1. Considereu l'estat de dos qubits: $|\Phi\rangle = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - i|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{\sqrt{5}}{2}|11\rangle\right]$

(a) Quant ha de valer N per tal que l'estat $|\Phi\rangle$ estigui normalitzat?

$$\sum_{i=1}^{4} c_i^* c_i = 1 = \frac{1}{N^2}\left[\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right] = \frac{1}{N^2}\,\frac{2+4+6}{4} = \frac{3}{N^2} \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(podria estar multiplicat per $e^{i\alpha}$ qualsevol)

(b) És un estat separable o entrellaçat? Perquè?

Recordem que per separable $[a|0\rangle + b|1\rangle][c|0\rangle + d|1\rangle] = \overbrace{ac}^{\alpha}|00\rangle + \overbrace{ad}^{\beta}|01\rangle + \overbrace{bc}^{\gamma}|10\rangle + \overbrace{bd}^{\delta}|11\rangle$

$\Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

en aquest cas $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\cancel{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \overset{?}{=} -\frac{i}{\sqrt{3}}\cdot\cancel{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ $\quad \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \neq -\frac{i}{\sqrt{3}}$

impossible, un és real i l'altre imaginari $\Rightarrow$ entrellaçat

(c) Quina és la probabilitat de trobar el resultat 10 en mesurar els dos qubits?

$$p(10) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

(d) Quina és la probabilitat de trobar el resultat 0 en mesurar el qubit de l'esquerra?

Partim de l'estat $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|00\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}|11\rangle$ elimina tots els termes que no tenen un $\emptyset$ al 1er qubit

Amb el postulat de Born generalitzat: $P(\emptyset \text{ a l'esquerra}) = \langle\psi|\left[|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I}\right]|\psi\rangle =$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|1\rangle\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|1\rangle\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

complexes conjugats

(e) Si en mesurar el qubit de l'esquerra hem trobat el resultat 1, en quin estat es trobarà el qubit de la dreta?

Recordem que sempre podem escriure $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle|\psi_0\rangle + \alpha_1|1\rangle|\psi_1\rangle$ on $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$

per l'apartat anterior serà $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\psi_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\psi_1\rangle$

comparant amb l'estat original

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|00\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}|11\rangle =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\left[\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\left[\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle - \sqrt{\frac{5}{6}}|1\rangle\right]$$

per tant el de la dreta quedaria a l'estat $\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle - \sqrt{\frac{5}{6}}|1\rangle$

(f) I si ara mesuréssim aquest últim, quina seria la probabilitat de què donés 1?

la probabilitat de $|1\rangle$ seria $\frac{5}{6}$ (i la de $|0\rangle$ seria $\frac{1}{6}$)

6. El protocol d'Ekert originalment es va plantejar de forma que la font de parells entrellaçats genera estats anomenats singlet $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle]$, tot enviant el primer qubit a l'Alice i el segon a en Bob. Determineu:

(a) (1 p) Si l'Alice sempre mesura segons la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, quins possibles resultats pot obtenir? què obtindrà en Bob per cada cas si mesura en aquesta mateixa base?

Podem expressar l'estat $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|0\rangle \equiv \alpha_0|0\rangle|\phi_0\rangle + \alpha_1|1\rangle|\phi_1\rangle$

Segons aquesta base sól pot obtenir:

1) 0 amb probabilitat $\alpha_0\alpha_0^* = \frac{1}{2}$, de forma que Bob tindrà un $|1\rangle$ i obtindrà un 1 amb tota seguretat quan mesuri

2) 1 amb probabilitat $\alpha_1\alpha_1^* = \frac{1}{2}$, el Bob tindrà un estat $|0\rangle$ i obtindrà un ϕ

(b) (1 p) Què li caldria fer a en Bob (o a l'Alice) per tal que tots dos acabin tenint la mateixa clau?

En Bob haurà d'invertir el valor mesurat, així quan per exemple l'Alice mesuri un ϕ i ell mesuri un 1 d'acord amb l'apartat anterior, un cop ell inverteixi el seu valor $1 \to 0$, tots dos tindran el bit 0.

(c) (1 p) Sabem que també han de poder fer servir una base alternativa, per exemple $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$. Com s'expressa l'estat $|\Psi\rangle$ en aquesta nova base?

Primer ens cal invertir el canvi

$$\left.\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + |1\rangle] \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle - |1\rangle] \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle + |-\rangle] \\ |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle - |-\rangle] \end{aligned}\right\}$$

ara ja podem substituir

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{[|+\rangle+|-\rangle][|+\rangle-|-\rangle] - [|+\rangle-|-\rangle][|+\rangle+|-\rangle]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{[\cancel{|+\rangle|+\rangle} - |+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle - \cancel{|-\rangle|-\rangle}] - [\cancel{|+\rangle|+\rangle} + |+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle - \cancel{|-\rangle|-\rangle}]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{2|-\rangle|+\rangle - 2|+\rangle|-\rangle\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|-\rangle|+\rangle - |+\rangle|-\rangle\right]$$

(d) (1 p) Repetiu els dos primers apartats si l'Alice i en Bob mesuren ara sempre segons aquesta base. (Si per exemple associem el valor lògic 0 a l'estat $|+\rangle$, i 1 a l'estat $|-\rangle$).

La situació és del tot similar, l'Alice pot mesurar

a) $|+\rangle \to$ "0" amb probabilitat $\frac{1}{2}$, Bob mesurarà $|-\rangle \equiv 1$ amb seguretat, i li caldrà invertir-lo

b) $|-\rangle \to$ "1" " " $|+\rangle \equiv 0$ " "