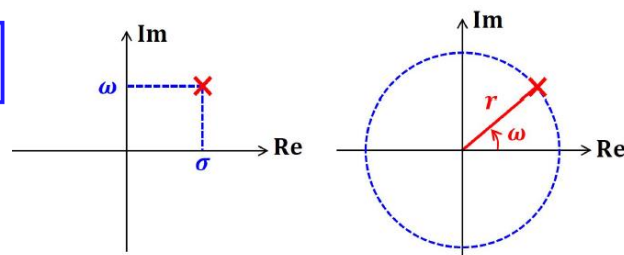
$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$\boxed{z = re^{j\omega}}$   
 极坐标

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (re^{j\omega})^{-n}$$

$s = \sigma + j\omega$   
笛卡尔(直角)坐标

$z = re^{j\omega}$   
极坐标



DTFT 是关于  $\omega$  的周期函数，周期为  $2\pi$ ； $z$  变换是 DTFT 的推广，必须体现上述  $\omega$  的周期性。  
 $z$  变换将 DTFT 从单位圆推广到整个  $z$  平面（收敛域内）。

## z 变换的收敛域

z 变换的收敛域由 z 平面内以原点为中心的圆环组成

若  $z=z_1$  在收敛域内，则全部由  $|z|=|z_1|$  确定的圆上的 z 值也一定在收敛域内

若收敛域包括单位圆，序列的傅里叶变换收敛；若收敛域不包括单位圆，DTFT 就绝不收敛

单位圆上的 z 变换相当于序列的傅里叶变换

## z 变换的零点和极点

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

使  $X(z)=0$  的 z 称为  $X(z)$  的零点，而使  $X(z)$  为无穷大的 z 称为  $X(z)$  的极点

零点为分子多项式的根，极点（对于有限 z 值）为分母多项式的根

$$X(z) = K \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_{zi})}{\prod_{j=1}^N (z - z_{pj})} \quad \begin{array}{l} \blacksquare \text{ 一阶极点: } z_{pj} \\ \blacksquare \text{ 一阶零点: } z_{zi} \end{array}$$

$$= \frac{A_1 z}{z - z_{p1}} + \frac{A_2 z}{z - z_{p2}} + \cdots + \frac{A_N z}{z - z_{pN}}$$

右边分量  $\Downarrow$   $\Downarrow$  左边分量

$$\xleftrightarrow{z} A_1 (z_{p1})^n u[n] - A_2 (z_{p2})^n u[-n-1] + \cdots$$

有限序列、右边序列、左边序列、双边序列

基本 z 变换对

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All $z$
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
4. $\delta[n-m]$	$z^{-m}$	All $z$ except 0 (if $m > 0$ ) or $\infty$ (if $m < 0$ )
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
9. $\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
10. $\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
11. $r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
12. $r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z  > 0$

## 2. z 变换收敛域的性质

(1) ROC 是 z 平面上以原点为中心的环形区域，不包含极点

(2) 对于有限长序列，ROC 为全 z 平面，可能不包含  $z=0$  或  $z=\pm\infty$

(3) ROC 与因果性、稳定性

因果 —— ROC 包含  $|z|=\pm\infty$

反因果 —— ROC 包含  $|z|=0$

稳定 —— ROC 包含  $|z|=1$

因果稳定性 —— 系统函数  $H(z)$  必须在从单位圆 ( $|z|=1$ ) 到  $z=\infty$  的整个平面内收敛 ( $1 \leq |z| \leq \infty$ )  
系统函数  $H(z)$  的全部极点必须在 z 平面的单位圆内



(4) 有理  $X(z)$  的 ROC

- 1) 边界圆是其极点或无穷远
- 2) 右边信号 ROC 为最外极点圆之外
- 3) 左边信号 ROC 为最里极点圆之内
- 4) 双边信号 ROC 为左边分量和右边分量收敛域交集 (环)

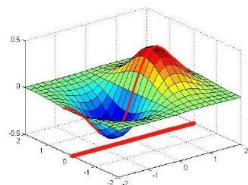
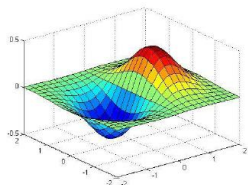
(5) 若  $X(z)$  ROC 包含单位圆, 则  $x[n]$  包含傅氏变换 (DTFT)

CTFT  $\rightarrow s$

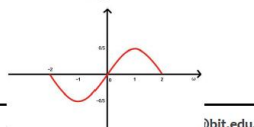
$s \rightarrow z$

实频率  $\Omega$  到复频率  $s = \sigma + j\Omega$

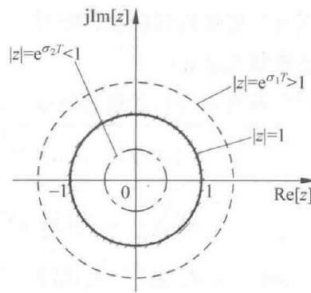
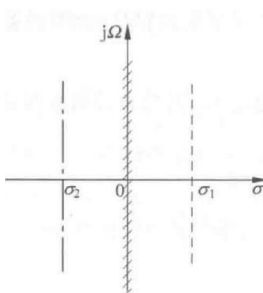
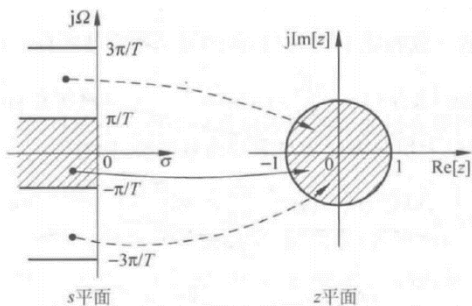
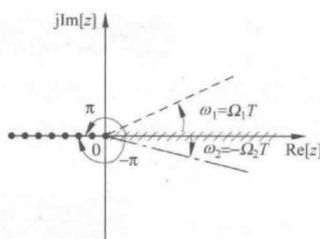
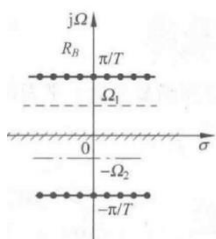
$$r = e^{\sigma T}$$



