Masterarbeit am Institut für Mathematik der Freien Universität Berlin, Arbeitsgruppe

Geophysical Fluid Dynamics

Beschreibung hochfrequenter numerischer Instabilitäten mit Hilfe asymptotischer WKB Ansätze

Maikel Nadolski

Matrikelnummer: 4207314

nadolski@math.fu-berlin.de

Betreuer: Prof. Dr. Rupert Klein

11. Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Das Vorwort ist immer am schwierigsten.

2. Die lineare Transportgleichung mit konstanter Geschwindigkeit

Wir betrachten die Differentialgleichung der eindimensionalen Advektion

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = U(x). \tag{2.0.1}$$

Auf diese partielle Differentialgleichung wenden wir das Upwindverfahren mit dem Gitter $G_h(n,i) = (t_n, x_i) = h \cdot (\lambda n, i)$ an. Wenn wir also von Punkten (t_n, x_i) in der Zeit und Raum sprechen, so sind diese eigentlich noch von Gitterweite h abhängig. Die Gitterzellen sind nicht quadratisch, falls $\lambda \neq 1$ gilt und das Verfahren ist durch die Gleichung

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\lambda h} + \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = 0 \tag{2.0.2}$$

bzw. in der Praxis durch

$$v_i^{n+1} - v_i^n + \lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) = 0, \quad v_i^0 = U(x_i) \tag{2.0.3}$$

bestimmt. Es ist bereits bekannt, dass das Verfahren für $\lambda \leq 1$ stabil und für $\lambda = 1$ sogar exakt ist. Wir versuchen in dieser Arbeit den instabilen Fall $\lambda > 1$ besser zu verstehen.

2.1. Ein erster regulärer Ansatz

Zunächst präsentieren wir die Ergebnisse, welche die Autoren Junk und Yang aus [JY04] für das Upwind-Schema entwickeln. Angenommen es gäbe Abbildungen $u_0, u_1 \in C^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$, so dass für alle $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$

$$v_i^n = u_0(t_n, x_i) + h u_1(t_n, x_i) + o(h) \tag{2.1.1}$$

gilt, v_i^n die Gleichung (2.0.3) erfüllt und die Anfangsbedingungen

$$u_0(0,x) = U(x) \quad \text{und} \quad u_1(0,x) = 0 \tag{2.1.2}$$

gelten. Im Anhang A.1.2 setzen wir den Ansatz (2.1.1) in die beiden Differenzen $v_i^{n+1} - v_i^n$ und $\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n)$ ein, verwenden, dass u_0 und u_1 differenzierbar sind und erhalten für alle Zeit-Raum Punkte $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\partial_t u_0(t,x) + \partial_x u_0(t,x) = 0 \tag{2.1.3}$$

$$\partial_t u_1(t,x) + \partial_x u_1(t,x) = \frac{1-\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(t,x). \tag{2.1.4}$$

Gleichung (2.1.3) zeigt, dass u_0 selbst schon eine Lösung von (2.0.1) ist. Somit bestimmt u_1 direkt den Fehler des Verfahres zur echten Lösung, zumindest solange die asymptotische Entwicklung (2.1.1) gültig ist. Im Anhang A.1.1 haben wir bereits die Lösung dieser Gleichungen bestimmt. u_0 ist wegen $u_0(0,x) = U(x)$ durch

$$u_0(t,x) = U(x-t)$$

gegeben. Die Gleichung (2.1.4) fällt hingegen in den Fall einer inhomogenen Transportgleichung und weil u_0 selbst Lösung der homogenen Gleichung ist, greift die Lösung (A.1.11):

$$u_1(t,x) = t\frac{1-\lambda}{2}\partial_x^2 U(x-t).$$

Zwar bleibt der Ansatz (2.1.1) für festes $t \in \mathbb{R}_0^+$ asymptotisch in h geordnet, d. h. es gilt stets

$$\lim_{h\to 0} h\frac{u_1(t,x)}{u_0(t,x)} = 0,$$

allerdings konvergiert die asymptotische Entwicklung nicht gleichmäßig in t, denn es gilt für jedes $h > 0$

$$\lim_{t\to\infty} h\frac{u_1(t,x)}{u_0(t,x)} = \lim_{t\to\infty} ht\frac{(1-\lambda)\partial_x^2 U(x-t)}{2U(x-t)} = \infty.$$

Das ist nach [JY04] ein Zeichen dafür, dass der resultierende Ansatz

$$v_i^n = U(x-t) + ht\frac{1-\lambda}{2}\partial_x^2 U(x-t) + o(h) \tag{2.1.5}$$

das Langzeitverhalten des Verfahrens nicht gut widergibt und dieses Problem greifen die Autoren mit einer zusätzlichen *langsamen* Zeitskala $\tau = ht$ an. Aus (2.1.1) wird

$$v_i^n = u_0(t,\tau,x) + hu_1(t,\tau,x) + o(h) \tag{2.1.6}$$

und die Gleichungen (2.1.3) und (2.1.4) ändern sich zu

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_0(t,\tau,x) + \partial_x u_0(t,\tau,x) = 0\\
&\partial_t u_1(t,\tau,x) + \partial_x u_1(t,\tau,x) = \frac{1-\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(t,\tau,x) - \partial_\tau u_0(t,\tau,x).
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Durch die zusätzliche Zeitvariable τ haben wir einen weiteren Freiheitsgrad zur Verfügung und können

$$\partial_\tau u_0(t,\tau,x) = \frac{1-\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(t,\tau,x) \tag{2.1.8}$$

fordern. Dies ist die Wärmeleitungsgleichung, welche nur für $\lambda \leq 1$ lösbar ist. Sei G_τ der Glättungskern

$$G_\tau(y) = \frac{1}{2\pi(1-\lambda)\tau}\exp\left(-\frac{y^2}{2(1-\lambda)\tau}\right).$$

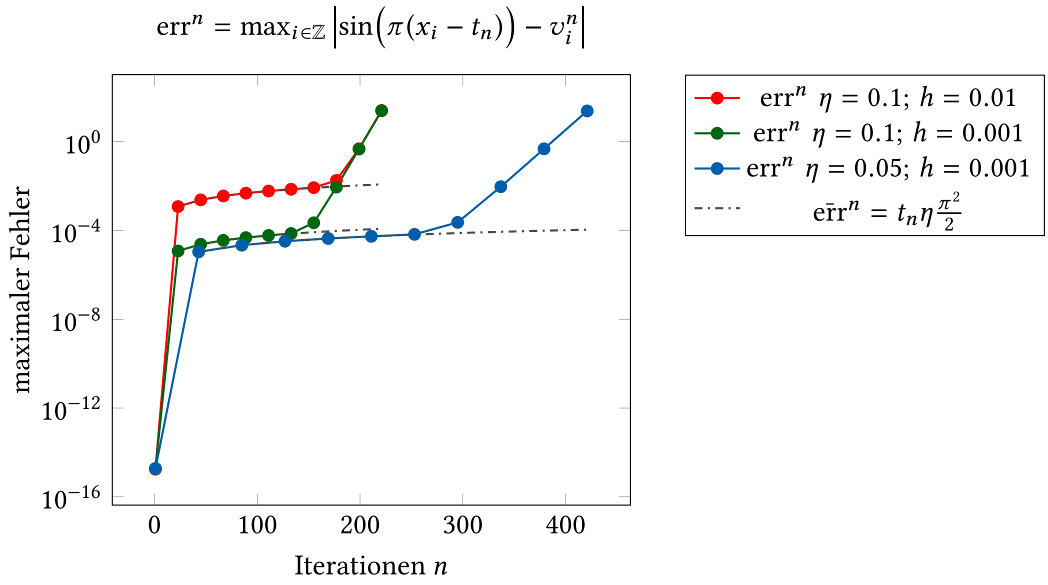

Abbildung 2.1.: Hier vergleichen wir die maximalen Fehler der numerischen Lösungen für die Startwerte $U(x) = sin(\pi x)$ und $h = 10^{-3}$ für $\eta = 0.1, 0.05$ und 0.001 zur echten Lösung $u(t,x) = sin(\pi(x-t))$ mit dem geschätztem Fehler $u(t_n, x_i) - v_i^n$ in (2.2.1).

Für $\lambda \leq 1$ lautet die Lösung des Anfangswertproblems (2.1.7) mit der Bedingung (2.1.8)

$$\begin{aligned} u_0(t,\tau,x) &= (U * G_\tau)(x-t) \quad \text{und} \\ u_1(t,\tau,x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

und die asymptotische Entwicklung von (2.1.6) lautet hier

$$v_i^n = (U * G_\tau)(x_i - t_n) + o(h). \tag{2.1.10}$$

2.2. Ein Beispiel für instabiles Verhalten

Wir schauen uns die Ergebnisse des Verfahrens für die Anfangswerte $U(x) = \sin(\pi x)$ und $\lambda = 1 + \eta$ für verschiedene positive η und Gitterweiten h an. Wir haben die Beispiele durch die Skripte im Anhang A.2 mit dem Programm *GNU Octave* umgesetzt. Das gibt uns erste Hinweise darauf, was wir in unseren Untersuchungen zu erwarten haben.

Weil $\lambda > 1$ gilt, können wir (2.1.10) nicht verwenden. In Abbildung 2.1 vergleichen wir den maximalen Fehler der numerischen Lösungen mit dem Fehler der asymptotischen Entwicklung

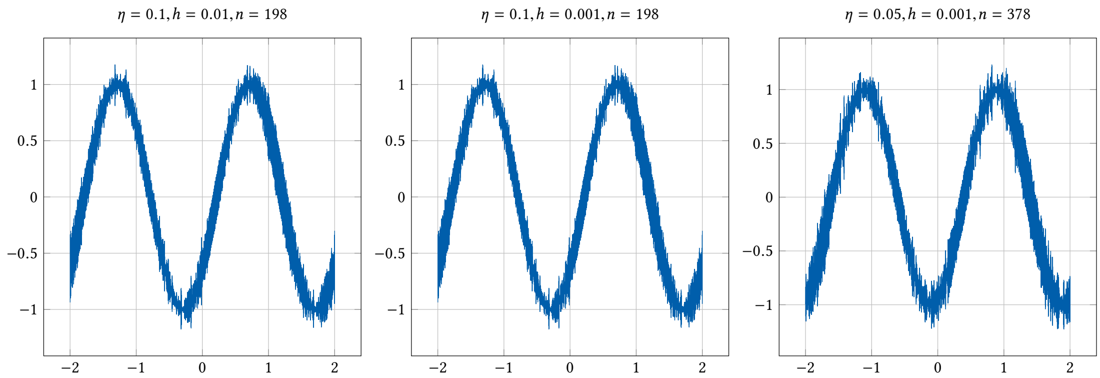

Abbildung 2.2.: Vergleich des instabilen Verhaltens für verschiedene η und h

in (2.1.5)

$$
\begin{aligned}
\bar{\text{err}}^n &= \max_{i\in\mathbb{Z}} \left|\sin\Big(\pi(x_n - t_i)\Big) - v_i^n\right| \\
&= \max_{i\in\mathbb{Z}} \left|t_n \frac{1-\lambda}{2} \partial_x^2 \sin\Big(\pi(x_n - t_i)\Big)\right| \\
&= t_n \frac{\pi^2 \eta}{2} \max_{i\in\mathbb{Z}} \left|\sin\Big(\pi(x_n - t_i)\Big)\right| \\
&= t_n \frac{\pi^2 \eta}{2}.
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

Man sieht in Abbildung 2.1, dass es zu einem exponentiellem Anstieg des Fehlers kommt, den die Entwicklung nicht vorhersagt. Betrachtet man nun die Plots in Abbildung 2.2, so sieht man, dass sich hochfrequente Oszillationen aufschaukeln und die richtige Lösung überdecken. Die Existenz solcher Oiszillationen in den Anfangsdaten wurde im regulären Ansatz bisher ignoriert. Vergleicht man die Plots untereinander, so erkennt man, dass die maximale Amplitude der Oszillation scheinbar unabhängig von h mit der Anzahl der Iterationen n wächst. Verringert man jedoch den Wert für η, so ändert sich auch die Rate, um die die Amplitude wächst. Wir werden dieses Verhalten in unseren Approximationen wiederfinden und geben ferner Abschätzungen für das Wachstum der Amplitude an. Die konkreten Iterationen n für die Plots in den Abbildungen wurden mit Hilfe der Abschätzung $(1 + 2\eta)^n$ aus dem Unterkapitel 2.4 ausgewählt.

