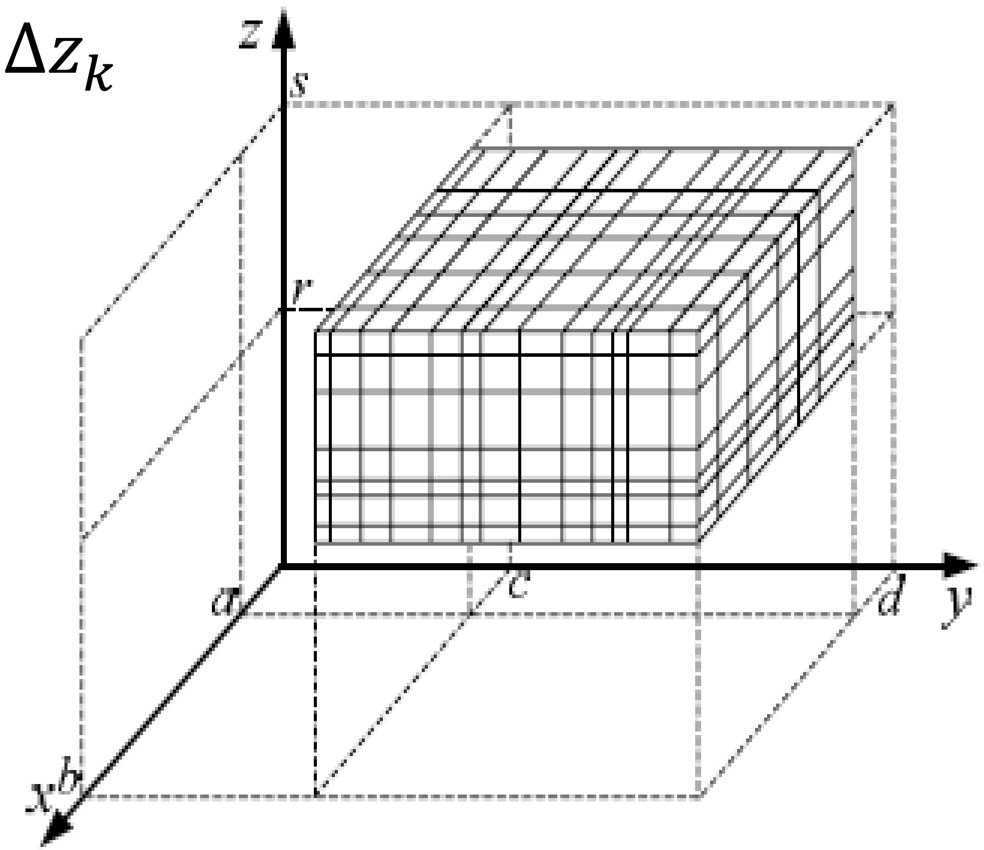
Integrales triples

- Sea una función f:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f(x,y,z) definida en una caja rectangular V=[a;b]x[c;d]x[r;s].
- Dividimos V en pequeñas cajas rectangulares como se muestra en la figura y evaluamos la función en un punto arbitrario.
- Formamos los productos $f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x_i \ \Delta y_j \ \Delta z_k$



- Se suman esos productos $\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i{}^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

- Se toma límite

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty \\ r\to+\infty}} \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i{}^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Definición de integral triple

Sea f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un paralepípedo V. La integral triple de *f* sobre V se define como

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty \\ r\to+\infty}} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

si este límite existe y se denota:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

dV

Diferencial de volumen

Observaciones

- La continuidad de f es una condición suficiente para la existencia de la integral triple.
- El límite existe también para muchas funciones discontinuas.
- Vale el teorema de Fubbini para el cálculo de la integral triple resolviendo tres integrales simples.
- Vale el teorema de cambio de variable.

