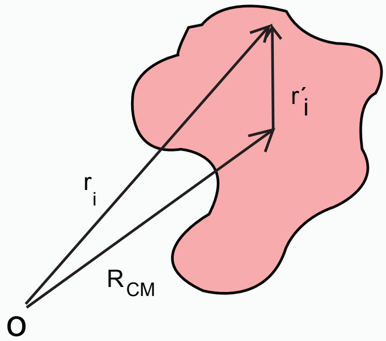
→ TRABAJO Y ENERGÍA

De sistemas de partículas tenemos:

$$\omega_{F_{\text{internas}}} + \omega_{F_{\text{externas}}} = E_{\text{cin}_{\text{f}}} - E_{\text{cin}_{\text{o}}}$$

$$E_{\text{cin}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



Así como en cinemática pudimos descomponer el movimiento del CM en una componente de translación del CM y otra de rotación alrededor del CM nos preguntamos si la energía cinética también posee dos términos.
De la figura tenemos:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_{CM}$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} + \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_{CM}$$

$$v_i^2 = |\mathbf{v}_i|^2 = \mathbf{v}_i . \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i . \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_{CM} . \mathbf{V}_{CM} + 2 . \mathbf{v}'_i . \mathbf{V}_{CM} =$$

$$= v'^2_i + V_{CM}^2 + 2 . \mathbf{v}'_i . \mathbf{V}_{CM}$$

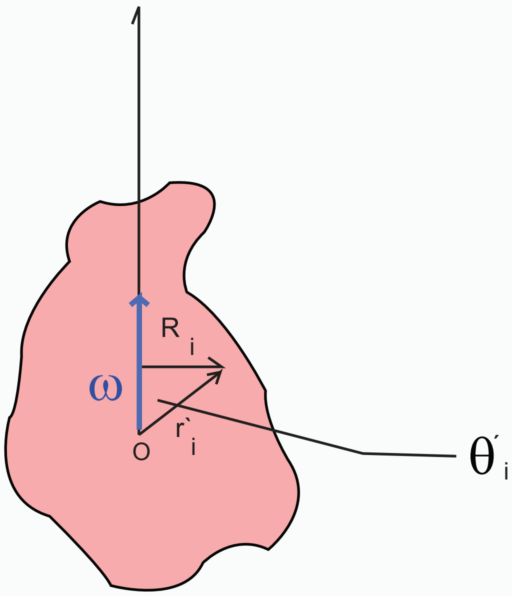
Reemplazando en la expresión para la energía cinética, obtenemos:

$$E_{\text{cin}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} mi . v'^2_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} mi\right) . V_{CM}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} 2 \mathbf{v}'_i . mi\right) . \mathbf{V}_{CM}$$

El último término es cero pues es la velocidad del CM respecto al CM.

$$E_{\text{cin}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} mi . v'^2_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} mi\right) . V_{CM}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} mi . v'^2_i + \frac{1}{2} M . V_{CM}^2$$

El último término es claramente la energía cinética de translación del CM: como si toda la masa estuviera concentrada en el CM, moviéndose con velocidad VCM. Es evidente que el CR posee además una energía de rotación alrededor del CM pues para dos CR idénticos que posean la misma VCM , si uno de ellos posee además una rotación alrededor del CM, tendrá mas energía cinética. Falta demostrar, entonces, que el primer término representa la energía cinética de rotación alrededor del CM del CR.



De cinemática tenemos que:

$$v'_i = \omega \wedge r'_i \Rightarrow v'_i = \omega . r'_i . sen(\theta'_i) = \omega . R_i$$

con lo cual el primer término en la expresión de la energía cinética se transforma en:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i . v'^{2}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i . R_i^2 . \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{n} m_i . R_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Donde I_{CM} es el momento de inercia respecto del CM del sistema. Reemplazando en la expresión para la Ecin ,

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M . V_{CM}{}^2$$

Esto significa que aún cuando la velocidad del CM sea cero todavía puede haber energía cinética de rotación.

Se sigue cumpliendo que :

$$\omega_{Finternas} + \omega_{Fexternas} = E_{cin_f} - E_{cin_o}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M . V_{CM}{}^2$$

Para el trabajo de las fuerzas internas tenemos:

$$\omega_{F\,int} = \sum_{i,j \neq i} \int \mathbf{F}_{ij} . d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0$$

Pues en un cuerpo rígido $d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0$

Luego la expresión anterior se transforma en:

$$\omega_{Fexternas} = E_{cin_f} - E_{cin_o}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M . V_{CM}{}^2$$

A continuación calcularemos $\omega_{Fexternas}$ para distintos casos.

Resorte

$$\omega_{Fexternas} = \omega_{Fresorte} = E_{pelástica_o} - E_{pelástica_f}$$

con $E_{pelástica} = \frac{1}{2} k . x^2$

Reemplazando en la ecuación que relaciona al trabajo de las fuerzas externas (el resorte en este caso) con la variación de la energía cinética tenemos:

$$E_{p_o} + E_{cin_o} = E_{p_f} + E_{cin_f}$$

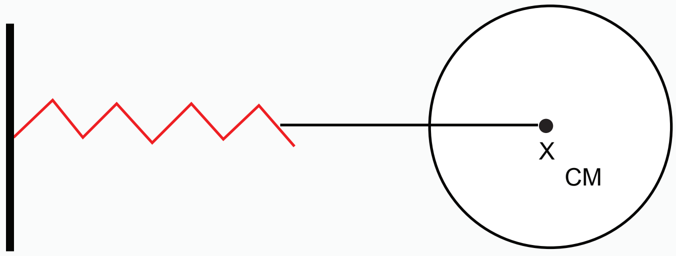
Definimos

$$E_{mec} = E_p + E_{cin} \Rightarrow E_{mec_o} = E_{mec_f}$$

$$0 = E_{mecf} - E_{meco}$$

Esto significa que la energía mecánica permanece constante si no hay otras fuerzas mas que la elástica. Por otro lado al ser la energía potencial elástica solo función de la posición, en un ciclo cerrado, para el cual la posición final coincide con la inicial, la energía potencial elástica no varía. La fuerza elástica conserva la energía.

