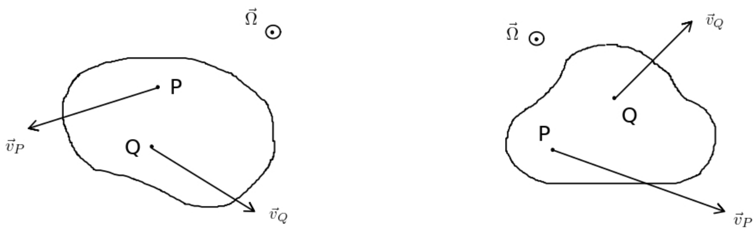
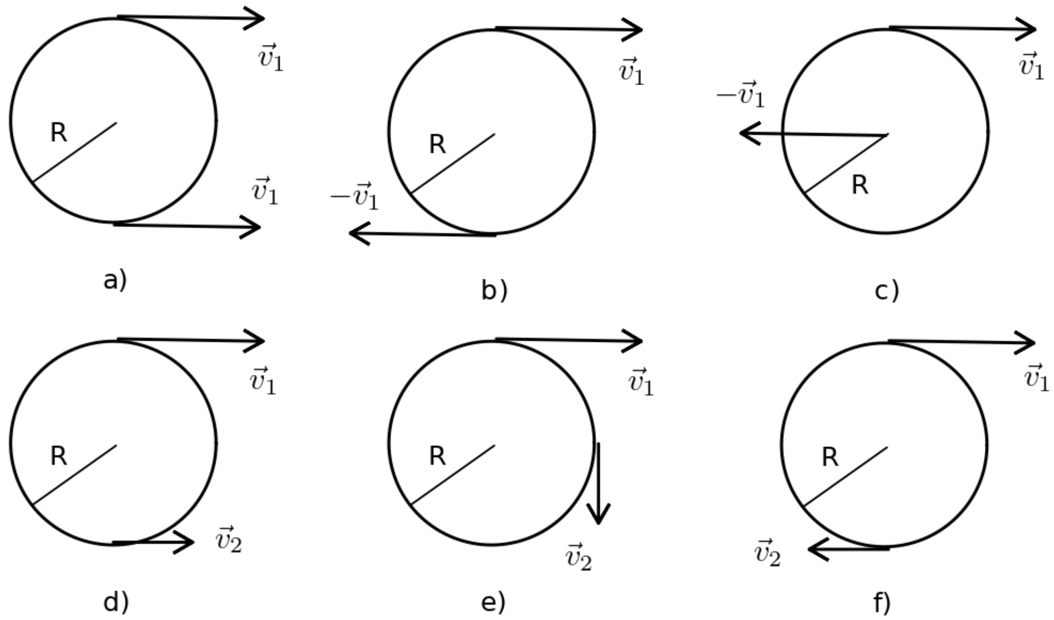
U. T. N. FRBA - Física 1
Cinemática y Dinámica del Cuerpo Rígido

Cinemática

1. Determine gráficamente la posición del eje instantáneo de rotación en los siguientes casos

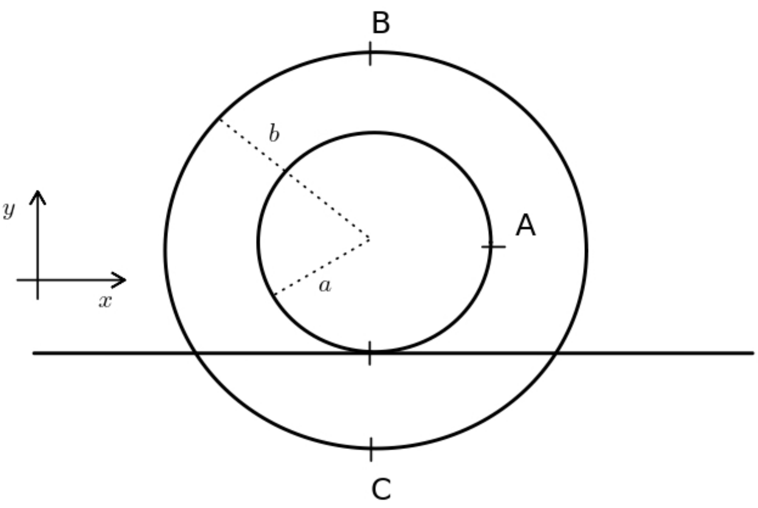


2. Para cada disco mostrado, asumiendo que permanece en el plano de la figura, indique si las velocidades de los puntos indicados son compatibles con un movimiento rígido. En los casos afirmativos, encuentre la velocidad angular y la posición del eje instantáneo de roración respecto del centro del disco. Datos: $|\vec{v_1}| = 10\ cm/s$; $|\vec{v_2}| = 2\ cm/s$; $R = 10\ cm$.



Rtas: *a*) Traslación pura. *b*) $\vec{\omega} = -1\ s^{-1}\ \hat{k}$; $\vec{r} = 0$. *c*) $\vec{\omega} = -2\ s^{-1}\ \hat{k}$; $\vec{r} = 5\ cm\ \hat{j}$. *d*) $\vec{\omega} = -0,4\ s^{-1}\ \hat{k}$; $\vec{r} = -15\ cm\ \hat{j}$. *e*) Incompatibles. *f*) $\vec{\omega} = -0,6\ s^{-1}\ \hat{k}$; $\vec{r} = -6,66\ cm\ \hat{j}$.

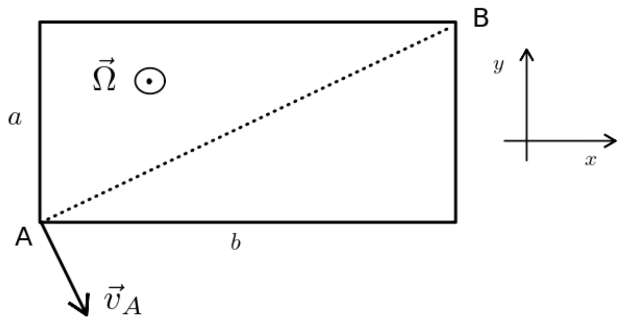
3. Un cilindro de radio $b = 6\ cm$ posee una ranura delgada de radio $a = 2\ cm$. Rueda sin resbalar sobre una varilla rígida con una frecuencia $f = 30\ rpm$ en el sentido horario. Determine los vectores velocidad de los puntos A, B y C del cilindro respecto de un sistema de referencia fijo a la varilla.



Problema 3

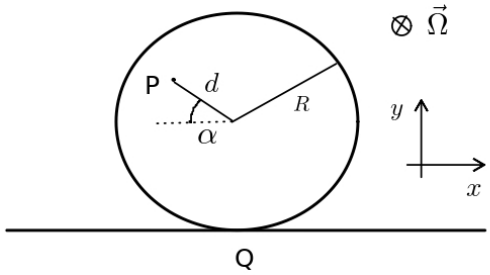
Rtas: $\vec{v}_A = 2\ \pi\ cm/s\ (\hat{\imath} - \hat{\jmath})$; $\vec{v}_B = 8\ \pi\ cm/s\ \hat{\imath}$; $\vec{v}_C = -4\ \pi\ cm/s\ \hat{\imath}$

4. Se tiene una lámina delgada rígida, rectangular, de lados $a = 3\ cm$, $b = 4\ cm$, que se mueve en el plano $x,\ y$. Se sabe que el punto A tiene una velocidad cuyo módulo vale 10 cm/s y cuya dirección forma un ángulo recto con la diagonal AB del rectángulo. Si la lámina gira con una frecuencia $f = 30\ rpm$: *a*) Determine el vector velocidad del punto B; *b*) halle la posición del eje instantáneo de rotación.



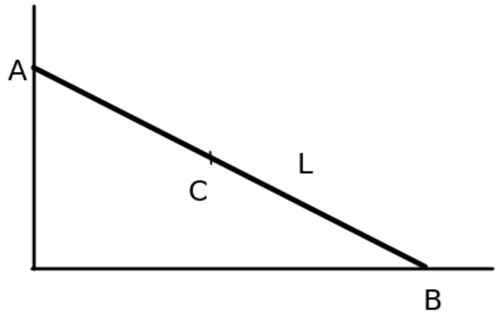
Rtas: *a*) $\vec{v_B} = -3,42\ cm/s\ \hat{\imath} + 4,56\ cm/s\ \hat{\jmath}$. *b*) Sobre el segmento AB a $3,18\ cm$ del punto A.

