Diferenciabilidad

Unidad V

Repaso de Análisis I

- Sea f: A$\rightarrow\mathbb{R}$ / A $\subseteq \mathbb{R} \wedge$ y = f(x) derivable en P_0 si y sólo si existe y es finito

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Llamamos *función diferenciable* a aquella cuyo incremento debido a *Δx* se puede escribir

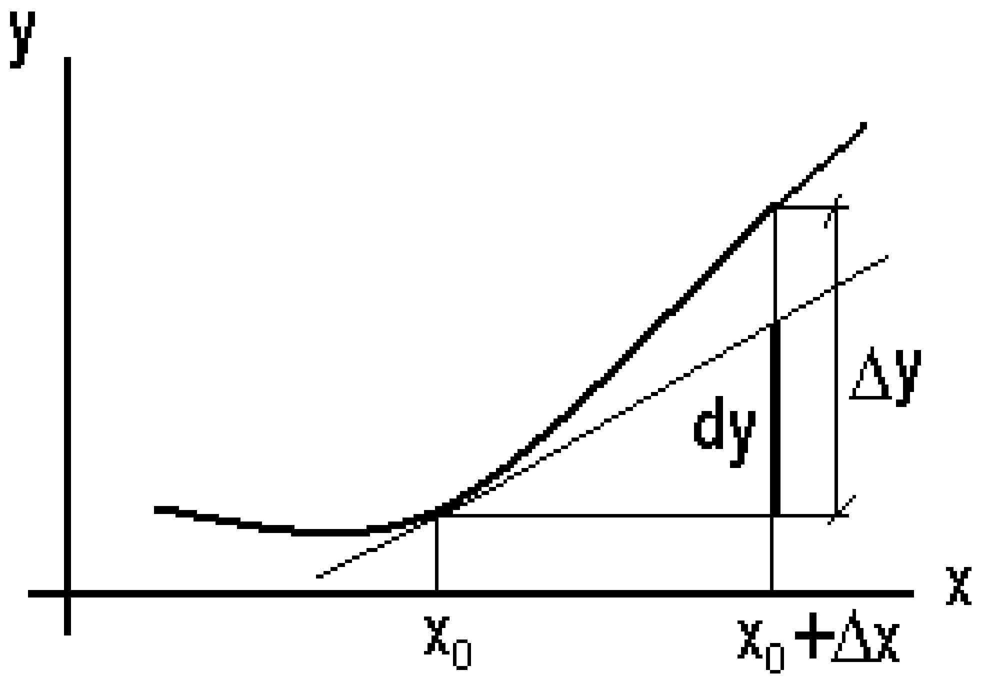
$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{con} \quad \varepsilon \to 0 \;\; si \;\; \Delta x \to 0$$

- Se llama *diferencial de f,* para el punto x_0 y para el incremento *Δx* *a* $df=dy= f'(x_0)\Delta x$

- El diferencial está representado por el segmento medido desde la horizontal hasta la recta tangente.

- $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$

Geogebra



Repaso de álgebra

- Una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función T que verifica:
  1) T(X+Y)=T(X)+T(Y)
  2) T(kX)=kT(X)
  3) T(0)=0

- $T(X) = M.\ X^t = (a_1\ a_2\ \ldots..\ a_n).\ X^t$

- $\check{e}_i$=(0,0,0,….,1,0,…..0) (un 1 en el lugar i y el resto 0)

- $T(\check{e}_i) = a_i$

Definición

Sea F: D$\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{P}_0$ un punto interior de *D*, un abierto de $\mathbb{R}^n$.

