Teoremas Integrales

Unidad XI

Teorema de gauss-green

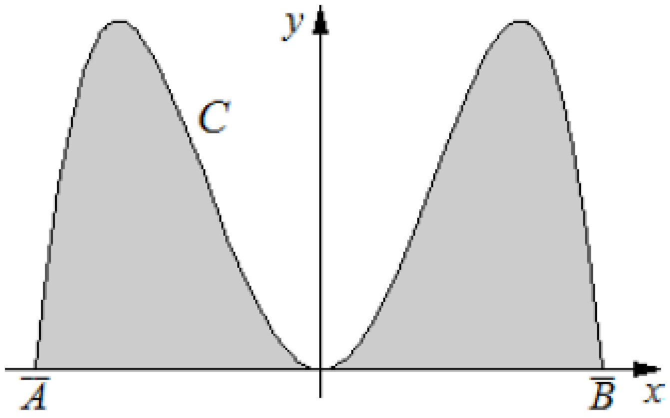
Sea el campo vectorial $\vec{F}$(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)) clase 1 en un recinto R plano y su frontera C curva suave a trozos incluidos en $\mathbb{R}^2$.

Entonces $\oint_C \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_R \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy$ donde C está recorrida en sentido positivo.

06) Calcule la circulación en sentido positivo de $\bar{f} \in C^1$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $x+y \le 2$, $2x+y \ge 2$, 1° cuadrante, siendo:

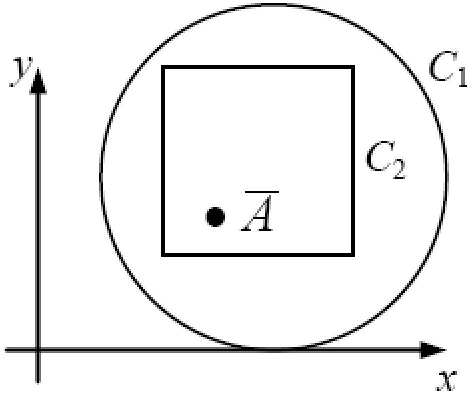
a) $\bar{f}(x,y) = (2y - g(x)\ ,\ 5x - h(y))$.   b) $\bar{f}(x,y) = (2y + g(x-y)\ ,\ 2x - g(x-y))$.

05) La región plana D sombreada en la figura tiene como frontera el segmento $\overline{AB}$ y el arco de curva C de ecuación $y = x^2 - x^4$. Dado $\bar{f} = (P,Q) \in C^1$ con matriz jacobiana $D\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P'_x(x,y) & 3x-1 \\ 3x+2 & Q'_y(x,y) \end{pmatrix}$, calcule la circulación de $\bar{f}$ desde $\bar{A}$ hasta $\bar{B}$ a lo largo de C sabiendo que a lo largo del segmento resulta $\int_{\overline{AB}} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 17$.



09) Dado $\bar{f} : \Re^2 - \{\bar{A}\} \to \Re^2 /\ \bar{f} = (P,Q)$; suponga matriz jacobiana continua con $Q'_x - P'_y \equiv 6$.

Calcule $\oint_{C_1^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que $\oint_{C_2^+} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 12$, C_1 es una circunferencia de radio 8, C_2 es un cuadrado de lado 5.



Cálculo de áreas planas mediante integrales de línea

- Si $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \Rightarrow \iint_R dx\, dy =$ área (R)

- Por lo tanto cualquier par de funciones P(x;y) y Q(x;y) que verifiquen $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ permitirán calcular el área de R.

- Por ejemplo:

I.- Si P(x;y) = 0 y Q(x;y) = x, resulta área de R = $\oint_C (0, x) d\vec{s}$

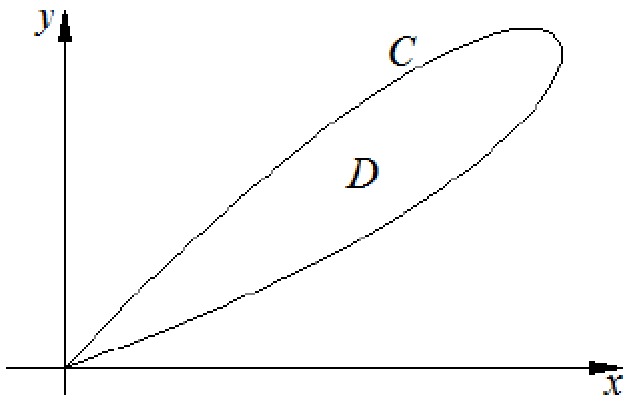
II.- Si P(x;y) = -y y Q(x;y) = 0 , resulta área de R = $\oint_C (-y, 0) d\vec{s}$

