ECUACIONES DIFERENCIALES

Unidad 1

- Un móvil se desplaza con aceleración constante de $3\,\frac{m}{s^2}$ con una posición inicial de 2 m y una velocidad inicial de $4\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la posición del móvil en función del tiempo?

- En forma experimental Newton descubrió que la velocidad con la que un cuerpo pierde temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio externo. Si llamamos $T(x)$ a la función que informa la temperatura del cuerpo en el instante x y T_e a la temperatura del exterior o medio ambiente entonces podemos traducir simbólicamente $T'(x) = k(T(x) - T_e)$ ¿Cómo se puede obtener T(x)?

Definición:

- Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una función desconocida con respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación que sólo contiene derivadas respecto de una única variable independiente recibe el nombre de Ecuación Diferencial Ordinaria. Solemos escribir: EDO.

Por ejemplo: $y' + sen(x)y = x^2$

En general, una EDO de orden n puede escribirse de alguna de estas formas:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Por ejemplo:

$$y' - \frac{x-y}{4x} = 0$$

$$4xy' + y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{4x}$$

son distintas formas de expresar la misma EDO

Clasificación de las EDO según el orden

El orden de una EDO es el orden de la derivada de mayor orden que se presente en la ecuación.

Por ejemplo:

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ $\quad$ $y' + 2e^x y = sen(x)$ $\quad$ son EDO de primer orden

$y'' + 3xy = 0$ $\quad$ $sen(x)\frac{d^2y}{dx^2} = \tan(x)$ $\quad$ son EDO de segundo orden

01) Determine el orden y, si existe, el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias. Reconozca aquellas que son del tipo lineal.

a) $(y'')^2 - y''' = y - (y')^2$

b) $y''' + x(y')^4 = 0$

c) $(1+x)(y'')^4 + 3y''' + 5x^2 y = 0$

d) $y'' - 3\,\mathrm{sen}(y') + y = x^3$

e) $3x\,dy - y\,dx = 0$

f) $x y'' - 4y' + x - 1 = 0$

- Una EDO tiene grado si y sólo si se puede escribir de la forma:

$$a_0(x)(y^{(n)})^{k_0} + a_1(x)(y^{(n-1)})^{k_1} + \cdots + a_{n-1}(x)(y')^{k_{n-1}} + a_n(x)y^{k_n} = Q(x)$$

El **grado** de la ecuación diferencial es el mayor exponente que afecta a la derivada que da el orden a la ecuación.

- Si una EDO tiene grado y todos los exponentes son 1, entonces es lineal.

Solución de una edo

Decimos que una función $y = f(x)$ que esté definida y tenga al menos n derivadas continuas en un cierto intervalo I es una solución de una EDO de orden n si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación.

Por ejemplo:

- La función $y = \frac{x^4}{16}$ es solución de la EDO $y' = x\sqrt{y}$
- Las funciones $y_1 = xe^x$; $y_2 = 0$ son solución de la EDO $y'' - 2y' + y = 0$
- La función y=f(x) definida implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ es solución de la EDO $y' = -\frac{x}{y}$ en el intervalo (-5;5)

Tipo de soluciones de una edo

- <u>Solución General</u> (SG) Es una familia de curvas que verifican la EDO. La SG tendrá tantas constantes arbitrarias algebraicamente independientes como sea el orden de la ecuación que satisface.

Por ejemplo: $y = Ax - x.\cos(x)$ es la SG de la ecuación

$$y\acute{} - y = x^2.sen(x)$$

Geogebra

- <u>Solución particular:</u> (SP) Es una curva que es solución de la EDO y que se obtiene asignando un valor específico a la/s constante/s arbitraria/s. Para determinar dicho valor/es deben darse condiciones iniciales o de contorno. La cantidad de condiciones iniciales coincide con la cantidad de constantes arbitrarias a determinar. De lo anterior se desprende que las SP tienen la misma forma de la SG.

Por ejemplo: $y = x - x.\cos(x)$ es una SP de la EDO $xy' - y = x^2.sen(x)$
Se le asigna el valor 1 a la constante A de la SG del ejemplo anterior.