- *F* **diferenciable** en $\vec{P}_0$ si y sólo si existe una transformación lineal T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(\vec{X}) - F(\vec{P}_0) = T(\vec{X} - \vec{P}_0) + \varphi(\vec{X} - \vec{P}_0) \cdot \left\| \vec{X} - \vec{P}_0 \right\| \qquad \lim_{\vec{X} \to \vec{P}_0} \varphi(\vec{X} - \vec{P}_0) = 0$$

- *F* **diferenciable** en P_0 si y sólo si existe una transformación lineal T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{X} \to \vec{P}_0} \frac{F(\vec{X}) - F(\vec{P}_0) - T(\vec{X} - \vec{P}_0)}{\left\| \vec{X} - \vec{P}_0 \right\|} = 0$$

- Ejemplo: Analizar la diferenciabilidad de $f(x,y)=x^2+y^2$ en $(0,0)$

Propiedades:

1. F diferenciable en $\vec{P}_0$, entonces F continua en $\vec{P}_0$.

2. F diferenciable en $\vec{P}_0$, entonces F tiene derivadas parciales en $\vec{P}_0$.

3. F diferenciable en $\vec{P}_0$, entonces F tiene en $\vec{P}_0$ derivada direccional en toda dirección y sentido y además F'($\vec{P}_0$,$\check{v}$)= T($\check{v}$) $= \vec{\nabla}$F($\vec{P}_0$). $\check{v}$
(También vale para vectores)

4. F es C^1 en un entorno $\vec{P}_0$, entonces F diferenciable en $\vec{P}_0$.

Cuidado con los recíprocos

Los recíprocos de todas las propiedades anteriores no son válidos. Es decir:

- F continua en un punto **no implica** F diferenciable en dicho punto;
- F derivable en toda dirección y sentido en un punto **no implica** F diferenciable en dicho punto;
- F diferenciable **no implica** que F tiene derivadas parciales continuas.

Contrarrecíprocos

- Si F no es continua en P_0, entonces no es diferenciable en $P_{0.}$
- Si F no tiene definida alguna de sus derivadas parciales en P_0, no es diferenciable en P_0.
- Si F no tiene derivadas en todas las direcciones y sentidos en P_0, no es diferenciable en $P_{0.}$

¿Cómo decido que f no es diferenciable?

- No es continua
- No tiene alguna derivada direccional
- No cumple la fórmula del gradiente
- La expresión de las derivadas direccionales no responde a la forma de una TL
- No cumple la definición

¿Cómo decido que f es diferenciable?

- Cumple con la definición
- Es C^1

Genoccci Peaano / $xy/(x^2+y^2)$

03) Sea $f(x,y) = x^2/y$ si $(x,y) \neq (x,0)$ con $f(x,0) = 0$. Demuestre que f es derivable en toda dirección en $(0,0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

04) En los siguientes casos analice la derivabilidad en distintas direcciones y la diferenciabilidad de la función en el origen de coordenadas.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$, observe que f no es continua en (0,0).

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ~~Verifique que en (0,0) la función tiene dos direcciones de derivada direccional máxima y cuatro direcciones para las cuales la derivada resulta nula (cada dirección se especifica mediante el versor correspondiente).~~

07) *Optativo*: Siendo $f(x,y) = (x^3 - xy^2)/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$, demuestre que f es continua y derivable en toda dirección en (0,0) pero no es diferenciable en (0,0).

Fórmula del gradiente

Si F es diferenciable en P_0 con gradiente no nulo,

$$F'(\vec{P}_0,\breve{v})=\vec{\nabla}F(\vec{P}_0).\ \breve{v}=\left|\left|\vec{\nabla}F\right|\right|\left|\left|\breve{v}\right|\right|cos\varphi$$

Derivada direccional máxima:

Esta derivada direccional será máxima si $cos\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = 0$;

o sea en la dirección y sentido del gradiente

$\breve{v}_{max} = \frac{\vec{\nabla}F(x_0;y_0)}{\left\|\vec{\nabla}F(x_0;y_0)\right\|}$ y su valor será $\left\|\vec{\nabla}F(x_0;y_0)\right\|$.

