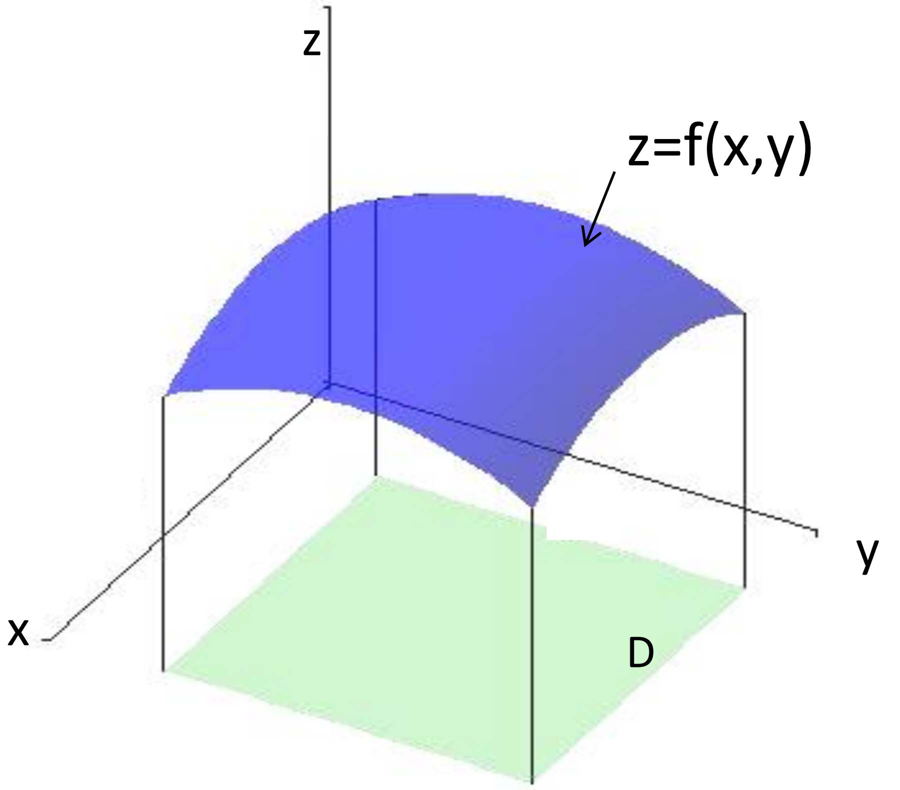
Integrales dobles

Construcción del concepto

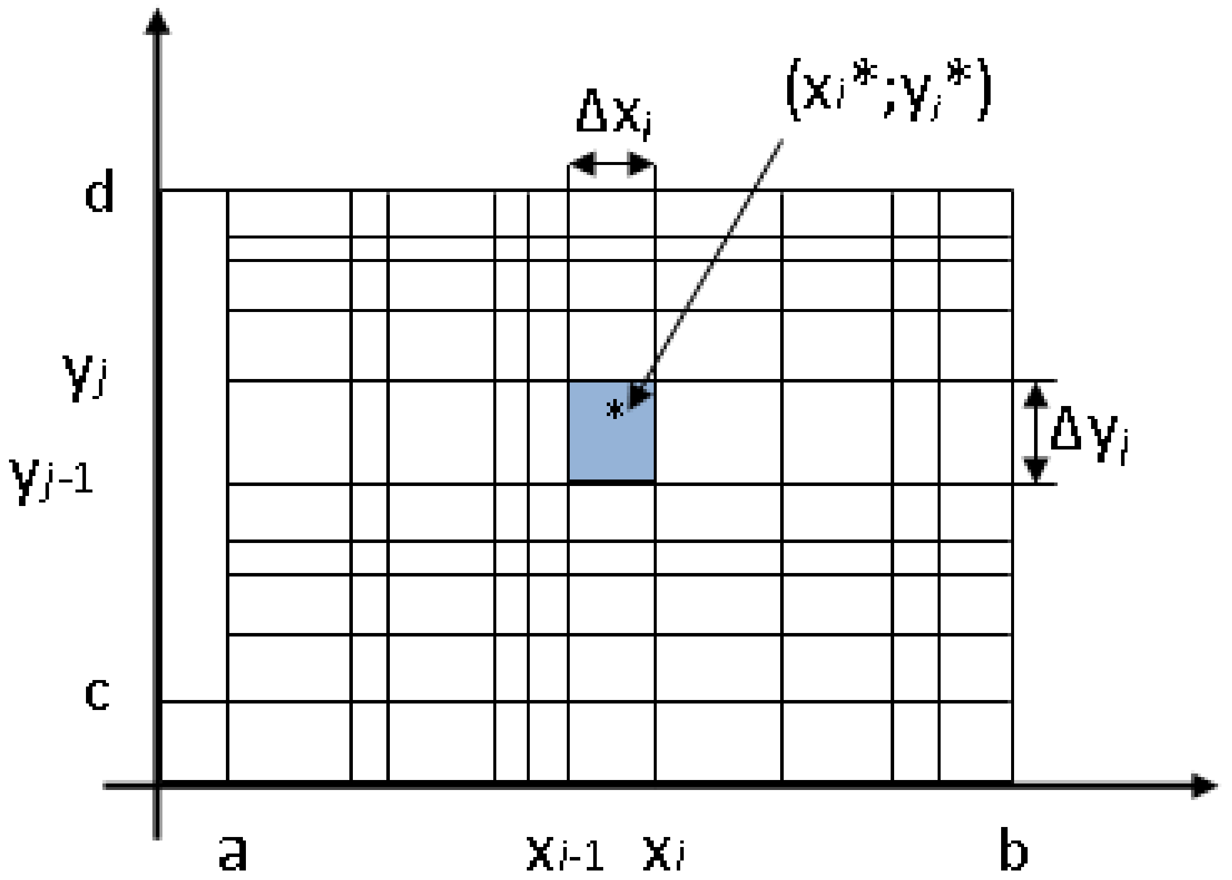
- Sea una función f:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua

no negativa en el rectángulo D=[a;b]x[c;d].

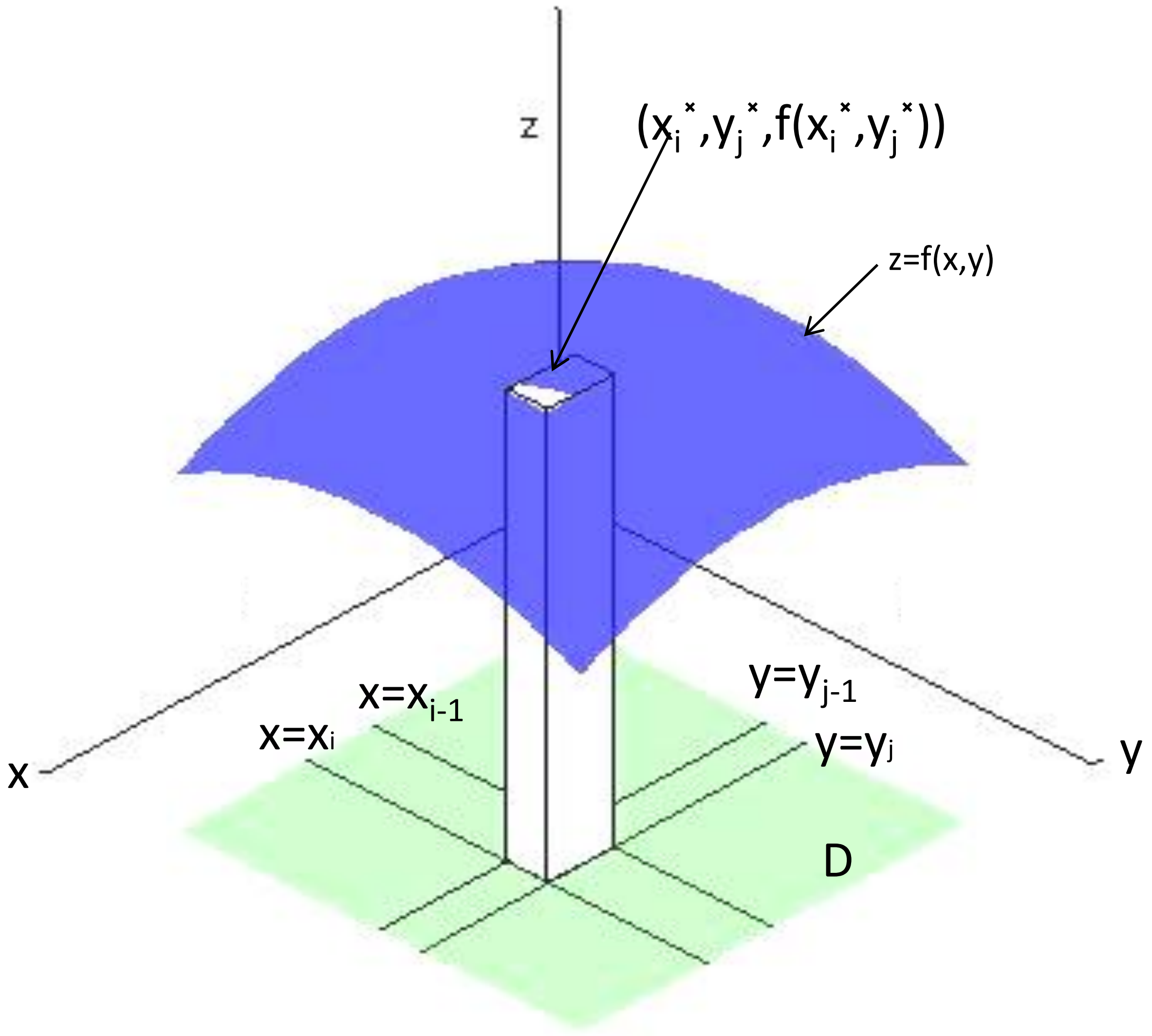
- Deseamos calcular el volumen del sólido definido sobre la región D y bajo la superficie definida por la gráfica de f y los planos x=a, x=b, y=c, y=d, z=0.



