Este texto fue extraído de "Física para estudiantes de ciencias e ingeniería" de Resnick y Halliday, parte 1, capítulo 13.

LA CONSERVACION DEL MOVIMIENTO ANGULAR

CAPITULO 13

13.1. Introducción

En la dinámica de rotación el concepto de cantidad de movimiento angular juega un papel semejante al que juega la cantidad de movimiento lineal en la dinámica lineal. Usando este concepto podemos generalizar la ecuación de la dinámica de rotación y derivar un principio de conservación importante. Desarrollaremos este concepto aplicándolo primero a una partícula sola y después a un sistema de muchas partículas. Entonces se verá que el movimiento de rotación de los cuerpos rígidos es un caso especial, de este método de ataque más general. La cantidad de movimiento angular y su principio de conservación, juega un papel muy importante en la descripción de la física moderna atómica y nuclear así como en astronomía y en la física macroscópica.

13.2 Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula

Considérese una partícula de masa m y cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p}$ en una posición $\mathbf{r}$ con respecto al origen O de un sistema de coordenadas (Fig. 13-1). La *cantidad de movimiento angular* de la partícula *con respecto al punto* O, es el vector representado por el símbolo $\mathbf{L}$ definido así:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{13-1}$$

La magnitud de **L** es $L = rp$ sen θ, (13-2)

siendo θ el ángulo de **r** a **p**. La dirección de **L** es perpendicular al plano formado por **r** y **p**. El sentido de **L** está dado por la regla de los productos vectoriales. Se hace girar **r** hacia **p** siguiendo el ángulo más pequeño entre ellos con los dedos de la mano derecha cerrados; la dirección del pulgar extendido de la dirección de **L**.

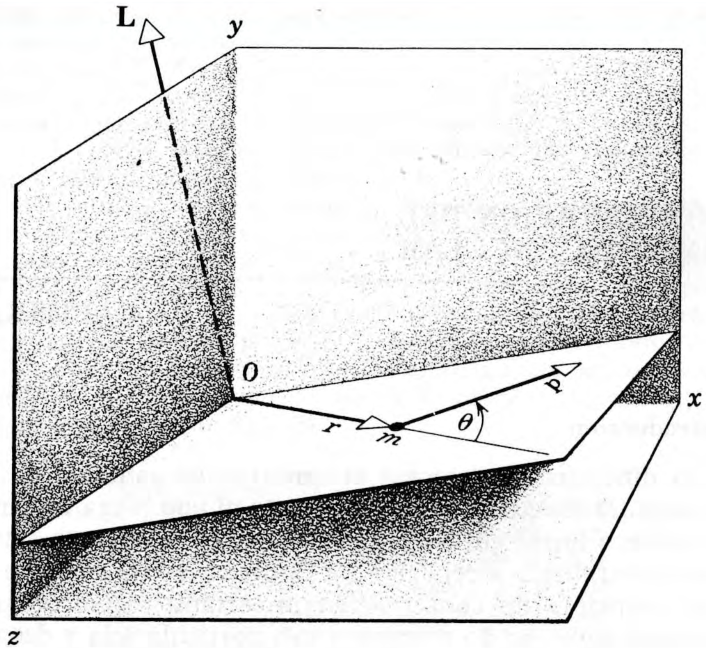


FIG. 13-1. Una masa puntual m que tiene una cantidad de movimiento **p** está localizada en **r** con relación al origen O. El plano formado por **p** y **r** se muestra, así como el ángulo θ que hace **p** con **r**. Ya que $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, **L** es perpendicular a ese plano. El valor de **L** depende de la posición de m con respecto a O, pero no depende de cómo estén orientados los ejes de coordenadas x, y, y z con respecto a O

Así como un momento estático se puede considerar como el momento de una fuerza, de la misma manera la cantidad de movimiento angular se puede considerar como el momento de la cantidad de movimiento (lineal). El brazo del momento es la distancia perpendicular desde O a la línea de acción de **p**. Cuando el ángulo θ es 0° o 180°, la línea de acción de **p** pasa por O; para esos dos ángulos (Ec. 13-2) la cantidad de movimiento angular

con respecto a O es cero. La cantidad de movimiento angular, lo mismo que el momento, se refieren a un cierto origen con respecto al cual se toman los momentos. El vector cantidad de movimiento angular se dibuja pasando por el origen, como se ve en la Fig. 13-1.

