P1

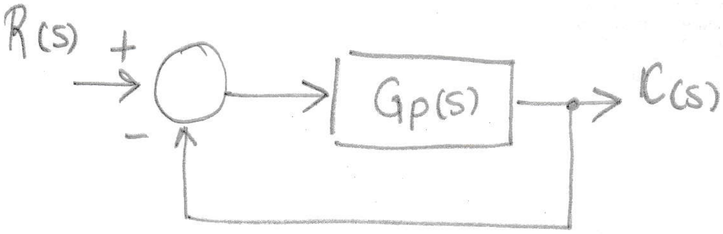
$$G_p = \frac{10}{s(s+1)}$$

Especificaciones de diseño

$t_p \approx 1s$ $\quad M_p \leq 20\%$ $\quad$ A

Controlador por adelanto

Lugar de los raíces del sistema en lazo abierto

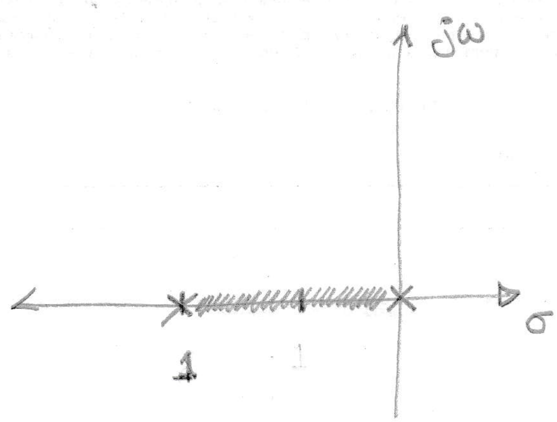


* El sistema tiene un cero en el infinito
* El sistema tiene dos polos 1 en el origen y otro en $s=-1$

*Asintotas del LR

$n = \emptyset$ y $m = 2$

$$\text{Asintota} = m - n = 2 - \emptyset = 2$$



Para lazo cerrado

$$G_{LC}(s) = \frac{K_c \cdot \frac{10}{s(s+1)}}{1 + K_c \frac{10}{s(s+1)}} = \frac{10K_c}{s(s+1) + 10K_c} = \frac{10K_c}{s^2 + s + 10K_c}$$

Ahora se obtienen los polos en lazo cerrado a partir de la ecuación característica

$$s^2 + s + 10K_c = \emptyset$$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(10K_c)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 40K_c}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - 10K_c}$$

La posición depende del valor de la ganancia

Si $K_c = \emptyset$ (B)

$$S_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \; ; \quad S_1 = \emptyset \quad S_2 = 1$$

Polos en lazo abierto

Si el discriminante debe ser positivo (polos reales)

$\underline{1 - 40K_c > \emptyset}$ → resolviendo la desigualdad

$-40K_c > -1$

$40K_c < 1$

$\boxed{K_c < 1/40}$: permite la obtención de polos dobles

Si $K_c > 1/40$ entonces se obtienen polos complejos conjugados

Determinación de puntos de sepación

$$\text{Sea} \quad G_p(s) = \frac{10}{S(s+1)} \rightarrow K_{LR} \cdot \frac{\prod^{n}(s+c_i)}{\prod^{m}(s+p_i)} \quad n \leq m$$

$K_{LR} = 10$

$n(s) = 1$

$d(s) = S(s+1)$

$P_1 = \emptyset$

$P_2 = 1$

donde

$K = K_c \cdot K_{LR}$

$n(s) = \prod^{n}(s+c_i)$

$d(s) = \prod^{m}(s+P_i)$

Los polos P_1 y P_2 se van a unir en algún punto intermedio en el intervalo $[P_2, P_1]$ al ir incrementando K_c y en ese lugar se transformaran en complejos conjugados.