III.- Sumando miembro a miembro las dos expresiones anteriores y dividiendo por 2 se obtiene:

área de R= $\oint_C \frac{1}{2}(-y, x) d\vec{s}$

02) Calcule el área de la región plana D de la figura, sabiendo que su curva frontera C admite la ecuación vectorial:

$$\overline{X} = (u - u^2, u - u^4) \text{ con } 0 \le u \le 1$$



01) Proponga alguna fórmula para el cálculo del área de regiones planas mediante integrales de línea y aplíquela para calcular el área de las regiones definidas por:

b) $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

Propiedad (ej. 13)

Sea $\vec{f}: \mathbb{R}^2 - \{A\} \to \mathbb{R}^2$, D$\vec{f}$ simétrica y continua.

$\vec{f}$ campo de gradientes si y sólo si $\oint_C \vec{f}\, d\vec{s} = 0$ con C una curva cerrada simple suave a trozos.

Demostración:

1) $\vec{f}$ campo de gradientes entonces $\oint_C \ \vec{f}\, d\vec{s} = 0$

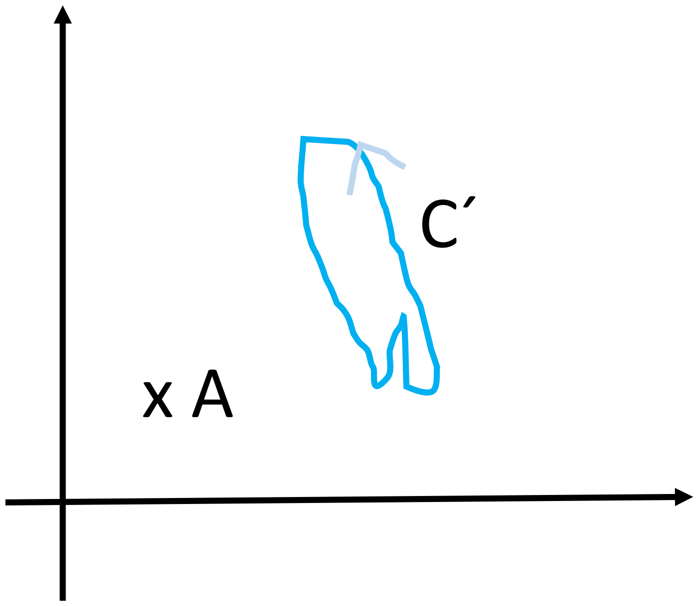
Si $\vec{f}$ campo de gradientes , $\vec{f} = \vec{\nabla} U$.

Por el teorema de independencia de la trayectoria, $\oint_C \ \vec{f}\, d\vec{s} =$ U(B)-U(A)

Pero B=A, entonces $\oint_C \ \vec{f}\, d\vec{s} = 0$

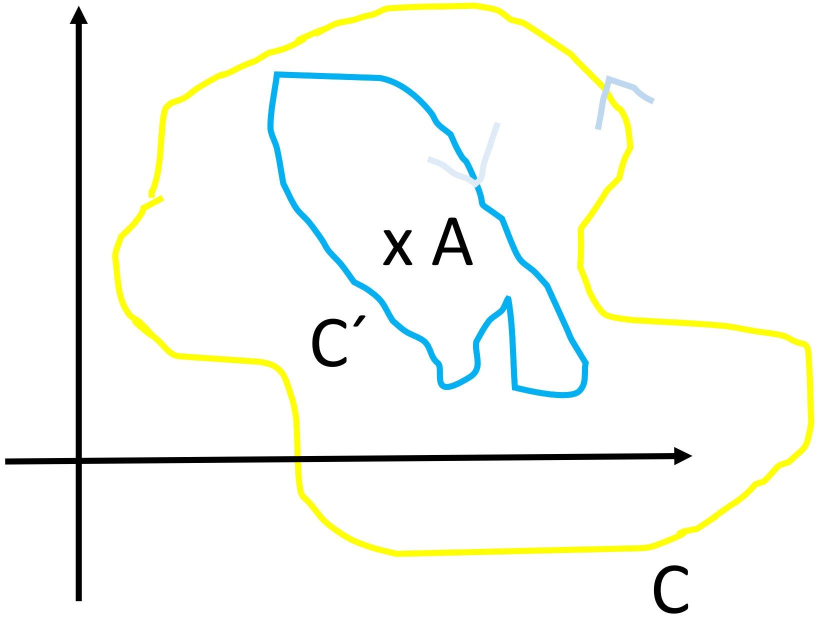
2) $\oint_C \vec{f}\, d\vec{s} = 0$ para una curva cerrada entonces $\vec{f}$ campo de gradientes