Fórmula del gradiente

Si F es diferenciable en P_0 con gradiente no nulo,

$$F'(\vec{P}_0,\breve{v})=\vec{\nabla}F(\vec{P}_0).\ \breve{v}=\left|\left|\vec{\nabla}F\right|\right|\,||\breve{v}||cos\varphi$$

Derivada direccional mínima:

Esta derivada direccional será mínima si $cos\alpha = -1 \Longrightarrow \alpha = \pi$;

o sea en la dirección del gradiente y sentido opuesto

$$\breve{v}_{min} = -\frac{\vec{\nabla}F(x_0;y_0)}{\left\|\vec{\nabla}F(x_0;y_0)\right\|}$$ y su valor será $-\left\|\vec{\nabla}F(x_0;y_0)\right\|$.

Fórmula del gradiente

Si F es diferenciable en P_0 con gradiente no nulo,

$$F'(\vec{P}_0,\breve{v})=\vec{\nabla}F(\vec{P}_0).\ \breve{v}=\left|\left|\bar{\nabla}F\right|\right|\left|\left|\breve{v}\right|\right|cos\varphi$$

<u>Derivada direccional nula</u>

La derivada direccional es nula si $cos\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

o sea, en direcciones perpendiculares al gradiente.

Ejemplo

13) Halle las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de las siguientes funciones en el punto $\overline{A}$:

a) $f(x,y) = x^2 - xy^2$, $\overline{A} = (1,3)$.   b) $f(x,y,z) = x^2 - yz^3$, $\overline{A} = (5,2,0)$.

14) Siendo $g(x,y) = 3x^4 - xy + y^3$, calcule la derivada direccional de g en el punto $(1,2)$ según la dirección que forma con x^+ un ángulo –en sentido trigonométrico– de $\pi/3$.

17) Sea $f \in C^1$, si $f'(\overline{A},(3,4)) = 4$ y $f'(\overline{A},(2,7)) = -6$.

a) Calcule $f'(\overline{A},(5,9))$.

b) Determine el valor de la derivada direccional máxima de f en $\overline{A}$.

Plano tangente

- Se llama plano tangente a la superficie en $P_0=(x_0;y_0;\ z_0)$ al lugar geométrico de las rectas tangentes a todas las curvas a las que pertenece dicho punto y están sobre las superficie.

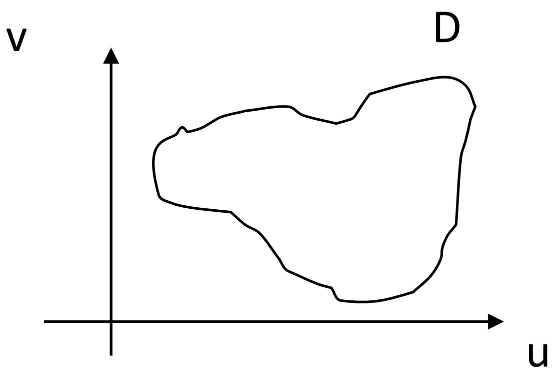
- La recta normal a una superficie es la recta que pasa por (x_0,y_0,z_0) y es perpendicular al plano tangente

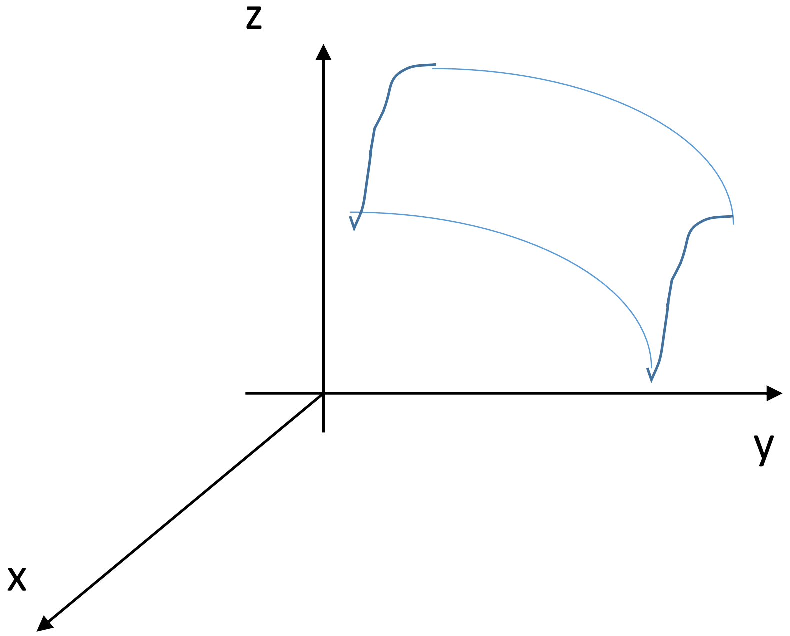
- Para encontrar la ecuación de un plano, necesitamos un punto de la superficie (x_0,y_0,z_0) y, por ejemplo, un vector normal.