5. Un disco se mueve en el plano $x,\ y$ de tal modo que su centro tiene una velocidad de 1 m/s hacia la dirección positiva del eje x. Sabiedo que su velocidad angular es de 5 s^{-1}, determine: *a*) los vectores velocidad de los puntos P y Q respecto de un sistema de referencia fijo a la tierra; *b*) la posición del eje instantáneo de rotación respecto del centro del disco. Datos: $\alpha = 30°$; $d = 20\ cm$; $R = 30\ cm$.



Rtas: *a*) $\vec{v_P} = 1,5\ m/s\ \hat{\imath} + 0,866\ m/s\ \hat{\jmath}$; $\vec{v_Q} = -0,5\ m/s\ \hat{\imath}$; *b*) sobre el segmento que une el centro con el punto Q, a 20 cm del centro.

6. Una escalera homogénea de longitud $L = 5\ m$ se encuentra apoyada sobre una pared lisa. Si el punto A, en el instante en que se encuentra a $3\ m$ de altura, desciende con una velocidad de $3\ m/s$, halle en dicho instante: *a*) la velocidad del extremo B; *b*) la velocidad del punto medio de la escalera (C); *c*) la posición del eje instantáneo de rotación.

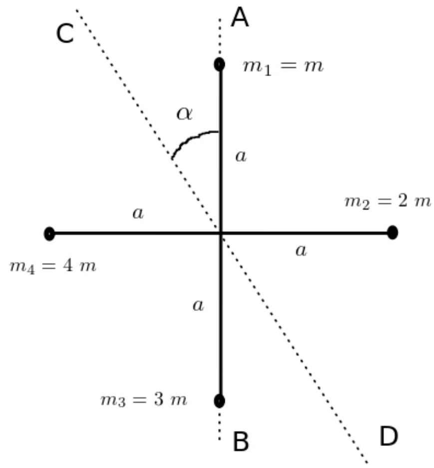


Rtas: *a*) $\vec{v_B} = 2,25\ m/s\ \hat{i}$; *b*) $\vec{v_C} = 1,125\ m/s\ \hat{i} - 1,5\ m/s\ \hat{j}$; *c*) $\vec{r} = 4\ m\ \hat{i} + 3\ m\ \hat{j}$.

Dinámica

Momento de inercia

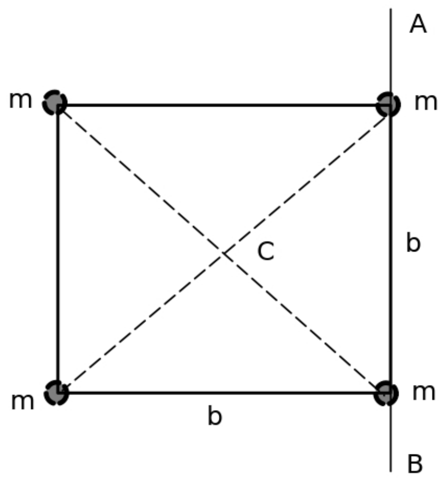
7. Dado el sistema de masas puntuales de la figura, unidas por varillas rígidas de longitud $2a$ y masas despreciables: *a*) encuentre el momento de inercia del sistema con respecto al eje AB; *b*) repita el punto anterior con respecto al eje CD, inclinado respecto de AB un ángulo $\alpha = 37°$ *c*) **(optativo)** ¿Para qué valores del ángulo α el momento de inercia toma un valor extremo? ¿Cúando se trata de un máximo y cuándo de un mínimo?.



Problema 7

Rtas.: *a*) $I = 6\ m\ a^2$; *b*) $I = 5,28\ m\ a^2$; *c*) $\alpha = 0°$ (máximo) y $\alpha = 90°$ (mínimo).

8. Las cuatro partículas de igual masa m de la figura se ubican en los vértices de un cuadrado de lado b ligadas por varillas rígidas de masas despreciables. *a*) Encuentre el momento de inercia del sistema con respecto al eje AB. *b*) Repita el punto anterior con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por el centro C del cuadrado.



Problema 8

Rtas: $a)I_{AB} = 2\ m\ b^2$; $b)I_C = 2\ m\ b^2$

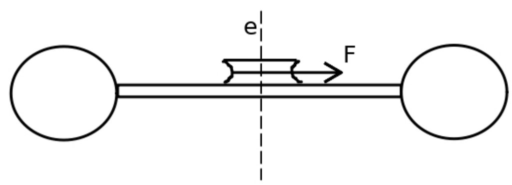
9. Dada una varilla rígida delgada homogénea de longitud L y masa m, deduzca la expresión de su momento de inercia con respecto al eje baricéntrico perpendicular a la varilla.
Rta: $I = \frac{1}{12} m\ L^2$

En lo sucesivo, utilice donde se requiera:

Anillo	Cilindro	Esfera	Varilla delgada
$I_{CM} = m\ R^2$	$I_{CM} = \frac{1}{2}\ m\ R^2$	$I_{CM} = \frac{2}{5}\ m\ R^2$	$I_{CM} = \frac{1}{12}\ m\ L^2$

Problemas con centro de masa fijo

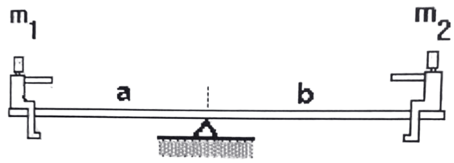
10. La pieza rígida homogénea de la figura está constituida por una varilla de 1 m de largo y 1,2 kg de masa; dos esferas de 0,2 m de radio y 0,1 kg de masa y una polea cilíndrica de 0,1 m de radio y 0,5 kg de masa. El sistema gira alrededor del eje de simetría e bajo la acción de una fuerza horizontal constante, de módulo 20 N, que se ejerce mediante una soga arrollada a la polea. Determine: a) el momento de inercia de la pieza respecto de su eje de rotación; b) la aceleración angular.



Rtas: $a)\ I = 0,2037\ kg\ m^2 \quad b)\ \gamma = 9,818\ s^{-2}$

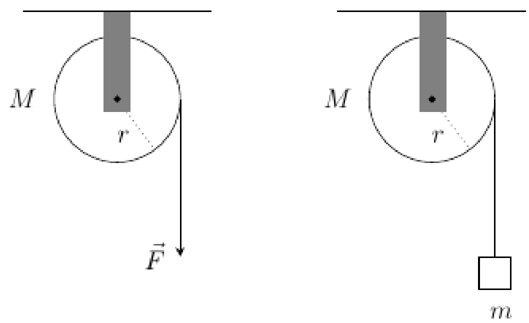
11. Tres niños se sientan en un sube y baja. Un niño de 40 kg y otro de 30 kg en los extremos opuestos a una distancia $a = b = 2\ m$ del punto de rotación y el tercero en una posición tal que se encuentran en equilibrio. Si el tercer niño se baja, ocasionando el desequilibrio, encuentre el módulo de la

aceleración angular de la tabla, despreciando su masa.



Rta: $\gamma = 0,71\ s^{-2}$

12. Se tiene una polea fija, de masa M y radio r que tiene arrollada una cuerda ideal. En el caso *a*) mostrado en la figura, se tira de la cuerda hacia abajo con una fuerza de módulo F. En el caso *b*) se cuelga de la cuerda un cuerpo de masa m, de modo tal que $F = m\ g$. Obtenga, en cada caso, la expresión del módulo de la aceleración tangencial de la polea. Explique la razón de la no coincidencia de ambos resultados.