Ahora podemos demostrar una relación importante entre el momento y la cantidad de movimiento angular. Hemos visto que $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$. Primero hacemos el producto vectorial de **r** con ambos miembros de esta ecuación y obtenemos.

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} m\mathbf{v}.$$

Pero $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es el momento de una fuerza, o momento estático con respecto a O. Entonces podemos escribir

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} m\mathbf{v}. \tag{13-3}$$

A continuación derivamos la Ec. 13-1 y obtenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

Ahora bien, la derivada de un producto vectorial se toma de la misma manera que la derivada de un producto ordinario cual quiera, salvo que el orden de los términos no se debe cambiar. Tenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}\right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right).$$

Pero $d\mathbf{r}$ es simplemente el vector corrimiento de la partícula en el tiempo dt, de modo que $d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad instantánea **v** de la partícula. Además **p** es igual a $m\mathbf{v}$, de modo que la ecuación anterior puede escribirse así

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d}{dt} m\mathbf{v}\right).$$

Ahora bien, $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$ es igual a cero porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero. Por tanto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} m\mathbf{v}. \tag{13-4}$$

Comparando las Ec. (13-3) y (13-4) se ve que

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \tag{13–5}$$

lo cual se puede enunciar así: *la rapidez con que cambia el vector cantidad de movimiento angular de una partícula en el transcurso del tiempo, es igual al (vector) momento que obra sobre ella.* Este resultado es la analogía rotacional de la Ec. 9-13, que establecía que la rapidez con que cambia el vector cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual al vector fuerza que obra sobre ella.

La Ec. vectorial 13-5, como todas las ecuaciones vectoriales, es equivalente a tres ecuaciones escalares, a saber

$$\tau_x = \frac{d}{dt}L_x, \qquad \tau_y = \frac{d}{dt}L_y, \qquad \tau_z = \frac{d}{dt}L_z. \tag{13–6}$$

Por consiguiente, la componente x del momento aplicado está dada por el cambio que al transcurrir el tiempo experimenta la componente x de la cantidad de movimiento angular. Lo mismo se dice para las direcciones y y z.

13.3 Cantidad de Movimiento Angular de un Sistema de Partículas

En el artículo anterior se trató de una sola partícula. Nos ocuparemos ahora de un sistema formado por muchas partículas. Para calcular la cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas con respecto a algún punto, debemos sumar vectorialmente las cantidades de movimientos angulares de todas las partículas individuales del sistema con respecto a ese punto. Al transcurrir el tiempo, puede cambiar la cantidad de movimiento angular total del sistema con respecto a un punto fijo de referencia. Este cambio, $d\mathbf{L}/dt$, puede provenir de dos causas: *(a)* momentos ejercidos sobre las partículas del sistema por fuerzas internas entre las partículas; *(b)* momentos ejercidos sobre las partículas del sistema por fuerzas externas.

Si la tercera ley de Newton es válida, esto es, si las fuerzas entre dos partículas cualesquiera no sólo son iguales y opuestas, sino también están dirigidas en la línea que une las dos partículas, el momento total interno es cero porque el momento resultante de cada pareja de fuerzas internas acción-reacción es cero. Por consiguiente, la primera causa no contribuye en nada. Por tanto, para un punto de referencia fijo sólo subsiste la segunda causa, y podemos escribir

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \tag{13–7}$$

en donde $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ representa la suma de todos los momentos externos que obran en el sistema. En palabras, *la rapidez de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas con respecto a un punto de referencia fijo, es igual a la suma de los momentos externos que obran en el sistema.**

La Ec. 13-7 es la generalización de la Ec. 13-5 a muchas partículas. Por supuesto, cuando tenemos una sola partícula no hay fuerzas o momentos internos.

