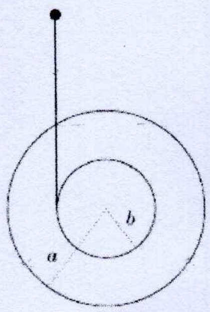
Problemas con centro de masa móvil

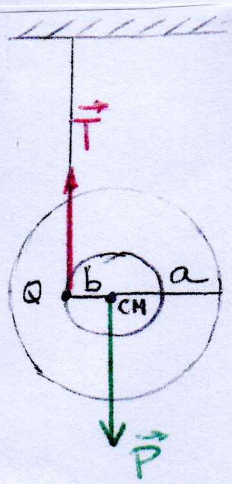
19. Un yo-yo está formado por un cilindro de masa m y radio a que tiene arrollado en su garganta de radio b un hilo ideal, como se muestra en la figura. Suponga que la cavidad de la garganta es muy delgada, de modo que el momento de inercia baricéntrico del yo-yo pueda considerarse $I = \frac{1}{2}\, m\, a^2$. Si se lo deja en libertad, halle las expresiones de: *a*) la aceleración del centro de masa del cilindro en su movimiento descendente; *b*) la tensión en la cuerda. Exprese los resultados como función del cociente de radios a/b.

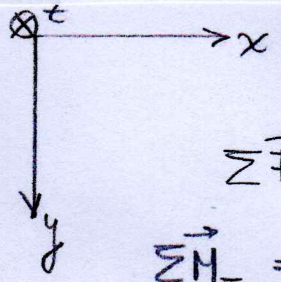


COMO LA CAVIDAD DE LA GARGANTA ES MUY DELGADA

$$I_{CM} = \frac{m a^2}{2}$$

Rta: *a*) $a_{cm} = g/\left(1 + \frac{1}{2}\,(a/b)^2\right)$; *b*) $T = m\,(g - a_{cm})$.





$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM} \Rightarrow P - T = m a_{CM} \quad (1)$$

$$\sum \vec{M}_{F,CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow bT = I_{CM} \cdot \gamma \quad (2)$$

Rueda sin deslizar sobre la soga : $v_{CM} = \omega . b$

$$\Downarrow$$

$$(3) \quad a_{CM} = \gamma\, b$$

Resolvemos el sist. de ec. (1) - (3) :

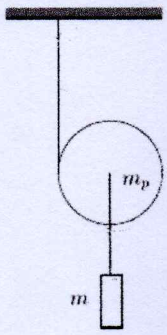
$$\begin{cases} P - T = m a_{CM} & (1) \\ bT = \dfrac{m a^2}{2} \cdot \gamma & (2) \\ a_{CM} = \gamma b & (3) \end{cases}$$

(a) Resulta : $\gamma = \dfrac{g b}{b^2 + \frac{a^2}{2}}$; $\boxed{a_{CM} = \dfrac{g b^2}{b^2 + \frac{a^2}{2}} = \dfrac{g}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2}}$ (*)

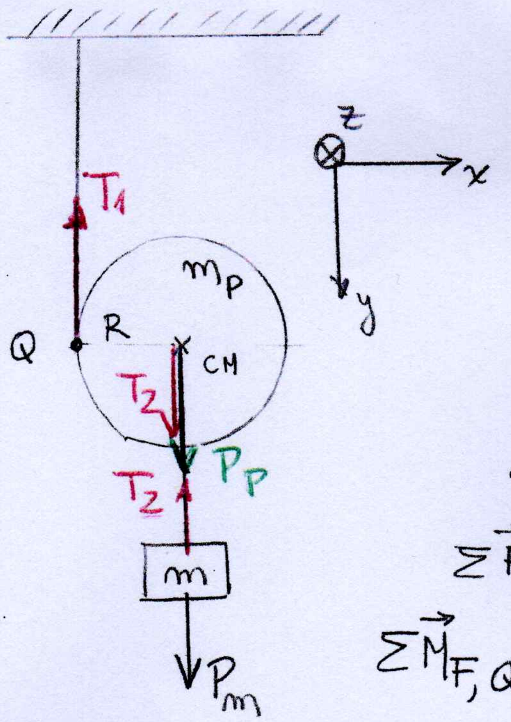
b) De ec. (1) : $T = mg - m a_{CM}$

$T = m\,(g - a_{CM})$ con a_{CM} dado en (*)

20. El sistema de la figura está constituido por una polea cilíndrica de masa $m_p = 6\ kg$ que tiene enrollado un hilo ideal cuyo extremo libre está fijo al techo. Una pesa está suspendida del eje de la polea. Si al dejar el sistema en libertad la pesa adquiere una aceleración de 8 m/s^2, calcule el valor de su masa m.



Rta: $m = 6\ kg$



P_m : peso de m ; $P_m = mg$
P_p : peso de la polea ; $P_P = m_p g$
T_1 : tensión soga 1
T_2 : tensión soga 2

Para la masa m:

$$\Sigma \vec{F} = m\, a_m \Rightarrow mg - T_2 = m\, a_m \quad (1)$$

Para la polea:

$$\Sigma \vec{F} = m_p \vec{a}_{CM_p} \Rightarrow m_p g + T_2 - T_1 = m_p\, a_{CM_p} \quad (2)$$

$$\Sigma \vec{M}_{F,Q} = I_Q \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow T_2 R + P_P R = I_Q \cdot \gamma \quad (3)$$

Condiciones de vínculo: $a_m = a_{CM_p}$ (4)

Polea rueda sin deslizar: $a_{CM_p} = \gamma R$ (5)

$I_Q = I_{CM} + m_p R^2$

$I_Q = \frac{3}{2} m_p R^2$ (6)

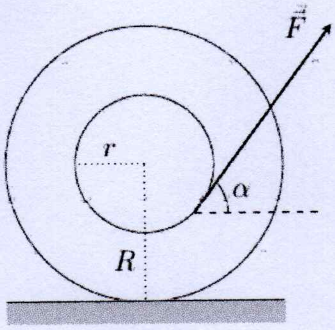
OBSERVACIÓN: elegí escribir la ec. de momentos desde Q. (Cómo ejercicio, probar hacerlo desde el CM)

Del sist. de ec. (1) – (6) obtenemos:

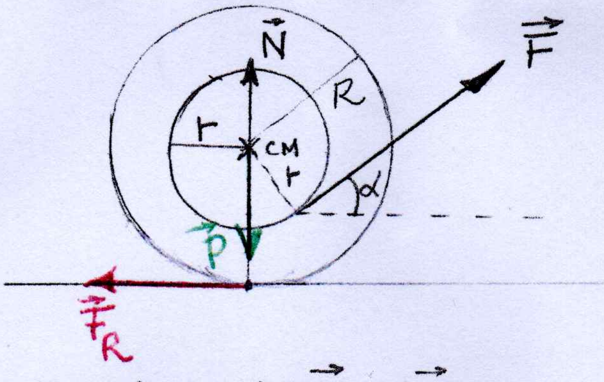
$$m = \frac{m_p \left(\frac{3}{2} a - g\right)}{g - a}$$