Propiedades

- Linealidad

- Si $D = D_1 \cup D_2$ unión disjunta, entonces

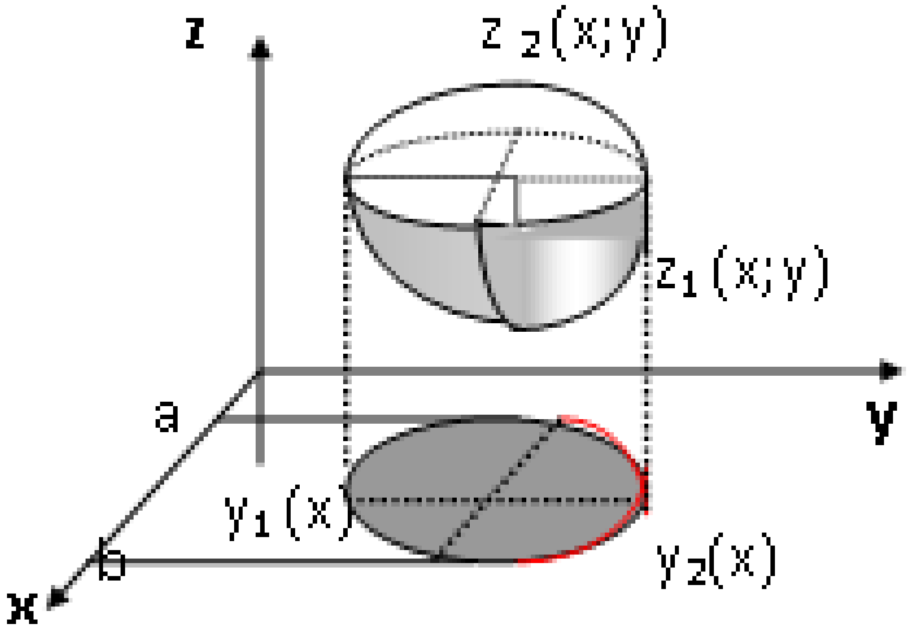
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- Vol (D)=$\iiint_D \ 1dxdydz$

Cálculo en regiones de cualquier tipo

REGIONES TIPO I

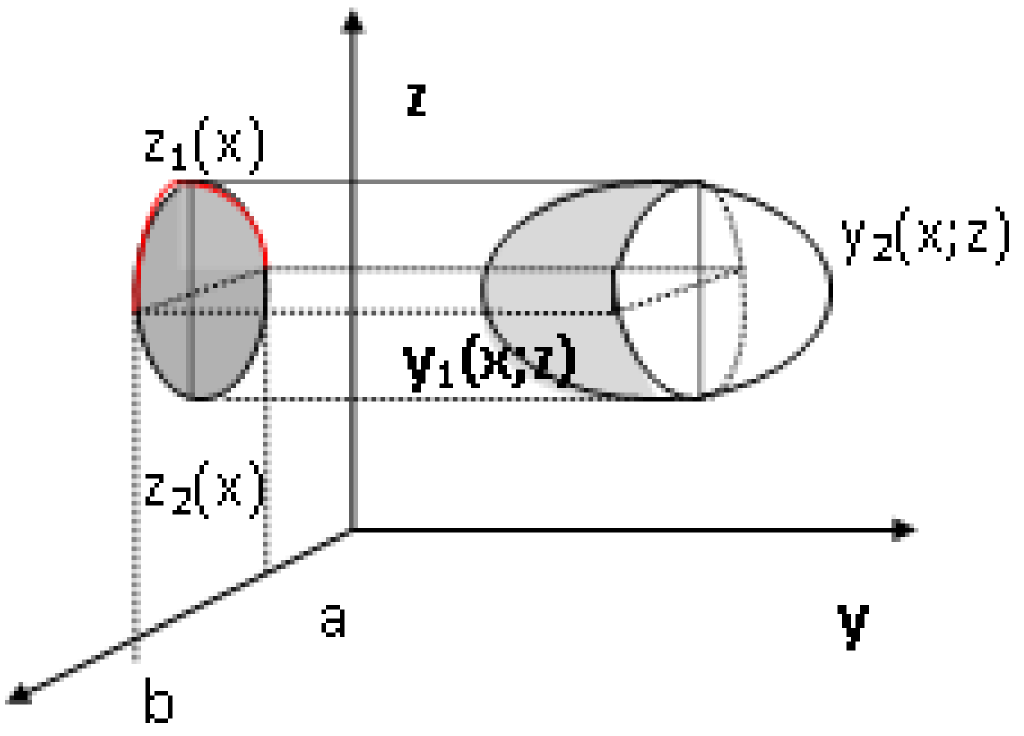
- $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y), \quad (x,y) \in D_{xy}$



