Integrales de Superficie

Unidad x

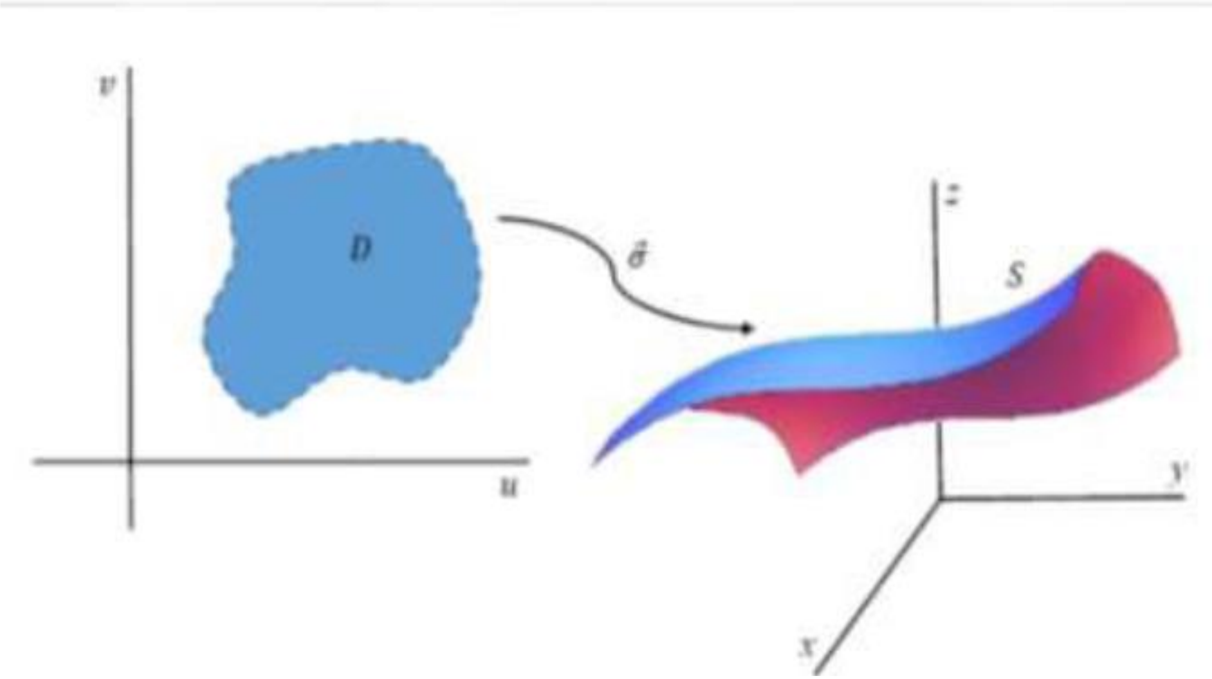
Superficies (Repaso)

- Parametrizada: imagen de $\vec{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

- Explícita: gráfico de f(x,y)

