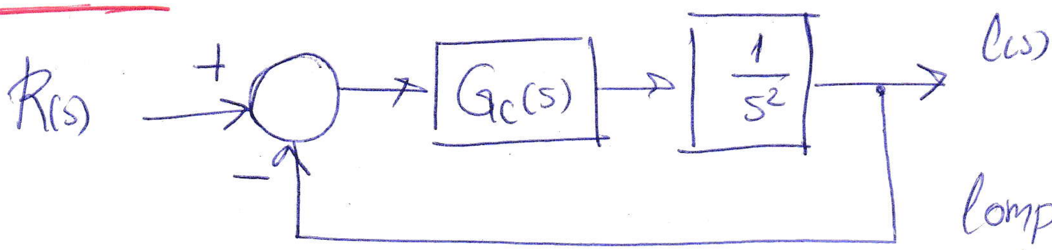
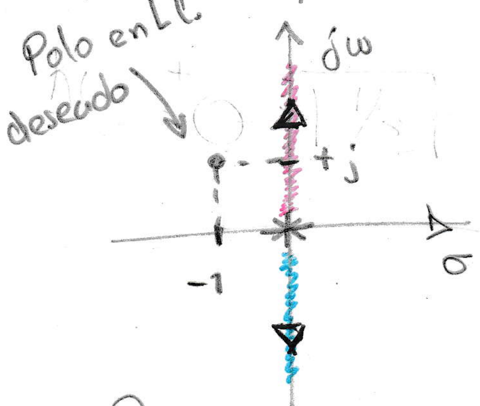
Problema 2



Compensador en adelanto $s_{1,2} = -1 \pm j$

Diagrama de L.R. en Lazo Abierto para la planta $\frac{1}{s^2}$



Plano 's'

El lugar de las raíces indica que si solo se aumenta $K = G_c(s)$ el sistema oscila.

La función de transferencia de lazo cerrado es

$$G_{LC}(s) = \frac{1/s^2}{1 + 1/s^2} = \frac{1}{s^2+1}$$

Los polos en lazo cerrado están en

$$\boxed{s_{1,2} = \pm j}$$

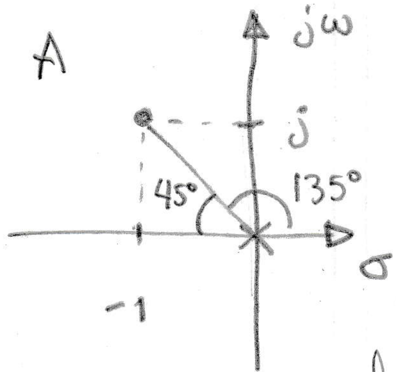
$s^2 = -1$

$s = \sqrt{-1}$

$s = \pm j$

De la gráfica del lugar de las raíces, no es posible llevar los polos dominantes en lazo cerrado a $-1 \pm j$ tal y como es solicitado sin compensador.

La deficiencia del ángulo en el polo deseado en lazo cerrado $s = -1 \pm j$ es (2)



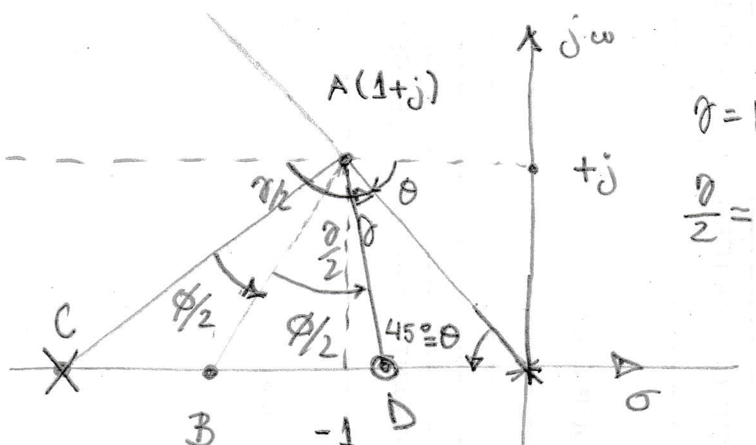
$$135° + 135° - 180° = \underline{90°} = \phi$$

Deficiencia

Dada la función de transferencia de un controlador per adenlanto

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

Entonces el compensador debe contribuir con el ángulo por lo cual, se hace el trazo de un punto B

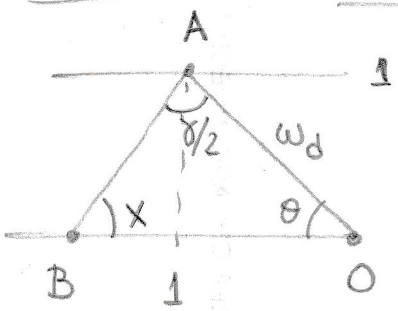


$\gamma = 135° = 180° - \theta$

$\frac{\gamma}{2} = 67°30'$

• Dado que el angulo de deficiencia es 90° se trazan dos lineas AC y AD dividiendo $\phi/2 = 45°$

