PROBLEMA ADICIONAL

(Tipo "yo-yo")

Un disco de masa M tiene enrollada una cuerda inextensible y de masa despreciable. Se deja el disco en libertad a partir del reposo. Se observa que el disco cae mientras la cuerda se va desenrollando. El disco no resbala sobre la cuerda.

Calcular: a) la aceleración del centro de masa del disco.

b) la tensión que soporta la cuerda.

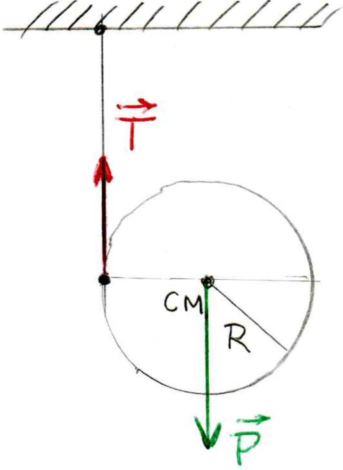
c) la velocidad del centro de masa del disco en el instante en que ha descendido 1 m a partir del reposo.

DATOS: $I_{Disco\,CM} = \frac{MR^2}{2}$; $M = 1\,kg$; $R = 0{,}1\,m$.

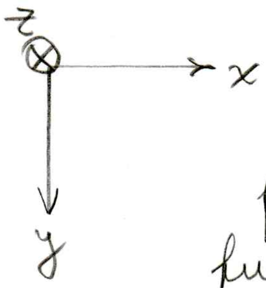
Vamos a resolver este problema de dos formas:

I) Utilizando las ecuaciones: $\begin{cases} \sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} & (1) \\ \sum \vec{M}_{\vec{F},O} = I_O \cdot \gamma & (2) \end{cases}$

II) Por consideraciones energéticas.



I) Como siempre, para escribir las ecs. de dinámica, identificamos las fuerzas: $\vec{P}$; $\vec{T}$.



Elegimos un sist. de referencia para definir los signos de las fuerzas y de los momentos de las fuerzas.

(1) $\sum \vec{F} = M\,\vec{a}_{CM} \Longrightarrow \boxed{P - T = M\,a_{CM} \quad (3)}$

(2) $\sum \vec{M}_{F,O} = I_O \cdot \vec{\gamma}$ Recordemos que tanto $\vec{M}_{F,O}$ como I_O dependen del punto "O" que elegimos.

Vamos a proponer: $O \equiv CM$.

Entonces, la ec. (2) es:

$$\sum \vec{M}_{F,CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \qquad \text{con} \quad I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

Respecto del CM la única fuerza que hace momento es T:

$$\vec{M}_{T,CM} = I_{CM}\,\vec{\gamma}$$

$$R\,T\,\hat{k} = I_{CM}\,\gamma\,\hat{k} \Longrightarrow \boxed{R\,T = I_{CM}\,\gamma \quad (4)}$$

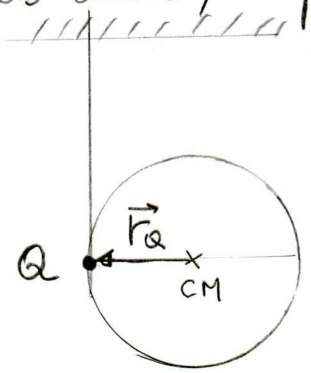
Tenemos que resolver el sist. (3), (4). Pero nos falta una ecuación. Hasta ahora tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas (T, a_{CM} y γ).

Vamos a escribir las condiciones de vínculo.

En este caso, sabemos que el disco rueda sin deslizar sobre una soga inextensible y sin masa.

→

Esto significa que instante a instante el punto de contacto del disco con la soga tiene velocidad nula. Es decir, el punto Q es un CIR. Por lo tanto:



$$\vec{v}_Q = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_Q$$

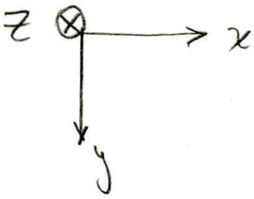
$$\overset{\shortparallel}{0} = \vec{v}_{CM} + \omega \hat{k} \times R(-\hat{\imath})$$

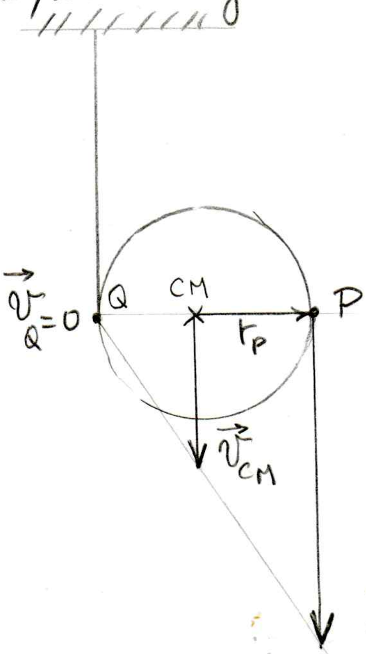
$$0 = \vec{v}_{CM} + \omega R(-\hat{\jmath})$$

$\vec{v}_{CM} = \omega R \hat{\jmath}$ en cada instante de tiempo.