La idea es probar que si $\oint_C \vec{f}\, d\vec{s} = 0$ para una curva cerrada, entonces también es 0 para cualquier curva cerrada.



C´ curva que no rodea a A

$$\oint_{C'} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_{D} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = 0$$



C´ curva que rodea a A

$$\oint_{C'\cup C} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = 0$$

$\oint_{C'} \vec{f}\, d\vec{s} + \oint_{C} \vec{f}\, d\vec{s} = 0$ con las orientaciones dibujadas

$\oint_{C} \vec{f}\, d\vec{s} = -\oint_{C'} \vec{f}\, d\vec{s}$ con las orientaciones dibujadas

$\oint_{C} \vec{f}\, d\vec{s} = \oint_{C'} \vec{f}\, d\vec{s}$ ambas en sentido positivo

¿cómo decidir si $\vec{f}$ es conservativo?

- ¿D$\vec{f}$ es simétrica?
  - No → $\vec{f}$ no es conservativo
  - Si → ¿Dom$\vec{f}$ es simplemente conexo?
    - Si → $\vec{f}$ es conservativo
    - No → Se calcula $\oint_C \vec{f} d\vec{s}$ con C una curva cerrada que rodea al punto. ¿Da 0?
      - No → $\vec{f}$ no es conservativo
      - Si → $\vec{f}$ es conservativo

También para 3 coordenadas

14) Analice si $\bar{f}:\Re^2-\{\bar{0}\}\to\Re^2 / \bar{f}(x,y)=(x,y)+(y,-x)/(4x^2+y^2)$ admite función potencial en su dominio.

Definiciones y propiedades

Sea $\bar{f}$(x,y,z)=(P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z))

- La **divergencia de** $\bar{f}$ es div$\bar{f}$ = $P'_x+Q'_y+R'_z$ = $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).(P,Q,R)=\vec{\nabla}.\bar{f}$

- Un campo es **solenoidal** si y sólo si su divergencia es 0
- Hay una **fuente** sii div$\bar{f}$>0 (se entrega fluido)
- Hay un **sumidero** sii div$\bar{f}$<0 (se pierde fluido)

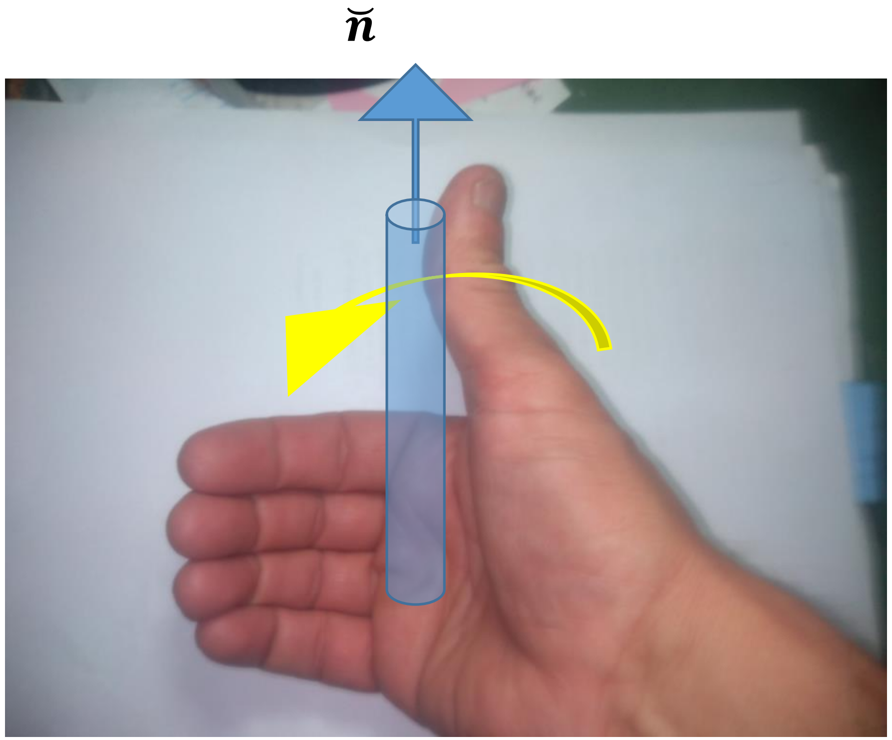
- El **rotor de** $\bar{f}$ es rot $\bar{f}=\bar{\nabla} x \bar{f} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

