UNIDAD 4

Demostración vector derivable si y sólo si componentes derivables

Sea $\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $t_0 \in A^\circ$,

$\bar{f}$ derivable en t_0 si y sólo si $\bar{f}_i$ derivable en t_0 $\forall i$

Demostración:

$\bar{f}$ derivable en $t_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0}$ existe y es finito.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(f_1(t), f_2(t), \ldots) - (f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(f_1(t) - f_1(t_0), f_2(t) - f_2(t_0), \ldots)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \ldots \right) =$$

$$= \left(\lim_{t \to t_0} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \to t_0} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \ldots \right)$$

por prop de los límites

Entonces, por propiedad de los límites, existe el de la función vectorial si y sólo si existe el de c/ componente