1. Normalitzeu els següents kets (2 punts)

$$|\phi\rangle = \frac{1}{N}\left[|0\rangle + 3\,|1\rangle\right]$$

Recordem que per $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |i\rangle$ cal que $\sum_{i=1}^{n} c_i^* c_i = 1$ per tal que estigui normalitzat

en aquest cas $(i=2)$

$$c_0^* c_0 + c_1^* c_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{N^2} + \frac{3^2}{N^2} = 1 \Rightarrow \frac{10}{N^2} = 1 \Rightarrow N = \sqrt{10}$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{N}\left[i\,|0\rangle + (3+4i)\,|1\rangle + 2e^{-i\frac{\pi}{2}}\,|2\rangle\right]$$

de forma similar (ara amb $i=3$)

$$\sum_{i=1}^{3} c_i^* c_i = \frac{1}{N^2}\left[(-i)\cdot i + (3-4i)(3+4i) + \left(2e^{+i\frac{\pi}{2}}\right)\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{N^2}\left[1 + 25 + 4\right] = \frac{30}{N^2} \Rightarrow N = \sqrt{30}$$

2. La següent matriu correspon a un observable d'un sistema amb una base de tres estats. Determineu el valor dels paràmetres reals (a, b, c, d) per tal que sigui consistent amb les condicions que ha de complir aquest tipus de matriu. (1p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a\cdot i & -i & 3 \\ b + c\cdot i & 2 & 4 \\ 3 & d & 3 \end{pmatrix}$$

cal que la matriu sigui hermítica $A = A^{+}$

per tant

$$A_{11} = A_{11}^* \Rightarrow 1 + ai = 1 - ai \Rightarrow a = 0$$

$$A_{12} = A_{21}^* \Rightarrow b - ci = -i \Rightarrow b = 0\,,\ c = 1$$

$$A_{23} = A_{32}^* \Rightarrow 4 = d$$

3. La següent matriu correspon a l'operador hamiltonià d'un qubit (en certes unitats d'energia)

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

Determineu:

(a) (2 p) Les possibles energies que podem mesurar.

Cal fer $\det[H - \lambda \mathbb{I}] = 0$ amb $H = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -i \\ i & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) - i\cdot(-i) = 0 \Rightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm [4^2 - 4\cdot 3]^{1/2}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Així les energies possibles són $\boxed{E_1 = 3 \ , \ E_2 = 1}$

(b) (2 p) L'estat corresponent a cada energia.

$\lambda = 3$

Cal resoldre $H|\psi\rangle = 3|\psi\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - iy = 3x \Rightarrow x = -iy$

si afegim la condició de normalització $xx^* + yy^* = 1 \Rightarrow (-i)\cdot i\, yy^* + yy^* = 1 \Rightarrow 2|y|^2 = 1$

per tant podem agafar $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\varphi\rangle_{E=3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$

Cal resoldre $H|\psi\rangle = 3|\psi\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - iy = x \Rightarrow x = iy$

si afegim la condició de normalització $xx^* + yy^* = 1 \Rightarrow (-i)\cdot i\, yy^* + yy^* = 1 \Rightarrow 2|y|^2 = 1$

per tant podem agafar $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\varphi\rangle_{E=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) (1 p) Comproveu que aquests estats estan correctament normalitzats i són perpendiculars entre si.

$${}_1\langle\varphi|\varphi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[1+1] = 1$$

$${}_3\langle\varphi|\varphi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(+i,1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[1+1] = 1$$

$${}_1\langle\varphi|\varphi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[-1+1] = 0$$

(d) (2 p) El valor esperat de l'energia pel següent estat:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

El valor esperat de l'energia és

$$\langle E\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle = \bar{c}^{\dagger} H \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(1,-i)\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,-i)\begin{pmatrix} 3 \\ 3i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[3+3] = 3$$

Com interpreteu aquest resultat?

això vol dir que és el mateix estat $|\psi\rangle_{\lambda=3}$ i no pas un de barreja

efectivament

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + i|1\rangle] = (i)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[-i|0\rangle + |1\rangle] = i\,|\varphi\rangle_{\lambda=3}$$

la única diferència és una fase global que sabem que no té cap importància