- Un campo es **irrotacional** sii su rotor es el vector nulo. El fluido no está rotando, no se arremolina en dicho punto.
- $\bar{f}$ irrotacional si y sólo si D$\bar{f}$ es simétrica
- div(rot$\bar{f}$)=0

- El **laplaciano** de f es $\vec{\nabla}^2 f$ = $f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}$

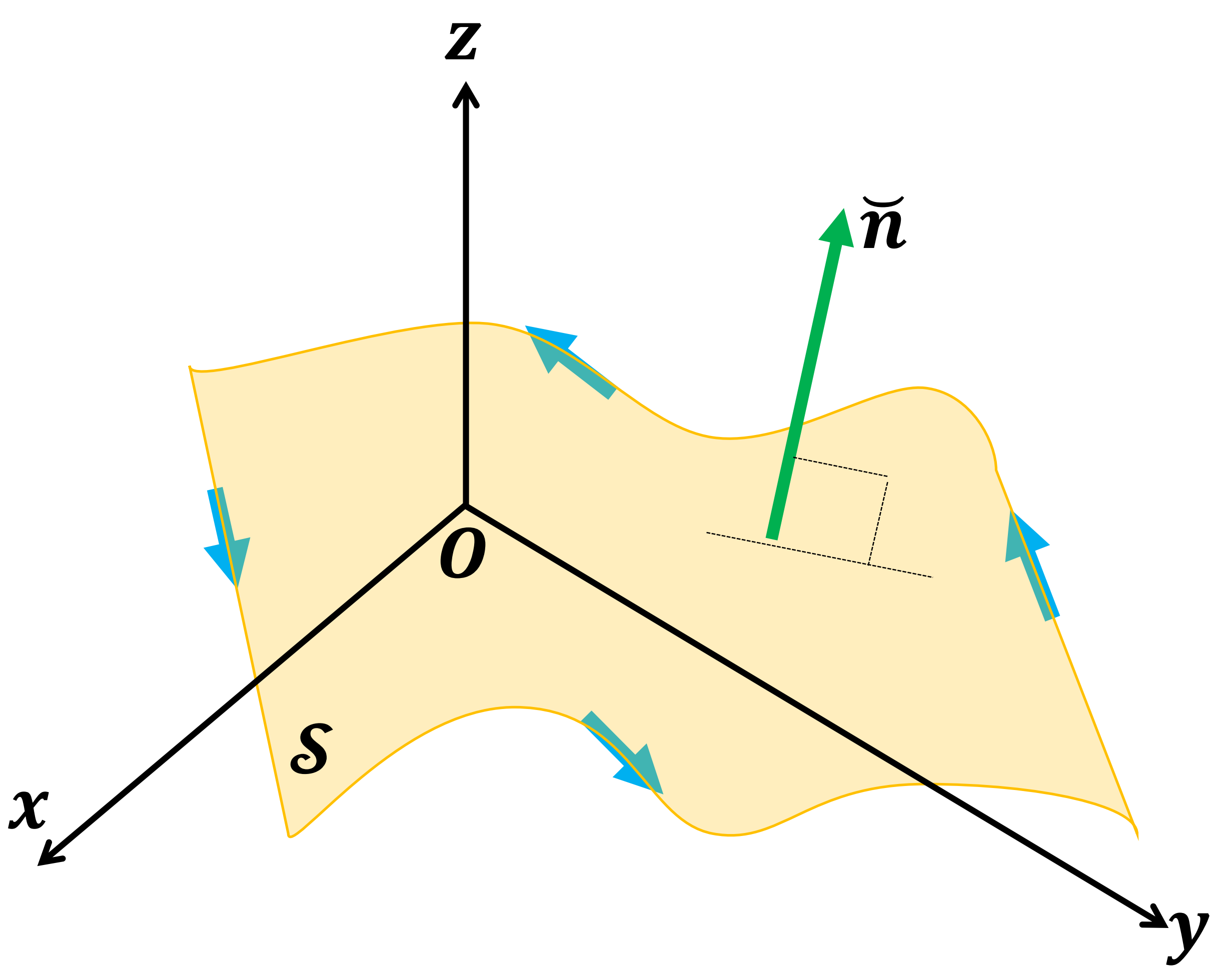
- Un campo vectorial es **armónico** si su laplaciano es 0

