



Masterarbeit am Institut für Mathematik der Freien Universität Berlin, Arbeitsgruppe

Geophysical Fluid Dynamics

Beschreibung hochfrequenter numerischer Instabilitäten mit Hilfe asymptotischer WKB Ansätze

Maikel Nadolski

Matrikelnummer: 4207314

nadolski@math.fu-berlin.de

Betreuer: Prof. Dr. Rupert Klein

1. April 2016

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit an Eides Statt, dass diese Arbeit von niemand anderem als meiner Person verfasst worden ist. Alle verwendeten Hilfsmittel wie Berichte, Bücher, Internetseiten oder ähnliches sind im Literaturverzeichnis angegeben, Zitate aus fremden Arbeiten sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungskommission vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

2. April 2016

Maikel Nadolski

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort	1
2. Die lineare Transportgleichung mit konstanter Geschwindigkeit	3
2.1. Ein erster regulärer Ansatz	3
2.2. Ein Beispiel für instabiles Verhalten	7
2.3. Diskrete Ansätze auf Gitterniveau	7
2.4. Ein Ansatz mit alternierenden Gittervorzeichen	10
2.5. Kleine Störungen der Courant-Friedrich-Lewy Bedingung	19
2.6. Andere Frequenzen auf Gitterniveau – Exponentialansätze	27
3. Die lineare Transportgleichung mit ortsabhängiger Geschwindigkeit	31
3.1. Regulärer Ansatz	31
3.2. Hochfrequenter Ansatz	36
4. Ausblick	41
A. Anhang	45
A.1. Die lineare Transportgleichung	45
A.1.1. Analytische Lösungen	45
A.1.2. Rechnungen für den regulären Ansatz	48
A.1.3. Rechnungen für diskrete Ansätze	51
A.1.4. Rechnung des Ansatzes für kleine Störungen der CFL Zahl	53
A.2. Die lineare Transportgleichung mit variabler Geschwindigkeit	57
A.2.1. Analytische Lösung	57
A.2.2. Rechnungen zum Exponentialansatz	58
A.3. Für diese Arbeit geschriebene Quelltexte	60

1. Vorwort

Die vorliegende Arbeit vertieft die Ideen der Multiskalenasymptotik von Finite-Differenzen-Verfahren, welche von Michael Junk und Zhaoxia Yang in [JY04] vorgestellt wurden. In [JY04] zeigen die Autoren unter anderem am Beispiel des Upwind-Verfahrens für die lineare Transportgleichung mit konstanter Geschwindigkeit (2.0.3) wie man auf elegante Art und mit Hilfe einer zusätzlichen *langsamen* Zeitskala die bekannte CFL-Stabilitätsbedingung verifiziert.

Diese Arbeit hat sich zum Ziel gemacht, die dort präsentierten Ideen zu verfolgen. Wir schauen uns hierfür ganz bewusst das Upwind-Verfahren für den instabilen Fall an. Das “instabile Verhalten” finden wir in den Gleichungen wieder. Aufgrund der Natur der Instabilität können wir nun nicht mehr erwarten, mit Hilfe dieser Techniken ein Modell zu bestimmen, dass für alle Zeiten $t > 0$ gleichmäßig konvergiert. Im besten Fall finden wir asymptotische Übergänge, in denen die Lösung für kompakte Zeitintervalle noch beschränkt bleibt. Ferner geben wir diskrete Abschätzungen für das Wachstum hochfrequenter Fehler in Abhängigkeit der Anfangsdaten an.

Um dies zu erreichen führen wir eine von der Gitterweite abhängige *schnelle* Zeitskala ein und gehen von einer hochfrequenten Störung der Anfangsdaten aus. In dieser Zeitskala erwarten wir ferner keine Regularität für unsere Ansatzfunktionen.

In Kapitel 2 untersuchen wir die lineare Transportgleichung mit konstanter Geschwindigkeit und entwickeln erste Werkzeuge, um solche “diskreten” Ansätze zu behandeln.

In Kapitel 3 betrachten wir die lineare Transportgleichung mit variabler Geschwindigkeit und untersuchen das Zusammenspiel von lokalen und instabilen Bedingungen in Abwechslung mit stabilen aber diffusiven Effekten.

2. Die lineare Transportgleichung mit konstanter Geschwindigkeit

Wir betrachten die Differentialgleichung der eindimensionalen Advektion

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = U(x). \quad (2.0.1)$$

Auf diese partielle Differentialgleichung wenden wir das Upwind-Verfahren mit dem Gitter $G_h(n, i) = (t_n, x_i) = h \cdot (\lambda n, i)$ an. Wenn wir also von Punkten (t_n, x_i) in Zeit und Raum sprechen, so sind diese eigentlich noch von der Gitterweite h abhängig. Die Gitterzellen sind nicht quadratisch, falls $\lambda \neq 1$ gilt und das Verfahren ist durch die Gleichung

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\lambda h} + \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = 0 \quad (2.0.2)$$

bzw. durch

$$v_i^{n+1} - v_i^n + \lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) = 0, \quad v_i^0 = U(x_i) \quad (2.0.3)$$

bestimmt. Es ist bereits bekannt, dass das Verfahren für $\lambda \leq 1$ stabil und für $\lambda = 1$ sogar exakt ist. Wir versuchen in dieser Arbeit den instabilen Fall $\lambda > 1$ besser zu verstehen.

2.1. Ein erster regulärer Ansatz

Zunächst präsentieren wir die Ergebnisse, welche die Autoren Junk und Yang aus [JY04] für das Upwind-Schema entwickeln. Angenommen es gäbe Abbildungen $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$, so dass für alle $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$

$$v_i^n = u_0(t_n, x_i) + h u_1(t_n, x_i) + O(h^2) \quad (2.1.1)$$

gilt, v_i^n die Gleichung (2.0.3) erfüllt und die Anfangsbedingungen

$$u_0(0, x) = U(x) \quad \text{und} \quad u_1(0, x) = 0 \quad (2.1.2)$$

gelten. Im Anhang A.1.2 setzen wir den Ansatz (2.1.1) in die beiden Differenzen $v_i^{n+1} - v_i^n$ und $\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n)$ ein, verwenden, dass u_0 und u_1 differenzierbar sind und erhalten nach einem Grenzübergang von $h \rightarrow 0$ für alle Zeit-Raum Punkte $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\partial_t u_0(t, x) + \partial_x u_0(t, x) = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\partial_t u_1(t, x) + \partial_x u_1(t, x) = \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t, x). \quad (2.1.4)$$

Gleichung (2.1.3) zeigt, dass u_0 selbst schon eine Lösung von (2.0.1) ist. Somit bestimmt u_1 direkt den Fehler des Verfahrens zur echten Lösung, zumindest solange die asymptotische Entwicklung (2.1.1) gültig ist. Im Anhang A.1.1 haben wir bereits die Lösung dieser Gleichungen bestimmt. u_0 ist wegen $u_0(0, x) = U(x)$ durch

$$u_0(t, x) = U(x - t)$$

gegeben. Die Gleichung (2.1.4) fällt hingegen in den Fall einer inhomogenen Transportgleichung und weil u_0 selbst Lösung der homogenen Gleichung ist, greift die Lösung (A.1.11):

$$u_1(t, x) = t \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 U(x - t).$$

Zwar bleibt der Ansatz (2.1.1) für festes $t \in \mathbb{R}_0^+$ asymptotisch in h geordnet, d. h. es gilt stets

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \frac{u_1(t, x)}{u_0(t, x)} = 0,$$

allerdings konvergiert die asymptotische Entwicklung nicht gleichmäßig in t , denn es gilt für jedes $h > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h \frac{u_1(t, x)}{u_0(t, x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} ht \frac{(1-\lambda) \partial_x^2 U(x - t)}{2U(x - t)} = \infty.$$

Das ist nach [JY04] ein Zeichen dafür, dass der resultierende Ansatz

$$v_i^n = U(x - t) + ht \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 U(x - t) + O(h^2) \quad (2.1.5)$$

das Langzeitverhalten des Verfahrens nicht gut wiedergibt und dieses Problem greifen die Autoren mit einer zusätzlichen *langsamen* Zeitskala $\tau = ht$ an. Aus (2.1.1) wird

$$v_i^n = u_0(t, \tau, x) + hu_1(t, \tau, x) + O(h^2) \quad (2.1.6)$$

und die Gleichungen (2.1.3) und (2.1.4) ändern sich zu

$$\partial_t u_0(t, \tau, x) + \partial_x u_0(t, \tau, x) = 0 \quad (2.1.7)$$

$$\partial_t u_1(t, \tau, x) + \partial_x u_1(t, \tau, x) = \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t, \tau, x) - \partial_\tau u_0(t, \tau, x) \quad (2.1.8)$$

$$u_0(0, 0, x) = U(x) \quad (2.1.9)$$

$$u_1(0, 0, x) = 0. \quad (2.1.10)$$

Aus Gleichung (2.1.7) entnehmen wir die Lösung

$$u_0(t, \tau, x) = A(\tau, x - t) \quad (2.1.11)$$

$$A(0, x) = U(x) \quad (2.1.12)$$

für ein noch weiter zu bestimmendes A . Durch die zusätzliche Zeitvariable τ haben wir einen weiteren Freiheitsgrad zur Verfügung und können in Gleichung (2.1.8) zusätzlich

$$\partial_\tau u_0(t, \tau, x) = \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t, \tau, x) \quad (2.1.13)$$

$$\Leftrightarrow \partial_\tau A(\tau, x - t) = \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 A(\tau, x - t) \quad (2.1.14)$$

fordern. Dies ist die Wärmeleitungsgleichung, welche nur für $\lambda \leq 1$ lösbar ist. Die Fundamentallösung lautet

$$A(\tau, x - t) = (U * G_\tau)(x - t) \quad (2.1.15)$$

wobei G_τ der Glättungskern

$$G_\tau(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\lambda)\tau}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(1-\lambda)\tau}\right). \quad (2.1.16)$$

ist. Für $\lambda \leq 1$ lautet die Lösung des Anfangswertproblems (2.1.7) mit der Bedingung (2.1.13)

$$\begin{aligned} u_0(t, \tau, x) &= (U * G_\tau)(x - t) \quad \text{und} \\ u_1(t, \tau, x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

und die asymptotische Entwicklung von (2.1.6) lautet hier

$$v_i^n = (U * G_\tau)(x_i - t_n) + O(h^2). \quad (2.1.18)$$

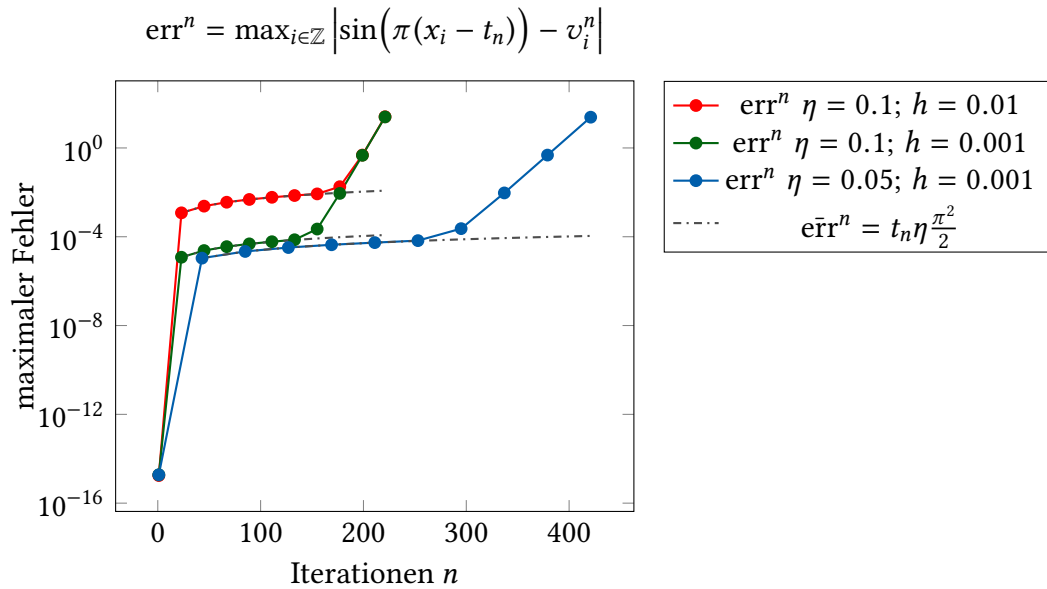


Abbildung 2.1.: Hier vergleichen wir die maximalen Fehler der numerischen Lösungen für die Startwerte $U(x) = \sin(\pi x)$ und $h = 10^{-3}$ für $\eta = 0.1, 0.05$ und 0.001 zur echten Lösung $u(t, x) = \sin(\pi(x - t))$ mit dem geschätztem Fehler $u(t_n, x_i) - v_i^n$ in (2.2.1).

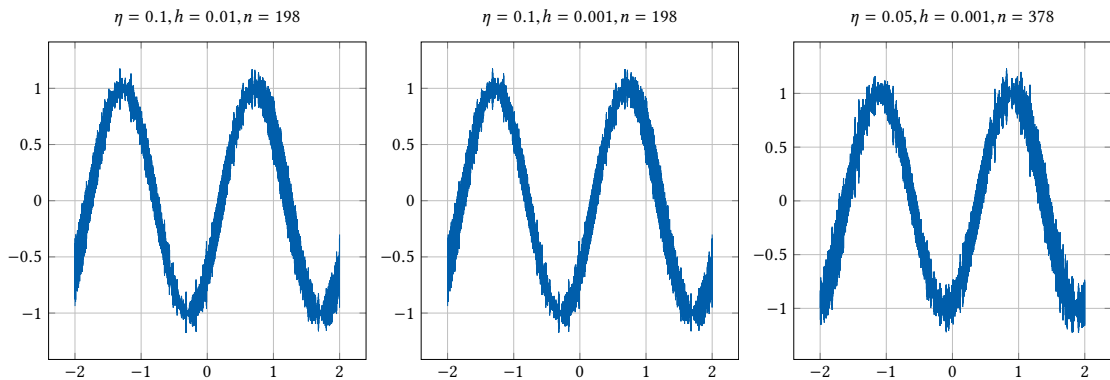


Abbildung 2.2.: Vergleich des instabilen Verhaltens für verschiedene η und h

2.2. Ein Beispiel für instabiles Verhalten

Wir schauen uns die Ergebnisse des Verfahrens für die Anfangswerte $U(x) = \sin(\pi x)$ und $\lambda = 1 + \eta$ für verschiedene positive η und Gitterweiten h an. Wir haben die Beispiele durch die Skripte im Anhang A.3 mit dem Programm *GNU Octave* umgesetzt. Das gibt uns erste Hinweise darauf, was wir in unseren Untersuchungen zu erwarten haben.

Weil $\lambda > 1$ gilt, können wir (2.1.18) nicht verwenden. In Abbildung 2.1 vergleichen wir den maximalen Fehler der numerischen Lösungen mit dem Fehler der asymptotischen Entwicklung in (2.1.5)

$$\begin{aligned}
 \text{err}^n &= \max_{i \in \mathbb{Z}} \left| \sin(\pi(x_n - t_i)) - v_i^n \right| \\
 &= \max_{i \in \mathbb{Z}} \left| t_n \frac{1 - \lambda}{2} \partial_x^2 \sin(\pi(x_n - t_i)) \right| \\
 &= t_n \frac{\pi^2 \eta}{2} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left| \sin(\pi(x_n - t_i)) \right| \\
 &= t_n \frac{\pi^2 \eta}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Man sieht in Abbildung 2.1, dass es zu einem exponentiellem Anstieg des Fehlers kommt, den die Entwicklung nicht vorhersagt. Betrachtet man nun die Plots in Abbildung 2.2, so sieht man, dass sich hochfrequente Oszillationen aufschaukeln und die richtige Lösung überdecken. Die Existenz solcher Oszillationen in den Anfangsdaten wurde im regulären Ansatz bisher ignoriert. Vergleicht man die Plots untereinander, so erkennt man, dass die maximale Amplitude der Oszillation scheinbar unabhängig von h mit der Anzahl der Iterationen n wächst. Verringert man jedoch den Wert für η , so ändert sich auch die Rate, um die die Amplitude wächst. Wir werden dieses Verhalten in unseren Approximationen wiederfinden und geben ferner Abschätzungen für das Wachstum der Amplitude an. Die konkreten Iterationen n für die Plots in den Abbildungen wurden mit Hilfe der Abschätzung $(1 + 2\eta)^n$ aus dem Unterkapitel 2.4 ausgewählt.

2.3. Diskrete Ansätze auf Gitterniveau

Wir führen hier Raumzeit-Koordinaten auf einer kurzen Skala ein. Genau genommen machen wir unsere Ansatzfunktionen zusätzlich von den diskreten Gitterkoordinaten (n, i) abhängig. Es gilt zwar $n = \frac{t_n}{\lambda h}$ und $i = \frac{x_i}{h}$, jedoch soll unsere Annahme sein, dass der Ansatz unstetig in n und i ist. Möchte man jedoch für $h \rightarrow 0$ einen Punkt (t, x) in der

Raumzeit approximieren, so gilt immer $n, i \rightarrow \infty$ und dies impliziert Einschränkungen, welche wir ausnutzen werden. Unser Ansatz lautet dieses mal

$$v_i^n = u_0(n, i, t_n, x_i) + hu_1(n, i, t_n, x_i) + h^2 u_2(n, i, t_n, x_i) + o(h^2). \quad (2.3.1)$$

Zunächst fällt auf, dass wir im Gegensatz zum regulärem Ansatz hier Terme bis zur Ordnung $O(h^2)$ entwickeln. Durch die kurze Zeit- und Ortskala wirken Terme in einer Ordnung niedriger als zuvor. Daher werden Terme von u_2 Gleichungen in $O(h)$ beeinflussen und müssen betrachtet werden. Im Anhang A.1.3 haben wir die einzelnen Summanden von (2.0.3) ausgerechnet. Setzt man diese, (A.1.39) und (A.1.40), nun in (2.0.3) ein, liefert uns das die Gleichungen

in der Ordnung $O(1)$:

$$u_0(n+1, i, t_n, x_i) - u_0(n, i, t_n, x_i) + \lambda(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i)) = 0 \quad (2.3.2)$$

in der Ordnung $O(h)$:

$$\begin{aligned} \lambda(\partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i)) = & - (u_1(n+1, i, t_n, x_i) - u_1(n, i, t_n, x_i)) \\ & - \lambda(u_1(n, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i)) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

in der Ordnung $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} \lambda(\partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i)) = & \frac{\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) - \frac{\lambda^2}{2} \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \\ & - (u_2(n+1, i, t_n, x_i) - u_2(n, i, t_n, x_i)) \\ & - \lambda(u_2(n, i, t_n, x_i) - u_2(n, i-1, t_n, x_i)) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

in der Ordnung $O(h^3)$:

$$\begin{aligned} \lambda(\partial_t u_2(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_2(n, i-1, t_n, x_i)) = & - \left(\frac{\lambda}{6} \partial_x^3 u_0(n, i-1, t_n, x_i) + \frac{\lambda^3}{6} \partial_t^3 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \right) \\ & - \left(\frac{\lambda}{2} \partial_x^2 u_1(n, i-1, t_n, x_i) + \frac{\lambda^2}{2} \partial_t^2 u_1(n+1, i, t_n, x_i) \right) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$u_0(0, i, 0, x_i) = U(x_i), \quad u_1(0, i, 0, x_i) = 0 \quad \text{und} \quad u_2(0, i, 0, x_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.6)$$

Diese Gleichungen gelten nun für alle $h > 0$ und alle $n, i \in \mathbb{N}$. Noch gelingt es uns nicht, aus diesen Bedingungen eine eindeutige Lösung für unsere Ansatzfunktionen u_0, u_1 und u_2 zu bestimmen. Daher folgt im nächsten Kapitel ein konkreter Ansatz. Trotzdem beweisen wir hier noch zwei Lemmata, um besser zu verstehen wie man von Bedingungen auf dem Gitter auf Bedingungen im Raum schließen kann.

