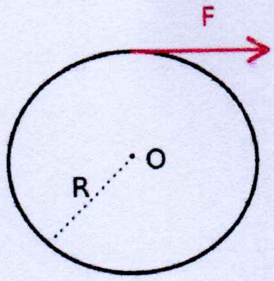
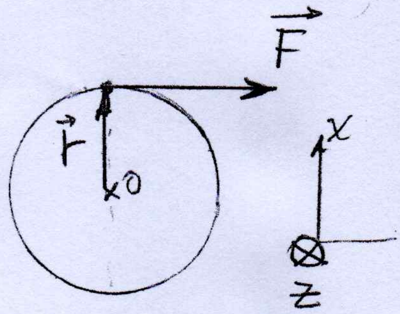
Conservación del impulso angular

50. Un disco de radio $R = 20\ cm$ puede girar alrededor de un eje fijo O, apoyado sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Inicialmente gira en sentido horario con una velocidad angular $\omega_i = 20\ s^{-1}$. Se le aplica una fuerza constante $F = 30\ N$ tangente al borde del disco, como indica la figura, durante un intervalo de tiempo de 1 segundo. Como resultado se observa que el disco continúa girando ahora con una velocidad angular $\omega_f = 100\ s^{-1}$. Halle: *a*) el impulso del momento de la fuerza; *b*) el momento de inercia del disco.



Rta: *a*) $J_M = 6\ N\ m\ s$; *b*) $I = 0,075\ kg\ m^2$.

a) $\sum \vec{M}_{F,O} = \dfrac{\Delta \vec{L}_O}{\Delta t}$



La única fuerza que hace momento es $\vec{F}$:

$$\vec{M}_{F,O} = \frac{\Delta \vec{L}_O}{\Delta t}$$

$$\underbrace{\vec{M}_{F,O} \cdot \Delta t}_{\vec{J}_{M_{F,O}}} = \Delta \vec{L}_O$$

$\vec{J}_{M_{F,O}}$: llamamos a este producto "impulso del momento de la fuerza

✱ Ver NOTA al final

$$(\vec{r} \times \vec{F}) . \Delta t = \vec{L}_{O_f} - \vec{L}_{O_i}$$

$$RF\,\hat{k}\,\Delta t = I_{O_f}\vec{\omega}_f - I_{O_i}\vec{\omega}_i$$

$I_{O_f} = I_{O_i}$ (el momento de inercia del cuerpo no cambia)

$$RF\,\cancel{\hat{k}}\,\Delta t = I_O(\omega_f \cancel{\hat{k}} - \omega_i \cancel{\hat{k}})$$

$$\underbrace{0{,}2m . 30N . 1s}_{6\,Nms} = I_O(100\,s^{-1} - 20\,s^{-1})$$

$$I_O = \frac{6\,Nms}{80\,s^{-1}}$$

(a) $\boxed{\vec{J}_{M_{F,O}} = 6\,Nms\,\hat{k}}$

(b) $\boxed{I_O = 0{,}075\,kg\,m^2}$

(*) Para la traslación de un cuerpo habríamos definido:

$$\underbrace{\vec{J}_F}_{\text{impulso de la fuerza (resultante)}} = \underbrace{\Delta\vec{P}}_{\text{variación de la cantidad de movimiento}}$$

donde $\vec{J}_F = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{P}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\left(\text{o} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \right)$$

Esta es la ec. de Newton:

$$\vec{F}_{\text{(resultante)}} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{resultante}} = m\vec{a}}$$

Análogamente, para la rotación, tenemos:

$$\vec{M}_{F,o} = \frac{\Delta\vec{L}_o}{\Delta t} \quad (\blacktriangle)$$

$\vec{M}_{F,o}$ → resultante

$$\underbrace{\vec{M}_{F,o} \cdot \Delta t}_{\vec{J}_{M_{F,o}}} = \Delta\vec{L}_o \quad \text{(depende de "o")}$$

"impulso del momento de F (resultante)"

La ec: $\vec{M}_{F,o} = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$ se puede escribir así:
($\blacktriangle$)

$$\vec{M}_{F,o} = \frac{d(I_o w)}{dt} \longrightarrow$$

Si I_0 es constante:

$$\underbrace{\vec{M}_{F,0}}_{\text{resultante}} = I_0 \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\gamma}\,:\,\text{aceleración angular}}$$

