DERIVABILIDAD

Unidad IV

Repaso de Análisis I

- Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de A. Definimos como la derivada de f en x_0 y anotamos $f´(x_0)$ al límite del cociente incremental

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

siempre que exista y sea finito.

- Interpretación geométrica: La derivada de una función en un punto x_0 representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0;f(x_0))$

Derivadas de funciones vectoriales

- Definición: Dada la función vectorial $\vec{g}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y t_0 un punto interior de A, llamamos derivada de $\vec{g}$ en t_0 al siguiente límite (siempre que exista y sea finito)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{g}(t_0+\Delta t) - \vec{g}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{g}(t) - \vec{g}(t_0)}{t - t_0}$$

- Notación: Utilizamos cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\vec{g}\,'(t_0) \qquad \frac{d\vec{g}}{dt}(t_0)$$

Demostración

¿Cómo calcular el vector derivado de $\vec{g}(t)$?

- Por ejemplo, si $\vec{g}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ donde x, y y z son funciones derivables, entonces resulta que:

$$\overrightarrow{g'}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

- Las fórmulas de derivación para funciones escalares tienen sus similares para funciones vectoriales.

Ejemplos

Geogebra

Interpretaciones geométricas y físicas

- $\Delta t \to 0$ el vector del cociente incremental se aproxima a un vector que se encuentra sobre la recta tangente a la curva definida por $\vec{g}(t)$ en el punto $\vec{g}(t_0)$.

- Decimos que si $\overrightarrow{g'}(t_0)$ existe y $\overrightarrow{g'}(t_0) \neq \vec{0}$ es un vector tangente a dicha curva.

- Físicamente, si $\vec{g}(t)$ representa la posición de un móvil en función del tiempo, $\overrightarrow{g'}(t)$ nos da el vector velocidad instantánea y $\overrightarrow{g''}(t)$ el vector aceleración

Curvas en $\mathbb{R}^2$

Dada la función vectorial $\vec{g}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{g}$(t)=(x(t),y(t)) y t_0 un punto interior de A, la curva imagen de $\vec{g}$ tiene recta tangente y recta normal.

- Ecuación de la recta tangente: $(x,y)=\vec{g}(t_0) + \lambda\vec{g}'(t_0)$
- Ecuación de la recta normal: $(x,y)=\vec{g}(t_0) + \lambda\,(-y'(t_0),x'(t_0))$

Ejemplo

Geogebra

9. Encontrar los puntos de la curva imagen de $\vec{f}(t) = (2t^2 + 1; 3t - 2)$ en los que las rectas tangentes sean paralelas a la recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

10. Un móvil se desplaza según $\vec{f}(t) = (t^2 - 6t; 5t)$. Calcular el instante en el que la rapidez es mínima.

Curvas en $\mathbb{R}^3$

Dada la función vectorial $\vec{g}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{g}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ y t_0 un punto interior de A, la curva imagen de $\vec{g}$ tiene recta tangente y plano normal.

- Ecuación de la recta tangente: $(x,y,z)=\vec{g}(t_0) + \lambda\vec{g}'(t_0)$

- Ecuación del plano normal: $((x,y,z)-\vec{g}(t_0)) \cdot \vec{g}'(t_0) =0$

Geogebra y ejemplo

01) Definida la curva C como intersección de dos superficies S_1 y S_2 $(C = S_1 \cap S_2)$:

- parametrícela convenientemente y halle una ecuación para la recta tangente a C en $\overline{A}$,
- halle una ecuación cartesiana y una ecuación vectorial para el plano normal a C en $\overline{A}$,
- analice si C es una curva plana o alabeada.

a) $S_1 : y = x^2 \qquad S_2 : y + z = 5 \qquad \overline{A} = (2,4,1)$.

b) $S_1 : z = x^2 - y^2 \qquad S_2 : z = x + y \qquad \overline{A} = (2,1,3)$.

c) $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 8 \qquad S_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \overline{A} = (0,2,2)$.

02) Dada C de ecuación $\overline{X} = (u^2, u-2, u+3)$ con $u \in \Re$, analice si su recta tangente en el punto $(9,1,6)$ interseca ...

a) ... al eje z.

b) ... a la superficie Σ de ecuación $z = x - 2y^2$.

c) ... a la línea de ecuación $\overline{X} = (v,\ 2v,\ 32v^{-1})$ con $v \neq 0$.

6. Sea C= $\begin{cases} x^2+z^2=16 \\ y=x \end{cases}$

a) Determinar una parametrización de C y graficar la curva.
b) Encontrar los puntos en los que la recta tangente a C es perpendicular al eje z.

7. Determinar los puntos de intersección entre la curva definida por $\vec{g}(t) = (t+2, 2t+5, t+1)$ con la superficie $x^2 + (y-3)^2 - z^2 = 1$ y determinar una ecuación para la recta tangente a la curva en dichos puntos.

