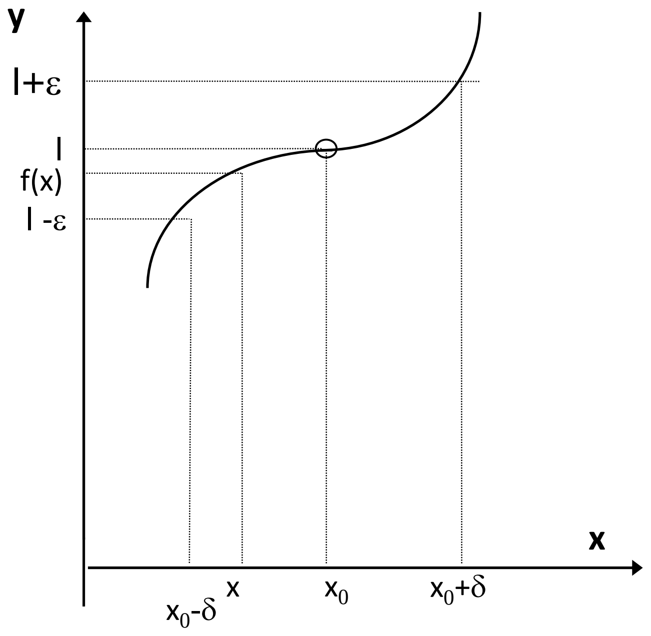
Límite y continuidad

Unidad III

Límite de Funciones escalares

Consideremos una función f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ / y = f(x) con A $\subseteq \mathbb{R}$ y también el punto x_o, punto de acumulación de A.

Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si y sólo si para cualquier número positivo ε, es posible determinar otro número positivo δ que dependa de ε, tal que todos los valores de "x" pertenecientes al dominio de f y a un entorno reducido de x_o de amplitud δ tengan su imagen a una distancia de *"l"* menor que ε.



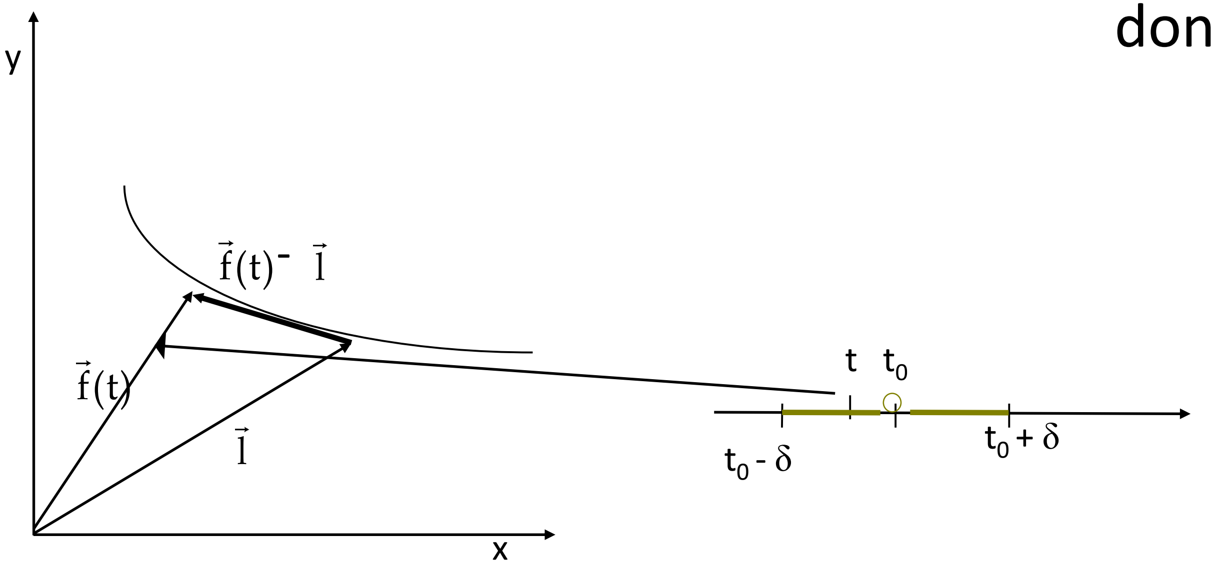
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / \forall x : [x \in A \wedge x \in E^*(x_0, \delta) \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon]$$

Límite de Funciones vectoriales

Consideramos $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con n≥2/ $\vec{f}(t)=(f_1(t);f_2(t);.....f_n(t))$, t_0 punto de acumulación de A.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall t : [t \in A \wedge t \in E^*(t_0;\delta) \Rightarrow \left\|\vec{f}(t) - \vec{l}\right\| < \varepsilon]$$

donde $\vec{l} =(l_{1;}\ l_2\ ;.....;l_n)$



- Propiedad: Sea $\vec{f}$: A $\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con n≥2/ $\vec{f}$(t)=(f_1(t);f_2(t);.....f_n(t)), t_0 punto de acumulación de A y $\vec{l}$ =($l_{1;}$ l_2 ;.....;l_n), entonces

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \iff \lim_{t \to t_0} f_i(t) = l_i \ , \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$$

- Sea $\vec{f}$: A $\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, t_0 punto de acumulación de A. Se dice que $\vec{f}$ es **continua en t_0** si y sólo si:

  1) $t_0 \in$ A

  2) existe y es finito $\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t)$

  3) $\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$

- Una **curva** es la imagen de una función vectorial continua con dominio un intervalo.