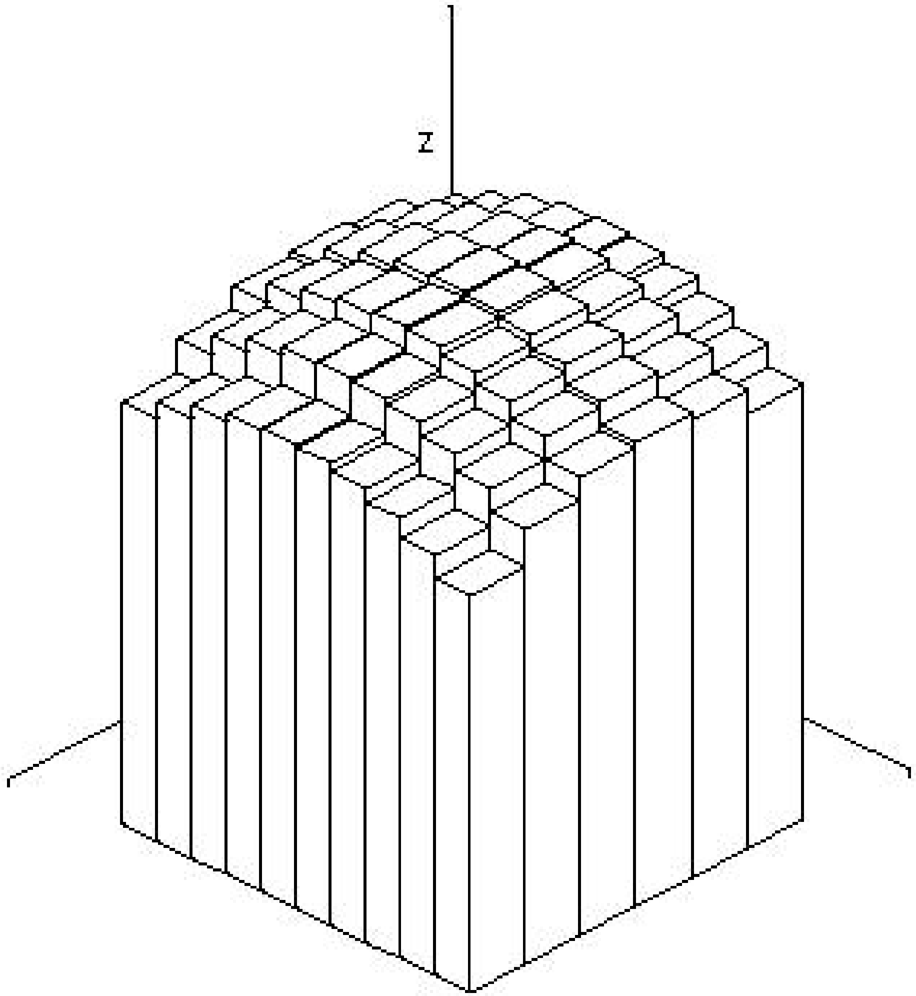
Para encontrar una aproximación definiremos particiones en los intervalos [a;b] y [c;d] de n y m puntos respectivamente. Entonces D queda dividida en n.m rectángulos denominados D_{ij}.



