1 Variable Advektion

Wir betrachen die Differentialgleichung der eindimensionalen, variablen Advektion

$$u_t(t,x) + a(x)u_x(t,x) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) \tag{1}$$

mit glattem und beschränktem $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wenden für diese Differentialgleichung das Upwindverfahren mit dem Gitter $G(n,i) = (t_n, x_i) = h \cdot (\lambda n, i)$ an. Dieses Gitter ist rechteckig, falls $\lambda \neq 1$ gilt und wir erhalten die Gleichung

$$v_i^{n+1} = v_i^n - a_i\lambda \left(v_i^n - v_{i-1}^n\right). \tag{2}$$

1.1 Analytische Lösung

Für die kommende Asymptotik könnte es sinnvoll sein, die echte Lösung von (1) zumindest qualitativ zu kennen. Die Lösung lässt sich analytisch mithilfe der Methode der Charakteristiken bestimmen. Aus (1) folgt nämlich, dass jede Lösung u dieser Gleichung konstant auf der Kurve $(\tau, x(\tau))$ ist, für die

$$\dot{x}(\tau) = a(x(\tau)) \tag{3}$$

gilt. Sei nun $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Fluss der Differentialgleichung (3). Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ per defintionem, dass $\phi(\,\cdot\,, x_0)$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(\tau) = a(x(\tau)), \quad x(0) = x_0 \tag{4}$$

löst. Insbesondere gilt $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ und $\phi_0 = \mathrm{Id}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $u(t,x) = u_0(x_0)$ gilt. Wegen $x_0 = \phi(0,x_0)$ und $x = \phi(t,x_0)$ folgt damit

$$x_0 = \phi(0,x_0) = \phi(t-t,x_0) = \phi(-t,\phi(t,x_0)) = \phi(-t,x)$$

und somit auch

$$u(t,x) = u_0(x_0) = u_0(\phi(-t,x)). \tag{5}$$

Beispiel 1. Für $a(x) = x$ folgt wegen des Anfangswertproblems $\dot{x}(\tau) = x, x(0) = x_0$, dass $u(t,x)$ konstant auf den Kurven der Form $x(\tau) = x_0 e^\tau$ ist. Der Fluss ϕ ist dann durch $\phi(t,x) = xe^t$ gegeben. Wegen (5) folgt dann

$$u(x,t) = u_0(\phi(-t,x)) = u_0(xe^{-t})$$

als Lösung für (1).

Beispiel 2. Setze

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 + \varepsilon(1-|x|) & |x| \leq 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist a absolut stetig und es gilt $a' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Folglich ist a Lipschitz-stetig und (3) besitzt einen eindeutigen Fluss, welcher sich stückweise zusammensetzt. (TODO)

Bemerkung. Finde glatte Beispiele, für die man einen Fluss hinschreiben und Numerik machen kann!
Bemerkung. Die Flüsse für $a(x) = e^{-x^2}$ oder einer Glättung $a(x) = (\varphi * f)(x)$ für einen Glättungskern φ und einer beliebigen Funktion f scheinen mir nicht trivial.
Frage. Geht das überhaupt?

Frage. Ist ϕ genau so regulär wie a? ODE basics, technisch, aber vielleicht könnte man dann das Beispiel 2 überall durchrechnen und konkrete Modelle testen.

Wenn wir eine Lösung v von (1) haben, so können wir die folgende partielle Differentialgleichung

$$u_t(t,x) + a(x)u_x(t,x) = v(t,x), \quad u(0,x) = 0 \tag{6}$$

lösen, indem wir einfach $u(t,x) = tv(t,x)$ setzen. Denn dann gilt

$$u_t(t,x) = v(t,x) + tv_t(t,x) = v(t,x) - ta(x)v_x(t,x)$$

und wegen $ta(x)v_x(t,x) = a(x)(tv(t,x))_x = a(x)u_x(t,x)$ folgt damit (6).

1.2 Oszillatorischer Ansatz

Wir verwenden hier Methoden, die in [1] vorgestellt wurden. Ziel ist es, oszillatorische Fehler im Kurzzeitverhalten einzufangen, die von a erzeugt werden. Daher wählen wir den Ansatz

$$v_i^n = u^{(0)}(t_n,x_i) + hu^{(1)}(t_n,x_i) + h^2\tilde{u}^{(2)}(i) + O(h^2) \tag{7}$$

für unsere Gitterfunktion v. Der Term $u^{(2)}(t_n,x_i)$ taucht bei dem Ansatz nicht auf, weil er hierbei zu Null verschwindet. Für die Differenz $v_i^{n+1} - v_i^n$ folgt dann