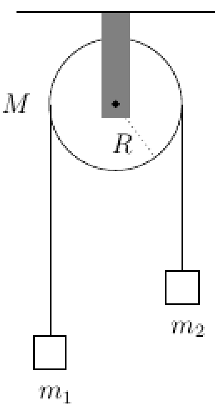


(a) (b)

Rta: *a*) $a_t = 2\ F/M = 2\ m\ g/M$; *b*) $a_t = 2\ m\ g/(2\ m + M)$

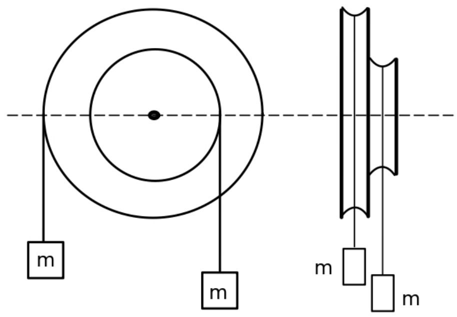
13. Considere nuevamente el sistema del problema 12-b con $r = 40\ cm$, $M = 24\ kg$ y $m = 0,5\ kg$. Suponga que el eje de la polea presenta rozamiento y el momento de fricción tiene un módulo de $2\ N\ m$. Calcule la aceleración del cuerpo colgante.
Rta: $a_t = 0$ ($v = cte$)

14. Considere una máquina de Atwood compuesta por una polea cilíndrica de masa 24 kg y radio R que puede girar sin fricción en torno a un eje horizontal fijo. Por su garganta pasa una cuerda ideal (inextensible, sin espesor ni masa), que no resbala sobre la cuerda, de cuyos extremos penden dos cuerpos de masas $m_1 = 5\ kg$ y $m_2 = 3\ kg$. Si se deja el sistema en libertad, determine: *a*) las aceleraciones de los cuerpos colgantes; *b*) las tensiones en ambos tramos de la cuerda.



Rta: *a*) $a = 1\ m/s^2$. *b*) $T_1 = 45\ N$; $T_2 = 33\ N$

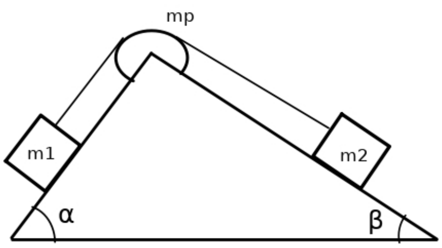
15. Se tiene una polea compuesta por dos cilindros homogéneos, cada uno de ellos de masa $M = 1\ kg$, rígidamente unidos que pueden girar en torno a un eje fijo horizontal. El cilindro mayor tiene un radio $R_1 = 40\ cm$ y el menor un radio $R_2 = 20\ cm$. Cada uno tiene arrollada una cuerda ideal, de cuyos extremos libres penden cuerpos iguales de masa $m = 1\ kg$. *a*) Halle la aceleración angular de la polea asumiendo que no hay fricción en el eje. *b*) Si se deja el sistema en libertad, partiendo del reposo, y se comprueba que uno de los cuerpos ha descendido $4\ m$ en $2\ s$, calcule el módulo del momento de fricción, supuesto constante, ejercido en el eje de la polea.



Problema 15

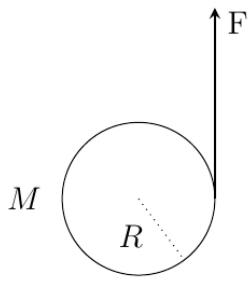
Rta: *a*) $\gamma = 6,67\ s^{-2}$; *b*) $M_f = 0,5\ N\ m$

16. En el dispositivo de la figura, la cuerda ideal que vincula los cuerpos no resbala sobre la polea y no hay rozamiento en el eje de la misma. Halle la aceleración del cuerpo de masa m_2 sabiendo que está descendiendo.
Datos: $m_1 = 10\ kg$; $m_2 = 5\ kg$; $m_p = 20\ kg$; $\alpha = 53°$; $\beta = 37°$; $\mu_1 = 0,1$; $\mu_2 = 0,2$.



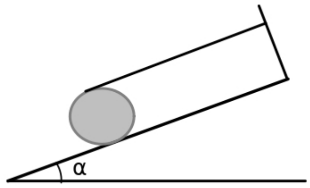
Rta.: $a_2 = 2,56\ m/s^2$ (en sentido contrario a la velocidad)

17. Una cuerda está enrollada en un cilindro de masa $M = 15\ kg$ y radio $R = 0,75\ m$, inicialmente en reposo, como se muestra en la figura. Se tira de la cuerda verticalmente hacia arriba con una fuerza F de manera que el centro de masa del cilindro permanece en reposo. Determine el tiempo que tarda el cilindro en alcanzar una velocidad angular de $\omega = 40\ s^{-1}$.



Rta: $\Delta t = 1,5\ s$

18. Un cilindro de masa M y radio R descansa sobre un plano de inclinación α sujeto por una cuerda tangente al cilindro y paralela al plano, como muestra la figura. Halle las expresiones de: *a*) el mímimo valor del coeficiente de roce estático para que el cilindro no resbale hacia abajo del plano inclinado; *b*) la tensión en la cuerda.

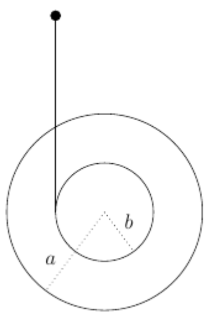


Problema 18

Rta: *a*) $\mu_e \geq 0,5\ \tan\alpha$; *b*) $T = 0,5\ M\ g\ \sin\alpha$

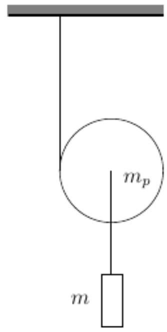
Problemas con centro de masa móvil

19. Un yo-yo está formado por un cilindro de masa m y radio a que tiene arrollado en su garganta de radio b un hilo ideal, como se muestra en la figura. Suponga que la cavidad de la garganta es muy delgada, de modo que el momento de inercia baricéntrico del yo-yo pueda considerarse $I = \frac{1}{2}\ m\ a^2$. Si se lo deja en libertad, halle las expresiones de: *a*) la aceleración del centro de masa del cilindro en su movimiento descendente; *b*) la tensión en la cuerda. Experese los resultados como función del cociente de radios b/a.



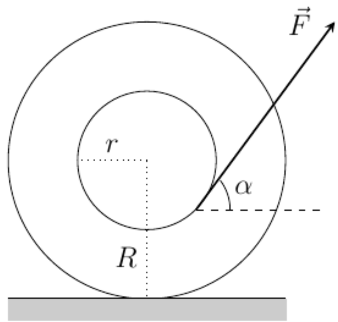
Rta: *a*) $a_{cm} = g/\left(1 + \frac{1}{2}\ (b/a)^2\right)$; *b*) $T = m\ (g - a_{cm})$.

20. El sistema de la figura está constituido por una polea cilíndrica de masa $m_p = 6\ kg$ que tiene enrollado un hilo ideal cuyo extremo libre está fijo al techo. Una pesa está suspendida del eje de la polea. Si al dejar el sistema en libertad la pesa adquiere una aceleración de $8\ m/s^2$, calcule el valor de su masa m.



Rta: $m = 6\ kg$

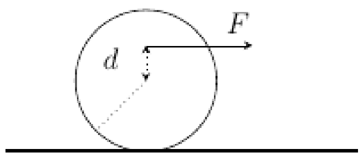
21. Un yo-yo de radio interior r y exterior R se halla en reposo sobre un piso con rozamiento. Se tira de él con una fuerza $\vec{F}$ mediante un hilo enrollado en el cilindro interior (tangencialmente a dicho cilindro) formando un ángulo α con la horizontal. Se observa que existe un ángulo crítico α_c tal que, para $\alpha < \alpha_c$, el carrete rueda sin deslizar en el mismo sentido en que se tira y para $\alpha > \alpha_c$ el yo-yo rueda sin deslizar en sentido contrario. Considerando que el momento de inercia baricéntrico del yo-yo es $I_{CM} = \frac{1}{2}\ m\ R^2$: *a*) Obtenga una expresión que permita calcular el ángulo crítico α_c Discuta qué ocurre cuando $\alpha = \alpha_c$. *b*) Obtenga las expresiones de la aceleración del centro de masa del yo-yo, y de la fuerza de rozamiento, como funciones de F, m, α y del cociente r/R. ¿Se anula en algún caso la fuerza de rozamiento?



Rta: *a*) $\cos\alpha_c = r/R$; *b*) $a_{cm} = \frac{2\ F}{3\ m}(\cos\alpha - r/R)$; $F_{re} = \frac{1}{3}\ F\,(\cos\alpha + 2\ r/R)$ hacia la izquierda.