Sentido de circulación



La orientación del versor $\breve{\boldsymbol{n}}$ se relaciona con el sentido positivo de circulación, mediante la regla del **tirabuzón de Maxwell** o regla de la **mano derecha**.

Los dedos de la mano cierran en el sentido positivo de circulación y el pulgar apunta hacia donde va $\breve{\boldsymbol{n}}$.



Las flechas celestes indican el **sentido positivo de circulación:** el recinto anaranjado queda siempre a la **izquierda** de las mismas.

Teorema del rotor o teorema de Stokes

- $\bar{F}$:A⊆ $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, A abierto, $\text{clase } 1, \; \text{C y } \Sigma \subseteq$ A
- C curva cerrada suave a trozos
- Σ superficie abierta, orientable y suave a trozos
- C curva borde de Σ
- Entonces: $\iint_S \; rot\bar{F}\check{n}d\sigma = \oint_C \; \bar{F}.d\bar{s}$
- Con orientación de la curva y de la superficie según la regla de la mano derecha

Observación

- Cualquier superficie que cumpla con las condiciones de la hipótesis y que tenga contorno C, puede ser utilizada para calcular el flujo del rotor. Entonces, podremos elegir la más conveniente para nuestros cálculos.

21) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z)=(x\,y\ ,\ y-x\ ,\ y\,z^2)$ a lo largo de la curva intersección de $x^2+y^2+z^2=8$ con $x=\sqrt{y^2+z^2}$ aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

22) Siendo $\bar{f}\in C^1$, $\operatorname{rot}(\bar{f}(x,y,z))=(3,1,2y)$, calcule la circulación de $\bar{f}$ a lo largo del arco de curva de ecuación $\overline{X}=(0\,,2\cos(u)\,,2\,\mathrm{sen}(u))$ con $u\in[0,\pi]$, sabiendo que la circulación de $\bar{f}$ por el segmento desde $(0,-2,0)$ hasta $(0,2,0)$ es igual a 16/3.

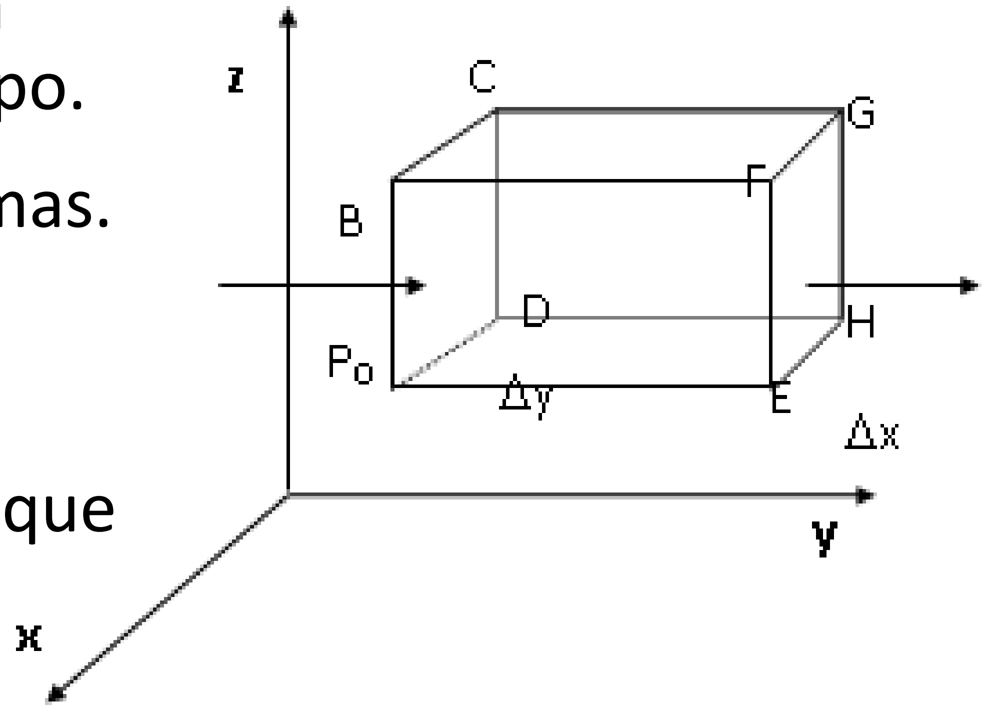
Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss Ostrodasky