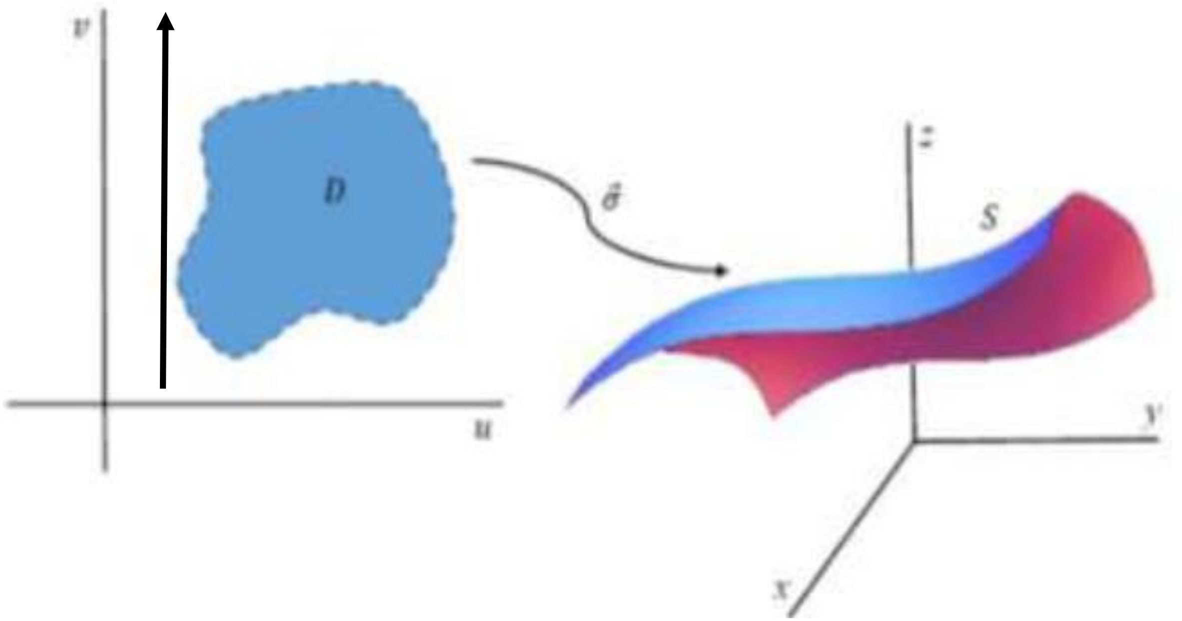
- Implícita: superficie de nivel de G(x,y,z)=0

Área de superficies parametrizadas



Supongamos S una superficie suave o suave a trozos

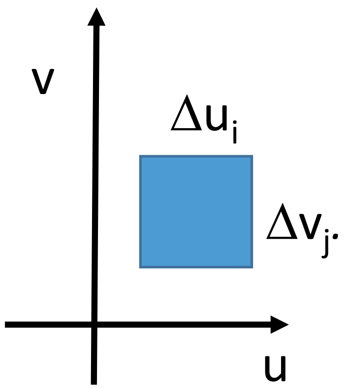
Para calcular el área total de S vamos a dividirla y vamos a hacer una aproximación al área sumando pequeñas áreas.

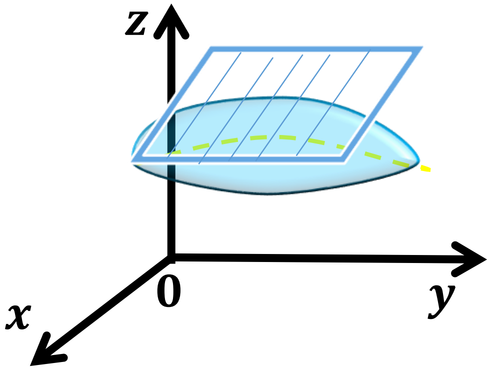


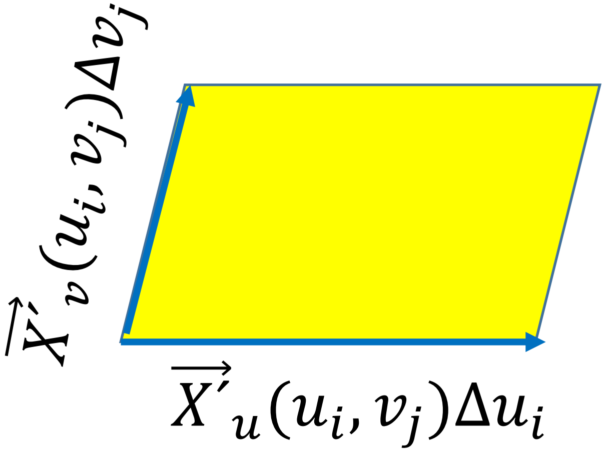
Provocamos una partición regular en D en rectángulos de área $\Delta u_i \Delta v_j$. Esta partición induce una partición en S en cuadriláteros curvilíneos cada uno de área $\Delta\sigma_{ij}$.

