$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \to N(0,\sigma^2)$
$\sqrt{n}(g(\hat{\theta})-g(\theta)) \to N(0,(g'(\theta))^2\sigma^2)$

1.2.5. Intervalos de confianza para estimadores de densidad no paramétricos

$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh}\sum K\left(\frac{x-X}{h}\right)$

Usando los resultados anteriores y asumiendo que $h = cn^{-\frac{1}{5}}$ entonces

$$\underbrace{n^{-\frac{2}{5}}\left\{\boxed{\hat{f}_h(x)}-\boxed{f(x)}\right\}}_{\sqrt{nh}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\underbrace{\frac{c^2}{2}f''\mu_2(K)}_{b_x}, \underbrace{\frac{1}{c}f(x)\,\|K\|_2^2}_{v_x}\right).$$

Si $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1-\frac{\alpha}{2}$ de una distribución normal estándar, entonces

$n^{-2/5}$ MISE $= O(n^{-4/5})$

$1-\alpha$

$$\begin{aligned}1-\alpha &\approx \mathbb{P}\left(b_x - z_{1-\frac{\alpha}{2}}v_x \le n^{2/5}\left\{\hat{f}_h(x)-f(x)\right\} \le b_x + z_{1-\frac{\alpha}{2}}v_x\right)\\ &= \mathbb{P}\Big(\hat{f}_h(x) - n^{-2/5}\left\{b_x + z_{1-\frac{\alpha}{2}}v_x\right\}\\ &\qquad \le f(x) \le \hat{f}_h(x) - n^{-2/5}\left\{b_x - z_{1-\frac{\alpha}{2}}v_x\right\}\Big)\end{aligned}$$

$b_x + z_1 \cdot n$

Esta expresión nos dice que con una probabilidad de $1-\alpha$ se tiene que

$$\left[\hat{f}_h(x) - \frac{h^2}{2}f''(x)\mu_2(K) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(x)\|K\|_2^2}{nh}},\right.$$
$$\left.\hat{f}_h(x) - \frac{h^2}{2}f''(x)\mu_2(K) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(x)\|K\|_2^2}{nh}}\right]$$

Al igual que en los casos anteriores, este ~~intervalo~~ intervalo no es útil ya que depende de $f(x)$ y $f''(x)$.

Si h es pequeño relativamente a $n^{-\frac{1}{5}}$ entonces el segundo término $\frac{h^2}{2} f''(x)\mu_2(K)$ podría ser ignorado. pequeño

Podemos reemplazar $f(x)$ por su estimador $\hat{f}_h(x)$. Entonces tendríamos una intervalo aplicable a nuestro caso

$$\left[\hat{f}_h(x) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{f}_h(x)\|K\|_2^2}{nh}}, \hat{f}_h(x) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{f}_h(x)\|K\|_2^2}{nh}}\right]$$

Nota 1.2.21

Este intervalo de confianza solo funciona en cada punto particular de $f(x)$.

Existe una versión más general para determinar la banda de confianza de toda la función. Por favor revisar la página 62 de Härdle y col. [1].