2.3. Diskrete Ansätze auf Gitterniveau

Wir führen hier Raumzeit-Koordinaten auf einer kurzen Skala ein. Genau genommen machen wir unsere Ansatzfunktionen zusätzlich von den diskreten Gitterkoordinaten (n, i) abhängig. Es gilt zwar $n = \frac{t_n}{\lambda h}$ und $i = \frac{x_i}{h}$, jedoch soll unsere Annahme sein, dass der Ansatz unstetig in n und i ist. Möchte man jedoch für $h \to 0$ einen Punkt (t, x) in der Raumzeit approximieren, so gilt immer $n, i \to \infty$ und dies könnte uns zusätzliche Bedingungen liefern. Unser Ansatz lautet dieses mal

$$v_i^n = u_0(n,i,t_n,x_i) + hu_1(n,i,t_n,x_i) + h^2 u_2(n,i,t_n,x_i) + o(h^2). \tag{2.3.1}$$

Zunächst fällt auf, dass wir im Gegensatz zum regulärem Ansatz hier Terme bis zur Ordnung $O(h^2)$ entwickeln. Durch die kurze Zeit- und Ortskala wirken Terme in einer Ordnung niedriger als zuvor. Daher werden Terme von u_2 Gleichungen in $O(h)$ beeinflussen und müssen betrachtet werden. Im Anhang A.1.3 haben wir die einzelnen Summanden von (2.0.3) ausgerechnet. Setzt man diese, (A.1.39) und (A.1.40), nun in (2.0.3) ein, liefert uns das die Gleichungen

in der Ordnung $O(1)$:

$$u_0(n+1,i,t_n,x_i) - u_0(n,i,t_n,x_i) + \lambda\Big(u_0(n,i,t_n,x_i) - u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big) = 0 \tag{2.3.2}$$

in der Ordnung $O(h)$:

$$\lambda\Big(\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big) = \begin{aligned} &-\Big(u_1(n+1,i,t_n,x_i) - u_1(n,i,t_n,x_i)\Big) \\ &-\lambda\Big(u_1(n,i,t_n,x_i) - u_1(n,i-1,t_n,x_i)\Big) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

in der Ordnung $O(h^2)$:

$$\lambda\Big(\partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i)\Big) = \begin{aligned} &\frac{\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) - \frac{\lambda^2}{2}\partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i) \\ &-\Big(u_2(n+1,i,t_n,x_i) - u_2(n,i,t_n,x_i)\Big) \\ &-\lambda\Big(u_2(n,i,t_n,x_i) - u_2(n,i-1,t_n,x_i)\Big) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

in der Ordnung $O(h^3)$:

$$\begin{aligned} \lambda\Big(&\partial_t u_2(n+1,i,t_n,x_i) \\ &+\partial_x u_2(n,i-1,t_n,x_i)\Big) \end{aligned} = \begin{aligned} &-\left(\frac{\lambda}{6}\partial_x^3 u_0(n,i-1,t_n,x_i) + \frac{\lambda^3}{6}\partial_t^3 u_0(n+1,i,t_n,x_i)\right) \\ &-\left(\frac{\lambda}{2}\partial_x^2 u_1(n,i-1,t_n,x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\partial_t^2 u_1(n+1,i,t_n,x_i)\right) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$u_0(0,i,0,x_i) = U(x_i), \quad u_1(0,i,0,x_i) = 0 \quad \text{und} \quad u_2(0,i,0,x_i) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.3.6}$$

Diese Gleichungen gelten nun für alle $h > 0$ und alle $n, i \in \mathbb{N}$. Noch gelingt es uns nicht, aus diesen Bedinungen eine eindeutige Lösung für unsere Ansatzfunktionen u_0, u_1 und u_2 zu bestimmen. Daher folgt im nächstem Kapitel ein konkreterer Ansatz. Trotzdem beweisen wir hier noch zwei Lemmata, um besser zu verstehen wie man von Bedingungen auf dem Gitter auf Bedingungen im Raum schließen kann.

Lemma 2.1 (Konstanz für eine Dimension). *Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sei weiter $G_h \subset \mathbb{R}_0^+$ ein äquidistantes Gitter mit $G_h(n) = t_n^h = nh$, für $n \in \mathbb{N}$. Wenn ein $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ für alle $h > 0$ und somit alle Gitter G_h mit*

$$F(t_n^h) = f(n, t_n^h) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{2.3.7}$$

existiert, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$F(t) = f(n, t).$$

Der Beweis dieses Lemmas ist denkbar einfach. Die Existenz eines solchen F ist wie eine Gleichmäßigkeitsbedingung über alle möglichen Gitter. Zu gegebenen $t \in \mathbb{R}_0^+$ wähle man sich einfach die richtige Gitterweite $h > 0$.

Beweis. Sei $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ gegeben und sei $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Wähle $h = \frac{t}{n}$, dann gilt $t_n^h = nh = n\frac{t}{n} = t$. Da (2.3.7) für alle $h > 0$ gilt, folgt hiermit

$$F(t) = F(t_n^h) = f(n, t_n^h) = f(n, t). \qquad \square$$

Das Lemma 2.1 bedeutet, dass f, oder die Folge f_n, in solchen Fällen unabhängig von, bzw. konstant in $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir wollen dies auf unseren Fall übertragen und beweisen nun das zweidimensionale Analogon,

Lemma 2.2 (Punktweise Kovergenz in zwei Dimensionen). *Sei $f : (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass $f(n, i, \cdot, \cdot)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$ differenzierbar ist. Sei weiter $G_h \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ ein äquidistantes Gitter mit $G_h(n, i) = (t_n^h, x_i^h) = h \cdot (\lambda n, i)$, für $n \in \mathbb{N}$. Wenn ein differenzierbares $F : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $h > 0$ und somit alle Gitter G_h mit*

$$F(t_n^h, x_i^h) = f(n, i, t_n^h, x_i^h) \qquad \text{für alle } (n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \tag{2.3.8}$$

existiert, dann gilt für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $i(n) \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$|F(t, x) - f(n, i(n), t, x)| \leq \frac{t}{\lambda n} \Big(\big|\partial_x f(n, i(n), t, x)\big| + \big|\partial_x F(t, x)\big| \Big) \tag{2.3.9}$$

Beweis. Ähnlich wie in Lemma 2.1 setzen wir $h = \frac{t}{\lambda n}$. Dann gilt $t_n = \lambda nh = t$ und $x_i = ih$ für $i \in \mathbb{Z}$. O. B. d. A. gelte $x > 0$. Dann gibt es ein kleinstes $i(n) = i \in \mathbb{N}$, für das $x_{i-1} < x \leq x_i$ gilt. Dies impliziert $x_i - x < h$ und wegen $t_n = t$ folgt auch

$$\|(t, x) - (t_n, x_i)\| = |x - x_i| < h.$$

Weil f und F differenzierbar in x sind, folgt somit

$$|f(n, i, t_n, x_i) - f(n, i, t, x)| = |(x_i - x)\partial_x f(n, i, t, x) + o(h)| \leq h\,|\partial_x f(n, i, t, x)| + o(h)$$

und

$$|F(t_n, x_i) - F(t, x)| = |(x_i - x)\partial_x F(t, x) + o(h)| \leq h\,|\partial_x F(t, x)| + o(h).$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned}|F(t,x) - f(n,i,t,x)| &\leq |F(t,x) - F(t_n,x_i)| + \underbrace{|F(t_n,x_i) - f(n,i,t_n,x_i)|}_{=0} + |f(n,i,t,x) - f(n,i,t_n,x_i)| \\ &\leq h\Big(\big|\partial_x f(n,i,t,x)\big| + \big|\partial_x F(t,x)\big|\Big) \\ &= \frac{t}{\lambda n}\Big(\big|\partial_x f(n,i,t,x)\big| + \big|\partial_x F(t,x)\big|\Big). \end{aligned}$$

□

Sollte das Lemma 2.2 exakt sein, so zeigt uns das, dass wir gleichmäßige Schranken von $f(n,i,\cdot,\cdot)$ benötigen, um von Aussagen auf Gitterebene auf Aussagen über alle Raumzeitpunkte zu schließen. Selbst dann, wenn man das Lemma dahingehend abschwächt, dass man nur die gleichmäßige Stetigkeit in n und i braucht. Und diese Bedingung tretet schon ein, ohne dass wir die Sublinear-Growth Bedingung überhaupt benutzt haben.

2.4. Ein Ansatz mit alternierenden Gittervorzeichen

Hier präzisieren wir unseren Ansatz (2.3.1) aus dem letztem Unterkapitel. Sei $\varepsilon_M > 0$ die Maschinengenauigkeit. Diese Größe ist von System zu System unterschiedlich und ist in der Regel in der Größenordnung von etwa 10^{-16} groß. Die Anfangsbedingung für u_0 in (2.3.6) lautet $u_0(0,x) = U(x)$, doch in Wahrheit rechnet der Computer mit gerundeten Zahlen, also

$$\begin{aligned}u_0(0,i,0,x_i) = \varepsilon_M\left\lfloor\frac{U(x_i)}{\varepsilon_M}\right\rfloor &= U(x_i) - \underbrace{\left(U(x_i) - \varepsilon_M\left\lfloor\frac{U(x_i)}{\varepsilon_M}\right\rfloor\right)}_{=:\Delta_{\varepsilon_M}U(x_i)} \\ &= U(x_i) - \Delta_{\varepsilon_M}U(x_i),\end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Rundungsfehler $\Delta_{\varepsilon_M}U(x_i)$ kann nach der ersten Iteration jedoch von Gitterzelle zur Gitterzelle schon verschieden sein! Deshalb motiviert das hier den Ansatz, dass Oszillationen im Raum und auf Gitterniveau vorhanden sind und wir untersuchen, wie sich die Amplitude in der Zeit ausbreitet. Weil wir in (2.0.1) eine lineare Differentialgleichung betrachten, vermuten wir, dass man u_k für $k = 0,1,2$ und alle Iterationen $n \in \mathbb{N}$ als Summe einer glatten und einer unstetigen, hochfrequenten Funktion schreiben kann. Daher wählen wir für u_0, u_1 und u_2 aus (2.3.1) nun konkreter

$$u_k(n,i,t,x) = w_k(t,x) + (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x), \qquad \text{für } k = 0,1,2 \tag{2.4.1}$$

für glatte Funktionen w_k, z_k, $\Omega(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} w_0(0,x_i) &= U(x_i), & z_0(0,x_i) &= V(x_i), \\ w_1(0,x_i) &= 0, & z_1(0,x_i) &= 0, \\ w_2(0,x_i) &= 0, & z_2(0,x_i) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Wobei U und V derart sind, dass alle nötigen Regularitätsbedingungen für die kommenden Betachtungen erfüllt seien sollen. Wir wollen nun $\Omega(n)$ näher bestimmen. Setzt man dies in die vorherigen Rechnungen ein, so erhält man wegen der Gleichung (2.3.2) *in der Ordnung $O(1)$:*

$$\begin{aligned}
u_0(n+1,i,t_n,x_i) - u_0(n,i,t_n,x_i) + \lambda\Big(u_0(n,i,t_n,x_i) - u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big) &= 0. \\
\begin{matrix} w_k(t,x) + (-1)^i\Omega(n+1)z_k(t,x) - \Big(w_k(t,x) + (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x)\Big) \\ +\lambda\Big[w_k(t,x) + (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) - \Big(w_k(t,x) + (-1)^{i-1}\Omega(n)z_k(t,x)\Big)\Big] \end{matrix} &= \\
(-1)^i\Omega(n+1)z_k(t,x) - (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) + \lambda\Big[(-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) - (-1)^{i-1}\Omega(n)z_k(t,x)\Big] &= \\
(-1)^i\Omega(n+1)z_k(t,x) - (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) + \lambda\Big[(-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) + (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x)\Big] &= \\
(-1)^i\Omega(n+1)z_k(t,x) - (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) + 2\lambda(-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) &= \\
(-1)^i\Omega(n+1)z_k(t,x) + (-1+2\lambda)(-1)^i\Omega(n)z_k(t,x) &= \\
-(-1)^i z_0(t_n,x_i)\Big[\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n)\Big] &= \qquad (2.4.3)
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Gitterkoordinaten (n,i) gilt und die Funktion $F(t,x) = 0$ glatt ist, können wir unter der Annahme, dass $z_0 \neq 0$ gilt, Lemma 2.2 benutzen.