CTFT 是  $s$  在虚轴的剖面



$$\omega = \Omega T$$



$\sigma = 0$  ( $s$  平面的虚轴) 对应于  $r = 1$  ( $z$  平面的单位圆)

$\sigma < 0$  ( $s$  平面的左半平面) 对应于  $r < 1$  ( $z$  平面的单位圆内部)

$\sigma > 0$  ( $s$  平面的右半平面) 对应于  $r > 1$  ( $z$  平面的单位圆外部)

$s$  平面每增加  $2\pi/T$  的水平横带, 即又一次映射成整个  $z$  平面

$s$  平面到  $z$  平面的映射是多值映射

### 3. $z$ 逆变换

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) r^n e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(z) z^n d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\omega=(2\pi)} X(z) z^{n-1} dz \\ &\quad dz = j r e^{j\omega} d\omega = j z d\omega \end{aligned}$$

$z$  变换的求解方法

1) 观察法

利用典型变换

2) 部分分式展开法

$$\text{形式一: } X(z) = \frac{\prod_j a_j (z - z_j)}{\prod_l b_l (z - z_l)}$$

$$\text{形式二: } X(z) = \frac{\prod_j a_j (1 - z_j z^{-1})}{\prod_l b_l (1 - z_l z^{-1})}$$

1. 把  $X(z)$  变成  $X(z)/z \equiv Q(z)$  (真分式)

如果是真分式, 可以直接进行分解:

2. 对  $Q(z)$  进行部分分式分解  $Q(z) = \sum_i \frac{A_i}{z - z_i}$

3. 分解后的  $Q(z)$  乘以  $z$  (即变回  $X(z)$ )

$$X(z) = \sum_i A_i \frac{1}{1 - z_i z^{-1}}$$

$$Q(z)z = X(z) = \sum_i A_i \frac{z}{z - z_i} = \sum_i A_i \frac{1}{1 - z_i z^{-1}}$$

$$A_i = [X(z)(1 - z_i z^{-1})] \Big|_{z=z_i}$$

4. 对上式各项进行反变换



### 3) 幂级数展开法 (长除法)

Consider the  $z$ -transform

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (3.55)$$

Since the ROC is the exterior of a circle, the sequence is a right-sided one. Furthermore, since  $X(z)$  approaches a finite constant as  $z$  approaches infinity, the sequence is causal. Thus, we divide, so as to obtain a series in powers of  $z^{-1}$ . Carrying out the long division, we obtain

$$1 - az^{-1} \overline{) \begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \\ 1 - az^{-1} \\ \hline az^{-1} - a^2z^{-2} \\ \hline a^2z^{-2} - a^3z^{-3} \\ \hline \dots \end{array}}$$

or

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots$$

Hence,  $x[n] = a^n u[n]$ .

### 4) \* 围线积分法 (留数法)

#### 4. z 变换性质

线性:  $ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z)$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$$

时移:  $\Rightarrow$  ROC:  $R$  但在  $z = 0$  和/或  $|z| = \infty$  可能会有增删

尺度变换:  $x[n]z_0^n \leftrightarrow X(z/z_0) \quad \text{ROC: } |z_0|R$

$z$  域微分:  $nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} X(z) \quad \Rightarrow \text{ROC: } R$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*) \quad \Rightarrow \text{ROC: } R$$

共轭与共轭对称:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{实信号} \quad \text{zT具共轭对称性} \quad X(z) \leftrightarrow X^*(z^*) \\ x[n] \quad \text{零、极点必共轭成对出现} \end{array} \right.$

时域翻褶:  $x[-n] \xleftrightarrow{z} X(z^{-1}) \quad \Rightarrow \text{ROC: } 1/R$

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z)$$

ROC: 包含  $R_1 \cap R_2$

卷积性质: 如果相乘时出现零极点相消, ROC可能会扩大

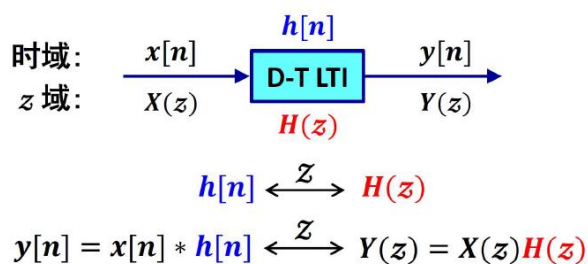
$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k) \quad \Rightarrow \text{ROC: } R^{1/k}$$

时域扩展: 其中:  $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ 是 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

若  $n < 0$  时  $x[n] = 0$ , 则

初值定理:  $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

## 5. z 变换和 LTI 系统



### LTI 系统因果稳定条件

对于一个因果 LTI 系统:

$h[n]$ 是因果信号:  $h[n]=h[n]u[n]$

$H(z)$ 收敛域包含外边界圆且包含 $|z| = \infty$

如果系统函数是有理的:

ROC 是最外极点之外，且包含  $|z| = \infty$

分子级次 $\leq$ 分母级次

稳定系统  $H(z)$  的 ROC 包含单位圆—— $H(z)$  的全部极点必须位于单位圆内

## LTI 系统频响特性

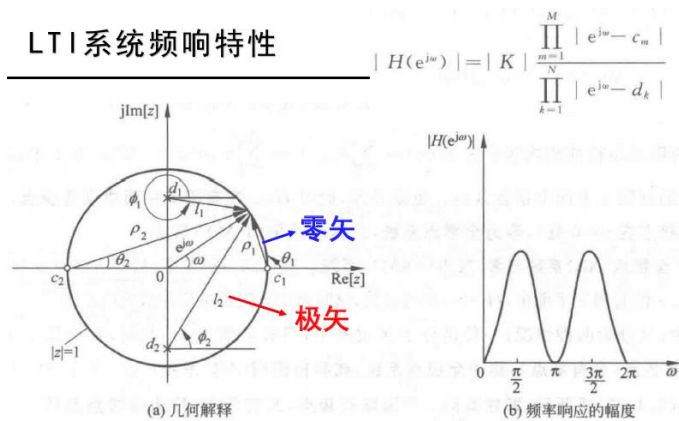
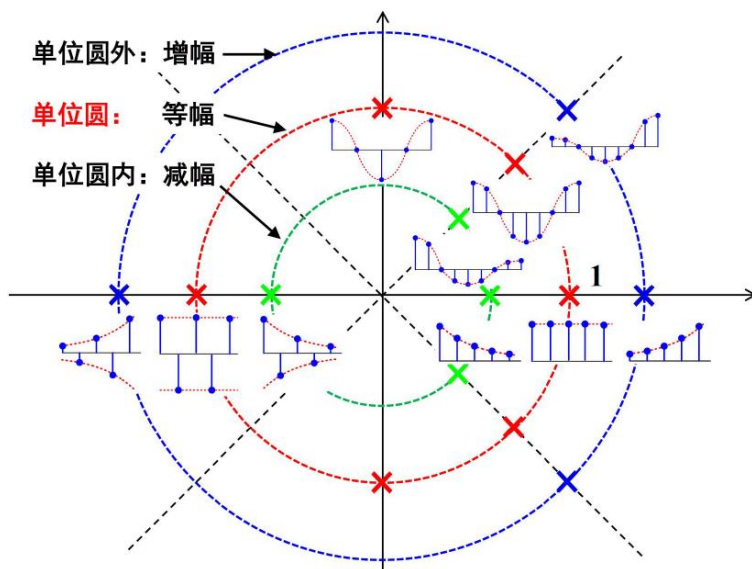


图 2.28 频率响应的几何解释

频率响应的幅度等于各零矢长度之积除以各极矢长度之积再乘上常数 $|K|$

### 极点位置影响频响位置及其尖锐程度

### 零点位置影响谷点位置及其凹陷程度



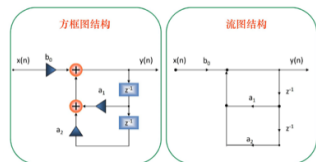
## 第六章 离散时间系统结构

### 1. 线性常系数差分方程的方框图表示

基本运算单元	方框图	流图
单位延时		
常数乘法器		
加法器		

例如：

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] \quad \text{系统方程为:} \quad H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



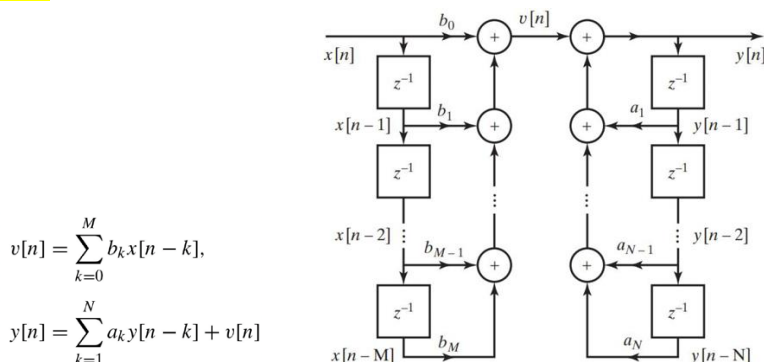
$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