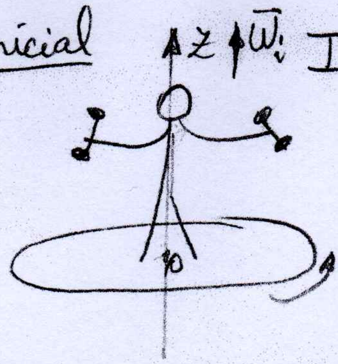
$$\boxed{\vec{M}_{F,0} = I_0 \vec{\gamma}}$$

que es la ec. de movimiento para la rotación del CR alrededor de un eje.

51. Una persona está parada sobre el eje vertical de una plataforma que gira, sin fricción, alrededor de dicho eje con una frecuencia de 1 rpm, sus brazos están estirados y sostiene una pesa en cada mano. En esta posición, el momento de inercia total del conjunto con respecto al eje es de 6 $kg\ m^2$. Al acercar las pesas al cuerpo, el momento de inercia disminuye a 4 $kg\ m^2$. $a)$ ¿Cuál es el módulo de la velocidad angular de la plataforma en esta última posición? $b)$ Calcule el trabajo de todas las fuerzas involucradas en este proceso.

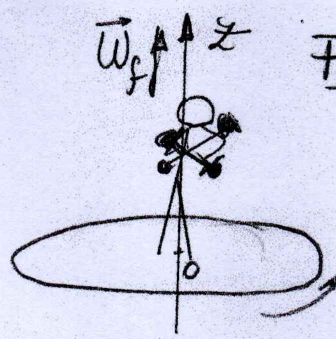
Rta: $a)$ $\omega = \pi/20\ s^{-1} = 0,157\ s^{-1}$; $b)$ $W = 0,0164\ J$.

(a) Inicial



$I_{O_i} = 6 kg m^2$

Final



$I_{O_f} = 4 kg m^2$

$$f_i = 1\ rpm = \frac{1}{60}\ s^{-1}$$

$$\omega_i = 2\pi f_i \qquad \omega_f = 2\pi f_f$$

Suponemos que ninguna fuerza externa al sistema (HOMBRE+PESAS+PLATAFORMA) hace momento (no hay momento de fuerza de rozamiento en el eje).

$$\text{Si}\quad \sum \vec{M}_{F_{ext},O} = 0 \Longrightarrow \vec{L}_{O_i} = \vec{L}_{O_f}$$

$$I_{O_i} \vec{\omega}_i = I_{O_f} \vec{\omega}_f$$

Como I_O cambia, deberá cambiar la velocidad angular para mantener el momento angular constante.

$$6\ \cancel{kg\, m^2}\ \frac{2\pi}{60}\ s^{-1} = 4\ \cancel{kg\, m^2} \cdot \omega_f$$

$$\boxed{\omega_f = \frac{\pi}{20}\ s^{-1}}$$

(b) $W_{\Sigma F} = \Delta E_c$

$W_{\Sigma F} = E_{c_f} - E_{c_i}$ (el sistema sólo rota)

$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} I_{O_f} \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_{O_i} \omega_i^2$

$\longrightarrow$

$$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}\, 4\,kg\,m^2 \left(\frac{\pi}{20}\right)^2 s^{-2} - \frac{1}{2}\, 6\,kg\,m^2 \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 s^{-2}$$

$$\boxed{W_{\Sigma F} = 0{,}0164\,J}$$

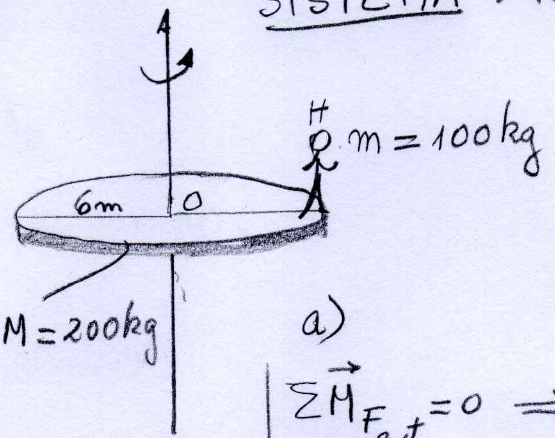
ACLARACIÓN: ΣF son <u>todas</u> las fuerzas involucradas en este proceso, internas o externas, conservativas o no conservativas (recordemos que el teorema de conservación de la energía cinética involucra a TODAS LAS FUERZAS).

