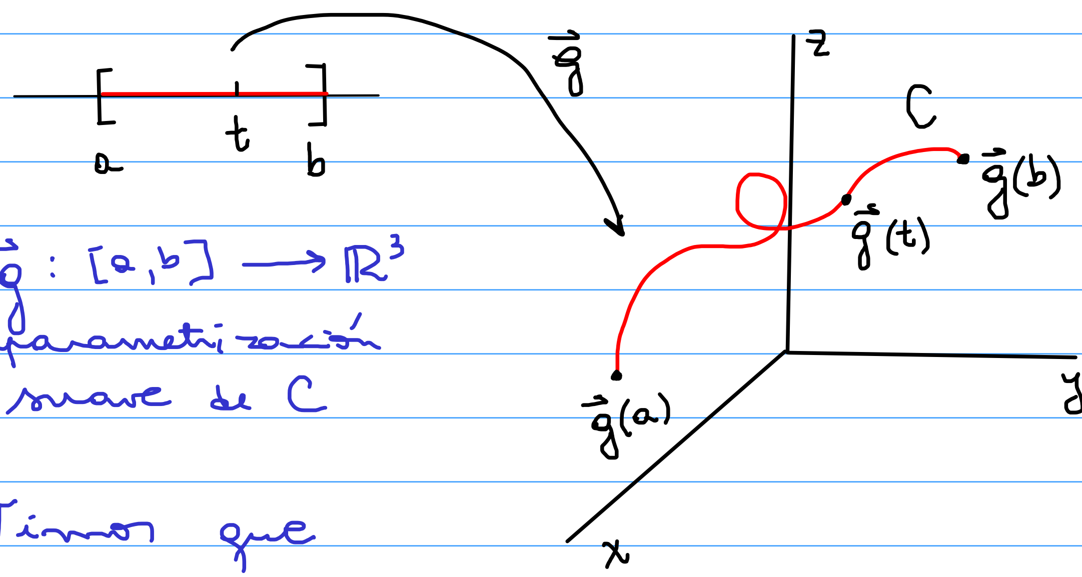
07) Sea $C \subset \Re^3$ una curva suave de ecuación $\overline{X} = \overline{g}(t)$ con $t \in [a,b] = I$

$\boxed{s = \lambda(t) \doteq \int_a^t \|\overline{g}'(u)\| \, du}$ es la ***abscisa curvilínea*** del punto $\overline{g}(t) \in C$. Observar que $\lambda(a) = 0$

Aquí se define la llamada

"parametrización intrínseca"

que consiste en lo siguiente:



$\vec{g} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
parametrización suave de C

Vimos que

$$\int_a^b \|\vec{g}\,'(t)\| \, dt$$

es la longitud de la curva.

Si para $t \in [a,b]$ calculamos

$$\int_a^t \|\vec{g}\,'(u)\| \, du$$

(cambiamos el nombre de la variable de integración para no confundirla con t)

Estaremos calculando la longitud de un trozo de la curva: el trozo que va desde $\vec{g}(a)$ hasta $\vec{g}(t)$

Llamamos $s = \lambda(t)$ a esta longitud

(obviamente depende del t que elijamos)

Resultan

$$\lambda(a) = 0$$

$$\lambda(b) = \text{Long}(C) = L$$

Siendo $s' = \lambda'(t) = \|\bar{g}'(t)\| > 0 \Rightarrow \lambda$ estrictamente creciente $\Rightarrow \exists\ \lambda^{-1}$ tal que $t = \lambda^{-1}(s)$, componiendo con $\bar{g}$ resulta: $\boxed{\overline{X} = \underbrace{\bar{g}(\lambda^{-1}(s))}_{\overline{G}(s)} \text{ con } s \in I_s}$ que es la ecuación ***normal*** de C, donde I_s es la imagen de I a través de λ.

Aquí se refieren a que, como $\lambda(t) = \int_a^t \|\vec{g}'(u)\|\,du$, resulta $\lambda'(t) = \|\vec{g}'(t)\| > 0$

$\therefore$ la función $\lambda(t)$ es creciente (lo cual es obvio porque cuanto más cercano a b sea t, mayor es la longitud del trozo de curva que consideramos)

Si $s = \lambda(t)$ es creciente entonces existe la función inversa $t = \lambda^{-1}(s)$

En ese caso, si componemos $\vec{g}(t)$ con $\lambda^{-1}(s)$ obtenemos una nueva parametrización de C,

$$\vec{G}(s) = \vec{g}(\lambda^{-1}(s))$$

con $s \in [\lambda(a), \lambda(b)] = \underbrace{[0, L]}_{I_s}$

Se define el ***versor tangente principal*** $T \doteq d\overline{G}/ds$; aplicando la regla de la cadena y la regla de derivación de función inversa resulta:

$$T = \frac{d\overline{g}}{dt}\frac{dt}{ds} = \overline{g}'\,\frac{1}{s'} = \frac{\overline{g}'}{\|\,\overline{g}'\,\|} \qquad (1)$$

versor orientado según $\overline{g}'$ (sentido de los arcos crecientes).