对于高阶的差分方程：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

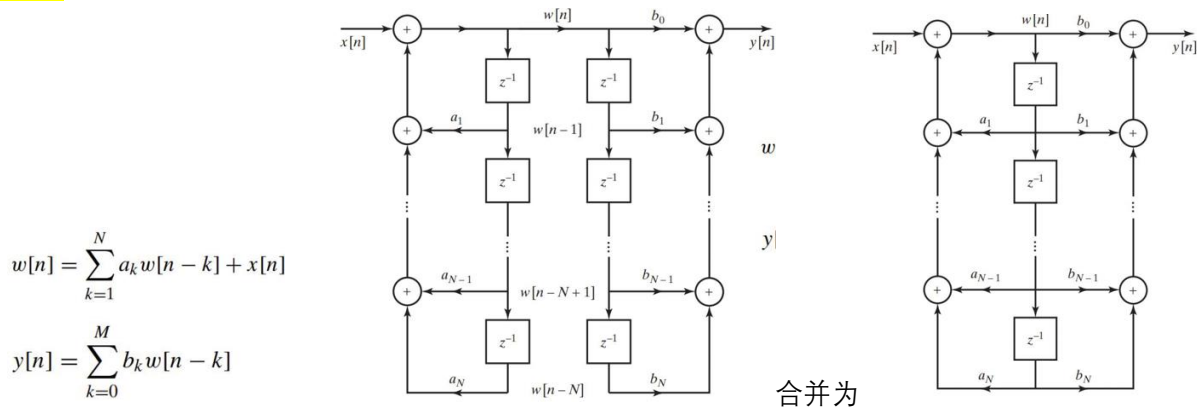
我们容易得到其对应的系统函数：

直接 I 型



两个网络级联，第一个横向结构 M 节掩饰网络实现零点，第二个有反馈的 N 节延时网络实现极点，共需 (N+M) 级延时单元

直接 II 型



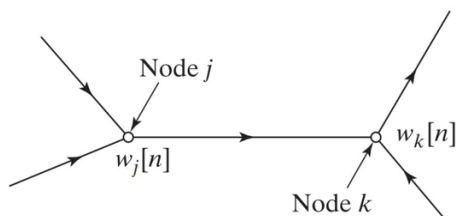
只需实现 N 阶滤波器所需的最少的 N 个延时单元

不同流图对应不同的计算资源和算法

### 2. 线性常系数差分方程的信号流图表示

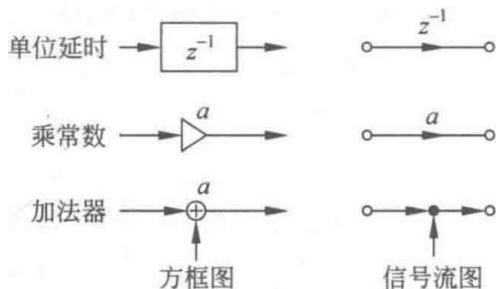
信号流图：连接节点的有向支路的一个网络

支路 (j, k)：记作从节点 j 出发，到节点 k 终止的一条支路，箭头指出方向



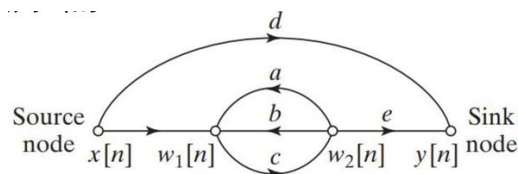
框图表示比较直观，但信号流图更加简洁、方便

信号流图中，如果一个节点存在两个或两个以上输入，则此节点一定是加法器



源节点 (Source node): 没有流进支路的节点，用来表示外部输入或注入到流图内的信号源

汇节点 (Sink node): 仅有流进支路的节点，用于从一个流图中提取输出



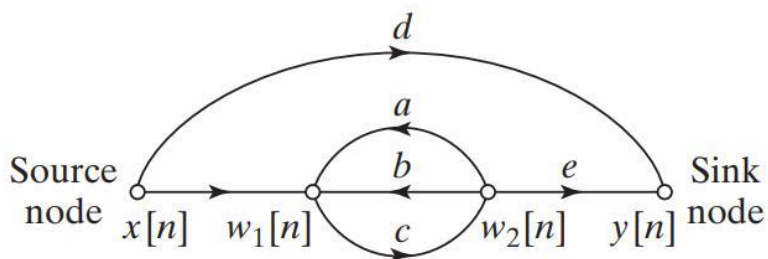
$$w_1[n] = x[n] + aw_2[n] + bw_2[n],$$

$$w_2[n] = cw_1[n],$$

$$y[n] = dx[n] + ew_2[n].$$

信号流图 → 差分方程:

- ①找到信号流图中所有存在信号流入的节点
- ②列出对应的节点方程
- ③整理节点方程，得到系统输入输出关系的差分方程



### 3. 离散线性移不变系统频域表征

时域表征

- (1) 用单位抽样响应  $h(n)$  表征  $h(n) = T[\sigma(n)]$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

- (2) 用常系数线性差分方程表征

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

## 频域表征

### (1) 用系统函数 $H(z)$ 表征

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

但是注意还需要给定收敛域范围

### (2) 用频率响应 $H(e^{j\omega})$ 表征

若系统函数在  $z$  平面单位圆上收敛, 则当  $z = e^{j\omega}$  时

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) \text{ 存在, 称之为系统的频率响应}$$

## 因果稳定条件

### 1. 时域条件

$h(n)=0, n<0$ ,  $h(n)$  是因果序列  $\Leftrightarrow$  因果性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad h(n) \text{ 是绝对可和的} \Leftrightarrow \text{稳定性}$$

### 2. $z$ 域条件

a.  $H(z)$  收敛且要满足  $R_h < |z| \leq \infty \Leftrightarrow$  因果性

即  $H(z)$  的收敛域为半径为  $R_h$  的圆的外部且必须包括  $z = \infty$

b.  $H(z)$  的收敛域必须包含  $z$  平面的单位圆  $\Leftrightarrow$  稳定性

c.  $H(z)$  必须在从单位圆  $|z|=1$  到  $|z|=\infty$  的整个平面内收敛 ( $1 \leq |z| \leq \infty$ ), 系统函数  $H(z)$  的全部极点必须在  $z$  平面单位圆内, 即收敛域为  $R_h < |z| \leq \infty$ ,  $R_h < 1 \Leftrightarrow$  因果稳定性

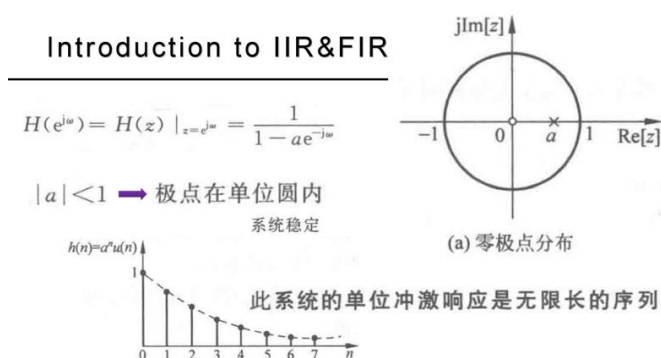
### 3. 系统频率响应 $H(e^{j\omega})$

$h[n]$  离散非周期  $\Leftrightarrow H(e^{j\omega})$  周期连续

\* 频率响应的几何确定法

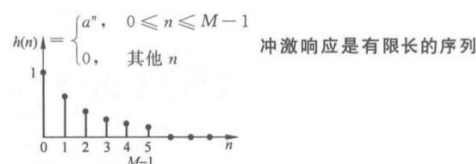
## IIR 和 FIR

无限长冲激响应系统 (Infinite Impulse Response, IIR)



有限长冲激响应系统 (Finite Impulse Response, FIR)

$$H(z) = \frac{1 - a^M z^{-M}}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{a^M z^{-M}}{1 - az^{-1}} = \sum_{k=0}^{M-1} a^k z^{-k}$$
$$h[n] = a^n u[n] - a^M (a^{n-M} u[n-M]) = a^n (u[n] - u[n-M])$$