$\Delta\sigma_{ij} \cong \Delta T_{ij}$

De manera que el dominio en el plano uv sea el mismo para σ_{ij} y T_{ij}







$$\Delta T_{ij} = ||\overrightarrow{X'}_u(u_i, v_j)\Delta u_i \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u_i, v_j)\Delta v_j||$$

$$\Delta T_{ij} = ||\overrightarrow{X'}_u(u_i, v_j) \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u_i, v_j)||\Delta u_i \Delta v_j$$

$$\text{área de } S \cong \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ||\overrightarrow{X'}_u(u_i, v_j) \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u_i, v_j)||\Delta u_i \Delta v_j$$

$$\acute{a}rea\ de\ S = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ||\overrightarrow{X'}_u(u_i, v_j) \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u_i, v_j)|| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$\acute{a}rea\ de\ S = \iint_{D_{uv}} ||\overrightarrow{X'}_u(u, v) \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u, v)|| du dv$$

dσ

Diferencial de superficie

$$\acute{a}rea\ de\ S = \iint_{D_{uv}} \|\overrightarrow{X'}_u(u,v) \times \overrightarrow{X'}_v(u,v)\|\,du\,dv$$

dσ

Diferencial de superficie

05) Calcule el área de las siguientes superficies:

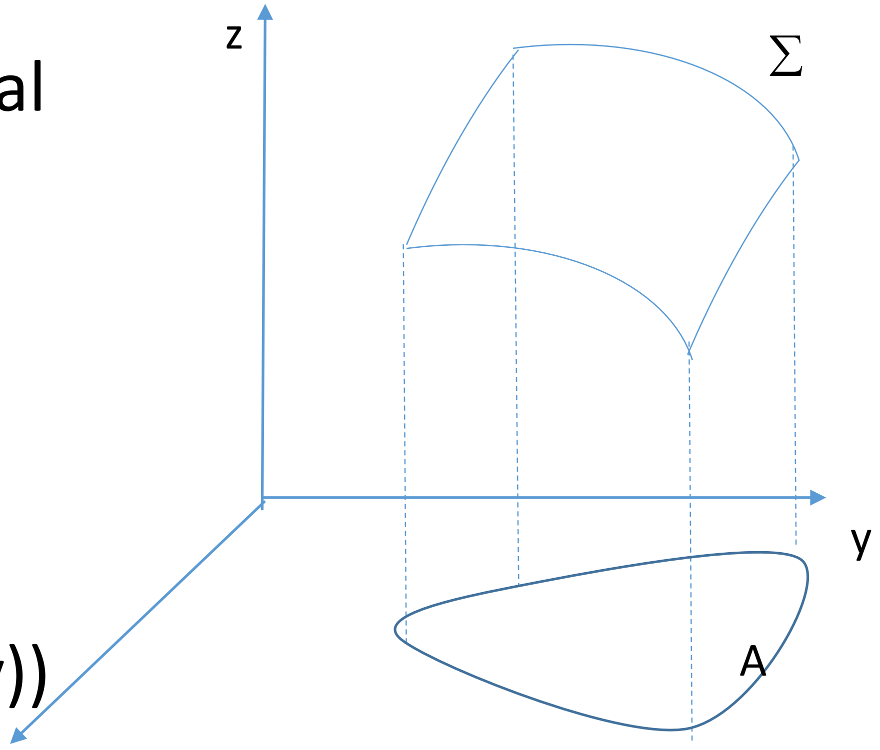
a) Trozo de superficie cilíndrica $z = 2x^2$ con $y \le x$, $z \le 6$, 1° octante.

Área de superficies explícitas

- Consideremos una superficie Σ definida como gráfico de un campo escalar

F: $A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con F clase 1 y Σ con vector normal no nulo.

- Se desea calcular el área de Σ
- $\vec{X}(x, y) = (x, y, f(x, y))$



$\overrightarrow{X'}_x=(1,0,f'_x(x,y))$ $\overrightarrow{X'}_y=(0,1,f'_y(x,y))$

$$||\overrightarrow{X'}_x(x,y) \times \overrightarrow{X'}_y(x,y)|| = \sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}$$

$$\text{área de } \Sigma = \iint_{D_{xy}} = \sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}\, dxdy$$

$$\text{área de } S = \iint_{D_{xy}} = \sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}\, dxdy$$

. Calcular el área: de $z=x$ con $x^2+y^2 \leq 9$.