Lemma 2.1 (Konstanz für eine Dimension). *Sei $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sei weiter $G_h \subset \mathbb{R}_0^+$ ein äquidistantes Gitter mit $G_h(n) = t_n^h = nh$, für $n \in \mathbb{N}$. Wenn ein $F: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $h > 0$ und somit alle Gitter G_h mit*

$$F(t_n^h) = f(n, t_n^h) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (2.3.7)$$

existiert, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$F(t) = f(n, t).$$

Der Beweis dieses Lemmas ist denkbar einfach. Die Existenz eines solchen F ist wie eine Gleichmäßigkeitsbedingung über alle möglichen Gitter. Zu gegebenen $t \in \mathbb{R}_0^+$ wähle man sich einfach die richtige Gitterweite $h > 0$.

Beweis. Sei $F: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und sei $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Wähle $h = \frac{t}{n}$, dann gilt $t_n^h = nh = n \frac{t}{n} = t$. Da (2.3.7) für alle $h > 0$ gilt, folgt hiermit

$$F(t) = F(t_n^h) = f(n, t_n^h) = f(n, t). \quad \square$$

Das Lemma 2.1 bedeutet, dass f , oder die Folge f_n , in solchen Fällen unabhängig von, bzw. konstant in $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir wollen dies auf unseren Fall übertragen und beweisen nun das zweidimensionale Analogon,

Lemma 2.2 (Punktweise Konvergenz in zwei Dimensionen). *Sei $f: (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass $f(n, i, \cdot, \cdot)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$ differenzierbar ist. Sei weiter $G_h \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ ein äquidistantes Gitter mit $G_h(n, i) = (t_n^h, x_i^h) = h \cdot (\lambda n, i)$, für $n \in \mathbb{N}$. Wenn ein differenzierbares $F: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $h > 0$ und somit alle Gitter G_h mit*

$$F(t_n^h, x_i^h) = f(n, i, t_n^h, x_i^h) \quad \text{für alle } (n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad (2.3.8)$$

existiert, dann gilt für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $i(n) \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$|F(t, x) - f(n, i(n), t, x)| \leq \frac{t}{\lambda n} \left(\left| \partial_x f(n, i(n), t, x) \right| + \left| \partial_x F(t, x) \right| \right) \quad (2.3.9)$$

Beweis. Ähnlich wie in Lemma 2.1 setzen wir $h = \frac{t}{\lambda n}$. Dann gilt $t_n = \lambda n h = t$ und $x_i = ih$ für $i \in \mathbb{Z}$. O.B.d.A. gelte $x > 0$. Dann gibt es ein kleinstes $i(n) = i \in \mathbb{N}$, für das $x_{i-1} < x \leq x_i$ gilt. Dies impliziert $x_i - x < h$ und wegen $t_n = t$ folgt auch

$$\|(t, x) - (t_n, x_i)\| = |x - x_i| < h.$$

Weil f und F differenzierbar in x sind, folgt somit

$$|f(n, i, t_n, x_i) - f(n, i, t, x)| = |(x_i - x)\partial_x f(n, i, t, x) + o(h)| \leq h |\partial_x f(n, i, t, x)| + o(h)$$

und

$$|F(t_n, x_i) - F(t, x)| = |(x_i - x)\partial_x F(t, x) + o(h)| \leq h |\partial_x F(t, x)| + o(h).$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned} |F(t, x) - f(n, i, t, x)| &\leq |F(t, x) - F(t_n, x_i)| + \underbrace{|F(t_n, x_i) - f(n, i, t_n, x_i)|}_{=0} + |f(n, i, t, x) - f(n, i, t_n, x_i)| \\ &\leq h \left(|\partial_x f(n, i, t, x)| + |\partial_x F(t, x)| \right) \\ &= \frac{t}{\lambda n} \left(|\partial_x f(n, i, t, x)| + |\partial_x F(t, x)| \right). \end{aligned} \quad \square$$

Sollte das Lemma 2.2 exakt sein, so zeigt uns das, dass wir gleichmäßige Schranken von $f(n, i, \cdot, \cdot)$ benötigen, um von Aussagen auf Gitterebene auf Aussagen über alle Raumzeitpunkte zu schließen. Selbst dann, wenn man das Lemma dahingehend abschwächt, dass man nur die gleichmäßige Stetigkeit in n und i braucht. Und diese Bedingung tritt schon ein, ohne dass wir die Sublinear-Growth Bedingung überhaupt benutzt haben.

2.4. Ein Ansatz mit alternierenden Gittervorzeichen

Hier präzisieren wir unseren Ansatz (2.3.1) aus dem letztem Unterkapitel. Sei $\varepsilon_M > 0$ die Maschinengenauigkeit. Diese Größe ist von System zu System unterschiedlich und ist in der Regel in der Größenordnung von etwa 10^{-16} groß. Die Anfangsbedingung für u_0 in (2.3.6) lautet $u_0(0, x) = U(x)$, doch in Wahrheit rechnet der Computer mit gerundeten Zahlen, also

$$\begin{aligned} u_0(0, i, 0, x_i) &= \varepsilon_M \left\lfloor \frac{U(x_i)}{\varepsilon_M} \right\rfloor = U(x_i) - \underbrace{\left(U(x_i) - \varepsilon_M \left\lfloor \frac{U(x_i)}{\varepsilon_M} \right\rfloor \right)}_{=: \Delta_{\varepsilon_M} U(x_i)} \\ &= U(x_i) - \Delta_{\varepsilon_M} U(x_i), \end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Rundungsfehler $\Delta_{\varepsilon_M} U(x_i)$ kann nach der ersten Iteration jedoch von Gitterzelle zur Gitterzelle schon verschieden sein! Deshalb motiviert das hier den Ansatz, dass Oszillationen im Raum und auf Gitterniveau vorhanden sind und wir untersuchen, wie sich die Amplitude in der Zeit ausbreitet. Weil wir in (2.0.1) eine lineare Differentialgleichung betrachten, vermuten wir, dass man u_k für $k = 0, 1, 2$ und alle Iterationen $n \in \mathbb{N}$ als Summe einer glatten und einer unstetigen, hochfrequenten Funktion schreiben kann. Daher wählen wir für u_0, u_1 und u_2 aus (2.3.1) nun konkreter

$$u_k(n, i, t, x) = w_k(t, x) + (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x), \quad \text{für } k = 0, 1, 2 \quad (2.4.1)$$

für glatte Funktionen w_k, z_k , $\Omega(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} w_0(0, x_i) &= U(x_i), & z_0(0, x_i) &= V(x_i), \\ w_1(0, x_i) &= 0, & z_1(0, x_i) &= 0, \\ w_2(0, x_i) &= 0, & z_2(0, x_i) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Wobei U und V derart sind, dass alle nötigen Regularitätsbedingungen für die kommenden Betrachtungen erfüllt seien sollen. Wir wollen nun $\Omega(n)$ näher bestimmen. Setzt man dies in die vorherigen Rechnungen ein, so erhält man wegen der Gleichung (2.3.2)

in der Ordnung $O(1)$:

$$\begin{aligned} u_0(n+1, i, t_n, x_i) - u_0(n, i, t_n, x_i) + \lambda(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i)) &= 0. \\ w_k(t, x) + (-1)^i \Omega(n+1) z_k(t, x) - (w_k(t, x) + (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x)) &= \\ + \lambda[w_k(t, x) + (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) - (w_k(t, x) + (-1)^{i-1} \Omega(n) z_k(t, x))] &= \\ (-1)^i \Omega(n+1) z_k(t, x) - (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) + \lambda[(-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) - (-1)^{i-1} \Omega(n) z_k(t, x)] &= \\ (-1)^i \Omega(n+1) z_k(t, x) - (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) + \lambda[(-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) + (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x)] &= \\ (-1)^i \Omega(n+1) z_k(t, x) - (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) + 2\lambda(-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) &= \\ (-1)^i \Omega(n+1) z_k(t, x) + (-1+2\lambda)(-1)^i \Omega(n) z_k(t, x) &= \\ -(-1)^i z_0(t_n, x_i) [\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n)] &= \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Da diese Gleichung für alle Gitterkoordinaten (n, i) gilt und die Funktion $F(t, x) = 0$ glatt ist, können wir unter der Annahme, dass $z_0 \neq 0$ gilt, Lemma 2.2 benutzen.

Satz 2.3. *Es gelte für alle $(n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ die Gleichung (2.4.3). Dann gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\Omega(n) = (1 - 2\lambda)^n.$$

Beweis. Weil $z_0 \neq 0$ gilt, existiert ein Punkt $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ mit $z_0(t, x) \neq 0$. Nach Lemma 2.2 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$\left| (-1)^i z_0(t, x) (\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n)) \right| \leq \left| (-1)^i \frac{t}{\lambda n} \partial_x z_0(t, x) (\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n)) \right|.$$

Angenommen es gelte $\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n) \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt wiederum für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|z_0(t, x)| \leq \frac{t}{\lambda n} |\partial_x z_0(t, x)|,$$

was zu $z_0(t, x) = 0$ führt, ein Widerspruch zur Voraussetzung $z_0(t, x) \neq 0$. Das impliziert $\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n) = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und mit $\Omega(0) = 1$ folgt die Behauptung. \square

Von nun an, setzen betrachten wir $\lambda = 1 + \eta$ für ein $\eta > 0$. Mit dem Satz 2.3 und weil wir im Ansatz (2.4.1) für jedes $k = 0, 1, 2$ die selbe Abhängigkeit von (n, i) annehmen, folgt hiermit, dass für alle $k = 0, 1, 2$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$

$$u_k(n+1, i, t_n, x_i) - u_k(n, i, t_n, x_i) + (1+\eta)(u_k(n, i, t_n, x_i) - u_k(n, i-1, t_n, x_i)) = 0 \quad (2.4.4)$$

erfüllt ist. Setzt man dies nun in den Ansatz ein, so fallen die Anteile von u_2 in der Gleichung (2.3.4) für diskrete Ansätze weg. Mit $\lambda = 1 + \eta$ gilt $\Omega(n) = (-1)^n (1 + 2\eta)^n$ und wir schreiben diesen Ansatz hier nun als

$$v_i^n = w_0(t_n, x_i) + h w_1(t_n, x_i) + (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n (z_0(t_n, x_i) + h z_1(t_n, x_i)) + o(h) \quad (2.4.5)$$

auf und setzen ihn weiter in die Bedingungen aus (2.3.3) bis (2.1.4) ein. In der Ordnung $O(h)$ gilt nach den Rechnungen zum diskreten Ansatz die Gleichung (2.3.3), die mit $\lambda = 1 + \eta$ hier lautet:

$$(1+\eta)(\partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i)) = \begin{aligned} & - (u_1(n+1, i, t_n, x_i) - u_1(n, i, t_n, x_i)) \\ & - (1+\eta)(u_1(n, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i)). \end{aligned}$$

Die Rechte Seite dieser Gleichung verschwindet wegen der Eigenschaft (2.4.4) und es folgt demnach für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ und $h > 0$

$$\partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) = 0.$$

Weil sowohl w_0 als auch z_0 stetig differenzierbar sind, folgt für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) &= \partial_t (w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n+1} (1 + 2\eta)^{n+1} z_0(t_n, x_i)) \\ &= \partial_t w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n (-(1 + 2\eta) \partial_t z_0(t_n, x_i)) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

und

$$\begin{aligned}\partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) &= \partial_x \left(w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n-1} (1+2\eta)^n z_0(t_n, x_i) \right) \\ &= \partial_x w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n} (1+2\eta)^n \left(-\partial_x z_0(t_n, x_i) \right).\end{aligned}\tag{2.4.7}$$

In der Summe ergibt das nun

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) \\ &= \partial_t w_0(t_n, x_i) + \partial_x w_0(t_n, x_i) \\ &\quad - (-1)^{i+n} (1+2\eta)^n \left((1+2\eta) \partial_t z_0(t_n, x_i) + \partial_x z_0(t_n, x_i) \right),\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

also

$$\partial_t w_0(t_n, x_i) + \partial_x w_0(t_n, x_i) = (-1)^{i+n} (1+2\eta)^n \left((1+2\eta) \partial_t z_0(t_n, x_i) + \partial_x z_0(t_n, x_i) \right).\tag{2.4.9}$$

Wir verwenden nun Lemma 2.2, um zu zeigen, dass beide Seiten umanhängig von einander Null sein müssen.

Satz 2.4. *Sei $\omega \in (0, 2\pi)$ und $\Omega: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ unbeschränkt. Es seien F und g Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$. Für alle $h > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gelte außerdem*

$$\begin{aligned}F(t_n, x_k) &= e^{i\omega k} \Omega(n) g(t_n, x_k) \quad \text{bzw.} \\ F(t_n, x_k) &= \operatorname{Re} \left[e^{i\omega k} \Omega(n) g(t_n, x_k) \right] \\ &= \cos(\omega k) \Omega(n) g(t_n, x_k)\end{aligned}\tag{2.4.10}$$

Dann folgt für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}F(t, x) &= 0 \quad \text{und} \\ g(t, x) &= 0.\end{aligned}$$

Beweis. In das Lemma 2.2 setzen wir für f die rechte Seite der Gleichung (2.4.10) ein, also $f(n, i, t, x) = \cos(\omega k) \Omega(n) g(t_n, x_k)$. Dann ist f für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ differenzierbar und die Voraussetzungen von Lemma 2.2 sind erfüllt.

Es existiert also für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $k(n) \in \mathbb{Z}$, so dass die Ungleichung

$$\begin{aligned}|F(t, x) - f(n, k(n), t, x)| &\leq \frac{t}{\lambda n} \left(\left| \partial_x f(n, k(n), t, x) \right| + \left| \partial_x F(t, x) \right| \right) \\ \Leftrightarrow |F(t, x) - \cos(\omega k) \Omega(n) g(t_n, x_k)| &\leq \frac{t}{\lambda n} \left(\left| \cos(\omega k) \Omega(n) \partial_x g(t_n, x_k) \right| + \left| \partial_x F(t, x) \right| \right)\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

erfüllt ist. Sollte es unendlich viele $k(n) \in \mathbb{Z}$ derart geben, dass $\cos(\omega k) = 0$ gilt, so folgt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|F(t, x)| \leq \frac{t}{\lambda n} |\partial_x F(t, x)|$, was die Behauptung impliziert. Angenommen das wäre nicht der Fall. Dann impliziert die Ungleichung (2.4.11) wegen $|f(n, k(n), t, x)| - |F(t, x)| \leq |F(t, x) - f(n, k(n), t, x)|$ die Gleichung

$$|f(n, k(n), t, x)| \leq \frac{t}{\lambda n} |\partial_x f(n, k(n), t, x)| + \frac{t}{\lambda n} |\partial_x F(t, x)| + |F(t, x)|$$

also folgt, weil für fast alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\cos(\omega k(n)) \neq 0$ gilt und $\Omega(n)$ unbeschränkt ist, für fast alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\Omega(n) \neq 0$

$$\begin{aligned} |\Omega(n)| |g(t, x)| &\leq \frac{t}{\lambda n} \cdot |\Omega(n)| |\partial_x g(t, x)| + \frac{t}{\lambda n} |\partial_x F(t, x)| + |F(t, x)| \\ \Leftrightarrow |g(t, x)| &\leq \frac{t}{\lambda n} |\partial_x g(t, x)| + |\Omega(n)|^{-1} \left(\frac{t}{\lambda n} |\partial_x F(t, x)| + |F(t, x)| \right), \end{aligned}$$

woraus, weil $\Omega(n)$ unbeschränkt ist, $g(t, x) = 0$ und somit auch $F(t, x) = 0$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ folgt. \square

Wir wenden nun Satz 2.4 auf unser $\Omega(n) = (1 + 2\eta)^n$ an und benutzen, dass $(1 + 2\eta)^n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Später beweisen wir mit Satz 2.5 eine analoge Aussage um solche Bedingungen in anderen Ansätzen zu bekommen, bei denen man keine solche Wachstumsbedingung für Ω hat. Wenden wir nun Satz 2.4 auf Gleichung (2.4.9) an, so erhalten wir

in der Ordnung $O(h)$:

$$\partial_t w_0(t, x) + \partial_x w_0(t, x) = 0 \quad (2.4.12)$$

$$\partial_t z_0(t, x) + \frac{1}{1 + 2\eta} \partial_x z_0(t, x) = 0 \quad (2.4.13)$$

Aus den Gleichungen (2.4.12) und (2.4.13) folgt insbesondere nun auch

$$\partial_t^2 w_0 = \partial_x^2 w_0 \quad \text{und} \quad \partial_t^2 z_0 = \frac{1}{(1 + 2\eta)^2} \partial_x^2 z_0. \quad (2.4.14)$$

Mit den Anfangsbedingungen (2.4.2), insbesondere $w_0(0, x) = U(x)$ und $z(0, x) = V(x)$, kann man diese Anfangswertprobleme wie in Anhang A.1.1 lösen und w_0 und z_0 durch

$$w_0(t, x) = U(x - t) \quad \text{und} \quad z_0(t, x) = V\left(x - \frac{t}{1 + 2\eta}\right)$$

bestimmen.