#### 4. IIR 系统的基本结构

直接型（I 型和 II 型）——一般用于低价系统-二阶系统

原理：在之前已经有研究（略）

优点：结构简单，II 型结构用的延迟器最少，因而所需的延迟寄存器或内存容量最少

缺点：任何一个系数改变： $a_k$  或者  $b_k$  变化，频率响应都会变化

极联型

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - f_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \quad (\text{因式分解})$$

其中，零点个数为  $M = M_1 + 2M_2$

极点个数为  $N = N_1 + 2N_2$

一阶因子：实零极点

二阶因子：复共轭零极点

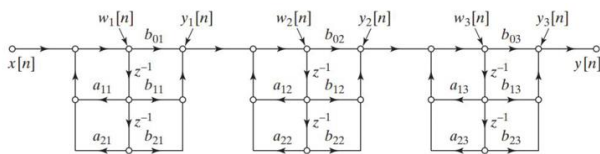
特点：零极点形式，各子系统极联自由度大

实际的需求：具有最小储存和计算的子系统极联

特点：

- (1) 每个基本节对应于一对零点和一对极点，不影响其他的零极点，便于系统性能的调整
- (2) 每个基本节配对的种类多，系统实现时灵活性大
- (3) 每个基本节结构相同，又是先后顺序实现运算，可用一个基本节进行分时复用，只需很少资源

eg:



$$y_0[n] = x[n],$$

$$w_k[n] = a_{1k} w_k[n-1] + a_{2k} w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s,$$

$$y_k[n] = b_{0k} w_k[n] + b_{1k} w_k[n-1] + b_{2k} w_k[n-2], \quad k = 1, 2, \dots, N_s,$$

$$y[n] = y_{N_s}[n].$$

并联型

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \quad (\text{部分分式展开})$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} - e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

特点：

- (1) 每个基本节对应一对极点
- (2) 能够单独调整系统极点的位置，但是不能单独调整零点位置
- (3) 各基本节并联连接，运算速度快

eg:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

$$= 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

Parallel form structure using a 2<sup>nd</sup>-order system.



反馈（回路）：闭合路径。从某节点出发，以箭头方向穿过某些支路，又回到该节点

要产生 IIR，必需有反馈回路；有反馈回路，不一定能产生 IIR。反馈是 IIR 系统必要非充分条件

转置形式

流图转置：将网络中的所有支路方向颠倒，并将输入和输出也颠倒，但保持支路效应不变，这样就完成啦一个流图的转置。

对于单输入/单输出系统，转置前后的流图具有相同的系统函数。

＊全通系统

系统的频率响应的幅度在所有频率  $\omega$  处皆为 1（或等于常数）的稳定系统 -> ROC 包含单位圆

全通系统极点在单位圆内，零点在单位圆外，极点与零点以单位圆成镜像分布

＊最小相位系统

系统函数全部极点在单位圆内，全部零点也在单位圆内的因果稳定系统

混合相位系统：系统函数全部极点在单位圆内，单位圆内外皆有零点的因果稳定系统

任何一个因果稳定的非最小相位系统，都可以通过一个最小相位系统级联一个全通系统实现最大相位系统：系统函数全部极点在单位圆内，全部零点在单位圆外的因果稳定系统

通过级联全通系统，可将最小相位系统的全部零点反射到单位圆外，得到最大相位系统

## 5. FIR 系统的基本网络结构

系统的单位冲激响应  $h[n]$  有限长，即只在有限个  $n$  值处不为 0

系统函数  $H(z)$  在  $|z|>0$  处收敛，在  $|z|>0$  处只有零点，对于因果系统，全部极点均位于  $z=0$  处

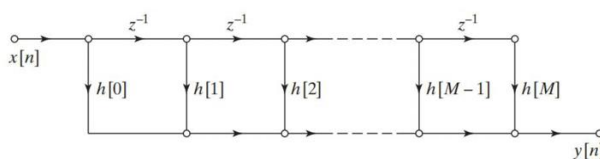
结构上一般采用非递归结构，即没有输出到输入的反馈；当然利用零极点相互抵消的办法，也可以采用递归结构（如频率抽样结构）

便于实现线性相位滤波器

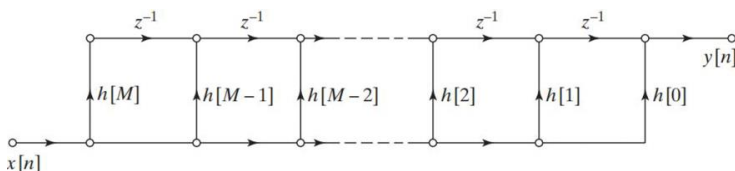
直接型 FIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

由差分方程  $y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$  画出直接型 FIR 结构：



转置型：

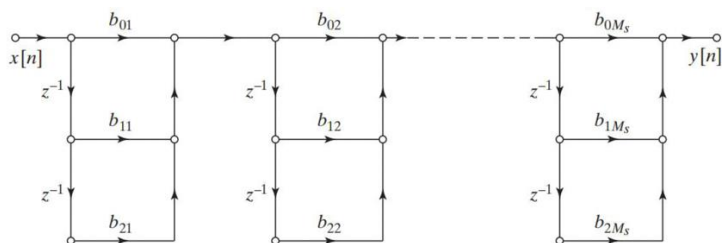


级联型 FIR

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h[k]z^{-k} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$