El volumen del sólido podría aproximarse por la suma de los volúmenes de los paralelepípedos de base D_{ij} y altura $f(x_i*;y_j*)$.



$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*).\Delta x_i \Delta y_j$$



Geogebra

V= $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^{*}, y_j^{*})\Delta x_i \Delta y_j$

Definición

Sea f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un rectángulo D del plano. La integral doble de *f* sobre D se define como

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j$$

si este límite existe y se denota:

dA

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

Observaciones:

1) La integral doble sólo representa un volumen si f$(x; y)$ es no negativa.

2) Se puede realizar el cálculo de una integral doble independientemente de la interpretación geométrica

Propiedades

1. Linealidad

1. Si f:D$\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en una región D dividida en n subregiones disjuntas salvo un número finito de curvas D_1 , D_2 , … , D_n se cumple:

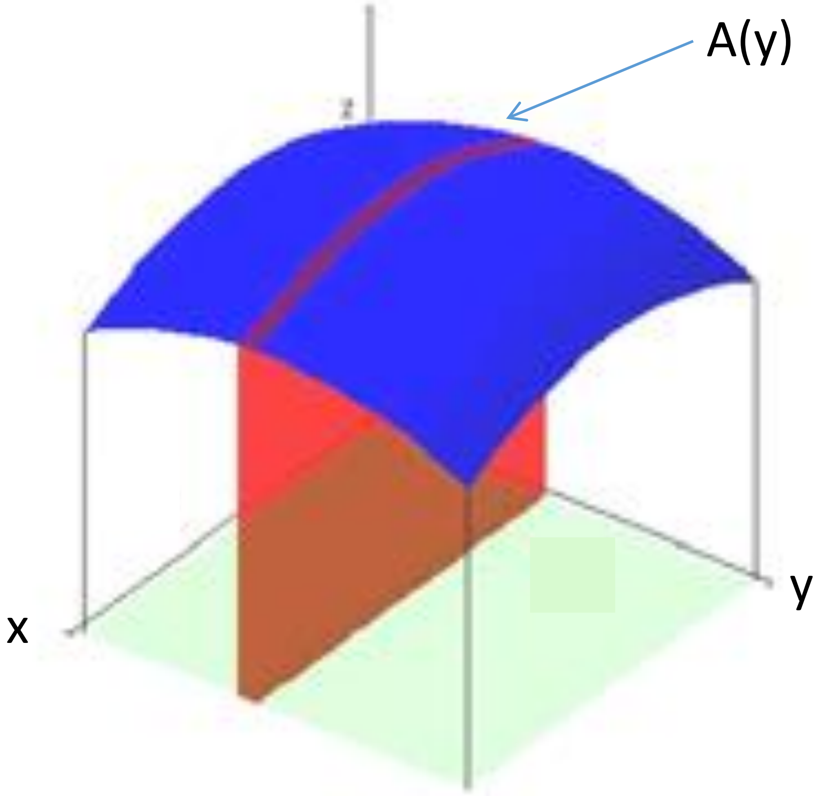
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

3. $\iint_D$ 1 dxdy = área (D)

Teorema de Fubbini

Sea f:D⊆ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable definida en el rectángulo D=[a;b]x[c;d].

