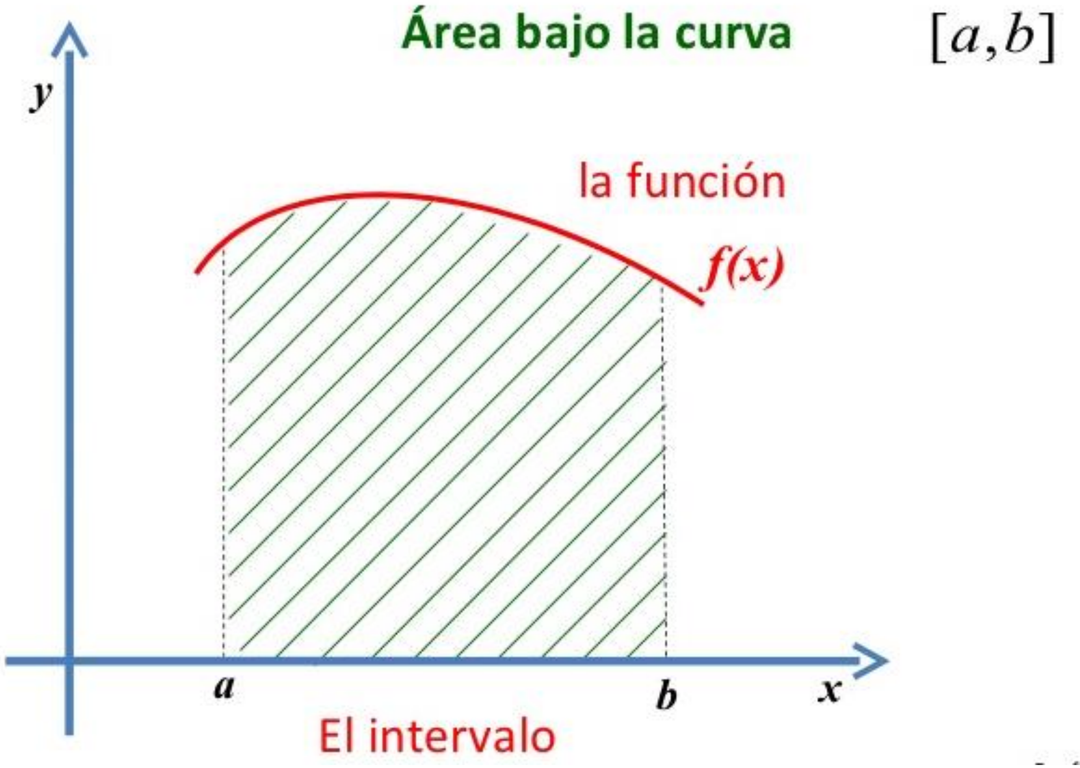
# Integrales de línea

**Unidad VIII**

# REPASO DE ANÁLISIS I

Dada una función f continua y no negativa en el intervalo cerrado [a,b], queremos calcular el área encerrada entre la gráfica de f, el eje x y las rectas x=a y x=b



Hacemos una ***partición*** del intervalo [a,b],

$$a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ “armamos” un rectángulos con base dicho intervalo y altura $f(c_i)$

Área$\cong \sum_{i=1}^{n}$ f(ci) $\Delta x_i$

Área$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

# Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

# Regla de Barrow

Si f es una función continua en [a,b] y G(x) es una primitiva de f entonces resulta que