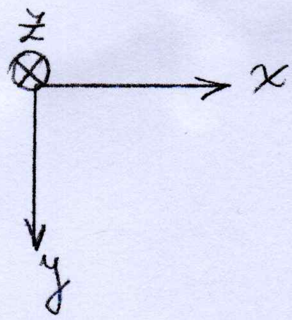
$$\boxed{m = 6\,kg}$$

21. Un yo-yo de radio interior r y exterior $\vec{R}$ se halla en reposo sobre un piso con rozamiento. Se tira de él con una fuerza $\vec{F}$ mediante un hilo enrollado en el cilindro interior (tangencialmente a dicho cilindro) formando un ángulo α con la horizontal. Se observa que existe un ángulo crítico α_c tal que, para $\alpha < \alpha_c$, el carrete rueda sin deslizar en el mismo sentido en que se tira y para $\alpha > \alpha_c$ el yo-yo rueda sin deslizar en sentido contrario. Considerando que el momento de inercia baricéntrico del yo-yo es $I_{CM} = \frac{1}{2}\ m\ R^2$: *a*) Obtenga una expresión que permita calcular el ángulo crítico α_c Discuta qué ocurre cuando $\alpha = \alpha_c$. *b*) Obtenga las expresiones de la aceleración del centro de masa del yo-yo, y de la fuerza de rozamiento, como funciones de F, m, α y del cociente r/R. ¿Se anula en algún caso la fuerza de rozamiento?



Rta: *a*) $\cos\alpha_c = r/R$; *b*) $a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{F}{m}(\cos\alpha - r/R)$; $F_{re} = \frac{1}{3}\ F\ (\cos\alpha + 2\ r/R)$ hacia la izquierda.





Escribimos 1) $\sum \vec{F} = M \vec{a}_{CM}$

2) $\sum \vec{M}_{F,0} = I_0 \cdot \gamma$ $\longrightarrow$ Vamos a elegir $O \equiv CM$.

3) Condiciones de vínculo.

$\Downarrow$ respecto del CM las fuerzas que hacen momento son: $\vec{F}$ y $\vec{F}_R$

$$F\cos\alpha - F_R = M a_{CM} \qquad (1a)$$

$$P - N - F \operatorname{sen}\alpha = 0 \qquad (1b)$$

$$-rF + R F_R = I_{CM} \cdot \gamma \qquad (2)$$

El cilindro rueda sin deslizar $\Rightarrow$ $a_{CM} = \gamma R \quad (3)$

Del sistema de ecuaciones (1) - (2) y (3) obtenemos a_{CM}, γ y F_R como sigue: Voy a reemplazar la relación (3) en (2) y resuelvo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} R F\cos\alpha - R F_R = M a_{CM} R \\ -rF + R F_R = I_{CM} \cdot \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

$$\overline{F(R\cos\alpha - r) = a_{CM}\left(MR + \frac{I_{CM}}{R}\right)}$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{F R (R\cos\alpha - r)}{MR^2 + I_{CM}}} \qquad (4)$$

Reemplazando este resultado en (1a), obtenemos F_R:

$$F_R = F\cos\alpha - M a_{CM}$$

$$F_R = F\cos\alpha - \frac{MFR(R\cos\alpha - r)}{MR^2 + I_{CM}}$$

$$F_R = \frac{F\cos\alpha\,(MR^2 + I_{CM}) - MFR\,(R\cos\alpha - r)}{MR^2 + I_{CM}}$$

$$\boxed{F_R = \frac{F\,(I_{CM}\cos\alpha + MRr)}{MR^2 + I_{CM}}} \qquad (5)$$

Vamos a discutir los resultados obtenidos.

En primer lugar vemos que la a_{CM} tiene un factor en el numerador $(R\cos\alpha - r)$ que podría ser:

$R\cos\alpha - r = 0 \qquad$ (I)

$R\cos\alpha - r < 0 \qquad$ (II)

$R\cos\alpha - r > 0 \qquad$ (III)

I) Si $R\cos\alpha_c - r = 0 \implies \boxed{a_{CM} = 0 \quad (\gamma = 0)}$

$$\boxed{\cos\alpha_c = \frac{r}{R}}$$

α_c: ángulo crítico

y resulta $\boxed{F_R = F\cos\alpha_c = F\frac{r}{R}}$ (es hacia atrás como en el diagrama

Sigue

II) Si $R\cos\alpha - r < 0$

$$\cos\alpha < \frac{r}{R}$$

$$\underbrace{\cos\alpha < \cos\alpha_c \Longrightarrow \boxed{\alpha > \alpha_c}}$$

porque $\cos\alpha$ es una función decreciente.

III) Si $R\cos\alpha - r > 0$

$$\cos\alpha > \frac{r}{R}$$

$$\cos\alpha > \cos\alpha_c \Longrightarrow \boxed{\alpha < \alpha_c}$$

Tanto en el caso (II) como en el (III) la F_R está dada por la ec. (5). Vemos a partir de esta ecuación que el resultado es $F_R > 0$, es decir que el signo que le habíamos asignado en la ec. (1a) según nuestro diagrama de fuerzas, queda así en todos los casos, es decir la F_R es siempre hacia atrás.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: veremos en otros problemas que esto no siempre es así. Hay situaciones donde la fuerza de rozamiento puede ser hacia adelante o nula, mientras el cuerpo rueda sin deslizar.

Por otro lado, a partir de la ec. (5) podemos ver que en este problema la F_R no puede ser nula (mientras se cumple la condición de rodadura, que es la hipótesis de este problema). En efecto, si hacemos

$$F_R = \frac{F(I_{CM}\cos\alpha + MRr)}{MR^2 + I_{CM}} = 0$$

llegamos a un absurdo: $\cos\alpha = -\frac{2r}{R} < 0$ (ya que para este dispositivo $0 < \alpha < 90°$.

Cálculos de a_{CM} para $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$ (cilindro).

$$\boxed{a_{CM} = \frac{2F(R\cos\alpha - r)}{3MR}}$$

Si $\alpha = 0°$: $a_{CM} = \frac{2F(R-r)}{3MR} > 0$

El cuerpo se acelera hacia adelante $\overrightarrow{a_{CM}} \longrightarrow$

Si $\alpha = \alpha_c$: $a_{CM} = 0$

El cuerpo no se acelera.