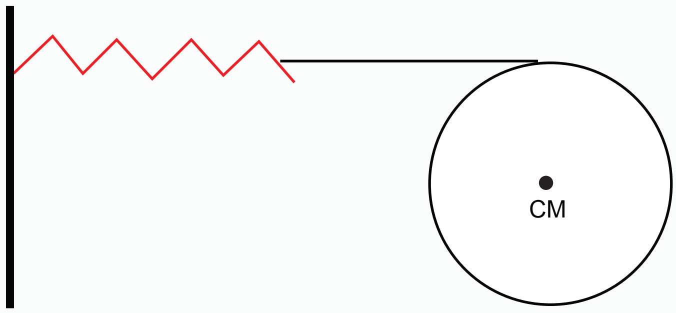
Ejemplo I



En este caso el X es el XCM del centro de masa del CR con lo cual tenemos:

$$E_{p_o} = \frac{1}{2} k X^2{}_{CM_o}$$

$$E_{p_f} = \frac{1}{2} k X^2{}_{CM_f}$$



Otro caso:

$$E_{p_o} = \frac{1}{2} k X_{p_o}{}^2$$

$$E_{p_f} = \frac{1}{2} k X_{p_f}{}^2$$

Si rueda sin deslizar, $X_p = 2.X_{CM}$

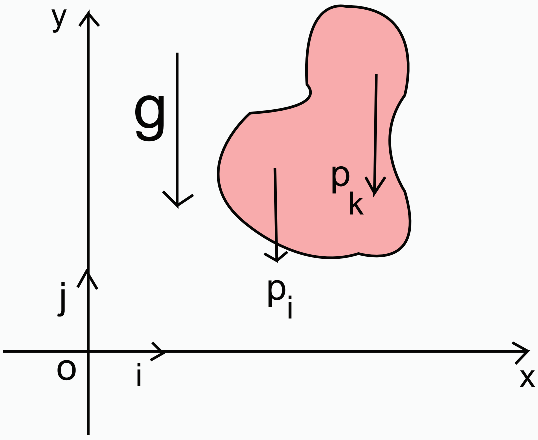
ya que la velocidad del punto p es el doble que la del CM (ver cinemática del CR)

$$E_{p_o} = \frac{1}{2} k (2X_{CM_o})^2$$

$$E_{p_f} = \frac{1}{2} k (2X_{CM_f})^2$$

Esto significa que lo que hay que utilizar para el cómputo de la energía potencial elástica es la elongación del resorte respecto a su posición de equilibrio. Se sigue cumpliendo que la suma de esta energía potencial elástica mas la energía cinética es constante.

Caso gravitatorio



Para cada masa m_i de cada partícula del CR, $F_i = -m_i.gJ$

$$\omega_F = \sum_{i=1}^{n} \int_v \mathbf{P}_i . d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \int_v -m_i g \mathbf{j} . d\mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{j}.d\mathbf{r}_i = \mathbf{j}.(dx_i ; dy_i) = dy_i$$

$$\omega_F = -\sum_{i=1}^{n} \int_v g m_i dy_i = -g \sum_{i=1}^{n} m_i \int_v dy_i =$$

$$-g \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \Big|_{y_{io}}^{y_{if}} = -g \sum_{i=1}^{n} m_i (y_{if} - y_{io}) = -g \sum_{i=1}^{n} m_i y_{if} + g \sum_{i=1}^{n} m_i y_{io}$$

Sabemos de sistemas de partículas:

$$Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} ; Y_{CM}.M = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

luego, obtenemos para la expresión del trabajo de la fuerza gravitatoria:

$$\omega_F = -MgY_{CMf} + MgY_{CMo} ; E_{potgrav} = MgY_{CM}$$

$$\omega_F = -E_{potgrav_f} + E_{potgrav_o}$$

Por otro lado para cualquier fuerza externa tenemos:

$$\omega_{Fexternas} = E_{cin_f} - E_{cin_o}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M.V_{CM}^2$$

En particular para la fuerza gravitatoria:

$$\omega_{Fgrav} = E_{cin_f} - E_{cin_o} = -E_{potgravo_f} + E_{potgravo_o}$$

Agrupando:

$$E_{cin_o} + E_{potgravo_o} = E_{cin_f} + E_{potgrav_f} = E_{mecánica}$$

$$E_{mec} = E_{potgrav} + E_{cin}$$

Nuevamente (así como para el caso del resorte) hay una cantidad que se mantiene constante: la suma de la energía cinética mas la potencial gravitatoria. Si aumenta una disminuye la otra.
Para el caso en el cual tenemos nuestro CR bajo la acción gravitatoria y de un resorte:

$$\omega_{Fgrav} + \omega_{Felast} = -E_{potelast._f} + E_{potelast._o} - E_{potgrav._f} + E_{potgrav._o} = E_{cin._f} - E_{cin._o}$$

Reagrupando términos:

$$E_{potelast._o} + E_{potgrav._o} + E_{cin._o} = E_{cin._f} + E_{potelast._f} + E_{potgrav._f} = cte = E_{mec}$$

O, También

$$E_{mec._f} = E_{mec._o}$$
$$0 = E_{mec._f} - E_{mec._o}$$

Para el caso en el cual hay otras fuerzas además de las gravitatorias y elásticas:

$$\omega_F = E_{mec._f} - E_{mec._o}$$

Donde F es una fuerza no considerada en la definición de energía mecánica.
Si ω_F es cero, entonces la energía mecánica final es igual a la inicial. Si este trabajo es negativo entonces la energía mecánica final es menor que la inicial. Por ejemplo para el caso de una fuerza disipativa (fuerza de roce por ejemplo) parte de la energía mecánica inicial se transforma en energía mecánica final y parte en energía de disipación. Si el trabajo es mayor que cero, como por ejemplo en el caso de una cuerda que tira en el sentido del movimiento, la energía mecánica final será mayor que la inicial y se le habrá inyectado energía al sistema.