$\vec{T} = \vec{G}'(s)$ es el vector tangente a la curva C calculado con la nueva parametrización.

Como ésta es una composición, aplicando regla de la cadena resulta

$$\underbrace{\vec{G}'(s)}_{\text{vector tangente en la nueva parametrización}} = \underbrace{\vec{g}'(t)}_{\text{vector tangente en la parametrización original}}\frac{dt}{ds} = \vec{g}'(t)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{g}'(t)}{\|\vec{g}'(t)\|}$$

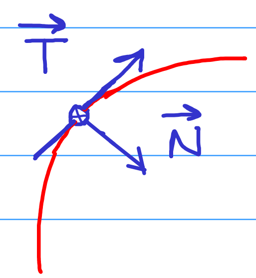
$\lambda'(t) = \|\vec{g}'(t)\|$

versor tangente a la curva calculado con la parametrización original

Suponiendo existente y no nula la dT/ds, esta derivada es ortogonal a T ($\|T\|$ constante) y quedan definidos el ***versor normal principal*** $N \doteq \dfrac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$ y el ***versor binormal*** $B \doteq T \times N$.

Como el vector tangente $\vec{T}(s) = \vec{G}'(s)$ tiene siempre módulo 1, su derivada $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ no tiene componente paralela a $\vec{T}$ (que cambiaría su magnitud) sino sólo en dirección perpendicular a $\vec{T}$, (que varía sólo su dirección)

Por eso $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ es un vector normal a la curva y $\vec{N} = \dfrac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|}$ es un versor normal



y entonces, el producto vectorial entre $\vec{T}$ y $\vec{N}$ es binormal $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

(marcado $\otimes$ en el gráfico)

Para un t_o fijo, llamando
$s_o = \lambda(t_o)$ y suponiendo existentes $\overline{g}'_o = \overline{g}'(t_o)$, $\overline{g}''_o = \overline{g}''(t_o)$, $\overline{g}'''_o = \overline{g}'''(t_o)$
es posible demostrar que en todo $\overline{X}_o = \overline{g}(t_o) \in C$, si $\overline{g}'_o \wedge \overline{g}''_o \neq \overline{0}$ resultan:

$$\boxed{T_o = \frac{\overline{g}'_o}{\|\overline{g}'_o\|}\ ,\ B_o = \frac{\overline{g}'_o \wedge \overline{g}''_o}{\|\overline{g}'_o \wedge \overline{g}''_o\|}\ ,\ N_o = B_o \wedge T_o}\ .$$

El ***triedro intrínseco*** de C en $\overline{X}_o$ está formado por los planos ***normal***, ***osculador*** y ***rectificante*** que son perpendiculares en dicho punto a T_o, B_o y N_o respectivamente.

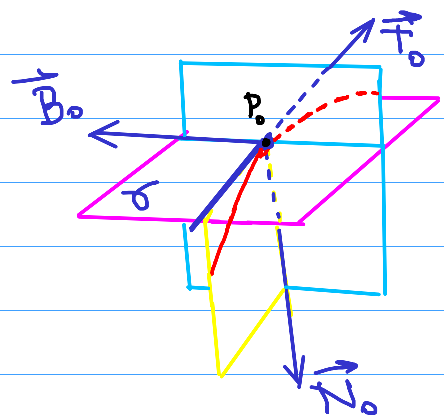
La ***curvatura de flexión*** de C en $\overline{X}_o$ es:

$$\boxed{cf_o \doteq \left\|\frac{dT}{ds}(s_o)\right\| = \frac{\|\overline{g}'_o \wedge \overline{g}''_o\|}{\|\overline{g}'_o\|^3}}$$

La ***curvatura de torsión*** de C en $\overline{X}_o$ es:

$$\boxed{ct_o \doteq \left\|\frac{dB}{ds}(s_o)\right\| = -\frac{(\overline{g}'_o \wedge \overline{g}''_o)\cdot \overline{g}'''_o}{\|\overline{g}'_o \wedge \overline{g}''_o\|^2}}$$