$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

REGIONES TIPO II

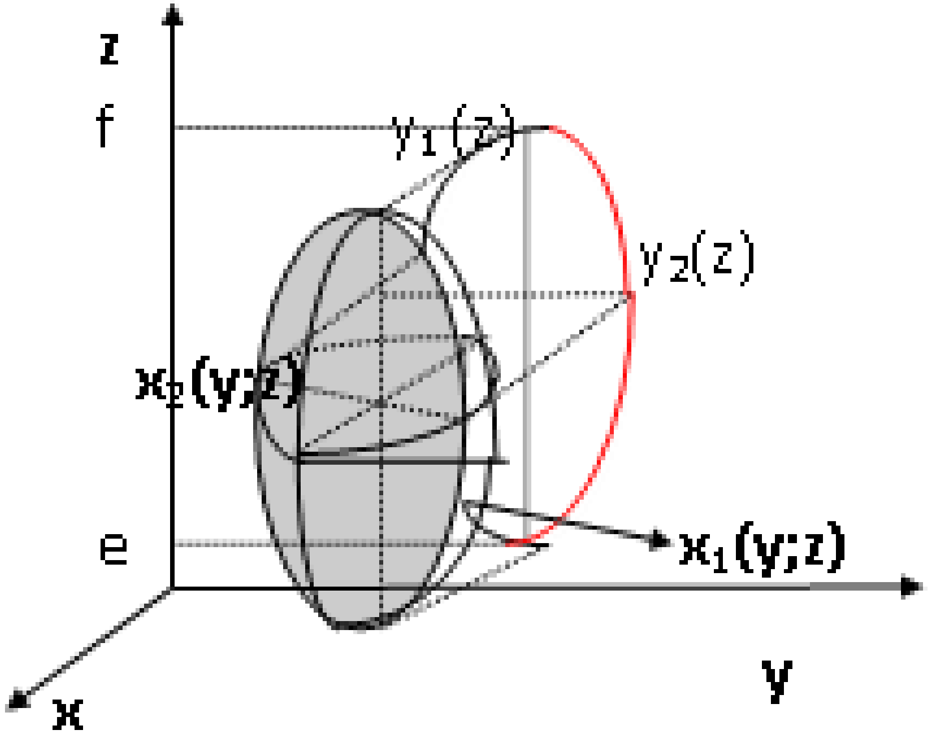
- $y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z)$, $(x,z) \in D_{xz}$



$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xz}} dxdz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$

REGIONES TIPO III

- $x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$



$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

$\iiint_E 6xy\,dV$ donde E está bajo el plano z=1+x+y y arriba de la región del plano xy limitada por las curvas $y=\sqrt{x}$, y=0,x=1

12) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

b) $H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z \leq 6 \ \wedge \ z \geq x+y \ \wedge \ x\geq 0 \wedge y\geq 0 \}$

e) $H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z\geq x^2 \ \wedge \ x\geq z^2 \ \wedge \ x\geq |\, y \,| \}.$

h) H definido por $x^2+2y^2+z \leq 32$, $z \geq x^2$.

Cambio de Variables

Recordamos que:

$$\iiint_{E} f(x;y;z)dxdydz = \iiint_{E^*} f[x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w)]|J|\,dudvdw$$

