Función compuesta e implícita

Unidad VI

Composición de funciones

Repaso de análisis I

- Sea f: Dom(f) $\rightarrow \mathbb{R}$ y g: Dom(g) $\rightarrow \mathbb{R}$, si Im(f) y Dom(g) tienen intersección no vacía, se puede definir una sola función que a cada elemento de Dom(f) le haga corresponder una imagen en Im(g).
- Es condición necesaria, para que esto suceda, que el Im(f) $\subseteq$Dom(g).
- A esta única función se la llama <u>función compuesta de f con g</u> y se la anota gof
- gof(x)=g(f(x)).
- Regla de la cadena: si f derivable en x_0 y g derivable en f(x_0), entonces gof derivable en x_0 y (gof)´(x_0)= g´(f(x_0)). f´(x_0).

Generalización a todo tipo de funciones

- Las funciones generalizadas sólo pueden componerse si la imagen de la primera función que se aplica está incluida en el dominio de la segunda.

- Sea $\overline{\mathrm{G}}: \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\overline{\mathrm{F}}: \mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ (con n≥1, m≥1, p≥1) y $\mathrm{Im}\, \bar{G} \subseteq$ B, entonces se puede definir $\overline{\mathrm{F}}\mathrm{o}\overline{\mathrm{G}}: \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $\overline{\mathrm{F}}\mathrm{o}\overline{\mathrm{G}}$(X)=$\overline{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{G}}(\mathrm{X}))$.

01) Dadas f y g, analice en cada caso si quedan definidas $f \circ g$ y $g \circ f$. Además, para cada función generada mediante la composición, determine su dominio natural y obtenga su matriz jacobiana en algún punto interior al mismo.

b) $f(x,y) = x\sqrt{y}$, $\overline{g}(u) = (u,\ 2-u)$.

c) $\overline{f}(x,y) = (x-y\,,\ \sqrt{x+y}\,)$, $\overline{g}(t) = (2-t,\ t-3)$.

Generalización regla de la cadena

Sea $\overline{\mathrm{G}}: \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\overline{\mathrm{F}}: \mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ (con n≥1, m≥1, p≥1) y $\mathrm{Im}\ \bar{G} \subseteq$ B, $P_0 \in$ A . Si $\overline{\mathrm{G}}$ diferenciable en P_0 y $\overline{\mathrm{F}}$ diferenciable en $\overline{\mathrm{G}}(P_0)$, entonces $\overline{\mathrm{F}}\mathrm{o}\overline{\mathrm{G}}$ diferenciable en P_0 y además

$$\mathrm{D}(\overline{\mathrm{F}}\mathrm{o}\overline{\mathrm{G}})_{(\mathrm{P}_0)} = \mathrm{D}\overline{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{G}}_{(\mathrm{P}_0)}).\mathrm{DG}_{(\mathrm{P}_0)}$$

Ejemplo 6. Dadas $\vec{G}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{G}(x, y) = (G_1, G_2) = (x^2 + 1; y^2)$ y

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(u, v) = (F_1, F_2, F_3) = (u + v, u, v^2)$ se pide calcular la matriz diferencial de

$\vec{F} \circ \vec{G}$ en (1;1)

03) Si $z = 2uv - 2\sqrt{v-u}$ con $\begin{cases} u = x - y^2 \\ v = x + 2xy - 1 \end{cases}$, resulta $z = h(x, y)$.

a) Reconozca las funciones f y g que generan h como $h = f \circ g$.
b) Calcule la derivada direccional de h en (2,1), en la dirección que va hacia el (5,5).
c) Sea n_0 la recta normal a la gráfica de h en $(2,1,z_0)$, exprese n_0 como la intersección de dos superficies.
d) Analice si la recta n_0 mencionada en "c)" tiene algún punto en común con el eje z.

5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ en $(0,1,z_0)$ cuando $f = H \circ \vec{G}$ con $H(u,v) = u - v^2$ y $\vec{G}(x, y) = (x-y; \sin(x/y))$.

14. Sabiendo que el plano tangente al gráfico de f en $(2,1,z_0)$ es $x+y-z=3$ y que $\bar{g}$ es un campo C^1 con $\bar{g}(0,1)=(2,1)$ y $D\bar{g}(0,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, determinar una ecuación para la recta normal al gráfico de $h=f\circ\bar{g}$ en $(0,1,z_0)$.

Red orientada

Es posible derivar utilizando una red orientada. Esta red puede armarse para cualquier composición de funciones que pueda hacerse y facilita la visualización de la vinculación que existe entre las variables, ya que muestra cuáles son las variables independientes de la composición, y a través de qué variables intermedias se llega a ellas.

$$\text{si } w = x + 2y + z^2 \text{ con } \begin{cases} x = \dfrac{r}{s} \\ y = r^2 + \ln s \\ z = 2r \end{cases}$$

04) Dada $w = u^3 - x v^2$ con $u = x\sqrt{y - x} \wedge v = 2x + y^2$, resulta $w = f(x, y)$. Aplicando la regla de derivación de funciones compuestas (sin realizar la composición), calcule $f'_x(0,1)$.