- <u>Solución singular:</u> (SS) Es una curva que es solución de la EDO pero que no puede obtenerse a partir de la SG.

Por ejemplo: $y_G = Ax + 2A^2$; $y_P = x + 2$; $y_S = -\frac{x^2}{8}$ son solución general, particular y singular, respectivamente de la EDO $y = xy' + 2(y')^2$

Geogebra

02) Verifique que:

a) $y = e^{-x} + x - 1$ es una solución de $y' + y = x$ que cumple con $y(0) = 0$.

d) $y = x$ es una solución de $yy'^2 + y^2 y'' = x$.

$y = xy' + (y')^2$

e) $y = Cx + C^2$ es S.G., $y = -x^2/4$ es S.S. de $y' = x\,y' + (y')^2$. Halle las soluciones que pasan por $(2, -1)$.

¿Cómo se genera una edo para una flia de curvas?

Dada una familia de curvas, buscamos una EDO tal que esa flia sea la SG

1) De qué orden es? $\longrightarrow$ Depende de la cantidad de constantes
2) Se deriva tantas veces como constantes
3) Se construye una expresión en la que seguro aparezca la derivada que da el orden y no aparezcan ninguna de las constantes.

03) Halle la ecuación diferencial correspondiente a las siguientes familias de curvas:

a) $y^2 = 4ax$

b) $x^2 + y^2 = r^2$

c) $y = \operatorname{sen}(ax + b)$

d) $y = a e^x + b x e^x$

e) $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3$

f) $y = b a^x$

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

A lo largo de este año, desarrollaremos métodos que nos permitirán hallar la solución de ciertos tipos de EDO de primer orden. Estos tipos son:

- Variables separables
- Lineales
- Homogéneas
- Totales Exactas
- Reducibles a Totales Exactas (Factor integrante)

En esta Unidad, nos dedicaremos a las dos primeras.

Ecuaciones en variables separables

Una EDO de primer orden es de variables separables si puede expresarse $P(x)dx = Q(y)dy$

- $x^2dx = \cos(y)\,dy$
- $y' = \frac{xe^x}{3y-1}$
- $y' = 3x^2(y^2 - 2y)$

Para resolverla, debemos agrupar en cada lado de la igualdad la misma variable con el diferencial correspondiente. Integrando miembro a miembro se llega a la SG

07) Halle, según corresponda, la S.G. o la S.P. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' = (x^2 + 1)/(2 - y)$ con $y(-3) = 4$

b) $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2 y$

c) $y' = 2x\sqrt{y-1}$

d) $x^2 dy = (x^2 + 1)dx/(3y^2 + 1)$ con $y(1) = 2$

e) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ con $y(4) = 2$

f) $y' = xy + x - 2y - 2$ con $y(0) = 2$

10) Halle la familia de curvas tales que su recta tangente en cada punto ...

a) ... pasa por (0,0)

b) ... es horizontal.

c) ... tiene ordenada al origen igual a la suma de las coordenadas del punto.

d) ... tiene abscisa al origen igual al triple de la abscisa del punto.

e) ... es normal a la recta que pasa por dicho punto y el origen de coordenadas.

EDO LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una EDO es lineal de primer orden si puede expresarse de la siguiente manera:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Para resolverla, se propone como solución una función que sea el producto de dos funciones de x : $y = u(x).v(x)$

EDO LINEALES DE PRIMER ORDEN

1) Sustituimos en la Edo donde dice “y” por “uv” y donde dice “y’ ” por “u’v+uv’ ”
2) Factor común v
3) Buscamos UNA u tal que el paréntesis sea 0
4) Para esa u, resolvemos uv’=Q(x) (no olvidar la cte)
5) Armamos “y” haciendo “u.v”

13) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de 1° orden.

a) $x\,y' - y - x^3 = 0$

b) $y' + y\cos(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

c) $(x^2+4)\,y' - 3\,x\,y = x$, halle la S.P. tal que $y(0) = 1$

d) $\dfrac{dy}{dx} - 2\dfrac{y}{x} = x^2 \operatorname{sen}(3x)$

23) Dada $xy'' - 2y' = 0$ halle la S.P./ $y(1) = y'(1) = 3$ aplicando la transformación $w = y'$. (#)