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

*Recordemos que si G(x) es una primitiva de f(x) entonces G´(x)=f(x)*

# Longitud de arco de curva

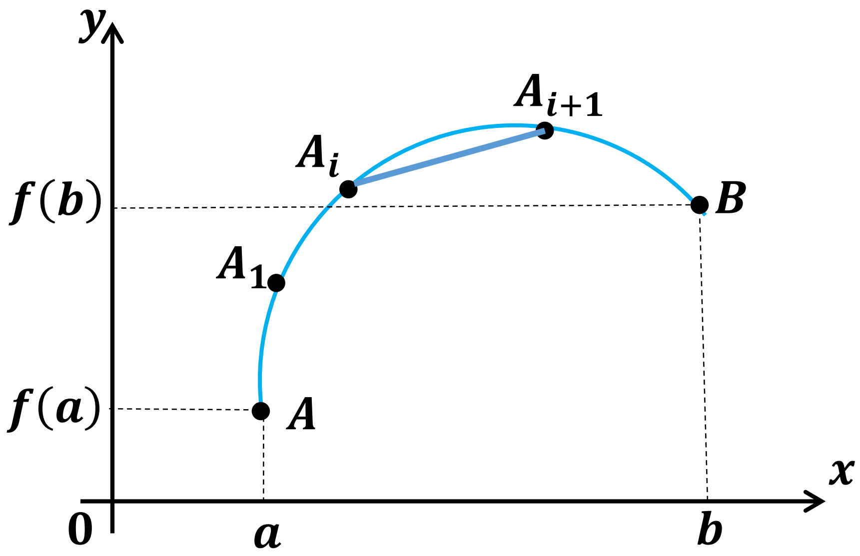
- Sea C curva imagen de $\vec{g}: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{g}$(t)=(x(t),y(t)) inyectiva, clase 1 con vector derivado distinto del vector nulo. (vale para $\mathbb{R}^3$)

- Se desea calcular la longitud de C.

- Para eso, se considera una partición en [a,b] mediante $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ que induce una partición en la curva C.

Geogebra

Lo mostramos en $\mathbb{R}^2$, pero vale en $\mathbb{R}^3$




Queremos calcular la longitud de la curva $AB$.

Para eso, se considera una partición en [a,b] mediante a = $t_0$ <$t_1$ <....<$t_n$=b que induce una partición en la curva C.

$$Longitud(\mathcal{C}_{AB}) \cong \sum_{i=0}^{n} |\overline{A_{i+1}A_i}|$$

$$(x_i; y_i) = \vec{g}(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$$
$$(x_{i+1}; y_{i+1}) = \vec{g}(t_{i+1}) = (x(t_{i+1}); y(t_{i+1}))$$

$$|\overline{A_{i+1}A_i}| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}$$

Aplicamos el teorema de Lagrange de Análisis I a x(t) e y(t):

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\alpha_i) \cdot \Delta t_i \quad \text{e} \quad \mathrm{y}(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\beta_i) \cdot \Delta t_i$$

reemplazando estas expresiones en:

$$|\overline{A_{i+1}A_i}| = \sqrt{[x'(\alpha_i) \cdot \Delta t_i]^2 + [y'(\beta_i) \cdot \Delta t_i]^2}$$

- $|\overline{A_{i+1}A_i}| = \sqrt{\{[x'(\alpha_i)]^2 + [y'(\beta_i)]^2\}} \cdot |\Delta t_i|$

$\Delta t_i$

- $Longitud(\mathcal{C}_{AB}) \cong \sum_{i=0}^{n} |\overline{A_{i+1}A_i}| = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\{[x'(\alpha_i)]^2 + [y'(\beta_i)]^2\}} \cdot \Delta t_i$

- $Longitud(\mathcal{C}_{AB}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\{[x'(\alpha_i)]^2 + [y'(\beta_i)]^2\}} \cdot \Delta t_i$

- Long C=$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_a^b \|\overrightarrow{g'}(t)\|dt$

**ds**
Diferencial de arco

- Long C=$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_a^b \|\overrightarrow{g'}(t)\|dt$

ds
Diferencial de arco

01) Dados los siguientes arcos de curva, halle dos parametrizaciones que los orienten en sentido opuesto y plantee el cálculo de su longitud verificando que el resultado no depende de la orientación.

a) Arco de parábola de ecuación $y = x^2$ entre los puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$.
b) Circunferencia de radio 2 con centro en (2,1).

e) $C \subset \Re^3$, intersección de $y = x^2$ con $x + z = 2$ en el 1° octante.
f) $C \subset \Re^3$, intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