Ferner setzen wir den Ansatz (2.4.5) nun in die Gleichung der Ordnung $O(h^2)$ für diskrete Ansätze (2.3.4) ein. Diese lautet mit $\lambda = 1 + \eta$

in der Ordnung $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} (1 + \eta) \left(\partial_t u_1(n + 1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i - 1, t_n, x_i) \right) &= \frac{1 + \eta}{2} \partial_x^2 u_0(n, i - 1, t_n, x_i) \\ &\quad - \frac{(1 + \eta)^2}{2} \partial_t^2 u_0(n + 1, i, t_n, x_i) \\ 0 &= \begin{cases} - \left(u_2(n + 1, i, t_n, x_i) - u_2(n, i, t_n, x_i) \right) \\ - (1 + \eta) \left(u_2(n, i, t_n, x_i) - u_2(n, i - 1, t_n, x_i) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

also gilt

$$\partial_t u_1(n + 1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i - 1, t_n, x_i) = \frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(n, i - 1, t_n, x_i) - \frac{(1 + \eta)}{2} \partial_t^2 u_0(n + 1, i, t_n, x_i) \quad (2.4.15)$$

$$(2.4.16)$$

Wegen (2.4.14) gilt für die rechte Seite dieser Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(n, i - 1, t_n, x_i) - \frac{(1 + \eta)}{2} \partial_t^2 u_0(n + 1, i, t_n, x_i) \\ &= \frac{1}{2} \partial_x^2 \left[w_k(t_n, x_i) + (-1)^{i+n-1} (1 + 2\eta)^n z_k(t_n, x_i) \right] - \frac{(1 + \eta)}{2} \partial_t^2 \left[w_k(t_n, x_i) + (-1)^{i+n+1} (1 + 2\eta)^{n+1} z_k(t_n, x_i) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\partial_x^2 w_k(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) \right] - \frac{(1 + \eta)}{2} \left[\partial_t^2 w_k(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^{n+1} \partial_t^2 z_k(t_n, x_i) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\partial_x^2 w_k(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) \right] - \frac{(1 + \eta)}{2} \left[\partial_x^2 w_k(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} \frac{(1 + 2\eta)^n}{(1 + 2\eta)} \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) \right] \\ &= -\frac{\eta}{2} \partial_x^2 w_k(t_n, x_i) - \frac{1}{2} (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) + \frac{(1 + \eta)}{2} (-1)^{i+n} \frac{(1 + 2\eta)^n}{(1 + 2\eta)} \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) \\ &= -\frac{\eta}{2} \partial_x^2 w_k(t_n, x_i) - \frac{1}{2} (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) + \frac{(1 + 2\eta - \eta)}{2} (-1)^{i+n} \frac{(1 + 2\eta)^n}{(1 + 2\eta)} \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) \\ &= -\frac{\eta}{2} \partial_x^2 w_k(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \left(\frac{\eta}{2(1 + 2\eta)} \partial_x^2 z_k(t_n, x_i) \right) \end{aligned}$$

Für die linke Seite der Gleichung (2.4.15) gilt ganz analog wie im Fall von $O(h)$ der Gleichung (2.4.8)

$$\begin{aligned} &\partial_t u_1(n + 1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i - 1, t_n, x_i) \\ &= \partial_t w_0(t_n, x_i) + \partial_x w_0(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \left((1 + 2\eta) \partial_t z_0(t_n, x_i) + \partial_x z_0(t_n, x_i) \right) \end{aligned}$$

Hierauf kann man wieder Satz 2.4 anwenden und wir gelangen mit den Anfangswerten in (2.3.6) zu den Anfangswertproblemen

$$\partial_t w_1(t, x) + \partial_x w_1(t, x) = -\frac{\eta}{2} \partial_x^2 w_0(t, x), \quad w_1(0, x) = 0 \quad \text{und} \quad (2.4.17)$$

$$\partial_t z_1(t, x) + \frac{1}{1+2\eta} \partial_x z_1(t, x) = \frac{\eta}{2(1+2\eta)^2} \partial_x^2 z_0(t, x), \quad z_1(0, x) = 0 \quad (2.4.18)$$

Betrachtet man den Ansatz (2.4.5) nun genauer, so erkennt man, dass der Faktor $(1+2\eta)^n$ für $\eta > 0$ und $n \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist. Das heißt, dass der Ansatz für $h \rightarrow 0$ zu jeder noch so kleinen Zeit $t > 0$ beliebig groß wird, was das instabile Verhalten ja auch wiedergibt. Genauer gibt es für jede Zeit $t > 0$ und zu jeder Schranke $X > 0$ ein $h > 0$, so dass $|v_i^n| > X$ und $n\lambda h = t_n < t$ gilt. Allerdings bedeutet das auch, dass wir im Gegensatz zum regulären Fall die Lösungen w_k

$$w_0(t, x) = U(x - t) \quad \text{und} \quad (2.4.19)$$

$$w_1(t, x) = -t \frac{\eta}{2} \partial_x^2 U(x - t) \quad (2.4.20)$$

hinnehmen, da wir uns sowieso nicht wie z. B. für den Fall $\lambda < 1$ für das Langzeitverhalten der Lösung interessieren.

Der Faktor $\frac{\eta}{2(1+2\eta)^2}$ in Gleichung (2.4.18) ist für $\eta > 0$ positiv! Das heißt, dass wir hier wie die Autoren in [JY04] den im regulären Fall aus Kapitel 2.1 gezeigten Ansatz mit langsamer Zeitskala $\tau_n = ht_n$ für z_0 anwenden können. Dazu nehmen wir die Existenz einer Funktion $\tilde{z}(t, \tau, x)$ an, für die $\tilde{z}(t_n, ht_n, x) = z(t_n, x_i)$ gilt und es folgt

$$\partial_t z(t_n, x_i) = \partial_t (\tilde{z}(t_n, ht_n, x)) = \partial_t \tilde{z}(t_n, ht_n, x) + h \partial_\tau \tilde{z}(t_n, ht_n, x)$$

und auch

$$\begin{aligned} \partial_t z_0(t, \tau, x) + \frac{1}{1+2\eta} \partial_x z_0(t, \tau, x) &= 0 \\ \partial_t z_1(t, \tau, x) + \frac{1}{1+2\eta} \partial_x z_1(t, \tau, x) &= \frac{\eta}{2(1+2\eta)^2} \partial_x^2 z_0(t, \tau, x) - \partial_\tau z_0(t, \tau, x) \end{aligned}$$

und wir fordern mit dem zusätzlichen Freiheitsgrad, dass

$$\partial_\tau z_0(t, \tau, x) = \frac{\eta}{2(1+2\eta)^2} \partial_x^2 z_0(t, \tau, x)$$

gilt. Mit $z_1(0, 0, x) = 0$ folgt also $z_1 = 0$ und

$$z_0(t, \tau, x) = (V * G_\tau) \left(x - \frac{t}{1 + 2\eta} \right)$$

$$G_\tau(y) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \frac{(1 + 2\eta)^2}{2\pi\eta}} \exp \left(-\frac{y^2}{\tau} \frac{(1 + 2\eta)^2}{2\pi\eta} \right)$$

Wenn wir alle Ergebnisse zusammensetzen gelangen wir zu dem folgendem Ausdruck

$$v_i^n = U(x_i - t_n) + (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n (V * G_{\tau_n}) \left(x_i - \frac{t_n}{1 + 2\eta} \right) - \frac{h\eta}{2} t_n \partial_x^2 U(x_i - t_n) + o(h). \quad (2.4.21)$$

Wir nehmen für ein konkretes Beispiel die Startwerte $U(x) = \sin(\pi x)$ und $V(x) = \varepsilon_M$. Wenn wir das in (2.4.21) einsetzen, so gilt zunächst für alle $x, \tau \in \mathbb{R} : (V * G_\tau)(x) = \varepsilon_M$ und es gilt $\partial_x^2 U(x_i - t_n) = -\pi^2 \sin(\pi(x_i - t_n))$ für alle $(t_n, x_i) \in G_h$. Ersetzt man ferner $t_n = n(1 + \eta)h$ so erhält man insgesamt

$$v_i^n \sim \sin(\pi(x_i - t_n)) \left(1 + n \frac{\pi^2}{2} h^2 \eta (1 + \eta) \right) + (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \varepsilon_M. \quad (2.4.22)$$

Damit ist dann die Fehlerabschätzung verbunden

$$\begin{aligned} \text{err}^n &= \max_{i \in \mathbb{Z}} \left| \sin(\pi(x_i - t_n)) - v_i^n \right| \\ &= \max_{i \in \mathbb{Z}} \left| \sin(\pi(x_i - t_n)) n \frac{\pi^2}{2} h^2 \eta (1 + \eta) + (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \varepsilon_M \right| \\ &\leq \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\left| \sin(\pi(x_i - t_n)) n \frac{\pi^2}{2} h^2 \eta (1 + \eta) \right| + \left| (-1)^{i+n} (1 + 2\eta)^n \varepsilon_M \right| \right) \\ &= (1 + 2\eta)^n \varepsilon_M + n \frac{\pi^2}{2} h^2 \eta (1 + \eta) + o(h) \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

In Abbildung 2.3 vergleichen wir den maximalen Fehler der Beispiele im Unterkapitel 2.2 mit dem Fehler des Ansatzes v_i^n aus (2.4.23). Dabei erkennt man, dass dieses Modell schon eine ganz gute Approximation für das Wachstum der Rundungsfehler für verschiedene $\eta > 0$ liefert. Es bleibt trotzdem unbefriedigend, dass man über keine Konvergenz für $h \rightarrow 0$ im klassischen Sinne sprechen kann. Für $h \rightarrow 0$ gilt stets $h \ll \eta$, was bedeutet, dass dieser Ansatz hier Aussagen für beliebig große η trifft. Darin liegen auch die Grenzen von (2.4.21) begründet. Dieses Problem gehen wir mit dem nächsten Unterkapitel an.

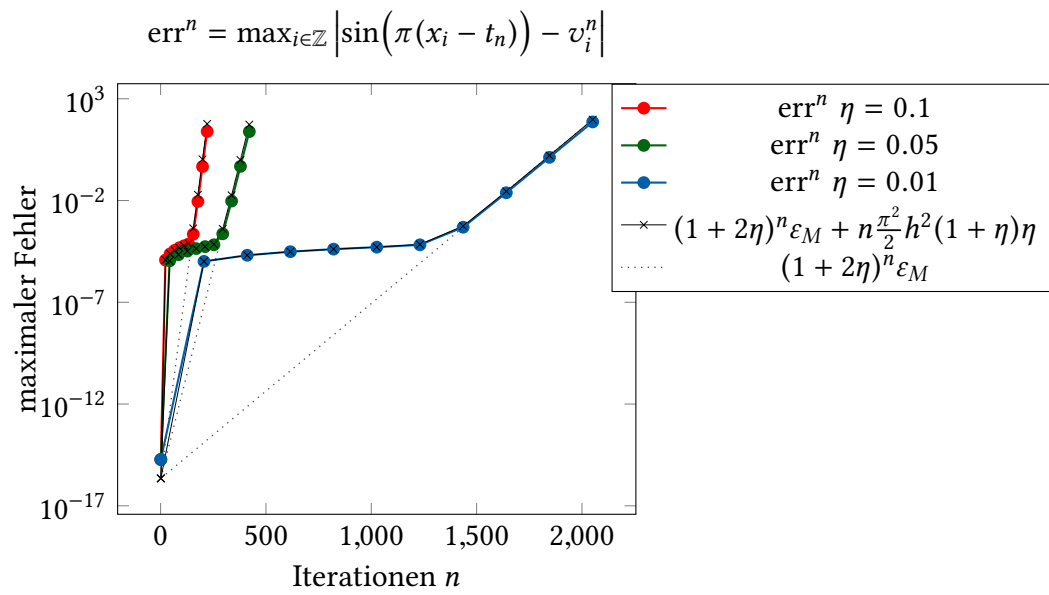


Abbildung 2.3.: Hier vergleichen wir die maximalen Fehler der numerischen Lösungen für die Startwerte $U(x) = \sin(\pi x)$, $V(x) = \varepsilon_M$ und $h = 10^{-3}$ für $\eta = 0.1, 0.05$ und 0.001 zur echten Lösung $u(t, x) = \sin(\pi(x - t))$ mit dem geschätztem Fehler $u(t_n, x_i) - v_i^n$ in (2.4.23).

2.5. Kleine Störungen der Courant-Friedrich-Lewy Bedingung

$h \ll \eta$ führt fundamental zu dem Problem, dass kleine Rundungsfehler zu jeder noch so kleinen Zeit $t > 0$ beliebig groß werden und die richtige Lösung komplett überdecken. Wir rechnen in der Praxis jedoch mit einem positivem $h > 0$, für das eventuell auch $h \sim \eta$ gelten kann. Konkrete numerische Realisierungen existieren und entwickeln Oszillationen für feste h zu positiven Zeiten $t > 0$. Gerade für Probleme, bei denen numerische Daten nur in einem "kurzem" Zeitintervall unter instabilen Bedingungen gerechnet werden, könnte es also interessante Einblicke geben, das asymptotische Verhalten eines Verfahren für "kleine" Störungen der CFL Zahl zu kennen. Der bisherige Ansatz hat dies ignoriert und obwohl Abbildung 2.3 zeigt, dass (2.4.21) bereits gute Approximationen liefert, werden solche Überlegungen spätestens für die Advektion mit variabler Geschwindigkeit oder auch nichtlineare Probleme von Nöten sein. Daher betrachten wir nun die Koppelung $\eta = h$ und setzen $\lambda = 1 + h$ in die Gleichungen ein (2.3.2) bis (2.3.5) ein:

Allgemeine Gleichungen

in der Ordnung $O(1)$:

$$u_0(n+1, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i) = 0 \quad (2.5.1)$$

in der Ordnung $O(h)$:

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) = & - \left(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i) \right) \\ & - \left(u_1(n+1, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i) \right) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

in der Ordnung $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i) + \\ \partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) = & \frac{1}{2} \left(\partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \right) \\ & - \left(u_1(n, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i) \right) \\ & - \left(u_2(n+1, i, t_n, x_i) - u_2(n, i-1, t_n, x_i) \right) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

in der Ordnung $O(h^3)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \\
& \partial_t u_2(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_2(n, i-1, t_n, x_i) + \\
& \partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i) = \frac{1}{6} \left(\partial_x^3 u_0(n, i-1, t_n, x_i) + \partial_t^3 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \right) \\
& \frac{1}{2} \left(\partial_x^2 u_1(n, i-1, t_n, x_i) - \partial_t^2 u_1(n+1, i, t_n, x_i) \right) \\
& - \left(u_2(n, i, t_n, x_i) - u_2(n, i-1, t_n, x_i) \right)
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
w_0(0, x_i) &= U(x_i), & z_0(0, x_i) &= V(x_i), \\
w_1(0, x_i) &= 0, & z_1(0, x_i) &= 0, \\
w_2(0, x_i) &= 0, & z_2(0, x_i) &= 0
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Alternierende Gittervorzeichen

Setzt man wieder den Ansatz mit alternierenden Gittervorzeichen

$$u_k(n, i, t, x) = w_k(t, x) + (-1)^i \Omega(n) z_k(t, x), \quad k = 0, 1, 2$$

ein, so folgt aus (2.5.1)

$$\begin{aligned}
0 &= u_0(n+1, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i) \\
&= w_0(t_n, x_i) + (-1)^i \Omega(n+1) z_0(t_n, x_i) - \left(w_k(t_n, x_i) + (-1)^{i-1} \Omega(n) z_k(t_n, x_i) \right) \\
&= (-1)^i \Omega(n+1) z_0(t_n, x_i) - (-1)^{i-1} \Omega(n) z_k(t_n, x_i) \\
&= (-1)^i \Omega(n+1) z_0(t_n, x_i) + (-1)^i \Omega(n) z_k(t_n, x_i) \\
&= (-1)^i z_0(t_n, x_i) \left(\Omega(n+1) + \Omega(n) \right),
\end{aligned}$$

und das impliziert ganz analog wie in Satz 2.3, dass dieses mal $\Omega(n) = (-1)^n$ gilt. Folglich ist unser Ansatz durch

$$\begin{aligned}
v_i^n &= w_0(t_n, x_i) + h w_1(t_n, x_i) + h^2 w_2(t_n, x_i) \\
&\quad + (-1)^{i+n} \left(z_0(t_n, x_i) + h z_1(t_n, x_i) + h^2 z_2(t_n, x_i) \right)
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

und diskreten Ansatzfunktionen sind dieses mal durch

$$u_k(n, i, t, x) = w_k(t, x) + (-1)^{i+n} z_k(t, x) \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.5.7)$$

gegeben. Hieraus folgt zunächst für alle $k = 0, 1, 2$

$$u_k(n+1, i, t, x) - u_k(n, i-1, t, x) = 0. \quad (2.5.8)$$

Die Gleichung (2.5.2) lautet mit der Bedingung (2.5.8) nun

$$\partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) = -\left(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i)\right)$$

Setzt man (2.5.7) für u_0 ein, so gilt für die linke Seite ferner

$$\begin{aligned} & \partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) \\ &= \partial_t w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n+1} \partial_t z_0(t_n, x_i) + \partial_x w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n-1} \partial_x z_0(t_n, x_i) \\ &= \partial_t w_0(t_n, x_i) + \partial_x w_0(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} \left(\partial_t z_0(t_n, x_i) + \partial_x z_0(t_n, x_i) \right). \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

und für die rechte Seite erhalten wir

$$-\left(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i)\right) \quad (2.5.10)$$

$$\begin{aligned} &= -\left(w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n} z_0(t_n, x_i) - \left(w_0(t_n, x_i) + (-1)^{i+n-1} z_0(t_n, x_i)\right)\right) \\ &= -(-1)^{i+n} 2z_0(t_n, x_i) \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Genau wie im vorangegangenen Kapitel 2.4 folgern wir hieraus je eine Bedingung für die Funktionen w_0 und z_0 . Jedoch können wir nicht das Gleiche wie in Satz 2.4 machen, da es dort essentiell war, dass wir eine in n unbeschränkte Funktion betrachten. Allerdings haben wir im Ansatz glatte Abbildungen $w_k, z_k \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ für $k = 0, 1, 2$ angenommen und wir können hier mit ihrer Regularität argumentieren.