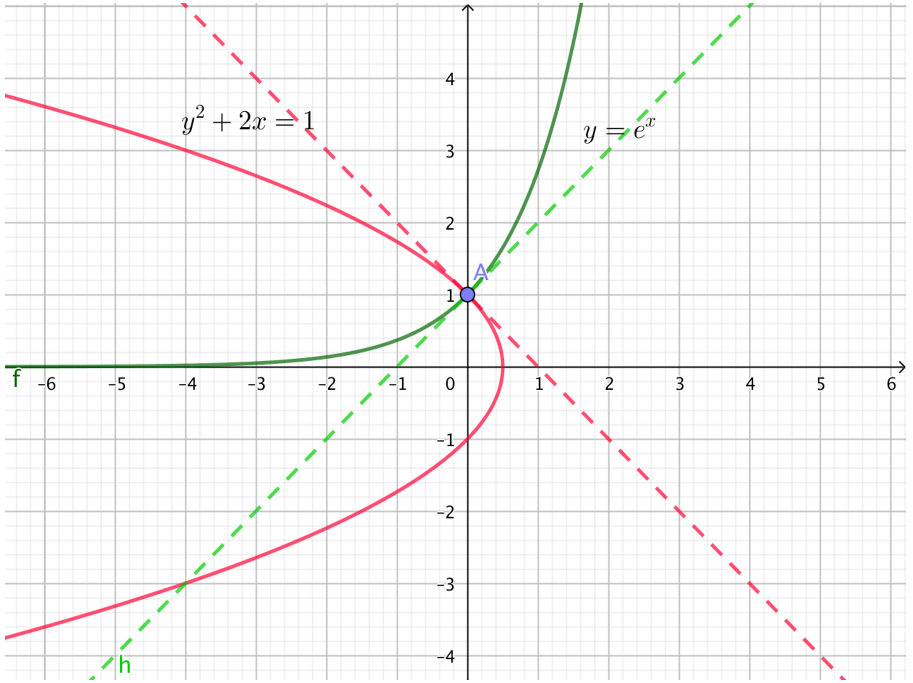
24) Halle la S.G. de $y'' - 2\,y' = x$.

