Polinomio de Taylor

Unidad VII a

Diferenciales sucesivos

- Sea f: A$\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en A, df = $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_i}} \Delta x_i$
- Si f es clase 2, el diferencial segundo de f, que anotamos *d^2f,* es el diferencial del diferencial total de la función. Es decir: *$d^2f = d(df)$.*
- Si f: A$\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d^2f = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}(\Delta \mathrm{x})^2 + 2\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} \Delta \mathrm{x} \Delta \mathrm{y} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}(\Delta \mathrm{y})^2$$

$$d^3f = \frac{\partial^3 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^3}(\Delta \mathrm{x})^3 + 3\frac{\partial^3 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}}(\Delta \mathrm{x})^2 \Delta \mathrm{y} + 3\frac{\partial^3 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y} \partial \mathrm{y}}(\Delta y)^2 \Delta x + \frac{\partial^3 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^3}(\Delta \mathrm{y})^3$$

Repaso de análisis I

- Si una función y = f(x) es derivable hasta el orden (n+1), en un entorno de un punto "a", dicha función se puede aproximar, en ese entorno, mediante un polinomio de grado n, escrito en potencias de (x -a).

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^{(n)}}_{P(x)} + T_{n+1}$$

- Se cumple f(a)=p(a); f'(a)=p'(a), ……………………., $f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a)$

Polinomio de Taylor para campos escalares de 2 variables

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A abierto, f clase n+1, $P_0 \in A$

$$f(x,y) = \underbrace{f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2} d^2 f(P_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(P_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots +}_{P(x,y)} R_{n+1}$$

Geogebra

Importante

- La función y el polinomio de Taylor coinciden en P_0 y también coinciden en P_0 todas las derivadas hasta orden n. **La igualdad vale sólo en ese punto.**

- f(x,y) $\approx P(x,y)$ si (x,y)$\in$ E*(P_0)

Los más usuales

- $\mathrm{P}(x;y) = F\ (x_0;y_0) + \frac{1}{1!}dF(x_0;y_0)$

  $\mathrm{P}(x;y) = F\ (x_0;y_0) + F'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$

- $\mathrm{P}(x;y) = F\ (x_0;y_0) + \frac{1}{1!}dF(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2F(x_0;y_0)$

$\mathrm{P}(x;y) = F\ (x_0;y_0) + F'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0)(y-y_0) +$

$+\frac{1}{2!}[F''_{xx}(x_0;y_0)(x-x_0)^2 + 2F''_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + F''_{yy}(x_0;y_0)(y-y_0)^2]$

03) Desarrolle los siguientes campos por Taylor hasta 2° orden en un entorno de $\overline{A}$.

a) $f(x,y) = x - y\sqrt{6-x}$, $\overline{A} = (2,3)$.

b) $f(x,y) = y\ln(x) + x\ln(y-x)$, $\overline{A} = (1,2)$.

04) Calcule en forma aproximada: c) $8.97 / 3.02$.

2. El polinomio de Taylor de 2^{do} grado para f(x;y) en un entorno de (2; 1) es $x^2 - 3xy + 2x + y - 1$. Hallar una ecuación cartesiana para el plano tangente a la gráfica de f en $(2;\ 1;\ z_0)$.

3. Encontrar el valor de la derivada direccional máxima de f en (1, 3) sabiendo que el polinomio de Taylor de 2^{do} grado de f en un entorno de (1,3) es $2+x-y+x^2-xy$.

5. Sabiendo que el polinomio de Taylor de 2° grado de f(x;y) en los alrededores del (2;-1) es $P(x;y)=3+2x-y+x^2$ y que $\bar{g}$ es clase C^1 con $\bar{g}(1;1)=(2;-1)$ y $D\bar{g}(1;1)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar en forma aproximada $f o \bar{g}(1.01;0.98)$