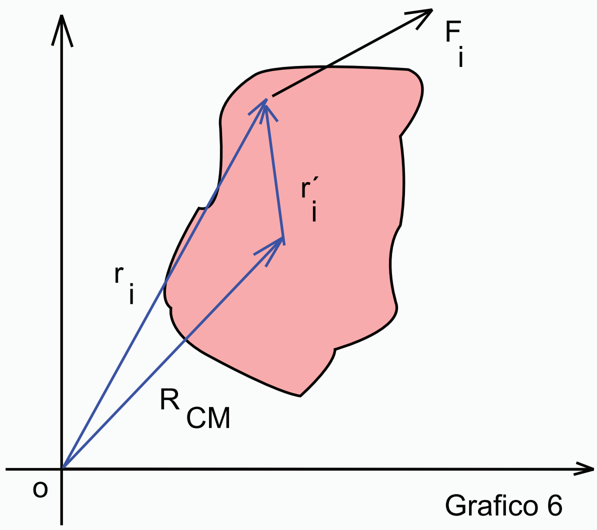


Grafico 6

En general, $$w_F = \sum_{i=1}^{n}\int \mathbf{F}_i.d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\int \mathbf{F}_i.(d\mathbf{R}_{CM} + d\mathbf{r}'_i) = \sum_{i=1}^{n}\int \mathbf{F}_i.(d\mathbf{R}_{CM}) + \sum_{i=1}^{n}\int \mathbf{F}_i.(d\mathbf{r}'_i) =$$

$$\int (\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i).d\mathbf{R}_{CM} + \int \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i.(d\mathbf{r}'_i) = I + II$$

→ Página 39

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ext} = M.\mathbf{a}_{CM}$$

$$I \rightarrow \int M.\mathbf{a}_{CM}.d\mathbf{R}_{CM}$$

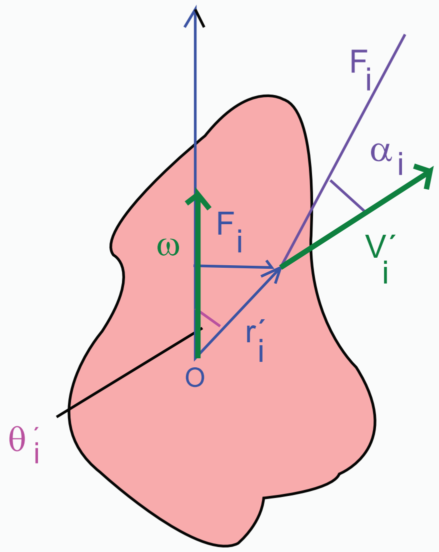
El dR_{CM} está en la dirección de V_{CM}. El producto escalar de a_{CM} con dR_{CM} es la proyección de la aceleración en la dirección de la velocidad. O sea, $a_{CM}.\ dR_{CM}.\cos(\Theta)$. Θ es el ángulo que forma la aceleración con la velocidad (la cual es tangente a la trayectoria). Luego $a_{CM}.\cos(\Theta)$ = aceleración tangencial = dV_{CM}/dt. Donde V_{CM} es el módulo de la velocidad.
Reemplazando:

$$\int M.\frac{dV_{CM}}{dt}.dR_{CM} = \int M.\frac{dR_{CM}}{dt}.dV_{CM} = \int M.V_{CM}.dV_{CM} =$$

$$= \frac{1}{2}MV_{CMf}{}^2 - \frac{1}{2}MV_{CMo}{}^2$$

O sea que el primer término es igual a la variación de la energía cinética de traslación del CM del CR, equivalente a la variación de la energía cinética de un punto material con masa M y velocidad V_{CM}.

Para hallar el segundo término vamos a tener en cuenta que la integral tiene que ver con dr´i.



Respecto a un eje que pasa por el CM y coincide con la dirección del vector velocidad angular, tenemos

$$d\mathbf{r}'_i = \mathbf{v}'_i.dt = \omega \wedge \mathbf{r}'_i.dt$$

$$|d\mathbf{r}'_i| = \omega.\mathbf{r}'_i\ sen(\theta'i)\ dt = \omega.\mathbf{R}_i.dt$$

$$\mathbf{F}_i.d\mathbf{r}_i = F_i.\cos(\alpha_i).dr'_i = F_i.\cos(\alpha_i).\omega.R_i.dt =$$

$$= [F_i.\cos(\alpha_i).R_i].\omega.dt$$

El término entre corchetes es el momento que hace Fi alrededor de un eje paralelo a ω, pues
está en la dirección de V´I, la cual es perpendicular a Ri y por lo tanto lo que está dentro del corchete es el momento de la fuerza.
Así I queda:

$$\tau_i\,\omega\,dt = \tau_i\,d\theta$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int \mathbf{F}_i\,(d\mathbf{r}'_i) = \int\sum_{i=1}^{n}\cdot_i\,d\theta = \int\tau_{ext.tot.}\,\omega\,dt =$$

$$= \int I.\alpha.\omega.dt = \int I.\frac{d\omega}{dt}.\omega.dt = \int I.\omega.d\omega =$$

$$\frac{1}{2}I\omega_f^{\ 2} - \frac{1}{2}I\omega_o^{\ 2}$$

Volviendo a la expreción original

$$\omega_F = I + II = \frac{1}{2}MV_{CMf}^{\ 2} - \frac{1}{2}MV_{CMo}^{\ 2} + \frac{1}{2}I\omega_f^{\ 2} - \frac{1}{2}I\omega_o^{\ 2} =$$

$$= E_{cin_f} - E_{cin_o},$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}MV_{CM}^{\ 2} + \frac{1}{2}I\omega^2$$