（多项式因式分解）

$M_s = (M+1)/2$ ，若  $M$  为奇数，其中一个  $b_k$  为 0

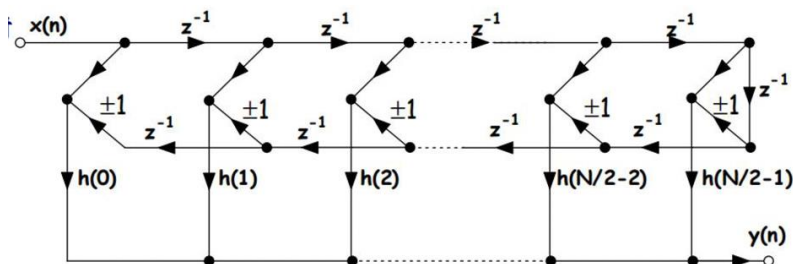


比 IIR 极联型每个二阶节少了左边一半

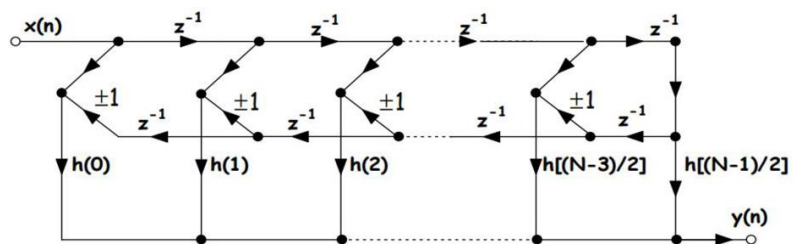
FIR 系统的基本网络结构（线性相位）

偶对称、奇对称

N 为偶数时



N 为奇数时



## 第七章 滤波器设计方法

与模拟滤波器不同，数字滤波器是以  $2\pi$  为周期的函数

设计步骤：技术指标、函数逼近、电路实现、缺陷研究、产品实现

滤波器分类：

性能：低通、高通、带通、带阻

递归和非递归离散时间系统：有无反馈回路

滤波器设计的基本问题是如何选择  $\{a_k\}$  和  $\{b_k\}$  去逼近理想滤波器

### 1. 滤波器设计指标

对于 IIR 设计我们只考虑滤波器频率响应幅值特性

绝对指标： $|H(e^{j\omega})|$  幅值特性的一些具体要求

相对指标：用对数尺度（dB）表示

$$dB \text{ scale} = 20 \log_{10} \frac{|H(e^{j\omega})|_{\max}}{|H(e^{j\omega})|} \geq 0$$

## 2. 由连续时间滤波器设计离散时间 IIR 滤波器

从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器步骤：

1. 将数字滤波器技术指标转换成模拟低通滤波器技术指标
2. 根据技术指标确定模拟低通滤波器幅度响应  $|H_a(\Omega)|$  及系统函数  $H_a(s)$
3. 由模拟滤波器设计数字滤波器：由  $H_a(s)$  求得  $H(z)$

模拟低通逼近：

巴特沃思滤波器

切比雪夫滤波器

切比雪夫 I 型

切比雪夫 II 型

$$A^2(\Omega) \rightarrow H_a(s) \rightarrow H(z)$$

模拟逼近：幅度平方函数  $A^2(\Omega)$  逼近理想低通滤波器

$$A^2(\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = |H_a(s) H_a(-s)|_{s=j\Omega}$$

Eg:

$$\text{解: } |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{16(25 - \Omega^2)^2}{(49 + \Omega^2)(36 + \Omega^2)}$$

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{16(25 + s^2)^2}{(49 - s^2)(36 - s^2)}$$

极点:  $s = \pm 7, s = \pm 6$  零点:  $s = \pm j5$

选极点:  $s = -7, s = -6$  零点:  $s = \pm j5$

$$H_a(s) = \frac{K_0(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)}$$

$$H_a(s)|_{s=0} = H_a(j\Omega)|_{\Omega=0} \quad K_0 = 4.$$

$$H_a(s) = \frac{4(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)} = \frac{4s^2 + 100}{s^2 + 13s + 42}$$

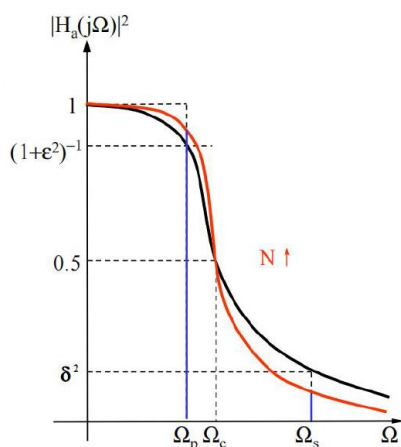
## 3. 离散时间巴特沃斯、切比雪夫和椭圆滤波器

巴特沃斯滤波器

低通巴特沃斯滤波器是全极点系统

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

其中，N 为滤波器阶数



N 越大，通带内特性越平坦，过渡带越窄

极点法

eg: 设计一个满足下述指标要求的 模拟巴特沃斯低通滤波器

在通带截止频率  $\omega_c = 2\pi \times 4000 \text{ rad/s}$  处的衰减为 3dB

在阻带截止频率  $\omega_s = 2\pi \times 8000 \text{ rad/s}$  处的衰减不小于 20dB

方法：

1. 确定  $N$  &  $\Omega_c$

$$-20 \lg |H_a(j\Omega_c)| = 10 \lg[1 + (\Omega_c / \Omega_c)^{2N}]$$

$$-20 \lg |H_a(j\Omega_s)| = 10 \lg[1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}]$$

$$\frac{10^{\delta_2/10} - 1}{10^{\delta_1/10} - 1} = \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}$$

$$N = \lg\left(\frac{10^{\delta_2/10} - 1}{10^{\delta_1/10} - 1}\right) / 2 \lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right) = \lg\left(\frac{10^2 - 1}{10^{0.3} - 1}\right) / 2 \lg 2 = 3.249$$

**N=4**

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{\frac{\alpha_p}{20}} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} \text{ 或 } \Omega_s \left(10^{\frac{\alpha_s}{20}} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}}$$

2. 确定极点

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$s_k, \quad s_{N+1-k} = s_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, N/2, \quad N \text{ 为偶数}$$

$$s_1 = s_4^* = \Omega_c e^{j5\pi/8} \quad s_2 = s_3^* = \Omega_c e^{j7\pi/8}$$

3. 确定  $H_a(s)$

$$H_k(s) = \frac{\Omega_c^2}{(s - s_k)(s - s_{N+1-k})} = \frac{\Omega_c^2}{s^2 - 2\Omega_c s \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{(2k-1)\pi}{2N}\right) + \Omega_c^2}$$

$$H_a(s) = \prod_{k=1}^{N/2} H_k(s), \quad N \text{ 为偶数}$$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + 0.7653\Omega_c s + \Omega_c^2} \cdot \frac{\Omega_c^2}{s^2 + 1.8478\Omega_c s + \Omega_c^2}$$