03) Analice la existencia del $\underset{u\to 0}{lím}\left(\dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\,,\,1+2u\,,\,\dfrac{\text{sen}(u^2)}{u^3+u^2}\right)$

02) ¿Por qué existe el $\underset{u\to 0}{lím}\left(\dfrac{\text{sen}(u)}{|u|}\,,u\ln(u)\right)$ pero no existe el $\underset{u\to 0}{lím}\left(\dfrac{\text{sen}(u)}{|u|}\,,\,u\right)$?.

04) Represente el conjunto imagen de las siguientes funciones vectoriales de una variable e indique en qué casos dicho conjunto es una curva.

a) $\overline{g}:\Re\to\Re^2\ /\ \overline{g}(t)=(t\,,\,2t)$

b) $\overline{g}:[-1,2]\subset\Re\to\Re^2\ /\ \overline{g}(u)=(u\,,|\,u\,|)$

c) $\overline{g}:[0,\pi]\subset\Re\to\Re^2\ /\ \overline{g}(\varphi)=(\cos(\varphi),\,\text{sen}(\varphi))$

d) $\overline{g}:\Re\to\Re^3\ /\ \overline{g}(t)=(t\,,\,2t\,,\,1-t)$

e) $\overline{g}:D\subset\Re\to\Re^2\ /\ \overline{g}(x)=(x\,,\,x^2)$

con $D=\{x\in\Re\ /\ |\,x\,|>1\}$

(u, u^2+1)

f) $\overline{g}(u)=\begin{cases} u^2+1 & \text{si } u\geq 0\\ u^2 & \text{si } u<0\end{cases}$

(u, u^2)

Límite de campos escalares y Vectoriales

Sea F: A ⊆ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{P}_0$ punto de acumulación de A

$$\lim_{\vec{X}\to\vec{P}_0} F(\vec{X}) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0 / \forall\vec{X}:[\vec{X}\in A \wedge \vec{X}\in E^*(\vec{P}_0;\delta) \Rightarrow \left\| F(\vec{X})-L \right\| < \varepsilon\,]$$

- Las propiedades utilizadas para límite finito de funciones escalares (Análisis I) subsisten para límite finito de campos escalares.

- Igual que para funciones de una variable, el cálculo directo de límite doble se apoya en las propiedades mencionadas para límites finitos, puede recurrirse a artificios conocidos por los estudiantes (como multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de cierta expresión, factorizar para simplificar, u otros).

Geogebra

- En principio, **no** se puede aplicar regla de L´Hôpital.

07) Analice la existencia de los siguientes límites.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\operatorname{sen}(4-xy)}{16-x^2y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\operatorname{sen}(1/y)\,,\ \frac{1-\cos(x)}{x^2} \right)$

05) Analice la existencia de los siguientes límites de campos escalares.

b) $\displaystyle\operatorname*{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

l) $\displaystyle\operatorname*{lím}_{(x,y)\to(0,1)} e^{-y/x^2}$

m) $\displaystyle\operatorname*{lím}_{(x,y)\to(0,0)} (y^3+1)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

n) $\displaystyle\operatorname*{lím}_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\operatorname{sen}(1/x)\cos(1/y)$

Acotadas-L’H

- Sea F : A$\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y P_0 punto de acumulación de A, F es **continua** en P_0 si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

    1) $\exists\ F(P_0)$

    2) $\lim\limits_{X \to P_0} F(X) = L$

    3) $F(P_0)=L$

- Si existe límite finito pero la función no es continua, la discontinuidad se llama EVITABLE.

- Si no existe límite (o es infinito) la discontinuidad se llama ESENCIAL.

10) Analice la continuidad en el origen de los siguientes campos escalares.

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(xy)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(1/x) & \text{si } (x,y)\neq(0,y)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,y)\end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2-4x^2}{y-2x} & \text{si } y\neq 2x\\ 1-x-y & \text{si } y=2x\end{cases}$

planos

- Para probar que un límite no existe, es útil trabajar con límites por **curvas** o **caminos** (rectas, parábolas, parábolas cúbicas, curvas de nivel, etc). Esos caminos deben pasar por el punto para el cuál quiere calcularse el límite

- Para calcular el límite de campos vectoriales, se calcula el límite de cada componente.

Geogebra

05) Analice la existencia de los siguientes límites de campos escalares. Genocci-Peano

i) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$ j) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^3}{x^2+y^6}$

o) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y) = \begin{cases} x^3/(x^2-y^2) & \text{si } x^2-y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2-y^2 = 0 \end{cases}$

07) Analice la existencia de los siguientes límites. e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \,,\, \frac{e^{xy}-1}{xy} \right)$

13) Sea $f(x,y)=x^3/(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. a) Demuestre que f es continua en el origen. b) ¿Puede analizar el límite acercándose al origen por la línea de nivel 1 de f?.