Satz 2.3. *Es gelte für alle $(n,i) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ die Gleichung (2.4.3). Dann gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\Omega(n) = (1-2\lambda)^n.$$

Beweis. Weil $z_0 \neq 0$ gilt, existiert ein Punkt $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ mit $z_0(t,x) \neq 0$. Nach Lemma 2.2 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$\left|(-1)^i z_0(t,x)\Big(\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n)\Big)\right| \leq \left|(-1)^i \frac{t}{\lambda n}\partial_x z_0(t,x)\Big(\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n)\Big)\right|.$$

Angenommen es gelte $\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n) \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt wiederum für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|z_0(t,x)| \leq \frac{t}{\lambda n}\,|\partial_x z_0(t,x)|\,,$$

was zu $z_0(t,x) = 0$ führt, ein Widerspruch zur Voraussetzung $z_0(t,x) \neq 0$. Das impliziert $\Omega(n+1) - (1-2\lambda)\Omega(n) = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und mit $\Omega(0) = 1$ folgt die Behauptung. □

Von nun an, setzen betrachten wir $\lambda = 1 + \eta$ für ein $\eta > 0$. Mit dem Satz 2.3 und weil wir im Ansatz (2.4.1) für jedes $k = 0,1,2$ die selbe Abhängigkeit von (n,i) annehmen, folgt hiermit, dass für alle $k = 0,1,2$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$

$$u_k(n+1,i,t_n,x_i) - u_k(n,i,t_n,x_i) + (1+\eta)\Big(u_k(n,i,t_n,x_i) - u_k(n,i-1,t_n,x_i)\Big) = 0 \qquad (2.4.4)$$

erfüllt ist. Setzt man dies nun in den Ansatz ein, so fallen die Anteile von u_2 in der Gleichung (2.3.4) für diskrete Ansätze weg. Mit $\lambda = 1 + \eta$ gilt $\Omega(n) = (-1)^n(1+2\eta)^n$ und wir schreiben diesen Ansatz hier nun als

$$v_i^n = w_0(t_n,x_i) + hw_1(t_n,x_i) + (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\Big(z_0(t_n,x_i) + hz_1(t_n,x_i)\Big) + o(h) \qquad (2.4.5)$$

auf und setzen ihn weiter in die Bedingungen aus (2.3.3) bis (2.1.4) ein. In der Ordnung $O(h)$ gilt nach den Rechnungen zum diskreten Ansatz die Gleichung (2.3.3), die mit $\lambda = 1 + \eta$ hier lautet:

$$(1+\eta)\Big(\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big) = \begin{array}{l} -\Big(u_1(n+1,i,t_n,x_i) - u_1(n,i,t_n,x_i)\Big) \\ -(1+\eta)\Big(u_1(n,i,t_n,x_i) - u_1(n,i-1,t_n,x_i)\Big). \end{array}$$

Die Rechte Seite dieser Gleichung verschwindet wegen der Eigenschaft (2.4.4) und es folgt demnach für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ und $h > 0$

$$\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i) = 0.$$

Weil sowohl w_0 als auch z_0 stetig differenzierbar sind, folgt für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) &= \partial_t\Big(w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n+1}(1+2\eta)^{n+1} z_0(t_n,x_i)\Big) \\ &= \partial_t w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\Big(-(1+2\eta)\partial_t z_0(t_n,x_i)\Big) \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i) &= \partial_x\Big(w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n-1}(1+2\eta)^n z_0(t_n,x_i)\Big) \\ &= \partial_x w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\Big(-\partial_x z_0(t_n,x_i)\Big). \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

In der Summe ergibt das nun

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i) \\ &= \partial_t w_0(t_n,x_i) + \partial_x w_0(t_n,x_i) \\ &\quad - (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\Big((1+2\eta)\partial_t z_0(t_n,x_i) + \partial_x z_0(t_n,x_i)\Big), \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

also

$$\partial_t w_0(t_n,x_i) + \partial_x w_0(t_n,x_i) = (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\Big((1+2\eta)\partial_t z_0(t_n,x_i) + \partial_x z_0(t_n,x_i)\Big). \tag{2.4.9}$$

Wir verwenden nun Lemma 2.2, um zu zeigen, dass beide Seiten umanhängig von einander Null sein müssen.

Satz 2.4. *Es seien F und g Funktionen aus $C^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$. Für alle $h > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$ gelte außerdem*

$$F(t_n,x_i) = (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n g(t_n,x_i). \tag{2.4.10}$$

Dann folgt für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(t,x) &= 0 \qquad \textit{und} \\ g(t,x) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Für das Lemma 2.2 setzen wir für f die rechte Seite der Gleichung (2.4.10) ein, also $f(n,i,t,x) = (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n g(t,x)$. Dann ist f für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$ differenzierbar und die Voraussetzungen von Lemma 2.2 sind erfüllt.

Es existiert also für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $i(n) \in \mathbb{Z}$, so dass die Ungleichung

$$|F(t,x) - f(n,i(n),t,x)| \leq \frac{t}{\lambda n}\left(\left|\partial_x f(n,i(n),t,x)\right| + \left|\partial_x F(t,x)\right|\right) \tag{2.4.11}$$

erfüllt ist. Das impliziert wegen $|f(n,i(n),t,x)| - |F(t,x)| \leq |F(t,x) - f(n,i(n),t,x)|$ die Gleichung

$$|f(n,i(n),t,x)| \leq \frac{t}{\lambda n}\left|\partial_x f(n,i(n),t,x)\right| + \frac{t}{\lambda n}\left|\partial_x F(t,x)\right| + |F(t,x)|$$

also

$$\begin{aligned}
(1+2\eta)^n\,|g(t,x)| &\leq \frac{t}{\lambda n}\cdot(1+2\eta)^n\,|\partial_x g(t,x)| + \frac{t}{\lambda n}\left|\partial_x F(t,x)\right| + |F(t,x)| \\
\Leftrightarrow \qquad |g(t,x)| &\leq \underbrace{\frac{t}{\lambda n}\,|\partial_x g(t,x)|}_{\to 0} + \underbrace{(1+2\eta)^{-n}\left(\frac{t}{\lambda n}\left|\partial_x F(t,x)\right| + |F(t,x)|\right)}_{\to 0} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,
\end{aligned}$$

woraus $g(t,x) = 0$ und somit auch $F(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ folgt. □

In Satz 2.4 haben wir ganz wesentlich benutzt, dass $(1+2\eta)^n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Später beweisen wir mit Satz 2.5 eine analoge Aussage um solche Bedingungen in anderen Ansätzen zu bekommen, bei denen man keine solche Wachstumsbedingung hat. Wenden wir nun Satz 2.4 auf Gleichung (2.4.9) an, so erhalten wir

in der Ordnung $O(h)$:

$$\partial_t w_0(t,x) + \partial_x w_0(t,x) = 0 \tag{2.4.12}$$

$$\partial_t z_0(t,x) + \frac{1}{1+2\eta}\partial_x z_0(t,x) = 0 \tag{2.4.13}$$

Aus den Gleichungen (2.4.12) und (2.4.13) folgt insbesondere nun auch

$$\partial_t^2 w_0 = \partial_x^2 w_0 \quad \text{und} \quad \partial_t^2 z_0 = \frac{1}{(1+2\eta)^2}\partial_x^2 z_0. \tag{2.4.14}$$

Mit den Anfangsbedingungen (2.4.2), insbesondere $w_0(0,x) = U(x)$ und $z(0,x) = V(x)$, kann man diese Anfangswertprobleme wie in Anhang A.1.1 lösen und w_0 und z_0 durch

$$w_0(t,x) = U(x-t) \quad \text{und} \quad z_0(t,x) = V\left(x - \frac{t}{1+2\eta}\right)$$

bestimmen.

Ferner setzen wir den Ansatz (2.4.5) nun in die Gleichung der Ordnung $O(h^2)$ für diskrete Ansätze (2.3.4) ein. Diese lautet mit $\lambda = 1 + \eta$

in der Ordnung $O(h^2)$:

$$
\begin{aligned}
(1+\eta)\Big(\partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) & & \frac{1+\eta}{2}\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) \\
+\partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i)\Big) &= & -\frac{(1+\eta)^2}{2}\partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i) \\
& & 0 = \begin{cases} -\Big(u_2(n+1,i,t_n,x_i) - u_2(n,i,t_n,x_i)\Big) \\ -(1+\eta)\Big(u_2(n,i,t_n,x_i) - u_2(n,i-1,t_n,x_i)\Big) \end{cases}
\end{aligned}
$$

also gilt

$$\partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i) = \frac{1}{2}\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) - \frac{(1+\eta)}{2}\partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i) \quad (2.4.15)$$

$$(2.4.16)$$

Wegen (2.4.14) gilt für die rechte Seite dieser Gleichung

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) - \frac{(1+\eta)}{2}\partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i) \\
&= \frac{1}{2}\partial_x^2\Big[w_k(t_n,x_i) + (-1)^{i+n-1}(1+2\eta)^n z_k(t_n,x_i)\Big] - \frac{(1+\eta)}{2}\partial_t^2\Big[w_k(t_n,x_i) + (-1)^{i+n+1}(1+2\eta)^{n+1} z_k(t_n,x_i)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\partial_x^2 w_k(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n \partial_x^2 z_k(t_n,x_i)\Big] - \frac{(1+\eta)}{2}\Big[\partial_t^2 w_k(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}(1+2\eta)^{n+1}\partial_t^2 z_k(t_n,x_i)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\partial_x^2 w_k(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n \partial_x^2 z_k(t_n,x_i)\Big] - \frac{(1+\eta)}{2}\Big[\partial_x^2 w_k(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}\frac{(1+2\eta)^n}{(1+2\eta)}\partial_x^2 z_k(t_n,x_i)\Big] \\
&= -\frac{\eta}{2}\partial_x^2 w_k(t_n,x_i) - \frac{1}{2}(-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\partial_x^2 z_k(t_n,x_i) + \frac{(1+\eta)}{2}(-1)^{i+n}\frac{(1+2\eta)^n}{(1+2\eta)}\partial_x^2 z_k(t_n,x_i) \\
&= -\frac{\eta}{2}\partial_x^2 w_k(t_n,x_i) - \frac{1}{2}(-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\partial_x^2 z_k(t_n,x_i) + \frac{(1+2\eta-\eta)}{2}(-1)^{i+n}\frac{(1+2\eta)^n}{(1+2\eta)}\partial_x^2 z_k(t_n,x_i) \\
&= -\frac{\eta}{2}\partial_x^2 w_k(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\left(\frac{\eta}{2(1+2\eta)}\partial_x^2 z_k(t_n,x_i)\right)
\end{aligned}
$$

Für die linke Seite der Gleichung (2.4.15) gilt ganz analog wie im Fall von $O(h)$ der Gleichung (2.4.8)

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i) \\
&= \partial_t w_0(t_n,x_i) + \partial_x w_0(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\Big((1+2\eta)\partial_t z_0(t_n,x_i) + \partial_x z_0(t_n,x_i)\Big)
\end{aligned}
$$

Hierauf kann man wieder Satz 2.4 anwenden und wir gelangen mit den Anfangswerten in (2.3.6) zu den Anfangswertproblemen

$$\partial_t w_1(t,x) + \partial_x w_1(t,x) = -\frac{\eta}{2}\partial_x^2 w_0(t,x), \qquad w_1(0,x) = 0 \qquad \text{und} \qquad (2.4.17)$$

$$\partial_t z_1(t,x) + \frac{1}{1+2\eta}\partial_x z_1(t,x) = \frac{\eta}{2(1+2\eta)^2}\partial_x^2 z_0(t,x), \qquad z_1(0,x) = 0 \qquad (2.4.18)$$

Betrachtet man den Ansatz (2.4.5) nun genauer, so erkennt man, dass der Faktor $(1+2\eta)^n$ für $\eta > 0$ und $n \to \infty$ unbeschränkt ist. Das heißt, dass der Ansatz für $h \to 0$ zu jeder noch so kleinen Zeit $t > 0$ beliebig groß wird, was das instabile Verhalten ja auch widergibt. Genauer gibt es für jede Zeit $t > 0$ und zu jeder Schranke $X > 0$ ein $h > 0$, so dass $\left|v_i^n\right| > X$ und $n\lambda h = t_n < t$ gilt. Allerdings bedeutet das auch, dass wir im Gegensatz zum regulären Fall die Lösungen w_k

$$w_0(t,x) = U(x-t) \qquad \text{und} \tag{2.4.19}$$

$$w_1(t,x) = -t\frac{\eta}{2}\partial_x^2 U(x-t) \tag{2.4.20}$$

hinnehmen, da wir uns sowieso nicht wie z. B. für den Fall $\lambda < 1$ für das Langzeitverhalten der Lösung interessieren.

