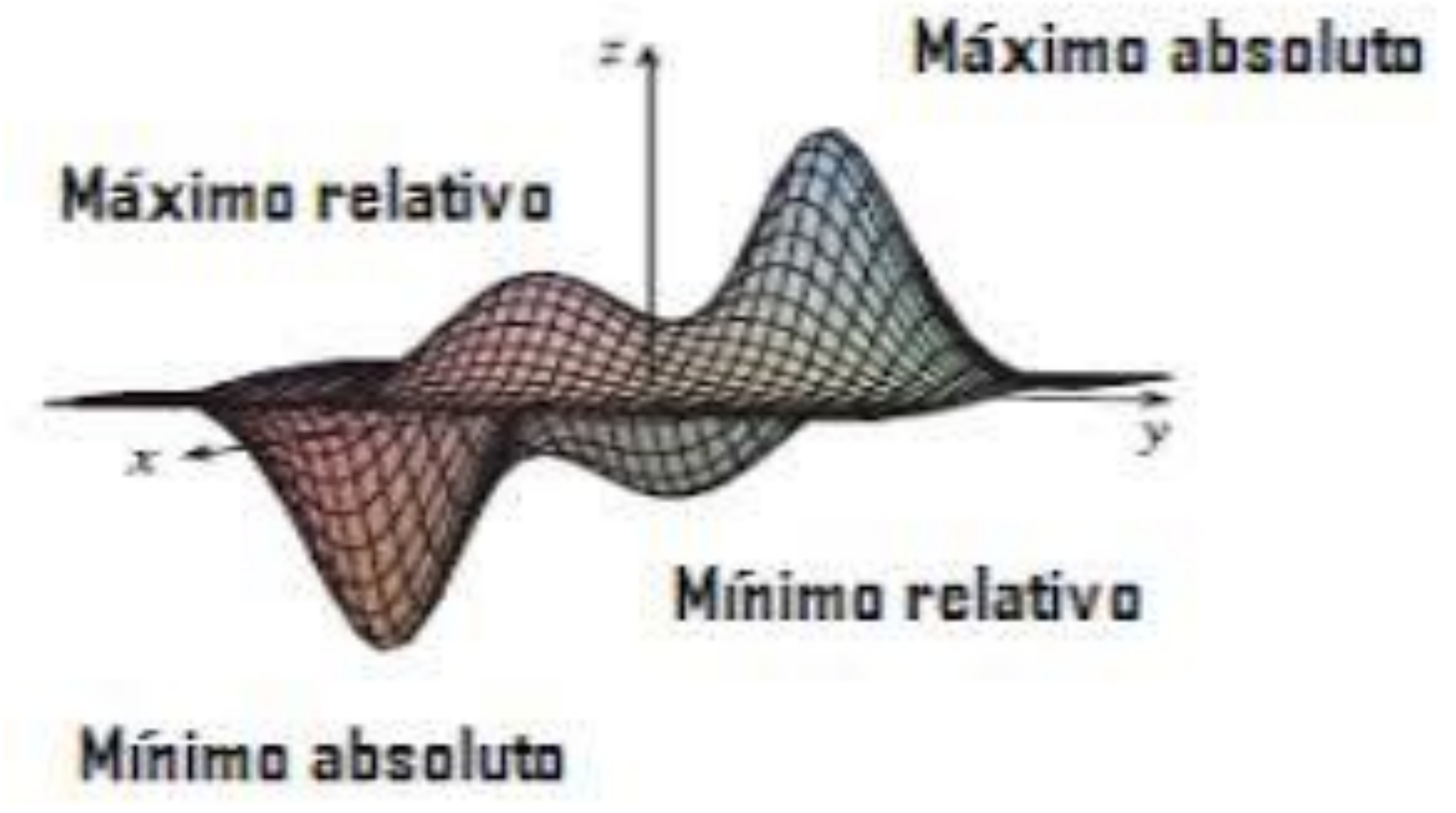
Extremos libres y ligados

Unidad VII b

Extremos Absolutos y Locales

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in A$

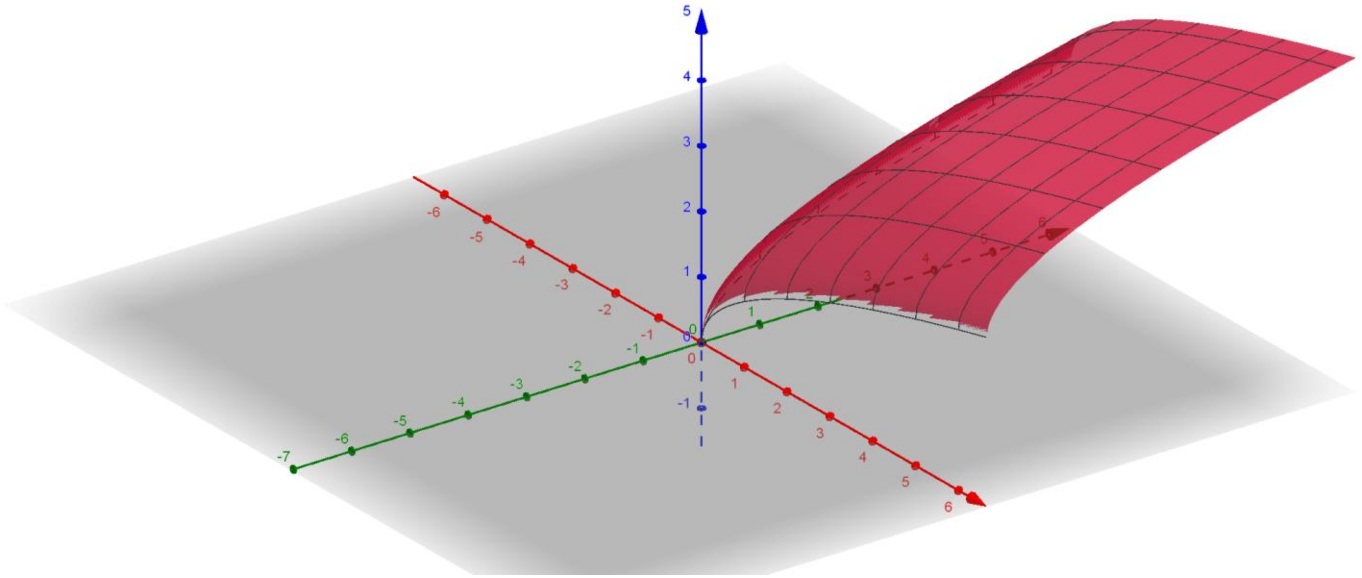
- $f(P_0)$ es **máximo absoluto** de f si y sólo si $f(P_0) \geq f(X) \quad \forall X \in A$
- $f(P_0)$ es **mínimo absoluto** de f si y sólo si $f(P_0) \leq f(X) \quad \forall X \in A$
- $f(P_0)$ es **máximo local o relativo** de f si y sólo si $f(P_0) \geq f(X) \quad \forall X \in E(P_0)$