22. Para el mismo yo-yo del problema anterior, suponga ahora que la superficie de contacto no presenta rozamiento. Considere que $m = 0,5\ kg$; $\alpha = 37°$; $r = 0,1\ m$ y $R = 0,2\ m$. *a*) Halle, para esta situación, el máximo valor de F para que el yo-yo permanezca en contacto con el piso. *b*) Considerando $F = 2\ N$, halle la aceleración angular y la aceleración del centro de masa.
Rta: *a*) $F_{max} = 8,33\ N$; *b*) $\gamma = 20\ s^{-2}$; $a_{cm} = 3,2\ m/s^2$

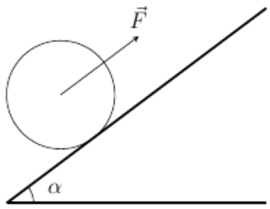
23. Sobre un cilindro de masa $m = 5\ kg$ y radio R, que se encuentra rodando sin resbalar sobre un plano horizontal con rozamiento, actúa una fuerza horizontal $F = 15\ N$ a una distancia d sobre el centro de masa, como se muestra en la figura. *a*) Halle Las expresiones de la aceleración del centro de masa y de la fuerza de rozamiento como función del cociente d/R. ¿Para qué valor de d/R se anula la fuerza de rozamiento? *b*) Si la fuerza F puede tomar un valor arbitrario y el coeficiente de rozamiento estático entre el cilindro y el piso es $\mu_e = 0,4$, ¿cuál es el máximo valor de F para que el cilindro ruede sin deslizar? Exprese el resultado como función del cociente d/R.



Rta: *a*) $a_{cm} = 2\ (1 + d/R)\,m/s^2$; $F_{re} = 5\ \left(2\ \frac{d}{R} - 1\right)\ N$ positivo hacia la derecha. *b*) $F \leq \frac{60\ N}{|2d/R-1|}$

24. Se deja caer un cilindro de masa m rodando sobre un plano inclinado. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre el cilindro y el plano es $\mu_e = 0,5$, halle el máximo ángulo de inclinación para que el cilindro no resbale sobre el plano.
Rta: $\alpha = 56,3°$

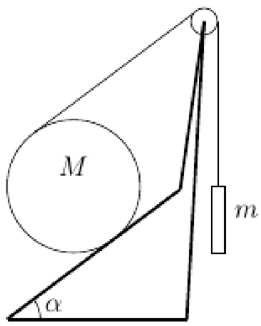
25. Se tira de un cilindro de masa $m = 2\ kg$, que se encuentra sobre un plano inclinado con rozamiento de inclinación $\alpha = 37°$, con una fuerza F aplicada en su centro de masa, como indica la figura. Sabiendo que el cilindro asciende rodando sin resbalar con $a_{CM} = 2\ m/s^2$, halle los valores de la fuerza F y de la fuerza de rozamiento.



Problema 25

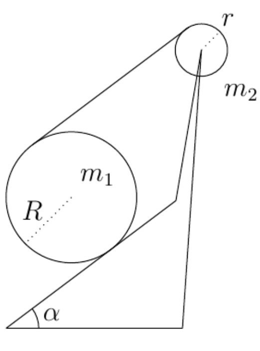
Rta.: $F = 18\ N$; $F_{re} = 2\ N$ hacia la izquierda

26. Un cilindro de masa $M = 1\ kg$ tiene enrollada una cinta delgada inextensible y de masa despreciable que pasa por una polea ideal y de cuyo otro extremo pende un cuerpo de masa $m = 2\ kg$. El cilindro está subiendo, rodando sin deslizar, por un plano de inclinación $\alpha = 30°$ respecto de la horizontal. Halle: a) las aceleraciones del centro de masa del cilindro y del cuerpo colgante; b) el valor de la fuerza de rozamiento, indicando su sentido; c) la tensión en la cuerda.



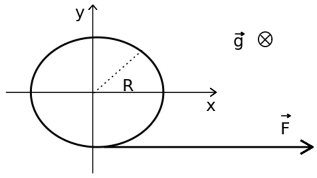
Rta.: a) $a_{cm} = 3,68\ m/s^2$; $a = 7,36\ m/s^2$ b) $F_{re} = 3,4\ N$ hacia arriba del plano c) $T = 5,28\ N$.

27. Un cilindro de masa m_1 y radio R desciende por un plano inclinado de ángulo $\alpha = 37°$ rodando sin resbalar. El cilindro tiene enrollada una cinta delgada inextensible y de masa despreciable cuyo otro extremo se encuentra arrollado a una polea de masa $m_2 = \frac{3}{4}\ m_1$ y radio r que gira libremente en torno a su eje fijo. La cinta no desliza respecto del cilindro ni de la polea. Calcule el valor de la aceleración del CM del cilindro.



Rta.: $a_{CM} = 2\ m/s^2$

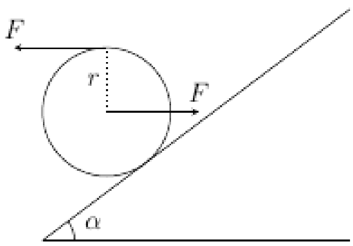
28. Un cilindro de masa m y radio R se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento con su base en contacto con la misma. Se tira del cilindro con una fuerza F mediante una cuerda ideal arrollada al mismo. Suponiendo que el sistema parte del reposo en $t = 0$, halle: a) las expresiones de la velocidad del centro de masa y de la velocidad angular como funciones del tiempo; b) las coordenadas del centro instantáneo de rotación O en el tiempo t, tomando como origen el centro del cilindro. c) Repita los puntos anteriores considerando ahora un cilindro hueco (anillo) de la misma masa y el mismo radio.



Rta.: *a*) $v_{cm}(t) = \frac{F}{m}\ t$; $\Omega(t) = \frac{2\ F}{m\ R}\ t$; *b*) $x_o = 0$, $y_o = R/2$ para todo t .
c) $v_{cm}(t) = \frac{F}{m}\ t$; $\Omega(t) = \frac{F}{m\ R}\ t$; $x_o = 0$, $y_o = R$ para todo t.

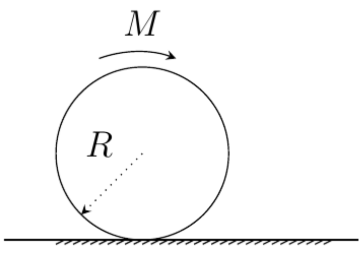
29. Un cilindro homogéneo de masa $m = 100\ kg$ y radio $R = 0,5\ m$ se apoya sobre su base sobre una superficie de hielo. Dos patinadores arrollan cuerdas ideales alrededor del cilindro en el mismo sentido. Cada uno de ellos tira de su cuerda y patina, partiendo del reposo, alejándose de modo que ejercen fuerzas de 30 N y 20 N en la misma dirección y sentido contrario. Exprese: *a*) la velocidad del centro de masa del cilindro como función del tiempo; *b*) la velocidad angular como función del tiempo; *c*) la distancia d entre el eje instantáneo de rotación del cilindro y su eje baricéntrico.
Rta.: *a*) $v_{CM} = 0,1\ m/s^2\ t$; *b*) $\Omega = 2\ s^{-2}\ t$; *c*) $d = 5\ cm$.

30. Un cilindro homogéneo de masa $m = 3\ kg$ y radio $R = 10\ cm$ apoyado sobre un plano de inclinación $\alpha = 30°$ tiene aplicada una cupla, como indica la figura. Si la intensidad de las fuerzas es $F = 18\ N$, halle: *a*) el mínimo coeficiente de roce estático para que suba por el plano rodando sin deslizar; *b*) la eceleración del centro de masa en ese caso.



Rta.: *a*) $\mu_e = 0,65$ *b*) $a_{cm} = 0,66\ m/s^2$

31. Un cilindro de radio $R = 0,5\ m$ y masa $m = 10\ kg$, se encuentra en contacto con un plano horizontal con rozamiento. *a*) Calcule el máximo valor del momento M que puede aplicársele al cilindro mediante una cupla para que ruede sin resbalar. *b*) Suponiendo ahora que el momento aplicado mediante la cupla es $M = 80\ Nm$ y que es mayor que el obtenido en el punto anterior, calcule los valores de la aceleración angular y de la aceleración del centro de masa del cilindro. Datos: $\mu_e = 0,8$; $\mu_c = 0,5$.