[I] Es el trabajo hecho por la fuerza total aplicada al CM del CR, la cual varía la energía cinética del centro de masa.
[II] Es el trabajo del momento total alrededor del centro de masa que varía la energía cinética de rotación.
Por lo tanto toda fuerza aplicada realiza un trabajo que tiene dos componentes, una es el trabajo de la fuerza aplicada en el centro de masa del cuerpo rígido y la otra componente es el trabajo del momento de dicha fuerza. La primera varía la energía cinética de translación y la segunda varía la energía cinética de rotación.
Por ejemplo para el caso de un resorte,

$$\omega_{resorte} = \omega_t + \omega_F = E_{pot.el._o} - E_{pot.el._f}$$

El tratamiento se simplifica pues solo debemos computer:

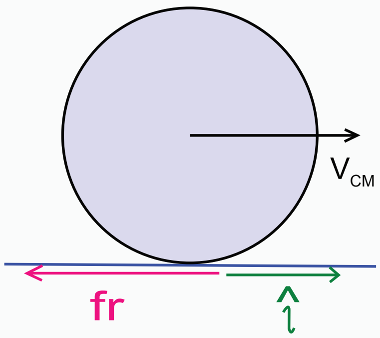
$$\omega_{resorte} = \frac{1}{2}kX_o^{\ 2} - \frac{1}{2}kX_f^{\ 2}$$

Donde Xo y Xf son las elongaciones iniciales y finales del resorte respecto de la posición de equilibrio (resorte sin elongar). Si esto no fuera así deberíamos calcular

$$\omega_t + \omega_F$$

→Trabajo de la fuerza de roce

Como caso particular calcularemos el trabajo que realiza la fuerza de roce, cuando un cilindro o una esfera rueda sin deslizar. Por un lado la fuerza de roce se la debe considerar aplicada al CM del cuerpo y es la encargada de variar la V_{CM} (con lo cual se está realizando un trabajo) y por otro lado la fr realiza un momento respecto del CM, el cual varía la velocidad ω de rotación del cuerpo (con lo cual se está realizando un trabajo). El hecho de que ruede sin deslizar impone una relación entre estos dos trabajos, están "atados".
El trabajo de la fuerza de roce tiene dos contribuciones:



$$\omega_{fr} = \omega_{\tau\, rotac\ fr} + \omega_{transl\ fr}$$

$$\omega_{trans} = \int \mathbf{fr}.d\mathbf{R}_{CM} = -\int \mathrm{fr}.d\mathrm{R}_{CM}\,\mathbf{i}.\mathbf{i} = -\int \mathrm{fr}.d\mathrm{R}_{CM}$$

$$dR_{CM} = Rd\theta ; [\frac{dRCM}{dt} = V_{CM} = R\omega = R.\frac{d\theta}{dt}]$$

Pues hay rodadura sin deslizamiento,

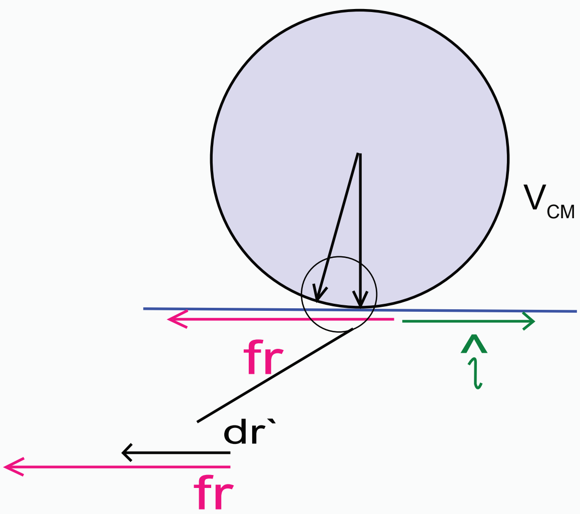
$$-\int \mathrm{fr}.d\mathrm{R}_{CM} = -\int \mathrm{fr}.\mathrm{R}.d\theta$$

Para el trabajo hecho por el momento de la fuerza tenemos:

$$\omega_{rot} = \int \mathbf{fr}.d\mathbf{r}'$$

en el caso de la figura la fuerza de roce tiene el mismo sentido y dirección que el vector desplazamiento.

Respecto de un sistema fijo en el CM, el trabajo que realiza el momento de la fuerza sale de considerar el producto escalar de la fuerza por dr´ (ver demostración anterior) donde dr´ es el vector desplazamiento medido respecto del CM:



$$d\mathbf{r}' = -R.d\theta.\mathbf{i}$$
$$\mathbf{f}r = -fr.\mathbf{i}$$
$$\mathbf{f}r.d\mathbf{r}' = (-R.d\theta)\mathbf{i}.\mathbf{i}(-fr) = R.d\theta.fr$$
$$\omega_{rot} = \int R.fr.d\,\theta$$