- $f(P_0)$ es **mínimo local o relativo** de f si y sólo si $f(P_0) \leq f(X) \quad \forall X \in E(P_0)$



Geogebra cómo se ven con las curvas de nivel

Observaciones:

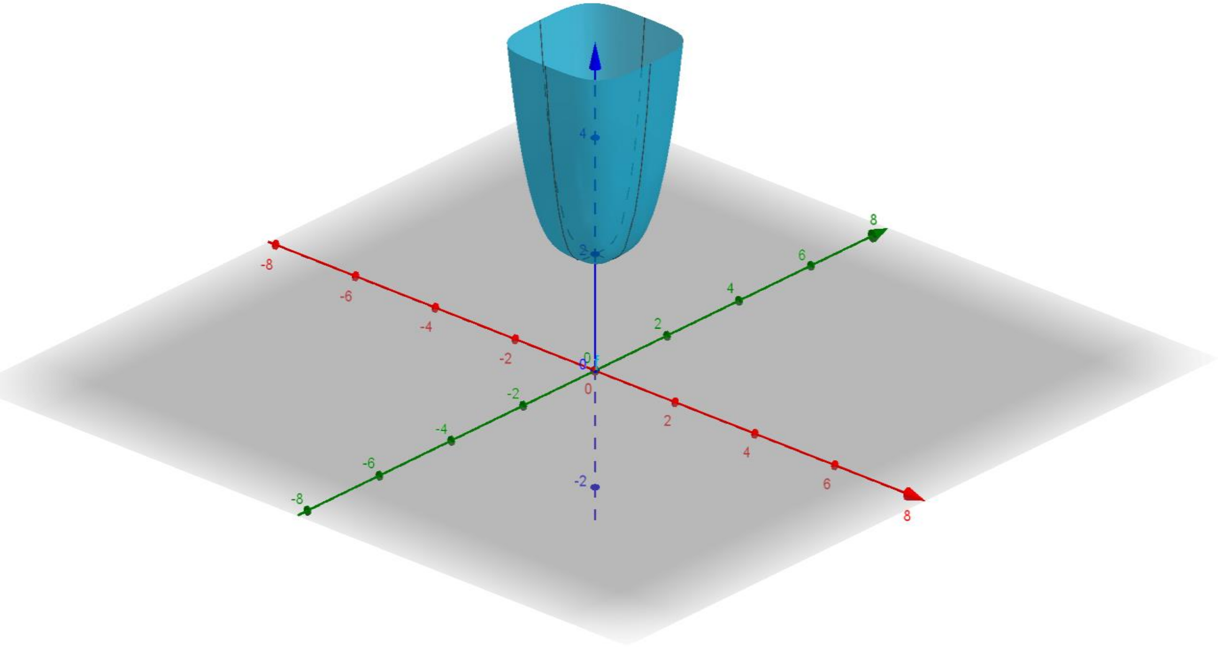
- Los extremos relativos sólo se producen en puntos interiores del dominio.
- Los extremos absolutos pueden o no producirse en puntos interiores.
- Si un extremo absoluto se produce en un punto interior, entonces también es relativo.