Rta: *a*) $M_{max} = 60\ Nm$ *b*) $a_{cm} = 5\ m/s^2$; $\gamma = 44\ s^{-2}$

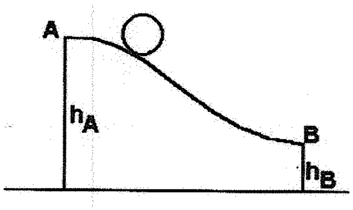
Conservación de la energía

32. El módulo de la velocidad inicial del centro de masa de una esfera maciza es de 4 m/s cuando la misma comienza a subir por un plano inclinado rodando sin resbalar. Determine la altura que alcanza, por encima de su nivel inicial, al momento de detenerse.
Rta: $h = 1,12\ m$

33. Una rampa de 2 m de longitud, se ajusta a un ángulo de 5° con la horizontal. En la parte superior de la rampa se encuentran, inicialmente en reposo, un anillo (cilindro hueco), un cilindro y una esfera, todos de igual radio R y masa m. Los tres cuerpos se liberan simultáneamente y descienden rodando sin resbalar. a) Obtenga las velocidades de los centros de masa de cada uno de los cuerpos cuando llegan a la base de la rampa. b) Calcule, para cada cuerpo, la aceleración del centro de masa y el tiempo que tarda en llegar a la base de la rampa. c) Repita a) y b) para una partícula que desliza por el plano, despreciando el rozamiento. Compare co los valores antes obtenidos y explique la razón de la diferencia.
Rtas: a) anillo: $v_{CM} = 1,32\ m/s$; cilindro: $v_{CM} = 1,52\ m/s$; esfera: $v_{CM} = 1,58\ m/s$. b) anillo: $a_{CM} = 0,44\ m/s^2$; $t = 3,03\ s$; cilindro: $a_{CM} = 0,58\ m/s^2$; $t = 2,63\ s$; esfera: $a_{CM} = 0,62\ m/s^2$; $t = 2,53\ s$. c) partícula: $v_{CM} = 1,87\ m/s$; $a_{CM} = 0,87\ m/s^2$; $t = 2,14\ s$.

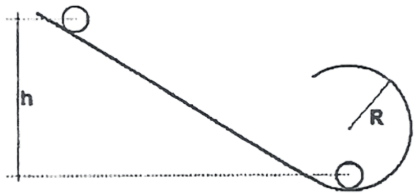
34. Una esferera homogénea sube rodando sin resbalar por un plano inclinado 30° con la horizontal. En un punto de su trayectoria su centro de masa tiene una velocidad de módulo 10 m/s. Halle: a) la distancia d recorrida por el centro de masa hasta el punto en que se detiene; b) el tiempo que tarda en regresar desde esta última posición al punto de partida.
Rtas: a) $d = 14\ m$; b) $t = 2,8\ s$

35. Una esfera maciza parte del reposo desde el punto A de la figura, que está a una altura $h_A = 54\ m$, y rueda sin resbalar hasta que sale disparada horizontalmente en el extremo B, situado a una altura $h_B = 14\ m$. Calcule a qué distancia horizontal d del punto B llega la esfera al piso.



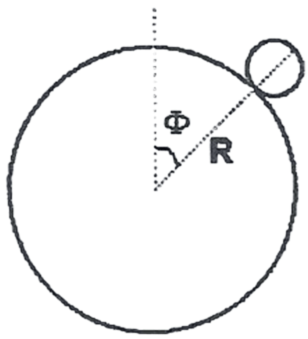
Rta: $d = 39,9\ m$

36. Una bola homogénea de radio r rueda sin deslizar sobre una vía que forma un bucle de radio R. Parte del reposo a una altura h y pierde contacto con la vía al llegar al punto más alto del bucle. a) Obtenga la expresión de h como función de r y R. b) Repita el punto anterior suponiendo ahora que la bola desliza sobre una vía sin rozamiento.



Rta: a) $h = \frac{27}{10}\ (R - r)$; b) $h = \frac{5}{2}\ (R - r)$

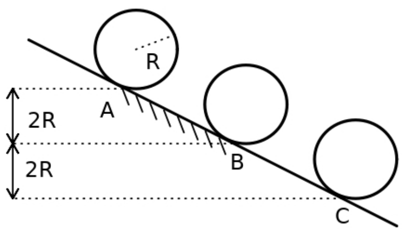
37. Una esfera homogénea parte del reposo desde un punto de la generatriz superior de un cilindro y desciende rodando sin resbalar sobre la superficie del mismo. Asumiendo que la condición de rodadura se sostiene mientras la esfera está en contacto con la superficie, halle el ángulo φ que formaría con la vertical el radio que pasa por el punto en el que la esfera pierde contacto con la superficie cilindrica.



Rta: $\varphi = \arccos(10/17) \simeq 54°$

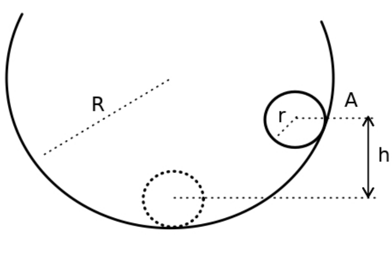
38. En el problema anterior, halle la expresión de la fuerza de rozamiento estática entre la esfera y la superficie como función del ángulo ϕ de apartamiento de la vertical. Analice la validez del supuesto de que la rodadura se sostiene hasta que la esfera pierde contacto con la superficie.
Rta: $F_{re} = \frac{2}{7}\ m\ g\ \sin\phi$. La condición supuesta es imposible dado que la F_{re} debería mantenerse finita aún caundo la normal se anule.

39. Un cilindro de radio $R = 0,15\ m$ parte del reposo en el punto A de la figura y rueda sin resbalar hacia abajo del plano inclinado hasta el punto B. El tramo entre los puntos B y C no tiene fricción. Los desniveles entre A y B y entre B y C son ambos iguales a $2\ R$. Halle: *a*) la velocidad del centro de masa del cilindro en B; *b*) la velocidad angular del cilindro en B; *c*) la velocidad del centro de masa y la velocidad angular del cilindro en C.



Rta: *a*) $v_B = 2\ m/s$; *b*) $\omega_B = 13,33\ s^{-1}$; *c*) $v_C = 3,162\ m/s$; $\omega_C = \omega_B$.

40. Un cilindro homogéneo de radio $r = 5\ cm$ puede moverse en contacto con el interior de una superficie cilíndrica de radio $R = 60\ cm$, como indica la figura. La superficie de la mitad derecha presenta rozamiento, de modo que el cilindro rueda sin resbalar. La mitad izquierda está exenta de rozamiento. Inicialmente el centro de masa del cilindro se encuentra a una altura $h = 30\ cm$ respecto de su nivel más bajo. Halle la altura máxima h', respecto de dicho nivel, que alcanza el centro de masa del cilindro cuando asciende sobre la mitad izquierda.

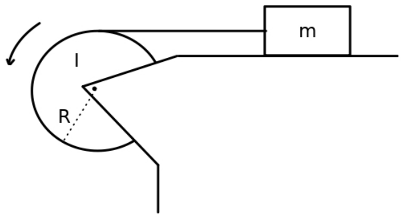


Rta: $h' = 20\ cm$

41. Considere nuevamente los sistemas del problema 12 con los siguientes datos: $M = 4\ kg$; $r = 10\ cm$; $F = 2\ N$. *a*) Calcule, para ambos casos, el trabajo realizado por la tensión de la cuerda sobre la

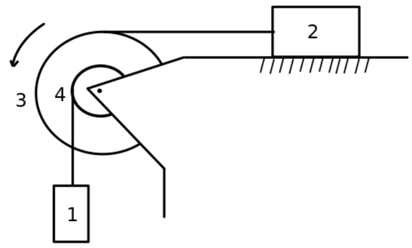
polea, cuando ésta haya girado una vuelta respecto de su posición inicial. b) Halle, en ambos casos, la velocidad angular final de la polea, asumiendo que parte del reposo.
Rta: a) $W_{(a)} = 1,256\ J$; $W_{(b)} = 1,13\ J$; b) $\omega_{(a)} = 11,2\ s^{-1}$; $\omega_{(b)} = 10,69\ s^{-1}$.