Si $\alpha = 90°$: $a_{CM} = \frac{-2Fr}{3MR} < 0$

El cuerpo se acelera hacia atrás. $\overrightarrow{a_{CM}} \longleftarrow$

OTRA OBSERVACIÓN :

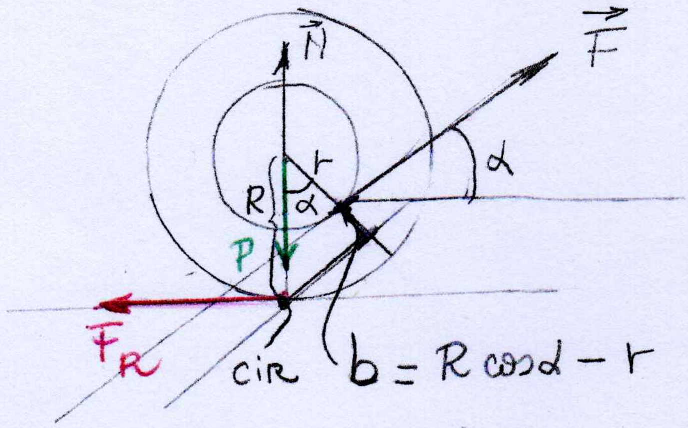
α_c se podría calcular igualando a cero las ecs. (1a) y (2), así:

$$\left.\begin{array}{ll} F\cos\alpha - F_R = 0 & (a_{CM} = 0) \\ -rF + RF_R = 0 & (\gamma = 0) \end{array}\right\} \text{ya que } a_{CM} = \gamma R$$

$$\frac{F_R}{F} = \frac{r}{R} \quad \text{y} \quad \frac{F_R}{F} = \cos\alpha_c$$

$$\therefore \boxed{\cos\alpha_c = \frac{r}{R}}$$

ÚLTIMA OBSERVACIÓN: este problema se puede resolver también planteando la ecuación de momentos (2), eligiendo $O \equiv ciR$, de la siguiente manera:



$$\vec{M}_{F,ciR} = I_{ciR} \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{b} \times \vec{F} = I_{ciR} \cdot \vec{\gamma}$$

$$(R\cos\alpha - r) \cdot F = I_{ciR}\,\gamma \quad (6$$

con $\gamma = \dfrac{a_{CM}}{R}$ (7. (cond. de rodadura)

La única fuerza que hace momento respecto del ciR es F.

$I_{ciR} = I_{CM} + MR^2$ (Teorema de Steiner) (8)

A partir de las ec. (6), (7) y (8) obtenemos el mismo resultado que antes (ec. (4)), pero por un camino más corto:

$$a_{CM} = \frac{FR(R\cos\alpha - r)}{MR^2 + I_{CM}}$$

22. Para el mismo yo-yo del problema anterior, suponga ahora que la superficie de contacto no presenta rozamiento. Considere que $m = 0,5\ kg$; $\alpha = 37°$; $r = 0,1\ m$ y $R = 0,2\ m$. *a)* Halle, para esta situación, el máximo valor de F para que el yo-yo permanezca en contacto con el piso. *b)* Considerando $F = 2\ N$, halle la aceleración angular y la aceleración del centro de masa.
Rta: *a)* $F_{max} = 8,33\ N$; *b)* $\gamma = 20\ s^{-2}$; $a_{cm} = 3,2\ m/s^2$

a) Para que el yo-yo permanezca en contacto con el piso, la $N > 0$.

Entonces: $\Sigma F_y = F \operatorname{sen} \alpha + N - P = 0$ (ec. 1b del probl. 21)

(Ver diagrama de fuerzas en el problema 21)

Si $N \to 0$, podemos calcular $F_{MÁX} = \dfrac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$

Resulta: $F_{MÁX} = \dfrac{5N}{\operatorname{sen} 37°} = 8,33N$.

b) Este problema es similar al problema 21, pero sin rozamiento. (Ver sistema de referencia en problema 21)

El sistema de ecuaciones queda así:

$F \cos\alpha = M a_{CM}$ (1) $\qquad F \operatorname{sen}\alpha + N - P = 0$

$rF = I_{CM}\,\gamma$ (2)

El cuerpo NO rueda sin deslizar.
Por lo tanto NO se cumple la condición de rodadura (a_{CM} y γ son independientes)

$(a_{CM} \neq \gamma R)$

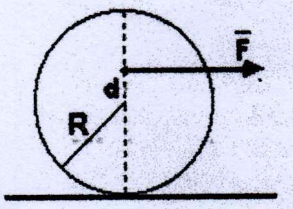
De la ec (1) resulta: $a_{CM} = \dfrac{2N \cdot \cos 37°}{0,5kg} = 3,2\ \dfrac{m}{s^2}$

De la ec (2) resulta: $\gamma = \dfrac{rF}{I_{CM}} = \dfrac{0,1m \cdot 2N}{\dfrac{0,5kg \cdot (0,2m)^2}{2}} = 20\ s^{-2}$

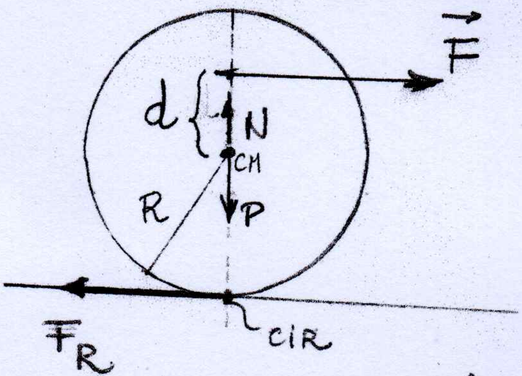
– Sobre un cilindro de masa m y radio R que se encuentra rodando sin resbalar apoyado en un plano horizontal con rozamiento, actúa una fuerza horizontal F a una distancia d sobre el centro de masa, como se muestra en la figura. Hallar:

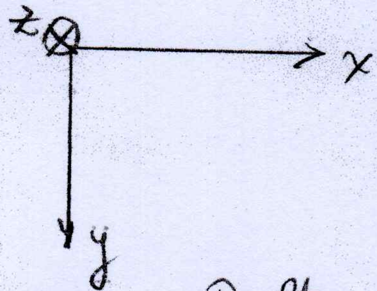
a) La aceleración del centro de masa del cilindro para d = 2 cm.
b) Para que valor de d, se anula la fuerza de rozamiento.
c) El valor de la fuerza de rozamiento si d = R.
d) Si d = R , para que valor de F el cilindro comenzará a rodar y deslizar.

Datos: m = 3 kg R = 0,1 m F = 15 N $\mu_e = 0{,}4$



En este problema, el cuerpo rueda sin resbalar.
Vamos a ver que la fuerza de rozamiento puede tener distinto sentido según sea el valor de $\frac{d}{R}$.





$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

Por Steiner: $I_{ciR} = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$

(En principio, no sabemos el sentido de la F_R. Proponemos que sea hacia atrás, y veremos a partir de las ecuaciones que vamos a resolver y de los datos numéricos si esto es así).

∴ SISTEMA DE ECUACIONES $\begin{cases} \sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} & (1) \\ \sum \vec{M}_{F,O} = I_O \cdot \gamma & (2) \\ \text{Cond. de vínculo} & (3) \end{cases}$

Si resolvemos desde el CM ($O \equiv CM$)	Si resolvemos desde el ciR ($O \equiv ciR$)
$\left.\begin{array}{l} P - N = 0 \\ F - F_R = Ma_{CM} \end{array}\right\} (1)$	$\left.\begin{array}{l} P - N = 0 \\ F - F_R = Ma_{CM} \end{array}\right\} (1)$
$dF + RF_R = I_{CM} \cdot \gamma \quad (2)$	$(R+d) \cdot F = I_{ciR} \cdot \gamma \quad (2)$
$\gamma R = a_{CM}$ (rueda sin deslizar) (3)	$\gamma R = a_{CM}$ (rueda sin deslizar) (3)

(a) Resolviendo el sist. de ecs. resulta:

$$\boxed{a_{CM} = \frac{2(R+d)F}{3MR}} \quad (4)$$

(Si F es hacia la derecha, el cilindro se acelera hacia la derecha)

Si $d = 2\,cm$, $\boxed{a_{CM} = 4\,\frac{m}{s^2}}$

$$F_R = F - M a_{CM}$$

$$F_R = F - \cancel{M}\left[\frac{2(R+d)F}{3\cancel{M}R}\right]$$

$$\boxed{F_R = \frac{F}{3R}(R - 2d)} \quad (5)$$

Si $d = 2\,cm$: $\boxed{F_R = 3N}$ La F_R es hacia la izquierda (como la escribimos en la ec. (1)).