Satz 2.5. Sei $\omega \in (0, 2\pi)$ und $\Omega: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Angenommen es gäbe außerdem zwei positiven Zahlen $\kappa, K > 0$ mit $\kappa \leq |\Omega(n)| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte für alle $h > 0$ und alle Gitterpunkte $(t_n, x_k) \in G_h$

$$\begin{aligned} F(t_n, x_k) &= e^{i\omega k} \Omega(n) f(t_n, x_k) \quad \text{bzw.} \\ F(t_n, x_k) &= \operatorname{Re} \left[e^{i\omega k} \Omega(n) f(t_n, x_k) \right] \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

für zwei glatte Funktionen $F, f \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(t, x) &= 0 \quad \text{und} \\ f(t, x) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Weil f stetig differenzierbar ist, gilt mit der Voraussetzung (2.5.12)

$$\begin{aligned} F(t_n, x_k) &= e^{i\omega k} \Omega(n) f(t_n, x_k) \\ \text{und} \\ F(t_n, x_{k+1}) &= e^{i\omega(k+1)} \Omega(n) f(t_n, x_{k+1}) \\ &= e^{i\omega k} e^{i\omega} \Omega(n) f(t_n, x_{k+1}) \\ &= e^{i\omega k} e^{i\omega} \Omega(n) (f(t_n, x_k) + h \partial_x f(t_n, x_k) + o(h)) \end{aligned}$$

also gilt für alle $h > 0$ auch

$$\begin{aligned} |F(t_n, x_k + h) - F(t_n, x_k)| &= |F(t_n, x_{k+1}) - F(t_n, x_k)| \\ &= |e^{i\omega k} (e^{i\omega} - 1) \Omega(n) f(t_n, x_k) + h e^{i\omega k} \Omega(n) \partial_x f(t_n, x_k)| \\ &\geq |e^{i\omega k} (e^{i\omega} - 1) \Omega(n) f(t_n, x_k)| - h |e^{i\omega k} \Omega(n) \partial_x f(t_n, x_k)| \\ &\geq \kappa \cdot |e^{i\omega k} (e^{i\omega} - 1) f(t_n, x_k)| - h K \cdot |e^{i\omega k} \partial_x f(t_n, x_k)| \\ &= \kappa \cdot \underbrace{|e^{i\omega k}|}_{=1} |(e^{i\omega} - 1) f(t_n, x_k)| - h K \cdot \underbrace{|e^{i\omega k}|}_{=1} |\partial_x f(t_n, x_k)| \\ &= \kappa \cdot \underbrace{|e^{i\omega} - 1|}_{\neq 0} |f(t_n, x_k)| - h K \cdot |\partial_x f(t_n, x_k)|. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Unser Gitter G_h ist gerade so gemacht, dass es für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ und zu jeder Folge von Gitterweiten $(h^p)_{p \in \mathbb{N}}$ mit $h_p \rightarrow 0$ eine Folge von Gitterpunkten $(t^p, x^p) \in G_{h_p}$ und $(t^p, x^p) \rightarrow (t, x)$ gibt. Es gilt $\lim_{h_p \rightarrow 0} |F(t^p, x^p + h_p) - F(t^p, x^p)| = 0$ für $h_p \rightarrow 0$, weil F stetig ist. Es gilt weiterhin

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \kappa |e^{i\omega} - 1| |f(t^p, x^p)| - h_p K |\partial_x f(t^p, x^p)| = \kappa |e^{i\omega} - 1| |f(t, x)|.$$

Die Voraussetzung $0 < \omega < 2\pi$ impliziert nun $|e^{i\omega} - 1| \neq 0$ und somit folgt aus der Stetigkeit von f und der Ungleichung (2.5.13) $f(t, x) = 0$, was zu zeigen war. \square

Setzt man (2.5.9) und (2.5.10) nun gleich, so leitet man mithilfe des Satzes 2.5 die beiden Anfangswertprobleme

$$\partial_t w_0(t, x) + \partial_x w_0(t, x) = 0 \quad w_0(0, x) = U(x) \quad \text{und} \quad (2.5.14)$$

$$\partial_t z_0(t, x) + \partial_x z_0(t, x) = 2z_0(t, x) \quad z_0(0, x) = V(x) \quad (2.5.15)$$

her. Die Lösungen dieser Anfangswertprobleme haben wir schon im Anhang A.1.1 bestimmt und sie lauten

$$w_0(t, x) = U(x - t) \quad \text{und} \quad z_0(t, x) = V(x - t) e^{2t}. \quad (2.5.16)$$

Insbesondere gelten dann

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 w_0(t, x) &= \partial_x^2 w_0(t, x) \\
&\text{und} \\
\partial_t^2 z_0(t, x) &= \partial_t \left(\partial_t z_0(t, x) \right) \\
&= \partial_t \left(2z_0(t, x) - \partial_x z_0(t, x) \right) \\
&= 2\partial_t z_0(t, x) - \partial_t \left(\partial_x z_0(t, x) \right) \\
&= 2\partial_t z_0(t, x) - \partial_x \left(\partial_t z_0(t, x) \right) \\
&= 2 \left(2z_0(t, x) - \partial_x z_0(t, x) \right) - \partial_x \left(2z_0(t, x) - \partial_x z_0(t, x) \right) \\
&= 4z_0(t, x) - 4\partial_x z_0(t, x) + \partial_x^2 z_0(t, x).
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Wir widmen uns nun der nächsten Ordnung zu, der Gleichung (2.5.3) in der Ordnung $O(h^2)$. Mit der Eigenschaft (2.5.8) lautet sie

$$\begin{aligned}
\partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i) + \\
\partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) &= \frac{1}{2} \left(\partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \right) \\
&\quad - \left(u_1(n, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i) \right)
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Und ganz analog wie schon im Fall von u_0 gelten die beiden Gleichungen

$$-\left(u_1(n, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i) \right) = -(-1)^{i+n} 2z_1(t_n, x_i) \tag{2.5.19}$$

und

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i) \\
&= \partial_t w_1(t_n, x_i) + \partial_x w_1(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} \left(\partial_t z_1(t_n, x_i) + \partial_x z_1(t_n, x_i) \right).
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) &= -\left(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i) \right) \\
&= -(-1)^{i+n} 2z_0(t_n, x_i).
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Und aus der kleinen Nebenrechnung in (2.5.17) folgern wir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) - \partial_t^2 \left(u_0(n+1, i, t_n, x_i) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\partial_x^2 w_0(t_n, x_i) + (-i)^{i+n-1} \partial_x^2 z_0(t_n, x_i) - \underbrace{\left(\partial_t^2 w_0(t_n, x_i) + (-i)^{i+n+1} \partial_t^2 z_0(t_n, x_i) \right)}_{=\partial_x^2 w_0(t_n, x_i)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(-i)^{i+n-1} \partial_x^2 z_0(t_n, x_i) - (-i)^{i+n+1} \partial_t^2 z_0(t_n, x_i) \right] \\
&= (-1)^{i+n} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\partial_t^2 z_0(t_n, x_i)}_{=4z_0(t_n, x_i) - 4\partial_x z_0(t_n, x_i) + \partial_x^2 z_0(t_n, x_i)} - \partial_x^2 z_0(t_n, x_i) \right] \\
&= (-1)^{i+n} 2 \left[z_0(t_n, x_i) - \partial_x z_0(t_n, x_i) \right]
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Setzen wir die vier Gleichungen (2.5.19) bis (2.5.22) zu der Gleichung (2.5.18) zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \partial_t w_1(t_n, x_i) + \partial_x w_1(t_n, x_i) - (-1)^{i+n} \left(\partial_t z_1(t_n, x_i) + \partial_x z_1(t_n, x_i) \right) \\
&= (-1)^{i+n} \left[-2z_1(t_n, x_i) + 2(2z_0(t_n, x_i) - \partial_x z_0(t_n, x_i)) \right]
\end{aligned}$$

Und wir erhalten mit Satz 2.5 die Anfangswertprobleme

$$\partial_t w_1(t, x) + \partial_x w_1(t, x) = 0 \quad w_1(0, x) = 0 \quad \text{und} \tag{2.5.23}$$

$$\partial_t z_1(t, x) + \partial_x z_1(t, x) = 2z_1(t, x) + 2(\partial_x z_0(t, x) - 2z_0(t, x)) \quad z_1(0, x) = 0 \tag{2.5.24}$$

Folglich gilt schon mal $w_1 = 0$ und wir können für z_0 wieder eine langsame Zeitvariable, dieses mal $\tau = 2ht$, einführen. Unsere Ansatzfunktionen u_k lautet nun für $k = 0, 1, 2$

$$u_k(n, i, t, x) = w_k(t, x) + (-1)^{i+n} \tilde{z}_k(t_n, 2ht_n, x_i).$$

Sei $\tilde{z}(t, \tau, x)$ derart, dass $z(t_n, x_i) = \tilde{z}(t_n, 2ht_n, x_i)$ gilt, dann folgt

$$\partial_t z(t_n, x_i) = \partial_t \tilde{z}(t_n, \tau_n, x_i) + 2h \partial_\tau \tilde{z}(t_n, \tau_n, x_i).$$

Mit diesem Ansatz stellen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
& \partial_t z_0(t, \tau, x) + \partial_x z_0(t, \tau, x) = 2z_0(t, \tau, x) \\
& \partial_t z_1(t, \tau, x) + \partial_x z_1(t, \tau, x) = 2z_1(t, \tau, x) + 2(\partial_x z_0(t, \tau, x) - \partial_\tau z_0(t, \tau, x) - 2z_0(t, \tau, x)) \\
& z_0(0, 0, x) = V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
& z_1(0, 0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

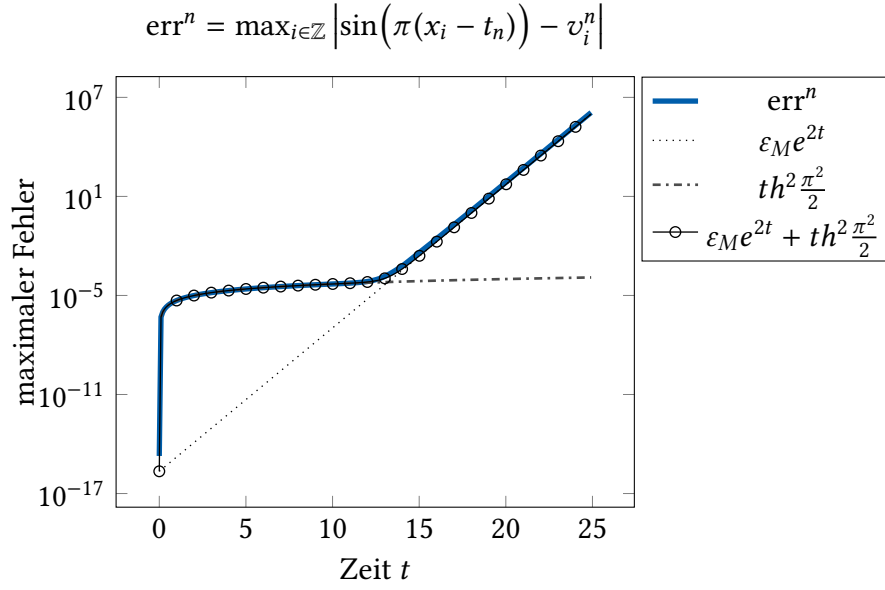


Abbildung 2.4.: Hier vergleichen wir die maximalen Fehler der numerischen Lösungen für die Startwerte $U(x) = \sin(\pi x)$, $V(x) = \varepsilon_M$ und $\eta = h = 10^{-3}$ zur echten Lösung $u(t, x) = \sin(\pi(x - t))$ mit dem geschätztem Fehler $\varepsilon_M e^{2t}$ aus der asymptotischen Entwicklung in .

auf und fordern zusätzlich

$$\partial_\tau z_0(t, \tau, x) - \partial_x z_0(t, \tau, x) = -2z_0(t, \tau, x). \quad (2.5.25)$$

Aus der ersten Gleichung $\partial_t z_0(t, \tau, x) + \partial_x z_0(t, \tau, x) = 2z_0(t, \tau, x)$, mit $z_0(0, 0, x) = V(x)$ folgern wir $z_0(t, \tau, x) = A(\tau, x - t)e^{2t}$ für eine Abbildung A mit $A(0, x) = V(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit (2.5.25) lässt sich A dann für alle $(t, \tau, x) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 \times \mathbb{R}$ durch

$$A(\tau, x - t) = A(0, x - t + \tau)e^{-2\tau}$$

bestimmen und es folgt für alle $(t, \tau, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$z_0(t, \tau, x) = V(x - t + \tau)e^{2(t-\tau)}, \quad z_1(t, \tau, x) = 0.$$

Zumindest bis zur Ordnung $O(h^2)$ können wir unseren Ansatz nun schon konkretisieren und er ist bestimmt, durch

$$v_i^n = U(x_i - t_n) + V(x_i - t_n + 2ht_i)e^{2(t_i - 2ht_i)} + O(h^2). \quad (2.5.26)$$

Auch dieses Ergebnis vergleichen wir nun mit unserer Referenzlösung in der Abbildung 2.4 und man erkennt, dass wir die Steigung des Fehlerwachstums gut eingefangen haben.

Fehler bestimmen: eine Ordnung weiter

Setzen wir unsere bisherigen Erkenntnisse nun wie in Anhang A.1.4 ein, so erhalten wir in Ordnung $O(h^3)$ schlussendlich die Gleichungen

$$\partial_t w_2(t, x) + \partial_x w_2(t, x) = -\frac{1}{2} \partial_t^2 w_0(t, x) \quad (2.5.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t z_2(t, \tau, x) + \partial_x z_2(t, \tau, x) &= 2z_2(t, \tau, x) - \frac{1}{6} \left(\partial_x^3 z_0(t, \tau, x) + \partial_t^3 z_0(t, \tau, x) \right) \\ &\quad + 2z_0(t, \tau, x) - \frac{1}{2} \partial_t^2 z_0(t, \tau, x) \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

Damit halten wir schonmal die Lösung $w_2(t, x) = -\frac{t}{2} \partial_t^2 w_0(t, x)$ fest und führen für z_2 ein paar Nebenrechnungen durch. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_t^3 z_0 &= \partial_t \left(\partial_t^2 z_0 \right) \\ &= \partial_t \left(4z_0 - 4\partial_x z_0 + \partial_x^2 z_0 \right) \\ &= 4(2z_0 - \partial_x z_0) - 4\partial_x (2z_0 - \partial_x z_0) + \partial_x^2 (2z_0 - \partial_x z_0) \\ &= 8z_0 - 4\partial_x z_0 - 8\partial_x z_0 + 4\partial_x^2 z_0 + 2\partial_x^2 z_0 - \partial_x^3 z_0 \\ &= 8z_0 - 12\partial_x z_0 + 6\partial_x^2 z_0 - \partial_x^3 z_0 \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

also

$$-\frac{1}{6} \left(\partial_t^3 z_0 + \partial_x^3 z_0 \right) = -\frac{4}{3} z_0 + 2\partial_x z_0 - \partial_x^2 z_0. \quad (2.5.30)$$

Außerdem gilt

$$-\frac{1}{2} \partial_t^2 z_0 = -2z_0 + 2\partial_x z_0 - \frac{1}{2} \partial_x^2 z_0$$

In Summe ergeben diese Rechnungen

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{6} \left(\partial_x^3 z_0 + \partial_t^3 z_0 \right) + 2z_0 - \frac{1}{2} \partial_t^2 z_0 \\ &= \left(-\frac{4}{3} z_0 + 2\partial_x z_0 - \partial_x^2 z_0 \right) + 2z_0 + \left(-2z_0 + 2\partial_x z_0 - \frac{1}{2} \partial_x^2 z_0 \right) \\ &= -\frac{4}{3} z_0 + 4\partial_x z_0 - \frac{3}{2} \partial_x^2 z_0. \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

Setzt man dies wieder in Gleichung (2.5.28) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t z_2(t, \tau, x) + \partial_x z_2(t, \tau, x) &= 2z_2(t, \tau, x) - \frac{4}{3} z_0(t, \tau, x) + 4\partial_x z_0(t, \tau, x) \\ &\quad - \frac{3}{2} \partial_x^2 z_0(t, \tau, x). \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Wiederholende Muster sind ein typisches Phänomen bei der Multiskalenasymptotik. Das ist auch hier der Fall und wir könnten wie in Ordnung zuvor eine langsame Zeitvariable $\tau_2 = h^2 t$ einführen, um die entsprechenden Terme in der Gleichung (2.5.32) zu eliminieren. Hierauf verzichten wir jedoch an dieser Stelle, und benutzen hier lediglich, dass $z_0, \partial_x z_0$ und $\partial_x^2 z_0$ selbst schon Lösungen der Gleichung (2.5.14) sind. Im Anhang haben wir solche Gleichungen allgemein unter dem Namen “inhomogene Exponentialgleichung” gelöst. Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} z_2(t, \tau, x) &= t \left(-\frac{4}{3} z_0(0, \tau, x - t) + 4 \partial_x z_0(0, \tau, x - t) - \frac{3}{2} \partial_x^2 z_0(0, \tau, x - t) \right) e^{2t} \\ &= t \left(-\frac{4}{3} V(x - t) + 4 \partial_x V(x - t) - \frac{3}{2} \partial_x^2 V(x - t) \right) e^{2(t-\tau)} \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

2.6. Andere Frequenzen auf Gitterniveau – Exponentialansätze

Bisher haben wir für die Störungen $z(t, x)$ immer nur eine feste Frequenz angenommen, nämlich alternierende Gittervorzeichen. Wir untersuchen nun, wie das Upwind-Verfahren auf andere hochfrequente, also von Gitterkoordinaten abhängige, Ansätze wirkt. Wir beschreiben unsere Oszillationen mithilfe der komplexen Exponentialfunktion und schreiben für die Ortsindizes von jetzt an k statt i . Außerdem haben wir in unseren Ausführungen mithilfe der Sätze 2.5 und 2.4 Werkzeuge geschaffen, die es uns erlauben sich in den nur auf Summanden einer Frequenz zu konzentrieren. Das erleichtert nicht nur das Rechnen und macht die zu betrachtenden Gleichungen kleiner, sondern erlaubt uns Summen der Form

$$v_k^n = \sum_p \operatorname{Re} \left[e^{i\omega_p k} \Omega(n) \left(z_0^p(t_n, x_k) + h z_1^p(t_n, x_k) \right) \right] + O(h^2), \quad \forall (t_n, x_k) \in G_h \quad (2.6.1)$$

besser zu verstehen.

Im Folgenden betrachten wir den Ansatz

$$\begin{aligned} v_k^n &= \operatorname{Re} \left[e^{i\omega k} \Omega(n) \left(z_0(t_n, x_k) + h z_1(t_n, x_k) \right) \right] + O(h^2), \quad \forall (t_n, x_k) \in G_h \\ v_k^0 &= V(x_k) \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Aus der Gleichung (2.3.2) folgt in der Ordnung $O(1)$

$$\begin{aligned} 0 &= e^{i\omega k} z_0(t_n, x_k) \left(\Omega(n+1) - \Omega(n) + \lambda \Omega(n) - \lambda e^{-i\omega} \Omega(n) \right) \\ &= e^{i\omega k} z_0(t_n, x_k) \left(\Omega(n+1) - (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}) \Omega(n) \right) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

und somit $\Omega(n) = (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n$. Wir schreiben also nun

$$v_k^n = e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n (z_0(t_n, x_k) + h z_1(t_n, x_k)) + O(h^2).$$

und setzen dies in die Gleichung (2.3.3) ein

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u_0(n+1, k, t_n, x_k) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_k) \\ &= e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^{n+1} \partial_t z_0(t_n, x_k) + e^{i\omega(k-1)} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \partial_x z_0(t_n, x_k) \\ &= e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \left((1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}) \partial_t z_0(t_n, x_k) + e^{-i\omega} \partial_x z_0(t_n, x_k) \right). \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Ferner erhalten wir auf analoge Weise mit Hilfe der Gleichung (2.3.4)

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i) &= \frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i) \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} &e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \left((1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}) \partial_t z_1(t_n, x_k) + e^{-i\omega} \partial_x z_1(t_n, x_k) \right) \\ &= e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \left(\frac{e^{-\omega}}{2} \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) - \frac{\lambda(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})}{2} \partial_t^2 z_0(t_n, x_k) \right) \\ &= e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \frac{1}{2} \left(e^{-\omega} \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) - \lambda(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}) \partial_t^2 z_0(t_n, x_k) \right) \\ &= e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \frac{1}{2} \left(e^{-\omega} \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) - \frac{e^{-2i\omega} \lambda}{e^{-i\omega} - \lambda + \lambda e^{-i\omega}} \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) \right) \\ &= e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega} - \frac{e^{-2i\omega} \lambda}{1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}} \right) \\ &= e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega} - \frac{e^{-2i\omega} \lambda}{1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}} \right). \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t z_1(t_n, x_k) + \frac{e^{-i\omega}}{1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}} \partial_x z_1(t_n, x_k) &= \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-i\omega}}{1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}} - \frac{e^{-2i\omega} \lambda}{(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^2} \right) \\ &= \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) \frac{1}{2} \frac{(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}) e^{-i\omega} - e^{-2i\omega} \lambda}{(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^2} \\ &= \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) \frac{1}{2} \frac{e^{-i\omega} (1 - \lambda)}{(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^2} \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse führen zusammen zu dem Gleichungssystem

$$\partial_t z_0(t_n, x_k) + \frac{e^{-i\omega}}{1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}} \partial_x z_0(t_n, x_k) = 0 \quad (2.6.7)$$

$$\partial_t z_1(t_n, x_k) + \frac{e^{-i\omega}}{1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega}} \partial_x z_1(t_n, x_k) = \partial_x^2 z_0(t_n, x_k) \underbrace{\frac{1}{2} \frac{e^{-i\omega}(1 - \lambda)}{(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^2}}_{=: \Lambda}, \quad (2.6.8)$$

woraus zunächst unabhängig vom Vorzeichen von $\operatorname{Re} \Lambda$ die Lösungen

$$z_0(t, x) = V(x - t) \quad (2.6.9)$$

$$z_1(t, x) = t \partial_x^2 V(x - t) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Lambda \quad (2.6.10)$$

für kleine Zeiten $t > 0$ folgen. Und somit

$$v_k^n = \operatorname{Re} \left[e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \right] \left(V(x_k - t_n) + h t \partial_x^2 V(x_k - t_n) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Lambda \right) + O(h^2).$$

Insbesondere dominiert der Faktor $(1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n$ asymptotisch für $n \rightarrow \infty$. Wenn $\lambda > 1$ gilt, so ist dieser für $\omega = \pi$, also für alternierende Gittervorzeichen, maximal! Genauer gilt

$$\max_{\omega} \left| e^{i\omega k} (1 - \lambda + \lambda e^{-i\omega})^n \right| = |1 - 2\lambda|^n \quad (2.6.11)$$

und dieses Ergebnis passt wiederum mit der Abschätzung des maximalen Fehlers unseres Beispiels 2.2 zusammen.