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= u^{(0)}(t_{n+1},x_i) + hu^{(1)}(t_{n+1},x_i) + h^2\left(u^{(2)}(t_{n+1},x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i)\right) + O(h^2)\\
&\qquad - \left(u^{(0)}(t_n,x_i) + hu^{(1)}(t_n,x_i) + h^2\left(u^{(2)}(t_n,x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i)\right) + O(h^2)\right)\\
&= u^{(0)}(t_{n+1},x_i) - u^{(0)}(t_n,x_i) + h\left(u^{(1)}(t_{n+1},x_i) - u^{(1)}(t_n,x_i)\right) +\\
&\qquad + h^2\left(u^{(2)}(t_{n+1},x_i) - u^{(2)}(t_n,x_i)\right)\\
&= u^{(0)}(t_n + \lambda h,x_i) - u^{(0)}(t_n,x_i) + h\left(u^{(1)}(t_n + \lambda h,x_i) - u^{(1)}(t_n,x_i)\right)\\
&\qquad + h^2\left(u^{(2)}(t_n + \lambda h,x_i) - u^{(2)}(t_n,x_i)\right)\\
&= \lambda h\, u_t^{(0)}(t_n,x_i) + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 u_{tt}^{(0)}(t_n,x_i) + \lambda h^2 u_t^{(1)}(t_n,x_i) + O(h^3)\\
&= \lambda h\left(u_t^{(0)}(t_n,x_i) + h\left(\frac{\lambda}{2}u_{tt}^{(0)}(t_n,x_i) + u_t^{(1)}(t_n,x_i)\right)\right) + O(h^3)
\end{aligned}$$

und für $\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n)$ folgt ganz analog

$$\begin{aligned}
\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) &= \lambda \Big(u^{(0)}(t_n,x_i) + hu^{(1)}(t_n,x_i) + h^2 \left(u^{(2)}(t_n,x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i) \right) + O(h^2) \\
&\quad - \left(u^{(0)}(t_n,x_{i-1}) + hu^{(1)}(t_n,x_{i-1}) + h^2 \left(u^{(2)}(t_n,x_{i-1}) + \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) + O(h^2) \right) \Big) \\
&= \lambda \Big(u^{(0)}(t_n,x_i) - u^{(0)}(t_n,x_{i-1}) + h \left(u^{(1)}(t_n,x_i) - u^{(1)}(t_n,x_{i-1}) \right) \\
&\quad + h^2 \left(u^{(2)}(t_n,x_i) - u^{(2)}(t_n,x_{i-1}) + \left(\tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) \right) \Big) \\
&= \lambda \Big(u^{(0)}(t_n,x_i) - u^{(0)}(t_n,x_i - h) + h \left(u^{(1)}(t_n,x_i) - u^{(1)}(t_n,x_i - h) \right) \\
&\quad + h^2 \left(u^{(2)}(t_n,x_i) - u^{(2)}(t_n,x_i - h) + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) \Big) \\
&= \lambda \left(hu_x^{(0)}(t_n,x_i) - \frac{1}{2}h^2 u_{xx}^{(0)}(t_n,x_i) + h^2 u_x^{(1)}(t_n,x_i) + h^2 \left(\tilde{u}^{(1)}(i) - \tilde{u}^{(1)}(i-1) \right) \right) + O(h^3) \\
&= \lambda h \left(u_x^{(0)}(t_n,x_i) + h \left(u_x^{(1)}(t_n,x_i) - \frac{1}{2} u_{xx}^{(0)}(t_n,x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) \right) + O(h^3).
\end{aligned}$$

Wenn wir dies nun in das Verfahren (2) einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
&u_t^{(0)}(t_n,x_i) + h \left(\frac{\lambda}{2} u_{tt}^{(0)}(t_n,x_i) + u_t^{(1)}(t_n,x_i) \right) \\
&\qquad + a_i u_x^{(0)}(t_n,x_i) + h a_i \left(u_x^{(1)}(t_n,x_i) - \frac{1}{2} u_{xx}^{(0)}(t_n,x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) = O(h^2).
\end{aligned}$$

Nachdem wir nach den Ordnungen von h sortiert haben, führt uns das zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
u_t^{(0)}(t_n,x_i) + a(x_i) u_x^{(0)}(t_n,x_i) &= 0, \\
u_t^{(1)}(t_n,x_i) + a(x_i) u_x^{(1)}(t_n,x_i) &= \frac{1 - a(x_i)\lambda}{2} u_{xx}^{(0)}(t_n,x_i) - \frac{a_x(x_i)\lambda}{2} u_x^{(0)}(t_n,x_i) \\
&\quad + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1)
\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $u^{(0)}(0,x_i) = u_0(x_i)$

Literatur

[1] Michael Junk und Zhaoxia Yang. „Asymptotic Analysis of Finite Difference Methods“. In: *Appl. Math. Comput.* 158.1 (Okt. 2004), S. 267–301. ISSN: 0096-3003. DOI: 10.1016/j.amc.2003.08.097. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2003.08.097.