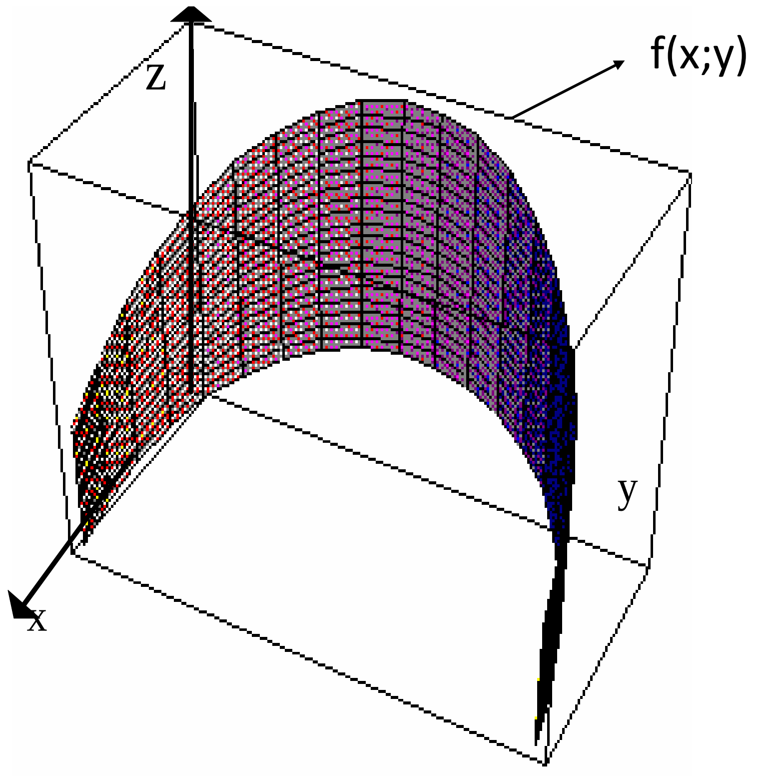
## Observaciones:

1) La longitud de la curva no cambia si se elige otra parametrización.

2) La longitud de la curva no cambia si se cambia el sentido de recorrido de la curva.

# Integral de línea de campo escalar

- Si f:A$\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, f(x;y)$\geq$ 0 y C es una curva plana parametrizada por $\vec{g}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{g}$(t)=(x(t),y(t)) inyectiva, clase 1 con vector derivado distinto del vector nulo. Se quiere calcular el área lateral de una superficie (una especie de “pared”) que tiene por curva directriz a C y por altura a f(x;y).
- Geogebra



- Para eso, se considera una partición en [a,b] mediante a = $t_0$ <$t_1$ <....<$t_n$=b que induce una partición en la curva C.

- Área de trozo de pared≈altura.long $\overline{A_i A_{i+1}}$.

- Área de trozo de pared ≈ f($\vec{g}(t_i)$) $\sqrt{\{[x´(\alpha_i)]^2 + [y´(\beta_i)]^2\}} \cdot\ \Delta t_i$

$$\text{Área}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} \mathrm{f}(\vec{g}(t_i))\sqrt{\{[x´(\alpha_i)]^2+[y´(\beta_i)]^2\}}\cdot\ \Delta t_i$$

$$\int_C f(\vec{X})ds=\int_a^b f(\bar{g}(t)).||\bar{g}'(t)||dt$$

Observaciones

1) La definición vale para curvas en $\mathbb{R}^n$.

2) La definición vale para cualquier f siempre que sea continua salvo un número finito de puntos.

# Propiedades

- Si f(x;y;z) = 1 , $\int_C \; ds$ =Long $C$

- Linealidad

- La integral no cambia si se usan distintas parametrizaciones

- $\int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds$
  con $C_1$ y $C_2$ con intersección nula salvo un número finito de puntos

# Aplicaciones físicas

- Masa de un alambre $$M = \int_C \delta\left(\overline{X}\right) ds$$

- Momentos estáticos en el espacio

$$S_{xy} = \int_C z\delta\left(\overline{X}\right) ds \qquad S_{yz} = \int_C x\delta\left(\overline{X}\right) ds \qquad S_{xz} = \int_C y\delta\left(\overline{X}\right) ds$$

- Centro de masa en el espacio

$$x_G = \frac{S_{yz}}{M} \qquad y_G = \frac{S_{xz}}{M} \qquad z_G = \frac{S_{xy}}{M}$$

- Momentos estáticos en el plano

$$S_y = \int_C x\delta\left(\overline{X}\right)ds \qquad S_x = \int_C y\delta\left(\overline{X}\right)ds$$

