Este texto fue extraído de "Física para estudiantes de ciencias e ingeniería" de Resnick y Halliday, parte 1, capítulo 12.

12.5 El Movimiento Combinado de Traslación y de Rotación de un Cuerpo Rígido

Hasta aquí hemos considerado sólo cuerpos que giran alrededor de algún eje fijo. Ahora bien, si un cuerpo está rodando, está girando alrededor de un eje y también tiene un movimiento de traslación. Por consiguiente parece que el movimiento de los cuerpos que ruedan deberá tratarse como una combinación de un movimiento de traslación y uno de rotación. Sin embargo, también es posible tratar a un cuerpo que rueda como si su movimiento fuera exclusivamente de rotación. Deseamos ilustrar la equivalencia de los dos métodos de ataque.

Consideremos por ejemplo, un cilindro que rueda en una superficie a nivel, como en la Fig. 12-13. En cualquier instante, la parte inferior del cilindro está en reposo en la superficie, ya que

no resbala. El eje perpendicular a la figura que pasa por el punto de contacto P se llama *eje instantáneo de rotación*. En ese instante, la velocidad lineal de cada partícula del cilindro está dirigida perpendicularmente a la línea que une a la partícula con P y su magnitud es proporcional a esa distancia. Esto es equivalente a decir que el cilindro está girando alrededor de un eje fijo que pasa por P, con una cierta velocidad angular ω *en ese instante*. Por consiguiente, el movimiento del cuerpo en un instante dado es equivalente a una rotación pura. Por tanto, la energía cinética total se puede escribir

$$K = \tfrac{1}{2} I_p \omega^2, \tag{12–13}$$

siendo I_p el momento de inercia con respecto al eje que pasa por P.

Apliquemos ahora el teorema de los ejes paralelos, que nos dice que

$$I_p = I_o + MR^2,$$

en donde I_o es el momento de inercia del cilindro de masa M y radio R, con respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masa. La Ec. 12-13 se transforma ahora en

$$K = \tfrac{1}{2} I_o \omega^2 + \tfrac{1}{2} M R^2 \omega^2. \tag{12–14}$$

La cantidad $R\omega$ es la velocidad con la cual el centro de masa del cilindro se mueve con respecto al punto fijo P. Sea $R\omega = v_0$. Entonces la Ec. 12-14 se transforma en

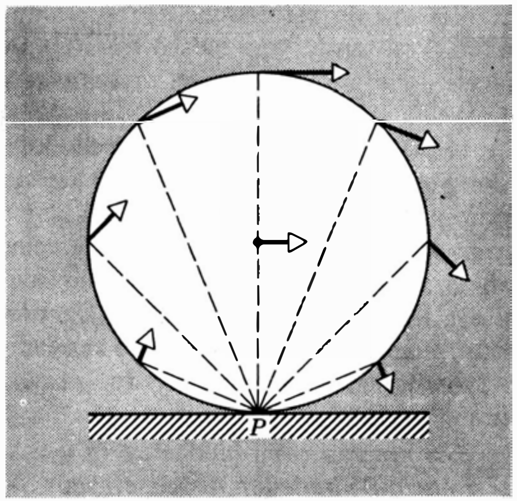


Fig. 12-13. Un cuerpo que rueda puede en cualquier instante considerarse como si estuviera girando alrededor de un punto de contacto P

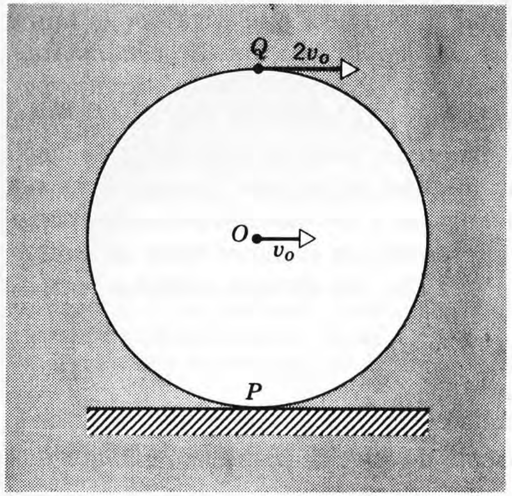


FIG. 12-14. Puesto que Q y O tienen la misma velocidad angular alrededor de P, Q se mueve con una velocidad lineal doble de la de O, ya que está a distancia doble de P

$$K = \tfrac{1}{2}I_o\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_o^2. \tag{12-15}$$