siendo: $|J| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$

Obs: Las hipótesis del teorema son similares a las de integrales dobles

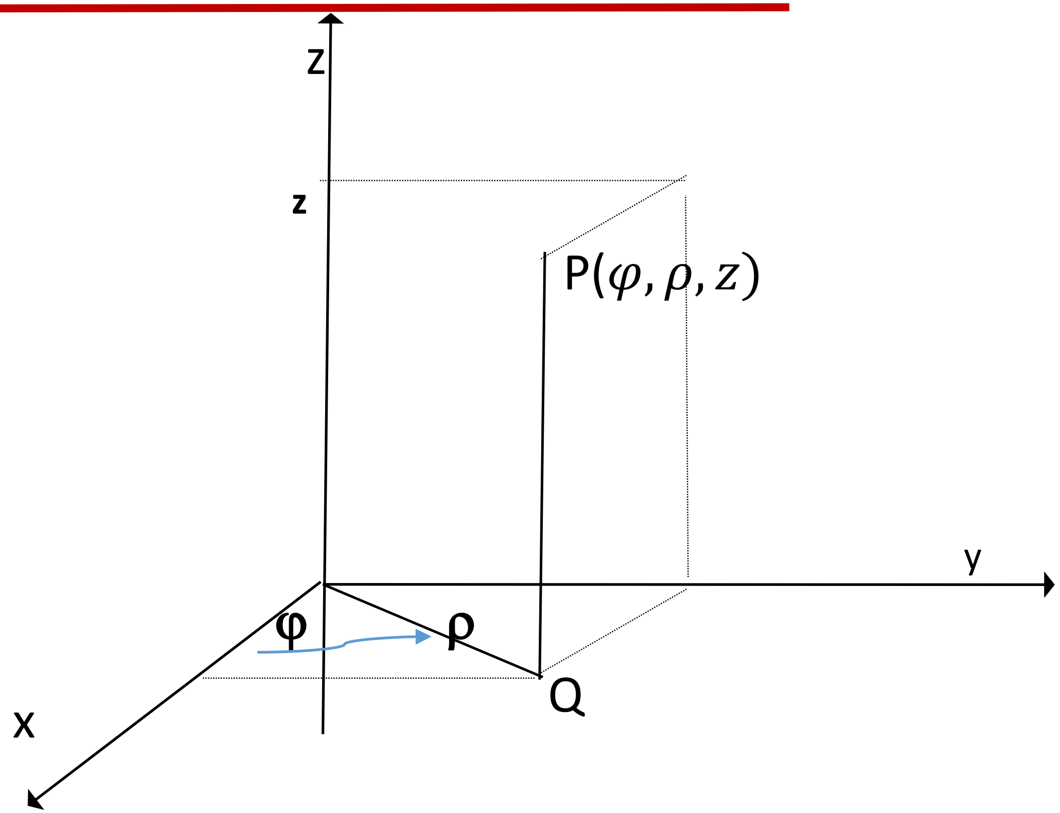
Coordenadas cilíndricas

- ρ es la distancia de O a Q. Es un número real positivo o cero.
- φ es el ángulo que forma $\overrightarrow{OQ}$ con el semieje positivo de las x. "$\varphi \in [0, 2\pi)$"
- Las fórmulas del pasaje son:

x = ρ cos φ

y = ρ sen φ

z = z



Jacobiano para coordenadas cilíndricas

- $|J_T| = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix}$ con $\begin{cases} x = \rho \cdot cos\varphi \\ y = \rho \cdot sen\varphi \\ z = z \end{cases}$

- $|J_T| = \begin{vmatrix} cos\varphi & -\rho \cdot sen\varphi & 0 \\ sen\varphi & \rho \cdot cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (\rho \cdot cos^2\varphi + \rho \cdot sen^2\varphi) = \rho$

- $\boxed{\iiint_E F(x;y;z)dxdydz = \iiint_{E^*} F(\rho \cdot cos\varphi; \rho \cdot sen\varphi; z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz}$

$\iiint_E x\,dV$ donde E está definido por el paraboloide $4y^2+4z^2 \leq x \leq 4$

D definido por: $x^2 + y^2 - 6 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

12) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

f) H definido por $x^2 + z^2 \leq 9$, $y \geq 2x$, $y \leq 2x + 4$.

g) H definido por $y \geq x^2$, $x^2 + y^2 \leq 2$, $z \geq 0$, $z \leq x$.

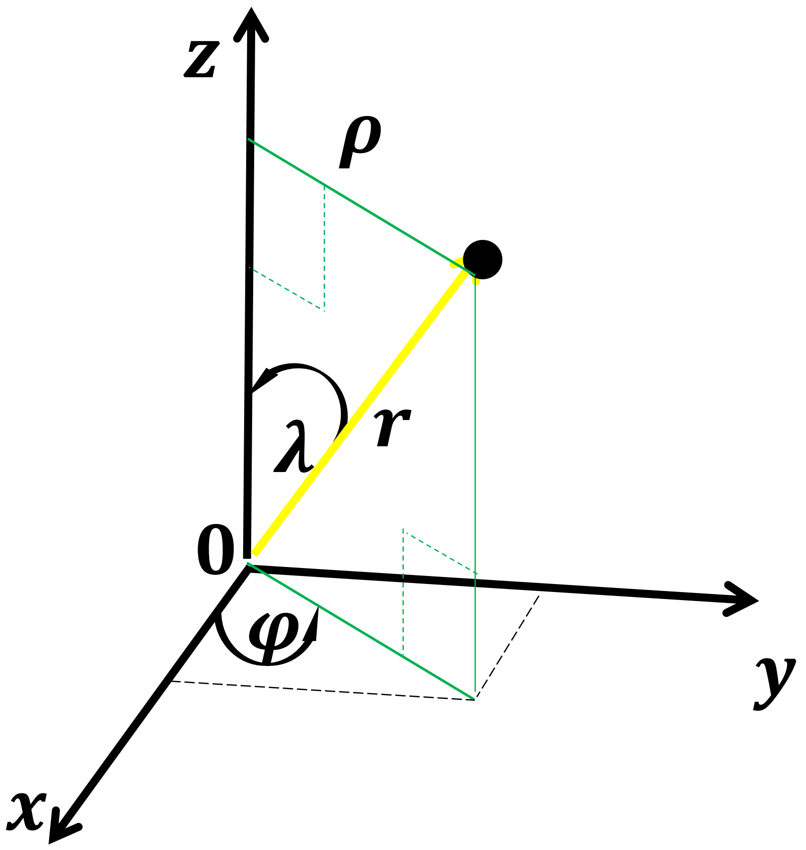
h) H definido por $x^2 + 2y^2 + z \leq 32$, $z \geq x^2$.