- Centro de masa en el plano

$$x_G = \frac{S_y}{M} \qquad y_G = \frac{S_x}{M}$$

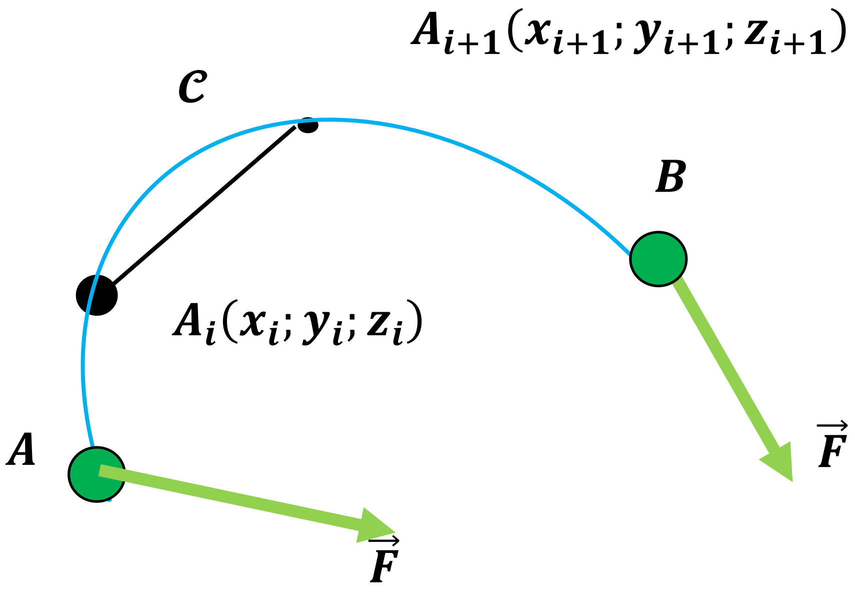
$$\int_C f(\vec{X})ds = \int_a^b f(\bar{g}(t)).||\bar{g}'(t)||dt$$

04) Entre los puntos (0,0,0) y (1,1,1), en la intersección del plano $y = x$ con la superficie de ecuación $z = 2y - x^2$ con $z \geq 0$, se ha formado un hilo conductor eléctrico con resistividad lineal ($\Omega/\mathrm{m}$) que en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano $x = 1$. Calcule la resistencia eléctrica de dicho hilo conductor.

05) Halle las coordenadas del centro de masa de un alambre filiforme cuya densidad lineal en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje $z$, si la forma del alambre queda determinada por la intersección de $x + y + z = 4$ con $y = 2x$ en el 1° octante.

# Integral de Línea de campo vectorial. Trabajo

- Sea $\bar{F}: Dom \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo (o $\bar{F}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) un campo de fuerzas.
- C una curva suave a trozos que va de A (punto inicial) a B (punto final) incluida en el dominio de $\bar{F}$ parametrizada por $\bar{g}$:[a,b] $\to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)con $\bar{g}$(a)=A y $\bar{g}$(b)=B.
- Se quiere calcular el trabajo que realiza una partícula cuando se desplaza sobre C bajo la acción de $\bar{F}$.
- Si la fuerza es constante y el desplazamiento es rectilíneo, W= $\bar{F}.\bar{d}$




$$W_i = \vec{F}_{(\vec{g}(t_i))} \bullet \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$$

El trabajo aproximado desde A hasta B es:

$$W \cong \sum_{i=0}^{n} \vec{F}_{(\vec{g}(t_i))} \bullet \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$$

$$\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = (x_{i+1} - x_i;\ \ y_{i+1} - y_i;\ z_{i+1} - z_i)$$

En cada componente se puede aplicar el teorema de Lagrange.

$$\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = (x'(\alpha_i)\Delta t_i\ ,\ y'(\beta_i)\Delta t_i,\ z'(\gamma_i)\Delta t_i)$$

$$\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = (x'(\alpha_i)\ ,\ y'(\beta_i),\ z'(\gamma_i))\ \Delta t_i$$

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \vec{F}_{(\vec{g}(t_i))} \bullet (x'(\alpha_i)\ ,\ y'(\beta_i),\ z'(\gamma_i))\ \Delta t_i$$

$d\bar{s}$

Diferencial vectorial de arco

$$\text{W}=\int_a^b \bar{F}\left(\bar{g}(t)\right) \bar{g}'(t)dt = \int_C \ \bar{F}.d\bar{s}$$

# POSIBLES NOTACIONES

- W=$\int_a^b \bar{F}\left(\bar{g}(t)\right).\bar{g}'(t)dt$

- $\int_{C_{AB}} \bar{F}.d\bar{s} = \int_{C_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