42. La polea mostrada en la figura tiene un radio $R = 0,5\ m$, un momento de inercia baricéntrico $I = 2\ kg\ m^2$ y no presenta fricción en su eje. Inicialmente se hace girar la polea en sentido antihorario de manera tal que el bloque de masa $m = 5\ kg$, ligado a una cuerda ideal que se enrolla en la polea, adquiere una velocidad de $3\ m/s$. El sistema llega al reposo luego de que el bloque se ha desplazado $50\ cm$. Halle el valor de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque.



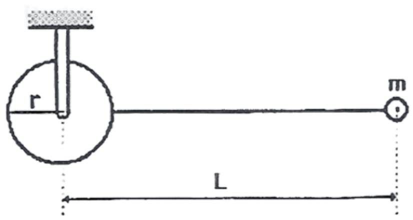
Rta: $F_r = 117\ N$

43. La polea cilíndrica del sistema de la figura está compuesta por dos discos unidos de radios $R_3 = 0,4\ m$ y ,$R_4 = 0,2\ m$ y masas $m_3 = 60\ kg$ y $m_4 = 30\ kg$ respectivamente. Al descender el cuerpo de masa $m_1 = 1\ kg$ hace girar la polea y desplaza hacia la izquierda el cuerpo de masa $m_2 = 20\ kg$. El coeficiente de rozamiento cinético entre este último cuerpo y el plano horizontal es $\mu_c = 0,1$. Considerando las cuerdas ideales y sabiendo que inicialmente la polea tiene una velocidad angular $\Omega_i = 3\ s^{-1}$ en sentido antihorario, calcule la distancia que habrá descendido el cuerpo colgante a partir de la posición inicial hasta detenerse.



Rta: $h = 1,297\ m$

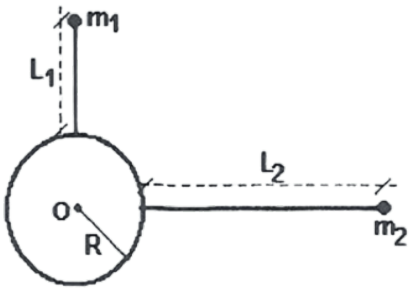
44. La partícula de masa m de la figura está fija rígidamente al disco de radio r por medio de una barra de masa despreciable. La distancia entre el centro del disco y la partícula es L. Si em momento de inercia del disco respecto de su eje de rotación es I_O y el sistema se libera desde el reposo desde la posición indicada en la figura, ¿cuál será el módulo de la velocidad de la partícula al llegar a su posición más baja?



Rta: $v = \sqrt{\frac{2\ m\ g\ L^3}{I_O + m\ L^2}}$

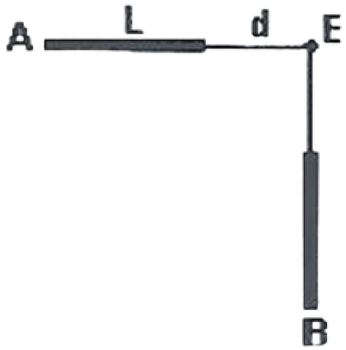
45. Un disco homogéneo de radio $R = 50\ cm$ y masa $m = 19\ kg$ puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo horizontal. Lleva unidos a él, por medio de barras de masa despreciable y longitudes

$L_1 = 1\ m$ y $L_2 = 2\ m$, dos cuerpos puntuales de masas $m_1 = 1\ kg$ y $m_2 = 2\ kg$. Si se deja el sistema en libertad a partir del reposo, desde la posición indicada en la figura, calcule el módulo de la velocidad del cuerpo puntual de masa m_2 cuando pasa por su posición más baja.



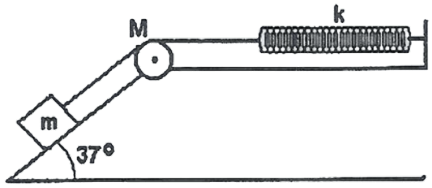
Rta: $v_2 = 6,89\ m/s$

46. Una barra homogénea de masa m y longitud $L = 3\ m$ está vinculada a otra de masa despreciable y longitud $d = 1,5\ m$, pudiendo girar libremente en un plano vertical en torno a un eje fijo E. La barra se libera desde el reposo en posición horizontal y al llegar a la posición vertical se desprende del eje E. Halle la velocidad angular de la barra un segundo después de haberse desprendido del eje.



Rta: $\omega = 2,48\ s^{-1}$

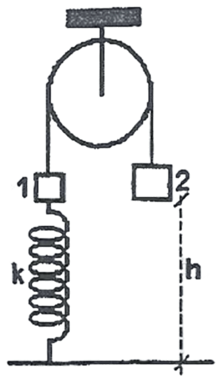
47. En el sistema de la figura, el bloque de masa $m = 1\ kg$ está inicialmente en reposo sobre un plano sin rozamiento inclinado 37° respecto de la horizontal, unido, mediante una cuerda inextensible y sin masa, al extremo de un resorte ideal sin deformación de constante elástica $k = 16\ N/m$. La cuerda pasa por una polea cilíndrica de masa $M = 2\ kg$. Se deja el sistema en libertad y el bloque desciende sobre el plano inclinado. Halle su velocidad cuando haya recorrido $0,5\ m$ sobre dicho plano.



Rta: $v = 1\ m/s$

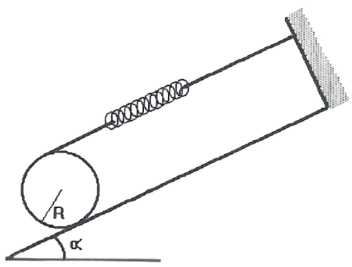
48. En el sistema de la figura el resorte ideal de constante elástica $k = 20\ N/m$ tiene un extremo fijo al piso y el otro al bloque 1 de masa $m_1 = 8\ kg$, el cual está vinculado, mediante una cuerda inextensible sin masa, al bloque 2 de masa $m_2 = 15\ kg$. La cuerda pasa por una polea cilíndrica de

masa $M = 2\ kg$. Inicialmente, ambos bloques se encuentran en reposo, suspendidos a una misma altura $h = 4\ m$ del piso, y el resorte posee un estiramiento $\Delta x_i = 1\ m$. A partir de esta situación, se deja el sistema en libertad. a) Asumiendo que la polea gira sin rozamiento, calcule el módulo de la velocidad del bloque 2 al llegar al piso. b) Si se observa que el bloque 2 se detiene justo al llegar al piso, calcule el trabajo realizado por el rozamiento en el eje de la polea.



Rta: $a)\ v = 1,82\ m/s$; $b)\ W_r = -40\ J$

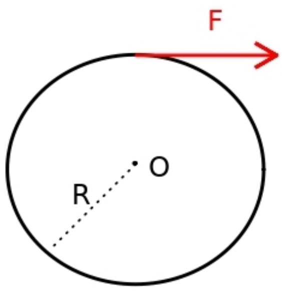
49. El aro de la figura, de masa $m = 2\ kg$ y radio $R = 0,5\ m$, rueda sin resbalar sobre un plano inclinado 37° respecto de la horizontal. El aro tiene arrollada una cuerda inextensible, sin masa y de espesor despreciable, unida al extremo de un resorte ideal de constante elástica $k = 100\ N/m$ cuyo otro extremo está fijo a una pared. Inicialmente, el centro de masa del aro desciende con una velocidad de $1\ m/s$ y el resorte posee un estiramiento de $0,2\ m$. Halle el máximo estiramiento del resorte.



Rta: $\Delta x_{max} = 0,304\ m$

Conservación del impulso angular

50. Un disco de radio $R = 20\ cm$ puede girar alrededor de un eje fijo O, apoyado sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Inicialmente gira en sentido horario con una velocidad angular $\omega_i = 20\ s^{-1}$. Se le aplica una fuerza constante $F = 30\ N$ tangente al borde del disco, como indica la figura, durante un intervalo de tiempo de 1 segundo. Como resultado se observa que el disco continúa girando ahora con una velocidad angular $\omega_f = 100\ s^{-1}$. Halle: a) el impulso del momento de la fuerza; b) el momento de inercia del disco.