Área de superficies implícitas

Sea $\sum$ una superficie definida como superficie de nivel 0 de un campo escalar G(x,y,z)=0 clase C^1 con gradiente no nulo.

- Supongamos $G'_z \neq 0$ $\Rightarrow$ z=z(x,y)
- $área\ de \sum = \iint_{D_{xy}} \sqrt{(z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}\, dxdy$

- $\text{área de}\sum = \iint_{D_{xy}} \sqrt{(z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}\, dxdy$
- $\text{área de}\sum = \iint_{D_{xy}} \sqrt{\left(-\frac{G'_x}{G'_z}\right)^2 + \left(-\frac{G'_y}{G'_z}\right)^2 + 1}\, dxdy$

$$\text{área de } \sum = \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{{G'_x}^2 + {G'_y}^2 + {G'_z}^2}{{G'_z}^2}}\, dxdy$$

$$\text{área de}\sum = \iint_{D_{xy}} \frac{\left\|\vec{\nabla} G\right\|}{|G'_z|} \cdot dxdy$$

$\mathrm{d}\sigma$

Diferencial de superficie

- Área de $\sum$ = $\iint_{Dxy} \frac{||\overline{\nabla} G(x,y,z)||}{|G'_z|} dxdy$ con D_{xy} la proyección de $\sum$ sobre el plano xy

z=z(x,y)

dσ

diferencial de superficie

- Área de $\sum$ = $\iint_{Dxz} \frac{||\overline{\nabla} G(x,y,z)||}{|G'_y|} dxdz$ con D_{xz} la proyección de $\sum$ sobre el plano xz

y=y(x,z)

- Área de $\sum$ = $\iint_{Dyz} \frac{||\overline{\nabla} G(x,y,z)||}{|G'_x|} dydz$ con D_{yz} la proyección de $\sum$ sobre el plano yz

x=x(y,z)

05) Calcule el área de las siguientes superficies:

c) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+z^2=4$ con $-x \le y \le x$, $z \ge 0$.

d) Superficie esférica de radio R.

e) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+y^2=2x$ con $x^2+y^2+z^2 \le 4$ en el 1° octante.

f) Superficie frontera del cuerpo definido por $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$.

i) de la porción de superficie $x^2+y^2=3z^2$ interior a $x^2+y^2=4y$ con $z \ge 0$.

Integral de superficie de un campo escalar

Sea $f\colon \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ / $w = f(x;y;z)$ continuo y S superficie suave a trozos incluida en $\mathbb{A}$.

- Si S parametrizada

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))||\overrightarrow{X'}_u(u,v) \times \overrightarrow{X'}_v(u,v)||dudv$$

Si S en forma implícita

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma=\iint_{Dxy} f(x,y,z)\frac{||\overline{\nabla}G(x,y,z)||}{|G'_z|}dxdy \text{ con z=z(x,y)}$$

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma=\iint_{Dyz} f(x,y,z)\frac{||\overline{\nabla}G(x,y,z)||}{|G'_x|}dydz \text{ con x=x(y,z)}$$

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma=\iint_{Dxz} f(x,y,z)\frac{||\overline{\nabla}G(x,y,z)||}{|G'_y|}dxdz \text{ con y=y(x,z)}$$

Propiedades

- Linealidad

- $\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)d\sigma$+$\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)d\sigma$=$\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} f(x,y,z)d\sigma$ si Σ_1 y Σ_1 son disjuntas salvo un número finito de curvas

- Si f(x,y,z)=1, entonces

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma\text{=área } \sum$$

¿Sobre qué plano coordenado proyectaremos?

Debe tenerse en cuenta:

1º) Cuidaremos que al proyectar obtengamos una **región** y nunca una línea.

2º) Elegiremos una proyección tal que, a cada punto de la misma, le corresponda **un sólo punto de S**.