Der Faktor $\frac{\eta}{2(1+2\eta)^2}$ in Gleichung (2.4.18) ist für $\eta > 0$ positiv! Das heißt, dass wir hier wie die Autoren in [JY04] den im regulären Fall aus Kapitel 2.1 gezeigten Ansatz mit langsamer Zeitskala $\tau_n = ht_n$ für z_0 anwenden können. Dazu nehmen wir die Existenz einer Funktion $\tilde{z}(t,\tau,x)$ an, fürdie $\tilde{z}(t_n, ht_n, x) = z(t_n, x_i)$ gilt und es folgt

$$\partial_t z(t_n, x_i) = \partial_t\left(\tilde{z}(t_n, ht_n, x)\right) = \partial_t \tilde{z}(t_n, ht_n, x) + h\partial_\tau \tilde{z}(t_n, ht_n, x)$$

und auch

$$\begin{aligned}
\partial_t z_0(t,\tau,x) + \frac{1}{1+2\eta}\partial_x z_0(t,\tau,x) &= 0 \\
\partial_t z_1(t,\tau,x) + \frac{1}{1+2\eta}\partial_x z_1(t,\tau,x) &= \frac{\eta}{2(1+2\eta)^2}\partial_x^2 z_0(t,\tau,x) - \partial_\tau z_0(t,\tau,x)
\end{aligned}$$

und wir fordern mit dem zusätzlichen Freiheitsgrad, dass

$$\partial_\tau z_0(t,\tau,x) = \frac{\eta}{2(1+2\eta)^2}\partial_x^2 z_0(t,\tau,x)$$

gilt. Mit $z_1(0,0,x) = 0$ folgt also $z_1 = 0$ und

$$\begin{aligned}
z_0(t,\tau,x) &= (V * G_\tau)\left(x - \frac{t}{1+2\eta}\right) \\
G_\tau(y) &= \sqrt{\frac{1}{\tau}\frac{(1+2\eta)^2}{2\pi\eta}}\exp\left(-\frac{y^2}{\tau}\frac{(1+2\eta)^2}{2\pi\eta}\right)
\end{aligned}$$

Wenn wir alle Ergebnisse zusammensetzen gelangen wir zu dem folgendem Ausdruck

$$v_i^n = U(x_i - t_n) + (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n (V * G_{\tau_n})\left(x_i - \frac{t_n}{1+2\eta}\right) - \frac{h\eta}{2}t_n\partial_x^2 U(x_i - t_n) + o(h). \tag{2.4.21}$$

Wir nehmen für ein konkretes Beispiel die Startwerte $U(x) = \sin(\pi x)$ und $V(x) = \varepsilon_M$. Wenn wir das in (2.4.21) einsetzen, so gilt zunächst für alle $x, \tau \in \mathbb{R} : (V * G_\tau)(x) = \varepsilon_M$ und es gilt

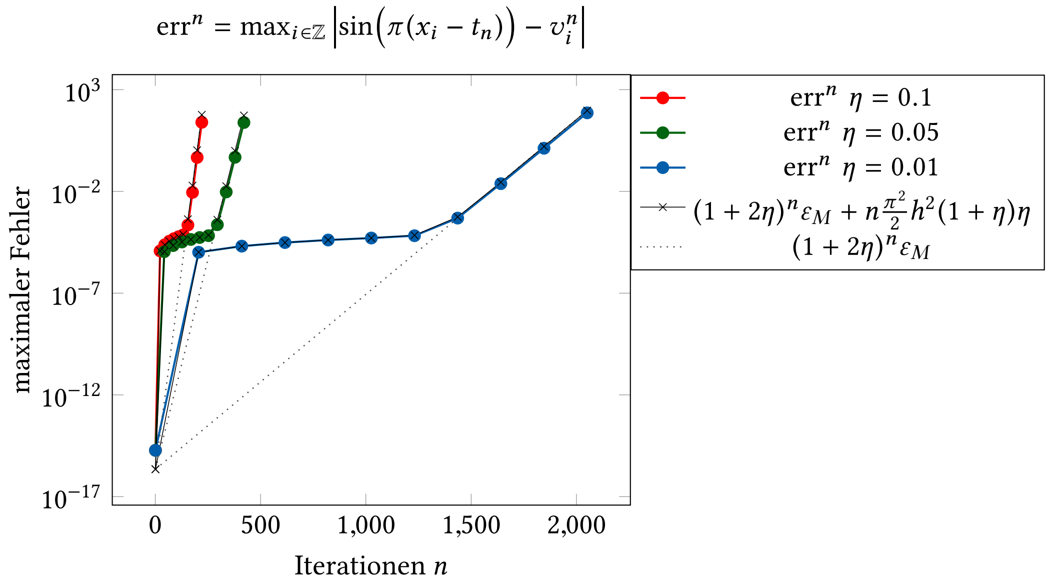

Abbildung 2.3.: Hier vergleichen wir die maximalen Fehler der numerischen Lösungen für die Startwerte $U(x) = sin(\pi x)$, $V(x) = \varepsilon_M$ und $h = 10^{-3}$ für $\eta = 0.1, 0.05$ und 0.001 zur echten Lösung $u(t,x) = sin(\pi(x-t))$ mit dem geschätztem Fehler $u(t_n, x_i) - v_i^n$ in (2.4.23).

$\partial_x^2 U(x_i - t_n) = -\pi^2 \sin\left(\pi(x_i - t_n)\right)$ für alle $(t_n, x_i) \in G_h$. Ersetzt man ferner $t_n = n(1+\eta)h$ so erhält man insgesamt

$$v_i^n \sim \sin\left(\pi(x_i - t_n)\right)\left(1 + n\frac{\pi^2}{2}h^2\eta(1+\eta)\right) + (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\varepsilon_M. \tag{2.4.22}$$

Damit ist dann die Fehlerabschätzung verbunden

$$\begin{aligned}
err^n &= \max_{i\in\mathbb{Z}} \left|\sin\left(\pi(x_i - t_n)\right) - v_i^n\right| \\
&= \max_{i\in\mathbb{Z}} \left|\sin\left(\pi(x_i - t_n)\right) n\frac{\pi^2}{2}h^2\eta(1+\eta) + (-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\varepsilon_M\right| \\
&\leq \max_{i\in\mathbb{Z}} \left(\left|\sin\left(\pi(x_i - t_n)\right) n\frac{\pi^2}{2}h^2\eta(1+\eta)\right| + \left|(-1)^{i+n}(1+2\eta)^n\varepsilon_M\right|\right) \\
&= (1+2\eta)^n\varepsilon_M + n\frac{\pi^2}{2}h^2\eta(1+\eta) + o(h)
\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

In Abbildung 2.3 vergleichen wir den maximalen Fehler der Beispiele im Unterkapitel 2.2 mit dem Fehler des Ansatzes v_i^n aus (2.4.23). Dabei erkennt man, dass dieses Modell schon eine ganz gute Approximation für das Wachstum der Rundungsfehler für verschiedene $\eta > 0$ liefert. Es bleibt trotzdem unbefriedigend, dass man über keine Konvergenz für $h \to 0$ im klassischen Sinne sprechen kann. Für $h \to 0$ gilt stets $h \ll \eta$, was bedeutet, dass dieser Ansatz hier Aussagen für beliebig große η trifft. Darin liegen auch die Grenzen von (2.4.21) begründet. Dieses Problem gehen wir mit dem nächstem Unterkapitel an.

2.5. Kleine Störungen der Courant-Friedrich-Lewy Bedingung

$h \ll \eta$ führt fundamental zu dem Problem, dass kleine Rundungsfehler zu jeder noch so kleinen Zeit $t > 0$ beliebig groß werden und die richtige Lösung komplett überdecken. Wir rechnen in der Praxis jedoch mit einem positvem $h > 0$, für das eventuell auch $h \sim \eta$ gelten kann. Konkrete numerische Realisierungen existieren und entwickeln Oszillationen für feste h zu positiven Zeiten $t > 0$. Gerade für Probleme, bei denen numerische Daten nur in einem "kurzem" Zeitinterval unter instabilen Bedingungen gerechnet werden, könnte es also interessante Einblicke geben, das asymptotische Verhalten eines Verfahren für "kleine" Störungen der CFL Zahl zu kennen. Der bisherige Ansatz hat dies ignoriert und obwohl Abbildung 2.3 zeigt, dass (2.4.21) bereits gute Approximationen liefert, werden solche Überlegungen spätestens für die Advektion mit variabler Geschwindigkeit oder auch nichtlineare Probleme von Nöten sein. Daher betrachten wir nun die Koppelung $\eta = h$ und setzen $\lambda = 1 + h$ in die Gleichungen ein (2.3.2) bis (2.3.5) ein:

in der Ordnung $O(1)$:

$$u_0(n+1, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i) = 0 \tag{2.5.1}$$

in der Ordnung $O(h)$:

$$\partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) = \begin{aligned} &- \Big(u_0(n, i, t_n, x_i) - u_0(n, i-1, t_n, x_i)\Big) \\ &- \Big(u_1(n+1, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i)\Big) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

in der Ordnung $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_1(n, i-1, t_n, x_i) + \\ \partial_t u_0(n+1, i, t_n, x_i) + \partial_x u_0(n, i-1, t_n, x_i) \end{aligned} = \begin{aligned} &\frac{1}{2}\Big(\partial_x^2 u_0(n, i-1, t_n, x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1, i, t_n, x_i)\Big) \\ &- \Big(u_1(n, i, t_n, x_i) - u_1(n, i-1, t_n, x_i)\Big) \\ &- \Big(u_2(n+1, i, t_n, x_i) - u_2(n, i-1, t_n, x_i)\Big) \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

in der Ordnung $O(h^3)$:

$$\begin{aligned}\partial_t u_2(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_2(n,i-1,t_n,x_i) + \\ \partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i)\end{aligned} = \begin{aligned}&\frac{1}{2}\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i)\\ &-\frac{1}{6}\Big(\partial_x^3 u_0(n,i-1,t_n,x_i) + \partial_t^3 u_0(n+1,i,t_n,x_i)\Big)\\ &\frac{1}{2}\Big(\partial_x^2 u_1(n,i-1,t_n,x_i) - \partial_t^2 u_1(n+1,i,t_n,x_i)\Big)\\ &-\Big(u_2(n,i,t_n,x_i) - u_2(n,i-1,t_n,x_i)\Big)\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w_0(0,x_i) &= U(x_i), & z_0(0,x_i) &= V(x_i),\\ w_1(0,x_i) &= 0, & z_1(0,x_i) &= 0,\\ w_2(0,x_i) &= 0, & z_2(0,x_i) &= 0 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Setzt man wieder den Ansatz mit alternierenden Gittervorzeichen

$$u_k(n,i,t,x) = w_k(t,x) + (-1)^i\Omega(n)z_k(t,x), \qquad k = 0,1,2$$

ein, so folgt aus (2.5.1)

$$\begin{aligned} 0 &= u_0(n+1,i,t_n,x_i) - u_0(n,i-1,t_n,x_i)\\ &= w_0(t_n,x_i) + (-1)^i\Omega(n+1)z_0(t_n,x_i) - \Big(w_k(t_n,x_i) + (-1)^{i-1}\Omega(n)z_k(t_n,x_i)\Big)\\ &= (-1)^i\Omega(n+1)z_0(t_n,x_i) - (-1)^{i-1}\Omega(n)z_k(t_n,x_i)\\ &= (-1)^i\Omega(n+1)z_0(t_n,x_i) + (-1)^i\Omega(n)z_k(t_n,x_i)\\ &= (-1)^i z_0(t_n,x_i)\Big(\Omega(n+1) + \Omega(n)\Big), \end{aligned}$$

und das impliziert ganz analog wie in Satz 2.3, dass dieses mal $\Omega(n) = (-1)^n$ gilt. Folglich ist unser Ansatz durch

$$v_i^n = \begin{aligned} &w_0(t_n,x_i) + hw_1(t_n,x_i) + h^2 w_2(t_n,x_i)\\ &\quad + (-1)^{i+n}\Big(z_0(t_n,x_i) + hz_1(t_n,x_i) + h^2 z_2(t_n,x_i)\Big)\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

und diskreten Ansatzfunktionen sind dieses mal durch

$$u_k(n,i,t,x) = w_k(t,x) + (-1)^{i+n}z_k(t,x) \qquad k = 0,1,2 \tag{2.5.7}$$

gegeben. Hieraus folgt zunächst für alle $k = 0,1,2$

$$u_k(n+1,i,t,x) - u_k(n,i-1,t,x) = 0. \tag{2.5.8}$$

Die Gleichung (2.5.2) lautet mit der Bedingung (2.5.8) nun

$$\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i) = -\Big(u_0(n,i,t_n,x_i) - u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big)$$

Setzt man (2.5.7) für u_0 ein, so gilt für die linke Seite ferner

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i) \\
&= \partial_t w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n+1}\partial_t z_0(t_n,x_i) + \partial_x w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n-1}\partial_x z_0(t_n,x_i) \\
&= \partial_t w_0(t_n,x_i) + \partial_x w_0(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}\Big(\partial_t z_0(t_n,x_i) + \partial_x z_0(t_n,x_i)\Big). \qquad (2.5.9)
\end{aligned}$$

und für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned}
&-\Big(u_0(n,i,t_n,x_i) - u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big) \qquad (2.5.10)\\
&= -\Big(w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n} z_0(t_n,x_i) - \Big(w_0(t_n,x_i) + (-1)^{i+n-1} z_0(t_n,x_i)\Big)\Big) \\
&= -(-1)^{i+n} 2 z_0(t_n,x_i) \qquad (2.5.11)
\end{aligned}$$

Genau wie im vorangegangen Kapitel 2.4 folgern wir hieraus je eine Bedingung für die Funktionen w_0 und z_0. Jedoch können wir nicht das Gleiche wie in Satz 2.4 machen, da es dort essentiell war, dass wir eine in n unbeschränkte Funktion betrachten. Allerdings haben wir im Ansatz glatte Abbildungen $w_k, z_k \in C^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$ für $k = 0,1,2$ angenommen und wir können hier mit ihrer Regularität argumentieren.

