Ecuaciones diferenciales

Unidad XII

Ecuaciones diferenciales del tipo homogéneas

- Una función $f(x,y)$ es **homogénea de grado n** si y sólo si $f(\lambda x, \lambda y)= \lambda^n f(x,y)$

- Una función $f(x,y)$ es **homogénea de grado 0** si y sólo si $f(\lambda x, \lambda y)= f(x,y)$

- Una EDO es **del tipo homogénea** si y sólo si se puede escribir como

  $y' =f(x,y)$ con f una función homogénea de grado 0

Resolución

- Este tipo de EDO se resuelve haciendo la sustitución z(x)= $\frac{y(x)}{x}$ para llevarla una EDO que se resuelve por variables separables.

- Se debe reemplazar a y por z.x

- Se debe reemplazar a y’ por z’x+z

01) Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales homogéneas de 1° orden.

a) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$ con $y(1) = 1$.

b) $(x^2 + y^2)\,dx - 2\,xy\,dy = 0$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + x\cos^2(y/x)}{x}$ con $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

d) $y' = y/(x - y)$.

Ecuaciones diferenciales totales exactas (EDTE)

- Decimos que la ecuación diferencial $P(x; y)\,dx + Q(x; y)\,dy = 0$ es **total exacta** $Q'_x = P'_y$

04) Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo.

a) $2xydx + (x^2 + \cos y)\,dy = 0$.

d) $(y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$. (*)

- O que la resolución de ecuaciones diferenciales exactas se reduce a **calcular la función potencial de (P,Q) e igualarla a una constante arbitraria**, es decir, la solución general de una EDTE son las curvas de nivel de la función potencial.

c) $(6xy - y^3)\,dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\,dy = 0$.

Ecuaciones reducibles a totales exactas

- Si $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ (a) **no es EDTE**, puede ser transformada en una ecuación diferencial de tal tipo multiplicándola por una expresión apropiada $\mu(x,y)$. La expresión $\mu(x,y)$ que hace la ecuación diferencial exacta, es denominada **factor integrante.**
- Para que $\mu(x,y)$ sea un factor integrante tendría que ocurrir que la ecuación diferencial: $\mu(x,y)\,P(x;\,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x;\,y)\,dy = 0$ (b) sea exacta.
- Para resolver (b), supondremos que $\mu(x,y)$ depende **sólo de *x*** o bien, **sólo de *y***.

Factor integrante que depende de x

- $\mu(x)\ P(x;\ y)\ dx + \mu(x)\ Q(x;\ y)\ dy = 0$

$$\mu P'_y = \mu Q'_x + Q\frac{d\mu}{dx}$$

- Separando variables en esta ED resulta

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx$$

Debe depender sólo de x

- $\mu(x) = e^{\int \frac{P'y - Q'x}{Q} dx}$

Factor integrante que depende de y

- $\mu(y)\ P(x;y)\ dx + \mu(y)\ Q(x;y)\ dy = 0$ $\qquad \mu P'_y + P\dfrac{d\mu}{dy} = \mu Q'_x$

- Separando variables en esta ED resulta $\qquad \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{Q'_x - P'_y}{P}dy$

- $\mu(y) = e^{\int \frac{Q'x - P'y}{P} dy}$

Debe depender sólo de y

04) Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo.

d) $(y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0\,.$ (*)

e) $(x + y^2)\,dx - 2\,y\,x\,dy = 0\,.$

Ecuaciones diferenciales de 2do orden lineales con coeficientes constantes

- Son aquellas de la forma $ay''+by'+cy=f(x)$ con a, b y c números reales y $a\neq0$
- Si $f(x)=0$ se llaman **homogéneas**
- Si $f(x)\neq0$, se llaman **no homogéneas**

Homogéneas

Una familia de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, … $y_n(x)$ son **linealmente independientes** si y sólo si la única forma de que una combinación lineal de ellas sea 0 es que todos los coeficientes sean 0.

De lo contrario, son **linealmente dependientes**.

Para que 2 funciones sean linealmente independientes, una no debe ser un múltiplo de la otra.

Se llama determinante **Wronskiano** a

$$\forall x:\ W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x)\cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedad: Si $W(x) \neq 0\ \forall x$ entonces $y_1(x)$, $y_2(x)$, … $y_n(x)$ son li

Propiedad:

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son solución de $ay''+by'+cy=0$, entonces cualquier combinación lineal entre $y_1(x)$ e $y_2(x)$ también es solución de $ay''+by'+cy=0$.