- $\bar{F}$:A$\subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ A abierto, clase 1, V y $\Sigma \subseteq$ A
- V es un sólido simple incluido en $\mathbb{R}^3$, proyectable sobre los tres planos coordenados
- Σ superficie cerrada, orientable y suave a trozos, frontera de V

- Entonces: $\iiint_V \; div\, \bar{F} dxdydz = \iint_\Sigma \; \bar{F}.\check{n} d\sigma$
- con $\check{n}$ es la normal exterior a la superficie Σ.

Interpretación física

- Sea $\vec{F} = \delta\vec{v}$ un campo continuo que expresa la masa del fluido por unidad de área y de tiempo.
- Dividimos el dominio de $\vec{F}$ en pequeños prismas.
- $\vec{F}$ cte en cada cara
- En la dirección del eje y, la diferencia entre la masa de fluido que sale por la cara EFGH y la que entra por P_oBCD es:



$$\Delta_y Q = Q(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - Q(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Delta_y Q \Delta x \Delta z = (Q(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - Q(x_0, y_0, z_0))\Delta x \Delta z$$

- Si multiplicamos y dividimos por Δy

$$\frac{\Delta_y Q}{\Delta y}\Delta x\Delta z\Delta y = \frac{Q(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - Q(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}\Delta x\Delta z\Delta y$$

- y tomamos límite para (Δx;Δy;Δz) tendiendo a (0;0;0), obtendremos, puntualmente, la variación de masa por unidad de tiempo y de volumen, en la dirección y sentido de $\check{j}$.

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \frac{Q(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-Q(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y} = Q'_y(P_0).\text{vol}$$

- Si hacemos el mismo razonamiento en la dirección y sentido de los otros versores……

$$(P'_x(P_0) + Q'_y(P_0) + R'_z(P_0))\text{vol} = \text{div}\vec{F}\text{vol}$$

que mide la variación total de masa de fluido en P_o por unidad de tiempo y volumen, es decir el flujo

TP 10

10) Calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de S, indicando gráficamente la orientación del versor normal que ha elegido, o bien que se le solicite en cada caso.(&)

a) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2 + yz\,, xz\,, 2z^2 - 2xz\,)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $1 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2$.

25) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x^2 z^2, 1+xyz^2, 1-xz^3)$ a través del trozo S de paraboloide de ecuación $y = x^2 + z^2$ con $y < 4$ aplicando convenientemente el teorema de la divergencia. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el versor normal a S.

27) Calcule el flujo de $\bar{f} \in C^1$ a través de la superficie de ecuación $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sabiendo que $\bar{f}(x,y,0) = (x\,,\, y\,,\, x^2)$, siendo $\operatorname{div}(\bar{f}(x,y,z)) = 2\,(1+z)$.

28) Sea $\bar{f} : \Re^3 - \{\bar{A}\} \to \Re^3$ con derivadas continuas y divergencia nula en su dominio. Aplique el teorema de la divergencia para demostrar que el flujo de $\bar{f}$ a través de una superficie S cerrada sólo depende de si S encierra o no al punto $\bar{A}$. Se supone $\bar{A} \notin S$, $\breve{n}$ saliente.

34) Sea $\bar{f} \in C^1 / \bar{f}(x,y,z) = (z + x\,g(2xy)\,,\, y\,g(2xy)\,,\, zxy - 2z\,g(2xy))$, halle la expresión de $\bar{f}$ sabiendo que el campo es solenoidal y que $\bar{f}(1,1,1) = (3, 2, -3)$.