Topología, funciones y Campos

Unidad II

Definiciones

Consideremos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto y P punto en $\mathbb{R}^n$

- **1)** Se llama **entorno de centro P y radio o amplitud δ (E(P;δ))** al conjunto de puntos del espacio que se encuentran a una distancia de P menor que δ.

$$E(P;\delta) = \{ X \epsilon\ \mathbb{R}^n \ /\ d(X;P) < \delta \}$$

- **2)** Se llama **entorno reducido de centro P y radio o amplitud δ (E*(P;δ))** al conjunto de puntos, distintos de P del espacio que se encuentran a una distancia de P menor que δ.

$$E^*(P;\delta) = E(P;\delta) - \{P\} = \{X \epsilon\ \mathbb{R}^n \ /\ 0 < d(X;P) < \delta \}$$

- **3)** P es **punto interior** de A si y sólo si existe al menos un entorno de P totalmente incluido en A.
    - P es punto interior de A$\Leftrightarrow\exists\delta>0$ / $E(P;\delta)\subseteq A$

- **4)** Al conjunto de puntos interiores de A lo indicamos **A°**.

- **5)** Un conjunto es **abierto** si y sólo si todos sus puntos son interiores.

A es abierto $\Leftrightarrow A = A°$

- **6)** P es **punto de acumulación** de A si y sólo si cualquier entorno reducido de P tiene intersección no vacía con A.

$$P \text{ es punto de acumulación de } A \Leftrightarrow \forall \delta > 0 , \exists\, X \in \mathbb{R}^n \,/\, X \in E^*(P; \delta) \cap A$$

- **7)** Al conjunto de puntos de acumulación de A , lo llamamos **conjunto derivado** de A y lo indicamos A'.

- **8)** Un conjunto es **cerrado** si y sólo si le pertenecen todos sus puntos de acumulación.

$$A \text{ es cerrado} \Leftrightarrow A' \subseteq A$$

- **9)** P es **punto exterior** a A si y sólo si existe un entorno de P al que no pertenece ningún elemento de A.

$$P \text{ es punto exterior} \Leftrightarrow \exists\, \delta>0\,,\, E(P;\delta) \cap A=\emptyset$$

- **10)** P es **punto frontera** de A si y sólo si no es interior ni exterior.

- **11)** La **frontera de un conjunto** (Fr A o ∂A) es el conjunto al que pertenecen todos los puntos frontera del mismo.

- **12)** Un conjunto es **acotado** si y sólo si se puede incluir en un entorno centrado en el origen.

03) Represente geométricamente los siguientes conjuntos de puntos. En cada caso indique cuáles son sus puntos interiores, frontera y exteriores, analice si el conjunto es cerrado, abierto, acotado, compacto, ~~conexo.~~

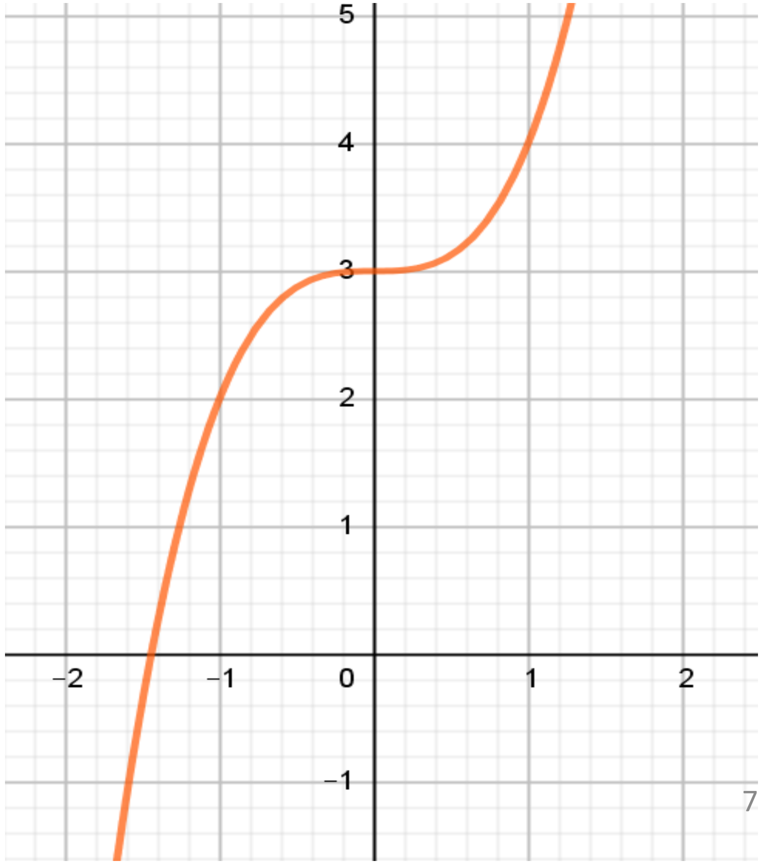
a) $\{(x, y) \in \Re^2 \,/\; x^2 + y^2 - 4 \le 0,\; x + y \ge 1\}$.

b) $\{(x, y) \in \Re^2 \,/\; 4x^2 + 7y^2 \le 2,\; x \ge 0\}$.