Notemos ahora que la velocidad del centro de masa con respecto a P, es igual a la velocidad de P con respecto al centro de masa. En otras palabras, la velocidad angular ω del centro de masa con respecto a P vista por alguien que esté en P, es igual a la velocidad angular de una partícula en P alrededor de O vista por alguien que esté en O (moviéndose junto con el cilindro). Esto es equivalente a decir que cualquier línea de referencia en el cilindro, gira el mismo ángulo en un tiempo dado ya sea que se observe desde un sistema de referencia fijo o desde un sistema de referencia móvil. Por tanto, podemos interpretar la Ec. 12-15, que se derivó a base de un movimiento de rotación puro, de otra manera; a saber, el primer término $\frac{1}{2}I_o\omega^2$, es la energía cinética que tendría el cilindro si sólo estuviera girando alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, sin movimiento de traslación; y el segundo término, $\frac{1}{2}Mv_o^2$, es la energía cinética que tendría el cilindro si tuviera un movimiento de traslación con la velocidad de su centro de masa, sin girar. Nótese que ahora ya no se hace referencia para nada al eje instantáneo de rotación. De hecho, la Ec. 12-15 se aplica a un cuerpo cualquiera que se mueva y gire alrededor de un eje perpendicular a su movimiento, ya sea que esté rodando o no en una superficie.

Los efectos combinados de la traslación del centro de masa y de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, son equivalentes a una rotación pura con la misma velocidad angular alrededor de un eje que pasa por el punto de contacto de un cuerpo que rueda.

Para ilustrar este resultado sencillamente, consideremos la velocidad instantánea de varios puntos en el cilindro que gira. Si la velocidad del centro de masa es v_o, la velocidad angular instantánea alrededor de un eje que pasa por P es $\omega = v_o/R$. Un punto Q en la parte superior del cilindro tendrá por consiguiente una velocidad $\omega 2R = 2v_o$ en ese instante. El punto de contacto P está instantáneamente en reposo. Por consiguiente, desde el punto de vista de la rotación pura alrededor de P, las cosas ocurren como se muestra en la Fig. 12-14.

Ahora consideremos la rodadura como una combinación de la traslación del centro de masa y de la rotación alrededor del eje del cilindro que pasa por O. Si consideramos sólo la traslación, todos los puntos del cilindro tienen la misma velocidad v_o que el centro de masa. Esto se muestra en la Fig. 12-15*a*. Si consideramos

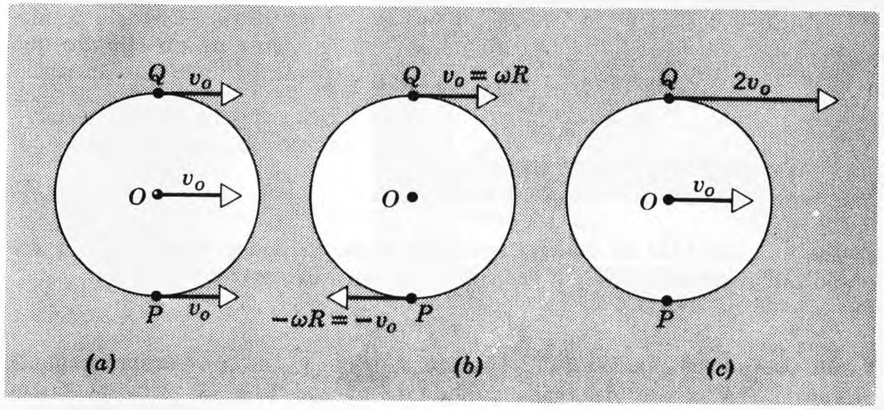


FIG. 12-15. (*a*) Para la traslación pura todos los puntos se mueven con la misma velocidad. (*b*) Para la rotación pura alrededor de O, los puntos opuestos se mueven con velocidades opuestas. (*c*) La rotación y la traslación combinadas se obtienen sumando los vectores correspondientes de (*a*) y (*b*)