En este problema, estas fuerzas provienen del esfuerzo que hace el hombre para cambiar su momento de inercia al juntar los brazos, y la fuerza de rozamiento entre la plataforma y sus pies).

52. Una plataforma en forma de disco sólido uniforme de radio $R = 6\ m$ y masa $M = 200\ kg$ gira sin rozamiento alrededor de su eje de simetría vertical. Un hombre de masa $m = 100\ kg$ está parado en el borde de la plataforma moviéndose a una velocidad tangencial de $0,2\ m/s$. *a*) ¿Con qué velocidad angular girará el disco si el hombre camina 3 metros hacia su centro a lo largo de un radio? *b*) Halle la variación de energía cinética del sistema hombre-disco y el trabajo que realizó la persona sobre el disco. Explique porqué son diferentes los resultados.

Rta: *a*) $\omega = 0,053\ s^{-1}$; *b*) $\Delta Ec = 2,4\ J$; $W = -0,7\ J$.

SISTEMA: hombre-disco



En $t_0 = 0$:

$$v_{t_H} = v_{t_{disco}} = 0,2\ \frac{m}{s}$$

$$\omega_0 = \frac{v_t}{R} = \frac{0,2\ m/s}{6\ m} = 0,033\ s^{-1}$$

$R_0 = 6\ m$

$R_f = 3\ m$

$I_{disco} = \frac{MR^2}{2} = 3600\ kgm^2$

a)

$$\sum \vec{M}_{F_{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{o_{sist_0}} = \vec{L}_{f_{sist_0}} \Rightarrow I_0 \vec{\omega}_0 = I_f \vec{\omega}_f$$

$$(I_{disco} + mR_0^2)\, \vec{\omega}_0 = (I_{disco} + m R_f^2)\, \vec{\omega}_f$$

$$\omega_f = \frac{(I_{disco} + m R_0^2)\, \omega_0}{(I_{disco} + m R_f^2)}$$

$$\omega_f = \frac{(3600\ kg\,m^2 + 100\ kg\ 36\ m^2)\, 0,033\ s^{-1}}{(3600\ kg\,m^2 + 100\ kg \cdot 9\ m^2)} \Longrightarrow \boxed{\omega_f = 0,053\ s^{-1}}$$

b) $$\Delta E_{c_{sist}} = \frac{1}{2}(I_f)\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}(I_0)\,\omega_0^2$$

$$\Delta E_{c_{sist}} = \frac{1}{2}\left(4500 \cdot 0,053^2 - 7200 \cdot 0,033^2\right) J$$

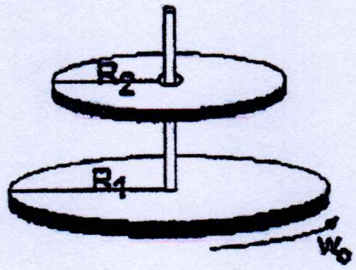
$$\boxed{\Delta E_{c_{sist}} \doteq 2,4\ J}$$

$$W_{persona} = \Delta E_{c_{persona}} = \frac{1}{2}(mR_f^2)\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}(mR_0^2)\,\omega_0^2$$

$$W_{persona} = \frac{1}{2} \cdot 100\,(9 \cdot 0,053^2 - 36 \cdot 0,033^2)\ J$$

$$\boxed{W_{persona} = -0,7\ J}$$

53. Un disco homogéneo de radio $R_1 = 50\ cm$ y masa $m_1 = 10\ kg$ está girando, a razón de $300\ rpm$, en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un segundo disco, de radio $R_2 = 30\ cm$ y masa $m_2 = 8\ kg$, inicialmente en reposo, está situado por encima del primero montado sobre el mismo eje. Se ponen en contacto los discos de modo que quedan unidos. Halle : $a)$ la velocidad angular del conjunto formado por los dos discos; $b)$ la pérdida de energía cinética como consecuencia del choque entre los discos.



