Universidade do Estado
de Santa Catarina

APLICAÇÃO DE DIFERENÇAS-FINITAS EM PROBLEMAS DE DIFUSÃO E DIFUSÃO-CONVECÇÃO

Maikon Antonio Ribeiro Nascimento
Bolsista PROBIC
Curso de Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Rogério Aguiar
Centro/Departamento: CCT – Engª. Elétrica

Introdução

- Importância da Simulação
- Objetivos

Metodologia

- Equações

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$D_{12} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial C}{\partial t} + 2\overline{u} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \frac{\partial C}{\partial z}$$

Metodologia

- Obtenção da Resposta Analítica, de alguns problemas, por Séries de Fourier:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \cdot e^{-n^2\pi^2 Kt} \sin(n\pi x)$$

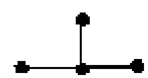
$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\sin(1)(-1)^n}{(-1+n\pi)(1+n\pi)} \cdot e^{-n^2\pi^2 Kt} \cos(n\pi x) + \sin(1)$$

$$T(x,t) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{-8(-1)^n}{(2n-1)^2\pi^2} \cdot e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 Kt}{4}} \cdot \sin(\frac{(2n-1)\pi n}{2})$$

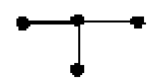
Metodologia

- Obtenção da Resposta Numérica por Diferenças Finitas: Os tipos de Discretizações e suas características.

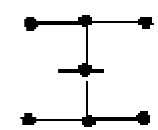
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}$$



$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$



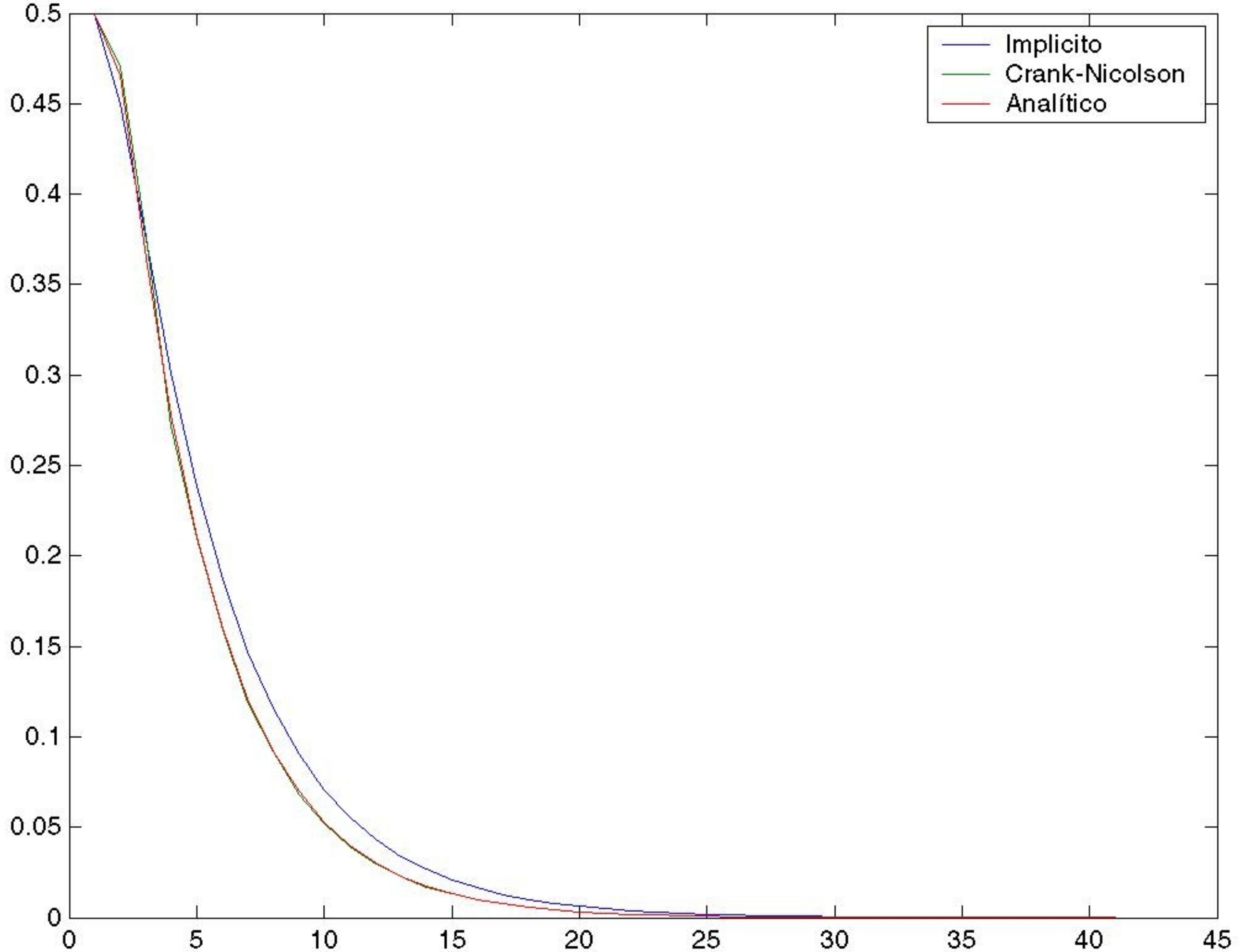
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}\right]$$



