

# 1 Rechnungen

## 1.1 Ansatz für die Variable Advektion

Wir betrachten die Differentialgleichung der variablen Advektion

$$u_t(t, x) + a(x)u_x(t, x) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

mit glattem und beschränktem  $a$ , so dass  $a$  in einem kleinem Bereich um  $x_0 = 0$  größer als  $1 + \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$  ist. Wir wenden für diese Differentialgleichung das Upwindverfahren mit dem Gitter  $G(n, i) = (t_n, x_i) = h \cdot (\lambda n, i)$  an. Das Gitter ist rechteckig, falls  $\lambda \neq 1$  gilt und wir erhalten die Gleichung

$$v_i^{n+1} - v_i^n + a_i \lambda (v_i^n - v_{i-1}^n) = 0. \quad (1.1)$$

Ziel ist es, oszillatorische Fehler im Kurzzeitverhalten einzufangen, die von  $a$  erzeugt werden. Daher wählen wir den Ansatz

$$v_i^n = u^{(0)}(t_n, x_i) + h \left( u^{(1)}(t_n, x_i) + \tilde{u}^{(1)}(i) \right) + O(h^2) \quad (1.2)$$

für unsere Gitterfunktion  $v$ . Dann folgt für die Differenz  $v_i^{n+1} - v_i^n$

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} - v_i^n &= u^{(0)}(t_{n+1}, x_i) + h \left( u^{(1)}(t_{n+1}, x_i) + \tilde{u}^{(1)}(i) \right) + O(h^2) \\ &\quad - \left( u^{(0)}(t_n, x_i) + h \left( u^{(1)}(t_n, x_i) + \tilde{u}^{(1)}(i) \right) + O(h^2) \right) \\ &= u^{(0)}(t_{n+1}, x_i) - u^{(0)}(t_n, x_i) + h \left( u^{(1)}(t_{n+1}, x_i) - u^{(1)}(t_n, x_i) \right) \\ &= u^{(0)}(t_n + \lambda h, x_i) - u^{(0)}(t_n, x_i) + h \left( u^{(1)}(t_n + \lambda h, x_i) - u^{(1)}(t_n, x_i) \right) \\ &= \lambda h u_t^{(0)}(t_n, x_i) + \frac{1}{2} \lambda^2 h^2 u_{tt}^{(0)}(t_n, x_i) + \lambda h^2 u_t^{(1)}(t_n, x_i) + O(h^3) \\ &= \lambda h \left( u_t^{(0)}(t_n, x_i) + h \left( \frac{\lambda}{2} u_{tt}^{(0)}(t_n, x_i) + u_t^{(1)}(t_n, x_i) \right) \right) \end{aligned}$$

und für die Differenz  $\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n)$  folgt ganz analog

$$\begin{aligned}
\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) &= \lambda \left( u^{(0)}(t_n, x_i) + h \left( u^{(1)}(t_n, x_i) + \tilde{u}^{(1)}(i) \right) + O(h^2) \right. \\
&\quad \left. - \left( u^{(0)}(t_n, x_{i-1}) + h \left( u^{(1)}(t_n, x_{i-1}) + \tilde{u}^{(1)}(i-1) \right) + O(h^2) \right) \right) \\
&= \lambda \left( u^{(0)}(t_n, x_i) - u^{(0)}(t_n, x_{i-1}) \right. \\
&\quad \left. + h \left( u^{(1)}(t_n, x_i) - u^{(1)}(t_n, x_{i-1}) + \tilde{u}^{(1)}(i) - \tilde{u}^{(1)}(i-1) \right) \right) \\
&= \lambda \left( u^{(0)}(t_n, x_i) - u^{(0)}(t_n, x_i - h) \right. \\
&\quad \left. + h \left( u^{(1)}(t_n, x_i) - u^{(1)}(t_n, x_i - h) + \tilde{u}^{(1)}(i) - \tilde{u}^{(1)}(i-1) \right) \right) \\
&= \lambda h \left( h u_x^{(0)}(t_n, x_i) + \frac{1}{2} h^2 u_{xx}^{(0)}(t_n, x_i) \right. \\
&\quad \left. + h^2 u_x^{(1)}(t_n, x_i) + h \left( \tilde{u}^{(1)}(i) - \tilde{u}^{(1)}(i-1) \right) + \right) + O(h^3) \\
&= \lambda h \left( u_x^{(0)}(t_n, x_i) + h \left( \frac{1}{2} u_{xx}^{(0)}(t_n, x_i) + u_x^{(1)}(t_n, x_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{u}^{(1)}(i) - \tilde{u}^{(1)}(i-1) \right) + O(h^3)
\end{aligned}$$