Geogebra

Plano tangente para superficies parametrizadas

- Sea S la superficie imagen de $\vec{X}$(u,v) de D$\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ D abierto y $\vec{X}$ diferenciable en $(u_0,v_0)\in D$
- $\vec{X}(u_0,v_0)= (x_0,y_0,z_0)$





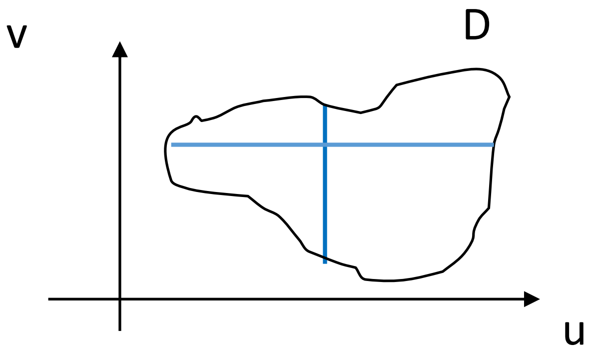
C_1 la curva imagen de $\vec{g}(v) = \vec{X}$ (u_0,v)

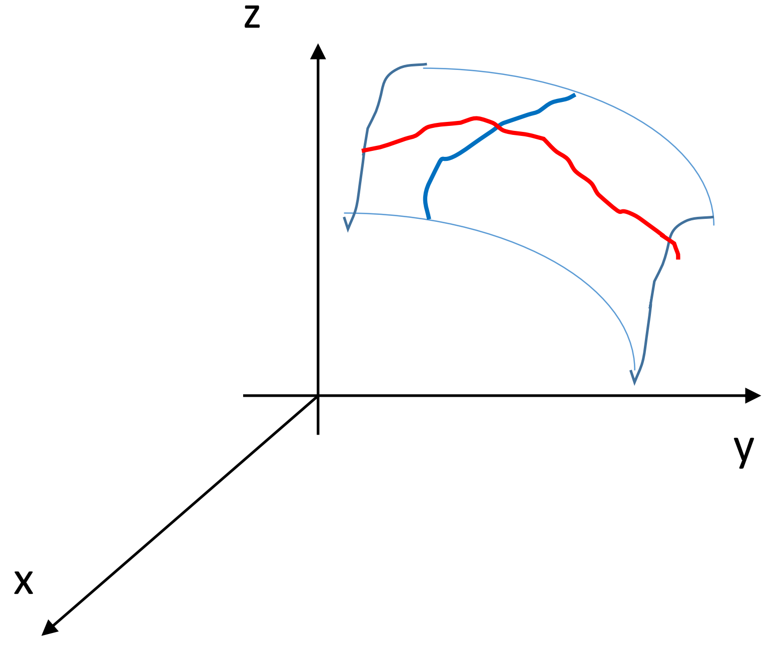
C_2 la curva imagen de $\vec{h}(u) = \vec{X}$ (u,v_0)

$\vec{v}_1 = \overrightarrow{g'}(v_0) = \vec{X}'_v(u_0,v_0)$

$\vec{v}_2 = \vec{h}'(u) = \vec{X}'_u(u_0,v_0)$

$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{X}'_u(u_0,v_0) \times \vec{X}'_v(u_0,v_0)$