Un cuerpo rígido es simplemente un caso especial de un sistema de partículas, esto es, un sistema de partículas cuyas posiciones relativas están fijas. Por consiguiente la Ec. 13-7 es aplicable a un cuerpo rígido. Un cuerpo rígido es un sistema relativamente simple, porque cada partícula en él tiene la misma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la misma aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Vimos en el Cap. 12 que la expresión

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha} \tag{13–8}$$

es válida en cualquier instante para un cuerpo rígido que tenga libertad de girar alrededor de cualquier eje, siendo I el momento de inercia del cuerpo rígido calculado con respecto a ese eje y $\boldsymbol{\tau}$ es la suma de los momentos (externos) aplicados con respecto a ese eje. Comparando la Ec. 13-8 con la Ec. 13-7, obtenemos el resultado

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}.$$

Pero $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, y si I es constante, $I\, d\boldsymbol{\omega}/dt = d(I\boldsymbol{\omega})/dt$ de modo que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}I\boldsymbol{\omega}$$

o sea

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{13–9}$$

* Vale la pena notar que si escogemos como punto de referencia el centro de masa del sistema, la Ec. 13-7 sigue siendo válida, aun cuando el punto de referencia no esté fijo en el espacio. Esto es, la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al centro de masa es independiente del movimiento del centro de masa.

Por consiguiente, la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido es el producto del momento de inercia por la velocidad angular del cuerpo rígido.

Nótese la analogía con la ecuación de la cantidad de movimiento lineal.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

En esa fórmula, m es análoga al momento de inercia I, la velocidad lineal $\mathbf{v}$ es análoga a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p}$ es análoga a la cantidad de movimiento angular $\mathbf{L}$.

Si combinamos las Ec. 13-7 y 13-9 obtenemos

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} I\boldsymbol{\omega}. \tag{13–10}$$

Cuando I es constante obtenemos $\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$. Sin embargo, se encuentra que la Ec. 13-10 es válida aun para un sistema de partículas en el cual *I no es* constante. Así es como encontramos que la expresión

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

tenía que generalizarse a

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} m\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}$$

para ser generalmente válida, así encontramos que la expresión

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$$

debe generalizarse a

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} I\boldsymbol{\omega} = \frac{d}{dt}\mathbf{L}$$

para ser generalmente válida. Por consiguiente, la cantidad de movimiento angular juega el mismo papel fundamental en la dinámica de rotación que la cantidad de movimiento lineal en la dinámica de traslación.

▶ EJEMPLO 1. Considérese una placa horizontal que gira alrededor de un eje vertical que pasa por O, como se muestra en la Fig. 13-2. Derivemos la relación $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ directamente a partir de la definición de cantidad de movimiento angular.

La cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m_i, cuya posición con respecto al eje que pasa por O está dada por el vector $\mathbf{r}_i$, es

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i,$$

siendo $\mathbf{v}_i$ la velocidad lineal de la partícula de orden i. Para encontrar la cantidad de movimiento angular total de la placa debemos sumar lo que contribuyen todas las partículas de placa. Por consiguiente

$$\mathbf{L} = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i = \Sigma\, m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i).$$

Ahora bien, es claro que $\mathbf{L}$ es paralelo al eje que pasa por O, ya que $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$ para cada partícula están en el plano de la placa. Así pues, $\mathbf{L}$ está en la misma dirección que el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo rígido. Por consiguiente, sólo necesitamos calcular la magnitud de $\mathbf{L}$.

Del significado de producto vectorial, obtenemos

$$L = \Sigma\, m_i(r_i v_i \operatorname{sen}\theta_i),$$

siendo θ_i el ángulo entre los vectores $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$. Ahora bien, este ángulo es de 90° para cualquier partícula, ya que $\mathbf{v}_i$ debe ser perpendicular a $\mathbf{r}_i$ en un cuerpo rígido. Por tanto usando $\theta_i = 90°$ y $v_i = \omega r_i$, obtenemos

$$L = \Sigma\, m_i r_i \omega r_i = \Sigma\, (m_i r_i^2)\omega = I\omega.$$

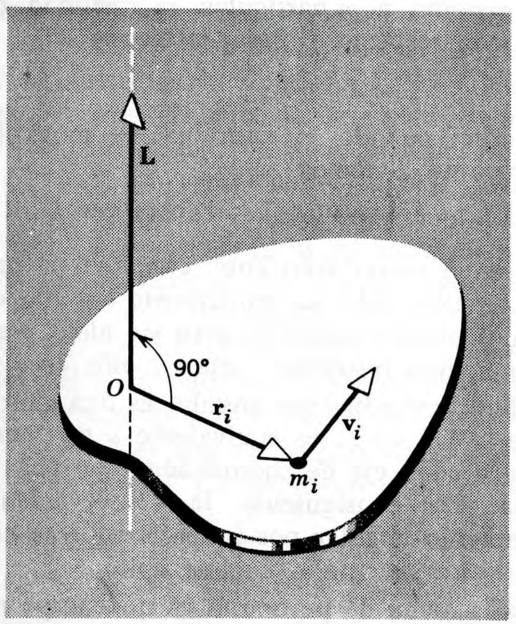


FIG. 13-2. Ejemplo 1. Una placa horizontal gira alrededor de un eje vertical que pasa por O. Una masa puntual m_i localizada en $\mathbf{r}_i$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_i$. La suma de las cantidades de movimientos angulares $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i$ da la cantidad de movimiento angular de la placa, $\mathbf{L}$.