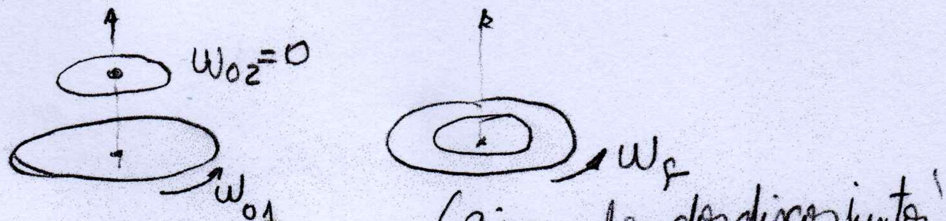
Rta: $a)$ $\omega = 24,4\ s^{-1}$; $b)$ $\Delta E = -137\ J$.

a) Sistema : los dos discos (es muy importante definir el sistema que se considera, para determinar cuáles son las fuerzas externas).

No hay $\vec{F}_{ext}$ al sistema (peso y normal se equilibran, no hay rozamiento externo sobre los discos).

$$\sum \vec{M}_{F_{ext},O} = 0 \Longrightarrow \vec{L}_{Sist_i} = \vec{L}_{Sist_f} \quad (1)$$

$$\left(I_{disco} = \frac{MR^2}{2} \right)$$



$f_{01} = 300\,rpm$

(gira disco 1) (giran los dos discos juntos)

$$\left(\begin{array}{l} I_1 = \frac{M_1 R_1^2}{2} = \frac{10\,kg \cdot 0{,}25\,m^2}{2} = 1{,}25\,kg\,m^2 \\ I_2 = \frac{M_2 R_2^2}{2} = \frac{8\,kg \cdot 0{,}09\,m^2}{2} = 0{,}36\,kg\,m^2 \end{array} \right)$$

$$\omega_{01} = 2\pi f_{01}$$
$$\omega_{01} = 2\pi \cdot \frac{300}{60}\,s^{-1}$$
$$\omega_{01} = 10\pi\,s^{-1}$$

Ec. (1) : $I_1\,\omega_{01} = (I_1 + I_2)\,\omega_f$

$$1{,}25\,kg\,m^2 \cdot 10\pi\,s^{-1} = 1{,}61\,kg\,m^2 \cdot \omega_f$$

$$\boxed{\omega_f = 24{,}39\,s^{-1}}$$

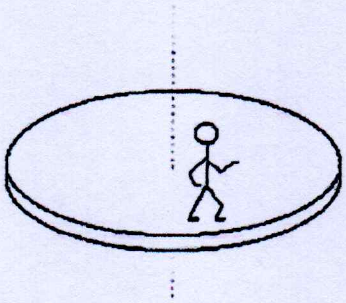
b) $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i}$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega_f^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_{01}^2$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot 1{,}61\,kg\,m^2\,(24{,}39\,s^{-1})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}25\,kg\,m^2\,(10\pi\,s^{-1})^2$$

$$\boxed{\Delta E_c = -137{,}9\,J}$$ EL SISTEMA PIERDE ENERGÍA.

54. Se monta una plataforma circular sobre un eje vertical sin rozamiento. Su radio es de $1,5\ m$ y su momento de inercia respecto del eje de $60\ kg\ m^2$. Inicialmente la plataforma se encuentra en reposo y un hombre de $80\ kg$ está de pié en el borde de la plataforma. Luego el hombre comienza a caminar a lo largo del borde con una velocidad de $1\ m/s$ respecto del piso. *a*) ¿Cuál es la velocidad angular de la plataforma? *b*) Cuando el hombre haya recorrido una vuelta alrededor de la plataforma, ¿cuál será su desplazamiento angular respecto del piso?