Ecuaciones

- Plano tangente $((x,y,z)-\vec{X}(u_0,v_0)).\ (\vec{X}'_u(u_0,v_0) \times \vec{X}'_v(u_0,v_0))=0$

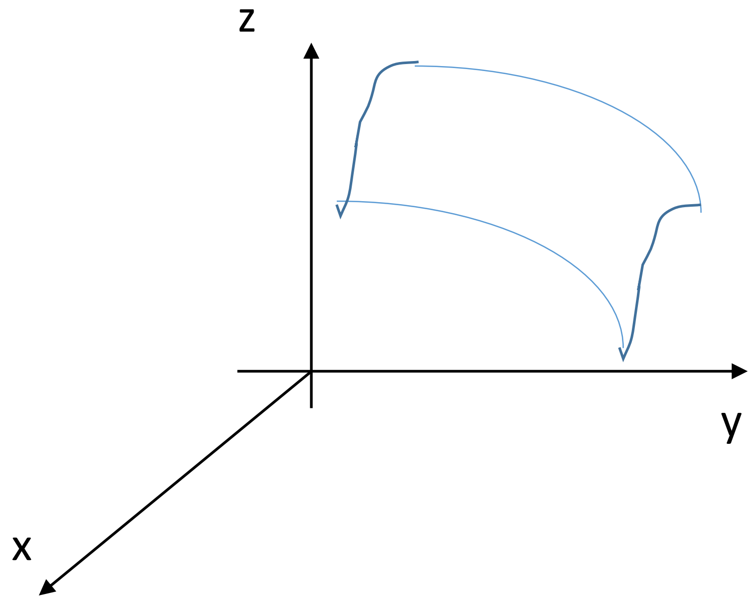
- Recta Normal $(x,y,z)= \vec{X}(u_0,v_0) + \lambda(\vec{X}'_u(u_0,v_0) \times \vec{X}'_v(u_0,v_0))$

Definición: Una superficie es regular si la función que la define es diferenciable y el normal a la superficie es distinto del vector nulo.

10) Sea S la superficie de ecuación $\overline{X} = (u - v^2, v^2/u, u/v)$ con $(u,v) \in \Re^2 /\ u\,v \neq 0$, verifique que $\overline{A} = (-2, 2, 1)$ es un punto regular de S. Determine y exprese en forma cartesiana el plano tangente y la recta normal a S en $\overline{A}$.

Plano tangente para superficies definidas explícitamente

- Superficie gráfico de F: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto y F debe ser diferenciable en $(x_0;y_0)$.
- $F((x_0;y_0)= z_0$



Parametrización del gráfico de F: (x, y, F(x,y))

$\vec{n} = (0,1,F'_y(x_0;y_0))\, x(1,0,F'_x(x_0;y_0))$

$\vec{n} = (F'_x(x_0;y_0), F'_y(x_0;y_0), -1)$

Ecuaciones

- Plano tangente $\left(\vec{X}-(x_0;y_0;F(x_0;y_0))\right)\cdot\left(F'_x(x_0;y_0);F'_y(x_0;y_0);-1\right)=0$

$$z - F(x_0;y_0) = F'_x(x_0;y_0)\,(x - x_0) + F'_y(x_0;y_0).\,(y - y_0)$$

- Recta Normal $\vec{X}=P_0+\lambda\left(F'_x(x_0;y_0);F'_y(x_0;y_0);-1\right)$ con $\lambda\in\mathbf{R}$

Ejemplos

06) Dada la superficie de ecuación $z = e^{(x-1)^2+y^2}$, determine en qué puntos tiene plano tangente horizontal y obtenga la ecuación de esos planos.

11) Dada la superficie de ecuación $z = x^2 - xy^3 + x$, demuestre que todos sus puntos son regulares y halle aquellos puntos en los que el plano tangente es "horizontal" (paralelo al xy).

12) Sea r_0 la recta normal a la superficie de ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ en $(1, 2, z_0)$, analice si existe algún punto en el que r_0 interseca a la superficie cilíndrica de ecuación $z = x^2$.