4. Dada $w = e^{x-y} - z^2 y + x$ con $x = u - v$; $y = u + u^3 \ln(v-1)$; $z = u\,v$, hallar la dirección de máxima derivada direccional de $w = w(u,v)$ en $(u,v) = (1;2)$ y el valor de dicha derivada máxima.

07) Dada $h(x, y) = f(2x/y) - f(y/x)$ con $f \in C^1$, verifique que $x\,h'_x + y\,h'_y = 0$ para todo punto (x, y) tal que $xy \neq 0$.

24) Sea $f \in C^1$ con $\nabla f = (1,-1)$ constante, halle g derivable tal que $h(x) = f(\underbrace{x\,g(x)}_{u}, \underbrace{g(x)}_{v})$ sea constante; suponga que la gráfica de g pasa por (3,1).

Funciones definidas implícitamente

Repaso de Análisis I

- Llamamos <u>explícitas</u> a aquellas funciones en que la variable considerada dependiente está explícitamente despejada, de tal forma que, al asignar valores a la variable independiente es inmediato obtener su imagen $y = f(x)$.

  Ej: $y= 3x^2 +5$

- Llamamos <u>implícitas</u> a aquellas en las que la variable dependiente no está despejada.

  Ej: $xy^2+3x^3y+2y^3=5$

Para campos escalares

- En campos escalares, para dos variables independientes f está definida en forma explícita si $z = f(x, y)$; para n variables: $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$
  Ej: $z=3xy-y^2$

- En forma implícita, se escribe como $g(x,y,z)=0$, o como $g(x_1,x_2,\dots,x_n ,y)=0$
  Ej: $x^2+3y^2+2z^2x=1$

Formalmente en $\mathbb{R}^2$

Sea la ecuación $F(x; y) = C$ que se satisface en $P_0(x_0; y_0)$

Dicha ecuación define implícitamente $y = y(x)$ en un entorno de $P_0(x_0; y_0)$,

si y sólo si $\forall x: x \in E(x_0) \Longrightarrow F[x; y(x)\,] = C$

Formalmente en $\mathbb{R}^3$

Sea la ecuación $F(x;y;z) = C$ que se satisface en $P_0(x_0;y_0;z_0)$

Dicha ecuación define implícitamente $\mathrm{z} = z(x,y)$ en un entorno de $P_0(x_0;y_0;z_0)$,

si y sólo si $\forall(x,y):(x,y) \in E(x_0,y_0) \Rightarrow F[x;y;\mathrm{z(x,y)}] = C$

Observación: se puede generalizar a más variables

Teorema de Cauchy – Dini caso particular n=2

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, $P_0 \in A$ y la ecuación $F(x;y) = C$.

Si:
1) $F(P_0) = C$
2) F es C^1 en un entorno de P_0
3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0) = F'_y(P_0) \neq 0$

Entonces $\exists y = y(x)$, $E(x_0) \rightarrow E(y_0)$ definida implícitamente por $F(x;y)$.

Además $y(x)$ es C^1 en x_0 y se cumple: $\boxed{y'(x_0) = -\dfrac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}}$

17. Dada la ecuación $e^y + y^2 - 2y - x^2 - 1 = 0$

a) Averiguar si existe la función y=f(x) definida implícitamente en un entorno del origen. En caso afirmativo, hallar su derivada y la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

b) Idem para x=g(y).

Demostración de la fórmula de la derivada:

F(x,y(x))=C

Derivamos miembro a miembro y evaluamos en x_0 $\quad F'_x(P_0) + F'_y(P_0)\, y'(x_0) = 0$

$F'_y(P_0)\, y'(x_0) = -F'_x(P_0)$

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}$$

$$\begin{tikzcd} & x & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

Teorema de Cauchy – Dini caso particular n=3

Sea F: $A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto y $P_0 \in A$. Consideramos el conjunto de nivel C de F, es decir: F(x;y;z) = C

Si se cumple que:

1) $F(P_0)=C$ 2) F es C^1 en $E(P_0)$ 3) $F'_z\ (P_0) \neq 0$

Entonces:

- i) Entonces $\exists z = \varphi(x; y),\ E(x_0; y_0) \rightarrow E(z_0)$ definida implícitamente por $F(x; y; z)$=C.
- ii) φ es C^1 en $(x_o;y_o)$, siendo

$$\varphi'_x\ (x_0, y_0) = z'_x\ (x_0, y_0) = -\frac{F_{x\ (\bar{P}_0)}}{F_{z(\bar{P}_0)}} \qquad \varphi'_y\ (x_0, y_0) = z'_y\ (x_0, y_0) = -\frac{F_{y\ (\bar{P}_0)}}{F_{z(\bar{P}_0)}}$$

17) Dada $z = u + v\,e^{u-v}$ con $(u,v) = (f(x,y),\, y^2)$ resulta $z = h(x,y)$. Halle las direcciones $\breve{r}$ tales que $h'((2,1),\, \breve{r}) = 0$, si la función f queda definida implícitamente mediante la ecuación $2y - ux - \ln(u) = 0$.