la rotación solamente, el centro está en reposo, mientras que el punto Q que está arriba tiene una velocidad $+\omega R$ en la dirección de las x y el punto P que está abajo del cilindro tiene una velocidad $-\omega R$ en la dirección de las x. Esto se muestra en la Fig. 12-15*b*. Ahora combinemos esos dos resultados. Recordando que $\omega = v_o/R$, obtenemos para el punto Q $\quad v = v_o + \omega R = v_o + \dfrac{v_o}{R} R = 2v_o,$

para el punto O $\quad v = v_o + 0 = v_o,$

para el punto $P \quad v = v_o - \omega R = v_o - \dfrac{v_o}{R} R = 0.$

Este resultado, que se ilustra en la Fig. 12-15*c* es exactamente igual al obtenido desde el punto de vista puramente rotacional de la Fig. 12-14.

EJEMPLO 7. Considérese un cilindro macizo de masa M y radio R que rueda bajando sin resbalar por un plano inclinado. Encontrar la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega al extremo inferior.

La situación se ilustra en la Fig. 12-16. Podemos aplicar el principio de la conservación de la energía para resolver este problema. El cilindro está inicialmente en reposo. Al bajar rodando por el plano inclinado el cilindro

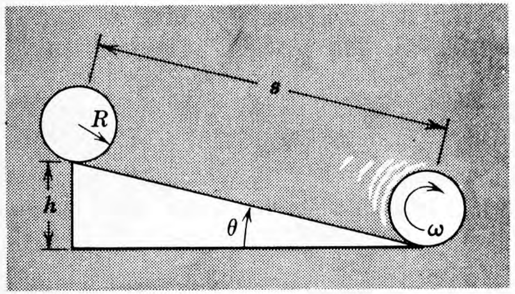


FIG. 12-16. Ejemplo 7. Movimiento de un cilindro que rueda bajando por un plano inclinado

pierde una cantidad de energía potencial Mgh, en donde h es la altura del plano inclinado. Su aumento de energía cinética es igual a

$$\tfrac{1}{2}I_o\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2,$$

donde v es la velocidad lineal del centro de masa y ω es la velocidad angular alrededor del centro de masa cuando el cuerpo llega al pie del plano inclinado.

Entonces tenemos la relación

$$Mgh = \tfrac{1}{2}I_o\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2,$$

en la cual $\quad I_0 = \tfrac{1}{2}Mr^2 \quad$ y $\quad \omega = \dfrac{v}{r}.$

Por consiguiente $\quad Mgh = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)\left(\dfrac{v}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2 = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2})Mv^2,$

$$v^2 = \tfrac{4}{3}gh \quad \text{o} \quad v = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}.$$

La velocidad del centro de masa hubiera sido $v = \sqrt{2gh}$ si el cilindro hubiera *resbalado* en un plano inclinado *sin fricción*. Por lo tanto, la velocidad del cilindro que baja rodando es menor que la velocidad del cilindro

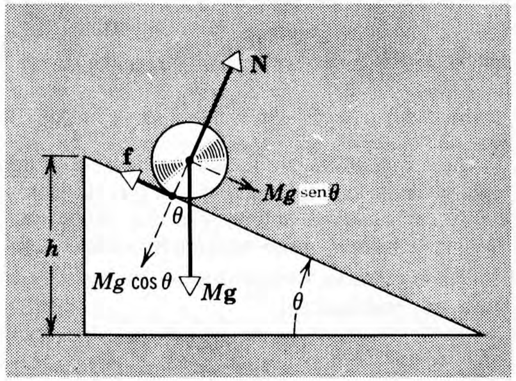
que resbala, debido a que en el cilindro que rueda, parte de la energía potencial perdida se transforma en energía cinética de rotación, dejando disponible una cantidad menor para la parte de energía cinética de traslación. Aunque el cilindro que rueda llega al pie del plano inclinado después que el cilindro idéntico que bajó deslizando y partió al mismo tiempo por un plano inclinado igual, pero sin fricción, ambos llegan al pie con la misma cantidad de energía cinética; la diferencia está en que el cilindro que rueda gira al moverse, mientras que el que resbala no gira al moverse.