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$



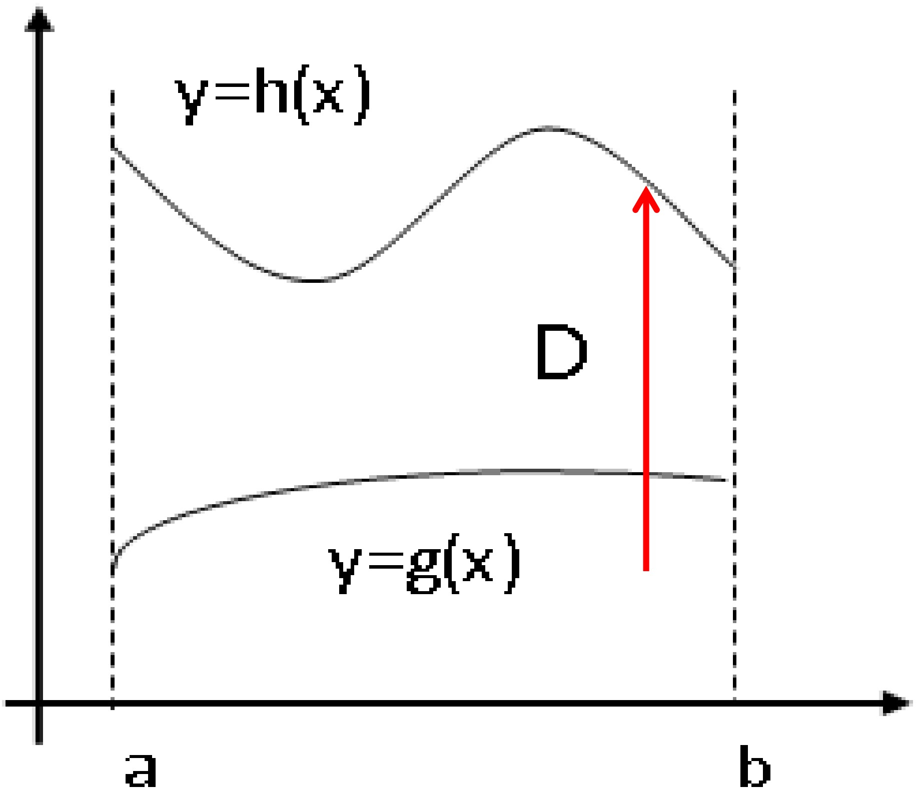
Cálculo en regiones no rectangulares

REGIONES TIPO I

La región D está limitada por las rectas x=a, x=b y las gráficas de y=h(x) e y=g(x) siendo

$$h(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a;b]$$

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = \int_{a}^{b} dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

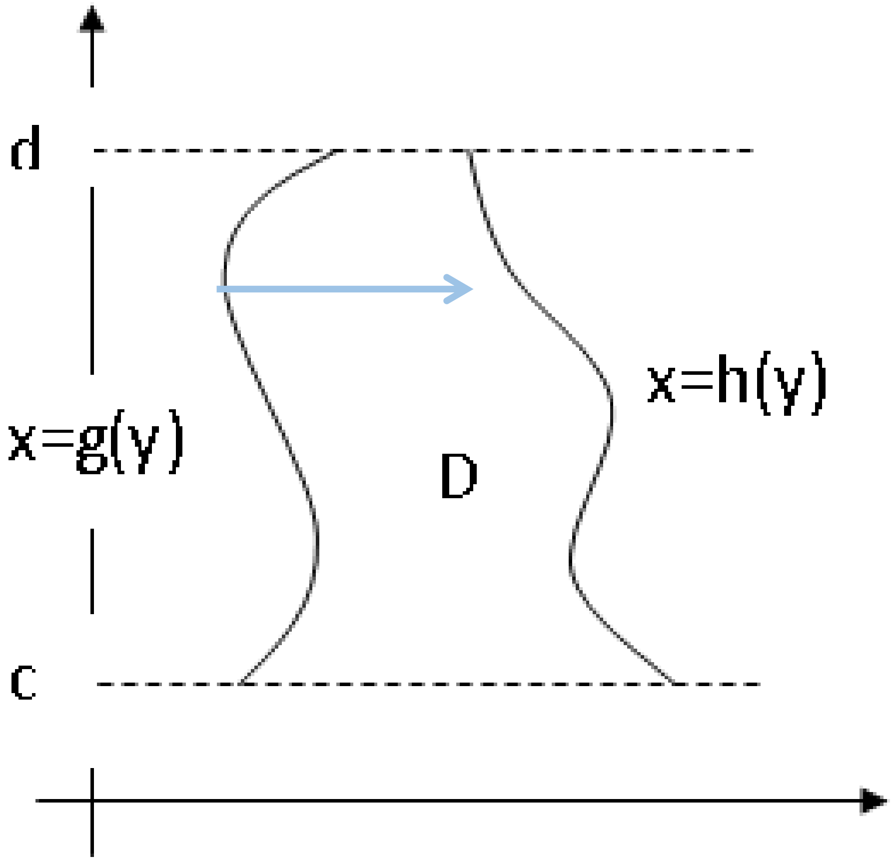


Cálculo en regiones no rectangulares

REGIONES TIPO II

La región D está limitada por las rectas y=c, y=d y las gráficas de x=h(y) y x=g(y) siendo