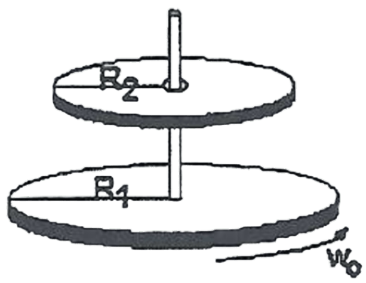


Rta: *a*) $J_M = 6\ N\ m\ s$; *b*) $I = 0,075\ kg\ m^2$.

51. Una persona está parada sobre el eje vertical de una plataforma que gira, sin fricción, alrededor de dicho eje con una frecuencia de 1 rpm, sus brazos están estirados y sostiene una pesa en cada mano. En esta posición, el momento de inercia total del conjunto con respecto al eje es de 6 $kg\ m^2$. Al acercar las pesas al cuerpo, el momento de inercia disminuye a 4 $kg\ m^2$. *a*) ¿Cuál es el módulo de la velocidad angular de la plataforma en esta última posición? *b*) Calcule el trabajo de todas las fuerzas involucradas en este proceso.
Rta: *a*) $\omega = \pi/20\ s^{-1} = 0,157\ s^{-1}$; *b*) $W = 0,0164\ J$.

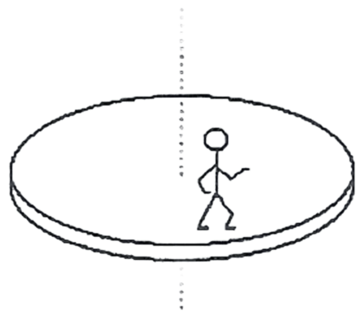
52. Una plataforma en forma de disco sólido uniforme de radio $R = 6\ m$ y masa $M = 200\ kg$ gira sin rozamiento alrededor de su eje de simetría vertical. Un hombre de masa $m = 100\ kg$ está parado en el borde de la plataforma moviéndose a una velocidad tangencial de $0,2\ m/s$. *a*) ¿Con qué velocidad angular girará el disco si el hombre camina 3 metros hacia su centro a lo largo de un radio? *b*) Halle la variación de energía cinética del sistema hombre-disco y el trabajo que realizó la persona sobre el disco. Explique porqué son diferentes los resultados.
Rta: *a*) $\omega = 0,053\ s^{-1}$; *b*) $\Delta Ec = 2,4\ J$; $W = -0,7\ J$.

53. Un disco homogéneo de radio $R_1 = 50\ cm$ y masa $m_1 = 10\ kg$ está girando, a razón de 300 rpm, en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un segundo disco, de radio $R_2 = 30\ cm$ y masa $m_2 = 8\ kg$, inicialmente en reposo, está situado por encima del primero montado sobre el mismo eje. Se ponen en contacto los discos de modo que quedan unidos. Halle : *a*) la velocidad angular del conjunto formado por los dos discos; *b*) la pérdida de energía cinética como consecuencia del choque entre los discos.



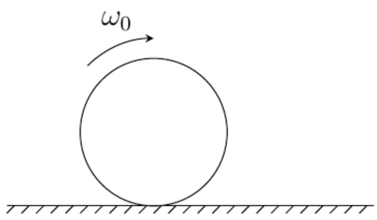
Rta: *a*) $\omega = 24,4\ s^{-1}$; *b*) $\Delta E = -137\ J$.

54. Se monta una plataforma circular sobre un eje vertical sin rozamiento. Su radio es de $1,5\ m$ y su momento de inercia respecto del eje de 60 $kg\ m^2$. Inicialmente la plataforma se encuentra en reposo y un hombre de 80 kg está de pié en el borde de la plataforma. Luego el hombre comienza a caminar a lo largo del borde con una velocidad de 1 m/s respecto del piso. *a*) ¿Cuál es la velocidad angular de la plataforma? *b*) Cuando el hombre haya recorrido una vuelta alrededor de la plataforma, ¿cuál será su desplazamiento angular respecto del piso?



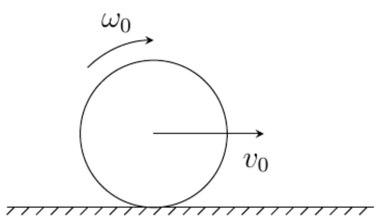
Rta: *a*) $\omega_p = 2\ s^{-1}$; *b*) $\Delta\varphi_h = \pi/2$.

55. Un disco homogéneo de radio $R = 50\ cm$ y masa $m = 5\ kg$ está, inicialmente, girando en un plano vertical en torno a un eje (perpendicular al dibujo) que pasa por su centro de masa con velocidad angular $\omega_0 = 6\ s^{-1}$. Se pone en contacto el disco con una superficie horizontal con rozamiento. Transcurrido un cierto tiempo, el disco comenzará a rodar sin deslizar. Calcule: *a*) la velocidad angular del disco cuando entra en rodadura; *b*) el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento. *c*) Sabiendo que el coeficiente de roce cinético entre el cilindro y el plano es $\mu_c = 0,2$, calcule el tiempo transcurrido hasta que comienza a rodar sin deslizar.



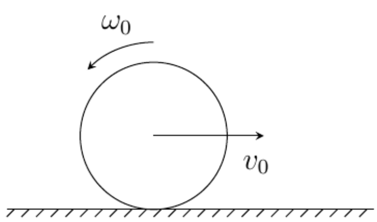
Rta: *a*) $\omega = 2\ s^{-1}$; *b*) $W_r = -7,5\ J$; *c*) $t = 0,5\ s$.

56. Considere el mismo disco del problema anterior, girando con la misma velocidad angular inicial, pero que además posee una velocidad inicial del centro de masa v_0 en la dirección indicada en la figura. Calcule la velocidad angular del disco al entrar en rodadura para los siguientes casos: *a*) $v_0 = 6\ m/s$; *b*) $v_0 = 1,5\ m/s$. Compare los valores obtenidos con el valor inicial ω_0 y explique porqué en un caso es mayor y en el otro menor.



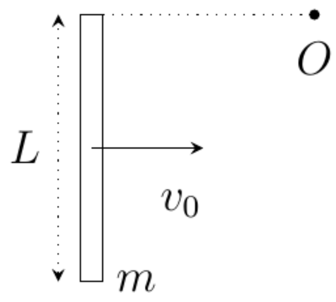
Rta: *a*) $\omega = 10\ s^{-1}$; *b*) $\omega = 4\ s^{-1}$.

57. El centro de masa de un cilindro homogéneo de radio R, en contacto con una superficie horizontal con rozamiento, tiene una velocidad inicial v_0 hacia la derecha. En ese mismo instante, su velocidad angular tiene un valor ω_0 en sentido antihorario, como indica la figura. Existe un valor crítico $v_0^{(c)}$ tal que si $v_0 > v_0^{(c)}$ el cilindro comenzará a rodar sin deslizar en el mismo sentido de la velocidad inicial, mientras que si $v_0 < v_0^{(c)}$, comenzará a rodar en el sentido contrario. Obtenga la expresión de $v_0^{(c)}$ como función de ω_0 y R.



Rta: $v_0^c = \omega_0\ R\ /\ 2$.

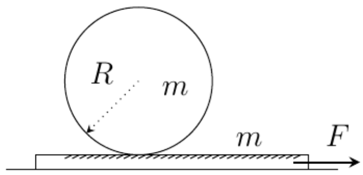
58. Una barra homogénea de masa $m = 1\ kg$ y longitud $L = 30\ cm$ se traslada sin rotar con velocidad $v_0 = 14\ m/s$ sobre un plano horizontal sin rozamiento. En cierto instante choca contra un pivote fijo O de modo tal que uno de sus extremos queda ligado al mismo después del choque. Calcule: *a*) la velocidad angular de la barra después del choque; *b*) la pérdida de energía en el choque; *c*) la fuerza que ejerce el pivote sobre la barra inmediatamente después del choque, indicando su sentido.



Rta: *a*) $\omega = 70\ s^{-1}$ *b*) $\Delta E = -24,5\ J$; *c*) $F = 735\ N$ hacia arriba en la figura.