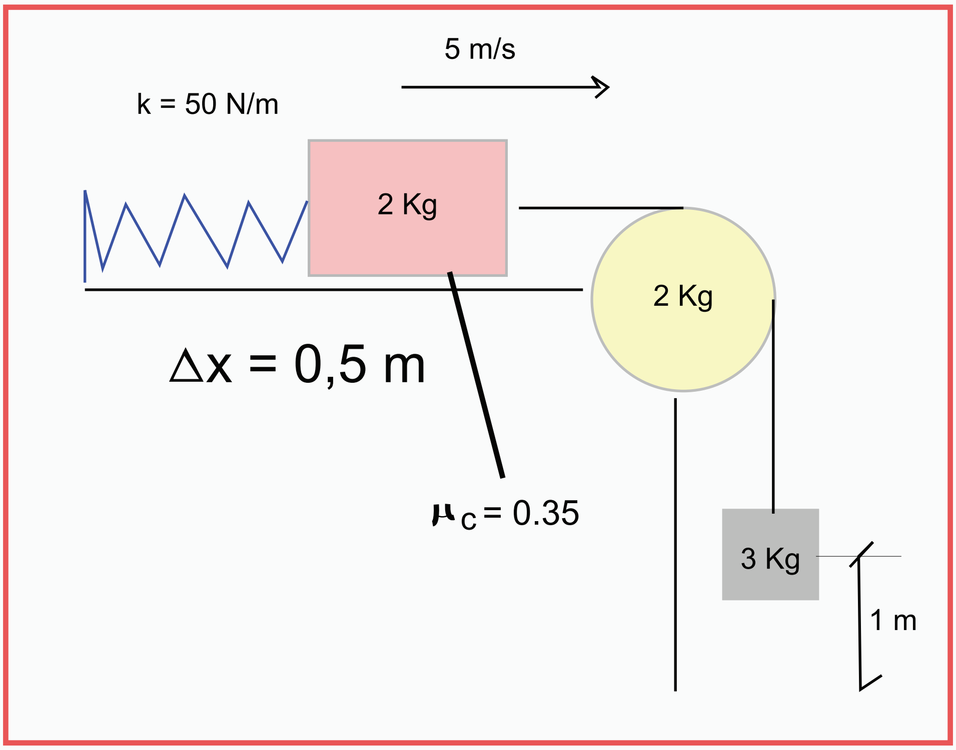
En rodadura sin deslizamiento la fuerza de roce no realiza trabajo

$$E_{mec_f} - E_{mec_o} = \omega_{F \neq fr}$$

Esto es así porque, por un lado y para este ejemplo, el momento que hace fr va a favor del aumento de la velocidad angular (y por estar "atada" por rodadura tiende a aumentar V_{CM}) pero, por otro lado, la fr aplicada en el CM va en contra de V_{CM} (y por estar atada por rodadura tiende a disminuir la velocidad angular). Como es rodadura sin deslizamiento entonces se cancelan exactamente.

Ejemplo I

Calcular la velocidad final de la masa de 3kg luego de descender 1m desde su posición inicial. La polea es cilíndrica y sin roce. Entre el cuerpo de 2kg y la superficie hay roce e inicialmente posee una velocidad de 5m/s. Este se encuentra unido a un resorte por un extremo y, a través de una cuerda que pasa por una polea sin deslizar, al cuerpo de 3 kg por el otro extremo.



$$E_{mec} = E_{mec2kg} + E_{mec3kg} + E_{mec.polea}$$

$$E_{mec2kg.o} = \frac{1}{2}m.(v)^2 + \frac{1}{2}k(\frac{N}{m})(x)^2 + m.g.h =$$

$$= \frac{1}{2}2kg.(5m/s)^2 + \frac{1}{2}50(\frac{N}{m})(0,5m)^2 + 2\ kg\ .h_o.g$$

$$E_{mec3kg.o} = \frac{1}{2}m.(v)^2 + m.g.h'_o = \frac{1}{2}3kg.(5m/s)^2 + 3kg.10(\frac{m}{s^2}).1m$$

$$E_{mec.polea.o} = \frac{1}{2}I_{pol.cm.}\omega^2 + m_{polea}.g.h''_o = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}2kgR^2)\omega^2 + m_{polea}.g.h''_o =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}2kg)(R\omega)^2 + m_{polea}.g.h''_o = \frac{1}{2}5^2 J + m_{polea}.g.h''_o$$

Reemplazando en la primera ecuación obtenemos para

$$E_{mec.o} = 111.25 Joules + m.g.h + +m_{polea}.g.h'$$

donde h es la altura del cuerpo de 2kg y h´ es la altura de la polea.

Para la energía mecánica final tenemos:

$$E_{mec2kg.f} = \frac{1}{2}m.(v')^2 + \frac{1}{2}k(\frac{N}{m})(x)^2 + m.g.h_f =$$

$$= \frac{1}{2}2kg.(v')^2 + \frac{1}{2}50(\frac{N}{m})(1+0,5m)^2 + 2\ kg\ .h.g$$

$$E_{mec3kg.f} = \frac{1}{2}m.(v')^2 + m.g.h'_f = \frac{1}{2}3kg.(v')^2 + 3kg.10(\frac{m}{s^2}).0$$

$$E_{mec.polea.f} = \frac{1}{2}I_{pol.cm.}\omega'^2 + m_{polea}.g.h''_f = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}2kgR^2)\omega'^2 + m_{polea}.g.h' =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}2kg)(R\omega')^2 + m_{polea}.g.h' = \frac{1}{2}v'^2 + m_{polea}.g.h'$$

$$E_{mec.f} = \frac{1}{2}2kg.(v')^2 + \frac{1}{2}50(\frac{N}{m})(1+0,5m)^2 + 2(kg).h.g +$$

$$+ \frac{1}{2}3kg.(v')^2 + \frac{1}{2}v'^2 + m_{polea}.g.h'$$

La energía mecánica inicial es toda la energía que tiene el sistema para gastar (no hay inyección de energía desde el exterior como podría ser algo que empuje uno de los dos cuerpos a favor del movimiento). Así esta energía inicial puede gastarse en la energía mecánica final o puede disiparse. Por lo tanto:

$$E_{mec._o} \left\langle \frac{E_{mec.f}}{\left|\omega_{f_r}\right|} \right.$$

$$E_{mec._o} = E_{mec._f} + \left|\omega_{f_r}\right|$$

Puesto que al ser la cuerda inextensible lo que baja el cuerpo de 3kg es lo que se estira el resorte. Por otro lado, las energías potenciales gravitatorias de la polea y del cuerpo de 2 kg no varían.
Para el módulo del trabajo de la fuerza de roce sólo debemos calcular el producto de ella por la distancia recorrida que es 1 m.