(b) A partir del resultado obtenido para F_R (ec (5)) vemos que:

$$F_R = 0 = \frac{F}{3R}(R - 2d)$$

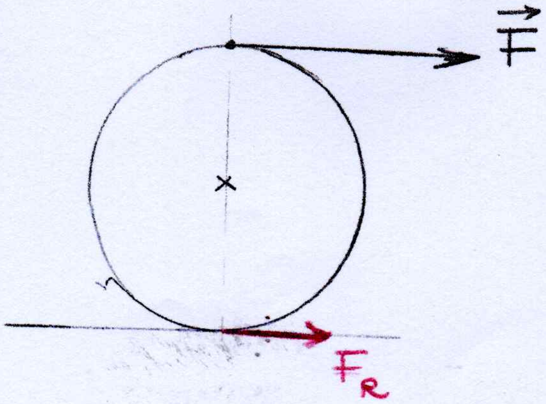
$$\text{Si } R - 2d = 0 \Longrightarrow \boxed{d = \frac{R}{2}}$$

(c) Si $d = R$; a partir de ec (5) resulta:

$$F_R = \frac{F}{3R}(R - 2R) = -\frac{F}{3}$$

cambió el sentido de la F_R (respecto de nuestras ecuaciones originales)

(Es decir, $\vec{F}$ y $\vec{F}_R$ tienen el mismo sentido)



d) Si $d = R$:

resulta $|F_R| = \frac{|F|}{3} \Rightarrow F = 3F_R$ (*)

Esta F_R es estática (el cilindro no desliza).

El valor máximo de la F_{R_e} según los datos del problema es: $F_{R_e MÁX} = \mu_e \cdot N$

$F_{R_e MÁX} = 0{,}4 \cdot 30N = 12N$

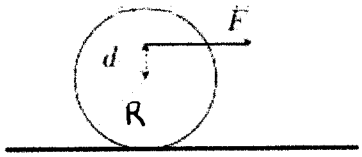
Por lo tanto según (*) $F_{MÁX} = 3F_{R_e MÁX}$

$F_{MÁX} = 3 \cdot 12N = 36N$

Esto significa que si la F se aplica a una distancia del $d = R$ no puede superar los 36N si queremos que el cilindro ruede sin deslizar.
Superado este valor, el cilindro comenzará a resbalar (y dejará de valer la relación $a_{CM} = \gamma R$) y rodar.

23. Sobre un cilindro de masa $m = 5\ kg$ y radio R, que se encuentra rodando sin resbalar sobre un plano horizontal con rozamiento, actúa una fuerza horizontal $F = 15\ N$ a una distancia d sobre el centro de masa, como se muestra en la figura. *a*) Halle Las expresiones de la aceleración del centro de masa y de la fuerza de rozamiento como función del cociente d/R. **¿Para qué valor de d/R se** anula la fuerza de rozamiento? *b*) Si la fuerza F puede tomar un valor arbitrario y el coeficiente de rozamiento estático entre el cilindro y el piso es $\mu_e = 0,4$, ¿cuál es el máximo valor de F para que el cilindro ruede sin deslizar? Exprese el resultado como función del cociente d/R.

NUEVO



Rta: *a*) $a_{cm} = 2\ (1 + d/R)\, m/s^2$; $F_{re} = 5\ \left(2\ \frac{d}{R} - 1\right)\ N$ positivo hacia la derecha. *b*) $F \leq \frac{60\ N}{|2d/R-1|}$

Respondemos las preguntas escribiendo los resultados en función de la relación $\frac{d}{R}$: (Ver resultados en problema 23)

De los ecs (1), (2) y (3) resulta:

Ec. (4):

a) $$a_{CM} = \frac{2\,(R+d)\,F}{3\,MR} = \frac{2.\ (1+\frac{d}{R})\cancel{R}.\cancel{15}N}{\cancel{3}.\ \cancel{5}kg.\cancel{R}}$$

$$\boxed{a_{CM} = 2\,(1+d/R)\ m/s^2}$$

Ec. (5):

$$F_R = \frac{F}{3R}\,(R - 2d) = \frac{15\,N}{3\,\cancel{R}}\,\cancel{R}\left(1 - 2\frac{d}{R}\right)$$

$$\boxed{F_R = 5\left(1 - 2\frac{d}{R}\right)\ N}$$

- Si $\left(1 - 2\frac{d}{R}\right) = 0 \Rightarrow d = \frac{R}{2}$ se anula F_R
- Si $\left(1 - 2\frac{d}{R}\right) < 0 \Rightarrow d > \frac{R}{2}$, F_R es hacia la derecha con $|F_R| = 5\left(2\frac{d}{R} - 1\right) > 0$
- Si $\left(1 - 2\frac{d}{R}\right) > 0 \Rightarrow d < \frac{R}{2}$, la F_R es hacia la izquierda

b) El máximo valor de $F_{MÁX}$ se obtiene para

$$F_R = F_{R_{e\,MÁX}} = \mu_e \cdot N$$

Como $N = P$: $F_{R_{e\,MÁX}} = \mu_e \cdot mg$

Reemplazamos en la ec (5):

$$\underbrace{\mu_e\, m g}_{F_R} = \frac{F_{MÁX}}{3R} (R - 2d)$$

$$0{,}4 \cdot 50\,N = \frac{F_{MÁX}}{3\cancel{R}} \cancel{R} \left(1 - 2\frac{d}{R}\right)$$

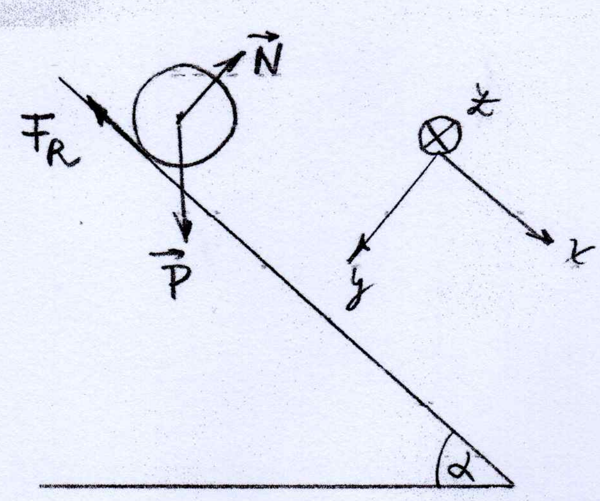
$$20\,N = \frac{F_{MÁX}}{3} \left(1 - 2\frac{d}{R}\right)$$

$$F_{MÁX} = \frac{60\,N}{1 - 2\frac{d}{R}}$$

Por lo tanto: $|F_{MÁX}| \leq \dfrac{60\,N}{\left|1 - 2\frac{d}{R}\right|}$

donde $\dfrac{d}{R} \neq \dfrac{1}{2}$

24 – Se deja caer un cilindro de masa m rodando sobre un plano inclinado. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre el cilindro y el plano es de 0,5, hallar el ángulo máximo que puede tener el mismo sin que el cilindro deslice sobre el plano.