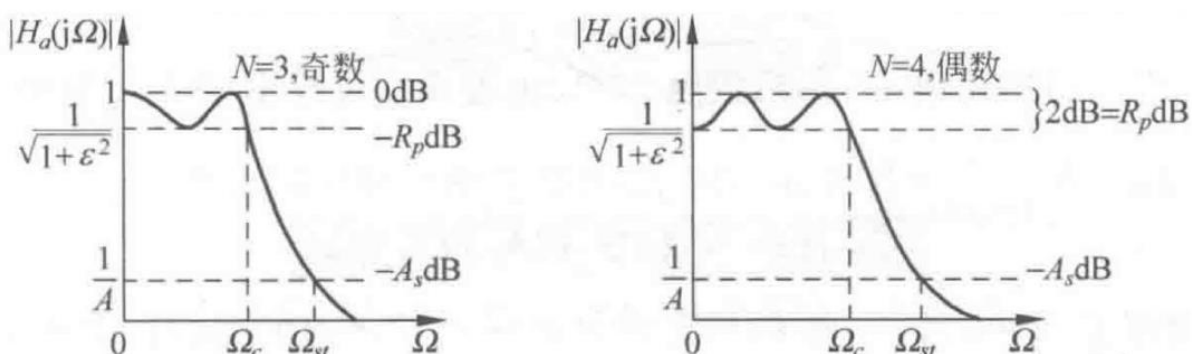
\*归一法+查表法

略

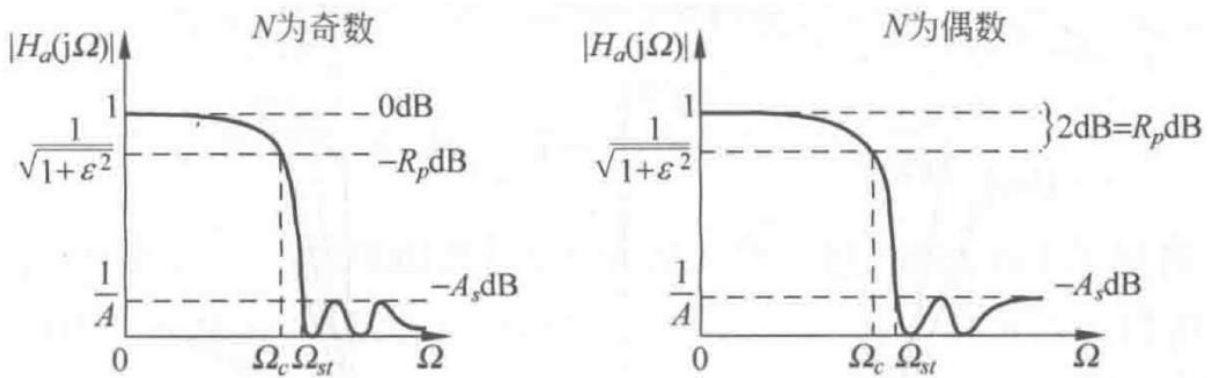
切比雪夫滤波器

等波纹特性的函数逼近

切比雪夫 I 型：振幅在通带内是等波纹的，阻带内是单调的



切比雪夫 II 型：振幅在通带内是单调的，阻带内是等波纹的



对于相同技术指标，切比雪夫滤波器比巴特沃斯滤波器需要的阶数低

## • 切比雪夫 I 型模拟低通滤波器

$N$  阶幅度平方频率响应为

其中  $C_N(\Omega)$  为  $N$  阶切比雪夫多项式：

$$A^2(\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} \quad C_N(\Omega) = \begin{cases} \cos[N \cos^{-1}(\Omega)] & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh[N \cosh^{-1}(\Omega)] & |\Omega| > 1 \end{cases}$$



$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega)]^{-1}} = \frac{\epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega)}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega)}$$

## • 切比雪夫 II 型低通滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{C_N(\Omega_s/\Omega_p)}{C_N(\Omega_s/\Omega)} \right]^2}$$

Inverse Chebyshev

(反切比雪夫、倒数切比雪夫)

$N$  越大阻带衰减越快

给定指标，如何求滤波器阶数  $N$ ，通带截止频率  $\Omega_p$  和通带波动  $\epsilon$

• 在通带范围内允许的最大衰减为  $\alpha_p$  (dB)，截止频率为  $\Omega_p$

• 在阻带范围内允许的最小衰减为  $\alpha_s$  (dB)，临界频率为  $\Omega_s$

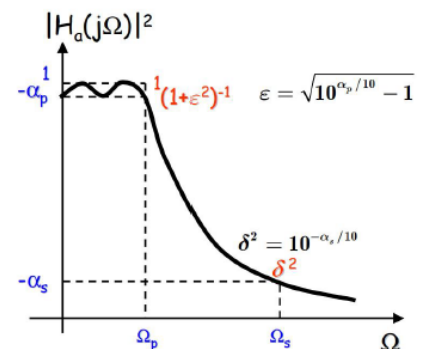
$$(1) \quad 10 \lg(1 + \epsilon^2) = \alpha_p \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1}$$

$$(2) \quad 10 \lg[|H_a(j\Omega_s)|^2] \leq -\alpha_s$$

$$\Rightarrow C_N(\Omega_s/\Omega_p) \geq \epsilon^{-1} \sqrt{10^{\alpha_s/10} - 1} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}$$

$$\Rightarrow \cosh[N \cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)] \geq \epsilon^{-1} \sqrt{10^{\alpha_s/10} - 1}$$