Ya que ω y L tienen las mismas direcciones, hemos obtenido el resultado

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

para un cuerpo rígido plano, directamente a partir de la definición de cantidad de movimiento angular. ◀

13.4 Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular

Supongamos que la suma de los momentos externos que obran en un sistema de partículas es cero. Entonces en la Ec. 13-7

$$\tau_{ext} = 0,$$

$$d\mathbf{L}/dt = 0,$$

de modo que

$$\mathbf{L} = \text{constante}$$

Cuando el momento externo resultante que obra en un sistema es cero, el vector cantidad de movimiento angular total del sistema permanece constante.

Para un sistema de *n* partículas, la cantidad de movimiento angular total con respecto a algún punto es

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \cdots + \mathbf{L}_n.$$

Por consiguiente, cuando la cantidad de movimiento angular total L es constante, tenemos

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \cdots + \mathbf{L}_n = \text{constante} = \mathbf{L}_0, \qquad (13\text{–}11)$$

en donde $\mathbf{L}_0$ es el vector constante, cantidad de movimiento angular total. Las cantidades de movimiento angular de las partículas individuales pueden cambiar, pero su suma permanece constante si el momento resultante exterior vale cero.

La cantidad de movimiento angular es una cantidad vectorial, de modo que la Ec. 13-11 es equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada eje de coordenadas que pasa por el punto de referencia. Por consiguiente, la conservación de la cantidad de movimiento angular nos proporciona tres condiciones del movimiento de un sistema al cual se aplica.

Si nuestro sistema de partículas es un cuerpo rígido, su cantidad de movimiento angular es $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, y la Ec. 13-11 para la conservación de la cantidad de movimiento angular toma la forma

$$I\boldsymbol{\omega} = \text{constante} = I_0\boldsymbol{\omega}_0. \qquad (13\text{–}12)$$

Esto es, la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje, permanece constante cuando la resultante de los momentos externos alrededor de ese eje vale cero. Nótese que $I\boldsymbol{\omega}$ debe permanecer de magnitud y dirección constantes, porque las Ecs. 13-11 y 13-12, son ecuaciones *vectoriales*. Ya que es posible cambiar la distribución de masa con respecto a un eje cuando un cuerpo está girando, el momento de inercia I puede variar. Siempre que esto ocurre, $\boldsymbol{\omega}$ debe cambiar de tal manera que el producto $I\boldsymbol{\omega}$ permanezca igual al valor inicial $I_0\boldsymbol{\omega}_0$.

Los acróbatas, clavadistas, bailarines de ballet, patinadores de hielo y otras personas que hacen ejercicios similares echan mano de este principio. Como I depende del cuadrado de la distancia de las partes del cuerpo al eje de rotación, es posible una gran variación extendiendo o encogiendo los miembros. Considérese el clavadista de la Fig. 13-3. Supongamos que cuando sale del trampolín lleva una cierta velocidad angular ω_0 alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro de masa, tal que le haría dar media vuelta antes de que llegara al agua. Pero si quiere hacer, en el mismo tiempo, un salto mortal de vuelta y media, debe triplicar su velocidad angular. Ahora bien, no hay fuerzas externas obrando sobre él, salvo la gravedad, y la gravedad no produce momento con respecto a su centro de masa. Por consiguiente, su cantidad de movimiento angular permanece constante, y $I_0\omega_0 = I\omega$. Ya que $\omega = 3\,\omega_0$, el clavadista debe cambiar su momento de inercia con respecto al eje horizontal que pasa por el centro de masa del valor inicial I_0 a un valor I, tal que I sea igual a $\frac{1}{3} I_0$. Esto lo hace encogiendo sus brazos y piernas hacia el centro de su cuerpo. Mientras mayor es su velocidad angular inicial, y mientras más puede reducir su momento de inercia, mayor número de vueltas puede dar en un tiempo dado. Ejemplo