Nótese que se necesita fricción estática para hacer que el cilindro gire. Recordando que la fricción es una fuerza disipativa ¿cómo puede usted justificar el uso de la conservación de la energía mecánica en este problema?

EJEMPLO 8. El resultado anterior se derivó usando métodos de energía. Resuelva el problema usando sólo métodos dinámicos.

El diagrama de fuerzas se muestra en la Fig. 12-17. **Mg** es el peso del cilindro que obra verticalmente hacia abajo pasando por el centro de masa.* **N** es la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el cilindro, y

FIG. 12-17. Ejemplo 8. Solución dinámica del movimiento de un cilindro que baja rodando por un plano inclinado



f es la fuerza de fricción estática que obra a lo largo del plano inclinado en el punto de contacto.

El movimiento de *traslación* de un cuerpo se obtiene suponiendo que todas las fuerzas externas obran en su centro de masa. Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos $N - Mg\cos\theta = 0$ para el movimiento normal al plano inclinado, y $Mg \operatorname{sen}\theta - f = Ma$ para el movimiento en la dirección del plano inclinado. El movimiento *de rotación* alrededor del centro de masa resulta de

$$\tau = I_o\alpha.$$

* Al dibujar el diagrama de vectores para este problema, tácitamente suponemos que el peso total del cuerpo puede considerarse como obrando en el centro de masa. Vimos en el Artículo 9-2 que esto se justifica al analizar el movimiento de traslación. Ahora bien más adelante, en el problema, usaremos también este resultado para analizar el movimiento de rotación. Justificaremos este procedimiento en el Cap. 14, en donde se demuestra que el *peso* de un cuerpo puede considerarse como obrando en su centro de masa, tanto para el movimiento de traslación *como* para el de rotación.

Ni **N** ni $M\mathbf{g}$ pueden producir rotación alrededor de C porque sus líneas de acción pasan por C y sus brazos de palanca son nulos. La fuerza de fricción tiene un brazo de palanca R con respecto a C, de modo que

$$fR = I_o\alpha.$$

Pero $$I_o = \tfrac{1}{2}MR^2 \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

de modo que $$f = \frac{I_o\alpha}{R} = \frac{Ma}{2}.$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación de traslación, encontramos

$$a = \tfrac{2}{3}g\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Esto es, la aceleración del centro de masa para el cilindro que gira ($\frac{2}{3}g$ sen θ) es menor que la aceleración del centro de masa del cilindro que resbala (g sen θ).

Este resultado es válido en cualquier instante, cualquiera que sea la posición del cilindro en el plano inclinado. El centro de masa se mueve con aceleración lineal constante. Para obtener la velocidad del centro de masa, a partir del reposo, usamos la relación

$$v^2 = 2as,$$

de modo que $$v^2 = 2(\tfrac{2}{3}g\,\mathrm{sen}\,\theta)s = \tfrac{4}{3}g\,\frac{h}{s}\,s = \tfrac{4}{3}gh$$

o sea $$v = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}.$$

Este resultado es el mismo que el obtenido antes por el método de la energía. El método de la energía es sin duda más simple y más directo. Sin embargo, si estamos interesados en saber cuáles son las fuerzas, tales como **N** y **f**, debemos usar un método dinámico.

Este método determina la fuerza de fricción estática que se necesita para el rodamiento:

$$f = \frac{Ma}{2} = \frac{M}{2}(\tfrac{2}{3}g\,\mathrm{sen}\,\theta) = \tfrac{1}{3}Mg\,\mathrm{sen}\,\theta.$$