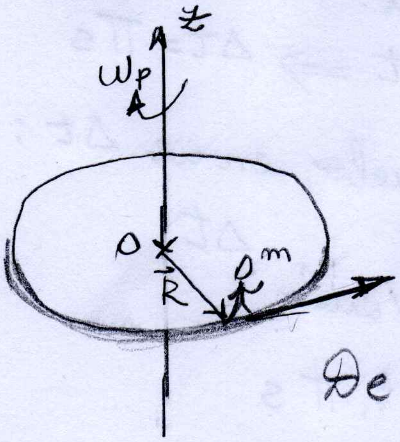
Rta: *a*) $\omega_p = 2\ s^{-1}$; *b*) $\Delta\varphi_h = \pi/2$.

Sistema : Plataforma-hombre.

No hay momentos de fuerzas externas (los rozamientos son internos, las normales y pesos dan momento total nulo).

a) $\sum \vec{M}_{F,O} = 0 \Longrightarrow \vec{L}_{O_{Sist_i}} = \vec{L}_{O_{Sist_f}}$ (1)

Inicialmente : hombre y plataforma en reposo : $\vec{L}_{O_{Sist_i}} = 0$ (2)



$\vec{v}_{H/Suelo}$ (tangente a la plataforma)

De (1) y (2): $0 = I_O\, \omega_P \hat{k} + R\, m\, v_H \hat{k}$

$$\omega_P = -\frac{R\, m\, v_{H,P}}{I_o}$$

$$\omega_P = -\frac{1,5\,m \cdot 80\,kg \cdot 1\,m/s}{60\,kg\,m^2} \Rightarrow |\omega_P| = 2s^{-1}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_P = -2s^{-1}\hat{k}}$$

b) $$\vec{v}_{H/Suelo} = \vec{v}_{H/Plat} + \vec{v}_{Plat/Suelo}$$

$$\vec{v}_{H/Plat} = \vec{v}_{H/Suelo} - \vec{v}_{Plat/Suelo}$$

$$\vec{v}_{H/Plat} = 1\frac{m}{s}\,\hat{t} - (\omega_P \cdot R)\,\hat{t}$$

$$\vec{v}_{H/Plat} = 1\frac{m}{s}\,\hat{t} - (-2\,s^{-1} \cdot 1{,}5\,m)\,\hat{t}$$

$$\vec{v}_{H/Plat} = 4\frac{m}{s}\,\hat{t}$$

Cuando el hombre recorre <u>una vuelta</u> ($\Delta\varphi = 2\pi$) respecto de la plataforma

$$\omega_{H/Plat} = \frac{v_{H/Plat}}{R}$$

$$\Delta\varphi_{H/Plat} = \omega_{H/Plat} \cdot \Delta t$$

$$2\pi = \frac{4\,m/s}{2\,m} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \pi\,s$$

Para la plataforma respecto del suelo, en ese Δt:

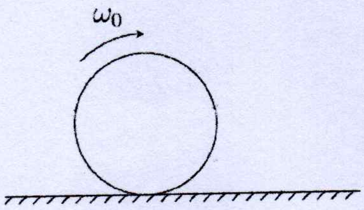
$$\Delta\varphi_{Plat/Suelo} = \omega_{Plat/Suelo} \cdot \Delta t$$