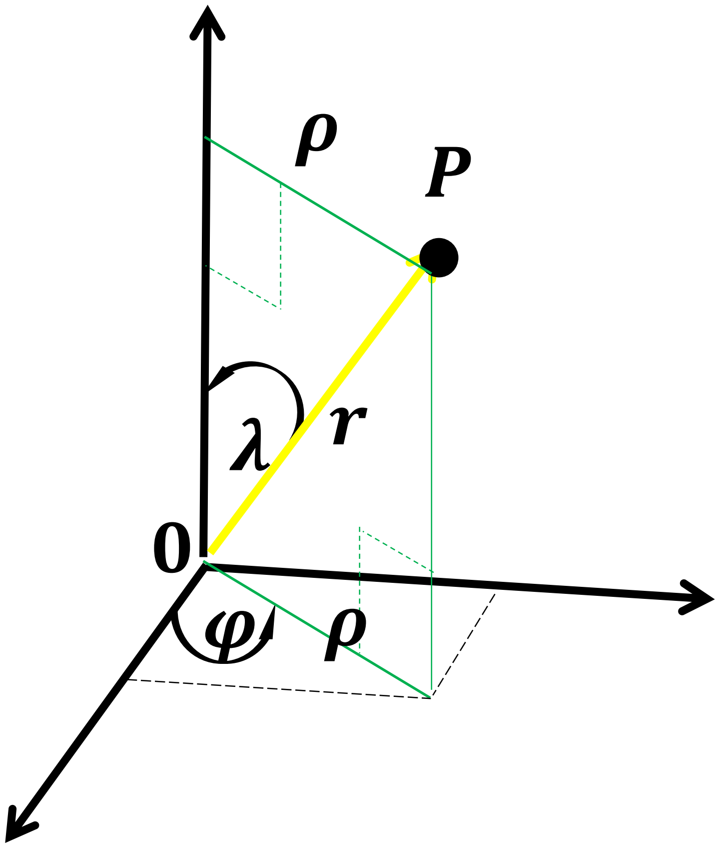
Coordenadas esféricas

- r $\in \mathbb{R}_0^+$ es la distancia entre el centro de coordenadas y el punto P

- λ es el ángulo que forma el semieje positivo de las z con el radio vector ($\lambda \in [0,\pi]$)

- φ es el ángulo que forma el semieje positivo de las x con la proyección de r sobre el plano xy, ($\varphi \in [0,2\pi)$).





1º) en el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es r, planteamos:

$$cos\lambda = \frac{z}{r} \Longrightarrow \boxed{z = r \cdot cos\lambda}$$

$$sen\lambda = \frac{\rho}{r} \Longrightarrow \boxed{\rho = r \cdot sen\lambda}$$

2º) en el triángulo cuya hipotenusa es ρ, planteamos:

$$cos\varphi = \frac{x}{\rho} \Longrightarrow \boxed{x = \rho \cdot cos\varphi}$$

$$sen\varphi = \frac{y}{\rho} \Longrightarrow \boxed{y = \rho \cdot sen\varphi}$$

- Reemplazamos $\boxed{\rho = r \cdot sen\lambda}$ en $\boxed{x = \rho \cdot cos\varphi}$ y en $\boxed{y = \rho \cdot sen\varphi}$
- Obtenemos:

$$\begin{cases} x = r \cdot sen\lambda \cdot cos\varphi \\ y = r \cdot sen\lambda \cdot sen\varphi \\ z = r \cdot cos\lambda \end{cases}$$

- $\boxed{T(r;\varphi;\lambda) = (r \cdot sen\lambda \cdot cos\varphi; r \cdot sen\lambda \cdot sen\varphi; r \cdot cos\lambda)}$