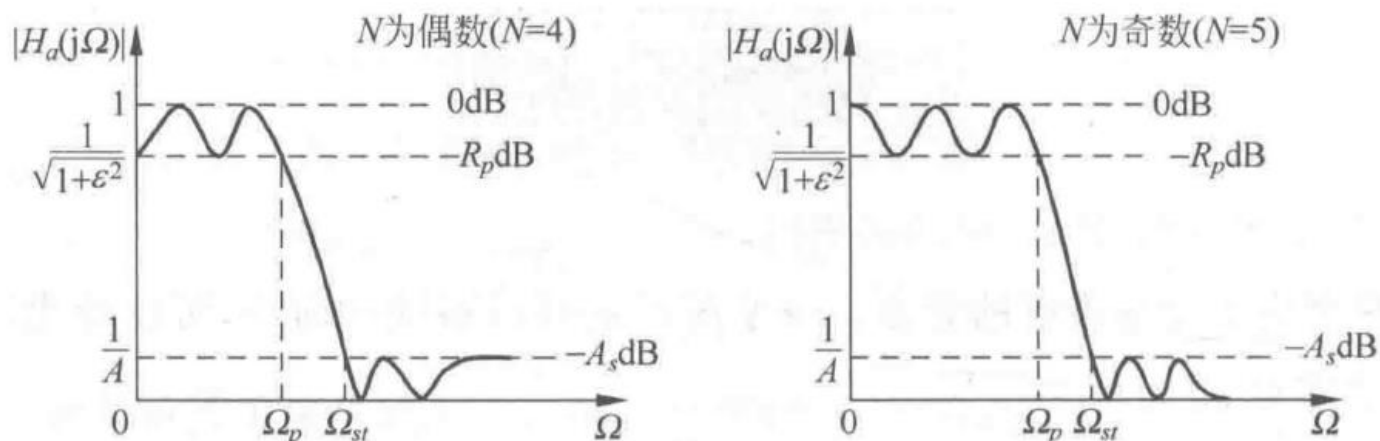
$$\Rightarrow N \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}\right)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{\delta^{-2} - 1}}{\epsilon}\right)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)}$$





## 椭圆滤波器

在阶数相同的条件下，椭圆滤波器相比于其他类型的滤波器，能获得更窄的过渡带宽和较小的阻带波动，就这点而言，椭圆滤波器是最优的。它陡峭的过渡带特性是用通带和阻带的起伏为代价来换取的，且在通带和阻带的波动相同。



## 贝塞尔滤波器

通带内幅度特性也较为平坦（等波纹），但阻带下降速度过慢

## 脉冲响应不变法（冲激响应不变法）

从滤波器的单位冲激响应出发，使数字滤波器的单位冲激响应  $h(n)$  逼近模拟滤波器的单位冲激响应  $h_a(t)$ ，即满足  $h(n) = h_a(nT)$

步骤：

### 步骤一：确定滤波器的技术指标（通常在数字域给出）

- 通、阻带的波动
- 通、过渡、阻带的截止频率
- 频率选择特性（**低通**）

### 步骤二：对截止频率作如下线性变换（如果给定的是数字指标）：

$$\Omega = \omega/T \quad (\text{数字化过程中从模拟到数字频率变换的逆关系})$$

### 步骤三：选择模拟逼近方法（**巴特沃思**）并确定其传递函数 $H_a(s)$ ；

### 步骤四：按下述方法将 $H_a(s)$ 转变为 $H(z)$ ，完成数字化：

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - s_k} \quad \rightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T c_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

### 步骤五：检验结果是否满足指标，如果不满足，返回步骤三

## 双线性变换法

优点：消除了混叠误差      缺点：频率  $\omega$  和  $\Omega$  之间非线性

步骤：



### 步骤一: 确定滤波器的技术指标 (通常在数字域给定)

- 通、阻带的波动
- 通、过渡、阻带的截止频率
- 频率选择特性 (低通)

### 步骤二: 进行下述频率预畸 (针对数字域指标): $\Omega = (2/T) \tan(\omega/2)$

### 步骤三: 选择模拟逼近方法 (巴特沃思) 并确定其传递函数 $H_a(s)$ ;

### 步骤四: 双线性变换, 即将 $H_a(s)$ 中的“s”按下式进行变换以得到 $H(z)$ , 而完成数字化:

$$s = (2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]$$

### 步骤五: 检验结果是否满足指标, 如果不满足, 返回步骤三

## 4. 低通 IIR 滤波器的频率转换

先设计低通型的数字滤波器, 再用数字频率变换方法将其转换成所需类型的数字滤波器  
模拟原型→数字原型→数字各型

### 线性相位 FIR

线性相位定义: 系统的相频特性与频率成正比, 信号通过它产生的延迟等于一个常数  
充要条件:  $h[n]$  关于  $N-1/2$  中心 (奇/偶) 对称, 即,  $h[n] = \pm h[N-1-n]$

## 5. 用窗函数法设计 FIR 滤波器

时域截断相当于矩形加窗, 即原始序列  $x[n]$  与矩形序列  $w[n]$  相乘 (矩形序列  $w[n]$  也被称为矩形窗函数, 或矩形窗)  
步骤:

步骤一: 根据给定指标确定理想低通数字滤波器的截止频率, 以及相应的理想频率响应  $H_d(e^{j\omega})$ , 其相位响应为零;

步骤二: 根据下式计算理想低通系统的单位脉冲响应序列  $h_d(n)$ :

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

步骤三: 确定滤波器阶数  $N$ , 将  $h_d(n)$  向右平移  $(N-1)/2$ , 加窗得到  $h(n)$ :

$$h(n) = w(n)h_d[n - (N-1)/2]$$

这样, 实际频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta$$

步骤四: 检验结果, 如果不满足指标要求, 则返回步骤三, 重新选择窗长或窗形进行设计, 直到满足要求为止