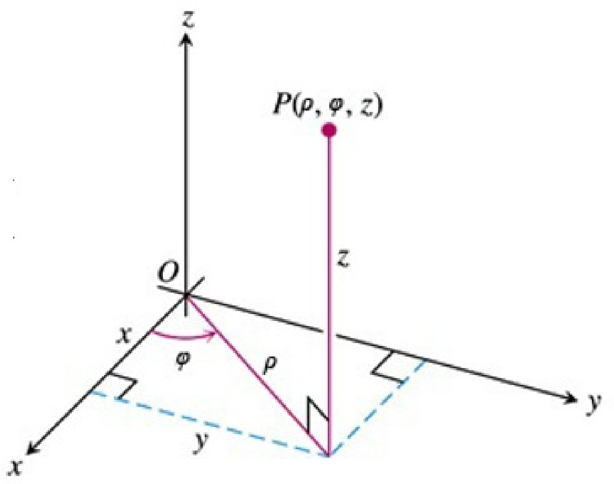
Unidad 9

Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas

Para ubicar un punto en $\mathbb{R}^3$ podemos utilizar coordenadas cilíndricas, que son las ya conocidas polares en $\mathbb{R}^2$ con el agregado de la 3ª variable z. Las ecuaciones de transformación son:

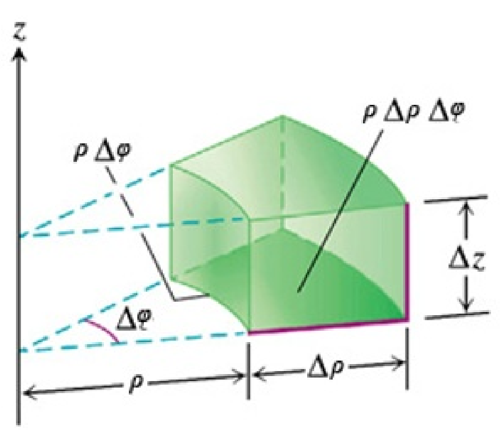


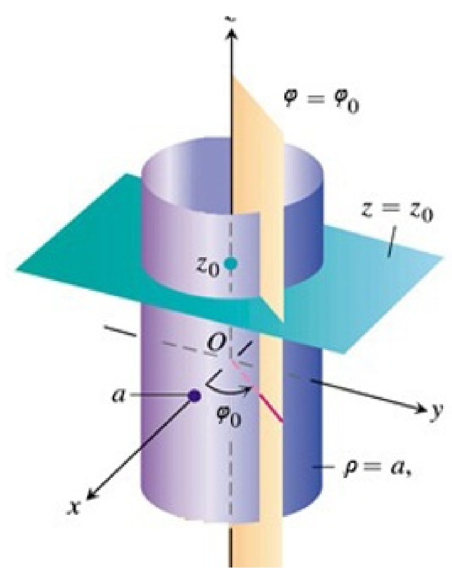
$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$

$\rho^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\varphi = y/x$

En la **Fig.** se observan las **superficies coordenadas** correspondientes a las coordenadas cilíndricas. Entre seis de ellas queda determinado el diferencial de volumen que se muestra en la **Fig. 7,** cuyo volumen es:

$$\boxed{dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$$





Elemento de volumen en coordenadas esféricas

Recordemos que el jacobiano es r^2 sen λ

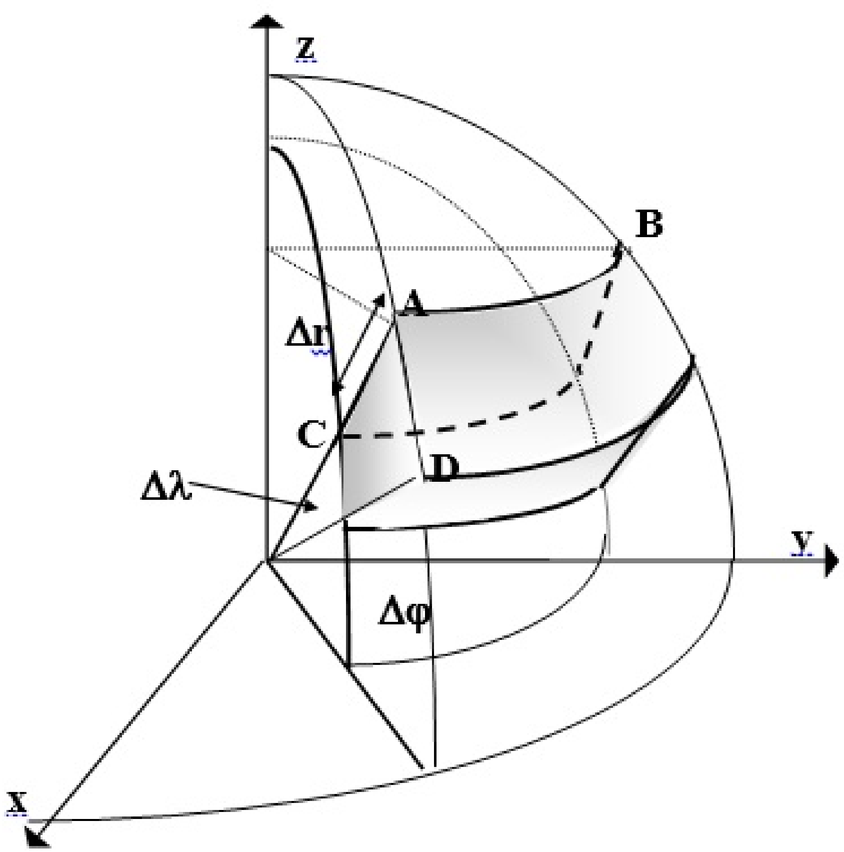
La fórmula puede interpretarse geométricamente, tomando un elemento de volumen en coordenadas esféricas.

Para ello debemos tener en cuenta que :
r = cte $\Rightarrow$ sup. esférica
λ= cte $\Rightarrow$ sup. cónica de eje z y vértice en (0;0;0).
φ= cte $\Rightarrow$ semiplano de borde z

$\overline{AC} = \Delta r$

$\overset{\frown}{AB} = r \text{ sen } \lambda \, \Delta\varphi$
(es un arco que está en la curva intersección
de una superficie esférica con una sup. cónica).
(Recordar: long.arco = r. áng. en rad.)

$\overset{\frown}{AD} = r \, \Delta\lambda$



ΔV = long. $\overline{AC}$. long. $\overset{\frown}{AB}$. long $\overset{\frown}{AD}$
$\Delta V = r \text{ sen}\lambda . \Delta r . r . \Delta\varphi . \Delta\lambda$
$\Delta V = r^2 . \text{ sen}\lambda . \Delta r . \, . \Delta\varphi . \Delta\lambda$