3º) Si esto último no fuera posible, se deberá **partir S** y trabajar con cada sector.

Aplicaciones físicas

- Masa de una superficie $$M = \iint_{\Sigma} \delta(x, y, z)\, d\sigma$$

- Momentos estáticos de una superficie $$S_{xy} = \iint_{\Sigma} z\delta(x, y, z)\, d\sigma$$

$$S_{xz} = \iint_{\Sigma} y\delta(x, y, z)\, d\sigma$$

$$S_{yz} = \iint_{\Sigma} x\delta(x, y, z)\, d\sigma$$

- Centro de masa de una superficie

$$x_G = \frac{S_{yz}}{M} \qquad y_G = \frac{S_{xz}}{M} \qquad z_G = \frac{S_{xy}}{M}$$

- Momentos de inercia de una superficie

$$J_x = \iint_{\Sigma} \left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,d\sigma \qquad J_y = \iint_{\Sigma} \left(x^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

$$J_z = \iint_{\Sigma} \left(y^2 + x^2\right)\delta(x,y,z)\,d\sigma$$

06) Calcule el momento de inercia respecto del eje z de una chapa con forma de paraboloide $z = x^2 + y^2$, con $x \geq 0 \wedge 1 \leq z \leq 4$, si la densidad superficial en cada punto de la chapa es $\delta(x, y, z) = \dfrac{k}{x^2 + y^2}$ con k constante.

Superficies orientables vs Superficies no orientables

Superficies orientables

- Es una superficie en la que es posible definir un campo de versores normales que varíe de forma continua con la posición, de manera tal que para cada punto es posible encontrar dos versores normales opuestos.
- Tiene dos caras
- Geogebra

Superficies no orientables

- Es una superficie en la no es posible encontrar dos versores normales opuestos.
- Tiene una cara
- Cinta de Moebiüs (geogebra)

¿Qué orientación elegir en una superficie?

- En principio se puede elegir cualquiera
- Si S es una <u>**superficie cerrada**</u> se elige por convención el **sentido positivo** o **saliente**
- Es decir $\breve{n}$ apunta hacia afuera de S.

Flujo de un campo vectorial

- Supongamos que si tiene un fluido de densidad $\delta(x, y, z)$ que se desplaza mediante un campo de velocidad $\vec{v}(x, y, z)$.

- Sea $\vec{f}(x, y, z) = \delta(x, y, z)\vec{v}(x, y, z)$ (continuo)

- Sea desea calcular el flujo, es decir la “masa” de fluido que atraviesa una membrana Σ (superficie orientable) en dirección perpendicular a ella por unidad de tiempo.

- Análisis dimensional de $\vec{f} = \delta \vec{v}$

$$\frac{[masa]}{[vol]} \cdot \frac{[long]}{[tiempo]} = \frac{[masa]}{\{área][tiempo]}$$

- Estamos obteniendo la masa que atraviesa la membrana por unidad de área y por unidad de tiempo.
- Si queremos en dirección perpendicular a la membrana:

$$\vec{f} \cdot \check{n}$$

- Ese producto escalar es en cada punto un número que mide la "masa" de fluido por unidad de área y por unidad de tiempo que atraviesa cada punto de la superficie en dirección y sentido del versor normal considerado.

- Para calcular la masa que atraviesa toda la superficie, la dividimos en pequeñísimas superficies de área $\Delta\Sigma_{\mathrm{ij}}$.

- En cada una de ellas, $\phi_{ij} = \bar{f}.\check{n}_{ij}\Delta\Sigma_{\mathrm{ij}}$

- $\phi = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{f}.\check{n}_{ij}\Delta\Sigma_{\mathrm{ij}} = \iint_{\Sigma} \bar{f}.\check{n}d\sigma$

d$\vec{\sigma}$
Diferencial vectorial de superficie

Si S es una superficie orientable suave a trozos (es decir definida por una función C^1 con versor normal no nulo) parametrizada.