Satz 2.5. *Sei $\omega \in (0,2\pi)$ und $\Omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beschränkt. D. h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|\Omega(n)| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte für alle $h > 0$, alle Gitterpunkte $(t_n, x_k) \in G_h$*

$$\begin{aligned}
F(t_n,x_k) &= e^{i\omega k}\Omega(n) f(t_n,x_k) \qquad \textit{bzw.} \\
F(t_n,x_k) &= \operatorname{Re}\left(e^{i\omega k}\Omega(n) f(t_n,x_k)\right)
\end{aligned} \qquad (2.5.12)$$

für zwei glatte Funktionen $F, f \in C^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$. Dann gilt für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= 0 \quad \textit{und} \\
f(t,x) &= 0.
\end{aligned}$$

Beweis. Weil f stetig differenzierbar ist, gilt mit der Voraussetzung (2.5.12)

$$\begin{aligned}
F(t_n,x_k) &= e^{i\omega k}\Omega(n) f(t_n,x_k) \\
&\text{und} \\
F(t_n,x_{k+1}) &= e^{i\omega(k+1)}\Omega(n) f(t_n,x_{k+1}) \\
&= e^{i\omega k}e^{i\omega}\Omega(n) f(t_n,x_{k+1}) \\
&= e^{i\omega k}e^{i\omega}\Omega(n)\Big(f(t_n,x_k) + h\partial_x f(t_n,x_k) + o(h)\Big)
\end{aligned}$$

also gilt für alle $h > 0$ auch

$$\begin{aligned}
|F(t_n,x_k+h)-F(t_n,x_k)| &= |F(t_n,x_{k+1})-F(t_n,x_k)| \\
&= \left|e^{i\omega k}(e^{i\omega}-1)\Omega(n)f(t_n,x_k)+he^{i\omega k}\Omega(n)\partial_x f(t_n,x_k)\right| \\
&\le \left|e^{i\omega k}(e^{i\omega}-1)\Omega(n)f(t_n,x_k)\right| + h\left|e^{i\omega k}\Omega(n)\partial_x f(t_n,x_k)\right| \\
&\le K\cdot\left|e^{i\omega k}(e^{i\omega}-1)f(t_n,x_k)\right| + hK\cdot\left|e^{i\omega k}\partial_x f(t_n,x_k)\right| \\
&= K\cdot\underbrace{\left|e^{i\omega k}\right|}_{=1}\left|(e^{i\omega}-1)f(t_n,x_k)\right| + hK\cdot\underbrace{\left|e^{i\omega k}\right|}_{=1}\left|\partial_x f(t_n,x_k)\right| \\
&= K\cdot\underbrace{\left|e^{i\omega}-1\right|}_{\neq 0}\left|f(t_n,x_k)\right| + hK\cdot\left|\partial_x f(t_n,x_k)\right|. \qquad (2.5.13)
\end{aligned}$$

Unser Gitter G_h ist gerade so gemacht, dass es für alle $(t,x)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}$ und zu jeder Folge von Gitterweiten $(h^p)_{p\in\mathbb{N}}$ mit $h_p\to 0$ eine Folge von Gitterpunkten $(t^p,x^p)\in G_{h_p}$ und $(t^p,x^p)\to(t,x)$ gibt. Es gilt $\lim_{h_p\to 0}\left|F(t^p,x^p+h_p)-F(t^p,x^p)\right| = 0$ für $h_p\to 0$, weil F stetig ist. Es gilt weiterhin

$$\lim_{p\to\infty} K\left|e^{i\omega}-1\right|\left|f(t^p,x^p)\right| + h_pK\left|\partial_x f(t^p,x^p)\right| = \lim_{p\to\infty} K\left|e^{i\omega}-1\right|\left|f(t^p,x^p)\right|.$$

Die Voraussetzung $0<\omega<2\pi$ impliziert nun $\left|e^{i\omega}-1\right|\neq 0$ und somit folgt aus der Stetigkeit von f und der Gleichung (2.5.13)

$$f(t,x) = \lim_{p\to\infty} f(t^p,x^p) = 0 \qquad \text{für } p\to\infty \text{ und } (t^p,x^p)\to(t,x),$$

was zu zeigen war. □

In Satz 2.5 ist nun hingegen wichtig, dass $\Omega(n)$ eine Art Sublinear-Growth-Bedingung erfüllt. D. h. wir brauchen in Gleichung (2.5.13), dass $h\cdot\Omega\left(h^{-1}\right)\to 0$ für $h\to 0$ gilt. Setzt man (2.5.9) und (2.5.10) nun gleich, so leitet man mithilfe des Satzes 2.5 die beiden Anfangswertprobleme

$$\partial_t w_0(t,x)+\partial_x w_0(t,x) = 0 \qquad w_0(0,x) = U(x) \quad \text{und} \qquad (2.5.14)$$

$$\partial_t z_0(t,x)+\partial_x z_0(t,x) = 2z_0(t,x) \qquad z_0(0,x) = V(x) \qquad (2.5.15)$$

her. Die Lösungen dieser Anfangswertprobleme haben wir schon im Anhang A.1.1 bestimmt und sie lauten

$$w_0(t,x) = U(x-t) \qquad \text{und} \qquad z_0(t,x) = V(x-t)e^{2t}. \qquad (2.5.16)$$

Insbesondere gelten dann

$$\partial_t^2 w_0(t,x) = \partial_x^2 w_0(t,x)$$

und

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 z_0(t,x) &= \partial_t\Big(\partial_t z_0(t,x)\Big) \\
&= \partial_t\Big(2z_0(t,x) - \partial_x z_0(t,x)\Big) \\
&= 2\partial_t z_0(t,x) - \partial_t\Big(\partial_x z_0(t,x)\Big) \\
&= 2\partial_t z_0(t,x) - \partial_x\Big(\partial_t z_0(t,x)\Big) \\
&= 2\Big(2z_0(t,x) - \partial_x z_0(t,x)\Big) - \partial_x\Big(2z_0(t,x) - \partial_x z_0(t,x)\Big) \\
&= 4z_0(t,x) - 4\partial_x z_0(t,x) + \partial_x^2 z_0(t,x).
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Wir widmen uns nun der nächsten Ordnung zu, der Gleichung (2.5.3) in der Ordnung $O(h^2)$. Mit der Eigenschaft (2.5.8) lautet sie

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i) + \\
&\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i)
\end{aligned}
=
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i)\Big) \\
&- \Big(u_1(n,i,t_n,x_i) - u_1(n,i-1,t_n,x_i)\Big)
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Und ganz analog wie schon im Fall von u_0 gelten die beiden Gleichungen

$$-\Big(u_1(n,i,t_n,x_i) - u_1(n,i-1,t_n,x_i)\Big) = -(-1)^{i+n} 2z_1(t_n,x_i) \tag{2.5.19}$$

und

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i) \\
&= \partial_t w_1(t_n,x_i) + \partial_x w_1(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}\Big(\partial_t z_1(t_n,x_i) + \partial_x z_1(t_n,x_i)\Big).
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i) &= -\Big(u_0(n,i,t_n,x_i) - u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big) \\
&= -(-1)^{i+n} 2z_0(t_n,x_i).
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Und aus der kleinen Nebenrechnung in (2.5.17) folgern wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) - \partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) - \partial_t^2\Big(u_0(n+1,i,t_n,x_i)\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\partial_x^2 w_0(t_n,x_i) + (-i)^{i+n-1}\partial_x^2 z_0(t_n,x_i) - \Big(\underbrace{\partial_t^2 w_0(t_n,x_i)}_{=\partial_x^2 w_0(t_n,x_i)} + (-i)^{i+n+1}\partial_t^2 z_0(t_n,x_i)\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[(-i)^{i+n-1}\partial_x^2 z_0(t_n,x_i) - (-i)^{i+n+1}\partial_t^2 z_0(t_n,x_i)\Big] \\
&= (-1)^{i+n}\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\partial_t^2 z_0(t_n,x_i)}_{=4z_0(t_n,x_i)-4\partial_x z_0(t_n,x_i)+\partial_x^2 z_0(t_n,x_i)} - \partial_x^2 z_0(t_n,x_i)\Big] \\
&= (-1)^{i+n} 2\Big[z_0(t_n,x_i) - \partial_x z_0(t_n,x_i)\Big]
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Setzen wir die vier Gleichungen (2.5.19) bis (2.5.22) zu der Gleichung (2.5.18) zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\partial_t w_1(t_n,x_i) + \partial_x w_1(t_n,x_i) - (-1)^{i+n}\Big(\partial_t z_1(t_n,x_i) + \partial_x z_1(t_n,x_i)\Big) \\
&= (-1)^{i+n}\Big[-2z_1(t_n,x_i) + 2\left(2z_0(t_n,x_i) - \partial_x z_0(t_n,x_i)\right)\Big]
\end{aligned}$$

Und wir erhalten mit Satz 2.5 die Anfangswertprobleme

$$\partial_t w_1(t,x) + \partial_x w_1(t,x) = 0 \qquad w_1(0,x) = 0 \quad \text{und} \tag{2.5.23}$$

$$\partial_t z_1(t,x) + \partial_x z_1(t,x) = 2z_1(t,x) + 2\Big(\partial_x z_0(t,x) - 2z_0(t,x)\Big) \qquad z_1(0,x) = 0 \tag{2.5.24}$$

Folglich gilt schon mal $w_1 = 0$ und wir können für z_0 wieder eine langsame Zeitvariable, dieses mal $\tau = 2ht$, einführen. Unsere Ansatzfunktionen u_k lautet nun für $k = 0,1,2$

$$u_k(n,i,t,x) = w_k(t,x) + (-1)^{i+n}\tilde{z}_k(t_n, 2ht_n, x_i).$$

Sei $\tilde{z}(t,\tau,x)$ derart, dass $z(t_n,x_i) = \tilde{z}(t_n,2ht_n,x_i)$ gilt, dann folgt

$$\partial_t z(t_n,x_i) = \partial_t \tilde{z}(t_n,\tau_n,x_i) + 2h\partial_\tau \tilde{z}(t_n,\tau_n,x_i).$$

Mit diesem Ansatz stellen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\partial_t z_0(t,\tau,x) + \partial_x z_0(t,\tau,x) &= 2z_0(t,\tau,x) \\
\partial_t z_1(t,\tau,x) + \partial_x z_1(t,\tau,x) &= 2z_1(t,\tau,x) + 2\Big(\partial_x z_0(t,\tau,x) - \partial_\tau z_0(t,\tau,x) - 2z_0(t,\tau,x)\Big) \\
z_0(0,0,x) &= V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
z_1(0,0,x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

auf und fordern zusätzlich

$$\partial_\tau z_0(t,\tau,x) - \partial_x z_0(t,\tau,x) = -2z_0(t,\tau,x). \tag{2.5.25}$$

Aus der ersten Gleichung $\partial_t z_0(t,\tau,x) + \partial_x z_0(t,\tau,x) = 2z_0(t,\tau,x)$, mit $z_0(0,0,x) = V(x)$ folgern wir $z_0(t,\tau,x) = A(\tau, x-t)e^{2t}$ für eine Abbildung A mit $A(0,x) = V(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit (2.5.25) lässt sich A dann für alle $(t,\tau,x) \in \mathbb{R}_0^{+2} \times \mathbb{R}$ durch

$$A(\tau, x-t) = A(0, x-t+\tau)e^{-2\tau}$$

bestimmen und es folgt für alle $(t,\tau,x) \in \mathbb{R}_0^{+} \times \mathbb{R}$

$$z_0(t,\tau,x) = V(x-t+\tau)e^{2(t-\tau)}, \qquad z_1(t,\tau,x) = 0.$$

Setzen wir unsere bisherigen Erkenntnisse nun wie in Anhang A.1.4 ein, so erhalten wir in Ordnung $O(h^3)$ schlussendlich die Gleichungen

$$\partial_t w_2(t,x) + \partial_x w_2(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_t^2 w_0(t,x) \tag{2.5.26}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t z_2(t,x) + \partial_x z_2(t,x) = 2z_2(t,x) - \Big(2\Big(\partial_\tau z_0(t,x) + \partial_\tau^2 z_0(t,x)\Big) \\
+ \frac{1}{2}(2\partial_t^2 z_0(t,x) - \partial_x^2 z_0(t,x)) + \frac{1}{6}\Big(\partial_t^3 z_0(t,x) + \partial_x^3 z_0(t,x)\Big)
\end{aligned} \tag{2.5.27}$$

2.6. Andere Frequenzen auf Gitterniveau – ein Exponentialansatz

3. Die lineare Transportgleichung mit ortsabhängiger Geschwindigkeit

4. Die Burgersgleichung

Ich weiß noch gar nicht, ob nichtlineare Verfahren überhaupt so anzugehen sind. Wenn ich hier was schaffen, dann vermutlich nicht viel und kann nur einen Ausblick geben. Vielleicht komme ich ja noch das Gudonov Verfahren für die Burgersgleichung auseinander zu nehmen. Jedenfalls stelle ich mir vor, dass man da noch andere, schwächere Ergebnisse als im linearen Fall erwarten kann.

$$\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0$$

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x \left(u^2(t,x)\right) = 0$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \lambda\Big(g(v_i^n, v_{i+1}^n) - g(v_{i-1}^n, v_i^n)\Big)$$

$$g(v,w) = \frac{\big(u(v,w)\big)^2}{2}, \qquad u(v,w) = \begin{cases} v, & \text{wenn } v \geq w \text{ und } \frac{v+w}{2} > 0 \\ w, & \text{wenn } v \geq w \text{ und } \frac{v+w}{2} \leq 0 \\ v, & \text{wenn } v < w \text{ und } v > 0 \\ w, & \text{wenn } v < w \text{ und } w < 0 \\ 0, & \text{wenn } v \leq 0 \leq w. \end{cases}$$

Literatur

[1] Michael Junk und Zhaoxia Yang. „Asymptotic Analysis of Finite Difference Methods". In: *Appl. Math. Comput.* 158.1 (Okt. 2004), S. 267–301. ISSN: 0096-3003. DOI: 10.1016/j.amc.2003.08.097. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2003.08.097.