$$\left|\omega_{fr}\right| = fr.d = \mu_c.N.1m = 0{,}35.20N.1m = 7Joules$$

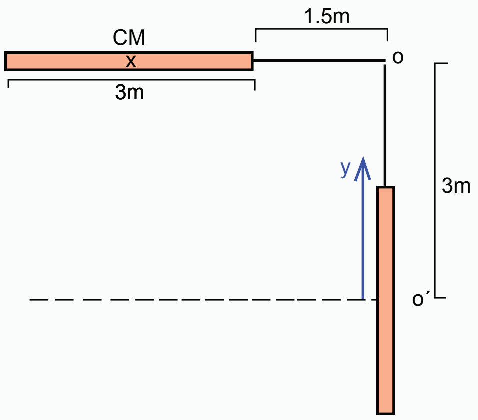
Reemplazando en la anterior tenemos:

$$Emec.o - Emec.f = 111.25 - 56.25 - 3.v'^2 = \left|\omega_{fr}\right| = 7Joules$$

De donde obtenemos para v´:

$$v' = 4m/s$$

Se suman todas las energías iniciales que entran en el cálculo de la energía mecánica. Se hace lo mismo con la energía mecánica final. La diferencia es el trabajo de las fuerzas no consideradas en la definición de energía mecánica. Por ejemplo si sabemos que esta fuerza es disipativa entonces la energía mecánica inicial será mayor que la final pues parte se perdió en calor. Si sabemos que hay alguna fuerza (no considerada en la definición de la energía mecánica) que va a favor del movimiento entonces la energía mecánica final va a ser mayor que la inicial (se le habrá inyectado energía al sistema).



La barra de la figura de masa M está atada por medio de una cuerda a un eje alrededor del cual gira (punto **O**). Inicialmente se encuentra en la posición horizontal y en reposo. Calcular la velocidad del CM cuando pasa por la posición vertical. Ponemos el origen de coordenadas en **O´**.

Calculamos el momento de inercia respecto de **O** pues respecto de dicho punto el CR tiene una rotación pura.

$$E_{pot.grav.o} = 3m.M.g$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$$

$$I_o = \frac{1}{12}ML^2 + M3^2 = M3^2.\frac{13}{12}$$

Luego la expresión para la Ecin del CR tiene solo el término de rotación:

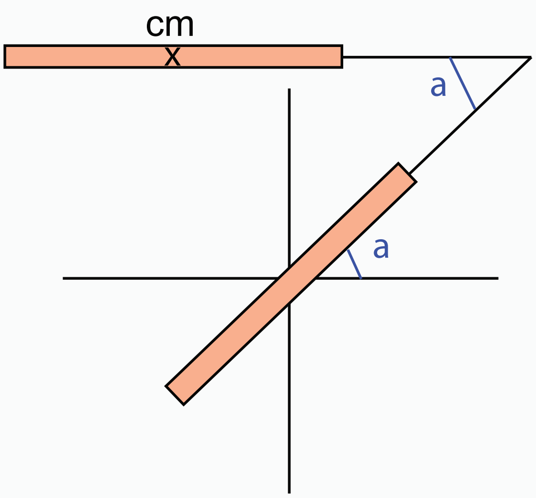
$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_o . \omega^2 ; \qquad I_o = \frac{9.13}{12} . M$$

Igualando las energías mecánicas arriba y abajo (ya que no hay otra fuerza distinta de la gravitatoria, conservándose la energía mecánica):

$$E_{pot.grav.o} = E_{cin.f} = Mg3 = \frac{M.9.13\omega^2}{24}$$

$$\omega = 2,48(1/seg)$$

Este problema puede ser resuelto calculando las dos componentes de la energía cinética:
La energía cinética de rotación alrededor del CM del CR y la de translación del CM como un todo.
Para calcular la energía cinética de rotación hay que tener en cuenta que respecto de unos ejes fijos en el CM la velocidad que medimos es la misma que en el caso anterior, ver figura en donde vemos que el ángulo que rota es el mismo.



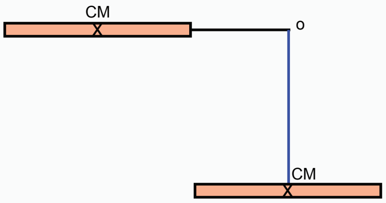
$$E_{cin} = \frac{1}{2} M (3\omega)^2 + \frac{1}{2} (\frac{M.3^2}{12}) \omega^2 =$$

El primer término representa la energía de traslación del CM y el segundo término la energía de rotación alrededor del CM.

$$E_{cin} = \frac{1}{2} M (3\omega)^2 + \frac{1}{2} (\frac{M.3^2}{12}) \omega^2 = \frac{1}{2} M [(3)^2 + (\frac{.3^2}{12})] \omega^2$$

El término entre corchetes es el momento de inercia anteriormente calculado respecto del punto **O**, luego igualando la energía potencial a la cinética, obtenemos:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}M[(3)^2 + (\frac{.3^2}{12})]\omega^2 = Mg3;$$
$$\omega = 2,48(1/seg)$$
$$V_{CM} = 2,48.3 = 7,44(m/s)$$



Si en cambio la barra baja de la siguiente manera (la cuerda está unida a un eje que pasa por el CM del CR), sólo posee energía de traslación del CM, la energía de rotación alrededor del CM es nula:

$$E_{pot} = M.g.3 = \frac{1}{2}MV_{CM}{}^2;$$
$$V_{CM} = 7,75(m/s)$$

Toda la energía se ha transformado en energía cinética de traslación del CM.

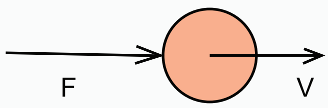
Giróscopo

La tabla muestra la equivalencia existente entre las variables dinámicas del movimiento lineal y circular.