α Plano normal $\longrightarrow$ tiene normal $\vec{T}_o$
β Plano osculador $\longrightarrow$ tiene normal $\vec{B}_o$
γ Plano rectificante $\longrightarrow$ tiene normal $\vec{N}_o$



a) Halle la ecuación normal de la curva de ecuación $\overline{X} = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 4t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, definiendo como origen de abscisa curvilínea el punto $\underbrace{(0,2,2\pi)}_{a=\frac{\pi}{2}}$.

$$\vec{g}(t) = (2\cos(t),\ 2\,\mathrm{sen}(t),\ 4t)\ ,\quad t \in \left[\tfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$\vec{g}\,'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t),\ 2\cos(t),\ 4)$$

$$\|\vec{g}\,'(t)\| = \sqrt{(-2)^2\,\mathrm{sen}^2(t) + 2^2\cos^2(t) + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$s = \lambda(t) = \int_{\pi/2}^{t} \| \vec{g}\,'(u) \| \, du = \sqrt{20}\,(t - \pi/2)$$

$$\therefore \quad t = \lambda^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{20}} + \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{G}(s) = \left(2\cos\left(\frac{s}{\sqrt{20}} + \frac{\pi}{2}\right), \ 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{20}} + \frac{\pi}{2}\right), \ \frac{4s}{\sqrt{20}} + 2\pi \right)$$

$$= \left(2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \ -2\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \ \frac{2s}{\sqrt{5}} + 2\pi \right)$$

$$s \in \left[0, 2\sqrt{5}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[0, 3\pi\sqrt{5}\right]$$

si se empieza a medir desde $(0, 2, 2\pi)$

$$\left(s \in \left[-\sqrt{5}\,\pi, 3\pi\sqrt{5}\right] \right.$$

si se empieza a medir desde $(2, 0, 0)$)

b) Halle la ecuación cartesiana del plano osculador de la curva C intersección del cilindro parabólico de ecuación $z = x^2$ con el [illegible] de ecuación $y^2 + x^2 = 2$ en el punto $(1,1,1)$; y calcule las curvaturas de flexión y de torsión de C en dicho punto.

(modificado)

$$C : \begin{cases} z = x^2 \\ y^2 + x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\vec{g}(t) = \left(\sqrt{2}\ \cos(t),\ \sqrt{2}\ \operatorname{sen}(t),\ 2\cos^2(t)\right)$$

En $P = (1,1,1)$:
$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos(t_0) = 1 \\ \sqrt{2}\ \operatorname{sen}(t_0) = 1 \\ 2\ \cos^2(t_0) = 1 \end{array}\right\} t_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{g}\,'(t) = \left(-\sqrt{2}\ \operatorname{sen}(t),\ \sqrt{2}\cos(t),\ \overbrace{-4\cos(t)\operatorname{sen}(t)}^{-2\operatorname{sen}(2t)}\right)$$

$$\vec{g}\,'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = (-1, 1, -2)$$

$$\vec{g}\,''(t) = \left(-\sqrt{2}\ \cos(t),\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}(t),\ -4\ \cos(2t)\right)$$

$$\vec{g}\,''\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = (-1, -1, 0)$$

$$\vec{g}\,'''(t) = \left(\sqrt{2}\ \operatorname{sen}(t),\ -\sqrt{2}\cos(t),\ 8\ \operatorname{sen}(2t)\right)$$

$$\vec{g}\,'''\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = (1, -1, 8)$$

$$\vec{T}_0 = \frac{\vec{g}\,'(\frac{\pi}{4})}{\|\vec{g}\,'(\frac{\pi}{4})\|} = \frac{(-1, 1, -2)}{\sqrt{6}}$$