Funciones escalares

f: A→B es **función escalar** ⇔ $A \subseteq \mathbb{R} \quad \wedge \quad B \subseteq \mathbb{R}$

- Una variable independiente (x).
- Una variable dependiente (y).
- Son las que se estudiaron en Análisis I.
- Se grafica la función, es decir cómo se relacionan las variables. El gráfico está en $\mathbb{R}^2$.



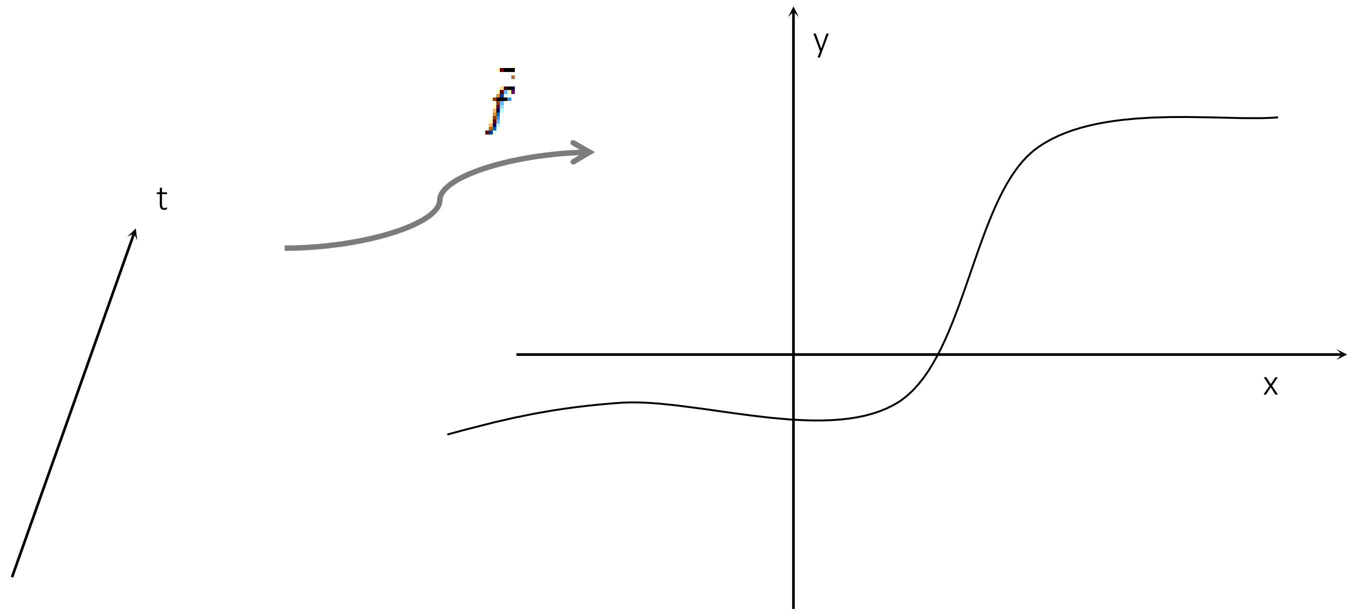
Funciones vectoriales

$\vec{f}: A \rightarrow B$ es **función vectorial** $\Leftrightarrow A \subseteq \mathbb{R} \quad \wedge \; B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots\ldots f_n(t))$$

- Una variable independiente (t).
- n variables dependientes. Si n=2, se notan x e y. Si n=3, se notan x, y, z.
- Cada componente es una función escalar.
- Para encontrar el dominio debemos buscar la intersección de los dominios de cada componente
- Ejemplos ya conocidos: - de Física: posición de un móvil en función del tiempo
  - de Álgebra: ecuación vectorial de una recta

- Se grafica la "**curva**" **imagen** que está en $\mathbb{R}^{2\ o\ 3}$
- Eliminando el parámetro t entre las expresiones de las componentes se obtiene la curva imagen o trayectoria.



