Definición

Sea f: D$\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y P_0 un punto interior de *D*, un abierto de $\mathbb{R}^n$.

f **diferenciable** en P_0 si y sólo si
existe una transformación lineal T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
tal que

$$f(X) = f(P_0) + T(X - P_0) + \varphi(X)\,\|X - P_0\|$$

Con $\lim\limits_{X \to P_0} \varphi(X)$ =0

Propiedad 1

f diferenciable en $\vec{P}_0$, entonces f continua en $\vec{P}_0$.

Demostración:

$$f(X) = f(P_0) + T(X - P_0) + \varphi(X)\,\|X - P_0\|$$

Con $\lim\limits_{X \to P_0} \varphi(X)$ =0

$$\lim_{X \to P_0} f(X) =$$

$$= \lim_{X \to P_0} \left(f(P_0) + T(X - P_0) + \varphi(X)\,\|X - P_0\|\right) =$$

$$= f(P_0)$$

Propiedad 2

f diferenciable en $\vec{P}_0$, entonces f tiene derivadas parciales en $\vec{P}_0$.

Y además la matriz de la TL es Df($\vec{P}_0$)

Demostración:

$$f(X) = f(P_0) + T(X - P_0) + \varphi(X)\ \|X - P_0\|$$

Con $\lim\limits_{X \to P_0} \varphi(X)$ =0

$$f'_{x_i}(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\check{e}_i) - f(P_0)}{h} =$$

X=$P_0 + h\check{e}_i$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0)+T(P_0+h\check{e}_i-P_0)+\varphi(P_0+h\check{e}_i)\ \|P_0+h\check{e}_i-P_0\|-f(P_0)}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{T(\check{e}_i)h+\varphi(P_0+h\check{e}_i)\ |h|}{h}= \lim_{h\to 0} \frac{T(\check{e}_i)h}{h} + \frac{\varphi(P_0+h\check{e}_i)\ |h|}{h}= \mathrm{T}(\check{e}_i)$$

$f'_{x_i}(P_0)$=T($\check{e}_i$) $\longrightarrow$ Es el primer lugar de la matriz diferencial

Propiedad 3

f diferenciable en $\vec{P}_0$, entonces f tiene derivadas direccionales en $\vec{P}_0$.

Y además f'($\vec{P}_0$,$\check{v}$)= $\vec{\nabla}$f($\vec{P}_0$). $\check{v}$

Demostración:

$$f(X) = f(P_0) + T(X - P_0) + \varphi(X)\,\|X - P_0\|$$

Con $\lim_{X \to P_0} \varphi(X)$ =0

$$f'_{\check{v}}(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\check{v}\ \ ) - f(P_0)}{h} =$$

X= $P_0 + h\check{v}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0)+T(P_0+h\check{v}-P_0)+\varphi(P_0+h\check{v})\ \|P_0+h\check{v}-P_0\|-f(P_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{T(\check{v})h+\varphi(P_0+h\check{v})\ |h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(\check{v})h}{h} + \frac{\varphi(P_0+h\check{v})\ |h|}{h} = \mathrm{T}(\check{v})$$

además $f'(\vec{P}_0,\check{v})=T(\check{v})=Df(P_0)\ \check{v}^t$

$f'(\vec{P}_0,\check{v}) = \vec{\nabla} f(\vec{P}_0).\ \check{v}$