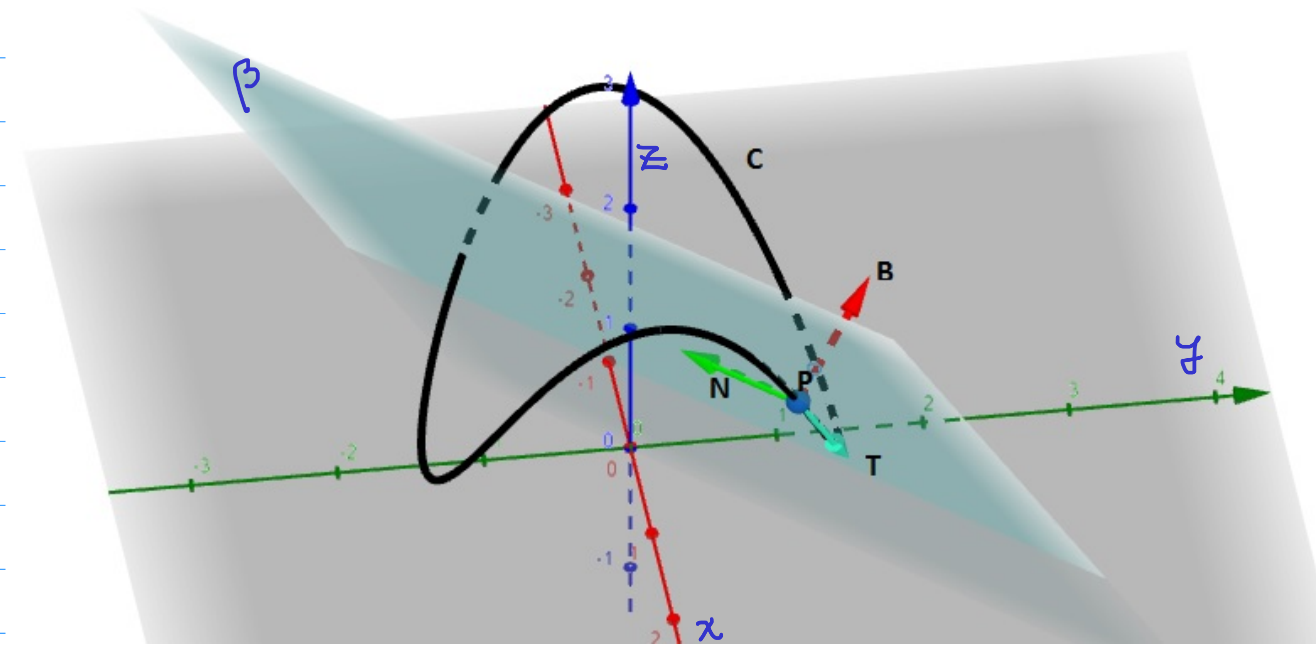
$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{g}\,'(\frac{\pi}{4}) \times \vec{g}\,''(\frac{\pi}{4})}{\|\vec{g}\,'(\frac{\pi}{4}) \times \vec{g}\,''(\frac{\pi}{4})\|} = \frac{(-2, 2, 2)}{2\sqrt{3}} = \frac{(-1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{N}_0 = \vec{B}_0 \times \vec{T}_0 = \frac{(-6, -6, 0)}{6\sqrt{2}} = \frac{(-1, -1, 0)}{\sqrt{2}}$$

Plano osculador β que pasa por $(1,1,1)$:

$$\beta: [(x,y,z)-(1,1,1)]\cdot(-2,2,2)=0$$

$$\beta: -x+y+z=1$$



curvatura de flexión $\quad cf_0 = \dfrac{\|\vec{g}'(t_0)\times\vec{g}''(t_0)\|}{\|\vec{g}'(t_0)\|^3} = \dfrac{\|(-2,2,0)\|}{6\sqrt{6}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

curvatura de torsión $\quad ct_0 = -\dfrac{(\vec{g}'(t_0)\times\vec{g}''(t_0))\cdot\vec{g}'''(t_0)}{\|\vec{g}'(t_0)\times g''(t_0)\|^2} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

c) Demuestre que toda recta, tiene curvatura de flexión nula en todos sus puntos.

d) Demuestre que la circunferencia tiene igual curvatura de flexión en todos sus puntos.

En una recta:

$$\vec{g}(t) = (a_0 + t a_1 , b_0 + t b_1 , c_0 + t c_1)$$

$$\vec{g}'(t) = (a_1 , b_1 , c_1)$$

$$\vec{g}''(t) = \vec{0}$$

$$\therefore \; cf_0 = \| (a_1, b_1, c_1) \times \vec{0} \| = 0$$

En una circunferencia (en el plano xy)

$$\vec{g}(t) = (a + r\cos(t) , b + r\,\text{sen}(t) , 0)$$

$$\vec{g}'(t) = (-r\,\text{sen}(t) , r\cos(t) , 0)$$

$$\vec{g}''(t) = (-r\cos(t) , -r\,\text{sen}(t) , 0)$$

$$\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t) = (0 , 0 , r^2) , \forall t$$

$$\therefore \; cf_0 = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \quad \forall t$$