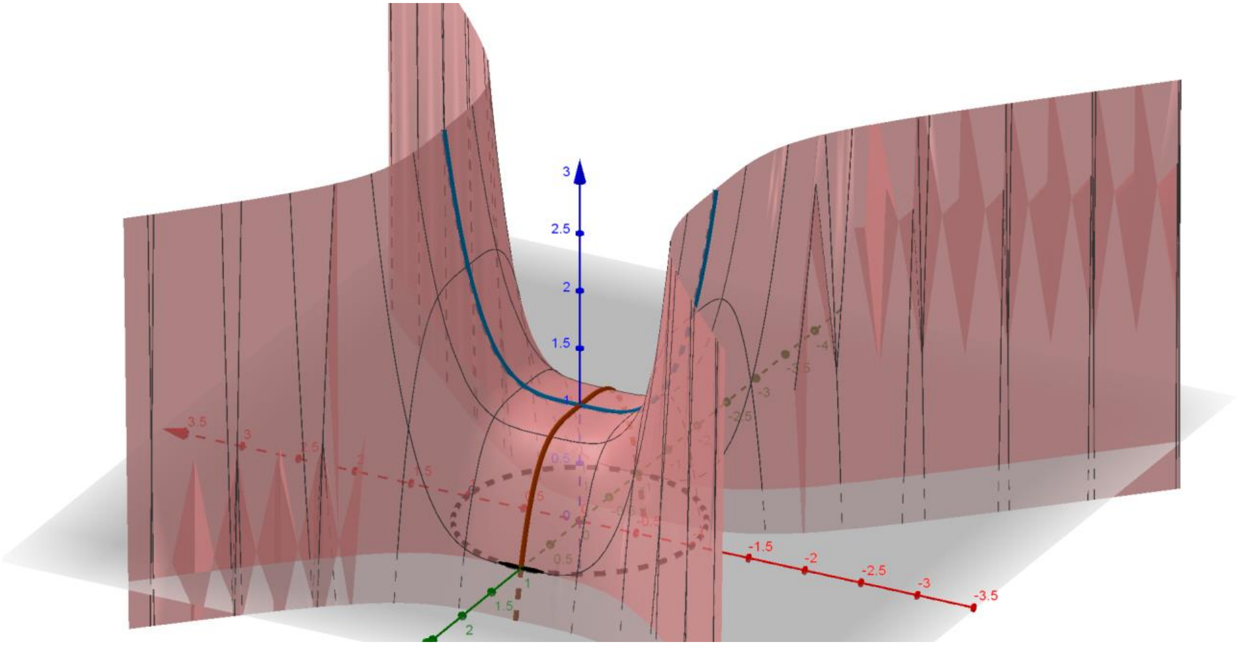
f(x,y)=$\sqrt{x} + \sqrt{y}$

Ejemplos:

$F(x,y)=x^4 + y^4 +2$



$F(x,y)=x^4 - y^4 +1$



06) Dada $f:\Re^2 \to \Re$, analice en cada caso si $f(0,0)$ es extremo local; en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

a) $f(x,y) = 2 + \sqrt{|xy|}$. b) $f(x,y) = x^3 + xy^2$. c) $f(x,y) = (y - x^3)(x - y^2)$.

Definiciones

- Un punto ***crítico*** de un campo escalar es un punto del dominio en el que son nulas todas sus derivadas parciales primeras o alguna no existe en dicho punto.
- Un punto ***estacionario*** de un campo escalar diferenciable es un punto del dominio en el que se anula el gradiente en dicho punto.
- Una función diferenciable f: A$\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con punto crítico en P_0 tiene un ***punto de ensilladura*** en (P_0 ,f (P_0)) si se verifica que, para todo entorno reducido $E^*(P_0)$ existe $X_1 \in E^*(P_0)$ / $f(X_1)<f(P_0)$ y existe $X_2 \in E^*(P_0)$ / $f(X_2)>f(P_0)$

Observaciones

- Si f es de dos variables, y (x_0,y_0) es punto estacionario, entonces el plano tangente al gráfico de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es horizontal.