Metodologia

- Problemas Abordados
  - Condução do Calor em uma barra sob condições de fronteira diversas (temperatura conhecida, fluxo conhecido ou ambas);
  - Condução do Calor em uma chapa com fluxo e temperatura conhecida nas fronteiras;
  - Condução do Calor em um Cilindro;
  - Escoamento de fluído em um Cilíndro em duas dimensões;

Resultados

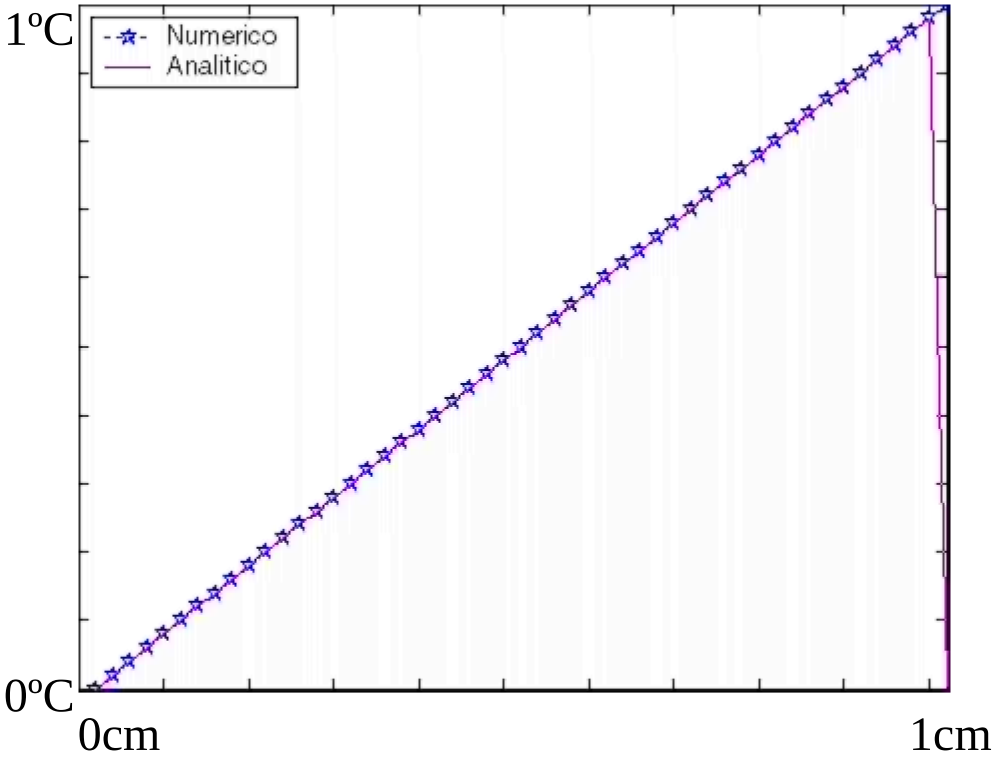


Implicito
Crank-Nicolson
Analítico
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

Resultados

Condução do Calor em uma barra com temperatura de 0ºC e excitada pela função rampa.

