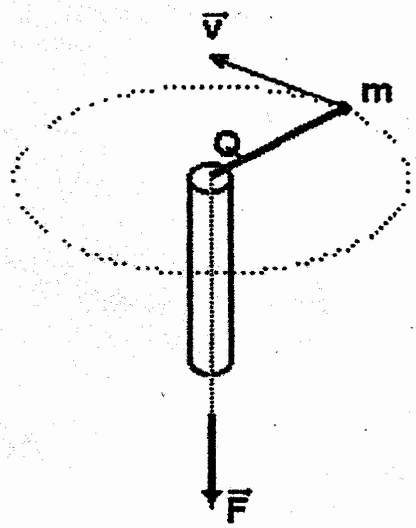
**128** - Un punto material de masa m = 200 g, se encuentra sujeto al extremo de una cuerda de masa despreciable que pasa por un tubo vertical y describe una órbita circular sobre un plano horizontal. La masa m tiene una velocidad cuyo módulo es 2 m/s cuando el radio de su trayectoria es 40 cm, en este caso es necesario ejercer una fuerza **F** en el otro extremo de la cuerda. Se incrementa luego dicha fuerza para lograr que el punto material describa una trayectoria de radio 20 cm. Calcular :

a) El valor inicial de la fuerza

b) El módulo de la velocidad del punto material cuando el radio de su trayectoria es 20 cm.

c) El trabajo realizado por la fuerza sobre m en ese intervalo.

Sugerencia: Utilizar el teorema de conservación del momento de la cantidad de movimiento.




a) Valor inicial de la fuerza F.

La fuerza F se va incrementando (aumentando) a medida que pasa el tiempo, siempre es radial.

En el instante inicial ($t_1$) podemos escribir:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \left(a_n = \frac{v^2}{r}\right)$$

$$F = m\, a_n$$

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

En $t_1$: $F_1 = \dfrac{m v_1^2}{r_1} \longrightarrow F_1 = 0{,}2\,kg \cdot \dfrac{(2\,m/s)^2}{0{,}4\,m}$

$$\boxed{F_1 = 2\,N}$$

b) Como la fuerza F es siempre radial (central),

$\vec{M}_{F,O} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ para todo instante.

tienen la misma dirección

Según el teorema de Conservación del momento angular $\vec{L}$ (también llamado "momento de la cantidad de movimiento", o "momento cinético")

$$\sum \vec{M}_{F,O} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \left( o \ \frac{\Delta \vec{L}_O}{\Delta t} \text{ con } \Delta t \to 0 \right)$$

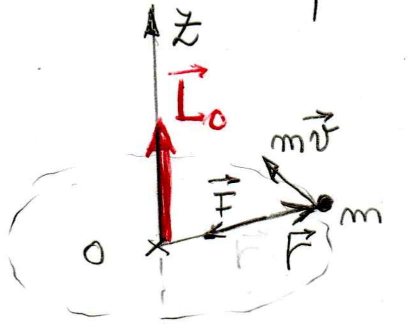
$\longrightarrow$

Por lo tanto, $\Sigma \vec{M}_{F,0} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$

$\Downarrow \; (\Delta \vec{L}_0 = 0)$

$\vec{L}_0$ es constante.
(se conserva "$\vec{L}$" respecto de "0")

Entonces podemos escribir:




$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$

$\vec{L}_0 = r\, m\, v\, \hat{k}$

$$\vec{L}_{0_1} = \vec{L}_{0_2}$$

$\vec{L}_{0_1}$: en $t_1$; $\vec{L}_{0_2}$: en $t_2$

$$\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

$$\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

$$r_1 \cancel{m} v_1 \hat{k} = r_2 \cancel{m} v_2 \hat{k}$$ (según la regla de la mano derecha

$$v_2 = \frac{r_1 v_1}{r_2}$$

$$v_2 = \frac{0{,}4\,m \cdot 2\,m/s}{0{,}2\,m} \Longrightarrow \boxed{v_2 = 4\,\frac{m}{s}}$$

c) Trabajo realizado por F entre $t_1$ y $t_2$.

F es una fuerza variable. Para calcular el trabajo deberíamos resolver esta integral

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Longrightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} -F(r) \cdot dr$$

(En este curso no resolveremos integrales)

Podemos usar otro camino: Según el Teorema de Conservación de la energía cinética:

$$W_{\Sigma F} = \Delta E_c$$

Aquí $\Sigma F = F$ → la única fuerza que actúa.