Un vector normal es $\overrightarrow{X'}_u(u,v) \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u,v)$

$$\check{n} = \frac{\overrightarrow{X'}_u(u,v) \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u,v)}{||\overrightarrow{X'}_u(u,v) \text{ x } \overrightarrow{X'}_v(u,v)||}$$

$$\iint_S \vec{f}(x,y,z)\check{n}d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_{uv}} \vec{f}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\overrightarrow{X'}_u(u,v) \times \overrightarrow{X'}_v(u,v)}{||\overrightarrow{X'}_u(u,v) \times \overrightarrow{X'}_v(u,v)||}\,||\overrightarrow{X'}_u(u,v) \times \overrightarrow{X'}_v(u,v)||dudv$$

$$\iint_S \vec{f}(x,y,z)\check{n}d\sigma = \iint\limits_{D_{uv}} \vec{f}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))(\overrightarrow{X'}_u(u,v) \times \overrightarrow{X'}_v(u,v))\,dudv$$

- Si Σ una superficie orientable suave a trozos (es decir definida por una función C^1 con versor normal no nulo).
- Sea $\vec{f}$:A$\subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ A abierto, $\vec{f}$ continuo, $\Sigma \subseteq$ A

- Entonces:

$$\iint_{\Sigma} \bar{f}.\breve{n}d\sigma = \iint_{Dxy} \bar{f}(x,y,z).\frac{\bar{\nabla}G(x,y,z)}{||\bar{\nabla}G(x,y,z)||}\frac{||\bar{\nabla}G(x,y,z)||}{|G'_z|}dxdy \text{ con } z=z(x,y)$$

$$=\iint_{Dxz} \bar{f}(x,y,z).\frac{\bar{\nabla}G(x,y,z)}{||\bar{\nabla}G(x,y,z)||}\frac{||\bar{\nabla}G(x,y,z)||}{|G'_y|}dxdz \text{ con } y=y(x,z)$$

$$=\iint_{Dyz} \bar{f}(x,y,z).\frac{\bar{\nabla}G(x,y,z)}{||\bar{\nabla}G(x,y,z)||}\frac{||\bar{\nabla}G(x,y,z)||}{|G'_x|}dzdy \text{ con } x=x(y,z)$$

Observaciones

- Cambiar el sentido del versor normal va a cambiar el signo del producto escalar.
- La masa no puede ser negativa.
- El signo negativo indica que el fluido circula en sentido opuesto al versor normal considerado.
- El signo positivo, que circula en el mismo sentido que el normal.

Propiedades

- Linealidad

- $\iint_{\Sigma_1} \vec{f}.\check{n} d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \vec{f}.\check{n} d\sigma = \iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \vec{f}.\check{n} d\sigma$ si Σ_1 y Σ_1 son disjuntas salvo un número finito de curvas

- $\iint_{\Sigma} \vec{f}.\check{n}_1 d\sigma = -\iint_{\Sigma} \vec{f}.\check{n}_2 d\sigma$

5. Calcular el flujo de $\vec{F}$ (x;y;z) a través de S, indicando la orientación que se ha elegido para $\vec{n}$.

a) $\vec{F}$ (x;y;z)=(y; x^2-y; xy) a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y=x^2$ en el primer octante, con $x+y+z\leq 2$.

d) $\vec{F}$ (x;y;z)= (-y;x;z) a través de $z=10-x^2-y^2$ con $z\geq 1$

11) Sea $\bar{f}$ continuo tal que $\bar{f}(x,y,z)=(x-y\,,\,x-z\,,\,g(x,y,z))$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie de ecuación $x=y^2$ con $0\leq z\leq 4$, $0\leq y\leq 2-x^2$.

12) Calcule el flujo del gradiente de $f(x,y,z)=x+y+z\;g(x-y)$ a través de $x+y=4$ en el 1° octante, con $0\leq z\leq 8$. Suponga $g\in C^1$.

10) Calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de S, indicando gráficamente la orientación del versor normal que ha elegido, o bien que se le solicite en cada caso.(&)

a) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2+yz\,,\,xz\,,\,2z^2-2xz)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $1\leq z\leq 5-x^2-y^2$.