$$h(y) \geq g(y) \ \forall y \in [c;d]$$



$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_{c}^{d} dy \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx$$

02) Calcule las siguientes integrales en ambos órdenes de integración y verifique que los resultados coinciden.

e) $\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)\,dy + \int_1^4 dx \int_0^1 (x+y)\,dy$.

f) $\iint_D e^{-x}\,dx\,dy$, D definido por: $e^x \le y \le e^{2x} \ \wedge \ 0 \le x \le \ln 2$.

05) Calcule las siguientes integrales, en algunos casos puede convenirle invertir el orden de integración.

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx$. b) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$. c) $\int_{-4}^0 dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx + \int_0^5 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx$.

01) Calcule el área de las siguientes regiones planas mediante integrales dobles; se recomienda <u>no aplicar</u> propiedades de simetría, plantee los límites para toda la región.

a) $D = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ y \ge 2x^2 + 1 \ \wedge \ x + y \le 4\}$.

b) D : definida por $x^2 \le y < \sqrt{2 - x^2}$.

e) D : conjunto de positividad de $f(x,y) = (y - 2|x|)\sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

Repaso de Análisis I

Supongamos que debemos calcular esta integral: $\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$

u=2x+1 du =2dx $\frac{1}{2}$du=dx

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq 2x \leq 2$$
$$1 \leq 2x+1 \leq 3$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx=\int_1^3 \sqrt{u}\,\frac{1}{2}\,du$$

Teorema de Cambio de variables

- Sea T: $D_{uv} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$ una función T(u,v) = (x,y) C^1 y biyectiva, entonces:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D'} f(T(u,v))\left|J(u,v)\right| du\,dv$$

Con |J(u,v)| es el módulo del **determinante jacobiano** o **jacobiano** de la transformación y se calcula de la siguiente manera:

$$\left|J(u,v)\right| = \left|\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\right| = \left|x'_u y'_v - y'_u x'_v\right|$$

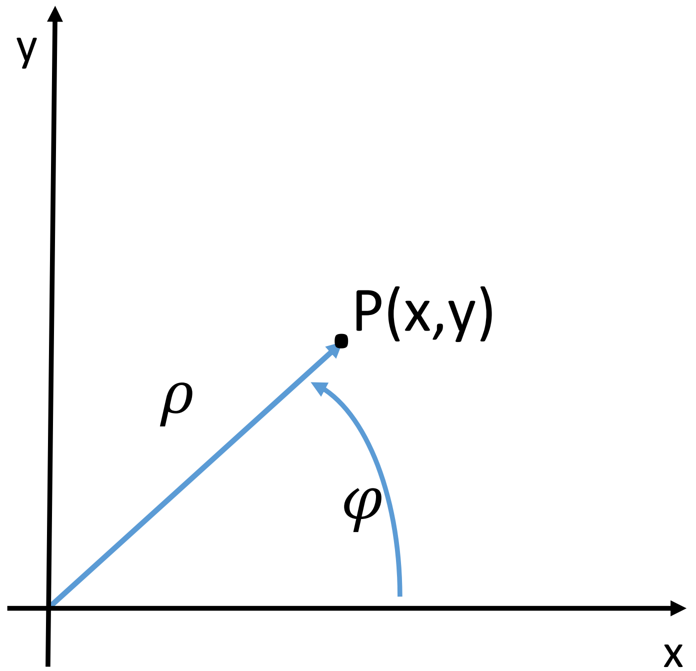
06) Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado.

a) $\iint_D (6-x-y)^{-1}\,dx\,dy$, $D : |x+y| \leq 2 \ \wedge \ y \leq x+2 \leq 4$, usando $(x,y)=(v,\, u-v)$

c) $\iint_D (x-y)^4\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x|+|y| \leq 4\}$, aplicando una transformación lineal apropiada.