Si $d(s_i)\, n'(s_i) - n'(s_i) \cdot d(s_i) = \emptyset$

$n(s) = 1$ $\qquad$ $d(s) = s^2 + s$

$n'(s) = \emptyset$ $\qquad$ $d'(s) = 2s + 1$

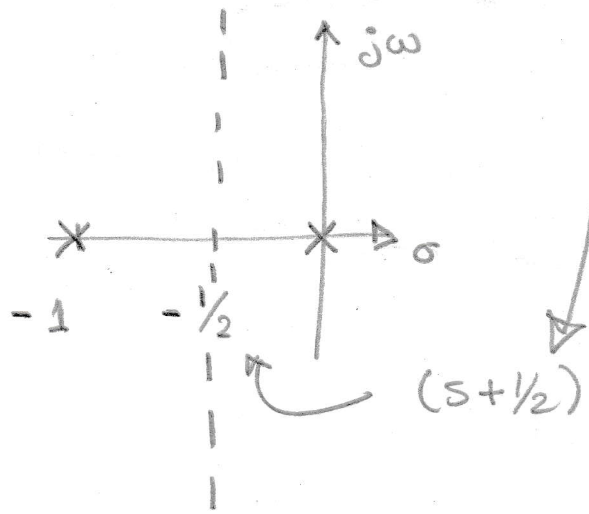
$$d(s_i)\,n'(s_i) - d'(s_i)\,n(s_i) = 0$$ (C)

$$(s^2+s)(0) - 2s + 1 = 0$$

$$-2s = -1$$

$$\boxed{s = 1/2} \leftarrow \text{Punto de separación}$$

Por lo tanto el lugar de las raíces tiene la forma



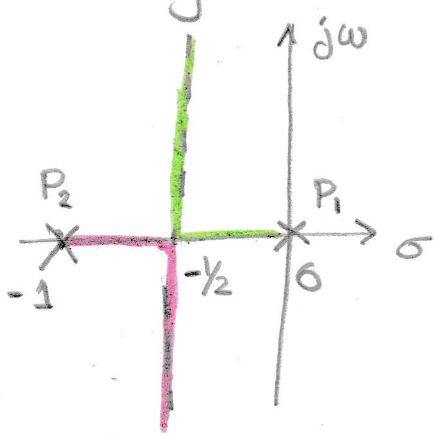
Ganancia Crítica – Mayor ganancia a la cual el sistema deja de ser estable.

Considerando la ecuación característica para este sistema como: $s^2 + s + 10K = 0$ usando el criterio de Routh

2	1	10K
1	1	0
0	10K	

$\forall K > 0$ el sistema es estable

Por lo tanto el lugar de las raíces tiene la forma



Aplicando las restricciones de diseño

D

$M_p \leq 20\%$ $\qquad t_p \leq 1s$

$M_p = e^{-\pi \frac{\sigma}{\omega_d}}$ $\qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

- Determinación del factor de amortiguamiento

$$e^{-\pi \frac{\sigma}{\omega_d}} = 20\% \qquad \sigma = \xi \omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$e^{-\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}} = 20\%$$ Despejando $\xi = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\pi}{\ln 0.2}\right)^2\right]^{-1}}$

$$\boxed{\xi = 0.455949}$$

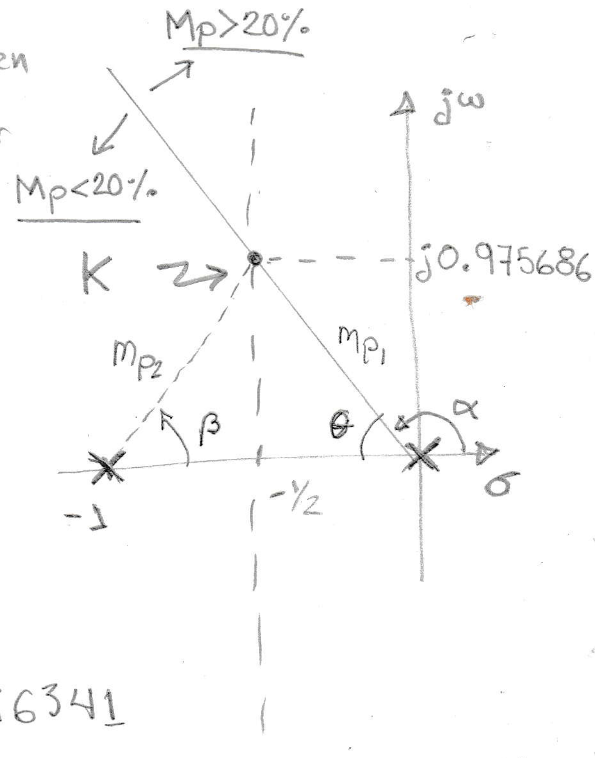
Con este valor, se puede trazar la restricción sobre el LR

$$\theta = \cos^{-1}(0.455949) = 62° \, 52'$$

Implicando así una línea que parte del origen en el plano complejo conjugado y que interseca al L.R. para $G_p(s)$

en

$$j\omega = \frac{1}{2} \tan(62° 52') = j\,0.975686$$



Para determinar el valor de K se utiliza el criterio del módulo

$$K = \frac{\prod^n (s+c_i)}{\prod^m (s+p_j)}$$

$$m_{p_1} = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}-0)^2 + (0.975686-0)^2} = 1.096341$$

$$m_{p_2} = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}+1)^2 + (0.975686-0)^2} = 1.096341$$