20) Se sabe que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $(1,2,z_0)$ es $2x + 3y + 4z = 1$. Con esta información, ¿es posible calcular la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ en la dirección que va hacia el punto $(3,4)$?.

Diferencial Total

- Se llama **diferencial total** de F en P_0 a la transformación lineal $T(X-P_0)$

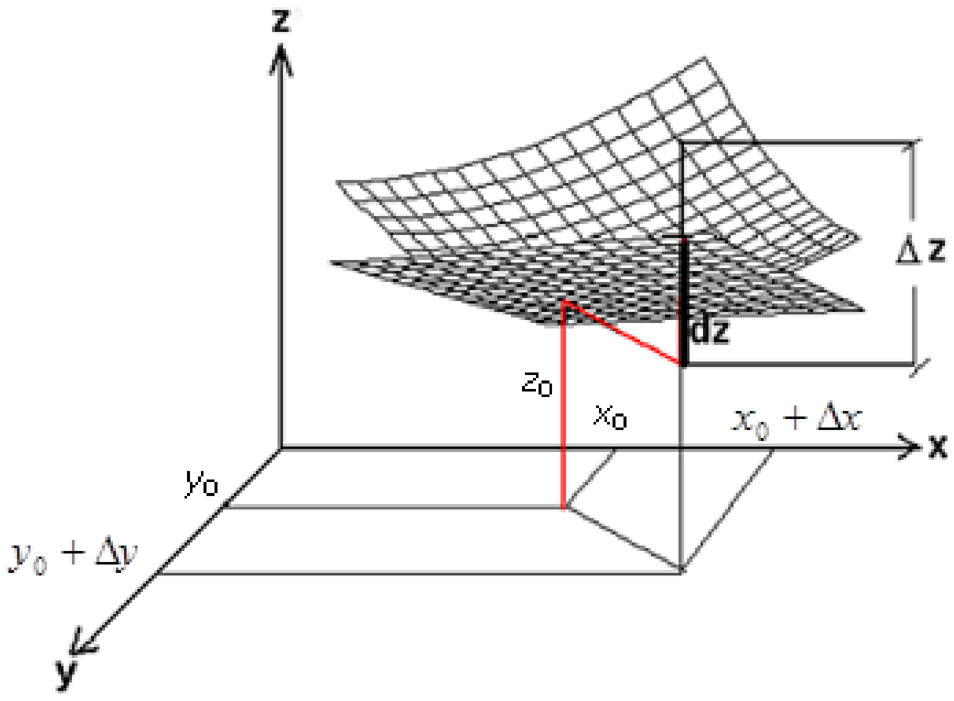
$$dF(P_0) = T(X-P_0)$$

- $dF(P_0)= \vec{\nabla}F(P_0).\ (X-P_0)$

- $dF(P_0)= \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(P_0)\left(x_i - x_{i0}\right) = \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(P_0)\,\Delta x_i$

Interpretación Geométrica

- dF es el segmento medido desde la cota z_0 hasta el plano tangente
- $\Delta F \approx dF(P_0)$
- $F(x,y) \approx F(x_0;y_0) + dF(P_0)$



Geogebra

08) Calcule mediante aproximación lineal y compare el resultado con el obtenido con calculadora.

a) $f(1.96, 0.96)$ cuando $f(x,y)=\sqrt{25-2x^2-y^2}$.

17) Sea $f\in C^1$, si $f'(\overline{A},(3,4)) = 4$ y $f'(\overline{A},(2,7)) = -6$.

a) Calcule $f'(\overline{A},(5,9))$.

b) Determine el valor de la derivada direccional máxima de f en $\overline{A}$.

c) Sabiendo que $f(\overline{A}) = 3$, calcule en forma aproximada $f(\overline{A}+(0.01,-0.02))$.

18) La recta determinada por la intersección de las superficies de ecuaciones $y^2 = x^2 - z^2$ y $z = x$ es normal a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,0,1)$, calcule aproximadamente $f(0.98, 0.01)$.