$$W_F = E_{c_2} - E_{c_1}$$

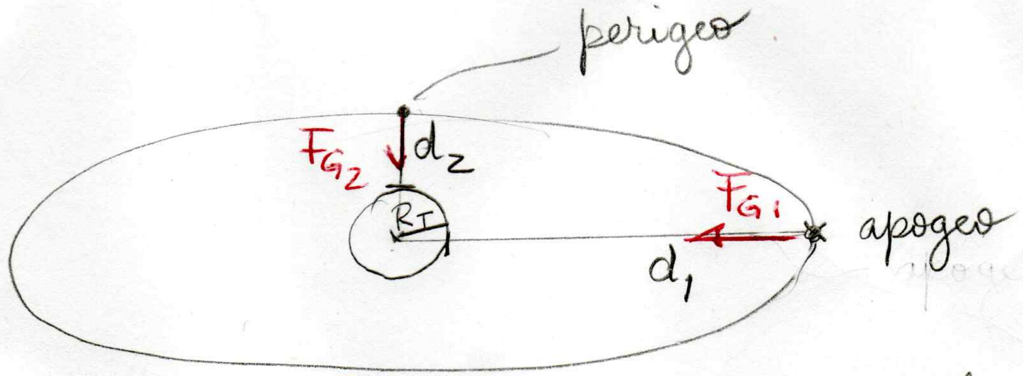
en $t_2$ en $t_1$

$$W_F = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W_F = \frac{1}{2} \, 0{,}2\,kg \left(16 \frac{m^2}{s^2} - 4 \frac{m^2}{s^2}\right)$$

$$\boxed{W_F = 1{,}2\,J}$$

**129** - Un satélite terrestre describe una órbita elíptica. Sus distancias mínima y máxima a la superficie terrestre son 350 km y 2550 km respectivamente. Su velocidad máxima es de módulo 29740 km/h. Adoptando para el radio terrestre el valor de 6380 km determinar las velocidades del satélite en el apogeo y el perigeo.
Sugerencia: Utilizar el teorema de conservación del momento de la cantidad de movimiento.




$R_T = 6380\,km$

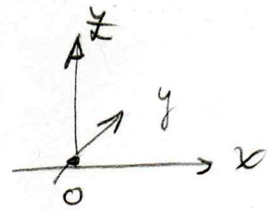
$d_1 = 2250\,km$

$d_2 = 350\,km$

$r_1 = R_T + d_1$

$r_2 = R_T + d_2$

$\sum \vec{M}_{F,0} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0$ es constante




$$\vec{L}_{0_1} = \vec{L}_{0_2}$$

$$\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

$$r_1 \cancel{m}\, v_1 \hat{k} = r_2 \cancel{m}\, v_2 \hat{k}$$

Donde r es mínimo, v es máxima

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_{máx} = v_2 = 29740\,km/h}$$

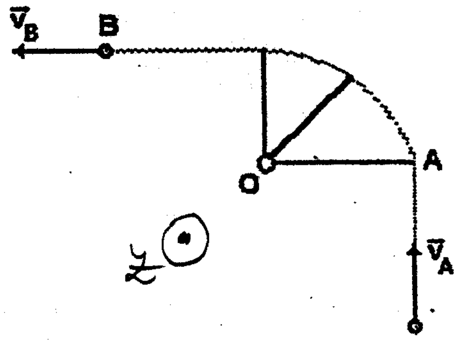
$$v_1 = \frac{r_2 v_2}{r_1} \Rightarrow v_1 = \frac{(R_T + d_2) v_2}{(R_T + r_1)}$$

$$v_1 = \frac{(6380\,km + 350\,km) \cdot 29740\,km/h}{(6380\,km + 2550\,km)}$$

$$\boxed{v_1 = 22413 \frac{km}{h}}$$

✓ **130 - Una persona de masa 60 kg se desliza sobre una superficie horizontal exenta de rozamiento con una velocidad cuyo módulo es 3 m/s. Se ase al extremo (A) de una cuerda estirada cuya longitud es 2 m y cuyo otro extremo está unido a un anillo que puede deslizar sin rozamiento alrededor de un poste (C).**

**Mientras gira, tira de la cuerda hasta quedar a una distancia de 1 m del poste. Cuando la dirección de su velocidad es perpendicular a la de su velocidad inicial, suelta la cuerda (B).**




**a) ¿Cuál es el módulo de su velocidad en ese instante?**

**b) Calcular el trabajo realizado por la persona sobre la cuerda.**

**Sugerencia: Utilizar el teorema de conservación del momento de la cantidad de movimiento.**

(a)

$$\underbrace{\Sigma \vec{M}_{F,O} = 0}_{\text{porque las fuerzas son centrales } \Rightarrow \ \vec{r} \times \vec{F} = 0} \Longrightarrow \vec{L}_{O_A} = \vec{L}_{O_B} \quad (\text{se conserva } \vec{L}_O)$$

$$\vec{r}_A \times m \vec{v}_A = \vec{r}_B \times m \vec{v}_B$$

$$r_A \cancel{m} v_A \hat{k} = r_B \cancel{m} v_B \hat{k}$$

$$2\,m \cdot 3\,\frac{m}{s} = 1\,m \cdot v_B$$

$$\boxed{v_B = 6\,\frac{m}{s}}$$

(b)

$$W_{\Sigma F} = \Delta E_c$$

$$W_{F_{cuerda}} = E_{c_B} - E_{c_A}$$

$$W_{F_{cuerda}} = \frac{1}{2}\, 60\,kg \left[ \left(6\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(3\,\frac{m}{s}\right)^2 \right]$$

$$\boxed{W_{F_{cuerda}} = 810\,J}$$