Unidad 6

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, A abierto, F diferenciable en $P_0 \in A$, $\vec{\nabla} F(P_0) \neq \bar{0}$, $F(P_0)=k$

Entonces $\vec{\nabla} F(P_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel de F que pasa por P_0.

Demostración:

Consideremos una curva C sobre la superficie de nivel, que pase por P_0
C está asociada al conjunto imagen de un función vectorial / $\bar{g}: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ / $\vec{g}(t) = (g_1(t); g_2(t); g_3(t))$ regular en un punto t_0 / $\bar{g}(t_0) = P_0$.

Como C está sobre la superficie definida en un entorno de P_0 por $F(x;y;z) = k$, resulta:

$$(F \circ \bar{g})(t_0) = k \Rightarrow (F \circ \bar{g})'(t_0) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} F(x_0; y_0; z_0) \cdot \vec{g}'(t_0) = 0$$

Si $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$ es no nulo, entonces $\vec{\nabla} F(x_0; y_0; z_0) \perp \vec{g}'(t_0)$

Esto significa que el gradiente de un campo escalar de tres variables en un punto P_0 es perpendicular a cualquier curva a la que pertenezca P_0, que esté incluida en la superficie de nivel que pasa por dicho punto. Por lo tanto, $\vec{\nabla} F(\vec{P}_0)$ (si es no nulo) es perpendicular a la superficie de nivel de F que pasa por P_0.