Geogebra

10) Grafique el conjunto imagen de:

a) $\overline{g}(u) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u))$ con $u \in [0, \pi]$.

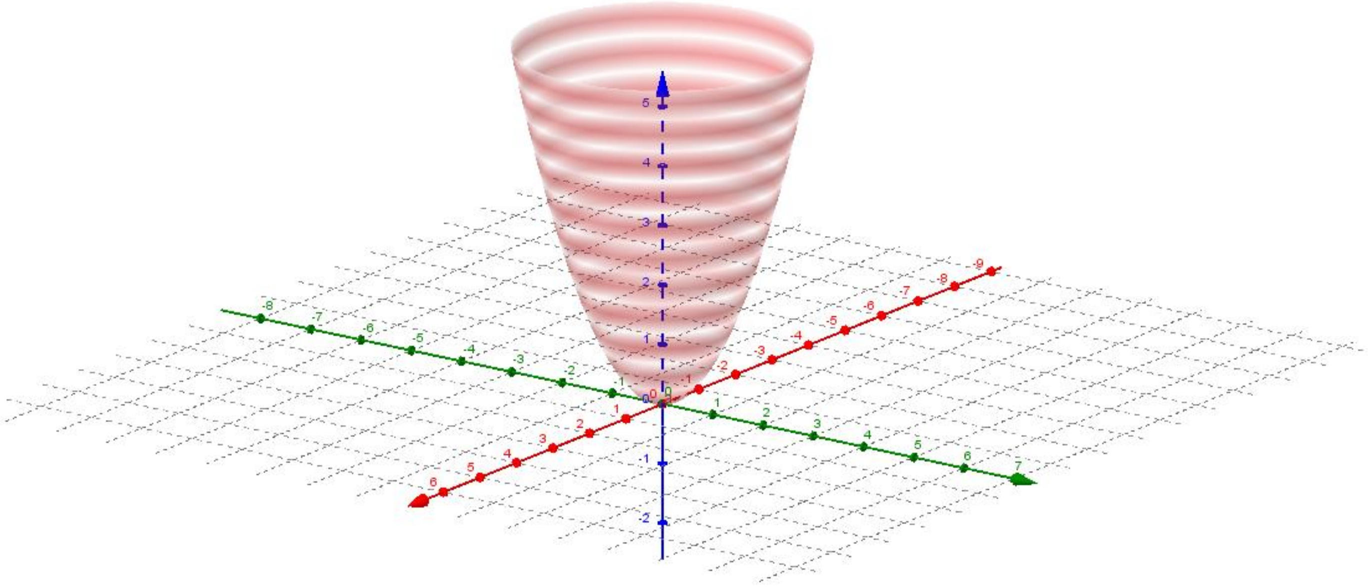
b) $\overline{g}(u) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), u)$ con $u \in [0, \pi]$. graficador

Campos escalares

Un **campo escalar** es una función f:A$\rightarrow$ B con A$\subseteq\mathbb{R}^n$ $\wedge$ B$\subseteq$ $\mathbb{R}$ (n$\geq$ 2)

- Una variable dependiente. Si n=2, z.
- n variables independientes. Si n=2, se notan x e y. Si n=3, se notan x, y, z.
- Ejemplos ya conocidos: - la temperatura en función de la ubicación
  - de Álgebra, la ecuación explícita de un plano
- Para el caso n=2, se grafica la función, es decir cómo se relacionan las variables. El gráfico está en el espacio.

Ejemplo: f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x,y)=x^2+y^2$



05) En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural D de la función.

a) $f(x,y) = \ln((x+1)(y-2x))$.

b) $\bar{f}(x,y) = (\sqrt{1-x}\,,(x+1)^{-1/2}, \ln(y-x))$.

c) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

d) $f(x,y,z) = \sqrt{\ln(z-x-y)}$.

e) $f(x,y) = \ln(x\,y)/\sqrt{2-x-y}$.

f) $\bar{f}(x,y) = (x^{-2}, (x+y)^{-2}\sqrt{y}\,)$.

g) $f(x,y,z) = (x\,y+z)/\sqrt{1-y}$.

h) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-x)/(2x-x^2-y^2)}$. error rta

i) $f(x,y) = \int_x^y (1+t^2)^{-1}\,dt$.

j) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x/(x+y))$.

