Cálculo de áreas cuando n tiende al infinito

Determina el área bajo la curva dada por $f(x) = 2x+3$ en $[0,4]$ con rectángulos inscritos

① Divide el intervalo cerrado $[0,4]$ en n subintervalos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

② La función al ser creciente en el intervalo $[0,4]$ el valor mínimo está a la izquierda, en $f(x_{k-1})$

③ El área entonces se determina por:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x, \quad x_{k-1} = (k-1)\Delta x$$

por lo tanto:

$$f(x_{k-1}) = 2x_{k-1} + 3 = 2(k-1)\Delta x + 3$$

entonces:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [2(k-1)\Delta x + 3] \cdot \Delta x$$ se procede a desarrollar

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [2k\Delta x - 2\Delta x + 3] \cdot \Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [2k\Delta x^2 - 2\Delta x^2 + 3\Delta x]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[2\Delta x^2 \sum_{K=1}^{n} K - \Delta x^2 \sum_{K=1}^{n} 2 + \Delta x \sum_{K=1}^{n} 3 \right]$$

Si $\Delta x = 4/n$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[\cancel{2} \cdot \frac{4^2}{n^2} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} - \frac{4^2}{n^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{n} + \frac{4}{\cancel{n}} \cdot 3\cancel{n} \right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[16\,\frac{n+1}{n} - \frac{32}{n} + 12 \right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[16\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{32}{n} + 12 \right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[16\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{32}{n} + 12 \right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[16 + \frac{16}{n} - \frac{32}{n} + 12 \right]$$

$$A = 16 + \cancel{\frac{16}{\infty}}^{0} - \cancel{\frac{32}{\infty}}^{0} + 12$$

$$A = 16 + 12$$

$$\boxed{A = 28\ u^2} \longrightarrow \text{Resultado}$$

En caso de usar rectángulos circunscritos, el resultado no debe cambiar.

① Divide el intervalo cerrado $[0,4]$ en n subintervalos.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

② La función al ser creciente en el intervalo $[0,4]$ el valor máximo está a la derecha, en $f(x_k)$

③ El área se puede determinar entonces por:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \, , \quad x_k = k \cdot \Delta x$$

por lo tanto

$$f(x_k) = 2x_k + 3 = 2(k\Delta x) + 3$$

entonces:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [2k\Delta x + 3] \cdot \Delta x$$ se procede a desarrollar

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[2k\Delta x^2 + 3\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty} \left[2\Delta x^2 \sum_{k=1}^{n} k + \Delta x \sum_{k=1}^{n} 3\right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[\cancel{2} \cdot \frac{4^2}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} + \frac{4}{\cancel{n}} \cdot 3\cancel{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[4^2 \cdot \frac{n+1}{n} + 12\right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[4^2\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}\right) + 12\right] = \lim_{n\to\infty} \left[4^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 12\right] = 16 + 12 = \underline{28u^2}$$