3. Die lineare Transportgleichung mit ortsabhängiger Geschwindigkeit

Wir betrachten weiterhin das Upwind-Verfahren. In diesem Kapitel lassen wir jedoch eine variable Geschwindigkeit zu und untersuchen insbesondere wie sich diese auf hochfrequente Schwingungen auswirkt. Wie schon im Vorkapitel machen wir uns die Linearität der Gleichungen und die Sätze 2.4 und 2.5 zu nutze und rechnen den hochfrequenten und den glatten Anteil getrennt von einander aus.

Es sei also das folgende Dirichlet Problem gegeben:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + a(x) \partial_x u(t, x) &= 0 & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, x) &= U(x),\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

wobei $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $U \in L^1(\mathbb{R})$ gelten.

Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel wählen wir hier ein quadratisches Gitter $G_h = h(n, i)$ und dazugehörige Upwindverfahren

$$\begin{aligned}v_i^{n+1} - v_i^n + a(x_i)(v_i^n - v_{i-1}^n) &= 0. \\ v_i^0 &= U(x_i).\end{aligned}\tag{3.0.2}$$

Diese Annahme vereinfacht viele der kommenden Rechnungen.

3.1. Regulärer Ansatz

Das zugrundeliegende Problem

Angenommen es gibt glatte Abbildungen $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ mit

$$v_i^n = u_0(t_n, x_i) + h u_1(t_n, x_i) + O(h^2).\tag{3.1.1}$$

Wir setzen das in Gleichung (3.0.2) ein und erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} - v_i^n &= u_0(t_{n+1}, x_i) - u_0(t_n, x_i) + h(u_1(t_{n+1}, x_i) - u_1(t_n, x_i)) \\ &= h\partial_t u_0(t_n, x_i) + h^2 \frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + h^2 \partial_t u_1(t_n, x_i) + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

und

$$\begin{aligned} a(x_i)(v_i^n - v_{i-1}^n) &= a(x_i) \left(u_0(t_n, x_i) - u(t_n, x_{i-1}) + h(u_1(t_n, x_i) - u_1(t_n, x_{i-1})) \right) \\ &= a(x_i) \left(h\partial_x u(t_n, x_i) - h^2 \frac{1}{2} \partial_x^2 u(t_n, x_i) + h^2 \partial_x u_1(t_n, x_i) \right) + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

In der Summe ergibt das

$$\begin{aligned} 0 &= v_i^{n+1} - v_i^n + a(x_i)(v_i^n - v_{i-1}^n) \\ &= h\partial_t u_0(t_n, x_i) + h^2 \frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + h^2 \partial_t u_1(t_n, x_i) \\ &\quad + ha(x_i)\partial_x u(t_n, x_i) - h^2 \frac{a(x_i)}{2} \partial_x^2 u(t_n, x_i) + h^2 a(x_i)\partial_x u_1(t_n, x_i) + O(h^3). \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= h\partial_t u_0(t_n, x_i) + h^2 \frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + h^2 \partial_t u_1(t_n, x_i) \\ &\quad + ha(x_i)\partial_x u(t_n, x_i) - h^2 \frac{a(x_i)}{2} \partial_x^2 u(t_n, x_i) + h^2 a(x_i)\partial_x u_1(t_n, x_i) + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Sortiert nach den Ordnungen von h und aufgrund der Stetigkeit der Abbildungen u_0, u_1 und a erhalten wir das Gleichungssystem für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$\partial_t u_0(t, x) + a(x)\partial_x u_0(t, x) = 0, \quad (3.1.5)$$

$$\partial_t u_1(t, x) + a(x)\partial_x u_1(t, x) = \frac{a(x)}{2} \partial_x^2 u_0(t, x) - \frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t, x), \quad (3.1.6)$$

$$u_0(0, x) = U(x) \quad \text{und} \quad (3.1.7)$$

$$u_1(0, x) = 0. \quad (3.1.8)$$

Die Abbildung u_0 ist dann also eine Lösung der Differentialgleichung (3.0.1) und eine Lösung zu u_1 gibt uns den Fehler des Verfahren zur ersten Ordnung. Im Anhang A.2 haben wir die analytische Lösung des Anfangswertproblems für u_0 qualitativ untersucht und sie lautet

$$u_0(t, x) = U(\phi(-t, x)). \quad (3.1.9)$$

Wobei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ der Fluss der Differentialgleichung $\dot{y} = a(y)$ ist. Aus Gleichung (3.1.5) entnehmen wir

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u_0(t, x) &= \partial_t \left(\partial_t u_0(t, x) \right) \\
&= \partial_t \left(-a(x) \partial_x u_0(t, x) \right) \\
&= -a(x) \partial_x \left(\partial_t u_0(t, x) \right) \\
&= a(x) \partial_x \left(a(x) \partial_x u_0(t, x) \right) \\
&= a(x) a'(x) \partial_x u_0(t, x) + a^2(x) \partial_x^2 u_0(t, x)
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

und setzen dies in Gleichung (3.1.6) ein:

$$\begin{aligned}
\partial_t u_1(t, x) + a(x) \partial_x u_1(t, x) &= \frac{a(x)}{2} \partial_x^2 u_0(t, x) - \frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t, x) \\
&= \frac{a(x)(1 - a(x))}{2} \partial_x^2 u_0(t, x) - a(x) a'(x) \partial_x u_0(t, x).
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Und ganz analog wie im regulären Fall des Unterkapitels 2.1 kann man für den Fall, dass $0 < a(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, eine langsame Zeitvariable $\tau = ht$ einführen und löst eine Advektions-Diffusionsgleichung um die Quellterme in der Gleichung (3.1.11) zu eliminieren. Für den Fall, dass $a(x) > 1$ in einer offenen Umgebung U gilt, ist diese Gleichung jedoch nicht gut gestellt. In diesem Fall schreiben wir für u_1 die Lösung

$$\begin{aligned}
u_1(t, x) &= t \left(\frac{a(x)(1 - a(x))}{2} \partial_x^2 U(\phi(-t, x)) - a(x) a'(x) \partial_x U(\phi(-t, x)) \right) \\
&= t a(x) a'(x) \left(\frac{1 - a(x)}{2} U''(\phi(-t, x)) - a(x) U'(\phi(-t, x)) \right),
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

welche nur für kurze Zeiten t gelten kann.

Kleine Störungen

Wir schreiben für a nun $a(x) = 1 + hb(x)$ für eine beschränkte Abbildung $b(x) > 0$ in einer Umgebung U . D. h. wir untersuchen, wie sich das Verfahren für den Fall $a \sim 1$ für $h \rightarrow 0$ verhält.

Dabei “schieben” wir wie schon im Fall kleiner Störungen der CFL Zahl in Kapitel 2.5 die “störenden” Anteile eine Ordnung weiter. Daher wählen wir unseren Ansatz ebenfalls so, dass wir eine Ordnung in h mehr betrachten. Es seien also glatte Abbildungen $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$, $i = 0, 1, 2$ mit

$$v_i^n = u_0(t_n, x_i) + hu_1(t_n, x_i) + h^2 u_2(t_n, x_i) + O(h^3). \tag{3.1.13}$$

gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= u_0(t_{n+1}, x_i) - u_0(t_n, x_i) + h(u_1(t_{n+1}, x_i) - u_1(t_n, x_i)) \\
&\quad + h^2(u_2(t_{n+1}, x_i) - u_2(t_n, x_i)) \\
&= h\partial_t u_0(t_n, x_i) + h^2 \frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + h^3 \frac{1}{6} \partial_t^3 u_0(t_n, x_i) \\
&\quad + h^2 \partial_t u_1(t_n, x_i) + h^3 \frac{1}{2} \partial_t^2 u_1(t_n, x_i) \\
&\quad + h^3 \partial_t u_2(t_n, x_i) + O(h^4)
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

und

$$\begin{aligned}
(1 + hb(x_i))(v_i^n - v_{i-1}^n) &= (1 + hb(x_i)) \left(u_0(t_n, x_i) - u_0(t_n, x_{i-1}) \right. \\
&\quad \left. + h(u_1(t_n, x_i) - u_1(t_n, x_{i-1})) \right. \\
&\quad \left. + h^2(u_2(t_n, x_i) - u_2(t_n, x_{i-1})) \right) \\
&= (1 + hb(x_i)) \cdot \\
&\quad \left(h\partial_x u_0(t_n, x_i) - h^2 \frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_i) + h^3 \frac{1}{6} \partial_x^3 u_0(t_n, x_i) \right. \\
&\quad \left. + h^2 \partial_x u_1(t_n, x_i) - h^3 \frac{1}{2} \partial_x^2 u_1(t_n, x_i) \right. \\
&\quad \left. + h^3 \partial_x u_2(t_n, x_i) \right) + O(h^4).
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Das liefert uns also das Gleichungssystem

$$\partial_t u_0(t, x) + \partial_x u_0(t, x) = 0 \tag{3.1.16}$$

$$\partial_t u_1(t, x) + \partial_x u_1(t, x) = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x^2 u_0(t, x) - \partial_t^2 u_0(t, x))}_{=0} - b(x) \partial_x u_0(t, x) \tag{3.1.17}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t u_2(t, x) + \partial_x u_2(t, x) &= -\frac{b(x)}{2} \partial_x^2 u_0(t, x) - b(x) \partial_x u_1(t, x) \\
&\quad - \frac{1}{6} \underbrace{(\partial_t^3 u_0(t, x) + \partial_x^3 u_0(t, x))}_{=0} + \frac{1}{2} (\partial_x^2 u_1(t, x) - \partial_t^2 u_1(t, x)).
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

$$u_0(0, x) = U(x) \tag{3.1.19}$$

$$u_1(0, x) = u_2(0, x) = 0 \tag{3.1.20}$$

Aus (3.1.17) folgern wir

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u_1(t, x) &= \partial_t \left(-b(x) \partial_x u_0(t, x) - \partial_x u_1(t, x) \right) \\
&= b(x) \partial_x^2 u_0(t, x) + \partial_x \left(-b(x) \partial_x u_0(t, x) + \partial_x u_1(t, x) \right) \\
&= b(x) \partial_x^2 u_0(t, x) - b(x) \partial_x^2 u_0(t, x) - b'(x) \partial_x u_0(t, x) + \partial_x^2 u_1(t, x) \\
&= -b'(x) \partial_x u_0(t, x) + \partial_x^2 u_1(t, x)
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

und so wird aus der Gleichung (3.1.18) die Gleichung

$$\partial_t u_2(t, x) + \partial_x u_2(t, x) = \frac{1}{2} \left(b(x) \partial_x^2 u_0(t, x) + b'(x) \partial_x u_0(t, x) \right) - b(x) \partial_x u_1(t, x). \tag{3.1.22}$$

Um in Gleichung (3.1.16) den Quellterm zu eliminieren, führen wir wie bisher die langsame Zeitvariable $\tau = ht$ ein und fordern

$$\partial_t u_k(t, \tau, x) + b(x) \partial_x u_k(t, \tau, x) = 0 \quad \text{für } k = 0, 1. \tag{3.1.23}$$

Damit folgt dann wegen $u_1(0, 0, x) = 0$ auch $u_1(t, \tau, x) = 0$ für alle $(t, \tau, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$. Dies liefert uns insgesamt das Gleichungssystem

$$\partial_t u_0(t, \tau, x) + \partial_x u_0(t, \tau, x) = 0 \tag{3.1.24}$$

$$\partial_\tau u_0(t, \tau, x) + b(x) \partial_x u_0(t, \tau, x) = 0 \tag{3.1.25}$$

$$\partial_t u_1(t, \tau, x) + \partial_x u_1(t, \tau, x) = 0 \tag{3.1.26}$$

$$\partial_\tau u_1(t, \tau, x) + b(x) \partial_x u_1(t, \tau, x) = 0 \tag{3.1.27}$$

$$\partial_t u_2(t, \tau, x) + \partial_x u_2(t, \tau, x) = \frac{b(x)}{2} \partial_x^2 u_0(t, \tau, x) \tag{3.1.28}$$

$$u_0(0, 0, x) = U(x) \tag{3.1.29}$$

$$u_1(0, 0, x) = u_2(0, 0, x) = 0. \tag{3.1.30}$$

Aus der Gleichung (3.1.24) folgt, dass es eine Abbildung $A(\tau, y)$ mit

$$u_0(t, \tau, x) = A(\tau, x - t) \quad \text{und} \tag{3.1.31}$$

$$A(0, y) = U(y) \tag{3.1.32}$$

gibt. Wegen der Gleichung (3.1.25) gilt für A nun zusätzlich die Gleichung

$$\partial_\tau A(\tau, y) + b(x) \partial_x A(\tau, y) = 0 \tag{3.1.33}$$

welche durch

$$A(\tau, y) = U(\Phi(-\tau, y)) \tag{3.1.34}$$

gelöst wird, wobei $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ der Fluss der Differentialgleichung $\dot{x} = b(x)$ ist. Insgesamt folgt damit

$$u_0(t, \tau, x) = U(\Phi(-\tau, x - t)). \quad (3.1.35)$$

Die Gleichung (3.1.28) ist der Gleichung in Kapitel 2.1 sehr ähnlich! Eine besondere Beobachtung ist nun, dass die Stabilität offenbar von $b(x)$ abhängt. Für Umgebungen U , in denen die Gleichung

$$\partial_s v(s, x) = \frac{b(x)}{2} \partial_x^2 v_0(s, x) \quad (3.1.36)$$

lösbar ist, können wir hier ganz analog zum Vorgehen in [JY04] Stabilität zeigen. Unabhängig von Stabilität lässt sich (3.1.28) auch als inhomogene Transportgleichung lesen. Die Lösung hierfür ist durch

$$u_2(t, \tau, x) = \frac{tb(x)}{2} \partial_x^2 U(\Phi(-\tau, x - t)) \quad (3.1.37)$$

gegeben. Für kleine Zeiten $t > 0$ lässt sich der Ansatz also zu

$$v_i^n = U(\Phi(-ht_n, x_i - t_n)) + h^2 t_n \frac{b(x_i)}{2} \partial_x^2 U(\Phi(-ht_n, x_i - t_n)) + O(h^3). \quad (3.1.38)$$

schreiben

3.2. Hochfrequenter Ansatz

Für eine allgemeine ortsabhängige Geschwindigkeit a

Wir betrachten nun den Ansatz

$$v_k^n = e^{i\omega k} \Omega(n) \left(u_0(t_n, x_k) + h u_1(t_n, x_k) \right) + O(h^2).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} v_k^{n+1} - v_k^n &= e^{i\omega k} \left(\left(\Omega(n+1) - \Omega(n) \right) u_0(t_n, x_k) + h \left(\Omega(n+1) - \Omega(n) \right) u_1(t_n, x_k) \right. \\ &\quad \left. + h \Omega(n+1) \partial_t u_0(t_n, x_k) + h^2 \Omega(n+1) \left(\frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_k) + \partial_t u_1(t_n, x_k) \right) \right) + O(h^3) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

und

$$\begin{aligned}
a(x_k)(v_k^n - v_{k-1}^n) &= a(x_k)e^{i\omega k}\Omega(n)\left(\left(1 - e^{-i\omega}\right)\left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k)\right)\right. \\
&\quad \left.+ he^{-i\omega}\partial_x u_0(t_n, x_k) + h^2e^{-i\omega}\left(\partial_x u_1(t_n, x_k) - \frac{1}{2}\partial_x^2 u_0(t_n, x_k)\right)\right) + O(h^3).
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

In Summe folgt

$$\begin{aligned}
v_k^{n+1} - v_k^n + a(x_k)(v_k^n - v_{k-1}^n) &= e^{i\omega k}\left(\left(\Omega(n+1) - \Omega(n)\right)u_0(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)\left(1 - e^{-i\omega}\right)u_0(t_n, x_k)\right. \\
&\quad + h\left(\Omega(n+1) - \Omega(n)\right)u_1(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)\left(1 - e^{-i\omega}\right)u_1(t_n, x_k) \\
&\quad + h\left(\Omega(n+1)\partial_t u_0(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)e^{-i\omega}\partial_x u_0(t_n, x_k)\right) \\
&\quad + h^2\left(\Omega(n+1)\partial_t u_1(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)e^{-i\omega}\partial_x u_1(t_n, x_k)\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{2}\left(\Omega(n+1)\partial_t^2 u_0(t_n, x_k) - a(x_k)\Omega(n)e^{-i\omega}\partial_x^2 u_0(t_n, x_k)\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

und das heißt wir erhalten in führender Ordnung die Gleichung für alle $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\Omega(n+1) - \left(1 - a(x_k)\left(1 - e^{-i\omega}\right)\right)\Omega(n)\right)u_0(t_n, x_k) = 0. \tag{3.2.4}$$

Hieraus folgt, dass $\Omega(n+1) = \left(1 - a(x_k)\left(1 - e^{-i\omega}\right)\right)\Omega(n)$ gelten muss, allerdings ist Ω nicht von k abhängig und sobald es zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a(x) \neq a(y)$ gibt, folgt als einzige sinnvolle Lösung $\Omega(n) = 0$. Das Problem bei diesem Ansatz ist, dass wir nun zwar eine ortsabhängige Geschwindigkeit a betrachten, Ω jedoch nicht entsprechend angepasst haben.