Fronteira mantida a 0º

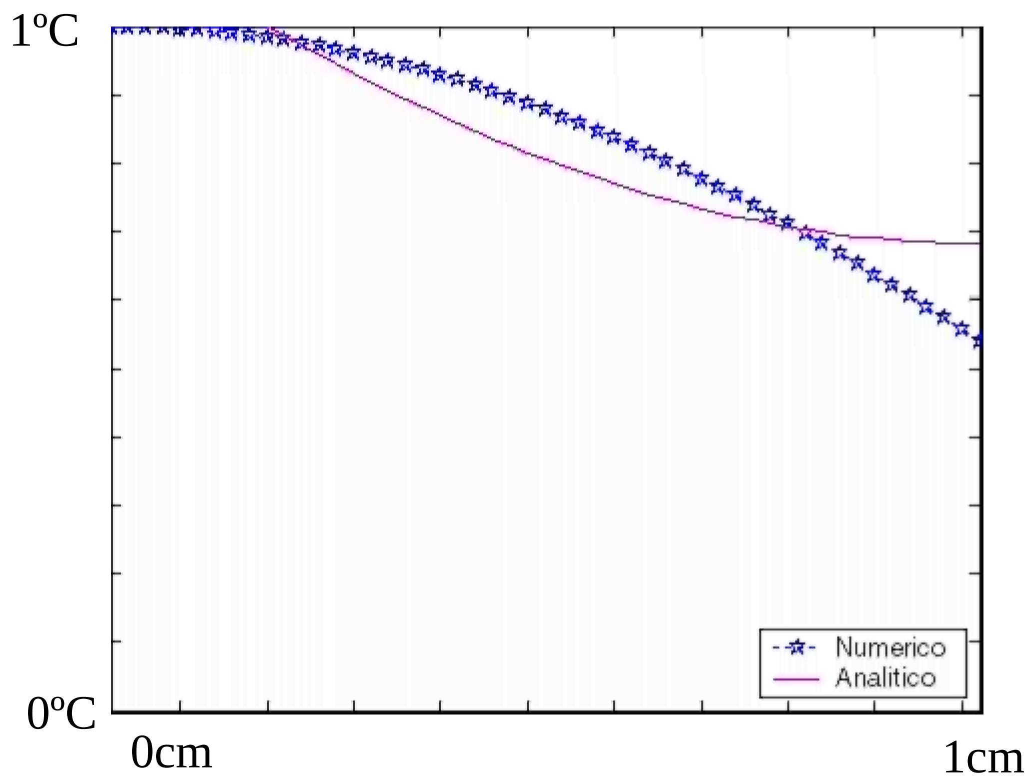


Fronteira mantida a 0º

Resultados

Condução do Calor em uma barra sob fluxo de calor nulo nas fronteira e excitada pela função cosseno