A. Anhang

A.1. Die lineare Transportgleichung

A.1.1. Analytische Lösungen

Im Laufe der asymptotischen Entwicklung von (2.0.3) stellt sich heraus, dass die Ansatzfunktionen häufig selbst Lösungen der Transportgleichung (2.0.1) oder Variationen von dieser sind. Deshalb ist es nützlich und sinnvoll, die richtige Lösung solcher Gleichungen auch analytisch zu untersuchen. Wir betrachten hier bekannte Gleichungen, deren Lösungen u sogar exakt zu bestimmen sind. Bei der Lösungskonstruktion nutzen wir die Methode der Charakteristiken. Dabei bestimmen wir Kurven $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ durch die Zeit-Raum Ebene, welche uns Gleichungen liefern, mit denen zunächst $u \circ \varphi$ bestimmt werden kann und schließen dann auf Lösungen von u. Im Fall unserer linearen partiellen Differentialgleichungen werden diese Kurven φ immer Geraden sein. Zunächst betrachten wir

Die homogene Transportgleichung

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = U(x). \tag{A.1.1}$$

Wenn u eine Lösung von (A.1.1) ist, dann ist u konstant auf Geraden der Steigung 1. Betrachte nämlich die Zeit-Raum Kurve

$$\varphi_t(\tau) = (\tau, x + \tau - t). \tag{A.1.2}$$

Dann gilt für alle $t, \tau \in \mathbb{R}_0^+ : D\varphi_t(\tau) = (1,1)$ und folglich auch

$$Du\Big(\varphi_t(\tau)\Big) = \partial_t u(\tau, x + \tau - t) + \partial_x u(\tau, x + \tau - t) = 0. \tag{A.1.3}$$

Insbesondere impliziert das wegen des Hauptsatzes für die Integral und Differentialrechnung für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$u(t,x) - u(0, x - t) = \int_0^t Du(\tau, x + \tau - t)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t Du\Big(\varphi_t(\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{A.1.4}$$

und wegen der Anfangsbedingung $u(0,x) = U(x - t)$ gilt also auch für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$u(t,x) = U(x - t). \tag{A.1.5}$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit von Lösungen von (A.1.1). Andererseits ist jedes so definierte $u(t,x) = U(x - t)$ auch eine Lösung von (A.1.1), solange das für U, im womöglich schwachem Sinne, möglich ist. Denn es gilt

$$\partial_t U(x - t) + \partial_x U(x - t) = DU(x - t) \cdot (-1) + DU(x - t) \cdot 1 = 0. \tag{A.1.6}$$

Die inhomogene Transportgleichung

Sei $F \in L^1\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$. Wir betrachten nun die lineare Transportgleichung mit nichtverschwindender rechten Seite

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = F(t,x), \quad u(0,x) = U(x). \tag{A.1.7}$$

Dann gilt für Lösungen u von (A.1.7) ganz analog wie im homogenen Fall mit φ wie in (A.1.2)

$$Du\Big(\varphi_t(\tau)\Big) = F(\tau, x+\tau-t). \tag{A.1.8}$$

Demnach folgt wieder mit dem Hauptsatz

$$u(t,x) - u(0,x-t) = \int_0^t F(\tau, x+\tau-t)\,\mathrm{d}\tau. \tag{A.1.9}$$

Wir werden oft den Spezialfall sehen, dass F selbst Lösung von (A.1.1) ist. Es gilt dann nämlich $F(\tau, x+\tau-t) = F(0,x-t)$ für alle $\tau, t \in \mathbb{R}_0^+$ und somit folgt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$u(t,x) - u(0,x-t) = \int_0^t F(0,x-t)\,\mathrm{d}\tau = tF(0,x-t), \tag{A.1.10}$$

also auch für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$u(t,x) = U(x-t) + tF(0,x-t). \tag{A.1.11}$$

Eine homogene Exponentialgleichung

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = au(t,x), \quad u(0,x) = U(x). \tag{A.1.12}$$

Sei wieder φ aus (A.1.2) gegeben. Dann gilt dieses mal

$$Du\Big(\varphi_t(\tau)\Big) = au(\varphi_t(\tau)), \qquad \text{mit } u\Big(\varphi_t(0)\Big) = U(x-t). \tag{A.1.13}$$

D. h. u erfüllt entlang der Kurve φ_t die Differentialgleichung (A.1.13). Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet bekanntlich $u\Big(\varphi_t(\tau)\Big) = U(x-t)e^{a\tau}$ und es folgt weiterhin

$$\begin{aligned} u(t,x) - u(0,x-t) &= \int_0^t Du(\tau, x+\tau-t)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t Du\Big(\varphi_t(\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t au(\varphi_t(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t aU(x-t)e^{a\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= U(x-t)e^{at} - U(x-t). \end{aligned} \tag{A.1.14}$$

Wegen $u(0,x-t) = U(x-t)$ impliziert das hiermit für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$u(t,x) = U(x-t)e^{at}. \tag{A.1.15}$$

Eine inhomogene Exponentialgleichung

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $F \in L^1\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$. Betrachte nun das Anfangswertproblem

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = au(t,x) + F(t,x), \quad \text{für } u(0,x) = U(x). \tag{A.1.16}$$

Diesesmal kriegen wir für $u \circ \varphi_t$ die Differentialgleichung

$$Du\Big(\varphi_t(\tau)\Big) = au\Big(\varphi_t(\tau)\Big) + F\Big(\varphi_t(\tau)\Big). \tag{A.1.17}$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung, deren homogene Lösung wir schon in (A.1.13) bestimmt haben. Nun wenden wir die Methode der Variation der Konstanten an, um eine Lösung von (A.1.17) zu bestimmen. Wir machen den Ansatz

$$u\Big(\phi_t(\tau)\Big) = A(\tau)e^{a\tau} \tag{A.1.18}$$

und gesucht ist eine Koeffizientenabbildung A, so dass für alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$

$$D\left[A(\tau)e^{a\tau}\right] = au\Big(\varphi_t(\tau)\Big) + F\Big(\varphi_t(\tau)\Big) \quad \text{mit } A(0) = U(x-t) \tag{A.1.19}$$

gilt. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} D\left[A(\tau)e^{a\tau}\right] &= A(\tau) \cdot ae^{a\tau} + e^{a\tau}DA(\tau) \\ &= au\Big(\varphi_t(\tau)\Big) + e^{a\tau}DA(\tau) \end{aligned} \tag{A.1.20}$$

und somit muss für alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$

$$e^{a\tau}DA(\tau) = F\Big(\varphi_t(\tau)\Big) \tag{A.1.21}$$

bzw. nach dem Anwenden des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung

$$\begin{aligned} A(t) - A(0) &= \int_0^t e^{-a\tau}F\Big(\varphi_t(\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t e^{-a\tau}F\Big(\tau, x+\tau-t\Big)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{A.1.22}$$

gelten. Für den speziellen Fall, dass F selbst Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung (A.1.12) mit $F(0,x) = V(x)$ ist, folgt $F(t,x) = e^{at}V(x-t)$ und somit gilt

$$A(\tau) = A(0) + \int_0^\tau e^{-as}F\Big(\varphi_t(s)\Big)\,\mathrm{d}s \tag{A.1.23}$$

$$= U(x-t) + \int_0^\tau e^{-as}e^{as}V(x-t)\,\mathrm{d}s \tag{A.1.24}$$

$$= U(x-t) + \tau V(x-t) \qquad \text{für alle } \tau, t \in \mathbb{R}_0^+. \tag{A.1.25}$$

Insgesamt erhält man ganz analog wie bisher in diesem Spezialfall die folgende Lösung für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$:

$$u(t,x) = A(t)e^{at} = \Big(U(x-t) + tV(x-t)\Big)e^{at}. \tag{A.1.26}$$

A.1.2. Rechnungen für den regulären Ansatz

Ohne langsame Zeitskala

Sei der Ansatz aus (2.1.1)

$$v_i^n = u_0(t_n, x_i) + hu_1(t_n, x_i) + o(h) \tag{A.1.27}$$

für glatte Abbildungen $u_0, u_1 \in C^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$ gegeben. Wir rechnen nun die beiden Summanden aus (2.0.3) aus und benutzen dabei, dass $t_n = nh\lambda$ und $x_i = ih$ gilt. Das impliziert nämlich

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= \Big(u_0(t_{n+1}, x_i) + hu_1(t_{n+1}, x_i)\Big) - \Big(u_0(t_n, x_i) + hu_1(t_n, x_i)\Big) \\
&= \Big(u_0(t_{n+1}, x_i) - u_0(t_n, x_i)\Big) + h \cdot \Big(u_1(t_{n+1}, x_i) - u_1(t_n, x_i)\Big) \\
&= \Big(u_0(t_n + h\lambda, x_i) - u_0(t_n, x_i)\Big) + h \cdot \Big(u_1(t_n + h\lambda, x_i) - u_1(t_n, x_i)\Big) \\
&= \left(h \cdot \lambda \partial_t u_0(t_n, x_i) + \frac{(h\lambda)^2}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + o(h^2)\right) \\
&\quad + h \cdot \Big(h\lambda \partial_t u_1(t_n, x_i) + o(h)\Big) \\
&= h \cdot \lambda \partial_t u_0(t_n, x_i) + h^2 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i) + \lambda \partial_t u_1(t_n, x_i)\right) + o(h^2)
\end{aligned} \tag{A.1.28}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(v_i^n - v_{i-1}^n\Big) &= \lambda\Big[\Big(u_0(t_n, x_i) + hu_1(t_n, x_i)\Big) - \Big(u_0(t_n, x_{i-1}) + hu_1(t_n, x_{i-1})\Big)\Big] \\
&= \lambda\Big[\Big(u_0(t_n, x_i) - u_0(t_n, x_{i-1})\Big) + h \cdot \Big(u_1(t_n, x_i) - hu_1(t_n, x_{i-1})\Big)\Big] \\
&= \lambda\Big[\Big(u_0(t_n, x_i) - u_0(t_n, x_i - h)\Big) + h \cdot \Big(u_1(t_n, x_i) - hu_1(t_n, x_i - h)\Big)\Big] \\
&= \lambda\Big[h \cdot \partial_x u_0(t_n, x_i) - \frac{h^2}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_i) + o(h^2) \\
&\quad + h \cdot \Big(h \cdot \partial_x u_1(t_n, x_i) + o(h)\Big)\Big] \\
&= h \cdot \lambda \partial_x u_0(t_n, x_i) + h^2 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_i) + \lambda \partial_x u_1(t_n, x_i)\right) + o(h^2).
\end{aligned} \tag{A.1.29}$$

Sortiert man diese Ergebnisse nun nach den Ordnungen von h so erhält man die beiden Gleichungen für alle Gitterpunkte $(t_n, x_i) \in G_h$

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \Big(\partial_t u_0(t_n, x_i) + \partial_x u_0(t_n, x_i)\Big) &= 0 \\
\lambda \cdot \Big(\partial_t u_1(t_n, x_i) + \partial_x u_1(t_n, x_i)\Big) &= \lambda \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 u_0(t_n, x_i) - \frac{\lambda}{2} \partial_t^2 u_0(t_n, x_i)\right)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten nun für alle Gitterweiten $h > 0$. Teilt man die Gleichungen durch $\lambda > 0$ und verwendet die stetige Differenzierbarkeit der Ansatzfunktionen, so erhält man hieraus für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$

$$\partial_t u_0(t,x) + \partial_x u_0(t,x) = 0 \tag{A.1.30}$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(t,x) + \partial_x u_1(t,x) &= \frac{1}{2}\partial_x^2 u_0(t,x) - \frac{\lambda}{2}\partial_t^2 u_0(t,x) \\ &= \frac{1-\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(t,x) \end{aligned} \tag{A.1.31}$$

wobei wir in (A.1.31) schon die Gleichung (A.1.30) für u_0 benutzt haben, denn es gilt