E

$K = m_{p_1} \cdot m_{p_2} = (1.096341)(1.096341) = 1.201964$

y como $K = K_c \cdot K_{LR}$

$1.201964 = K_c \cdot 10$

por lo tanto

$\boxed{K_c \leq 0.120196}$ Con este valor de K

es posible que la salida tenga un sobre impulso menor al 20% solicitado

La prueba del argumento se cumple, ya que si $\theta = \beta$ y $\alpha = 180 - \theta$, entonces el argumento de P_1 + $\arg|P_2|$ suman $\underline{180° \pm 360° N}$

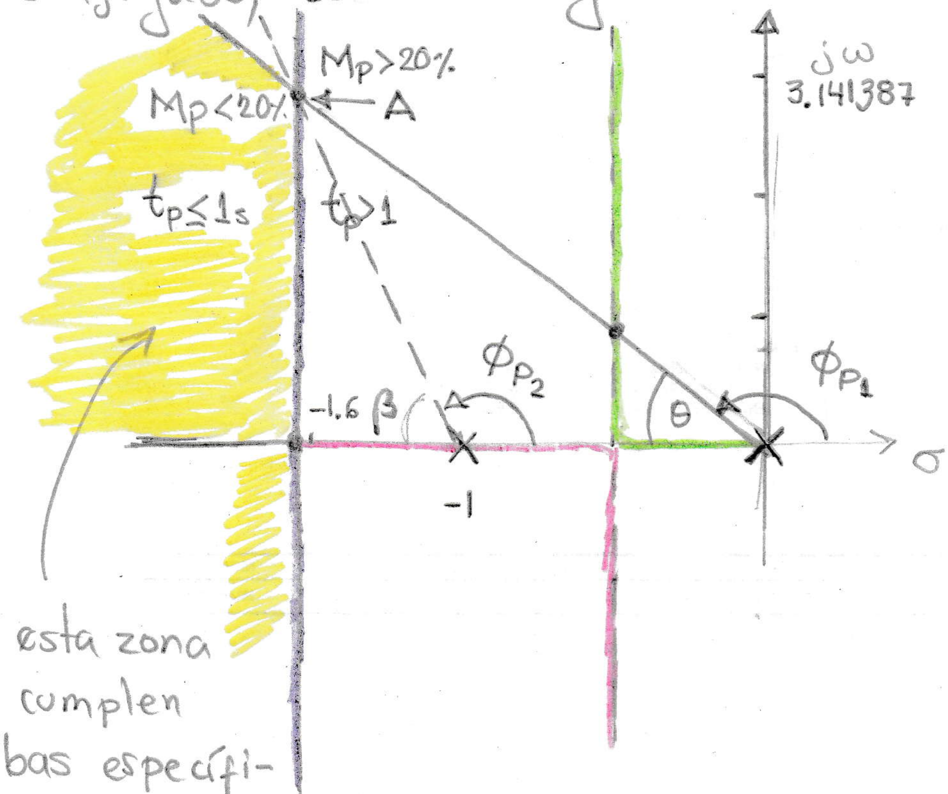
Considerando la restricción $t_p \leq 1s$.

Sea $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 1$

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-(0.455949)^2}}$$

$$\boxed{\omega_n = 3.529856 \text{ rad/s}}$$

El valor de ω_n en conjunto con el ángulo θ, permiten esbozar los valores de restricción en el plano complejo conjugado, sobre el lugar de las raíces para $G_p(s)$



Haciendo la conversión de polar a rectangular se tiene

$$\sigma = -1.609836$$

$$j\omega = 3.141387$$

En esta zona se cumplen ambas especificaciones de diseño, claramente está fuera del lugar de las raíces para $G_p(s)$. Si se considera como A al punto en el que coinciden ambas restricciones, al aplicar el criterio del argumento, este no se cumple.

