Unidad 12

Método de variación de parámetros

Sabemos que para resolver una ecuación diferencial a coeficientes constantes no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

debemos construir la solución general de la ecuación homogénea mediante una combinación de funciones exponenciales (cuyos parámetros obtenemos a partir de la ecuación característica) y luego buscar una solución particular de la ecuación no homogénea. Esto último lo sabemos hacer si $g(x)$ es una combinación de polinomios y exponenciales: basta proponer una solución particular "similar a $g(x)$", teniendo ciertas precauciones si las funciones exponenciales ya están presentes en la solución de la ecuación homogénea.
Pero, ¿qué ocurre si $g(x)$ no es una combinación de polinomios y funciones exponenciales?
Introduciremos aquí un método que será útil para encontrar una solución particular, cualquiera sea la forma de $g(x)$.
Mostraremos su desarrollo para una ecuación de segundo orden, pero fácilmente se extiende a un orden n cualquiera.

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial ordinaria, con coeficientes constantes y de segundo orden,

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

y supongamos que $\{f_1(x), f_2(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, vale decir $f_1(x)$y $f_2(x)$son 2soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.
La SGH será

$$y_H(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

Es razonable pensar que la solución particular $y_P(x)$ "no es muy distinta de $y_H(x)$", aunque no podrá tener exactamente la misma forma, porque reemplazar $C_1 f_1(x) + +C_2 f_2(x)$ en la ecuación nos daría 0.
Se propone, entonces, una solución particular de la forma

$$y_P(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)$$

donde las constantes las hemos reemplazado por cantidades "variables" $C_i(x)$ – es decir, funciones - que elegiremos convenientemente, de modo que $y_P(x)$resulte solución de la ecuación no homogénea.
Veamos cómo podemos hacer esto…

$$y_P(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)$$

Derivemos la expresión:

$$y_P'(x) = C_1'(x) f_1(x) + C_2'(x) f_2(x) + C_1(x) f_1'(x) + C_2(x) f_2'(x)$$

Como vamos a *elegir* las funciones $C_i(x)$, impongamos una condición (más adelante veremos que es viable) que simplifique los cálculos:

$$C_1'(x) f_1(x) + C_2'(x) f_2(x) = 0 \qquad (1)$$

por lo que resulta

$$y_P'(x) = C_1(x) f_1'(x) + C_2(x) f_2'(x) (1^*)$$

Derivemos nuevamente:

$$y_P''(x) = C_1'(x) f_1'(x) + C_2'(x) f_2'(x) + C_1(x) f_1''(x) + C_2(x) f_2''(x)$$

Ya llegamos al mayor orden de derivación que aparece en la ecuación.
Impongamos en este caso la siguiente condición

$$C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) = \frac{1}{a_2}g(x) \qquad (2)$$

por lo que resultará

$$y_P''(x) = \frac{1}{a_2}g(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_2(x)f_2''(x)(2^*)$$

Observemos que $y_P(x)$ resulta así solución de la ecuación no homogénea.
En efecto: remplazando (1*) y (2*) en la ecuación obtenemos:

$$a_2 y_P'' + a_1 y_P' + a_0 y_P =$$

$$= a_2[\frac{1}{a_2}g(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_2(x)f_2''(x)] +$$

$$+a_1[C_1(x)f_1'(x) + C_2(x)f_2'(x)] +$$

$$+a_0[C_1(x)f_1\ (x) + C_2(x)f_2\ (x)] =$$

$$= g(x) + C_1(x)\underbrace{[a_2 f_1''(x) + a_1 f_1'(x) + a_0 f_1\ (x)]}_{\substack{=0 \text{ pues } f_1(x) \text{ es solución} \\ \text{de la ec. homogénea}}} +$$

$$+C_2(x)\underbrace{[a_2 f_2''(x) + a_1 f_2'(x) + a_0 f_2\ (x)]}_{\substack{=0 \text{ pues } \mathrm{f}_2(x) \text{ es solución} \\ \text{de la ec. homogénea}}} = g(x)$$

Esto significa que proponiendo

$$y_P(x) = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x)$$

donde las funciones-incógnitas$C_1(x), C_2(x)$ cumplen las condiciones adicionales

$$\begin{cases} C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) = 0 & (1) \\ C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) = \frac{1}{a_2}g(x) & (2) \end{cases}$$

se obtiene una solución particular de la ecuación no homogénea.
Observemos que el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2), donde las incógnitas son $C_1(x), C_2(x)$(en realidad, sus derivadas) se puede escribir en forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2}g(x) \end{pmatrix}$$

y podemos asegurar que tiene solución pues el determinante de este sistema de ecuaciones es el *wronskiano* del sistema fundamental $\{f_1(x), f_2(x)\}$, que sabemos que es no nulo por ser $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones linealmente independientes.

Ejemplo 12.10: Resolvamos el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'' + y = \sec(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Observemos que $g(x)$ no es de la forma "polinomio x exponencial".
Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea

$y'' + y = 0.$

La ecuación característica es

$$k^2 + 1 = 0$$

Las raíces son $\pm i$ por lo que el sistema fundamental de soluciones es

$\{\cos(x), sen(x)\}.$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_H(x) = C_1\cos(x) + C_2 sen(x)$$

Proponemos

$$y_P(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)sen(x)$$

y para obtener las funciones $C_1(x), C_2(x)$ planteamos

$$C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) = 0$$

$$C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) = \frac{1}{a_2}g(x)$$

Resultan

$$C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)sen(x) = 0$$

$$-C_1'(x)sen(x) + C_2'(x)\cos(x) = \sec(x)$$

O bien, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sec(x) \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Regla de Cramer se obtienen

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ \sec(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{-\tan(x)}{1} = -\tan(x)$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\text{sen}(x) & \sec(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

Integrando cada una de las ecuaciones se obtienen $C_1(x), C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \tan(x)\, dx = \ln[\cos(x)] + K_1$$

$$C_2(x) = \int dx = x + K_2$$

Como necesitamos <u>una</u> primitiva para cada $C_i(x)$ elegimos constantes de integración nulas (las más sencillas) y resulta

$$y(x) = \underbrace{C_1\cos(x) + C_2 sen(x)}_{y_H(x)} + \underbrace{\ln[\cos(x)]\cos(x) + x sen(x)}_{y_P(x)}$$

Ahora sólo restaría aplicar las condiciones iniciales $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ para obtener las constantes C_1, C_2.

Comprueben que resultan $C_1 = 1, C_2 = -2$.