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_0(t,x) &= \partial_t \left(\partial_t u_0(t,x)\right) \\ &= \partial_t \left(-\partial_x u_0(t,x)\right) \\ &= -\partial_x \left(\partial_t u_0(t,x)\right) \\ &= -\partial_x \left(-\partial_x u_0(t,x)\right) \\ &= \partial_x^2 u_0(t,x). \end{aligned}$$

Mit langsamer Zeitskala

Wir betrachten nun den Ansatz (2.1.6)

$$v_i^n = u_0(t,\tau,x) + hu_1(t,\tau,x) + o(h) \tag{A.1.32}$$

mit $\tau = ht$. Die beiden Summanden aus dem Upwind-Verfahren (2.0.3) ergeben nun

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} - v_i^n &= \left(u_0(t_{n+1},\tau_{n+1},x_i) + hu_1(t_{n+1},\tau_{n+1},x_i)\right) - \left(u_0(t_n,\tau_n,x_i) + hu_1(t_n,\tau_n,x_i)\right) \\ &= \left(u_0(t_{n+1},\tau_{n+1},x_i) - u_0(t_n,\tau_n,x_i)\right) + h\cdot\left(u_1(t_{n+1},\tau_{n+1},x_i) - u_1(t_n,\tau_n,x_i)\right) \\ &= \left(u_0(t_n + h\lambda, \tau_n + h^2\lambda, x_i) - u_0(t_n,\tau_n,x_i)\right) \\ &\quad + h\cdot\left(u_1(t_n + h\lambda, \tau_n + h^2\lambda, x_i) - u_1(t_n,\tau_n,x_i)\right) \\ &= \left(h\cdot\lambda\partial_t u_0(t_n,\tau_n,x_i) + \frac{(h\lambda)^2}{2}\partial_t^2 u_0(t_n,\tau_n,x_i) + h^2\lambda\partial_\tau u_0(t_n,\tau_n,x_i) + o(h^2)\right) \\ &\quad + h\cdot\left(h\lambda\partial_t u_1(t_n,\tau_n,x_i) + o(h)\right) \\ &= h\cdot\lambda\partial_t u_0(t_n,\tau_n,x_i) \\ &\quad + h^2\cdot\left(\frac{\lambda^2}{2}\partial_t^2 u_0(t_n,\tau_n,x_i) + \lambda\partial_\tau u_0(t_n,\tau_n,x_i) + \lambda\partial_t u_1(t_n,\tau_n,x_i)\right) + o(h^2) \end{aligned} \tag{A.1.33}$$

und, weil τ_n nicht von i abhängt, folgt ganz analog wie in (A.1.29) für die zweite Differenz

$$\begin{aligned} \lambda\left(v_i^n - v_{i-1}^n\right) &= \lambda\left[\left(u_0(t_n,\tau_n,x_i) + hu_1(t_n,\tau_n,x_i)\right) - \left(u_0(t_n,\tau_n,x_{i-1}) + hu_1(t_n,\tau_n,x_{i-1})\right)\right] \\ &= h\cdot\lambda\partial_x u_0(t_n,\tau_n,x_i) + h^2\cdot\left(-\frac{\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(t_n,\tau_n,x_i) + \lambda\partial_x u_1(t_n,\tau_n,x_i)\right) + o(h^2). \end{aligned} \tag{A.1.34}$$

Addiert man beide Summanden (A.1.33) und (A.1.34), teilt durch λ, sortiert nach den Ordnungen von h und benutzt wieder die stetige Differenzierbarkeit der Ansatzfunktionen u_0 und u_1, so erhält man für alle (t,τ,x) das Gleichungssystem

$$\partial_t u_0(t,\tau,x) + \partial_x u_0(t,\tau,x) = 0 \tag{A.1.35}$$

$$\partial_t u_1(t,\tau,x) + \partial_x u_1(t,\tau,x) = \frac{1-\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(t,\tau,x) - \partial_\tau u_0(t,\tau,x) \tag{A.1.36}$$

A.1.3. Rechnungen für diskrete Ansätze

In diesem Kapitel betrachten wir den allgemeinen Ansatz (2.3.1) mit der diskreten Skala (n,i)

$$v_i^n = u_0(n,i,t_n,x_i) + hu_1(n,i,t_n,x_i) + h^2 u_2(n,i,t_n,x_i) + o(h^2),$$

wobei $u_k(n,i,\cdot,\cdot) \in C^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ und $k = 0,1,2$ gilt. Wir rechnen nun die einzelnen Summanden von (2.0.2) aus und benutzen dabei ganz wesentlich folgende Gleichungen für alle $k = 0,1,2$:

$$\begin{aligned}
&u_k(n+1,i,t_{n+1},x_i)\\
&\quad -u_k(n,i,t_n,x_i) = u_k(n+1,i,t_n+\lambda h,x_i) - u_k(n,i,t_n,x_i)\\
&\qquad = u_k(n+1,i,t_n,x_i) - u_k(n,i,t_n,x_i) + \lambda h\partial_t u_k(n+1,i,t_n,x_i)\\
&\qquad\quad + \frac{(\lambda h)^2}{2}\partial_t^2 u_k(n+1,i,t_n,x_i) + \frac{(\lambda h)^3}{6}\partial_t^3 u_k(n+1,i,t_n,x_i)
\end{aligned} \tag{A.1.37}$$

und

$$\begin{aligned}
&u_k(n,i,t_n,x_i)\\
&\quad -u_k(n,i-1,t_n,x_{i-1}) = u_k(n,i,t_n,x_i) - u_k(n,i-1,t_n,x_i-h)\\
&\qquad = u_k(n,i,t_n,x_i) - u_k(n,i-1,t_n,x_i) + h\partial_x u_k(n,i-1,t_n,x_i)\\
&\qquad\quad - \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u_k(n,i-1,t_n,x_i) + \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u_k(n,i-1,t_n,x_i) + o(h^3).
\end{aligned} \tag{A.1.38}$$

Somit folgt mit (A.1.37) zunächst für die Differenz in n

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= \sum_{k=0}^{2} h^k \Big(u_k(n+1,i,t_{n+1},x_i) - u_k(n,i,t_n,x_i)\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{2} h^k \Bigg(u_k(n+1,i,t_n,x_i) - u_k(n,i,t_n,x_i) + \lambda h\partial_t u_k(n+1,i,t_n,x_i)\\
&\qquad + \frac{(\lambda h)^2}{2}\partial_t^2 u_k(n+1,i,t_n,x_i) + \frac{(\lambda h)^3}{6}\partial_t^3 u_k(n+1,i,t_n,x_i) + o(h^3)\Bigg).
\end{aligned}$$

und sortiert man das nach den Ordnungen von h, so erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= u_0(n+1,i,t_n,x_i) - u_0(n,i,t_n,x_i) \\
&+ h \cdot \Big(\lambda\partial_t u_0(n+1,i,t_n,x_i) + u_1(n+1,i,t_n,x_i) - u_1(n,i,t_n,x_i)\Big) \\
&+ h^2 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2}\partial_t^2 u_0(n+1,i,t_n,x_i) + \lambda\partial_t u_1(n+1,i,t_n,x_i) + u_2(n+1,i,t_n,x_i) - u_2(n,i,t_n,x_i)\right) \\
&+ h^3 \cdot \left(\frac{\lambda^3}{6}\partial_t^3 u_0(n+1,i,t_n,x_i)\frac{\lambda^2}{2}\partial_t^2 u_1(n+1,i,t_n,x_i) + \lambda\partial_t u_2(n+1,i,t_n,x_i)\right) \\
&+ o(h^3).
\end{aligned} \tag{A.1.39}$$

Mit (A.1.38) folgt ganz analog für die Differenz in i

$$\begin{aligned}
\lambda\left(v_i^n - v_{i-1}^n\right) &= \lambda \cdot \left[\sum_{k=0}^{2} h^k \Big(u_k(n,i,t_n,x_i) - u_k(n,i-1,t_n,x_{i-1})\Big)\right] \\
&= \lambda \cdot \Bigg[\sum_{k=0}^{2} h^k \Big(u_k(n,i,t_n,x_i) - u_k(n,i-1,t_n,x_i) + h\partial_x u_k(n,i-1,t_n,x_i) \\
&\qquad - \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u_k(n,i-1,t_n,x_i) + \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u_k(n,i-1,t_n,x_i) + o(h^3)\Big)\Bigg] \\
&= \lambda \cdot \Big(u_0(n,i,t_n,x_i) - u_0(n,i-1,t_n,x_i)\Big) \\
&+ h \cdot \Big(\lambda\partial_x u_0(n,i-1,t_n,x_i) + \lambda\Big(u_1(n,i,t_n,x_i) - u_1(n,i-1,t_n,x_i)\Big)\Big) \\
&+ h^2 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2}\partial_x^2 u_0(n,i-1,t_n,x_i) + \lambda\partial_x u_1(n,i-1,t_n,x_i) + \lambda\Big(u_2(n,i,t_n,x_i) - u_2(n,i-1,t_n,x_i)\Big)\right) \\
&+ h^3 \cdot \left(\frac{h^3}{6}\partial_x^3 u_k(n,i-1,t_n,x_i) - \frac{\lambda}{2}\partial_x^2 u_1(n,i-1,t_n,x_i) + \lambda\partial_x u_2(n,i-1,t_n,x_i)\right) \\
&+ o(h^3).
\end{aligned} \tag{A.1.40}$$

A.1.4. Rechnung des Ansatzes für kleine Störungen der CFL Zahl

Sei

$$\begin{aligned}
v_i^n &= w_0(t_n,x_i) + hw_1(t_n,x_i) + h^2 w_2(t_n,x_i) && \text{(A.1.41)} \\
&+ (-1)^{i+n}\Big(z_0(t_n,2ht_n,x_i) + h^2 z_1(t_n,2ht_n,x_i) + h^2 z_2(t_n,2ht_n,x_i)\Big). && \text{(A.1.42)}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= h(1+h)\partial_t w_0 + h^2\frac{1+2h}{2}\partial_t^2 w_0 + \frac{h^3}{6}\partial_t^3 w_0 \\
&+ h^2(1+h)\partial_t w_1 + \frac{h^3}{2}\partial_t^2 w_1 + h^3\partial_t w_2 \\
&- (-1)^{i+n}\Big(2z_0 + h(1+h)\partial_t z_0 + 2h^2(1+h)\partial_\tau z_0 + h^2\frac{(1+2h)}{2}\partial_t^2 z_0 + 2h^3\partial_\tau^2 z_0 + \frac{h^3}{6}\partial_t^3 z_0 \\
&+ h2z_1 + h^2(1+h)\partial_t z_1 + 2h^3\partial_\tau z_1 + \frac{h^3}{2}\partial_t^2 z_1 + h^2 2z_2 + h^3\partial_t z_2\Big) + o(h^3)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(1+h)(v_i^n - v_{i-1}^n) &= h(1+h)\partial_x w_0 - h^2\frac{1+h}{2}\partial_x^2 w_0 + \frac{h^3}{6}\partial_x^3 w_0\\
&+ h^2(1+h)\partial_x w_1 - \frac{h^3}{2}\partial_x^2 w_1 + h^3\partial_x w_2\\
&+ (-1)^{i+n}\Big((1+h)2z_0 - h(1+h)\partial_x z_0 + h^2\frac{1+h}{2}\partial_x^2 z_0 - \frac{h^3}{6}\partial_x^3 z_0\\
&+ h(1+h)2z_1 - h^2(1+h)\partial_x z_1 + \frac{h^3}{2}\partial_x^2 z_1 + h^2(1+h)2z_2 - h^3\partial_x z_2\Big) + o(h^3)\end{aligned}$$

und somit folgt mit $z_1 = 0$

$$\begin{aligned}0 &= v_i^{n+1} - v_i^n + (1+h)(v_i^n - v_{i-1}^n)\\
&= h\Big(\partial_t w_0 + \partial_x w_0 + 2z_0 - \partial_t z_0 - \partial_x z_0\Big)\\
&+ h^2\Big(-2\partial_\tau z_0 + \frac{1}{2}\Big(\partial_x^2 z_0 - \partial_t^2 z_0\Big) - \partial_t z_0 - \partial_x z_0\Big)\\
&+ h^3\Big(\partial_t w_2 + \partial_x w_2 + \frac{1}{2}\partial_t^2 w_0\\
&\quad - (-1)^{i+n}\Big(2\partial_\tau z_0 + \frac{1}{2}(2\partial_t^2 z_0 - \partial_x^2 z_0) + 2\partial_\tau^2 z_0 + \frac{1}{6}\Big(\partial_t^3 z_0 + \partial_x^3 z_0\Big) + \partial_t z_2 + \partial_x z_2 - 2z_2\Big)\Big).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\partial_t w_2 + \partial_x w_2 = -\frac{1}{2}\partial_t^2 w_0 \tag{A.1.43}$$

$$\partial_t z_2 + \partial_x z_2 = 2z_2 - \Big(2\Big(\partial_\tau z_0 + \partial_\tau^2 z_0\Big) + \frac{1}{2}(2\partial_t^2 z_0 - \partial_x^2 z_0) + \frac{1}{6}\Big(\partial_t^3 z_0 + \partial_x^3 z_0\Big)\Big) \tag{A.1.44}$$