DATOS:

$$I_{\substack{CIL\\CM}} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\mu_e = 0,5$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM} \rightarrow \begin{cases} -N + mg\cos\alpha = 0 & (1) \\ mg\,\text{sen}\,\alpha - F_{R_e} = ma_{CM} & (2) \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{F,CM} = I_{CM}\,\vec{\gamma} \longrightarrow F_R \cdot R = \frac{mR^2}{2}\cdot\gamma \quad (3)$$

$$\text{Rueda sin deslizar} \rightarrow a_{CM} = \gamma R \quad (4)$$

$$\text{Cuando } \alpha = \alpha_{MÁX} \Longrightarrow F_R = F_{R_{e\,MÁX}} = \mu_e \cdot N \quad (5)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (1) – (5):

$$\text{De (3), (4), (5) (1)}: \quad \mu_e \cancel{m} g\cos\alpha\,\cancel{R} = \frac{\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{2}\,\frac{a_{CM}}{\cancel{R}}$$

$$2\mu_e\cos\alpha\, g = a_{CM} \xrightarrow{\text{en}} \text{la ec. (2)}$$

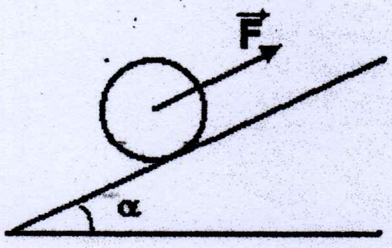
$$2\cos\alpha\,\mu_e\,\cancel{g} = \cancel{g}\,\text{sen}\,\alpha - \mu_e\,\cancel{g}\cos\alpha$$

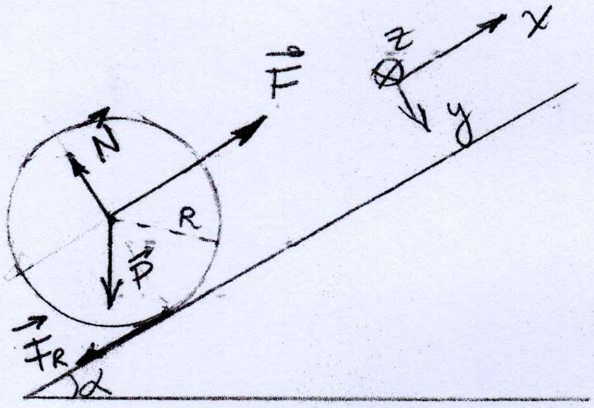
$$3\mu_e\cos\alpha = \text{sen}\,\alpha \Longrightarrow \text{tg}\,\alpha = 3\mu_e$$

$$\alpha_{MÁX} = \text{arctg}\,(3 \cdot 0,5)$$

$$\boxed{\alpha_{MÁX} \approx 56°}$$

25 – Se tira de un cilindro de masa 2 kg que se encuentra sobre un plano inclinado con rozamiento por médio de una cuerda con una fuerza F como indica la figura. Hallar los valores de F y de la fuerza de rozamiento sabiendo que el cilindro asciende rodando sin resbalar con una aceleración de 2 m/s².
α = 37º





DATOS:
$m = 2\,kg$; $\alpha = 37°$
$a_{CM} = 2\,\frac{m}{s^2}$
ASCIENDE RODANDO SIN RESBALAR
$I_{CM_{CIL}} = \frac{mR^2}{2}$

$\Sigma \vec{F} = m\,a_{CM} \longrightarrow F - F_R - mg\,sen\,\alpha = m\,a_{CM}$ (1a)

$mg\cos\alpha - N = 0$ (1b)

$\Sigma \vec{M}_{F,CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \longrightarrow R \cdot F_R = \frac{mR^2}{2} \cdot \gamma$ (2)

RUEDA SIN DESLIZAR $\longrightarrow a_{CM} = \gamma \cdot R$ (3)

De (1a), (2) y (3), resulta el siguiente sist. de ecuaciones:

$F - F_R - mg\,sen\,\alpha = m\,a_{CM}$

$\cancel{R} \cdot F_R = \frac{mR^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{a_{CM}}{\cancel{R}}$

OBSERVACIÓN: R no es dato, pero se simplifica

S. m. a m.

$F - mg\,sen\,\alpha = a_{CM}\left(m + \frac{m}{2}\right)$

$$\boxed{F = \frac{3}{2}\,m\,a_{CM} + mg\,sen\,\alpha}$$

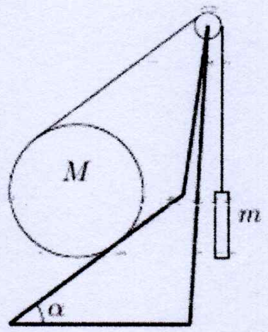
$F = \left(\frac{3}{2} \cdot 2\,\frac{m}{s^2} + 10\,\frac{m}{s^2} \cdot sen\,37°\right) \cdot 2\,kg$

$$\boxed{F = 18\,N}$$

$F_R = \frac{m}{2} \cdot a_{CM}$

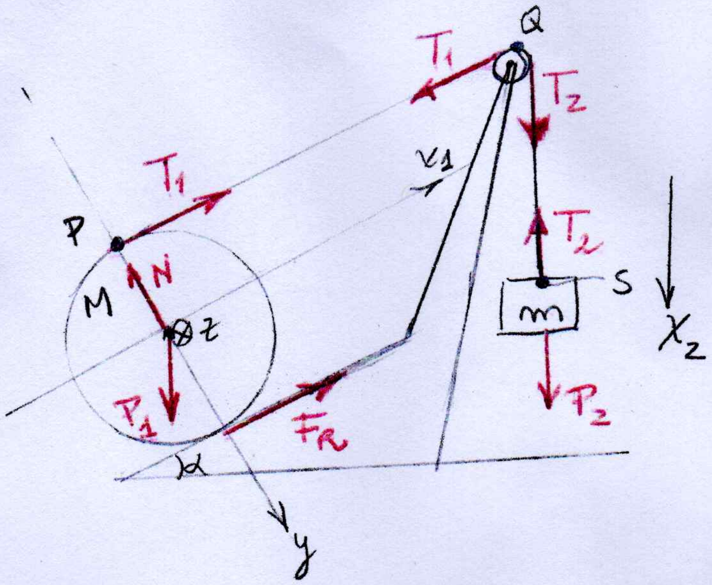
$F_R = \frac{2\,kg \cdot 2\,m/s^2}{2} \Longrightarrow \boxed{F_R = 2\,N}$ (hacia atrás)

26. Un cilindro de masa $M = 1\ kg$ tiene enrollada una cinta delgada inextensible y de masa despreciable que pasa por una polea ideal y de cuyo otro extremo pende un cuerpo de masa $m = 2\ kg$. El cilindro está subiendo, rodando sin deslizar, por un plano de inclinación $\alpha = 30°$ respecto de la horizontal. Halle: *a*) las aceleraciones del centro de masa del cilindro y del cuerpo colgante; *b*) el valor de la fuerza de rozamiento, indicando su sentido; *c*) la tensión en la cuerda.



