EXAMEN FINAL ANÁLISIS MATEMÁTICO II (95-0703) - 2 DE AGOSTO DE 2022

Condición mínima para aprobar: 3 (tres) ítems bien, uno de "T1) o T2)" y dos de "P1), P2), P3) oP4)"

T1) a) Enuncie y demuestre la independencia del camino en una integral de línea.

b) Sean $D = \{(x, y, z) \in R^3 \ : x > 1\}$ y $\vec{F}: D \to R^3$ definido por $\vec{F}(x, y, z) = \left(z^3 + yh^2(x).\frac{x+4}{x}, h(x), 3xz^2\right)$, halle una función $h: (1, +\infty) \to R$ de clase C^1 de modo tal que el campo $\vec{F}$ sea conservativo.

T2) Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas demostrándolas o bien exhibiendo un contraejemplo según corresponda:

a) Si un campo escalar $f: A \subseteq R^2 \to R$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \in A^o$, entonces existen todas las derivadas parciales en (x_0, y_0).

b) La superficie Σ de ecuación $\vec{\Sigma}(u, v) = (uv, 2u, v)$ con $(u, v) \in R^2$ es regular en el punto (2,4,1) y la recta normal a Σ en dicho punto no interseca a la superficie en otros puntos diferentes de (2,4,1).

P1) Halle una función $g(x)$ con $g(0) = 2$ y $g \in C^1$ tal que la circulación en sentido positivo del campo $\vec{F}(x, y) = (yg(x), g(x) + y)$ a lo largo de la frontera del rectángulo $[1,3] \times [2,5]$ resulte igual a 18.

P2) Calcule la masa del cuerpo definido por $W = \left\{(x, y, z) \in R^3\!: \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 18 \ , \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

P3) Dado el campo $\vec{G}(x, y, z) = (2zh(2y - 3x), 4y + 3zh(2y - 3x), x^2y^2 + 5z)$ con $h: R \to R$ de clase $C^1(R)$, calcule el flujo de $\vec{G}$ a través de la frontera del sólido $V = \{(x, y, z) \in R^3\!: \ 2 \leq z \leq 4 - 2x^2 - y^2\}$

P4) Sea el campo $g: R^2 \to R$ de clase $C^3(R^2)$ que admite un mínimo local en el punto (1,1), con $g(1,1) = 2$, y su matriz Hessiana $H(g)(1,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine los valores reales de a y b tales que la función definida por $g(x, y) = f^2(x, y) + a(x - 1)^2 + b(y - 1)^2$ admita un máximo local en (1,1).