Coordenadas polares

- Se escribe un punto P(x,y) en función de ρ y φ.
- ρ es la distancia de P al origen de coordenadas. $\rho \in \mathbb{R}_0^+$.
- φ es el ángulo que forma $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo de las x. "$\varphi \in [0, 2\pi)$"
- $\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sen\varphi \end{cases}$



- $J(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} cos\varphi & -\rho sen\varphi \\ sen\varphi & \rho cos\varphi \end{pmatrix}$ y su determinante es:

J = $\begin{vmatrix} cos\varphi & -\rho sen\varphi \\ sen\varphi & \rho cos\varphi \end{vmatrix}$=$\rho$

- $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$ = $\iint_{D_{\rho\varphi}} f(\rho cos\varphi, \rho sen\varphi)\rho d\rho d\varphi$

Ejemplos muchos

09) Calcule $\iint_D \frac{x+4y}{x^2}\,dxdy$ con $D:\ x \geq y$, $x+4y \leq 4$, $y \geq 0$ usando coordenadas polares.

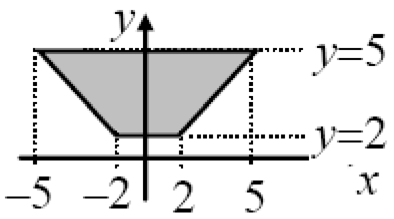
10) En los siguientes casos se indica una integral planteada en coordenadas polares, grafique la región correspondiente en el plano xy, plantee la integral en coordenadas cartesianas y resuélvala en alguno de los dos sistemas de coordenadas.

a) $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos(\varphi)} \rho^3\, d\rho$.

b) $\int_{-\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}/\cos(\varphi)} \rho^2 \cos(\varphi)\, d\rho$.

06) Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado.

e) Siendo D la región sombreada del dibujo, **calcule** $\iint_D y\,(x^2+y^2)^{-1} dxdy$ usando coordenadas polares.



Coordenadas elípticas

- $\begin{Bmatrix} x = a\rho cos\varphi \\ y = b\rho sen\varphi \end{Bmatrix}$
- ρ es la distancia de P al origen de coordenadas. $\rho \in \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^{+}$.
- φ es el ángulo que forma $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo de las x. "$\varphi \in [0, 2\pi)$"
- a>0 , b>0

- $JT = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot cos\varphi & -a \cdot \rho \cdot sen\varphi \\ b \cdot sen\varphi & b \cdot \rho \cdot cos\varphi \end{vmatrix}$

- $JT = a \cdot b \cdot \rho \cdot cos^2\varphi + a \cdot b \cdot \rho \cdot sen^2\varphi = a \cdot b \cdot \rho$

Ejemplito

en campus

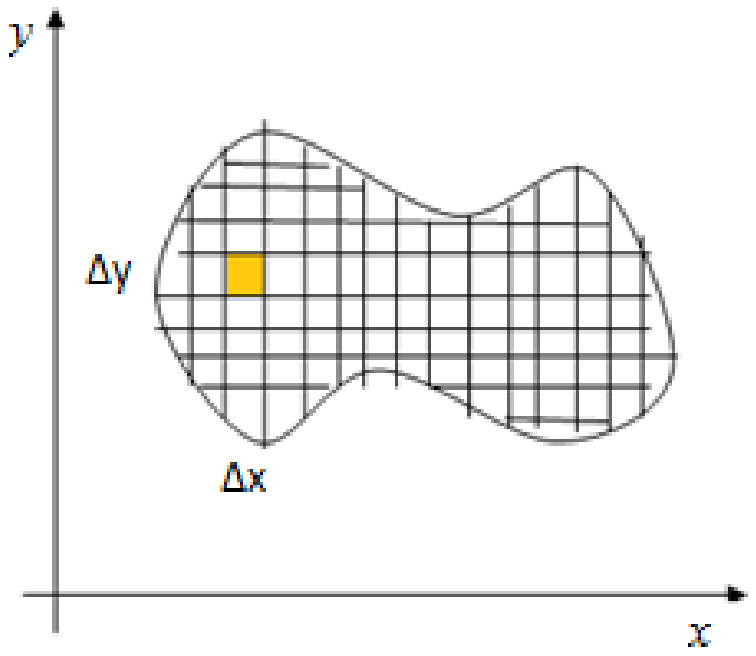
07) a) Dada $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$, calcule el área de la región plana limitada por las curvas de nivel e^4 y e^8 de la función.

b) Calcule $\iint_D e^{x^2+2y^2}\,dx\,dy \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + 2y^2 \leq 4 \wedge x \geq \sqrt{2}\,|\,y\,|\}$.