$$\arg \frac{n(s)}{d(s)} = \arg n(s) - \arg d(s) = \Sigma\left[\arg(s+c_i) + \arg(s+p_i)\right] = 180^\circ \pm 360^\circ N$$

$$\arg \frac{n(s)}{d(s)} = -\phi_{P_1} - \phi_{P_2} = -117^\circ 8' - 100^\circ 59' = -218^\circ 7'$$

$$\phi_{P_1} = 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{1.609836}{3.141387}\right) = 117^\circ 8'$$

$$\therefore -218^\circ 7' \neq 180^\circ$$

$$\phi_{P_2} = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{3.141387}{0.609836}\right) = 100^\circ 59'$$

No cumple el criterio y por ende, solo con K_c no es posible satisfacer

Diseño del controlador por adelanto

(G)

Sea $G_p(s) = \dfrac{10}{s(s+1)}$ $\xi = 0.455949$

$\omega_n = 3.529856\ rad/s$

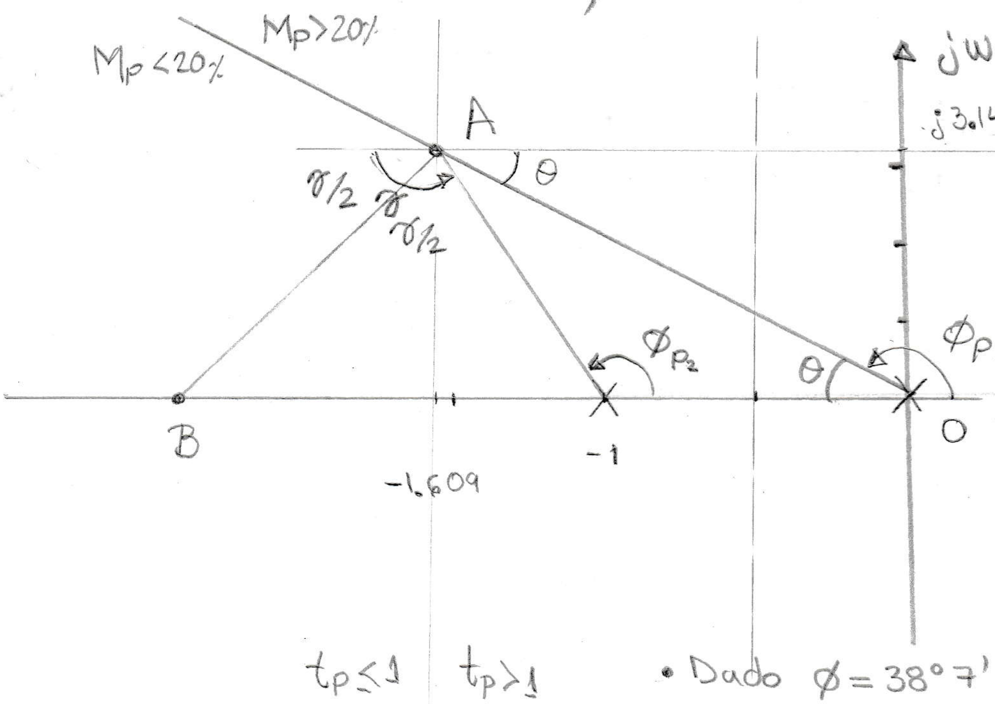
Del caso anterior, como se requiere determinar un ángulo nuevo de tal modo que sea satisfecho el criterio del argumento, entonces, considerando A en