A.1.5. WKB Ansatz

Es seien die Ansätze

$$u_l(n,k,t,x) = w_l(t,x) + e^{i(\omega k - \theta n)} z_l(t,x) \quad \text{für } l = 0,1,2 \tag{A.1.45}$$

gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}u_l(n+1,k,t_n,x_k) - u_l(n,k,t_n,x_k) &= w_l(t,x) + e^{i(\omega k - \theta(n+1))} z_l(t,x) - \Big(w_l(t,x) + e^{i(\omega k - \theta n)} z_l(t,x)\Big)\\
&= e^{i(\omega k - \theta n)}(e^{-i\theta} - 1) z_l(t,x).\end{aligned} \tag{A.1.46}$$

und

$$\begin{aligned}u_l(n,k,t_n,x_k) - u_l(n,k-1,t_n,x_k) &= w_l(t,x) + e^{i(\omega k - \theta n)} z_l(t,x) - \Big(w_l(t,x) + e^{i(\omega(k-1) - \theta n)} z_l(t,x)\Big)\\
&= e^{i(\omega k - \theta n)}(1 - e^{-i\omega}) z_l(t,x).\end{aligned} \tag{A.1.47}$$

also folgt aus

$$u_0(n+1,k,t_n,x_k) - u_0(n,k,t_n,x_k) + \lambda(u_0(n,k,t_n,x_k) - u_0(n,k-1,t_n,x_k)) = 0 \tag{A.1.48}$$

auch

$$0 = e^{i(\omega k - \theta n)}(e^{-i\theta} - 1)z_0(t,x) + \lambda e^{i(\omega k - \theta n)}(1 - e^{-i\omega})z_0(t,x) \tag{A.1.49}$$

$$= e^{i(\omega k - \theta n)}z_0(t,x)(\lambda - 1 + e^{-i\theta} - \lambda e^{-i\omega}) \tag{A.1.50}$$

Somit muss

$$e^{-i\theta} - \lambda e^{-i\omega} = 1 - \lambda \tag{A.1.51}$$

gelten und das liefert uns das Gleichungssystem

$$\mathrm{Im}\left(e^{-i\theta} - \lambda e^{-i\omega}\right) = 0 \qquad \text{und} \tag{A.1.52}$$

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} - \lambda e^{-i\omega}\right) = 1 - \lambda. \tag{A.1.53}$$

Die Abbildungen $S_1 \colon \theta \mapsto e^{-i\theta}$ bzw. $S_\lambda \colon \omega \mapsto \lambda e^{-\omega}$ beschreiben jeweils einen Kreis in der komplexen Zahleneben mit den Radien 1 und $\lambda > 1$. Wegen der Dreiecksungleichung haben zwei Komplexe Zahlen $z_\theta \in S_1$ und $z_\omega \in S_\lambda$ nur dann Abstand $|z_\theta - z_\omega| = \lambda - 1$, wenn $z_\theta = \lambda z_\omega =: \lambda z$ gilt. Das folgt beispielsweise aus

$$(|z_\theta - z_\omega|)^2 = (z_\theta - z_\omega)^2 = (1 - \lambda)^2 \tag{A.1.54}$$

$$z_\theta^2 - 2z_\theta z_\omega + z_\omega^2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 \qquad \Leftrightarrow \tag{A.1.55}$$

$$z_\theta z_\omega = \lambda = |z_\theta| \cdot |z_\omega| \qquad \Leftrightarrow \tag{A.1.56}$$

Aus Gleichung (A.1.52) folgt, dass z reell sein muss und aus (A.1.53) folgt $z = 1$. Im Wesentlichen kommt nun raus, dass der Ansatz (A.1.45) nur funktionieren kann, wenn wir keine Oszillationen annehmen. Der Unterschied zum diskreten Ansatz mit alternierenden Gitterzeichen ist, dass wir hier keine in n steigende Amplitudenfunktion angenommen haben, die uns einen zusätzlichen Freiheitsgrad bei der Bestimmung der gibt. Das korrigieren wir, indem wir $\Omega(n)$ als Faktor hinzufügen und so erhalten wir nun den diskreten Ansatz

$$u_l(n,k,t,x) = w_l(t,x) + \Omega(n)e^{i(\omega k - \theta n)}z_l(t,x) \quad \text{für } l = 0,1,2 \tag{A.1.57}$$

mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} &u_0(n+1,k,t_n,x_k) \\ &\quad -u_0(n,k,t_n,x_k) = w_0 + \Omega(n+1)e^{i(\omega k - \theta(n+1))}z_0(t,x) - \left(w_0(t,x) + \Omega(n)e^{i(\omega k - \theta n)}z_0(t,x)\right) && \text{(A.1.58)} \\ &\quad = e^{i(\omega k - \theta n)}(\Omega(n+1)e^{-i\theta} - \Omega(n))z_0(t,x). && \text{(A.1.59)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &u_0(n,k,t_n,x_k) \\ &-u_0(n,k-1,t_n,x_k) = w_0(t,x) + \Omega(n)e^{i(\omega k - \theta n)}z_0(t,x) - \left(w_0(t,x) + \Omega(n)e^{i(\omega(k-1) - \theta n)}z_0(t,x)\right) && \text{(A.1.60)} \\ &\quad = e^{i(\omega k - \theta n)}\Omega(n)(1 - e^{-i\omega})z_0(t,x). && \text{(A.1.61)} \end{aligned}$$

Es gilt weiterhin immernoch (A.1.48), also folgt aus

$$e^{i(\omega k - \theta n)}(\Omega(n+1)e^{-i\theta} - \Omega(n))z_0(t,x) + \lambda e^{i(\omega k - \theta n)}\Omega(n)(1 - e^{-i\omega})z_0(t,x) = 0 \tag{A.1.62}$$

die Gleichung

$$0 = \Omega(n+1)e^{-i\theta} - \Omega(n) + \lambda\Omega(n)(1 - e^{-i\omega}) \tag{A.1.63}$$

$$= \Omega(n+1)e^{-i\theta} - \lambda\Omega(n)e^{-i\omega} + (\lambda - 1)\Omega(n) \tag{A.1.64}$$

$$= \Omega(n+1)e^{-i\theta} + \Omega(n)\left(\lambda(1 - e^{-i\omega}) - 1\right) \tag{A.1.65}$$

A.2. Für diese Arbeit geschriebene Quelltexte

Hier listen wir der Vollständigkeit wegen alle Programme auf, die für das Erzeugen der Daten und Plots in dieser Arbeit verantwortlich sind. Anhand dieser Quelltexte kann im Zweifel am genausten nachvollzogen werden, was die Plots zeigen.

Upwind Verfahren

```
% Perform the upwind method given by
%
%       v(n+1,i) = v(n,i) - lambda(i)*(v(n,i) - v(n,i-1))
%
% Parameter
%       u0     - initial value function
%       lambda - grid aspect ratio times velocity, possibly space dependent
%       N      - number of iterations
function V = upwind(u0, lambda, N)
    I = length(u0);
    V = zeros(N, I);
    V(1,:) = u0;
    for n = 1:N-1
        V(n+1,:) = V(n,:) - lambda(:) .* (V(n,:) - shift(V(n, :), 1));
    end
end
```

octave/upwind.m

Führe das Upwind Verfahren mit den Anfangsdaten $U(x) = \sin(\pi x)$ aus

```
% Use the upwind(u0, lambda, N) method to solve
%
%       u_t(t,x) + u_x(t,x) = 0,   u(0,x) = sin(x)
%
% With lambda = 1 + eta. Returns data to use as gnuplot table.
% Parameter
%       eta - measure of "instabilty"
%       h   - grid length
%       N   - number of time steps
function V = transport_example(eta, h, N)
    % Setup Properties and Initial Conditions
    % space dimensions [x0, xN]
    x0 = [-2,2];
    % grid ratios
    lambda = 1 + eta;

    % space vector
    x = x0(1)+h:h:x0(2);
    % initial values
    u0 = sin(pi*x);

    % Call Numerical Method
    V = upwind(u0, lambda, N);
    V = V';
```

```
end
```

octave/transport_example.m

Plotdaten für das erste Beispiel und Fehler für den alternierenden Ansatz

```
% create plots for section 2.2 "Ein Beispiel fuer instabiles Verhalten"
%
% save gnuplot table data in data/max_errors_*.dat and data/V_sinus_*.dat
% files.

% guess iterations with same error, depending on eta
step_fn = @(err,eta) ...
    floor((log(err).-log(eps))./log(1+2*eta));

% examples = [ (eta, h) ]
examples = {  [1e-1, 1e-2],
              [1e-1, 1e-3],
              [5e-2, 1e-3] };

x0 = [-2, 2];

for i = 1:length(examples)
    eta = examples{i}(1);
    h   = examples{i}(2);
    X = [x0(1)+h:h:x0(2)]';

    % guess iteration for given errors
    % make as many iterations as needed for the largest error
    wanted_error  = 1;
    max_N = step_fn(wanted_error, eta);
    V = transport_example(eta, h, max_N);

    % save numerical solution to file for example plot
    V = [X, V(:, max_N)];
    file_name = sprintf('./data/V_sinus_eta_%.3f_h_%.3f.dat', eta, h);
    fid = fopen(file_name, "w");
    fdisp(fid, V);
    fclose(fid);
end
```

octave/create_example_plots.m

Fehlerplots für Beispiele

```
warning ("off", "Octave:broadcast");
format long e;
% calculate max difference between numerical scheme and true solution
sinus_max_err_fn = @(N,X,V,h,eta) ...
    max(abs( sin(pi*(X-(N-1)*(h+h*eta))) - V(:,N) ));

% guess iterations with same error, depending on eta
step_fn = @(err,eta) ...
    floor((log(err).-log(eps))./log(1+2*eta));
```

```
% compare errors with formulas
exptected_err_fn_1 = @(n,h,eta) ...
    (1+2*eta).^n*eps;
% compare errors with formulas
exptected_err_fn = @(n,h,eta) ...
    (1+2*eta).^n*eps+(pi^2/2)*h*eta*(h+h*eta).*n;

% examples = [ (eta, h) ]
examples = {  [1e-1, 1e-2],
              [1e-1, 1e-3],
              [5e-2, 1e-3],
              [1e-2, 1e-3] };


x0 = [-2, 2];

for i = 1:length(examples)
    eta = examples{i}(1);
    h   = examples{i}(2);
    X = [x0(1)+h:h:x0(2)]';

    % guess iteration for given errors
    wanted_error   = 100;
    max_N = step_fn(wanted_error, eta);

    T = 0:h*(1+eta):max_N*h*(1+eta);

    V = transport_example(eta, h, max_N);

    % calculate real and estimated errors and skip some indices
    indizes = 1:floor((max_N)/10):max_N;
    max_errors = [
      indizes;
      sinus_max_err_fn(indizes, X, V, h, eta);
      exptected_err_fn(indizes-1, h, eta);
      exptected_err_fn_1(indizes-1, h, eta);
      (indizes-1).*(pi*pi/2)*h*h*eta*(1+eta);
    ]';

    % save errors to files for error plot
    % note: can't use the 'save'-function since we have variable file names
    file_name = sprintf('./data/max_errors_eta_%.3f_h_%.3f.dat', eta, h);
    fid = fopen(file_name, "w");
    fdisp(fid, max_errors);
    fclose(fid);
end
```

octave/create_error_plots.m

Fehlerplots für kleine η

```
warning ("off", "Octave:broadcast");
format long e;
```

```
% calculate max difference between numerical scheme and true solution
sinus_max_err_fn = @(N,X,V,h,eta) ...
    max(abs( sin(pi*(X-(N-1)*(h+h*eta))) - V(:,N) ));

eta   = 1e-3;
h     = 1e-3;
T     = 0:h*(1+eta):25;
X     = [-2+h:h:2]';
max_N = length(T);
V     = transport_example(eta, h, max_N);

N = 1:100:max_N;

max_errors = [
    T(N);
    sinus_max_err_fn(N, X, V, h, eta);
    eps*exp(2*T(N));
    eps*exp(2*T(N)) + T(N).*(pi*pi/2)*h^2;
    T(N).*(pi*pi/2)*h^2;
]';

save 'data/max_errors_small_eta_0.001.dat' max_errors
```

octave/create_error_plots_small_eta.m