DERIVADAS DE CAMPOS ESCALARES

- La **derivada direccional** de $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en P_0 (punto de A) en la dirección y sentido del versor $\check{v}$ es el siguiente límite, siempre que exista y sea finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\check{v}) - f(P_0)}{h}$$

- Notación: f´$(P_0; \check{v})$ f´$_{\check{v}}(P_0)$ $\frac{\partial f}{\partial \check{v}}(P_0)$

Ejemplos

- También se puede definir la **derivada en la dirección y sentido de un vector $\vec{\boldsymbol{v}}$** de $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en P_0 (punto de A) que es el límite, siempre que exista y sea finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\vec{v}) - f(P_0)}{h}$$

Propiedad: Si $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{v}$ vector tal que existe f'(P_0,), entonces:

f'(P_0, $\vec{v}$)=||$\vec{v}$ ||. f´$(P_0; \check{v})$ con $\check{v}$ el versor asociado a $\vec{v}$.

Demostración

06) Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Pruebe que f no es continua en $(0,0)$.

b) Pruebe que $f'(\overline{0},\breve{r})$ sólo queda definida para $\breve{r}$: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$.

07) Dada $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\,y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Demuestre que para todo $\breve{r}\in\Re^2$ la función es derivable en el origen, aun cuando g es discontinua en $(0,0)$.

11) Estudie la derivabilidad en distintas direcciones en el punto $\overline{A}$ que se indica en cada caso.

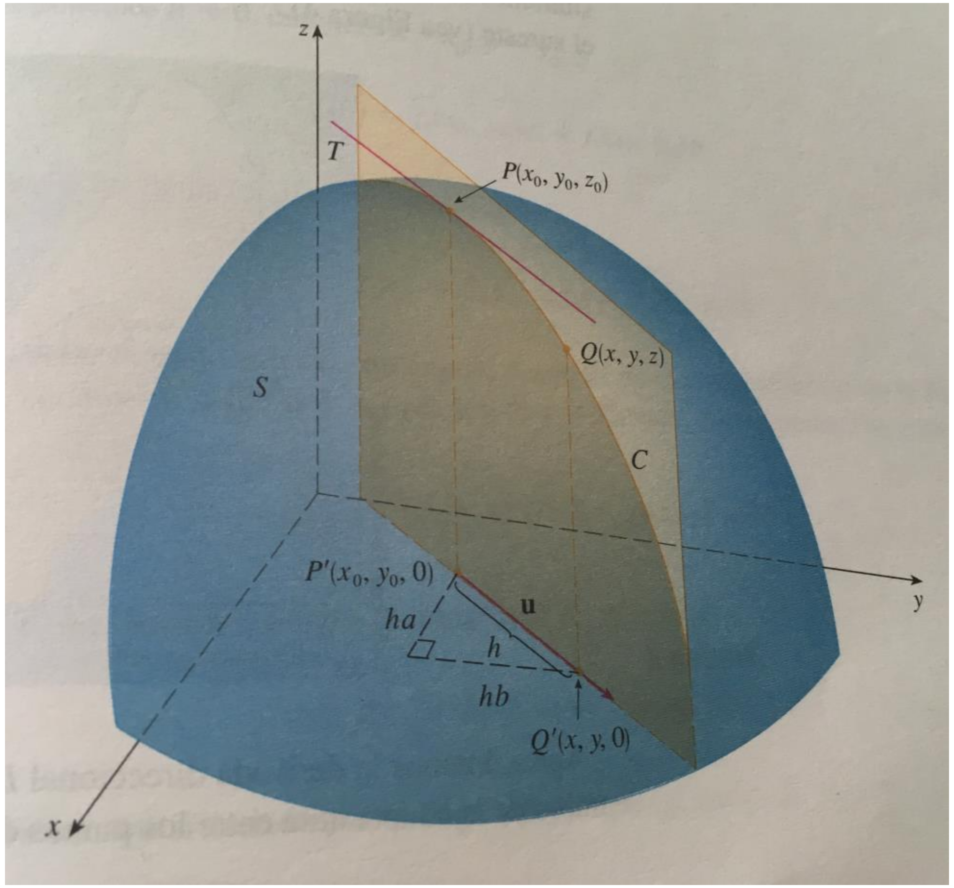
b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{si } (x,y)\neq(0,y)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,y)\end{cases}$, $\overline{A}=(0,0)$.

14) Sea $L:\Re^n\to\Re$ $(n>1)$ una transformación lineal, aplicando la definición de derivada direccional demuestre que $L'(\overline{A},\breve{r})=L(\breve{r})\ \forall\overline{A},\breve{r}\in\Re^n$.