# Propiedades

- Linealidad
- La integral no cambia si se usan distintas parametrizaciones que mantengan el punto inicial y final.
- $\int_{C_1 \cup C_2} \bar{F}(x,y,z) d\bar{s} = \int_{C_1} \bar{F}(x,y,z) d\bar{s} + \int_{C_2} \bar{F}(x,y,z) d\bar{s}$

  con $C_1$ y $C_2$ con intersección nula salvo un número finito de puntos
- $\int_{C_{AB}} \bar{F}(x,y,z) d\bar{s} = -\int_{C_{BA}} \bar{F}(x,y,z) d\bar{s}$

12) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x-y\,,\,x\,,\,y\,z)$ a lo largo de la curva intersección de $z = x - y^2$ con $y = x^2$ desde $(1,1,0)$ hasta $(-1,1,-2)$.

13) Calcule el trabajo de $\bar{f}(x,y,z) = 3x\,\breve{\imath} - x\,z\,\breve{\jmath} + y\,z\,\breve{k}$ a lo largo de la curva de ecuación $\overline{X} = (t-1, t^2, 2\,t)$ con $t \in [1,3]$. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?, ¿puede asegurar el mismo resultado si manteniendo dichos puntos se utiliza otra curva?.

# Trayectorias cerradas

- Son aquellas en las que el punto inicial y final de la curva es el mismo.

- Notación: $\oint_C \bar{F}.d\bar{s}$

- Por convención se considera **sentido de circulación positivo** a lo largo de una curva cerrada, a aquél que, cuando se avanza por ella, deja a la izquierda el recinto del cual *C* es su frontera.

11) Calcule la circulación de $\bar{f}(x, y) = (y, -x)$ a lo largo de la frontera de la región definida por $x^2 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1$, en sentido positivo. Observe que en este ejemplo la circulación no resulta nula, aún con camino cerrado.

# Teorema de independencia de la trayectoria

Sea $\mathrm{U}: \mathrm{Dom} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ (n=2 o 3), clase 1, y C una curva suave a trozos que va de A (punto inicial) a B (punto final) parametrizada por $\bar{g}$:[a,b] $\to \mathbb{R}^n$ con $\bar{g}$(a)=A y $\bar{g}$(b)=B.

Entonces: $\int_{C_{AB}} \bar{\nabla}\mathrm{U} d\bar{s}$ =U(B)-U(A)

# Definiciones

- Un campo vectorial $\vec{F}: \mathrm{Dom} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{n}$ es un **campo de gradientes** si y sólo si existe $\mathrm{U}: \mathrm{Dom} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{\nabla} U = \vec{F}$.

- La función U es la **función potencial** de $\vec{F}$.

- Un campo es **conservativo** si y sólo si $\oint_C \bar{F} . d\bar{s}$ =0 para toda curva cerrada C suave a trozos.

# Propiedad

Sea $\vec{F}: \mathrm{Dom} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{n}$ (n=2 o 3) continuo

$\vec{F}$ conservativo si y sólo si $\vec{F}$ es un campo de gradientes

# Condición necesaria para que un campo sea conservativo

Sea $\vec{F}: \mathrm{Dom} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{n}$ (n=2 o 3) con dominio abierto y $\vec{F}$ clase 1.

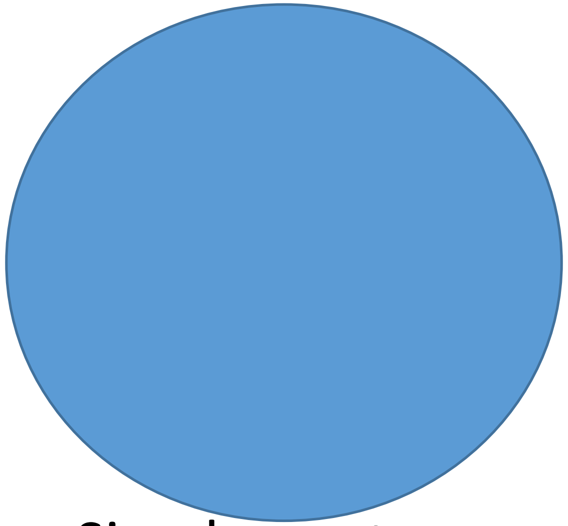
Si $\vec{F}$ es conservativo, entonces D$\vec{F}$ es simétrica.