Ortsabhängige Korrektur für Ω

Wir fordern daher nun zusätzlich, dass $\Omega(n, x)$ zusätzlich ortsabhängig und glatt in x ist. Der Ansatz lautet

$$v_k^n = e^{i\omega k}\Omega(n, x_k)\left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k)\right) + O(h^2).$$

Da die Gleichung (A.2.8) nur eine Differenz in der Zeit beschreibt, folgt für diesen

Ansatz ganz analog

$$\begin{aligned}
v_k^{n+1} - v_k^n &= e^{i\omega k} \left(\left(\Omega(n+1, x_k) - \Omega(n, x_k) \right) u_0(t_n, x_k) \right. \\
&\quad + h \left(\Omega(n+1, x_k) - \Omega(n, x_k) \right) u_1(t_n, x_k) + h \Omega(n+1, x_k) \partial_t u_0(t_n, x_k) \\
&\quad \left. + h^2 \Omega(n+1, x_k) \left(\frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_k) + \partial_t u_1(t_n, x_k) \right) \right) + O(h^3)
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Wegen der neuen Regularität von Ω in der Ortskoordinate x müssen wir Gleichung (A.2.9) neu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&a(x_k) (v_k^n - v_{k-1}^n) \\
&= a(x_k) e^{i\omega k} \left(\Omega(n, x_k) (1 - e^{-i\omega}) u_0(t_n, x_k) \right. \\
&\quad + h \Omega(n, x_k) (1 - e^{-i\omega}) u_1(t_n, x_k) + h e^{-i\omega} \left(\Omega(n, x_k) \partial_x u_0(t_n, x_k) + \partial_x \Omega(n, x_k) u_0(t_n, x_k) \right) \\
&\quad + h^2 e^{-i\omega} \left(\left(\Omega(n, x_k) \partial_x u_1(t_n, x_k) + \partial_x \Omega(n, x_k) u_1(t_n, x_k) \right) - \partial_x \Omega(n, x_k) \partial_x u(t_n, x_k) \right) \\
&\quad \left. - h^2 \frac{1}{2} e^{-i\omega} \left(\Omega(n, x_k) \partial_x^2 u_0(t_n, x_k) + \partial_x^2 \Omega(n, x_k) u_0(t_n, x_k) \right) \right) + O(h^3)
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Betrachten wir beide Ergebnisse in der Summe (3.0.2), so erhalten wir in $O(1)$ zunächst die von uns gewünschte Gleichung

$$\left(\Omega(n+1, x_k) - \Omega(n, x_k) \left(1 - a(x_k) (1 - e^{-i\omega}) \right) \right) u_0(t_n, x_k) = 0 \tag{3.2.7}$$

aus welcher wir

$$\Omega(n, x_k) = \left(1 - a(x_k) (1 - e^{-i\omega}) \right)^n, \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \Omega(n, x_k) &= n \left(1 - a(x_k) (1 - e^{-i\omega}) \right)^{n-1} a'(x_k) (1 - e^{-i\omega}) \\
&= n (1 - e^{-i\omega}) a'(x_k) \Omega(n-1, x_k)
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

und

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 \Omega(n, x_k) &= n (1 - e^{-i\omega}) a''(x_k) \Omega(n-1, x_k) \\
&\quad + n(n-1) (1 - e^{-i\omega})^2 (a'(x_k))^2 \Omega(n-2, x_k)
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

ableiten. Das führt zu dem Gleichungssystem

$$\Omega(n+1, x_k) \partial_t u_0(t_n, x_k) + e^{-i\omega} \Omega(n, x_k) \partial_x u_0(t_n, x_k) = -e^{-i\omega} \partial_x \Omega(n, x_k) u_0(t_n, x_k) \tag{3.2.11}$$

$$\tag{3.2.12}$$

und

$$\Omega(n+1, x_k) \partial_t u_1(t_n, x_k) + e^{-i\omega} \Omega(n, x_k) \partial_x u_1(t_n, x_k) \quad (3.2.13)$$

$$= -e^{-i\omega} \partial_x \Omega(n, x_k) u_1(t_n, x_k) + e^{-i\omega} \left(\partial_x \Omega(n, x_k) \partial_x u_0(t_n, x_k) \right) \quad (3.2.14)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\Omega(n, x_k) \partial_x^2 u_0(t_n, x_k) + \partial_x^2 \Omega(n, x_k) u_0(t_n, x_k) \right) \quad (3.2.15)$$

4. Ausblick

Eine mögliche Fortsetzung dieser Arbeit ist die Untersuchung von diskreten Verfahren nichtlinearer Differentialgleichungen wie die Burgersgleichung. Diese lautet

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + \partial_x (u^2(t, x)) &= 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, x) &= U(x).\end{aligned}\tag{4.0.1}$$

Für diese Gleichung betrachte man das Godunov Verfahren

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \lambda (g(v_i^n, v_{i+1}^n) - g(v_{i-1}^n, v_i^n))\tag{4.0.2}$$

mit

$$g(u, v) = \frac{(u^*)^2}{2} \text{ und } u^* = \begin{cases} u & \text{falls } u > v \text{ und } \frac{u+v}{2} > 0 \\ v & \text{falls } u > v \text{ und } \frac{u+v}{2} \leq 0 \\ u & \text{falls } u \leq v \text{ und } u > 0 \\ v & \text{falls } u \leq v \text{ und } v < 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\tag{4.0.3}$$

Ein wichtiges Prinzip dieser Arbeit manifestiert sich für den linearen Fall in der Superposition von oszillierenden Ansätzen. Die Sätze 2.4 und 2.5 ermöglichen uns Multiskalenansätze der Form

$$u(k, n, x, t) = \sum_{l=1}^n e^{i\omega_l k} \Omega(n, x, t) u_l(x, t)$$

besser zu verstehen, wenn wir die Lösungen der Ansätze für die einzelnen Summanden

$$u(k, n, x, t) = e^{i\omega_l k} \Omega(n, x, t) u_l(x, t) \quad l = 1, \dots, n\tag{4.0.4}$$

kennen. Im nichtlinearen Fall ist dies so nicht mehr direkt übertragbar. Startet man mit Ansatzfunktionen verschiedener Frequenzen, so können sich diese im nichtlinearen Fall überlagern und folglich beeinflussen. Hier muss also eine andere Herangehensweise gefunden werden.

Eine weitere weniger herausfordernde Erweiterung dieser Arbeit wäre die Formulierung dieser Techniken für höhere Raum-Dimensionen. Diese Verallgemeinerung ist jedoch weitaus unkomplizierter.

Literatur

- [1] Michael Junk und Zhaoxia Yang. „Asymptotic Analysis of Finite Difference Methods“. In: *Appl. Math. Comput.* 158.1 (Okt. 2004), S. 267–301. ISSN: 0096-3003. DOI: 10.1016/j.amc.2003.08.097. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2003.08.097>.

A. Anhang

A.1. Die lineare Transportgleichung

A.1.1. Analytische Lösungen

Im Laufe der asymptotischen Entwicklung von (2.0.3) stellt sich heraus, dass die Ansatzfunktionen häufig selbst Lösungen der Transportgleichung (2.0.1) oder Variationen von dieser sind. Deshalb ist es nützlich und sinnvoll, die richtige Lösung solcher Gleichungen auch analytisch zu untersuchen. Wir betrachten hier bekannte Gleichungen, deren Lösungen u sogar exakt zu bestimmen sind. Bei der Lösungskonstruktion nutzen wir die Methode der Charakteristiken. Dabei bestimmen wir Kurven $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ durch die Zeit-Raum Ebene, welche uns Gleichungen liefern, mit denen zunächst $u \circ \varphi$ bestimmt werden kann und schließen dann auf Lösungen von u . Im Fall unserer linearen partiellen Differentialgleichungen werden diese Kurven φ immer Geraden sein. Zunächst betrachten wir

Die homogene Transportgleichung

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = U(x). \quad (\text{A.1.1})$$

Wenn u eine Lösung von (A.1.1) ist, dann ist u konstant auf Geraden der Steigung 1. Betrachte nämlich die Zeit-Raum Kurve

$$\varphi_t(\tau) = (\tau, x + \tau - t). \quad (\text{A.1.2})$$

Dann gilt für alle $t, \tau \in \mathbb{R}_0^+ : D\varphi_t(\tau) = (1, 1)$ und folglich auch

$$Du(\varphi_t(\tau)) = \partial_t u(\tau, x + \tau - t) + \partial_x u(\tau, x + \tau - t) = 0. \quad (\text{A.1.3})$$

Insbesondere impliziert das wegen des Hauptsatzes für die Integral und Differentialrechnung für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$u(t, x) - u(0, x - t) = \int_0^t Du(\tau, x + \tau - t) d\tau = \int_0^t Du(\varphi_t(\tau)) d\tau = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

und wegen der Anfangsbedingung $u(0, x) = U(x - t)$ gilt also auch für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$u(t, x) = U(x - t). \quad (\text{A.1.5})$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit von Lösungen von (A.1.1). Andererseits ist jedes so definierte $u(t, x) = U(x - t)$ auch eine Lösung von (A.1.1), solange das für U , im womöglich schwachem Sinne, möglich ist. Denn es gilt

$$\partial_t U(x - t) + \partial_x U(x - t) = DU(x - t) \cdot (-1) + DU(x - t) \cdot 1 = 0. \quad (\text{A.1.6})$$

Die inhomogene Transportgleichung

Sei $F \in L^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$. Wir betrachten nun die lineare Transportgleichung mit nichtverschwindender rechten Seite

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = F(t, x), \quad u(0, x) = U(x). \quad (\text{A.1.7})$$

Dann gilt für Lösungen u von (A.1.7) ganz analog wie im homogenen Fall mit φ wie in (A.1.2)

$$Du(\varphi_t(\tau)) = F(\tau, x + \tau - t). \quad (\text{A.1.8})$$

Demnach folgt wieder mit dem Hauptsatz

$$u(t, x) - u(0, x - t) = \int_0^t F(\tau, x + \tau - t) d\tau. \quad (\text{A.1.9})$$

Wir werden oft den Spezialfall sehen, dass F selbst Lösung von (A.1.1) ist. Es gilt dann nämlich $F(\tau, x + \tau - t) = F(0, x - t)$ für alle $\tau, t \in \mathbb{R}_0^+$ und somit folgt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$u(t, x) - u(0, x - t) = \int_0^t F(0, x - t) d\tau = tF(0, x - t), \quad (\text{A.1.10})$$

also auch für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$u(t, x) = U(x - t) + tF(0, x - t). \quad (\text{A.1.11})$$

Eine homogene Exponentialgleichung

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = au(t, x), \quad u(0, x) = U(x). \quad (\text{A.1.12})$$

Sei wieder φ aus (A.1.2) gegeben. Dann gilt dieses mal

$$Du(\varphi_t(\tau)) = au(\varphi_t(\tau)), \quad \text{mit } u(\varphi_t(0)) = U(x-t). \quad (\text{A.1.13})$$

D. h. u erfüllt entlang der Kurve φ_t die Differentialgleichung (A.1.13). Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet bekanntlich $u(\varphi_t(\tau)) = U(x-t)e^{a\tau}$ und es folgt weiterhin

$$\begin{aligned} u(t, x) - u(0, x-t) &= \int_0^t Du(\tau, x + \tau - t) d\tau \\ &= \int_0^t Du(\varphi_t(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t au(\varphi_t(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t aU(x-t)e^{a\tau} d\tau \\ &= U(x-t)e^{at} - U(x-t). \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

Wegen $u(0, x-t) = U(x-t)$ impliziert das hiermit für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$u(t, x) = U(x-t)e^{at}. \quad (\text{A.1.15})$$

Eine inhomogene Exponentialgleichung

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $F \in L^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$. Betrachte nun das Anfangswertproblem

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = au(t, x) + F(t, x), \quad \text{für } u(0, x) = U(x). \quad (\text{A.1.16})$$

Diesesmal kriegen wir für $u \circ \varphi_t$ die Differentialgleichung

$$Du(\varphi_t(\tau)) = au(\varphi_t(\tau)) + F(\varphi_t(\tau)). \quad (\text{A.1.17})$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung, deren homogene Lösung wir schon in (A.1.13) bestimmt haben. Nun wenden wir die Methode der Variation der Konstanten an, um eine Lösung von (A.1.17) zu bestimmen. Wir machen den Ansatz

$$u(\varphi_t(\tau)) = A(\tau)e^{a\tau} \quad (\text{A.1.18})$$

und gesucht ist eine Koeffizientenabbildung A , so dass für alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$

$$D[A(\tau)e^{a\tau}] = au(\varphi_t(\tau)) + F(\varphi_t(\tau)) \quad \text{mit } A(0) = U(x-t) \quad (\text{A.1.19})$$

gilt. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} D[A(\tau)e^{a\tau}] &= A(\tau) \cdot ae^{a\tau} + e^{a\tau} DA(\tau) \\ &= au(\varphi_t(\tau)) + e^{a\tau} DA(\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.1.20})$$

und somit muss für alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$

$$e^{a\tau} DA(\tau) = F(\varphi_t(\tau)) \quad (\text{A.1.21})$$

bzw. nach dem Anwenden des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung

$$\begin{aligned} A(t) - A(0) &= \int_0^t e^{-a\tau} F(\varphi_t(\tau)) \, d\tau \\ &= \int_0^t e^{-a\tau} F(\tau, x + \tau - t) \, d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

gelten. Für den speziellen Fall, dass F selbst Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung (A.1.12) mit $F(0, x) = V(x)$ ist, folgt $F(t, x) = e^{at}V(x - t)$ und somit gilt

$$A(\tau) = A(0) + \int_0^\tau e^{-as} F(\varphi_t(s)) \, ds \quad (\text{A.1.23})$$

$$= U(x - t) + \int_0^\tau e^{-as} e^{as} V(x - t) \, ds \quad (\text{A.1.24})$$

$$= U(x - t) + \tau V(x - t) \quad \text{für alle } \tau, t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (\text{A.1.25})$$

Insgesamt erhält man ganz analog wie bisher in diesem Spezialfall die folgende Lösung für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$:

$$u(t, x) = A(t)e^{at} = (U(x - t) + tV(x - t))e^{at}. \quad (\text{A.1.26})$$

A.1.2. Rechnungen für den regulären Ansatz

Ohne langsame Zeitskala

Sei der Ansatz aus (2.1.1)

$$v_i^n = u_0(t_n, x_i) + hu_1(t_n, x_i) + o(h) \quad (\text{A.1.27})$$

für glatte Abbildungen $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ gegeben. Wir rechnen nun die beiden Summanden aus (2.0.3) aus und benutzen dabei, dass $t_n = nh\lambda$ und $x_i = ih$ gilt. Das impliziert nämlich

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= \left(u_0(t_{n+1}, x_i) + hu_1(t_{n+1}, x_i) \right) - \left(u_0(t_n, x_i) + hu_1(t_n, x_i) \right) \\
&= \left(u_0(t_{n+1}, x_i) - u_0(t_n, x_i) \right) + h \cdot \left(u_1(t_{n+1}, x_i) - u_1(t_n, x_i) \right) \\
&= \left(u_0(t_n + h\lambda, x_i) - u_0(t_n, x_i) \right) + h \cdot \left(u_1(t_n + h\lambda, x_i) - u_1(t_n, x_i) \right) \\
&= \left(h \cdot \lambda \partial_t u_0(t_n, x_i) + \frac{(h\lambda)^2}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + o(h^2) \right) \\
&\quad + h \cdot \left(h\lambda \partial_t u_1(t_n, x_i) + o(h) \right) \\
&= h \cdot \lambda \partial_t u_0(t_n, x_i) + h^2 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + \lambda \partial_t u_1(t_n, x_i) \right) + o(h^2)
\end{aligned} \tag{A.1.28}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) &= \lambda \left[\left(u_0(t_n, x_i) + hu_1(t_n, x_i) \right) - \left(u_0(t_n, x_{i-1}) + hu_1(t_n, x_{i-1}) \right) \right] \\
&= \lambda \left[\left(u_0(t_n, x_i) - u_0(t_n, x_{i-1}) \right) + h \cdot \left(u_1(t_n, x_i) - hu_1(t_n, x_{i-1}) \right) \right] \\
&= \lambda \left[\left(u_0(t_n, x_i) - u_0(t_n, x_i - h) \right) + h \cdot \left(u_1(t_n, x_i) - hu_1(t_n, x_i - h) \right) \right] \\
&= \lambda \left[h \cdot \partial_x u_0(t_n, x_i) - \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_i) + o(h^2) \right. \\
&\quad \left. + h \cdot \left(h \cdot \partial_x u_1(t_n, x_i) + o(h) \right) \right] \\
&= h \cdot \lambda \partial_x u_0(t_n, x_i) + h^2 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_i) + \lambda \partial_x u_1(t_n, x_i) \right) + o(h^2).
\end{aligned} \tag{A.1.29}$$

Sortiert man diese Ergebnisse nun nach den Ordnungen von h so erhält man die beiden Gleichungen für alle Gitterpunkte $(t_n, x_i) \in G_h$

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \left(\partial_t u_0(t_n, x_i) + \partial_x u_0(t_n, x_i) \right) &= 0 \\
\lambda \cdot \left(\partial_t u_1(t_n, x_i) + \partial_x u_1(t_n, x_i) \right) &= \lambda \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_i) - \frac{\lambda}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) \right)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten nun für alle Gitterweiten $h > 0$. Teilt man die Gleichungen durch $\lambda > 0$ und verwendet die stetige Differenzierbarkeit der Ansatzfunktionen, so

erhält man hieraus für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$\partial_t u_0(t, x) + \partial_x u_0(t, x) = 0 \quad (\text{A.1.30})$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(t, x) + \partial_x u_1(t, x) &= \frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(t, x) - \frac{\lambda}{2} \partial_t^2 u_0(t, x) \\ &= \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t, x) \end{aligned} \quad (\text{A.1.31})$$

wobei wir in (A.1.31) schon die Gleichung (A.1.30) für u_0 benutzt haben, denn es gilt

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_0(t, x) &= \partial_t \left(\partial_t u_0(t, x) \right) \\ &= \partial_t \left(-\partial_x u_0(t, x) \right) \\ &= -\partial_x \left(\partial_t u_0(t, x) \right) \\ &= -\partial_x \left(-\partial_x u_0(t, x) \right) \\ &= \partial_x^2 u_0(t, x). \end{aligned}$$

Mit langsamer Zeitskala

Wir betrachten nun den Ansatz (2.1.6)

$$v_i^n = u_0(t, \tau, x) + h u_1(t, \tau, x) + o(h) \quad (\text{A.1.32})$$

mit $\tau = ht$. Die beiden Summanden aus dem Upwind-Verfahren (2.0.3) ergeben nun