Rta.: *a*) $a_{cm} = 3,68\ m/s^2$; $a = 7,36\ m/s^2$ *b*) $F_{re} = 3,4\ N$ hacia arriba del plano *c*) $T = 5,28\ N$.

RUEDA SIN RESBALAR.



OBSERVACIÓN: ¿Por qué dibujé la F_R hacia arriba? Según el resultado del Probl. 24, como T_1 está aplicada en el punto P del cilindro, esperamos que este sea el sentido de F_R. Según el sist. de ref. elegido, F_R tendrá signo positivo en la ecuación. (Si me equivoco, encontraré que F_R es negativa, es decir en sentido contrario al dibujado en el diagrama)

(*) Siendo la polea de masa despreciable y la soga inextensible y de masa despreciable, tenemos: $T_1 = T_2 \equiv T$

Escribimos las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo.

Cuerpo m: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_m \Longrightarrow mg - T = m a_m$ (1)

Cilindro M: $\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} \Longrightarrow \begin{cases} T + F_R - Mg\,\text{sen}\alpha = M a_{CM} & \text{(2a)} \\ mg\cos\alpha - N = 0 & \text{(2b)} \end{cases}$

$$\sum \vec{M}_{F,CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \Longrightarrow RT - RF_R = \frac{MR^2}{2} \cdot \gamma \quad (3)$$

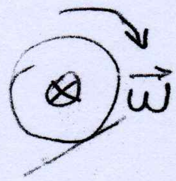
Cond. de vínculo

- Como el cilindro rueda sin deslizar

$$v_{CM} = \omega R \xrightarrow{\text{derivando}} \boxed{a_{CM} = \gamma R}$$

- $a_m = a_Q = a_P$

(de la polea) (del cilindro)



Por otro lado: para el cilindro

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

$$\vec{v}_P = v_{CM}\,\hat{\imath} + \omega R\,\hat{\imath}$$

$$\vec{v}_P = \omega R\,\hat{\imath} + \omega R\,\hat{\imath} = 2\omega R\,\hat{\imath}$$

$$\vec{v}_P = 2\,\vec{v}_{CM}$$

Derivando esta última relación, respecto del t, tenemos:

$$\boxed{\vec{a}_P = 2\,\vec{a}_{CM}}$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente relación entre las aceleraciones de los cuerpos:

$$\boxed{a_m = 2\,a_{CM} = 2\gamma R} \quad (4)$$

Escribimos el sist. de ecs. (1), (2a), (3), (4):

$$\left.\begin{aligned} mg - T &= m a_m \\ T + F_R - Mg\,\text{sen}\,\alpha &= M a_{CM} \\ RT - RF_R &= \frac{MR^2}{2}\cdot\gamma \\ a_m = 2a_{CM} &= 2\gamma R \end{aligned}\right\}$$

escribimos todas las aceleraciones en función de la a_{CM} del cilindro.

→

$$mg - T = m\,2a_{CM} \qquad (1')$$

$$T + F_R - Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = M\,a_{CM} \qquad (2')$$

$$\cancel{R}T - \cancel{R}F_R = \frac{MR^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{a_{CM}}{\cancel{R}} \qquad (3')$$

(sumo miembro a miembro)

$$mg + T - Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = a_{CM}\left(2m + \frac{3}{2}M\right)$$

De ec. (1') podemos despejar "T" y reemplazarlo en esta última igualdad. $(T = mg - m\,2a_{CM})$

$$mg + mg - 2m\,a_{CM} - Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = a_{CM}\left(2m + \frac{3}{2}M\right)$$

$$2mg - Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = a_{CM}\left(2m + \frac{3}{2}M + 2m\right)$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{2mg - Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha}{4m + \frac{3}{2}M}}$$

Reemplazamos los datos numéricos:

(a)

$$a_{CM} = \frac{40\,N - 5\,N}{8\,kg + \frac{3}{2}\,kg} \longrightarrow \boxed{a_{CM} = 3{,}684\,\frac{m}{s^2}}$$

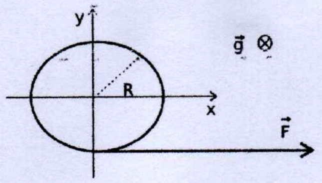
$$\boxed{a_m = 2\,a_{CM} = 7{,}368\,\frac{m}{s^2}}$$

(c) $\boxed{T =} \; mg - m\,a_m = 20\,N - 14{,}7368\,N = \boxed{5{,}26\,N}$

(b) $\boxed{F_R =} \; T - \frac{M a_{CM}}{2} = 5{,}26\,N - \frac{3{,}684\,N}{2} = \boxed{3{,}42\,N}$

F_R dio positivo, es decir, el signo que le pusimos en la ec. (2) es correcto (es hacia arriba)

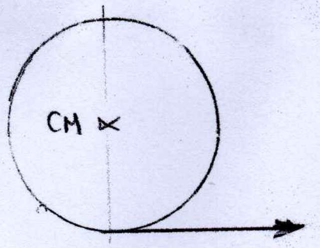
28. Un cilindro de masa m y radio R se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento con su base en contacto con la misma. Se tira del cilindro con una fuerza F mediante una cuerda ideal arrollada al mismo. Suponiendo que el sistema parte del reposo en $t = 0$, halle: *a*) las expresiones de la velocidad del centro de masa y de la velocidad angular como funciones del tiempo; *b*) las coordenadas del centro instantáneo de rotación O en el tiempo t, tomando como origen el centro del cilindro. *c*) Repita los puntos anteriores considerando ahora un cilindro hueco (anillo) de la misma masa y el mismo radio.

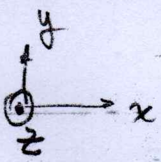


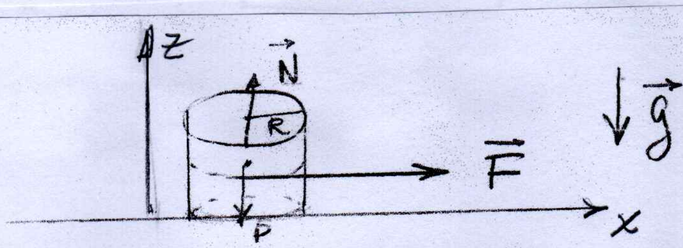
Rta.: *a*) $v_{cm}(t) = \frac{F}{m}\, t$; $\Omega(t) = \frac{2\,F}{m\,R}\, t$; *b*) $x_o = 0$, $y_o = R/2$ para todo t .
c) $v_{cm}(t) = \frac{F}{m}\, t$; $\Omega(t) = \frac{F}{m\,R}\, t$; $x_o = 0$, $y_o = R$ para todo t.

a) (Visto desde arriba

$\otimes \vec{g}$







SIN ROZAMIENTO.