Fronteira com fluxo de calor nulo



Fronteira com fluxo de calor nulo

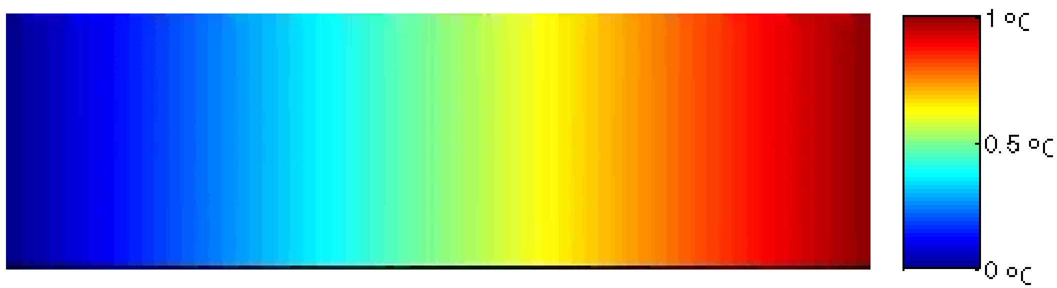
Resultados

- Vídeo Ilustrativo da Propagação do calor em uma Barra com Temperatura de 0ºC nas fronteiras

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{em} \quad \mathbb{R};$$

$$T(0,t) = T(L,t) = 0, \quad \text{para } t > 0;$$

$$T(x,0) = x, \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant L.$$



Resultados

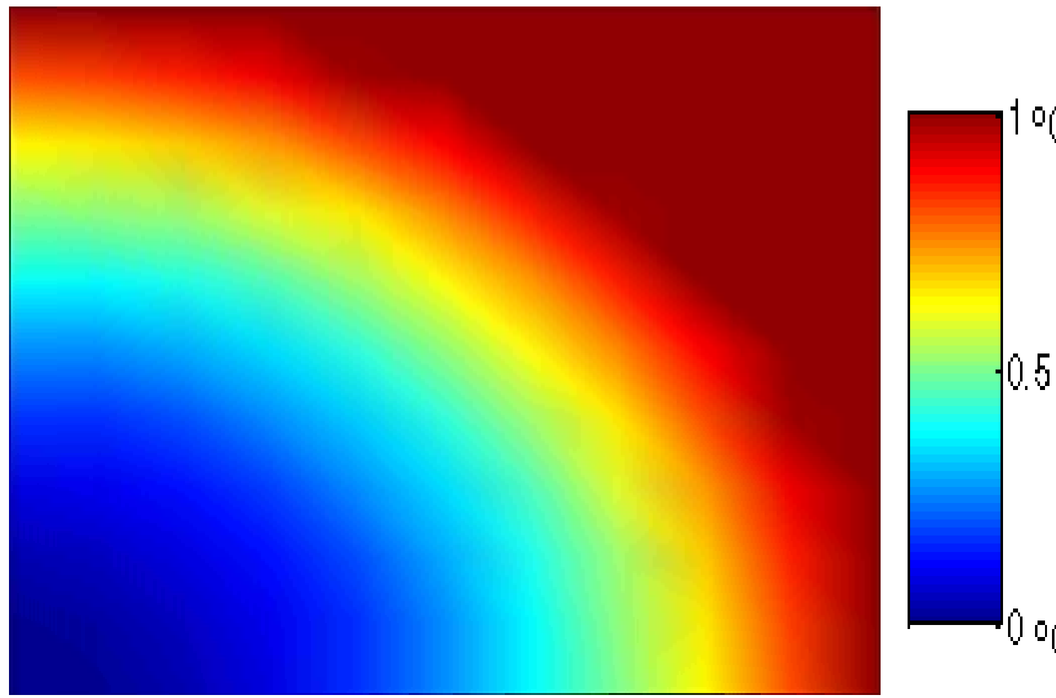
- Vídeo Ilustrativo da Propagação do calor em uma Chapa com Temperatura de 0ºC nas fronteiras verticais e fluxo de calor nulo nas fronteiras horizontais.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad \mathbb{R},$$

$$T(0,y,t) = T(L_x,y,t) = 0, \ t > 0$$
$$0 < y < L_y$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=L_y} = 0, \ t > 0$$
$$0 < x < L_x,$$

$$T(x,y,0) = x^2 + y^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant L_x$$
$$0 \leqslant y \leqslant L_y.$$