11) La ecuación $z^3 + 2xz + yz - x = 0$ define $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(1,-2)$.

a) Determine $\nabla f(1,-2)$.

b) Halle ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la gráfica de f en $(1,-2,z_0)$.

c) Calcule las derivadas direccionales de f en $(1,-2)$, en las direcciones que forman ángulos de $\pi/3$ y de $-\pi/3$ medidos en sentido trigonométrico respecto de x^+.

10) La ecuación $xy - e^{z-x} = \ln(z)$ define implícitamente $z = f(x,y)$, halle una expresión lineal que permita aproximar los valores de f en un entorno del punto $(1,1)$.

21) Calcule la derivada direccional máxima de $h = f \circ \overline{g}$ en el punto $(1,1)$ cuando $f(u,v)$ queda definida por $z - u^2 + v^2 + \ln(v+z) = 0$, siendo $\overline{g}(x,y) = (xy^2,\; y - x^2)$.

Rectas tangente y normal a una curva de nivel

- Sea f: $A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A abierto, $P_0 \in A$ y f diferenciable en P_0. Consideramos el conjunto de nivel k de f, es decir: f(x;y) = k tal que P_0 pertenece a dicho conjunto de nivel. Si $\vec{\nabla} f(P_0) \neq \vec{0}$, entonces $\vec{\nabla} f(P_0)$ es perpendicular a la curva f(x,y)=k en P_0

- Ecuación de la recta normal: $X = P_0 + \lambda \vec{\nabla} f(P_0)$

demostración

- Ecuación de la recta tangente: $X = P_0 + \lambda\, (-f'_y(P_0), f'_x(P_0))$

Geogebra/ Ejemplo

Plano tangente y recta normal a una superficie de nivel

- Sea f: $A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, $P_0 \in A$ y f diferenciable en P_0. Consideramos el conjunto de nivel k de f, es decir: f(x;y,z) = k tal que P_0 pertenece a dicho conjunto de nivel. Si $\vec{\nabla} f(P_0) \neq \vec{0}$, entonces $\vec{\nabla} f(P_0)$ es perpendicular a la superficie f(x,y,z)=k en P_0

demostración

- Ecuación del plano tangente: $(X - P_0) . \vec{\nabla} f(P_0) = 0$

- Ecuación de la recta normal: $X = P_0 + \lambda \vec{\nabla} f(P_0)$

Geogebra

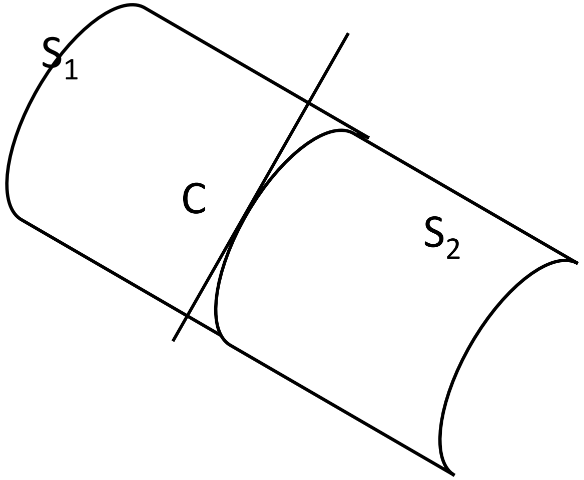
22. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie definida por $x^2yz^3-2xz+4zy=7$ en $(1,-1,-1)$.

12) Halle los puntos del hiperboloide de una hoja de ecuación $2x^2-2y^2+z^2=1$ donde el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $z=x-y$.

13) Dada $f(x,y,z)=8x^2-2xy$, calcule la derivada de f en (3,1,2), en la dirección a la normal "interior" a $x^2+y^2+z^2=14$ en dicho punto.

24. Hallar los puntos de la superficie $x^2+y^2+3z^2=29$ cuyos planos tangentes son perpendiculares a la recta $(x,y,z)=(2,0,6)+\lambda\,(1,4,6)$.

Recta tangente y plano normal a una curva definida como intersección de superficies



$\bar{n}_1$ el vector normal del plano tangente a S_1.

$\bar{n}_2$ el vector normal del plano tangente a S_2 .

Vector tangente a la curva perpendicular a $\bar{n}_1$
Vector tangente a la curva perpendicular a $\bar{n}_2$

Ecuación recta tangente: $X = P_0 + \lambda(\bar{n}_1 \mathrm{x}\, \bar{n}_2)$

Ecuación plano normal: $(X - P_0).(\bar{n}_1 \mathrm{x}\, \bar{n}_2) = 0$

18) Halle la ecuación cartesiana del plano normal a la curva C en $\overline{A} = (2,1,-4)$ si se sabe que los puntos de C pertenecen a la superficie de ecuación $z = x\,y - 3\,x$, y que la proyección de C sobre el plano xy es la parábola definida por $y = x^2 - 3$ con $z = 0$.

16) Siendo C la curva intersección de las superficies: $x^2 - y^2 = 12$ y $z = x + y^2$, analice si la recta tangente a C en $(4, 2, z_0)$ corta a la superficie cilíndrica de ecuación $y = x^2$.(#)