IMPORTANTE: Es condición necesaria pero no suficiente.

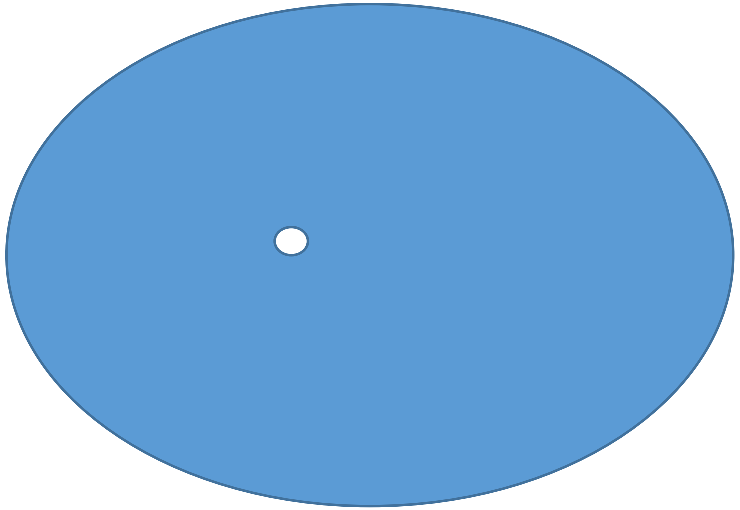
$$\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \left( \frac{-\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2} ; \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2} \right)$$

# Conjuntos simplemente conexos

- Un conjunto es **simplemente conexo** si y sólo si existe una superficie que encierra cualquier curva cerrada incluida en él, que está incluida en él.



Simplemente conexo



No simplemente conexo

# Condición necesaria y suficiente para la existencia de función potencial

Sea $\vec{F}: \mathrm{Dom} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{n}$ (n=2 o 3) con dominio abierto y simplemente conexo y $\vec{F}$ clase 1.

$\vec{F}$ es conservativo si y sólo si D$\vec{F}$ es simétrica.

# Cálculo de función potencial

- Como $\bar{\nabla} U = \left( \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{P(x,y)} \quad \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_{Q(x,y)} \right)$, se integra P(x,y) respecto de $\underline{x}$ para obtener U(x,y)
- $$U = \underbrace{\int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\, dx}_{G(x;y)} + \varphi(y)$$
- Ser deriva lo que se obtuvo respecto de $\underline{y}$ y se compara con Q(x,y) para obtener una expresión de φ’(y)
- Se integra ϕ’(y)
- Se reconstruye U(x,y)

14) Verifique si los siguientes campos admiten función potencial; de existir, determínela.

a) $\bar{f}(x,y) = (y - 2xy + 1, x + 1 - x^2)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (x - y^2, y - x^2)$.

c) $\bar{f}(x,y,z) = (z\cos(xz), z, y + x\cos(xz))$.

d) $\bar{f}(x,y,z) = (2x + y + 1, x + z, y + 2z)$.

19) Siendo $\bar{f}(x,y,z) = (2xy + z^2, x^2, 2xz)$, **verifique** que admite función potencial en $\Re^3$ y **calcule** $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s}$ a lo largo de la curva $C$ de ecuación $\overline{X} = (2t + e^{t^3 - t}, t^2 - t, 3t)$ con $0 \le t \le 1$ orientada en el sentido que impone la parametrización que se indica.

# Resumen: estrategias para calcular un trabajo (hasta ahora)

- Integral de línea de un campo vectorial. Se debe parametrizar la curva
- Haciendo la diferencia de potencial, en el caso de que el campo sea conservativo.

# ¿cómo decidir si $\vec{f}$ es conservativo?

¿D$\vec{f}$ es simétrica?

No

$\vec{f}$ no es conservativo

Si

¿Dom$\vec{f}$ es simplemente conexo?

No

Se calcula $\oint_C \vec{f} d\vec{s}$ con C una curva cerrada que rodea punto "feo".
¿Da 0?

No

$\vec{f}$ no es conservativo

Si

¿ $\oint_C \vec{f} d\vec{s}$=0 ∀C curva cerrada?

No

$\vec{f}$ no es conservativo

Si

$\vec{f}$ es conservativo
Pero es imposible de chequear analíticamente

Si

$\vec{f}$ es conservativo