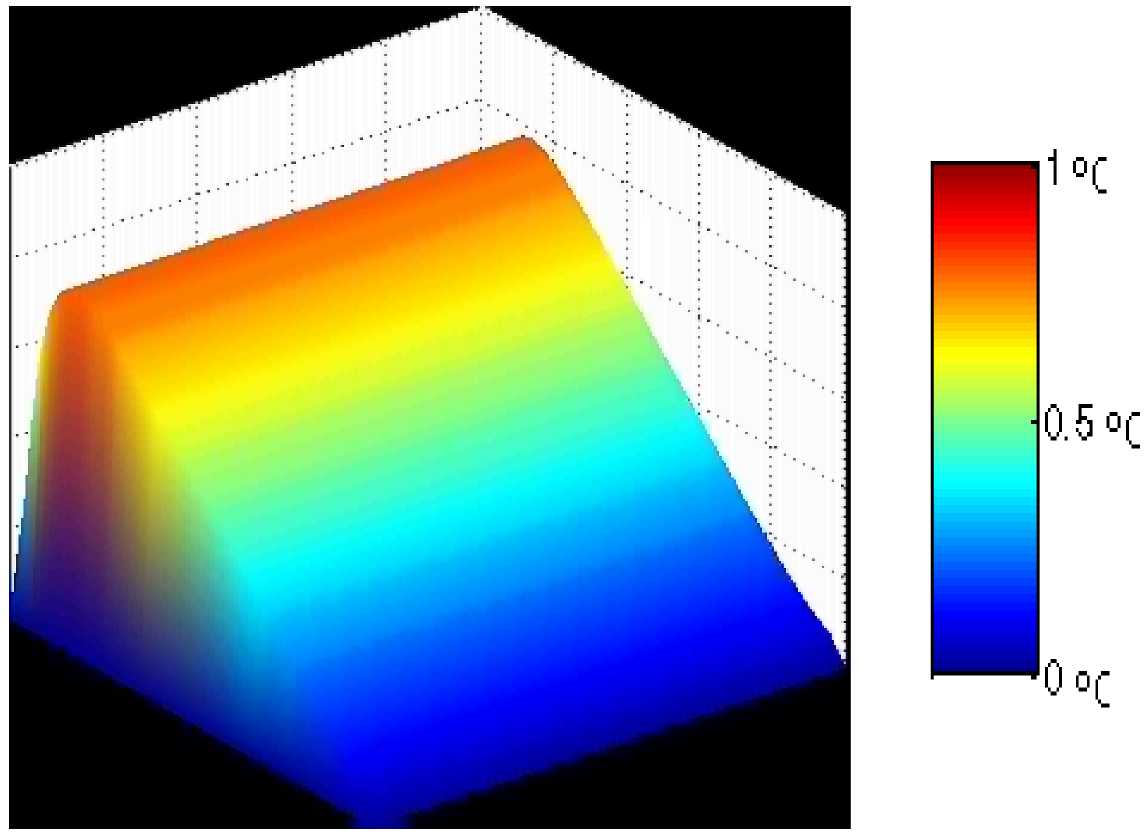
Resultados

- Vídeo Ilustrativo da Propagação do calor em um Cilindro com Temperatura de 0ºC na fronteira e excitado pela função rampa.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad \mathbb{R},$$

$$T(L,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$T(x,0) = x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L.$$



Resultados

- Difusão-Convecção: Medição no final do Cilindro

$$D_{12}\left[\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial C}{\partial t}+2\overline{u}\left[1-\frac{r^2}{a^2}\right]\frac{\partial C}{\partial z}\quad em \quad \mathbb{R}$$