- Ahora armamos el jacobiano:

- $J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\lambda \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\lambda \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\lambda \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = r \cdot sen\lambda \cdot cos\varphi \\ y = r \cdot sen\lambda \cdot sen\varphi \\ z = r \cdot cos\lambda \end{cases}$

- $J = \begin{vmatrix} sen\lambda \cdot cos\varphi & -r \cdot sen\lambda \cdot sen\varphi & r \cdot cos\lambda \cdot cos\varphi \\ sen\lambda \cdot sen\varphi & r \cdot sen\lambda \cdot cos\varphi & r \cdot cos\lambda \cdot sen\varphi \\ cos\lambda & 0 & -r \cdot sen\lambda \end{vmatrix}$

$$\boxed{|J| = r^2 \cdot sen\lambda}$$

12) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

d) H definido por $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2$ con $a > 0$.

Aplicaciones físicas

- Masa de un sólido:

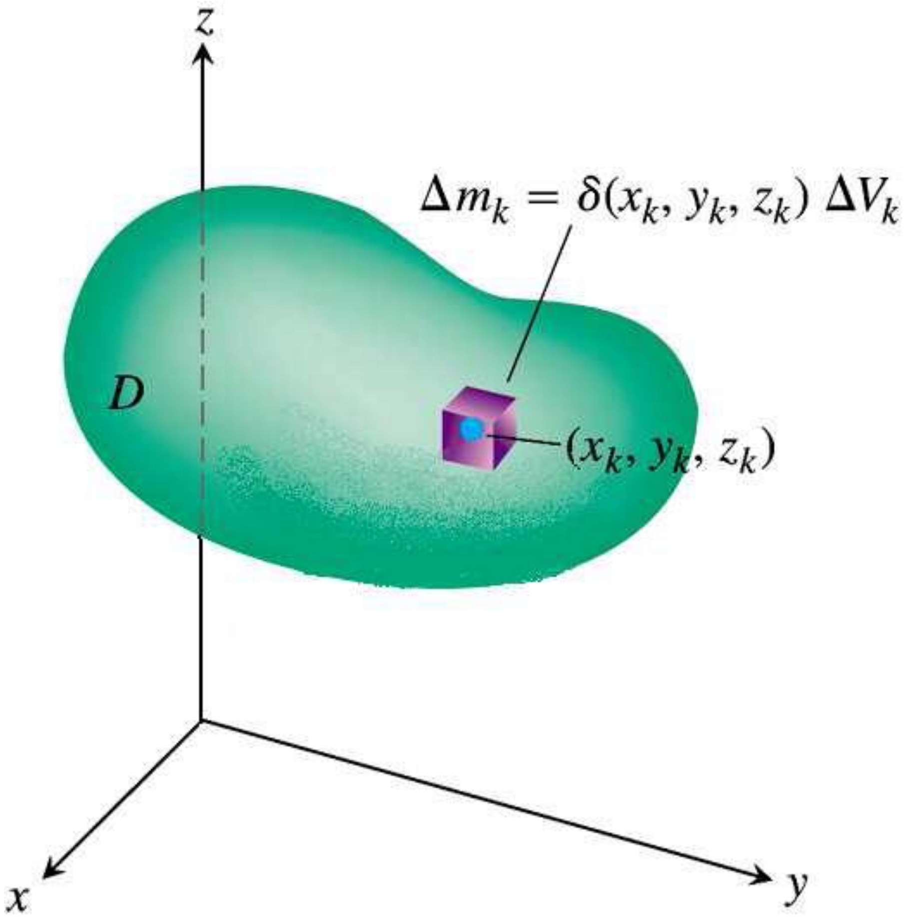
$$M = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dV$$

- Momentos estáticos

$$S_{xy} = \iiint_D z\delta(x,y,z)\,dV$$

$$S_{xz} = \iiint_D y\delta(x,y,z)\,dV$$

$$S_{yz} = \iiint_D x\delta(x,y,z)\,dV$$



- Coordenadas del centro de masa:

$$x_{cm} = \frac{S_{yz}}{M} \qquad y_{cm} = \frac{S_{xz}}{M} \qquad z_{cm} = \frac{S_{xy}}{M}$$

Momento de inercia de un sólido

$$J_x = \iiint_D \left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,dV$$

$$J_y = \iiint_D \left(x^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,dV$$

$$J_z = \iiint_D \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y,z)\,dV$$

17) Calcule la masa de los siguiente cuerpos:

a) Cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.