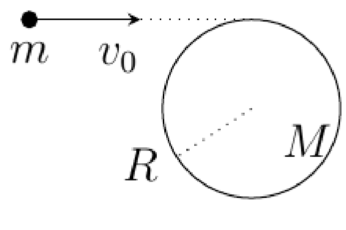
Conservación de $\vec{L}$, $\vec{p}$ y E. Choques entre partículas y sólidos

59. Un cilindro homogéneo de masa $m = 3\ kg$ y radio R se encuentra inicialmente en reposo, apoyado sobre una lámina de la misma masa y espesor despreciable, la cual descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. En un cierto instante se aplica a la lámina una fuerza horizontal $F = 12\ N$ durante un tiempo $\Delta t = 2\ s$, como indica la figura, de modo tal que el cilindro rueda sin deslizar sobre la lámina. Calcule la velocidad del centro de masa del cilindro y la velocidad de la lámina luego de transcurrido el tiempo Δt.



Rta: $v_L = \frac{3\ F\ \Delta t}{4\ m} = 6\ m/s \qquad v_{cmc} = \frac{F\ \Delta t}{4\ m} = 2\ m/s$

60. Una partícula de masa m, que posee una velocidad v_0, choca contra el borde de un disco de masa M y radio R que puede girar libremente en torno a un eje fijo que pasa por su centro. Después del choque la partícula queda unida al disco.

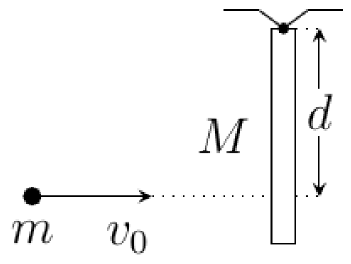


a) Demuestre que la velocidad angular del conjunto después de la colisión está dada por:

$$\omega = \frac{m\ v_0}{R\ \left(\frac{1}{2}\ M + m\right)}$$

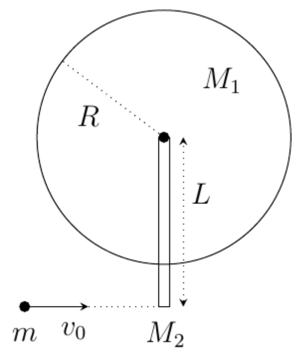
b) Si $R = 20\ cm$, $M = 1,4\ kg$, $m = 0,1\ kg$ y $v_0 = 40\ m/s$, calcule la pérdida de energía en el choque.
Rta: *b*) $\Delta E = -70\ J$

61. Una varilla delgada de masa M y longitud $L = 0,9\ m$ está suspendida de uno de sus extremos en posición vertical. En un punto ubicado a una distancia $d = 0,6\ m$ por debajo del punto de suspensión impacta de manera *perfectamente elástica* una partícula de masa m que se movía horizontalmente con velocidad $v_0 = 3\ m/s$. Sabiendo que la partícula queda en reposo inmediatamente después del choque, obtenga *a*) la relación entre la masa de la partícula y la de la varilla; *b*) el ángulo de apartamiento máximo respecto de la vertical que alcanza la varilla.



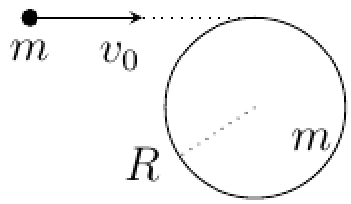
Rta: $a)$ $m = \frac{3}{4}\ M$; $b)$ $\theta = 75,5°$

62. Se tiene un cuerpo rígido que consiste en un disco de radio $R = 3\ m$ y masa $M_1 = 2\ kg$ y una varilla delgada de longitud $L = 4\ m$ y masa $M_2 = 3\ kg$ sólidamente unidos de modo tal que un extremo de la varilla coincide con el centro del disco. El cuerpo yace sobre un plano horizontal sin roce y puede girar en torno a un eje fijo que pasa por el centro del disco. Una partícula de masa m incide con velocidad $v_0 = 25\ m/s$ en dirección perpendicular a la varilla y choca con el otro extremo de la misma como indica la figura. Inmediatamente después del choque la partícula queda en reposo y el cuerpo gira en torno a su eje con velocidad angular $\omega = 4\ s^{-1}$. $a)$ Calcule el valor de la masa m de la partícula. $b)$ Suponiendo que luego del choque actúa en el eje del cuerpo un momento de fricción constante $\mathcal{M} = 95,5\ Nm$, calcule el ángulo que gira el cuerpo hasta que se detiene.



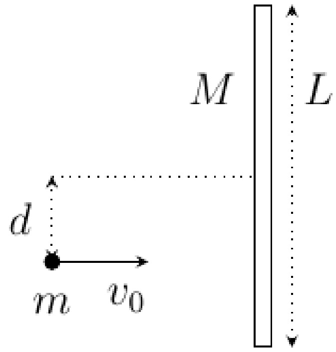
Rta: $a)$ $m = 1\ kg$; $b)$ $\Delta\theta = 2.09\ rad \cong 120°$

63. Un aro circular de masa m y radio R descansa sobre una superficie horizontal sin roce. Una bala de la misma masa, que se movía inicialmente con velocidad v como indica la figura, choca con el aro y queda adherida a él. Exprese la velocidad del centro de masa y la velocidad angular del conjunto después del choque.



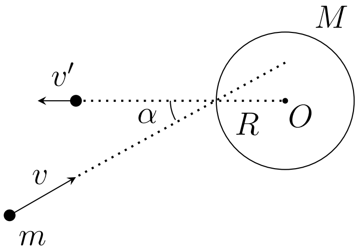
Rta: $v_{cm} = \frac{v}{2}$; $\omega = \frac{v}{3\ R}$

64. Una varilla homogénea de masa $M = 1\ kg$ y longitud $L = 1\ m$ descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Una partícula de masa m, que se mueve con velocidad $v = 20\ m/s$ con un parámetro de impacto $d = 0,2\ m$ como indica la figura, choca de forma perfectamente elástica con la varilla. $a)$ Indique qué magnitudes se conservan en el choque justificando sus respuestas. $b)$ ¿Cuál debe ser el valor de la masa m para que la partícula quede en reposo después del choque? $c)$ Calcule la velocidad del centro de masa de la varilla, su velocidad angular y la velocidad de la partícula después del choque para el caso $m = 1\ kg$.



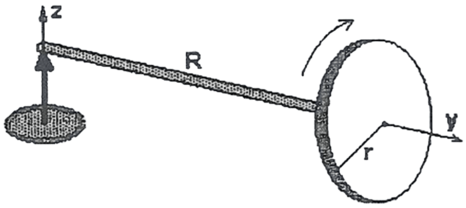
Rta: *a*) $\vec{p} = cte$, $\vec{L} = cte$ respecto de cualquier punto, $E = cte$. *b*) $m = 0,676\ kg$. *c*) $v_{cm} = 16,13\ m/s$; $\omega = 38,7\ s^{-1}$; $v' = 3,87\ m/s$

65. Una partícula de masa $m = 1\ kg$ se desliza sobre un plano horizontal sin roce con velocidad constante de módulo $v = 10\ m/s$. En cierto instante, choca con un disco de masa $M = 5\ kg$ y radio $R = 0,5\ m$ que estaba en reposo apoyado sobre el mismo plano. La dirección con la que incide la partícula sobre el disco forma un ángulo $\alpha = 30°$ respecto de la dirección radial y, después del choque, la partícula rebota con una velocidad de módulo $v' = 4\ m/s$ en dirección radial, como indica la figura. *a*) Calcule la velocidad del centro de masa y la velocidad angular del disco después del choque. *b*) Calcule la pérdida de energía en el choque.



Rta: *a*) $\omega = 4\ s^{-1}$; *b*) $\Delta E = -18,47\ J$

66. **(OPTATIVO)** El centro de un disco homogéneo de masa $m = 0,1\ kg$ y radio $r = 5\ cm$ es mantenido a una distancia $R = 10\ cm$ del eje vertical z mediante una varilla de masa despreciable, como muestra la figura. La articulación en el extremo de la varilla permite que esta pueda girar en un plano horizontal alrededor del eje z. El disco se encuentra girando alrededor del eje horizontal y (dirección de la varilla) con velocidad angular $\omega = 100\ s^{-1}$ y en ningún momento toma contacto con el piso. Halle la velocidad angular Ω de precesión del disco en torno al eje z.



Rta: $\Omega = \frac{2\ g\ R}{r^2\ \omega} = 8\ s^{-1}$