Demostración: Queremos ver que $C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ es solución de $ay'' + by' + cy = 0$.

$$a[C_1\, y_1'' + C_2\, y_2''] + b\, [C_1\, y_1' + C_2\, y_2'] + c\, [C_1\, y_1 + C_2\, y_2] =$$

$$=aC_1\, y_1'' + C_2\, y_2'' + b\, C_1\, y_1' + bC_2\, y_2' + c\, C_1\, y_1 + cC_2\, y_2 =$$

$$=C_1(a\, y_1''+b\, y_1' + c\, y_1)+C_2\,(ay_2''+ by_2' + c\, y_2)=0$$

EDO homogéneas $ay''+by'+cy=0$

- Por lo tanto, para determinar la SG de $ay''+by'+cy=0$, debemos encontrar dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linealmente independientes. Entonces:

$$y_{GH} = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

Solución general de la EDO homogenea

¿Cómo construir dos soluciones li?

- Se propone $y = e^{rx}$
- Derivando se tiene $y' = re^{rx}$ y $y'' = r^2 e^{rx}$.
- Resulta que $y = e^{rx}$ es una solución si y sólo si se cumple $ar^2 + br + c = 0$.

Ecuación característica

- Para encontrar los valores de r, hay que resolver la ecuación cuadrática.

a) las raíces son reales y distintas

- y_1 (x)= $e^{r_1 x}$ y_2 (x)= $e^{r_2 x}$

$$y_{GH}= C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x}$$

Ejemplos

B) Raíz Doble

- y_1 (x)= $e^{r_1 x}$ y_2 (x)= $xe^{r_1 x}$

$$y_{GH} = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, xe^{r_1 x}$$

Ejemplos

c) Raíces complejas

- Las raíces de una cuadrática son complejas conjugadas.

  Es decir $r_{1,2}=\alpha \pm \beta i$

- $y_1(x) = e^{\alpha x} sen(\beta x)$ $\quad$ $y_2(x) = e^{\alpha x} cos(\beta x)$

$$y_{GH} = e^{\alpha x}(C_1 sen(\beta x) + C_2 cos(\beta x))$$

Ejemplos

Ecuaciones de 2do. orden no homogéneas

$\mathrm{a}y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$ (*)

Propiedad: si y_1 e y_2 son soluciones de (*), entonces y_1-y_2 es solución de la homogénea asociada.

Demostración: $\mathrm{a}(y_1'' - y_2'') + b(y_1' - y_2') + c(y_1 - y_2) =$

$= \mathrm{a}y_1'' - ay_2'' + by_1' - by_2' + cy_1 - cy_2 =$ f(x) - f(x)=0

- $y_H = y_1 - y_2$ Por lo tanto, $y_H + y_2 = y_1$

- la S.G. se calcula mediante: $\boxed{y_G = y_{GH} + y_P}$

- La solución particular (y_P) se halla mediante el método de **coeficientes indeterminados.**

Ejemplito

Método de los coeficientes indeterminados

- Permite encontrar una solución particular de la EDO

- El método se puede aplicar sin problemas cuando $f(x)$ es:
    - Polinómica
    - Exponencial
    - Combinación de senos y cosenos
    - Producto de 1,2 o 3
    - Combinación lineal de cualquiera de los casos anteriores.

- La idea es proponer como y_p una expresión del mismo tipo que f(x) (polinómica, exponencial, etc) pero genérica (es decir con **coeficientes a determinar)** multiplicada por x^s

- Donde el exponente *s* es el **menor entero no negativo** tal que ningún término de y_p sea solución de la ED homogénea asociada $ay'' + b\,y' + c\,y = 0$.

- Luego se debe reemplazar la y_p propuesta en la EDO original para encontrar los coeficientes

Ejemplos

06) Halle la S.G. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 2$.

c) $y'' - 3y' + 2y = x e^{x} + 2x$.

~~d)~~ $y'' + y = \sec(x)$.

~~e)~~ $y'' - 2y' + y = x^{-1} e^{x}$.

f) $y'' + y' = 2\,\mathrm{sen}(x)$.

Líneas de campos

Dado un campo vectorial $\vec{f}$ las **líneas de campo** es la familia de curvas que en cada punto un vector tangente es el campo $\vec{f}$

Si las líneas de campo están parametrizadas por $\vec{g}$, planteamos

$$\vec{f}\left(\vec{g}(t)\right) = \vec{g}'(t)$$

13)

Geogebra

a) $\bar{f}(x,y) = (2y - x,\, x)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (y,\, x)$.

¿Y si no queremos parametrizar?

Si $\vec{f}(x,y)$=(P(x,y),Q(x,y)) y las líneas de campo tienen ecuación y(x), entonces la pendiente de la recta tangente (y') debe ser igual a $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$

Es decir, la EDO a resolver es $y' = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$

13)

a) $\bar{f}(x,y) = (2y - x\,,\, x)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (y\,,\, x)$.

Propiedad

Si $\vec{f}$ es un campo de gradientes, las líneas de campo son ortogonales a las curvas equipotenciales.

Observación

Si $\vec{f}$ es un campo de gradientes, se pueden encontrar las líneas de campo buscando las TO de las líneas equipotenciales.

13)

a) $\bar{f}(x,y) = (2y - x,\, x)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (y,\, x)$.