Interpretación geométrica para campos de 2 variables

La derivada direccional del campo escalar f en $(x_0; y_0)$ en la dirección y sentido del versor $\breve{v} = (a; b)$representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la gráfica de f y el plano vertical que pasa por $\left(x_0; y_0; f(x_0; y_0)\right)$ y sigue la dirección de $(a; b; 0)$

Geogebra



Derivadas parciales

Si en particular consideramos los versores $\breve{e}_i$=(0,0,0,….,1,0,…..0) (un 1 en el lugar i y el resto 0) obtendríamos lo que llamamos **derivadas parciales**.

La derivada parcial de f respecto de x_i en un punto P_0 es igual al siguiente límite (siempre que exista y sea finito)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\breve{e}_i) - f(P_0)}{h}$$

Notación: Utilizamos cualquiera de las siguientes expresiones:

$$f'_{x_i}(P_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$$

Derivadas parciales para campos de 2 variables

- Si en particular consideramos el versor $\check{\imath} = (1;0)$ o $\check{\jmath} = (0;1)$ obtendríamos lo que llamamos derivadas parciales.

- La derivada parcial de f(x,y) respecto de x en un punto $(x_0; y_0)$ es igual al siguiente límite (siempre que exista y sea finito)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h}$$

- Notación: Utilizamos cualquiera de las siguientes expresiones:

$$f\'_x\ (x_0; y_0) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)$$

- La derivada parcial de f(x,y) respecto de y en un punto $(x_0; y_0)$ es igual al siguiente límite (siempre que exista y sea finito)

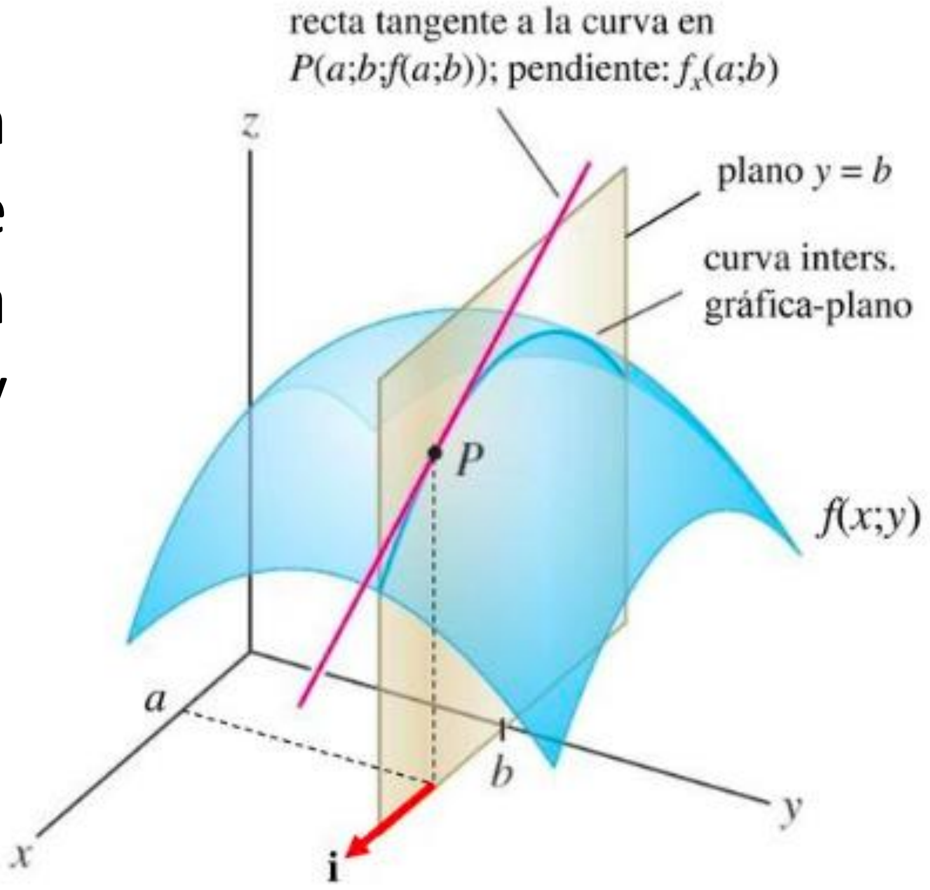
$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + k) - f(x_0; y_0)}{k}$$