Debemos hacer notar que la energía cinética de rotación del clavadista no es constante. De hecho, en nuestro ejemplo, ya que

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

y

$$I < I_0,$$

se deduce que

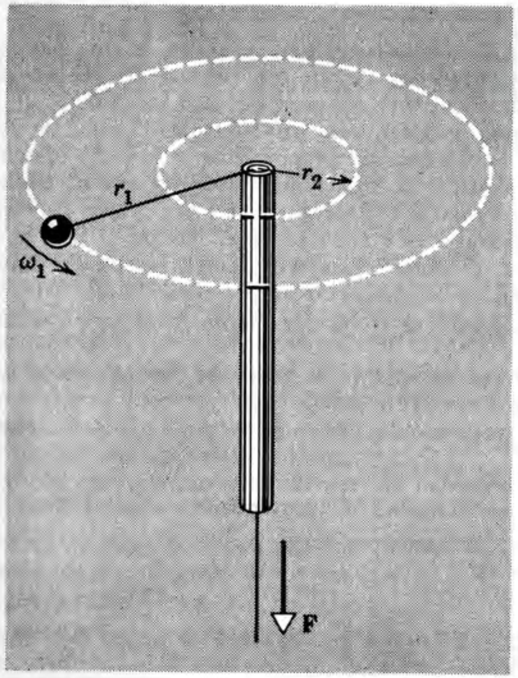
$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 > \tfrac{1}{2}I_0\omega_0^{\,2},$$

y la energía cinética de rotación del clavadista *aumenta*. Este aumento de energía es proporcionado por el clavadista, quien hace trabajo cuando encoge su cuerpo.

FIG. 13-3. Un clavadista sale del trampolín con sus brazos y piernas estirados y con cierta velocidad angular. Ya que no obran sobre él momentos alrededor del centro de su masa, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ es constante mientras está en el aire. Cuando encoge sus brazos y sus piernas, ya que I disminuye, ω aumenta. Cuando extiende de nuevo sus miembros, su velocidad angular se reduce a su valor inicial. Nótese el movimiento parabólico de su centro de masa, común a todos los movimientos de dos dimensiones bajo la influencia de la gravedad

De una manera semejante, un patinador de hielo y un bailarín de ballet pueden aumentar o disminuir la velocidad angular de una rotación que efectúen alrededor de un eje vertical. Un gato se las arregla para caer siempre sobre sus patas usando los mismos principios, sirviéndose de su cola como un apéndice extra útil, aunque no esencial.

EJEMPLO 2. Un pequeño objeto de masa m está fijo a un hilo ligero que pasa por un tubo hueco. El tubo se sostiene con una mano y el hilo con la otra. El objeto se pone a girar en un círculo de radio r_1 con una velocidad v_1. La cuerda se jala entonces hacia abajo acortando el radio de la trayectoria a r_2 (Fig. 13-4). Encontrar la nueva velocidad lineal v_2 y la nueva velocidad angular ω_2 del objeto, en función de los valores iniciales v_1 y ω_1 y de los dos radios.



Problema 128
(DINÁMICA DE LA PARTÍCULA)

FIG. 13-4. Ejemplo 2. Una masa en el extremo de una cuerda se mueve en un círculo de radio r_1 con velocidad angular ω_1. La cuerda que baja por un tubo F produce la fuerza centrípeta.

La tensión de la cuerda hacia abajo se transmite como una fuerza radial sobre el objeto. Esa fuerza ejerce sobre el objeto un momento cero con respecto al centro de rotación. Ya que no se obra ningún momento sobre el objeto con respecto al eje de rotación, su cantidad de movimiento angular en esa dirección es constante. Por tanto

$$\text{cantidad de movimiento angular inicial} = \\ = \text{cantidad de movimiento angular final},$$

$$mv_1r_1 = mv_2r_2,$$

y

$$v_2 = v_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right).$$

Ya que $r_1 > r_2$, el objeto aumenta su velocidad al ser jalado.

En función de la velocidad angular, ya que v_1 es igual a $\omega_1 r_1$ y v_2 es igual a $\omega_2 r_2$.

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$$

y

$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \omega_1,$$