$\vec{v}_{CM}(t=0) = 0$

$$\Sigma \vec{F} = m\, a_{CM} \longrightarrow \begin{array}{l} F = m\, a_{CM} \\ N - P = 0 \end{array} \Longrightarrow a_{CM} = \frac{F}{m}$$

$$\Sigma \vec{M}_{F,\,CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \longrightarrow R F = I_{CM} \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{RF}{I_{CM}}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \gamma \cdot t$$

$$\boxed{\omega(t) = \frac{RF}{I_{CM}} \cdot t}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\, a_{CM} \cdot t^2$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{2}\, \frac{F}{m}\, t^2}$$

$$v_{CM}(t) = a_{CM} \cdot t \qquad (v_0 = 0)$$

$$\boxed{v_{CM}(t) = \frac{F}{m} \cdot t}$$

b) Coordenadas del CIR

$$\vec{v}_{CIR} = 0 = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM \to CIR}$$

$$\vec{v}_{CM} = -\,\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM \to CIR} = \vec{r}_{CM \to CIR} \times \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{F}{m} \cdot t\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{w} = \frac{RF}{I_{CM}} \cdot t\,\hat{k}$$

$$\vec{r}_{CM \to ciR} = x_{CM}\,\hat{\imath} + y_{CM}\,\hat{\jmath}$$

$$0\,\hat{\jmath} + \frac{F}{m} \cdot \cancel{t}\,\hat{\imath} = x_{ciR} \frac{RF}{I_{CM}} \cdot \cancel{t}\,(-\hat{\jmath}) + y_{ciR} \frac{RF\cancel{t}}{I_{CM}}\,\hat{\imath}$$

$$\vec{r}_{CM \to ciR} \begin{cases} x_{ciR} = 0 & \text{para todo } t \\ y_{ciR} = \dfrac{I_{CM}}{Rm} & \text{para todo } t \end{cases}$$

- Si $I_{CM} = \frac{mR^2}{2}$ (CILINDRO)

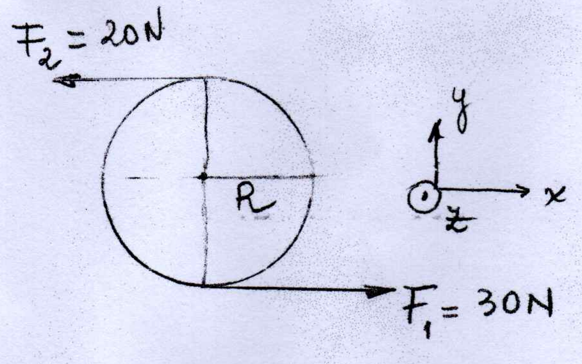
$$\begin{cases} v_{CM}(t) = \dfrac{F}{m} \cdot t \\ \omega(t) = \dfrac{\cancel{R}F}{m\frac{R^{\cancel{2}}}{2}}\, t = \dfrac{2F}{mR} \cdot t \\ \left.\begin{array}{l} x_{ciR} = 0 \\ y_{ciR} = \dfrac{\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{2\,\cancel{R}\cancel{m}} = \dfrac{R}{2} \end{array}\right\} \forall t \end{cases}$$

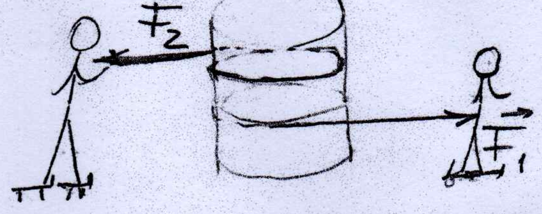
- Si $I_{CM} = mR^2$ (ARO)

$$\begin{cases} v_{CM}(t) = \dfrac{F}{m} \cdot t \\ W(t) = \dfrac{F}{mR} \cdot t \\ \left.\begin{array}{l} x_{ciR} = 0 \\ y_{ciR} = R \end{array}\right\} \forall t \end{cases}$$

29. Un cilindro homogéneo de masa $m = 100\ kg$ y radio $R = 0,5\ m$ se apoya sobre su base sobre una superficie de hielo. Dos patinadores arrollan cuerdas ideales alrededor del cilindro en el mismo sentido. Cada uno de ellos tira de su cuerda y patina, partiendo del reposo, alejándose de modo que ejercen fuerzas de 30 N y 20 N en la misma dirección y sentido contrario. Exprese: *a*) la velocidad del centro de masa del cilindro como función del tiempo; *b*) la velocidad angular como función del tiempo; *c*) la distancia d entre el eje instantáneo de rotación del cilindro y su eje baricéntrico.
Rta.: *a*) $v_{CM} = 0,1\ m/s^2\ t$; *b*) $\Omega = 2\ s^{-2}\ t$; *c*) $d = 5\ cm$.

SIN ROZAMIENTO CON LA SUPERFICIE.





Parte del reposo.

$$I_{CM_{disco}} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{CM} \longrightarrow F_1 - F_2 = m a_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{F_1 - F_2}{m}$$

$$\Sigma \vec{M}_{F,CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \longrightarrow F_1 \cancel{R} + F_2 \cancel{R} = \frac{mR^{\cancel{2}}}{2} \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{(F_1 + F_2) \cdot 2}{mR}$$

$$a_{CM} = \frac{30N - 20N}{100kg} = 0,1 \frac{m}{s^2}$$

$$\gamma = \frac{(30N + 20N) \cdot 2}{0,5m \cdot 100kg} = 2 s^{-2}$$

a) $v_{CM} = v_{0_{CM}} + a_{CM} \cdot t$

$$\boxed{v_{CM} = 0,1 \frac{m}{s^2} \cdot t}$$

$x_{CM}(t) = \underset{0}{x_{0CM}} + \overset{0}{v_{0CM}} \cdot t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2$

$$\boxed{x_{CM}(t) = 0,05 \frac{m}{s^2} \cdot t^2}$$

b) $\omega(t) = \omega_0 + \gamma \cdot t$

$$\boxed{\omega(t) = 2 s^{-2} \cdot t}$$

c) $$\vec{v}_{eir} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM \to eir}$$

$$0 = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM \to eir}$$

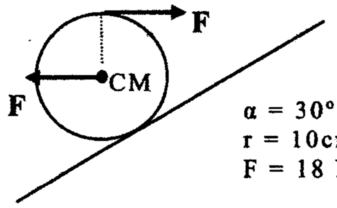
$$|v_{CM}| = |\omega| \, |r_{CM \to eir}|$$

$$|r_{CM \to eir}| = d = \frac{|v_{CM}|}{|\omega|} = \frac{0{,}1 \, m/s}{2 \, s^{-2}}$$