- Notación: Utilizamos cualquiera de las siguientes expresiones:

$$f'_y\ (x_0; y_0) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)$$

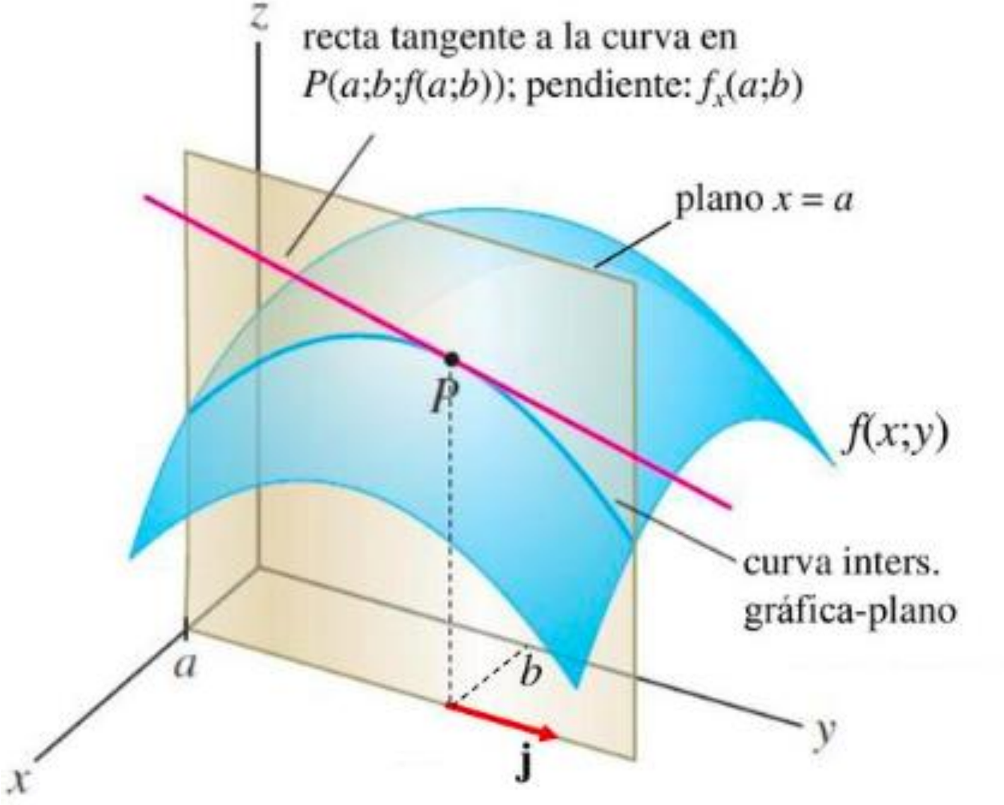
Interpretación geométrica de f'_x

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto $(x_0;y_0)$ representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la superficie gráfica de f y el plano $y=y_0$ en el punto $(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$



Interpretación geométrica de f'_y

La derivada parcial de f con respecto de y en el punto $(x_0;y_0)$ representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la superficie gráfica de f y el plano $x=x_0$ en el punto $(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$



Regla práctica

04) Halle las funciones derivadas parciales de 1º orden de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + xy^3 - 1$.

b) $f(x,y,z) = y\,e^{2x} + z\,e^{3y}$.

c) $f(x,y) = x\,e^{x^2+y^2}$.

Gradiente de un campo escalar

- Si F*: A*$\rightarrow\mathbb{R}$, con $A\subseteq\mathbb{R}^n \wedge n\geq 2$ tiene derivadas parciales en un punto P_0 se llama **gradiente** de F en P_0 al vector que tiene por componentes a las derivadas parciales de F en P_0.

$$\vec{\nabla}F\Big|_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_{P_0} , \frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_{P_0} ,\dots\dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\Big|_{P_0} \right)$$

Matriz jacobiana o matriz diferencial

- Sea F: A$\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x_1, x_2, \dots x_n) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_m(X))$

$$D[\vec{F}(\vec{X})] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplos. Rel. Grad y vector derivado

Derivadas sucesivas

- Sea F: $A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que las derivadas parciales de F están definidas para todo punto de $B \subseteq A$. Por lo tanto, para cada una de dichas funciones podrá analizarse la existencia de sus derivadas parciales que, si existen, serán las **derivadas segundas** de F.
- Así sucesivamente, podrán definirse las derivadas n- ésimas de F.
- Un campo escalar de n variables puede tener n derivadas primeras y en consecuencia n^2 derivadas segundas, n^3 derivadas terceras,....., n^k derivadas k-ésimas. Bajo ciertas condiciones, algunas de las derivadas iteradas resultan iguales.

Ejemplos

Teorema de Schwarz

- Consideremos un campo escalar de dos variables f: $A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existan f'_x, f'_y y f''_{xy} en un entorno de P_0 punto interior de A**.** Entonces, si f''_{xy} es continua en P_0, existe f''_{yx} y se cumple que $f''_{yx}(P_0) = f''_{xy}(P_0)$.

- Vale para cualquier número de variables.

- Vale para derivadas sucesivas de orden superior.

12) Determine los dominios en los que quedan definidas las derivadas parciales de 1° y 2° orden de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

b) $\bar{f}(x, y) = (x\ln(\mathrm{y}), y / x)$.