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} - v_i^n &= \left(u_0(t_{n+1}, \tau_{n+1}, x_i) + h u_1(t_{n+1}, \tau_{n+1}, x_i) \right) - \left(u_0(t_n, \tau_n, x_i) + h u_1(t_n, \tau_n, x_i) \right) \\ &= \left(u_0(t_{n+1}, \tau_{n+1}, x_i) - u_0(t_n, \tau_n, x_i) \right) + h \cdot \left(u_1(t_{n+1}, \tau_{n+1}, x_i) - u_1(t_n, \tau_n, x_i) \right) \\ &= \left(u_0(t_n + h\lambda, \tau_n + h^2\lambda, x_i) - u_0(t_n, \tau_n, x_i) \right) \\ &\quad + h \cdot \left(u_1(t_n + h\lambda, \tau_n + h^2\lambda, x_i) - u_1(t_n, \tau_n, x_i) \right) \\ &= \left(h \cdot \lambda \partial_t u_0(t_n, \tau_n, x_i) + \frac{(h\lambda)^2}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, \tau_n, x_i) + h^2 \lambda \partial_\tau u_0(t_n, \tau_n, x_i) + o(h^2) \right) \\ &\quad + h \cdot \left(h \lambda \partial_t u_1(t_n, \tau_n, x_i) + o(h) \right) \\ &= h \cdot \lambda \partial_t u_0(t_n, \tau_n, x_i) \\ &\quad + h^2 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, \tau_n, x_i) + \lambda \partial_\tau u_0(t_n, \tau_n, x_i) + \lambda \partial_t u_1(t_n, \tau_n, x_i) \right) + o(h^2) \end{aligned} \quad (\text{A.1.33})$$

und, weil τ_n nicht von i abhängt, folgt ganz analog wie in (A.1.29) für die zweite Differenz

$$\begin{aligned}\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) &= \lambda \left[\left(u_0(t_n, \tau_n, x_i) + hu_1(t_n, \tau_n, x_i) \right) - \left(u_0(t_n, \tau_n, x_{i-1}) + hu_1(t_n, \tau_n, x_{i-1}) \right) \right] \\ &= h \cdot \lambda \partial_x u_0(t_n, \tau_n, x_i) + h^2 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, \tau_n, x_i) + \lambda \partial_x u_1(t_n, \tau_n, x_i) \right) + o(h^2).\end{aligned}\tag{A.1.34}$$

Addiert man beide Summanden (A.1.33) und (A.1.34), teilt durch λ , sortiert nach den Ordnungen von h und benutzt wieder die stetige Differenzierbarkeit der Ansatzfunktionen u_0 und u_1 , so erhält man für alle (t, τ, x) das Gleichungssystem

$$\partial_t u_0(t, \tau, x) + \partial_x u_0(t, \tau, x) = 0 \tag{A.1.35}$$

$$\partial_t u_1(t, \tau, x) + \partial_x u_1(t, \tau, x) = \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t, \tau, x) - \partial_\tau u_0(t, \tau, x) \tag{A.1.36}$$

A.1.3. Rechnungen für diskrete Ansätze

In diesem Kapitel betrachten wir den allgemeinen Ansatz (2.3.1) mit der diskreten Skala (n, i)

$$v_i^n = u_0(n, i, t_n, x_i) + hu_1(n, i, t_n, x_i) + h^2 u_2(n, i, t_n, x_i) + o(h^2),$$

wobei $u_k(n, i, \cdot, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ und $k = 0, 1, 2$ gilt. Wir rechnen nun die einzelnen Summanden von (2.0.2) aus und benutzen dabei ganz wesentlich folgende Gleichungen für alle $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}u_k(n+1, i, t_{n+1}, x_i) \\ -u_k(n, i, t_n, x_i) &= u_k(n+1, i, t_n + \lambda h, x_i) - u_k(n, i, t_n, x_i) \\ &= u_k(n+1, i, t_n, x_i) - u_k(n, i, t_n, x_i) + \lambda h \partial_t u_k(n+1, i, t_n, x_i) \\ &\quad + \frac{(\lambda h)^2}{2} \partial_t^2 u_k(n+1, i, t_n, x_i) + \frac{(\lambda h)^3}{6} \partial_t^3 u_k(n+1, i, t_n, x_i)\end{aligned}\tag{A.1.37}$$

und

$$\begin{aligned}u_k(n, i, t_n, x_i) \\ -u_k(n, i-1, t_n, x_{i-1}) &= u_k(n, i, t_n, x_i) - u_k(n, i-1, t_n, x_i - h) \\ &= u_k(n, i, t_n, x_i) - u_k(n, i-1, t_n, x_i) + h \partial_x u_k(n, i-1, t_n, x_i) \\ &\quad - \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u_k(n, i-1, t_n, x_i) + \frac{h^3}{6} \partial_x^3 u_k(n, i-1, t_n, x_i) + o(h^3).\end{aligned}\tag{A.1.38}$$

Somit folgt mit (A.1.37) zunächst für die Differenz in n

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= \sum_{k=0}^2 h^k \left(u_k(n+1, i, t_{n+1}, x_i) - u_k(n, i, t_n, x_i) \right) \\
&= \sum_{k=0}^2 h^k \left(u_k(n+1, i, t_n, x_i) - u_k(n, i, t_n, x_i) + \lambda h \partial_t u_k(n+1, i, t_n, x_i) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\lambda h)^2}{2} \partial_t^2 u_k(n+1, i, t_n, x_i) + \frac{(\lambda h)^3}{6} \partial_t^3 u_k(n+1, i, t_n, x_i) + o(h^3) \right).
\end{aligned}$$

und sortiert man das nach den Ordnungen von h , so erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= u_0(n+1, i, t_n, x_i) - u_0(n, i, t_n, x_i) \\
&\quad + h \cdot \left(\lambda \partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + u_1(n+1, i, t_n, x_i) - u_1(n, i, t_n, x_i) \right) \\
&\quad + h^2 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2} \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \lambda \partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + u_2(n+1, i, t_n, x_i) - u_2(n, i, t_n, x_i) \right) \\
&\quad + h^3 \cdot \left(\frac{\lambda^3}{6} \partial_t^3 u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \frac{\lambda^2}{2} \partial_t^2 u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \lambda \partial_t u_2(n+1, i, t_n, x_i) \right) \\
&\quad + o(h^3).
\end{aligned} \tag{A.1.39}$$

Mit (A.1.38) folgt ganz analog für die Differenz in i

$$\begin{aligned}
\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) &= \lambda \cdot \left[\sum_{k=0}^2 h^k \left(u_k(n, i, t_n, x_i) - u_k(n, i-1, t_n, x_{i-1}) \right) \right] \\
&= \lambda \cdot \left[\sum_{k=0}^2 h^k \left(u_k(n, i, t_n, x_i) - u_k(n, i-1, t_n, x_i) + h \partial_x u_k(n, i-1, t_n, x_i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u_k(n, i-1, t_n, x_i) + \frac{h^3}{6} \partial_x^3 u_k(n, i-1, t_n, x_i) + o(h^3) \right) \right] \\
&= \lambda \cdot \left(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i) \right) \\
&\quad + h \cdot \left(\lambda \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) + \lambda \left(u_1(n, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i) \right) \right) \\
&\quad + h^2 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) + \lambda \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i) + \lambda \left(u_2(n, i, t_n, x_i) - u_2(n, i-1, t_n, x_i) \right) \right) \\
&\quad + h^3 \cdot \left(\frac{h^3}{6} \partial_x^3 u_k(n, i-1, t_n, x_i) - \frac{\lambda}{2} \partial_x^2 u_1(n, i-1, t_n, x_i) + \lambda \partial_x u_2(n, i-1, t_n, x_i) \right) \\
&\quad + o(h^3).
\end{aligned} \tag{A.1.40}$$

A.1.4. Rechnung des Ansatzes für kleine Störungen der CFL Zahl

Es sei der Ansatz

$$\begin{aligned} v_i^n &= w_0(t_n, x_i) + hw_1(t_n, x_i) + h^2 w_2(t_n, x_i) \\ &\quad + (-1)^{i+n} \left(z_0(t_n, 2ht_n, x_i) + hz_1(t_n, 2ht_n, x_i) + h^2 z_2(t_n, 2ht_n, x_i) \right) + O(h^3) \end{aligned} \quad (\text{A.1.41})$$

$$= w_0 + hw_1 + h^2 w_2 + (-1)^{i+n} (z_0 + hz_1 + h^2 z_2) + O(h^3). \quad (\text{A.1.42})$$

für glatte Abbildungen $w_k(t, x)$ und $z_k(t, \tau, x)$ gegeben. Für alle $k = 0, 1, 2$ gilt

$$\begin{aligned} w_k(t_{n+1}, x_i) &= w_k(t_n + h(1+h), x_i) \\ &= \left(1 + h(1+h)\partial_t + \frac{h^2(1+h)^2}{2}\partial_t^2 + \frac{h^3(1+h)^3}{6}\partial_t^3 \right) w_k + O(h^4) \\ &= \left(1 + h(1+h)\partial_t + \frac{h^2(1+2h)}{2}\partial_t^2 + \frac{h^3}{6}\partial_t^3 \right) w_k + O(h^4) \\ &= \left(1 + h\partial_t + h^2 \left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_t^2 \right) + h^3 \left(\partial_t^2 + \frac{1}{6}\partial_t^3 \right) \right) w_k + O(h^4) \end{aligned} \quad (\text{A.1.43})$$

$$\begin{aligned} z_k(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) &= z_k(t_n + h(1+h), 2ht_n + 2h^2(1+h), x_i) \\ &= \left(1 + h(1+h)\partial_t + 2h^2(1+h)\partial_\tau + \frac{h^2(1+h)^2}{2}\partial_t^2 + \frac{h^3(1+h)^3}{6}\partial_t^3 \right) z_k + O(h^4) \\ &= \left(1 + h(1+h)\partial_t + 2h^2(1+h)\partial_\tau + \frac{h^2(1+2h)}{2}\partial_t^2 + \frac{h^3}{6}\partial_t^3 \right) z_k + O(h^4) \\ &= \left(1 + h\partial_t + h^2 \left(\partial_t + 2\partial_\tau + \frac{1}{2}\partial_t^2 \right) + h^3 \left(2\partial_\tau + \partial_t^2 + \frac{1}{6}\partial_t^3 \right) \right) z_k + O(h^4) \end{aligned} \quad (\text{A.1.44})$$

$$\begin{aligned} (1+h)w_k(t_n, x_{i-1}) &= (1+h)w_k(t_n, x_i - h) \\ &= (1+h) \left(1 - h\partial_x + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 - \frac{h^3}{6}\partial_x^3 \right) w_k + O(h^4) \\ &= \left(1 + h(1-\partial_x) + h^2 \left(-\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 \right) + h^3 \left(\frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{6}\partial_x^3 \right) \right) w_k + O(h^4) \end{aligned} \quad (\text{A.1.45})$$

$$\begin{aligned} (1+h)z_k(t_n, 2ht_n, x_{i-1}) &= (1+h)z_k(t_n, 2ht_n, x_i - h) \\ &= (1+h) \left(1 - h\partial_x + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 - \frac{h^3}{6}\partial_x^3 \right) z_k + O(h^4) \\ &= \left(1 + h(1-\partial_x) + h^2 \left(-\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 \right) + h^3 \left(\frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{6}\partial_x^3 \right) \right) z_k + O(h^4). \end{aligned} \quad (\text{A.1.46})$$

Es folgt einerseits die Rechnung

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= w_0(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) - w_0(t_n, 2ht_n, x_i) \\
&\quad + h(w_1(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) - w_1(t_n, 2ht_n, x_i)) \\
&\quad + h^2(w_2(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) - w_2(t_n, 2ht_n, x_i)) \\
&\quad + (-1)^{i+n+1}z_0(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) - (-1)^{n+i}z_0(t_n, 2ht_n, x_i) \\
&\quad + h((-1)^{i+n+1}z_1(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) - (-1)^{n+i}z_1(t_n, 2ht_n, x_i)) \\
&\quad + h^2((-1)^{i+n+1}z_2(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) - (-1)^{n+i}z_2(t_n, 2ht_n, x_i))
\end{aligned} \tag{A.1.47}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(h\partial_t + h^2\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_t^2\right) + h^3\left(\partial_t^2 + \frac{1}{6}\partial_t^3\right)\right) w_0 \\
&\quad + h\left(h\partial_t + h^2\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_t^2\right)\right) w_1 \\
&\quad + h^3\partial_t w_2 + O(h^4)
\end{aligned} \tag{A.1.48}$$

$$\begin{aligned}
&\quad - (-1)^{i+n}(z_0(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) + z_0(t_n, 2ht_n, x_i)) \\
&\quad - (-1)^{i+n}h(z_1(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) + z_1(t_n, 2ht_n, x_i)) \\
&\quad - (-1)^{i+n}h^2(z_2(t_{n+1}, 2ht_{n+1}, x_i) + z_2(t_n, 2ht_n, x_i)) \\
&= \left(h\partial_t + h^2\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_t^2\right) + h^3\left(\partial_t^2 + \frac{1}{6}\partial_t^3\right)\right) w_0 \\
&\quad + h\left(h\partial_t + h^2\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_t^2\right)\right) w_1 \\
&\quad + h^3\partial_t w_2 \\
&\quad - (-1)^{i+n}\left(2 + h\partial_t + h^2\left(\partial_t + 2\partial_\tau + \frac{1}{2}\partial_t^2\right) + h^3\left(2\partial_\tau + \partial_t^2 + \frac{1}{6}\partial_t^3\right)\right) z_0 \\
&\quad - (-1)^{i+n}h\left(2 + h\partial_t + h^2\left(\partial_t + 2\partial_\tau + \frac{1}{2}\partial_t^2\right)\right) z_1 \\
&\quad - (-1)^{i+n}h^2(2 + h\partial_t) z_2 + O(h^4)
\end{aligned} \tag{A.1.49}$$

$$\begin{aligned}
&= h\partial_t w_0 \\
&\quad + h^2\left(\partial_t w_1 + \partial_t w_0 + \frac{1}{2}\partial_t^2 w_0\right) \\
&\quad + h^3\left(\partial_t w_2 + \partial_t w_1 + \frac{1}{2}\partial_t^2 w_1 + \partial_t^2 w_0 + \frac{1}{6}\partial_t^3 w_0\right) \\
&\quad - (-1)^{i+n}(2z_0 + h2z_1 + h^22z_2) \\
&\quad - (-1)^{i+n}h\partial_t z_0 \\
&\quad - (-1)^{i+n}h^2\left(\partial_t z_1 + \partial_t z_0 + 2\partial_\tau z_0 + \frac{1}{2}\partial_t^2 z_0\right) \\
&\quad - (-1)^{i+n}h^3\left(\partial_t z_2 + \partial_t z_1 + 2\partial_\tau z_1 + \frac{1}{2}\partial_t^2 z_1\right. \\
&\quad \quad \left.+ 2\partial_\tau z_0 + \partial_t^2 z_0 + \frac{1}{6}\partial_t^3 z_0\right) + O(h^4)
\end{aligned} \tag{A.1.50}$$

und andererseits auch die Rechnung

$$\begin{aligned}
(1+h)(v_i^n - v_{i-1}^n) &= (1+h)(w_0(t_n, 2ht_n, x_i) - w_0(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + h(1+h)(w_1(t_n, 2ht_n, x_i) - w_1(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + h^2(1+h)(w_2(t_n, 2ht_n, x_i) - w_2(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + (1+h)\left((-1)^{i+n}z_0(t_n, 2ht_n, x_i) - (-1)^{i+n-1}z_0(t_n, 2ht_n, x_{i-1})\right) \\
&\quad + h(1+h)\left((-1)^{i+n}z_1(t_n, 2ht_n, x_i) - (-1)^{i+n-1}z_1(t_n, 2ht_n, x_{i-1})\right) \\
&\quad + h^2(1+h)\left((-1)^{i+n}z_2(t_n, 2ht_n, x_i) - (-1)^{i+n-1}z_2(t_n, 2ht_n, x_{i-1})\right)
\end{aligned} \tag{A.1.51}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+h)(w_0(t_n, 2ht_n, x_i) - w_0(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + h(1+h)(w_1(t_n, 2ht_n, x_i) - w_1(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + h^2(1+h)(w_2(t_n, 2ht_n, x_i) - w_2(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + (-1)^{i+n}(1+h)(z_0(t_n, 2ht_n, x_i) + z_0(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + (-1)^{i+n}h(1+h)(z_1(t_n, 2ht_n, x_i) + z_1(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&\quad + (-1)^{i+n}h^2(1+h)(z_2(t_n, 2ht_n, x_i) + z_2(t_n, 2ht_n, x_{i-1})) \\
&= \left(h\partial_x + h^2\left(\partial_x - \frac{1}{2}\partial_x^2\right) + h^3\left(-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{6}\partial_x^3\right)\right)w_0 \\
&\quad + h\left(h\partial_x + h^2\left(\partial_x - \frac{1}{2}\partial_x^2\right)\right)w_1 \\
&\quad + h^3\partial_x w_2 \\
&\quad + (-1)^{i+n}\left(2 + h(2 - \partial_x) + h^2\left(-\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2\right) + h^3\left(\frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{6}\partial_x^3\right)\right)z_0 \\
&\quad + (-1)^{i+n}h\left(2 + h(2 - \partial_x) + h^2\left(-\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2\right)\right)z_1 \\
&\quad + (-1)^{i+n}h^2(2 + h(2 - \partial_x))z_2 + O(h^4)
\end{aligned} \tag{A.1.52}$$

$$\begin{aligned}
&= h\partial_x w_0 \\
&\quad + h^2\left(\partial_x w_1 + \partial_x w_0 - \frac{1}{2}\partial_x^2 w_0\right) \\
&\quad + h^3\left(\partial_x w_2 + \partial_x w_1 - \frac{1}{2}\partial_x^2 w_1 - \frac{1}{2}\partial_x^2 w_0 + \frac{1}{6}\partial_x^3 w_0\right) \\
&\quad + (-1)^{i+n}(2z_0 + h2z_1 + h^22z_2) \\
&\quad + (-1)^{i+n}h(2z_0 - \partial_x z_0) \\
&\quad + (-1)^{i+n}h^2\left(2z_1 - \partial_x z_1 - \partial_x z_0 + \frac{1}{2}\partial_x^2 z_0\right) \\
&\quad + (-1)^{i+n}h^3\left(2z_2 - \partial_x z_2 - \partial_x z_1 + \frac{1}{2}\partial_x^2 z_1 + \frac{1}{2}\partial_x^2 z_0 - \frac{1}{6}\partial_x^3 z_0\right) + O(h^4).
\end{aligned} \tag{A.1.53}$$