$$-\phi_{P_1} - \phi_{P_2} + \phi = 180° \pm 360N \qquad (-1.609836, 3.141387)$$

$$-117°8' - 100°59' + \phi = 180° \pm 360N$$

$$\boxed{\phi = 38°7'}$$

De este modo, el LR queda del sig modo



Trazando B

$\gamma = 180° - \theta$

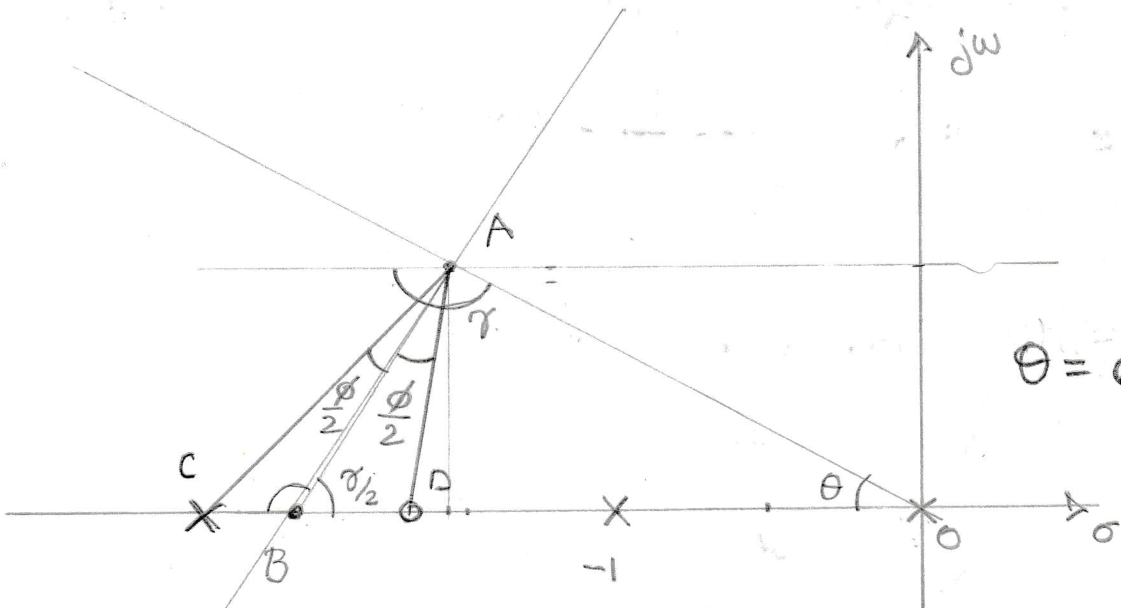
$\gamma = 180° - 62°52'$

$\boxed{\gamma = 117°8'}$

- Se traza la bisectriz AB con $\dfrac{\gamma}{2} = 58°34'$

- Dado $\phi = 38°7'$ se trazan dos líneas AC y AD dividiendo a $\phi/2$

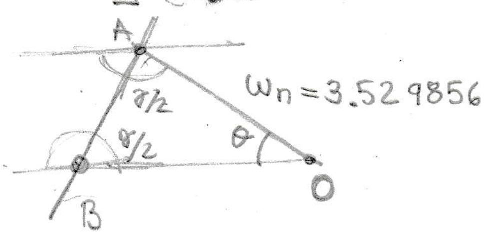
H



$\theta = 62°52'$

Ubicación del punto B $\frac{\phi}{2} = 19°4'$ $\frac{\gamma}{2} = 58°34'$

Δ ABO

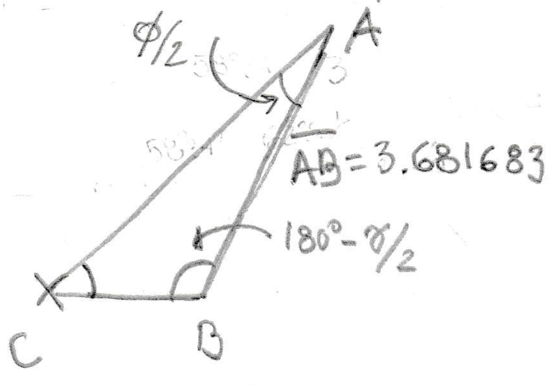


Aplicando Ley de senos

$$\frac{3.529856}{\text{sen } \gamma/2} = \frac{\overline{OB}}{\text{sen } \gamma/2} \therefore$$

$$\overline{OB} = 3.529856$$

Ubicación del polo C



$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\,\theta} = \frac{\omega_n}{\text{sen } \gamma/2}$$

$$\overline{AB} = \frac{(3.529856)\,\text{sen}\,(62°52')}{\text{sen}\,(58°34')}$$

$$\overline{AB} = 3.681683$$

$$\measuredangle C = \cancel{180°} - (\cancel{180°} - \gamma/2) - \phi/2$$

$$\measuredangle C = \gamma/2 - \phi/2 = 58°34' - 19°4'$$

$$\measuredangle C = 39°30'$$

Aplicamos ley de senos para obtener BC

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen}\,\phi/2} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}\,\measuredangle C}$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB} \cdot \text{sen}\,\phi/2}{\text{sen}\,\measuredangle C} = \frac{3.681683\,\text{sen}\,(19°4')}{\text{sen}\;39°30'}$$

$$\overline{BC} = 1.890787.$$

Este valor se suma al $\overline{OB}$ para obtener el valor del polo en C (I)