$$\Delta\varphi_{Plat/Suelo} = -2\,s^{-1} \cdot \pi\,s$$

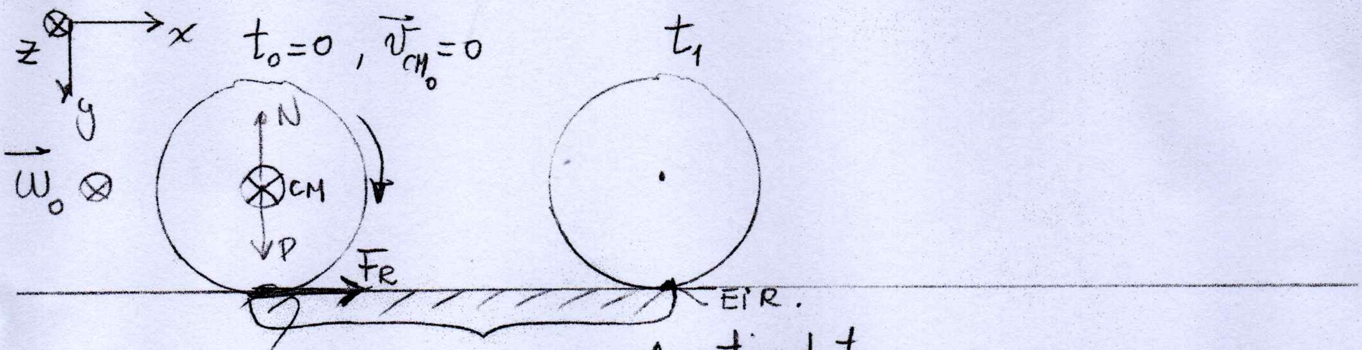
$$\Delta\varphi_{Plat/Suelo} = -2\pi$$

en sentido contrario al desplazamiento del hombre.

55. Un disco homogéneo de radio $R = 50\ cm$ y masa $m = 5\ kg$ está, inicialmente, girando en un plano vertical en torno a un eje (perpendicular al dibujo) que pasa por su centro de masa con velocidad angular $\omega_0 = 6\ s^{-1}$. Se pone en contacto el disco con una superficie horizontal con rozamiento. Transcurrido un cierto tiempo, el disco comenzará a rodar sin deslizar. Calcule: *a*) la velocidad angular del disco cuando entra en rodadura; *b*) el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento. *c*) Sabiendo que el coeficiente de roce cinético entre el cilindro y el plano es $\mu_c = 0,2$, calcule el tiempo transcurrido hasta que comienza a rodar sin deslizar.



Rta: *a*) $\omega = 2\ s^{-1}$; *b*) $W_r = -7,5\ J$; *c*) $t = 0,5\ s$.



esta F_R es dinámica. El disco resbala entre t_0 y t_1.

A partir de t_1 rueda sin resbalar: $v_{CM}(t) = \omega(t) \cdot R$ (para $t \geq t_1$)

<u>Entre t_0 y t_1:</u>

$$\Sigma \vec{M}_{F,CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma} \implies -R F_R \hat{k} = \frac{mR^2}{2} \cdot \gamma \hat{k} \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{CM} \implies \begin{cases} P - N = 0 \implies N = mg \quad (2) \\ F_R = m a_{CM} \quad (3) \\ F_R = F_{R_D} = \mu_c \cdot N = \mu_c m g \quad (4) \end{cases} \boxed{a_{CM} = \mu_c g}$$

De (1) y (4):

$$-\cancel{R} \mu_c \cancel{m} g = \frac{\cancel{m} R^{\cancel{2}}}{2} \cdot \gamma \implies \boxed{\gamma = \frac{-2\mu_c g}{R}}$$

OBSERVACIÓN: $a_{CM} > 0 \implies v_{CM}$ va creciendo; $\gamma < 0 \implies \omega$ va disminuyendo } hasta que

en t_1: $v_{CM}(t_1) = \omega(t_1) R$ (5) comienza a rodar sin deslizar.

$\longrightarrow$

Para el CM, tenemos un MRUV:

$$v_{CM}(t) = v_{CM_0} + a_{CM} \cdot t$$

$$\boxed{v_{CM}(t) = \mu_c g \cdot t} \quad (6)$$

Para la velocidad angular:

$$\omega(t) = \omega_0 + \gamma t$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu_c g}{R} \cdot t} \quad (7)$$

En t_1 se cumple la relación (5)

En este instante podemos escribir, a partir de las ecs. (5), (6) y (7):

$$\mu_c g \cdot t_1 = \left(\omega_0 - \frac{2\mu_c g}{R} \cdot t_1\right) \cdot R$$

$$\boxed{t_1 = \frac{\omega_0 R}{3\mu_c g}} \, (8) \qquad \boxed{t_1 = \frac{6\,s^{-1} \cdot 0{,}5\,m}{3 \cdot 0{,}2 \cdot 10\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}5\,s}$$

mientras el disco rueda sin resbalar $(t \geq t_1)$ su velocidad es $v_{CM}(0{,}5s) = \mu_c \cdot g \cdot 0{,}5\,s$

$$\boxed{v_{CM}(0{,}5s) = 0{,}2 \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5\,s = 1\,\frac{m}{s}}$$