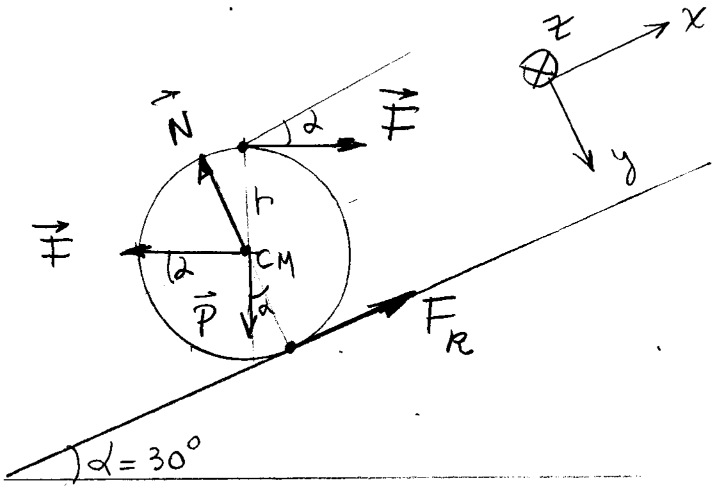
$$\boxed{d = 0{,}05 \, m = 5 \, cm}$$

30

— Un cilindro homogéneo de masa m = 3 kg apoyado sobre un plano inclinado tiene aplicada una cupla (par de fuerzas de igual módulo y dirección, no colineales y de sentidos opuestos como indica la figura). Hallar
a) el mínimo coeficiente de roce estático para que suba rodando sin deslizar
b) la aceleración del CM en ese caso.



$\alpha = 30°$
$r = 10cm$
$F = 18\ N$



$r = 10\,cm = 0{,}1\,m$
$F = 18N$

SUBE RODANDO SIN DESLIZAR.

$$\Sigma\vec{F} = m a_{CM} \longrightarrow \cancel{F\cos\alpha + F\cos\alpha} - mg\,sen\,\alpha + F_R = m a_{CM} \quad (1a)$$

$$\longrightarrow mg\cos\alpha - N \cancel{+ F\,sen\,\alpha + F\,sen\,\alpha} = 0 \quad (1b)$$

$$\Sigma\vec{M}_{F,CM} = I_{CM}\cdot\vec{\gamma} \longrightarrow -rF_R + rF = \frac{mr^2}{2}\cdot\gamma \quad (2)$$

Rueda sin deslizar $\longrightarrow$ $a_{CM} = \gamma\, r$ (3)

De (1a), (2) y (3): $\boxed{a_{CM} = \frac{2(F - mg\,sen\,\alpha)}{3m}}$

Reemplazando los datos numéricos: $\boxed{a_{CM} = 0{,}66\,\frac{m}{s^2}}$

La F_R es estática. En el caso que nos piden debe ser la máxima: $F_{R_e} = \mu_e \cdot N$.

$\longrightarrow$

De la ec (1b): $N = mg\cos\alpha$

$$F_{R_e} = \mu_e \cdot (mg\cos\alpha) \qquad (4)$$

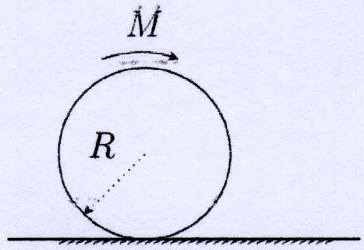
Reemplazando (4) en (1a):

$$-mg\,\text{sen}\,\alpha + \mu_e\, mg\cos\alpha = m\,a_{CM}$$

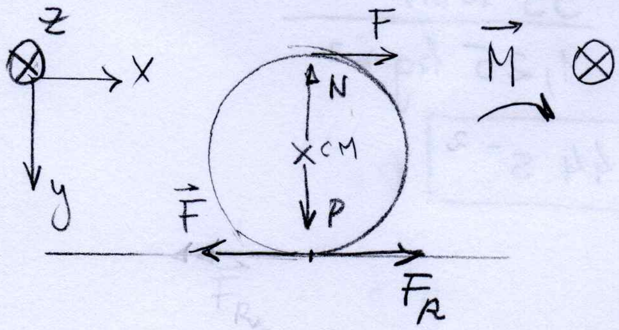
$$\mu_e = \frac{m\,a_{CM} + mg\,\text{sen}\,\alpha}{mg\cos\alpha}.$$

Con los datos numéricos resulta: $\boxed{\mu_e = 0{,}65}$

31. Un cilindro de radio $R = 0,5\ m$ y masa $m = 10\ kg$, se encuentra en contacto con un plano horizontal con rozamiento. *a*) Calcule el máximo valor del momento M que puede aplicársele al cilindro mediante una cupla para que ruede sin resbalar. *b*) Suponiendo ahora que el momento aplicado mediante la cupla es $M = 80\ Nm$ y que es mayor que el obtenido en el punto anterior, calcule los valores de la aceleración angular y de la aceleración del centro de masa del cilindro. Datos: $\mu_e = 0,8$; $\mu_c = 0,5$.



Rta: *a*) $M_{max} = 60\ Nm$ *b*) $a_{cm} = 5\ m/s^2$; $\gamma = 44\ s^{-2}$



a) Rueda sin resbalar: $a_{CM} = \gamma R$ (1)

$$\vec{M}_{MÁX,CM} + \vec{M}_{F_{ReMÁX},CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \quad (2)$$

$$+ F_{ReMÁX} = m\, a_{CM} \quad (3)$$

$$F_R = F_{ReMÁX} = \mu_e \cdot N \quad (4)$$

$$F_{ReMÁX} = \mu_e m g$$

De (3): $a_{CM_{MÁX}} = \frac{F_{ReMÁX}}{m}$

$$a_{CM_{MÁX}} = \mu_e g$$

$$\gamma_{MÁX} = \frac{\mu_e g}{R}$$

$$M_{MÁX} - F_{ReMÁX} \cdot R = \frac{mR^2}{2} \cdot \gamma$$

$$\underline{R F_{ReMÁX} = m \gamma R^2}$$

$$M_{MÁX} = m \gamma \frac{3}{2} R^2$$

$$M_{MÁX} = m \cdot \frac{\mu_e g}{\cancel{R}} \cdot \frac{3}{2} R^{\cancel{2}}$$

$$M_{MÁX} = 10kg \cdot 0,8 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 0,5m$$

$$\boxed{M_{MÁX} = 60\ Nm}$$

b) Si $M = 80\,Nm > M_{MÁX}$ para que ruede sin deslizar, entonces $a_{CM} \neq \gamma R$ (1')

$$80\,Nm - F_{R_D} \cdot R = I_{CM} \cdot \gamma \quad (2')$$

$$F_{R_D} = m\, a_{CM} \quad (3')$$

con $F_{R_D} = \mu_D \cdot mg$ (4')

De (4'): $F_{RD} = 0,5 \cdot 100\,N = 50\,N$

$(N = mg = 100\,N)$

De (3'): $\boxed{a_{CM} = \dfrac{F_{RD}}{m} = \dfrac{50\,N}{10\,kg} = 5\,\dfrac{m}{s^2}}$

De (2'): $80\,Nm - 50\,N \cdot 0,5\,m = \dfrac{10\,kg\,(0,5\,m)^2}{2} \cdot \gamma$

$$\gamma = \frac{55\,Nm}{1,25\,kg\,m^2}$$

$$\boxed{\gamma = 44\,s^{-2}}$$