- Cuando, en una función diferenciable f: $A\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es de ensilladura, el plano tangente a la superficie trazado por él, que obviamente es horizontal, corta a la superficie dejando puntos por arriba y por debajo.

Propiedad

Si f: $A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(P_0)$ es un extremo local (máximo o mínimo relativo) y $f'(P_0,\check{v})$ existe, entonces $f'(P_0,\check{v}) = 0$

Demostración:

Condición necesaria para la existencia de extremos locales

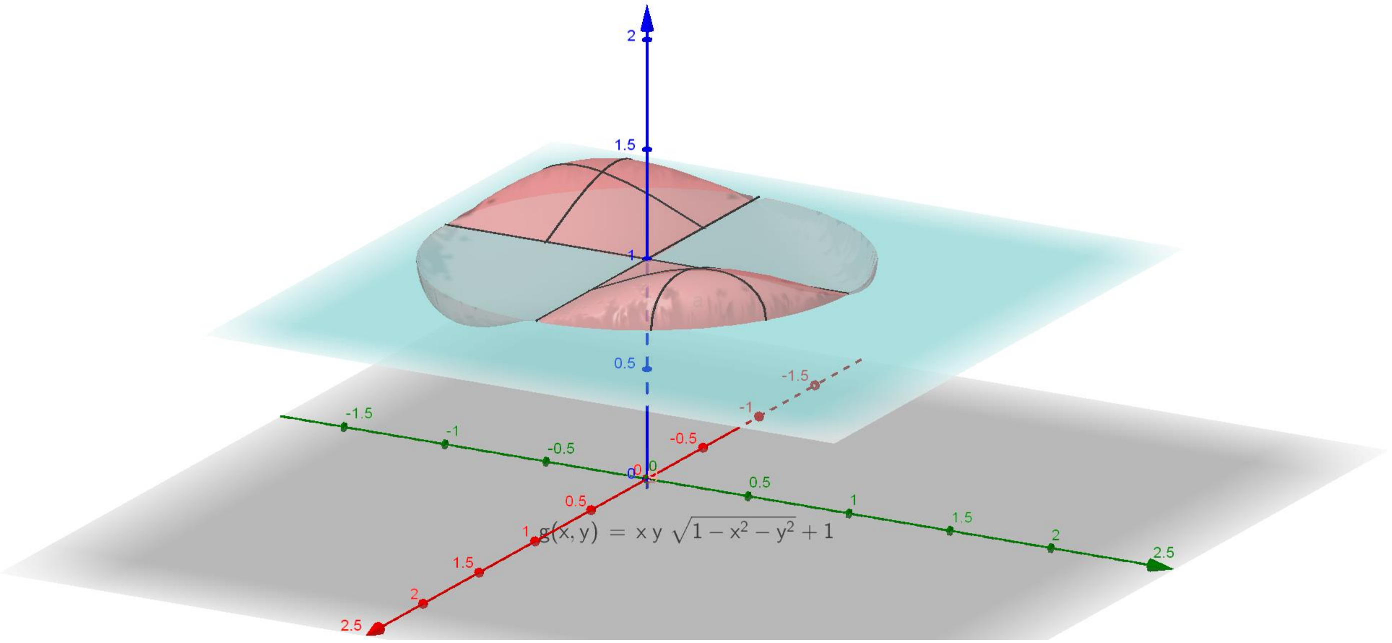
Sea el campo escalar diferenciable f: A$\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si en P_0 tiene un extremo local (máximo o mínimo relativo) entonces las derivadas parciales primeras son nulas en ese punto.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{Po} = 0 \quad \forall i \ de\, 1\ a\ n$$

Demostración

Observación

La condición es **necesaria** pero **no es suficiente.**



17) Analice la existencia de extremos relativos, clasifíquelos y calcule sus valores.

a) $f(x, y) = 4x^3 + 4y^3 + 12x^{-1} + 12y^{-1}$.

b) $f(x, y) = x - y^2 - x^3 + 2xy$.

Hessiano

El determinante Hessiano (o simplemente: *Hessiano*) de un campo escalar f: A$\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con derivadas parciales segundas continuas, es el determinante jacobiano de sus derivadas segundas.