En el instante inicial: $v_{CM} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0$.

En cualquier instante posterior mientras el disco cae, el diagrama de velocidades es así:





$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

$$\vec{v}_P = \omega R \hat{\jmath} + \omega \hat{k} \times R \hat{\imath}$$

$$\vec{v}_P = \omega R \hat{\jmath} + \omega R \hat{\jmath} = 2\omega R \hat{\jmath}$$

* $\boxed{\vec{v}_P = 2 \vec{v}_{CM}}$ Para cada instante de t.

De la discusión anterior, lo que nos interesa para tener la condición de vínculo que nos faltaba es saber que cuando el cuerpo rueda sin resbalar se cumple: $|v_{CM}| = |\omega| R$ (COND. DE RODADURA PARA VELOCIDADES)

Derivando respecto del tiempo la relación anterior:

$$\frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

$$(5) \quad \boxed{a_{CM} = R\gamma}$$

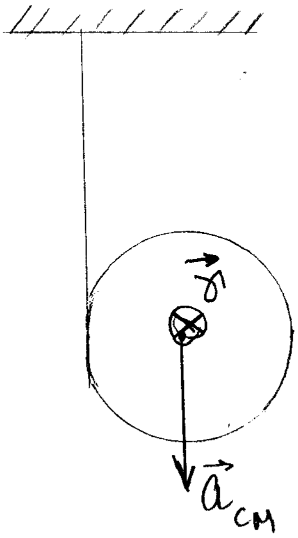
(CONDICIÓN DE RODADURA PARA ACELERACIONES)

Ahora sí, podemos resolver el sistema de ecs. (3), (4), (5)

$$\begin{cases} P - T = M a_{CM} & (3) \\ RT = \frac{MR^2}{2} \cdot \gamma & (4) \\ a_{CM} = \gamma R & (5) \end{cases}$$

De (3), (4) y (5) resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{2}{3} g \quad (a) \\ T &= \frac{M}{3} g \quad (b) \end{aligned}}$$



Con los datos numéricos:

$\vec{a}_{CM} = 6,67 \, \frac{m}{s^2} \, \hat{j}$

$\vec{\gamma} = 66,7 \, s^{-2} \, \hat{k}$

$T = 3,33 \, N$

c) Para calcular la velocidad del CM del disco en el instante en que ha descendido 1 m a partir del reposo, debemos tener en cuenta que el CM realiza un movimiento rectilíneo uniformemente variado cuya aceleración es la que calculamos en (a).

Por lo tanto:

$$\begin{cases} v_{CM}(t) = v_0 + a_{CM} \cdot \Delta t & (6) \\ \Delta y = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{CM} (\Delta t)^2 & (7) \end{cases}$$

Con las ecs. (6) y (7) podemos escribir:

$$2\, a_{CM}\, \Delta y = \left(v_{CM}(t)\right)^2 - v_0^{\,2}$$

En este caso: $2 \cdot \frac{2}{3} g \cdot \Delta y = v_{CM}^{\,2}$

$$\left(\begin{array}{l} a_{CM} = \frac{2}{3} g \\ v_0 = 0 \end{array} \right)$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3} g\, \Delta y}$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 1m}$$

$$\boxed{v_{CM} = 3{,}65 \frac{m}{s}} \qquad \boxed{\vec{v}_{CM} = 3{,}65 \frac{m}{s} \hat{j}}$$

PREGUNTA: ¿Qué velocidad tendría el punto P del disco en ese instante? (*)

Por lo que vimos en la página A3:

$$v_P = 2 v_{CM} = 7{,}3 \frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = 7{,}3 \frac{m}{s} \hat{j}}$$

Podemos resolver el problema con el método (I) pero eligiendo otro punto para escribir la ecuación de los momentos de las fuerzas (ec. 4))

Vamos a tomar ahora: $O \equiv Q$, es decir escribimos:

$$\Sigma \vec{M}_{F, CIR} = I_{CIR} \cdot \vec{\gamma} \qquad (4^*)$$

Respecto del punto Q la tensión ya no realiza ningún momento. Pero hay momento de la fuerza PESO respecto de Q:

$$\vec{M}_{P, CIR} = I_{CIR} \cdot \vec{\gamma} \qquad (4^*)$$

(Es decir que observamos ahora todo el movimiento del disco como una rotación pura alrededor del eje instantáneo de rotación que pasa por Q).