Wir summieren (A.1.50) und (A.1.54) und erhalten

$$\begin{aligned}
& v_i^{n+1} - v_i^n + (1+h)(v_i^n - v_{i-1}^n) \\
&= h(\partial_t w_0 + \partial_x w_0) \\
&\quad + h^2 \left(\partial_t w_1 + \partial_t w_0 + \frac{1}{2} \partial_t^2 w_0 + \partial_x w_1 + \partial_x w_0 - \frac{1}{2} \partial_x^2 w_0 \right) \\
&\quad + h^3 \left(\partial_t w_2 + \partial_t w_1 + \frac{1}{2} \partial_t^2 w_1 + \partial_t^2 w_0 + \frac{1}{6} \partial_t^3 w_0 \right. \\
&\quad \quad \left. + \partial_x w_2 + \partial_x w_1 - \frac{1}{2} \partial_x^2 w_1 - \frac{1}{2} \partial_x^2 w_0 + \frac{1}{6} \partial_x^3 w_0 \right) \\
&\quad + (-1)^{i+n} h (-\partial_t z_0 - \partial_x z_0 + 2z_0) \\
&\quad + (-1)^{i+n} h^2 \left(-\partial_t z_1 - \partial_x z_1 + 2z_1 - \partial_x z_0 + \frac{1}{2} \partial_x^2 z_0 - \partial_t z_0 - 2\partial_\tau z_0 - \frac{1}{2} \partial_t^2 z_0 \right) \\
&\quad + (-1)^{i+n} h^3 \left(-\partial_t z_2 - \partial_t z_1 - 2\partial_\tau z_1 - \frac{1}{2} \partial_t^2 z_1 - 2\partial_\tau z_0 - \partial_t^2 z_0 - \frac{1}{6} \partial_t^3 z_0 \right. \\
&\quad \quad \left. + 2z_2 - \partial_x z_2 - \partial_x z_1 + \frac{1}{2} \partial_x^2 z_1 + \frac{1}{2} \partial_x^2 z_0 - \frac{1}{6} \partial_x^3 z_0 \right) + O(h^4).
\end{aligned} \tag{A.1.55}$$

Für jede Ordnung in h erhalten wir mit Hilfe des Satzes 2.5 je für den glatten Anteil w und auch oszillierenden Anteil z eine Gleichung. Für w gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}
& \partial_t w_0 + \partial_x w_0 = 0 \\
& \partial_t w_1 + \partial_x w_1 + \underbrace{\partial_t w_0 + \partial_x w_0}_{=0} = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_x^2 w_0 - \partial_t^2 w_0)}_{=0} \\
& \partial_t w_2 + \partial_x w_2 + \underbrace{\partial_t w_1 + \partial_x w_1}_{=0} = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_x^2 w_0 - 2\partial_t^2 w_0)}_{=-\partial_x^2 w_0} \\
& \quad + \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_x^2 w_1 - \partial_t^2 w_1)}_{=0} - \frac{1}{6} \underbrace{(\partial_t^3 w_0 + \partial_x^3 w_0)}_{=0}
\end{aligned} \tag{A.1.56}$$

also

$$\partial_t w_0 + \partial_x w_0 = 0 \tag{A.1.57}$$

$$\partial_t w_1 + \partial_x w_1 = 0 \tag{A.1.58}$$

$$\partial_t w_2 + \partial_x w_2 = -\frac{1}{2} \partial_x^2 w_0 \tag{A.1.59}$$

$$\begin{aligned}
& w_0(0, 0, x) = U(x), \\
& w_1(0, 0, x) = 0, \\
& w_2(0, 0, x) = 0.
\end{aligned} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{A.1.60}$$

Für die Abbildungen z_k , $k = 0, 1, 2$ folgt hingegen

$$\begin{aligned}
\partial_t z_0 + \partial_x z_0 &= 2z_0 \\
\partial_t z_1 + \partial_x z_1 &= 2z_1 - \underbrace{(\partial_t z_0 + \partial_x z_0)}_{=0} + \frac{1}{2} (\partial_x^2 z_0 - \partial_t^2 z_0) - 2\partial_\tau z_0 \\
\partial_t z_2 + \partial_x z_2 &= 2z_2 - \frac{1}{6} (\partial_x^3 z_0 + \partial_t^3 z_0) + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_x^2 z_0 - \partial_t^2 z_0)}_{=\partial_t z_0 + \partial_x z_0 = 2z_0} - 2\partial_\tau z_0 - \frac{1}{2} \partial_t^2 z_0 \\
&\quad - \underbrace{(\partial_t z_1 + \partial_x z_1)}_{=0} + \frac{1}{2} (\partial_x^2 z_1 - \partial_t^2 z_1) - 2\partial_\tau z_1 \\
z_0(0, 0, x) &= U(x), \\
z_1(0, 0, x) &= 0, \\
z_2(0, 0, x) &= 0.
\end{aligned} \tag{A.1.61}$$

A.2. Die lineare Transportgleichung mit variabler Geschwindigkeit

A.2.1. Analytische Lösung

Für die Asymptotik ist es sinnvoll, die echte Lösung von (3.0.1) qualitativ zu kennen. Die Lösung lässt sich analytisch mithilfe der Methode der Charakteristiken bestimmen. Aus (3.0.1) folgt nämlich, dass jede Lösung u dieser Gleichung konstant auf der Kurve $(\tau, x(\tau))$ ist, für die

$$\dot{x}(\tau) = a(x(\tau)) \tag{A.2.1}$$

gilt. Sei nun $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Fluss der Differentialgleichung (A.2.1). Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ per definitionem, dass $\phi(\cdot, x_0)$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(\tau) = a(x(\tau)), \quad x(0) = x_0 \tag{A.2.2}$$

löst. Insbesondere gilt $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ und $\phi_0 = \text{Id}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $u(t, x) = U(x_0)$ gilt. Wegen $x_0 = \phi(0, x_0)$ und $x = \phi(t, x_0)$ folgt damit

$$x_0 = \phi(0, x_0) = \phi(t - t, x_0) = \phi(-t, \phi(t, x_0)) = \phi(-t, x)$$

und somit auch

$$u(t, x) = U(x_0) = U(\phi(-t, x)). \tag{A.2.3}$$

Beispiel 1. Für $a(x) = x$ folgt wegen des Anfangswertproblems $\dot{x}(\tau) = x, x(0) = x_0$, dass $u(t, x)$ konstant auf den Kurven der Form $x(\tau) = x_0 e^\tau$ ist. Der Fluss ϕ ist uns dann durch $\phi(t, x) = x e^t$ gegeben. Wegen (A.2.3) folgt dann

$$u(x, t) = U(\phi(-t, x)) = U(x e^{-t}) \quad (\text{A.2.4})$$

als Lösung für (3.0.1).

Beispiel 2. Setze

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 + \varepsilon(1 - |x|) & |x| \leq 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.2.5})$$

Dann ist a absolut stetig und es gilt $a' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Folglich ist a Lipschitz-stetig und (A.2.1) besitzt einen eindeutigen Fluss, welcher sich stückweise zusammensetzt.

Inhomogener Spezialfall

Wenn wir bereits eine Lösung v von (3.0.1) haben, so können wir die folgende partielle Differentialgleichung

$$u_t(t, x) + a(x)u_x(t, x) = v(t, x), \quad u(0, x) = 0 \quad (\text{A.2.6})$$

lösen, indem wir einfach $u(t, x) = tv(t, x)$ setzen. Denn es gilt dann

$$u_t(t, x) = v(t, x) + tv_t(t, x) = v(t, x) - ta(x)v_x(t, x) \quad (\text{A.2.7})$$

und wegen $ta(x)v_x(t, x) = a(x)(tv(t, x))_x = a(x)u_x(t, x)$ folgt damit (A.2.6).

Weiterhin gilt, dass für jede Lösung v von (3.0.1) die Funktion $u(t, x) = tv(t, x)$ ebenfalls eine Lösung von (3.0.1) ist. Und damit auch $\partial_t^n v$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Denn es gilt $u_t = \partial_t(tv_t) = \partial_t(-av_x) = -a\partial_tv_x = -a\partial_xv_t = -au_x$.

A.2.2. Rechnungen zum Exponentialansatz

Wir betrachten nun den Ansatz

$$v_k^n = e^{i\omega k} \Omega(n) \left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) + O(h^2).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
v_k^{n+1} - v_k^n &= e^{i\omega k} \Omega(n+1) \left(u_0(t_{n+1}, x_k) + hu_1(t_{n+1}, x_k) \right) \\
&\quad - e^{i\omega k} \Omega(n) \left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) \\
&= e^{i\omega k} \Omega(n+1) \left(u_0(t_n + h, x_k) + hu_1(t_n + h, x_k) \right) \\
&\quad - e^{i\omega k} \Omega(n) \left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) \\
&= e^{i\omega k} \left(\Omega(n+1) \left(u_0(t_n, x_k) + h\partial_t u_0(t_n, x_k) + h^2 \frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + hu_1(t_n, x_k) + h^2 \partial_t u_1(t_n, x_k) \right) - \Omega(n) \left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) \right) \\
&= e^{i\omega k} \left(\left(\Omega(n+1) - \Omega(n) \right) u_0(t_n, x_k) + h \left(\Omega(n+1) - \Omega(n) \right) u_1(t_n, x_k) \right. \\
&\quad \left. + h\Omega(n+1) \partial_t u_0(t_n, x_k) + h^2 \Omega(n+1) \left(\frac{1}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \partial_t u_1(t_n, x_k) \right) \right) + O(h^3)
\end{aligned} \tag{A.2.8}$$

und

$$\begin{aligned}
a(x_k) \left(v_k^n - v_{k-1}^n \right) &= a(x_k) \left(e^{i\omega k} \Omega(n) \left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{i\omega(k-1)} \Omega(n) \left(u_0(t_n, x_{k-1}) + hu_1(t_n, x_{k-1}) \right) \right) \\
&= a(x_k) e^{i\omega k} \Omega(n) \left(\left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-i\omega} \left(u_0(t_n, x_k - h) + hu_1(t_n, x_k - h) \right) \right) \\
&= a(x_k) e^{i\omega k} \Omega(n) \left(\left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-i\omega} \left(u_0(t_n, x_k) - h\partial_x u_0(t_n, x_k) + h^2 \frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + hu_1(t_n, x_k) - h^2 \partial_x u_1(t_n, x_k) \right) \right) + O(h^3) \\
&= a(x_k) e^{i\omega k} \Omega(n) \left(\left(1 - e^{-i\omega} \right) \left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k) \right) \right. \\
&\quad \left. + h e^{-i\omega} \partial_x u_0(t_n, x_k) + h^2 e^{-i\omega} \left(\partial_x u_1(t_n, x_k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_k) \right) \right) + O(h^3).
\end{aligned} \tag{A.2.9}$$

In Summe folgt

$$\begin{aligned}
& v_k^{n+1} - v_k^n + a(x_k)(v_k^n - v_{k-1}^n) \\
&= e^{i\omega k} \left((\Omega(n+1) - \Omega(n))u_0(t_n, x_k) + h(\Omega(n+1) - \Omega(n))u_1(t_n, x_k) \right. \\
&\quad \left. + h\Omega(n+1)\partial_t u_0(t_n, x_k) + h^2\Omega(n+1)\left(\frac{1}{2}\partial_t^2 u_0(t_n, x_k) + \partial_t u_1(t_n, x_k)\right) \right) \quad (A.2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ a(x_k)e^{i\omega k}\Omega(n)\left((1 - e^{-i\omega})\left(u_0(t_n, x_k) + hu_1(t_n, x_k)\right)\right. \\
&\quad \left.+ he^{-i\omega}\partial_x u_0(t_n, x_k) + h^2e^{-i\omega}\left(\partial_x u_1(t_n, x_k) - \frac{1}{2}\partial_x^2 u_0(t_n, x_k)\right)\right) \\
&= e^{i\omega k} \left((\Omega(n+1) - \Omega(n))u_0(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)(1 - e^{-i\omega})u_0(t_n, x_k) \right. \\
&\quad \left. + h(\Omega(n+1) - \Omega(n))u_1(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)(1 - e^{-i\omega})u_1(t_n, x_k) \right. \\
&\quad \left. + h(\Omega(n+1)\partial_t u_0(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)e^{-i\omega}\partial_x u_0(t_n, x_k)) \right. \\
&\quad \left. + h^2(\Omega(n+1)\partial_t u_1(t_n, x_k) + a(x_k)\Omega(n)e^{-i\omega}\partial_x u_1(t_n, x_k)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\Omega(n+1)\partial_t^2 u_0(t_n, x_k) - a(x_k)\Omega(n)e^{-i\omega}\partial_x^2 u_0(t_n, x_k)) \right) \quad (A.2.11)
\end{aligned}$$

A.3. Für diese Arbeit geschriebene Quelltexte

Hier listen wir der Vollständigkeit wegen alle Programme auf, die für das Erzeugen der Daten und Plots in dieser Arbeit verantwortlich sind. Anhand dieser Quelltexte kann im Zweifel am genauesten nachvollzogen werden, was die Plots zeigen.

Upwind Verfahren

```

1 % Perform the upwind method given by
2 %
3 %      v(n+1,i) = v(n,i) - lambda(i)*(v(n,i) - v(n,i-1))
4 %
5 % Parameter
6 %      u0      - initial value function
7 %      lambda  - grid aspect ratio times velocity, possibly space dependent
8 %      N       - number of iterations
9 function V = upwind(u0, lambda, N)
10     I = length(u0);
11     V = zeros(N, I);
12     V(1,:) = u0;
13     for n = 1:N-1

```



```

14         V(n+1,:) = V(n,:) - lambda(:).*(V(n,:) - shift(V(n, :), 1));
15     end
16 end

```

octave/upwind.m

Führe das Upwind Verfahren mit den Anfangsdaten

$U(x) = \sin(\pi x)$ aus

```

1 % Use the upwind(u0, lambda, N) method to solve
2 %
3 %     u_t(t,x) + u_x(t,x) = 0,    u(0,x) = sin(x)
4 %
5 % With lambda = 1 + eta. Returns data to use as gnuplot table.
6 % Parameter
7 %     eta - measure of "instabilty"
8 %     h   - grid length
9 %     N   - number of time steps
10 function V = transport_example(eta, h, N)
11     % Setup Properties and Initial Conditions
12     % space dimensions [x0, xN]
13     x0 = [-2,2];
14     % grid ratios
15     lambda = 1 + eta;
16
17     % space vector
18     x = x0(1)+h:h:x0(2);
19     % initial values
20     u0 = sin(pi*x);
21
22     % Call Numerical Method
23     V = upwind(u0, lambda, N);
24     V = V';
25 end

```

octave/transport_example.m

Plotdaten für das erste Beispiel und Fehler für den alternierenden Ansatz

```

1 more off;
2 format long e;
3 % create plots for section 2.2 "Ein Beispiel fuer instabiles Verhalten"
4 %
5 % save gnuplot table data in data/max_errors_*.dat and data/V_sinus_*.dat
6 % files.
7

```

```

8 % guess iterations with same error, depending on eta
9 step_fn = @(err,eta) ...
10     floor((log(err).-log(eps))./log(1+2*eta));
11
12 % examples = [ (eta, h) ]
13 examples = { [1e-1, 1e-2],
14             [1e-1, 1e-3],
15             [5e-2, 1e-3] };
16
17 x0 = [-2, 2];
18
19 for i = 1:length(examples)
20     eta = examples{i}(1);
21     h = examples{i}(2);
22     X = [x0(1)+h:h:x0(2)]';
23
24     % guess iteration for given errors
25     % make as many iterations as needed for the largest error
26     wanted_error = 1;
27     max_N = step_fn(wanted_error, eta);
28     V = transport_example(eta, h, max_N);
29
30     % save numerical solution to file for example plot
31     V = [X, V(:, max_N)];
32     file_name = sprintf('./data/V_sinus_eta_%.3f_h_%.3f.dat', eta, h);
33     fid = fopen(file_name, "w");
34     fdisp(fid, V);
35     fclose(fid);
36 end

```

octave/create_example_plots.m

Fehlerplots für Beispiele

```

1 warning ("off", "Octave:broadcast");
2 more off;
3 format long e;
4 single precision;
5
6 % calculate max difference between numerical scheme and true solution
7 sinus_max_err_fn = @(N,X,V,h,eta) ...
8     max(abs( sin(pi*(X-(N-1)*(h+h*eta))) - V(:,N) ));
9
10 % guess iterations with same error, depending on eta
11 step_fn = @(err,eta) ...
12     floor((log(err).-log(eps))./log(1+2*eta));
13
14 % compare errors with formulas
15 expected_err_fn_1 = @(n,h,eta) ...

```

```

16     (1+2*eta).^n*eps;
17 % compare errors with formulas
18 exptected_err_fn = @(n,h,eta) ...
19     (1+2*eta).^n*eps+(pi^2/2)*h*eta*(h+h*eta).*n;
20
21 % examples = [ (eta, h) ]
22 examples = { [1e-1, 1e-2],
23             [1e-1, 1e-3],
24             [5e-2, 1e-3],
25             [1e-2, 1e-3] };
26
27
28 x0 = [-2, 2];
29
30
31 for i = 1:length(examples)
32     eta = examples{i}(1);
33     h = examples{i}(2);
34     X = [x0(1)+h:h:x0(2)]';
35
36     % guess iteration for given errors
37     wanted_error = 100;
38     max_N = step_fn(wanted_error, eta);
39
40     T = 0:h*(1+eta):max_N*h*(1+eta);
41
42     V = transport_example(eta, h, max_N);
43
44     % calculate real and estimated errors and skip some indices
45     indizes = 1:floor((max_N)/10):max_N;
46     max_errors = [
47         indizes;
48         sinus_max_err_fn(indizes, X, V, h, eta);
49         exptected_err_fn(indizes-1, h, eta);
50         exptected_err_fn_1(indizes-1, h, eta);
51         (indizes-1).*(pi*pi/2)*h*h*eta*(1+eta);
52     ]';
53
54     % save errors to files for error plot
55     % note: can't use the 'save'-function since we have variable file names
56     file_name = sprintf('./data/max_errors_eta_%.3f_h_%.3f.dat', eta, h);
57     fid = fopen(file_name, "w");
58     fdisp(fid, max_errors);
59     fclose(fid);
60 end

```

octave/create_error_plots.m

Fehlerplots für kleine η

```
1 warning ("off", "Octave:broadcast");
2 more off;
3 format long e;
4 % calculate max difference between numerical scheme and true solution
5 sinus_max_err_fn = @(N,X,V,h,eta) ...
6     max(abs( sin(pi*(X-(N-1)*(h+h*eta))) - V(:,N) ));
7
8 eta = 1e-3;
9 h = 1e-3;
10 T = 0:h*(1+eta):25;
11 X = [-2+h:h:2]';
12 max_N = length(T);
13 V = transport_example(eta, h, max_N);
14
15 N = 1:100:max_N;
16
17 max_errors = [
18     T(N);
19     sinus_max_err_fn(N, X, V, h, eta);
20     eps*exp(2*T(N));
21     eps*exp(2*T(N)) + T(N).*(pi*pi/2)*h^2;
22     T(N).*(pi*pi/2)*h^2;
23 ];
24
25 save 'data/max_errors_small_eta_0.001.dat' max_errors
```

octave/create_error_plots_small_eta.m