Para n=2

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{(x0,y0)}$$

Condición suficiente para la existencia de extremos locales.

Sea f: $A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales primeras y segundas continuas y sea P_0 un punto interior al dominio, donde se anulan las derivadas primeras y $f''_{xx}(P_0) \neq 0$

1) $H(P_0) > 0$ y $f''_{xx}(P_0) > 0$, entonces $f(P_0)$ es mínimo local.

2) $H(P_0) > 0$ y $f''_{xx}(P_0) < 0$, entonces $f(P_0)$ es máximo local.

3) $H(P_0) < 0$ entonces no hay extremo.

4) $H(P_0) = 0$, el criterio no sirve.

17) Analice la existencia de extremos relativos, clasifíquelos y calcule sus valores.

a) $f(x,y) = 4x^3 + 4y^3 + 12x^{-1} + 12y^{-1}$.

b) $f(x,y) = x - y^2 - x^3 + 2xy$.

12) Aplicando Taylor resulta $f(x,y) \cong 7x + y + xy - y^2 - 4x^2$ en un entorno de $\overline{A} = (1,1)$; analice si $f(\overline{A})$ es extremo local, en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

08) Estudie la existencia de extremos relativos (locales) y de extremos absolutos en sus dominios naturales de:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2$.

b) $f(x,y) = x^3 - x^2 + xy$.

d) $f(x,y) = \ln(y - x)$.

e) $f(x,y) = \sqrt{10 - (x-4)^2 - (y-2)^2}$.

Extremos Ligados

Para campos escalares en $\mathbb{R}^2$, f(x,y) con x e y ligadas por $\varphi(x,y)=0$

- **Planteamiento geométrico.** Supongamos una superficie gráfico de f(x,y) y consideremos la curva que resulta de la intersección con la superficie cilíndrica vertical definida por $\phi(x,y)=0$. Se buscan los máximos y/o mínimos locales de esta curva espacial.
- **Planteamiento analítico.** Se trata de optimizar (hacer máxima o mínima) una función f(x,y) con x e y que verifican $\phi(x,y)=0$

- Los máximos o mínimos que tiene un campo cuyas variables están vinculadas como se dijo, se llaman **extremos ligados,** o **condicionados**, o **vinculados**.

- **Reducción a una variable:** Teóricamente, la situación se puede resolver despejando una de las variables en función de la otra en la ecuación $\phi(x,y)=0$.

- No siempre es fácil escribir una variable en función de la otra.

Ejemplo

Encontrar las medidas del rectángulo de área máxima cuyo perímetro sea 24.

$$f(x,y)= xy \quad \text{con} \quad \phi(x,y)=2x+2y-12=0$$

- Resolución como en análisis I
- Resolución con curvas de nivel

Geogebra

Propiedad

Sean f y φ: $A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A abierto, $P_0 \in A$, diferenciables en P_0 y con gradiente distinto al vector nulo.

Si $f(P_0)$ es extremo de f bajo la condición $\phi(x,y)=0$, entonces:

$$\bar{\nabla} f(P_0) \,//\, \bar{\nabla} \varphi(P_0)$$

Función de Lagrange

- Buscar los puntos críticos de f bajo la condición $\phi=0$, es equivalente a buscar los puntos críticos de la función de Lagrange.
- $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+ \lambda\, \phi(x,y)$
- $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+ \lambda\, \phi(x,y,z)$
- $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+ \lambda_1\, \phi_1(x,y,z)+ \lambda_2\, \phi_2(x,y,z)$

18) Determine los puntos de la curva de ecuación $4y^2 - 18x + 9x^2 - 16y = 11$ más próximo y más alejado del punto (1,7).

18. Hallar los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 9$ cuya suma de coordenadas es máxima.

22. El costo de producir "x" modelos regulares y "y" modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo $C(x,y) = x^2 + 1{,}5y^2 + 300$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse a fin de minimizar los costos totales si la empresa decide producir un total de 200 unidades?

Extremos en regiones cerradas y acotadas

1) Hay que hacer dos análisis por separado

a) En el interior de la región $\longrightarrow$ son extremos relativos (condición necesaria)

b) En la frontera $\longrightarrow$ son extremos ligados (multiplicadores de Lagrange o como en análisis I)

2) Se evalúan todos los puntos críticos obtenidos para decidir el máximo absoluto y el mínimo absoluto.

Geogebra

$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$

24. La temperatura, en grados centígrados, de una lámina plana limitada por $x^2+4y^2\leq 24$ está dada por $T(x,y)= x^2 + 2x +y^2$. Determinar la temperatura máxima y mínima de la placa.