Por el teorema de Steiner ("o de los ejes paralelos"):

$$I_{CIR} = I_{CM} + MR^2$$

$$I_{CIR} = \frac{MR^2}{2} + MR^2$$

$$I_{CIR} = \frac{3}{2} MR^2$$

Entonces la ec (4*) queda así:

$$PR \cancel{\hat{k}} = \frac{3}{2} MR^2 \gamma \cancel{\hat{k}}$$

$$\cancel{M} g \cancel{R} = \frac{3}{2} \cancel{M} R^{\cancel{2}} \gamma$$

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \qquad \text{y con la ec.(5)}$$

resulta $\boxed{a_{CM} = \frac{2}{3} g}$

<u>OBSERVACIÓN</u>: muchas veces elegir $O \equiv CIR$ simplifica el sistema de ecuaciones. En este caso se obtiene directamente γ de la ec. (4*) y con la ec (5) se calcula a_{CM}. Luego se puede calcular T a partir de la ec. (2) como en el caso anterior.

II) Resolvemos por consideraciones energéticas.

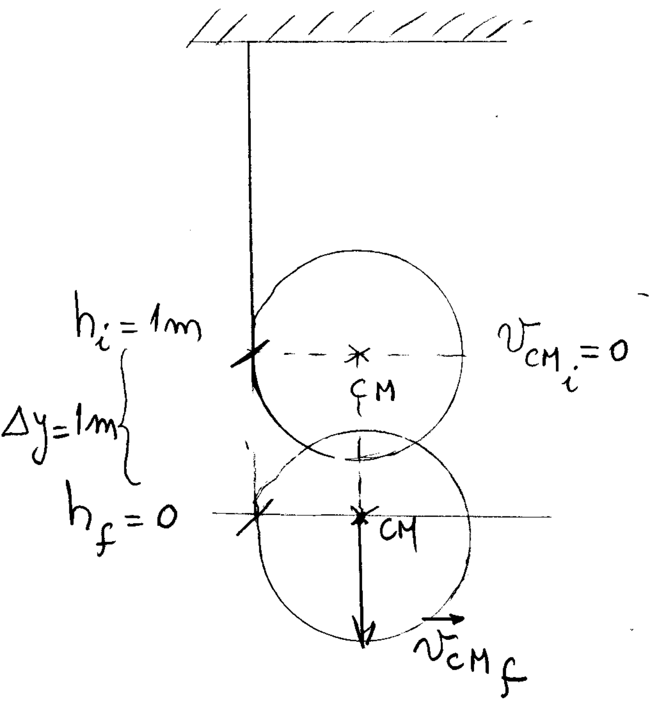
Cuando se cumple la condición de rodadura, se puede demostrar que la fuerza de contacto entre el cuerpo y la superficie no realiza trabajo. Es decir, que podemos decir en este caso que

$$W_{FNC} = 0 \Longrightarrow E_{M_i} = E_{M_f}$$

$$E_{P_i} + E_{C_i} = E_{P_f} + E_{C_f}$$

donde $E_C = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$

En nuestro caso:



$$M g h_i = \frac{1}{2} M v_{CM_f}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_f^2 \quad (7)$$

Como el disco rueda sin resbalar v_{CM_f} y ω_f cumplen la condición de rodadura:

$$v_{CM_f} = \omega_f R \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (7):

$\longrightarrow$

$$\cancel{M} g h_i = \frac{1}{2} \cancel{M} v_{CM_f}^{2} + \frac{1}{2} \frac{\cancel{M}R^2}{2} \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2$$

$$g \Delta y = \frac{1}{2} v_{CM_f}^{2} + \frac{1}{4} v_{CM}^{2}$$

$$2 g \Delta y = \frac{3}{2} v_{CM_f}^{2}$$

$$\boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3} g \Delta y}}$$

Este es el mismo resultado que obtuvimos por el método (I).

OBSERVACIÓN: si bien este camino es más corto y nos permite calcular directamente la velocidad final del disco, no nos sirve cuando queremos calcular valores de las fuerzas.