Movimiento lineal	Movimiento circular
R	θ
V	ω
A	α
M	I
F = ma	τ = Iα
P = m**v**	**L** = **r**Λm**v** = **r**Λ**P**
F = d(m**v**)/dt	τ **=** d(**r**Λ**P**)dt

En el caso de la dinámica de un punto material podemos observar las siguientes cosas:
Si F y v tienen la misma dirección entonces:

$$\Delta\mathbf{v}; m\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{P}$$

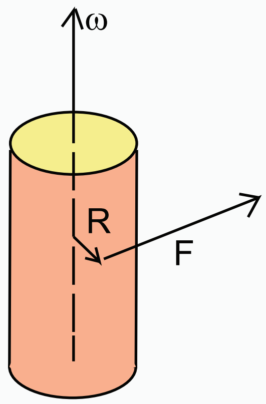


resultan ser paralelos a F

$$m\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{P} = \mathbf{F}.\Delta t$$

por lo tanto cambia el módulo de P pero no su dirección.

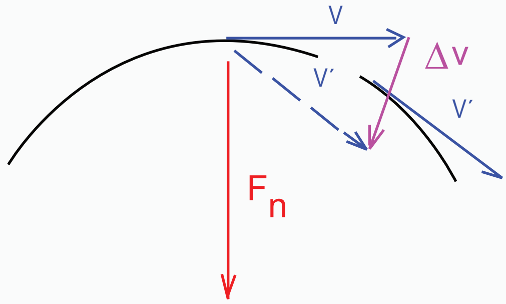
Para la **rotación** existe un caso equivalente:



El giro es según la regla de la mano derecha y mirando de frente la superficie amarilla, en sentido anti horario. La dirección y sentido del momento que realiza la fuerza F se lo obtiene volcando R sobre F ($\tau = R \wedge F$). Obtenemos de esta manera un momento paralelo a ω. Luego τ resulta paralelo a
Pues de $\tau = I.\ = I.d(\omega)/dt; \tau\Delta t = I.\Delta\omega$ resulta lo mismo que para

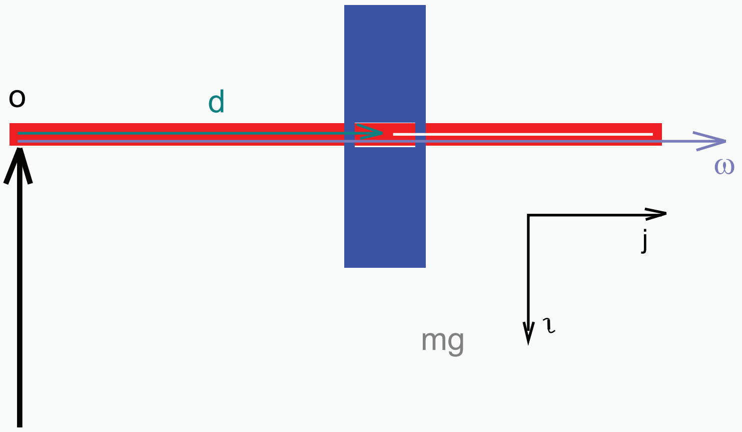
$$m\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{P} = \mathbf{F}.\Delta t$$

El otro caso extremo para el caso de las fuerzas es:



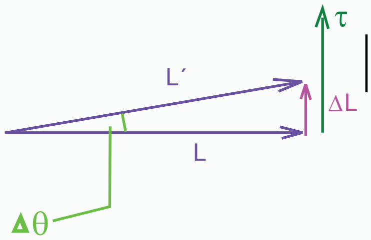
Para este caso consideremos el módulo de la velocidad constante, pero la partícula describiendo una trayectoria circular. Como v es un vector, en estas condiciones lo que varía es la dirección del vector. Luego, hay una aceleración normal a la trayectoria, causada por la Fn.
O sea si Fn es $\perp$ a v ($F_n \perp mv$) entonces Fn no le cambia el módulo a v (a mv) sino su dirección.
Con $|F_n| = mv^2/R$ de aquí se sigue que $F_n / mv = \omega = F_n/P$ la cual a su ves es la velocidad con la cual está "rotando" el vector v, pues el ángulo que rota la partícula es el ángulo que rota el vector velocidad (la demostración trigonométrica es simple).

Debe haber un caso parecido para la rotación.



En el caso de la figura tenemos: $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ (equivalente a P = mv). $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{d}\Lambda m\mathbf{g}$ (equivalente a F=m.a) Por la regla de la mano derecha, el vector d debe volcarse sobre el vector mg. El primero es paralelo a j y el segundo lo es a i luego el τ es perpendicular al papel entrando al papel
d = dj y mg = mgi ; τ= dj Λ mgi = -mgdk

$\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}.\Delta t = -mgd\,\Delta t\,\mathbf{k}$ está en la dirección –k , mirando desde arriba:



$$\Delta\mathbf{L} \approx \mathbf{L.}\Delta\theta = -mgd\,\Delta t\mathbf{k};$$

$$|\Delta\mathbf{L}| \approx mgd\,\Delta t = L\Delta\theta;$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \approx \frac{mgd}{L} = \frac{mgd}{I\omega} = \frac{\tau}{L}$$

$$\Omega = \frac{\tau}{L}$$

Hemos supuesto que el arco es aproximadamente igual al cateto opuesto y que para ángulos chicos el L es perpendicular al Δ L.
Vemos que la relación:
ω = Fn/P para el caso de las fuerzas es totalmente equivalente a $\Omega = \frac{\tau}{L}$

obtenido para los momentos. Así como la partícula gira sin cambiar el módulo de su velocidad (su P) y gira con velocidad angular constante, de la misma manera el L precesa con velocidad angular Ω .

