1 Rechungen

1.1 Oszillatorischer Ansatz für die variable Advektion

Wir betrachen die Differentialgleichung der variablen Advektion

$$u_t(t,x) + a(x)u_x(t,x) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

mit glattem und beschränkem a, so dass a in einem kleinem Bereich um $x_0 = 0$ größer als $1+\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ ist. Wir wenden für diese Differentialgleichung das Upwindverfahren mit dem Gitter $G(n,i) = (t_n, x_i) = h \cdot (\lambda n, i)$ an. Das Gitter ist rechteckig, falls $\lambda \neq 1$ gilt und wir erhalten die Gleichung

$$v_i^{n+1} - v_i^n + a_i\lambda\left(v_i^n - v_{i-1}^n\right) = 0. \tag{1.1}$$

Ziel ist es, oszillatorische Fehler im Kurzzeitverhalten einzufangen, die von a erzeugt werden. Daher wählen wir den Ansatz

$$v_i^n = u^{(0)}(t_n,x_i) + hu^{(1)}(t_n,x_i) + h^2\left(u^{(2)}(t_n,x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i)\right) + O(h^2) \tag{1.2}$$

für unsere Gitterfunktion v. Dann folgt für die Differenz $v_i^{n+1} - v_i^n$

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^n &= u^{(0)}(t_{n+1},x_i) + hu^{(1)}(t_{n+1},x_i) + h^2\left(u^{(2)}(t_{n+1},x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i)\right) + O(h^2) \\
&\quad - \left(u^{(0)}(t_n,x_i) + hu^{(1)}(t_n,x_i) + h^2\left(u^{(2)}(t_n,x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i)\right) + O(h^2)\right) \\
&= u^{(0)}(t_{n+1},x_i) - u^{(0)}(t_n,x_i) + h\left(u^{(1)}(t_{n+1},x_i) - u^{(1)}(t_n,x_i)\right) + \\
&\quad + h^2\left(u^{(2)}(t_{n+1},x_i) - u^{(2)}(t_n,x_i)\right) \\
&= u^{(0)}(t_n+\lambda h,x_i) - u^{(0)}(t_n,x_i) + h\left(u^{(1)}(t_n+\lambda h,x_i) - u^{(1)}(t_n,x_i)\right) \\
&\quad + h^2\left(u^{(2)}(t_n+\lambda h,x_i) - u^{(2)}(t_n,x_i)\right) \\
&= \lambda h\, u_t^{(0)}(t_n,x_i) + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 u_{tt}^{(0)}(t_n,x_i) + \lambda h^2 u_t^{(1)}(t_n,x_i) + O(h^3) \\
&= \lambda h\left(u_t^{(0)}(t_n,x_i) + h\left(\frac{\lambda}{2}u_{tt}^{(0)}(t_n,x_i) + u_t^{(1)}(t_n,x_i)\right)\right) + O(h^3)
\end{aligned}$$

und für die Differenz $\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n)$ folgt ganz analog

$$
\begin{aligned}
\lambda(v_i^n - v_{i-1}^n) &= \lambda \left(u^{(0)}(t_n, x_i) + hu^{(1)}(t_n, x_i) + h^2 \left(u^{(2)}(t_n, x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i) \right) + O(h^2) \right. \\
&\quad - \left. \left(u^{(0)}(t_n, x_{i-1}) + hu^{(1)}(t_n, x_{i-1}) + h^2 \left(u^{(2)}(t_n, x_{i-1}) + \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) + O(h^2) \right) \right) \\
&= \lambda \left(u^{(0)}(t_n, x_i) - u^{(0)}(t_n, x_{i-1}) + h \left(u^{(1)}(t_n, x_i) - u^{(1)}(t_n, x_{i-1}) \right) \right. \\
&\quad + \left. h^2 \left(u^{(2)}(t_n, x_i) - u^{(2)}(t_n, x_{i-1}) + \left(\tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) \right) \right) \\
&= \lambda \left(u^{(0)}(t_n, x_i) - u^{(0)}(t_n, x_i - h) + h \left(u^{(1)}(t_n, x_i) - u^{(1)}(t_n, x_i - h) \right) \right. \\
&\quad \left. + h^2 \left(u^{(2)}(t_n, x_i) - u^{(2)}(t_n, x_i - h) + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) \right) \\
&= \lambda \left(hu_x^{(0)}(t_n, x_i) - \frac{1}{2} h^2 u_{xx}^{(0)}(t_n, x_i) + h^2 u_x^{(1)}(t_n, x_i) + h^2 \left(\tilde{u}^{(1)}(i) - \tilde{u}^{(1)}(i-1) \right) \right) + O(h^3) \\
&= \lambda h \left(u_x^{(0)}(t_n, x_i) + h \left(u_x^{(1)}(t_n, x_i) - \frac{1}{2} u_{xx}^{(0)}(t_n, x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) \right) + O(h^3).
\end{aligned}
$$

Wenn wir dies nun in das Verfahren (1.1) einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&u_t^{(0)}(t_n, x_i) + h \left(\frac{\lambda}{2} u_{tt}^{(0)}(t_n, x_i) + u_t^{(1)}(t_n, x_i) \right) \\
&\qquad + a_i u_x^{(0)}(t_n, x_i) + h a_i \left(u_x^{(1)}(t_n, x_i) - \frac{1}{2} u_{xx}^{(0)}(t_n, x_i) + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1) \right) = O(h^2).
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nach den Ordnungen von h sortiert haben, führt uns das zu dem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
u_t^{(0)}(t_n, x_i) + a(x_i) u_x^{(0)}(t_n, x_i) &= 0, \\
u_t^{(1)}(t_n, x_i) + a(x_i) u_x^{(1)}(t_n, x_i) &= \frac{1 - a(x_i)\lambda}{2} u_{xx}^{(0)}(t_n, x_i) - \frac{a_x(x_i)\lambda}{2} u_x^{(0)}(t_n, x_i) \\
&\quad + \tilde{u}^{(2)}(i) - \tilde{u}^{(2)}(i-1)
\end{aligned}
$$