EXERCICI COMPUTACIÓ QUÀNTICA

En Física Quàntica es verifica el **Principi d'Incertesa de Heisenberg**: hi ha parells de quantitats observables per les quals mai podrem aconseguir que el sistema es trobi en valors determinats simultàniament. Un parell especialment important és posició-quantitat de moviment. En aquest cas, si intentem fer una preparació amb partícules molt localitzades, veurem que al mesurar la seva quantitat de moviment (velocitat) la dispersió que trobem és important (i viceversa). Això implica que el concepte clàssic segons el qual cada partícula està caracteritzada per una posició i una velocitat en tot moment perd el seu sentit.

Matemàticament s'expresa com un teorema sobre les desviacions típiques associades a cada quantitat (que en aquest context s'anomenen incerteses): si Δx i Δp són les desviacions típiques en la posició i el moment respectivament, es verifica

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2.$$

La forma d'avaluar les incerteses, coneguda la funció d'ona ψ, és (on $p \equiv -i\hbar\frac{d}{dx}$):

$$\Delta x_\psi = \sqrt{< x^2 >_\psi - < x >_\psi^2},$$

$$\Delta p_\psi = \sqrt{< p^2 >_\psi - < p >_\psi^2}.$$

En les expressions anteriors $< x >_\psi$ s'anomena valor esperat en la mesura de x: el valor mitjà obtingut en fer moltes mesures de x si preparem moltes còpies idèntiques de l'estat ψ. De manera anàloga, s'interpreten $< x^2 >_\psi$,$< p >_\psi$ i $< p^2 >_\psi$. Els valors esperats venen donats per les expressions:

$$< x >_\psi = \int dx \psi^*(x,t) x \psi(x,t); \qquad < x^2 >_\psi = \int dx \psi^*(x,t) x^2 \psi(x,t),$$

$$< p >_\psi = \int dx \psi^*(x,t)(-i)\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t); \qquad < p^2 >_\psi = \int dx \psi^*(x,t)(-\hbar^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t).$$

1) Quin seria el "valor esperat" (valor mitjà) que obtindriem si tiréssim un dau de sis cares moltes vegades? I quina la seva incertesa?

2) Quant val $< x >_{\psi_1}$ i $< p >_{\psi_1}$, essent ψ_1 l'estat fonamental del pou unidimensional infinit, d'amplada L. (A classe varem considerar que la partícula podia trobar-se a l'interval $0 \leq x \leq L$.)

3) Generalitzar el resultat anterior a qualsevol dels estats propis de l'energia ψ_n.

4) De forma semblant calculeu $< x^2 >_{\psi_n}$ i $< p^2 >_{\psi_n}$.

5) Comproveu que efectivament es compleix el principi d'incertesa de Heisenberg per cadascun dels estats d'energia constant del pou infinit:

$$\Delta x_{\psi_n} \Delta p_{\psi_n} \geq \hbar/2$$

NOTA: Us seran útils les següents integrals trigonomètriques:

$\int \sin^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$\int x\sin^2(ax)dx = \frac{x^2}{4} - x\frac{\sin(2ax)}{4a} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2}$
$\int \sin(ax)\cos(ax)dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
$\int x^2\sin^2(ax)dx = -\frac{x^2\cos(ax)\sin(ax)}{2a} + \frac{x^3}{6} - \frac{x\cos^2(ax)}{2a^2} + \frac{\cos(ax)\sin(ax)}{4a^3} + \frac{x}{4a^2}$