Cuestionario:

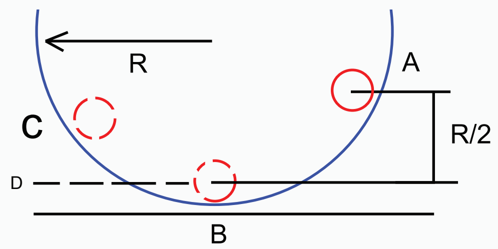
1 – En rodadura sin deslizamiento, ¿cuál es el trabajo realizado por la fuerza de roce?

2 – Si un rodillo desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento, ¿puede variar su velocidad angular? ¿Y si lo hace sobre un plano inclinado? Justifique.

3 – Si un rodillo rueda sin deslizar sobre un plano inclinado, ¿en qué clase de energía cinética se puede transformar la energía potencial gravitatoria? ¿Y si el plano inclinado está exento de roce? Justifique.

Problema

Un cilindro homogéneo de radio r puede moverse en el interior de una superficie cilíndrica de radio R. La superficie de la mitad derecha presenta rozamiento, de modo que el cilindro rueda sin resbalar. La mitad izquierda está exenta de rozamiento. Inicialmente el cilindro se encuentra en la posición A. Hallar la velocidad en el punto B y la altura en el punto C. Explique porqué no alcanza la misma altura que en A.



Respuestas al cuestionario

1 – Es cero ya que el trabajo realizado por el momento de la fr alrededor del CM del CR es compensado exactamente por el trabajo realizado por la fr aplicada en el CM del CR.

2 – No puede variar pues la única fuerza que puede hacer variar (en este caso en particular) la velocidad angular de rotación es el trabajo del momento de la fuerza de roce, y al no existir fuerza de roce este es nulo, con lo cual la velocidad angular permanece constante. Para el caso del plano inclinado el razonamiento es el mismo.

3 – Si rueda sin deslizar la energía potencial gravitatoria se transformar en energía cinética de rotación y de translación. Si no hay rozamiento entre las superficies de contacto entonces al no haber momento alrededor del CM del CR la energía cinética de rotación debe permanecer constante y la energía potencial entonces se transforma en energía de translación del CM del CR.

Resolución del problema

Calculemos la energía mecánica en la posición A y la energía mecánica en la posición B. Deben ser iguales pues no hay fuerzas disipativas. Como la fr en rodadura sin deslizamiento no realiza trabajo entonces :

$$Emec_A = Emec_B$$

Ponemos nuestro origen de alturas en el nivel D. Luego obtenemos para la energía mecánica en A:

$$Emec_A = MgR/2,$$

tiene solo contribución gravitatoria ya que parte del reposo y la energía cinética de rotación y de translación son ambas nulas.
Para la energía mecánica en B solo debemos considerar (por como hemos elegido el origen de coordenadas) la parte cinética,

$$Emec_B = \frac{1}{2} M.^2(V_{CM}) + \frac{1}{2}.I.\omega^2$$

Como hay rodadura sin deslizamiento,

$$V_{CM} = \omega.R, \text{ si es un rodillo } I = 1/2\ M\ R^2$$

Luego,

$$Emec_B = \frac{1}{2}[M + \frac{1}{2}.M].(V_{CM})^2 = MgR/2$$

De donde obtenemos

$$(V_{CM})^2 = 2gR/3$$

Para resolver la segunda parte del problema debemos tener en cuenta que, al no haber fr no hay fuerza que haga momentos alrededor del CM del CR y por lo tanto no hay momentos que puedan realizar un trabajo para variar la energía cinética de rotación. De esta manera la velocidad angular es constante en el tramo izquierdo.

$$Emec_B = \frac{1}{2} M.(V_{CM})^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2 = \frac{1}{2}.I.\omega^2 + Mgh',$$

Con lo cual:

$$Mgh' = \frac{1}{2} M.(V_{CM})^2 = \frac{1}{2}.M.2gR/3, \quad h' = R/3.$$

La altura es menor pues en C el CR sigue rotando, lo cual significa que parte de la energía en B no se transformó en gravitatoria.

→ Página 51

Bibliografía

ALONSO M. y FINN E.: Física Vol I Mecánica. Delaware, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987
ALONSO M. y ROJO O.: Física. Mecánica y termodinámica. México, Fondo Educativo Interamericano, 1981.
EISBERG R. M. y LERNER L. S.: Física. Fundamentos y Aplicaciones. Vol I, México, McGraw-Hill, 1990.
GIANCOLI D.C.: Física general. Vol. I. México, Prentice Hall Hispanoamérica S.A., 1998.
INGARD U. y KRAUSHAAR W.: Introducción al Estudio de la mecánica, materia y ondas. Buenos Aires, Reverté S.A., 1984.
MAIZTEGUI A.: Introducción a las Mediciones de Laboratorio. Buenos Aires: Kapelusz, 1980.
NARA D. H.: Mecánica Vectorial para Ingenieros. Vol II. México, Limusa, 1980.
RESNICK R. y HALLIDAY D.: Física. Parte I y II. México, CECSA, 1997.
ROEDER J. G.: Mecánica Elemental. Buenos Aires, EUDEBA, 1963.
SEARS, Francis W.: Fundamentos de Física I- Mecánica, calor y sonido. Madrid, Aguilar, 1998.
SEARS, F. y ZEMANSKY M. y YOUNG H.: Física Universitaria. Delaware, Addison Wesley Iberoamérica S.A., 1986.
SERWAY, RAYMOND A.: Física. México, McGraw-Hill, 4º Edición, 1993.
TARASOV: Preguntas y Problemas de Física. Moscú, Mir, 2003.
TIPLER PAUL: Física. Buenos Aires, Reverté S.A., 1978.

Apuntes de Física de la UTN y de la cátedra de Física de la UACH.

Páginas Web consultadas:

http://www.ngsir.netfirms.com/englishVersion.htm
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/solido.htm
http://www2.udec.cl/~jinzunza/fisica/