Aplicaciones físicas

Masa:

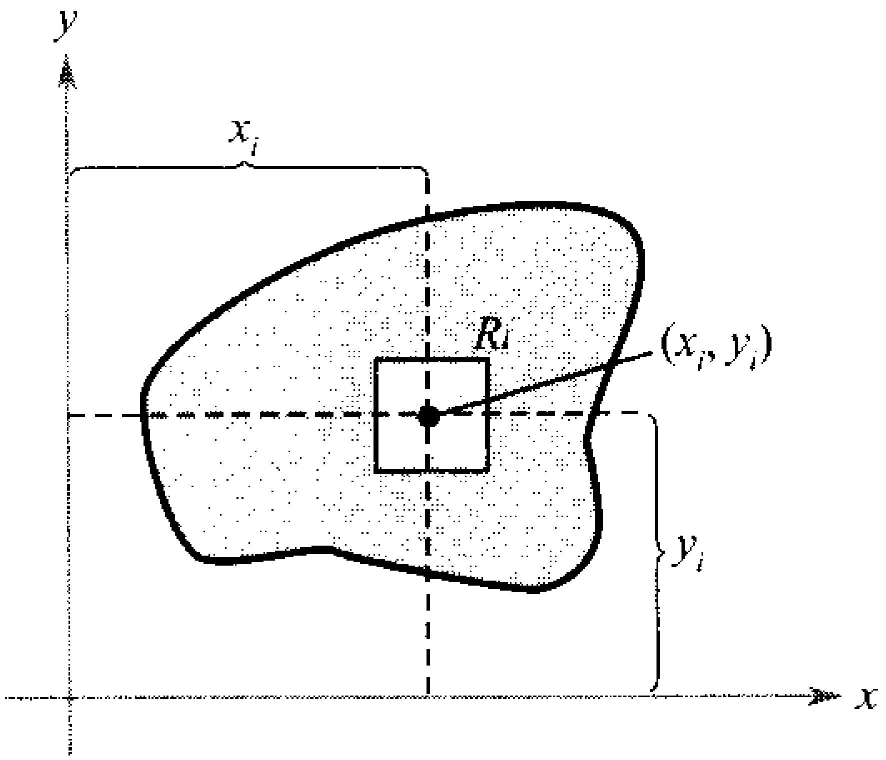
Sea D una placa, con densidad dada por $\delta(x,y)$. Efectuando una partición de D en rectángulos de área $\Delta x \Delta y$ y calculando la densidad en un punto arbitrario, podemos asegurar que la masa de dicho rectángulo es $M_{ij} = \delta(\alpha_i;\beta_j)\ \Delta x_i \Delta y_j$. Para hallar la masa de toda la placa, debemos extender la suma a todos los rectángulos.



$$\text{Masa} = \iint_D \delta(x,y)\,dxdy$$

Momentos estáticos de una placa plana

- Con respecto al eje x: $\iint_{D} y\delta(x,y)\,dxdy$
- Con respecto al eje y: $\iint_{D} x\delta(x,y)\,dxdy$



Centro de masa de una placa plana

Intuitivamente, es el punto de equilibrio de la placa. Las coordenadas del centro de masa son:

$$X_G = \frac{\iint_D x\delta(x,y)\,dxdy}{\iint_D \delta(x,y)\,dxdy} \qquad Y_G = \frac{\iint_D y\delta(x,y)\,dxdy}{\iint_D \delta(x,y)\,dxdy}$$

Momento de inercia de una placa plana

El momento de inercia I_L de un punto material respecto de un eje L es el producto de entre la masa del punto y el cuadrado de la distancia entre éste y el eje L.

$$J_x = \iint_D y^2 \delta(x,y)\,dxdy$$

$$J_y = \iint_D x^2 \delta(x,y)\,dxdy$$