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}$$

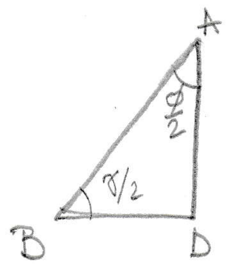
$$\overline{OC} = 3.529856 + 1.890787$$

$$\boxed{\overline{OC} = 5.420643}$$

Ubicación del cero D

se dibuja el triángulo ΔABD

Recuerda que $\gamma = 180° - \theta$ de la restricción $M_p \leq 20\%$



$$\overline{AB} = 3.681683$$

$$\frac{\phi}{2} = 19°4' \qquad \frac{\gamma}{2} = 58°34'$$

Usando ley de senos,

$$\measuredangle D = 180° - \phi/2 - \gamma/2$$

$$\frac{\overline{BD}}{\operatorname{sen} \phi/2} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \angle D} \therefore \overline{BD} = \frac{\overline{AB} \operatorname{sen} \phi/2}{\operatorname{sen} \angle D}$$

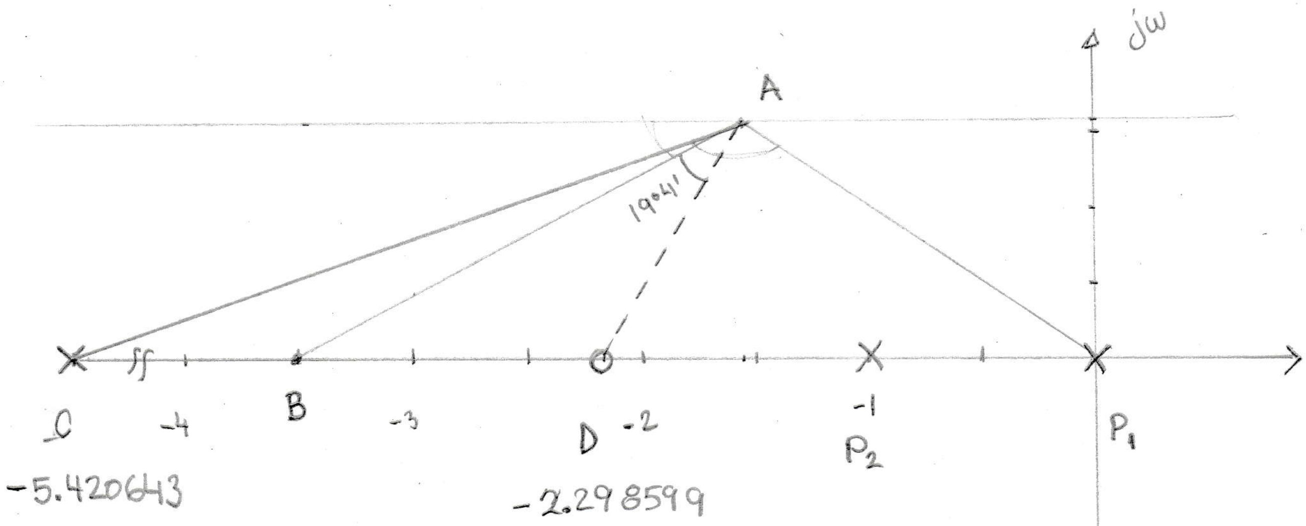
$$\measuredangle D = 180° - 19°4' - 58°34'$$

$$\measuredangle D = 102°22'$$

$$\overline{BD} = \frac{3.681683 \operatorname{sen}(19°4')}{\operatorname{sen}(102°22')} = \underline{1.231257}$$

Este valor se resta de $\overline{OB}$

$$\overline{OD} = \overline{OB} - \overline{BD} = 3.529856 - 1.231257 = \underline{2.298599}$$



Como la función de transferencia del compensador (J)

es

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s+2.298599}{s+5.420643}$$

Aplicando la condición de magnitud

$$\left| K_c \frac{s+2.298599}{s+5.420643} \cdot \frac{10}{s(s+1)} \right|_{s=-1.609836+3.141387j} = 1$$

$$K_c = \left| \frac{s(s+1)(s+p)}{(s+c)\cdot 10} \right|_{s=-1.609836+3.141387j}$$

$$K_c = \frac{(-1.609836+3.141387j)(-1.609836+3.141387j+1)(-1.609836+3.141387j+5.420643)}{10(-1.609836+3.141387j+2.298599)}$$

$$K_c = 1.7346$$

Por lo tanto la función de transferencia es

$$G_c(s) = 1.7346 \frac{s+2.298599}{s+5.420643}$$