25) Halle la S.G. de $y''' \cancel{- y'' = x}$. $y''' - y' = 0$

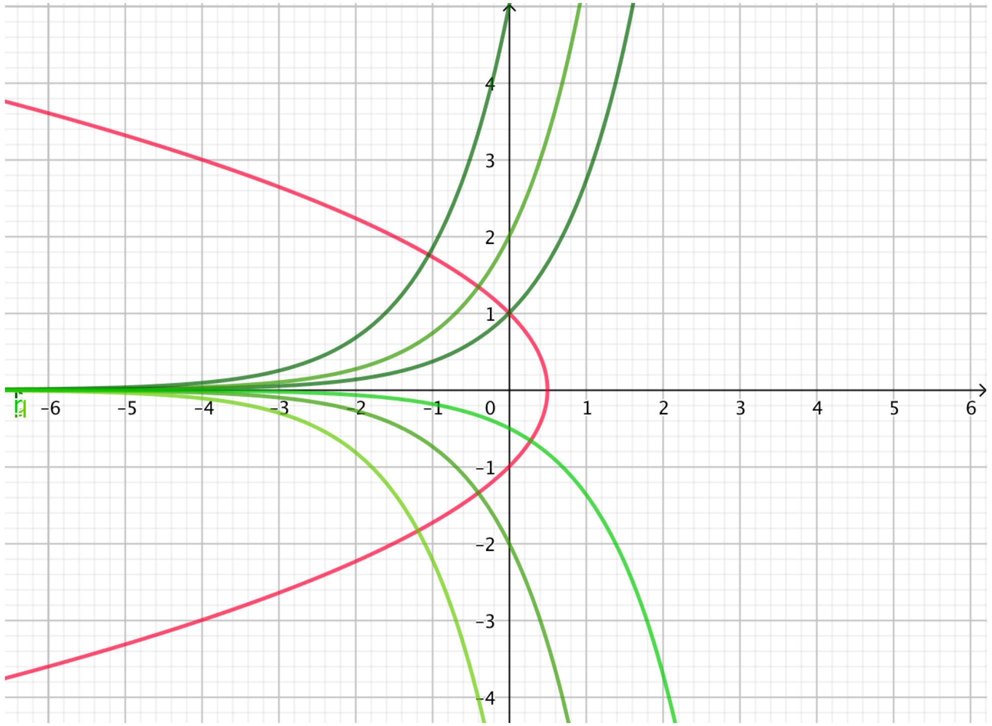
TRAYECTORIAS ORTOGONALES

<u>Definiciones:</u>

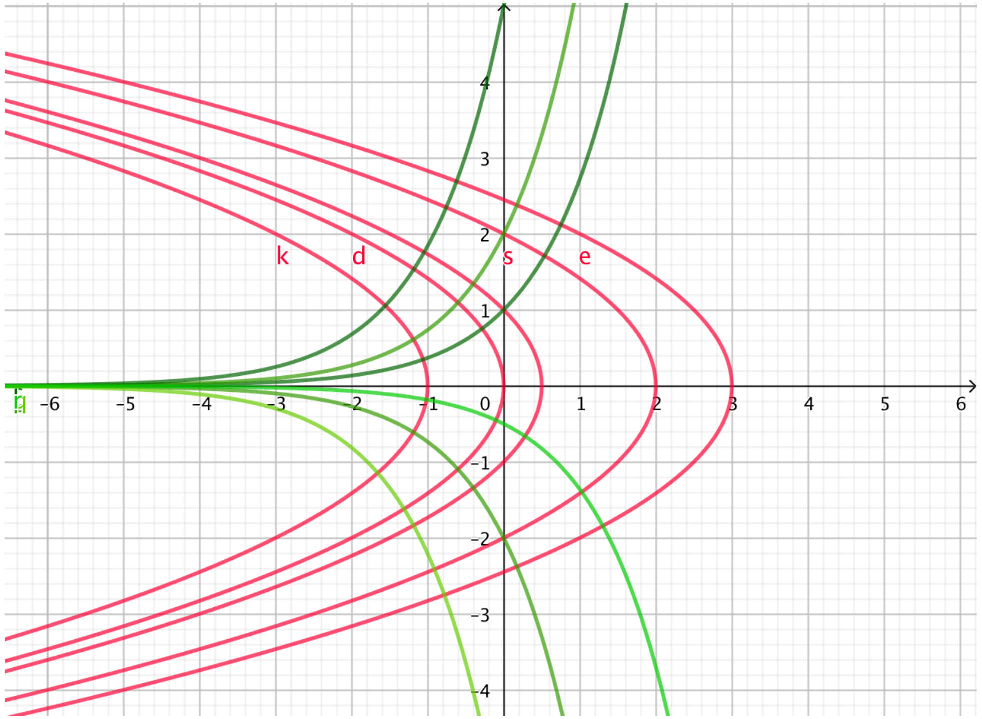
- Decimos que dos curvas son ortogonales cuando al cortarse en un punto, tienen sus rectas tangentes perpendiculares entre sí en dicho punto .



- Si una curva es ortogonal a cada una de las curvas de una familia, se dice que es una *trayectoria ortogonal* de la familia.



- Si dos familias de curvas de un mismo plano son tales que cada una de ellas es ortogonal a la otra familia, decimos que son *trayectorias mutuamente ortogonales*. En ese caso, una flia es la flia de **trayectorias ortogonales** de la otra.



Pasos para encontrar TO

1. Encontrar la EDO de la primer familia de funciones. Para ello debemos derivar, y conseguir que aparezca y´ pero no la cte.

2. Reemplazar y’ por $-\frac{1}{y\prime}$. De esta manera se obtiene la EDO de la familia de TO

3. Se resuelve la EDO obtenida en el punto 2

Geogebra

20) Halle la familia de curvas ortogonal a la dada.

a) $y = 2x + C$ c) $y(Cx+1) = x$ e) $y = C\,\mathrm{sen}(2x)$ → Rta: $\ln|\cos(2x)| - 2y^2 = K$

b) $y = Ce^x$ d) $y = \ln(x+C)$ f) $(x+y)^2 = kx^2$, $k > 0$