Como a partir de t_1, $W_{F_R} = 0$ (porque rueda sin resbalar)

$$E_c = cte$$

$$E_{c_{t_1}} = E_{c_{t>t_1}} = \frac{1}{2} I_{CIR} \cdot \omega \text{ es cte} \Rightarrow \omega \text{ es cte}$$

Como $v_{CM} = \omega R \Rightarrow v_{CM}$ es constante $\Rightarrow a_{CM} = 0$ (ec. 3)

$$\therefore F_R = 0 \quad (\text{para } t > t_1)$$

Mientras está deslizando $(t < t_1)$: $F_R = F_{R_D} = \mu_c \cdot N = 0{,}2 \cdot 50\,N$

$$\boxed{F_{R_D} = 10\,N}$$

a) $\omega R = v_{CM}$ cuando comienza a rodar sin deslizar

$$\omega = \frac{v_{CM}}{R}$$

$$\omega = \frac{1\, m/s}{0{,}5\, m} = 2\, s^{-1}$$

b) $$\mathcal{W}_{F_R} = \mathcal{W}_{F_R \text{ entre } t_0 \text{ y } t_1} + \underbrace{\mathcal{W}_{F_R\, t > t_1}}_{= 0 \text{ porque RSD}}$$

$$\mathcal{W}_{F_R} = \Delta E_M = \Delta E_c \quad (\text{la } h \text{ del CM no varía})$$

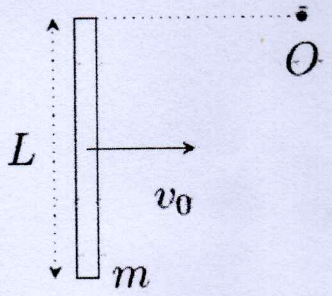
$$\mathcal{W}_{F_R} = \underbrace{\frac{1}{2} I \omega_f^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2}_{\text{En } t_1 :\ v_{CM} = \omega_f R} - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

$$\mathcal{W}_{F_R} = \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{v_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 - \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \omega_0^2$$

$$\mathcal{W}_{F_R} = 3{,}75\, J - 11{,}25\, J = -7{,}5\, J.$$

c) Calculado en ec. (18): $t = 0{,}5\, s$

58. Una barra homogénea de masa $m = 1\ kg$ y longitud $L = 30\ cm$ se traslada sin rotar con velocidad $v_0 = 14\ m/s$ sobre un plano horizontal sin rozamiento. En cierto instante choca contra un pivote fijo O de modo tal que uno de sus extremos queda ligado al mismo después del choque. Calcule: *a*) la velocidad angular de la barra después del choque; *b*) la pérdida de energía en el choque; *c*) la fuerza que ejerce el pivote sobre la barra inmediatamente después del choque, indicando su sentido.



Rta: *a*) $\omega = 70\ s^{-1}$ *b*) $\Delta E = -24,5\ J$; *c*) $F = 735\ N$ hacia arriba en la figura.

a) $\vec{L}_{i_{\underline{o}}} = \vec{L}_{f_{\underline{o}}}$ (se conserva en el choque el momento angular respecto del punto "o", donde actúa la fuerza del pivote, porque $\vec{M}_{F,o} = 0$)

$$\vec{r}_o \times m\vec{v}_o = I_o \cdot \omega_f$$

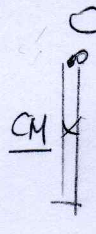
$$\frac{L}{2} m v_o = \frac{mL^2}{3}\omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = 70\ s^{-1}}$$

b) $\Delta E_c = \frac{1}{2} I_o \omega_f^2 - \frac{1}{2} m v_o^2$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1kg \cdot 0,09\ m^2}{3} \cdot 4900\ s^{-2} - \frac{1}{2}\ 1kg \cdot 196\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$\boxed{\Delta E_c = 73,5\ J - 98\ J = -24,5\ J}$$

c) $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$



$\vec{a}_n$ (hacia el punto o

$$F = 1kg \cdot \omega_f^2 \cdot R.$$

$$F = 1kg \cdot 4900\ s^{-2} \cdot 0,15\ m$$

$$F = 735\ N \text{ hacia "o"}$$