Ubicación del punto B



$\theta = 45°$

$\frac{\gamma}{2} = 67°30'$

$\omega_d^2 = 1^2 + 1^2 \therefore \omega_d = \sqrt{2}\ rad/s$

Aplicando ley de senos

$$\frac{\sqrt{2}}{sen\ \gamma/2} = \frac{\overline{OB}}{sen\ \gamma/2}$$

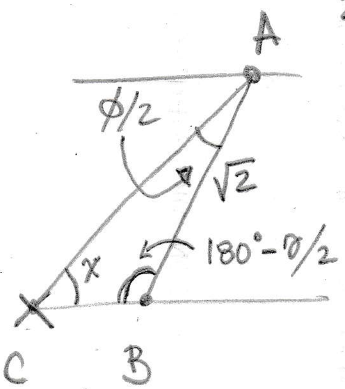
$$\overline{OB} = \sqrt{2}$$

$x = 180° - \gamma/2 - \theta$

$x = 67°30'$

Ubicación del polo C

$\frac{\phi}{2} = 45°$



$$\frac{\overline{AB}}{sen\ x} = \frac{\overline{BC}}{sen\ \phi/2} \therefore \overline{BC} = \frac{\overline{AB}\ sen\ \phi/2}{sen\ x}$$

$$\overline{BC} = \frac{\sqrt{2} \cdot sen(45°)}{sen(22°30')} \simeq 2.6131$$

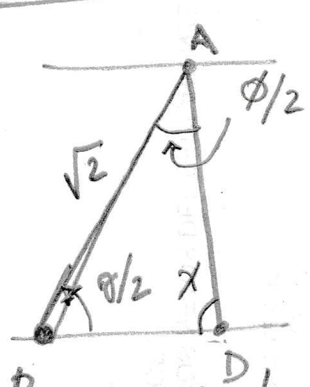
$\therefore \overline{OC} \approx 4.0273$

$x = 180° - (180° - \gamma/2) - \phi/2$

$x = \gamma/2 - \phi/2$

$x = 22°30'$

Ubicación de cero D



$$\frac{\overline{BD}}{sen\ \phi/2} = \frac{\overline{AB}}{sen\ x}$$

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}\ sen\ \phi/2}{sen\ x} = \frac{\sqrt{2} \cdot sen\ 45°}{sen\ 67°30'}$$

$\overline{BD} = 1.0824$

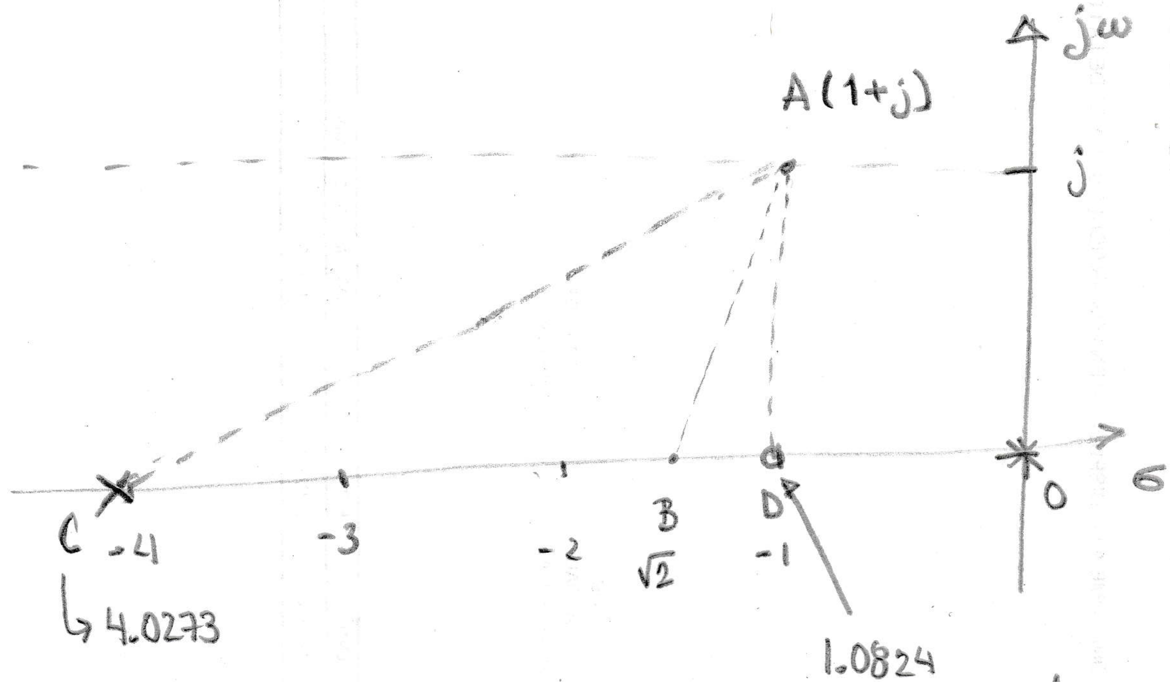
El valor del cero se determina como: $\overline{OD} = \overline{OB} - \overline{BD}$

$= \sqrt{2} - 1.0824 \approx 0.3318$

$x = 180° - \gamma/2 - \phi/2$

$x = 67.5°$

El lugar de las raíces queda como



Por lo que la función de transferencia del controlador

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s + 1.0824}{s + 4.0273}$$

Para determinar K_c se aplica la condición del módulo.

$$\left| K_c \frac{s + 1.0824}{s + 4.0273} \cdot \frac{1}{s^2} \right|_{s=-1+j} = 1$$

$$K_c = \left| \frac{s^2 (s + 4.0273)}{s + 1.0824} \right|_{s=-1+j}$$

$$K = \frac{(-1+j)^2 (-1+j+4.0273)}{-1+j+1.0824} = \underline{6.3548}$$

Por lo tanto la función del controlador es

$$G_c(s) = 6.3548 \, \frac{s + 1.0824}{s + 4.0273}$$