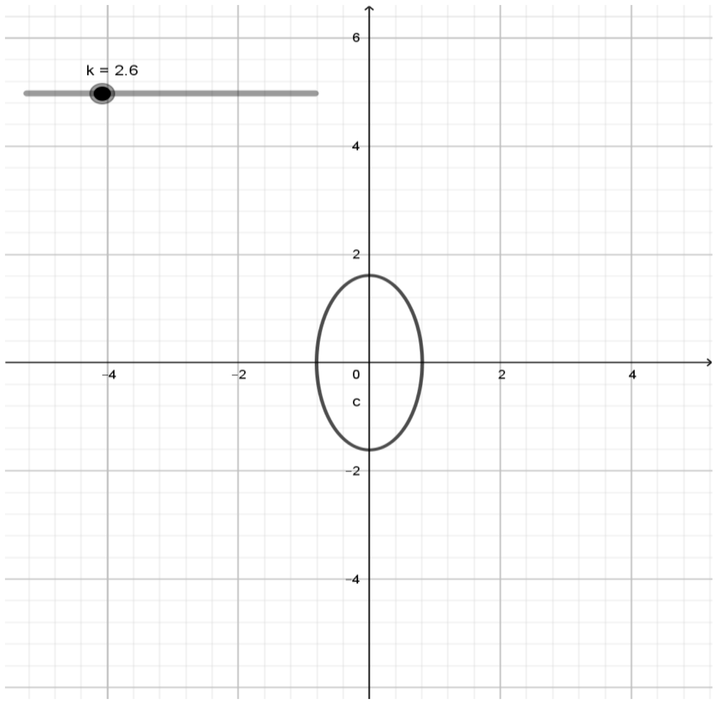
Conjuntos de nivel

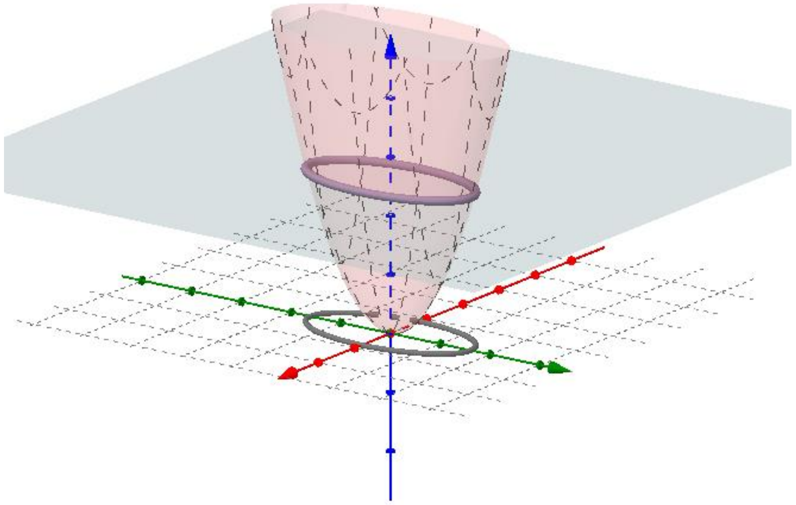
Dado un campo escalar, f: $D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $u = f\,(x_1,x_2,\ldots.,x_n)$, llamamos **conjunto de nivel k** al conjunto

$$C_k = \{(x_1,x_2,\ldots.,x_n) \in D / \; f\,(x_1,x_2,\ldots.,x_n) = k \wedge k \in \mathrm{Imf}\,\}$$

- Como casos particulares, si n = 2 se denominan ***curvas o líneas de nivel*** y si n = 3, ***superficies de nivel***. Estos casos nos interesan en particular porque se pueden representar gráficamente, constituyendo una alternativa para analizar el comportamiento del campo escalar correspondiente.

• Las curvas de nivel correspondientes a distintos niveles no pueden cortarse entre sí pues, de ser así, se contradice la condición de unicidad de campo escalar. Para cada valor de *z = k* existe una única curva de nivel.





Geogebra

06) Represente geométricamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

a) $f(x,y) = x\,y - 2$.

b) $f(x,y) = e^{x\,y}$.

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

d) $f(x,y) = |\,x\,| + y$.

e) $f\left(x,y,z\right) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

f) $f\left(x,y\right) = x\,/\,(x^2 + y^2)$.

g) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|z|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,z) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

Campos vectoriales

$\vec{f}$: A $\rightarrow$B es un **campo vectorial**$\Leftrightarrow$ A$\subseteq \mathbb{R}^n \wedge$ B $\subseteq\mathbb{R}^m$ con n $\geq$ 2 $\wedge$ m $\geq$ 2

- m variables dependientes.
- n variables independientes. Si n=2, se notan x e y. Si n=3, se notan x, y, z.
- Ejemplos ya conocidos: - un campo eléctrico

  - de Álgebra, una transformación lineal
- Para el caso n=2 y m=3, se grafica el conjunto imagen que es una "superficie" en el espacio.