Normalizamos para deixar os termos com o mesmo peso

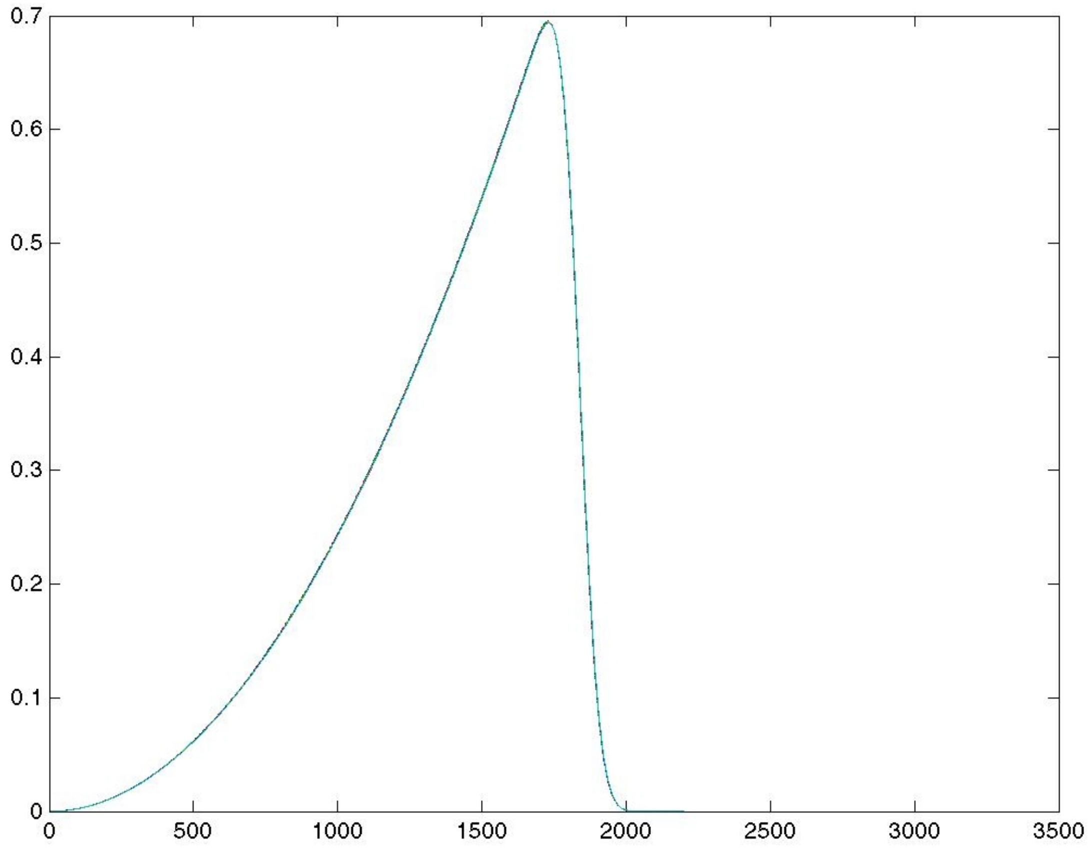
$$D_{12}\left[z_{\max}^2\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial \widetilde{r}^2}+\frac{z_{\max}^2}{\widetilde{r}}\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{r}}+r_{\max}^2\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial \widetilde{z}^2}\right]=z_{\max}^2 r_{\max}^2\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial t}+2\overline{u}\,z_{\max} r_{\max}^2[1-\widetilde{r}^2]\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{z}}$$

$$Em \quad i=0:\ D_{12}\left[2\frac{1}{r_{\max}^2}\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial \widetilde{r}^2}+\frac{1}{z_{\max}^2}\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial \widetilde{z}^2}\right]=\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial t}+2\overline{u}[1-\widetilde{r}^2]\frac{1}{z_{\max}}\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{z}}\quad ,$$

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{r}}\Big|_{\widetilde{r}=1}=0\quad para\quad 0<z<1\ \ e\ \ \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{z}}\Big|_{\widetilde{z}=0}=0\quad para\quad 0<r<1\quad .$$

Injetamos um pulso no inicio do cilindro.

Resultados



Conclusão

- Análise dos resultados;
- Artigo;

Bibliografia

OZISIK, M. N. **Finite Difference Methods in Heat Transfer**.EUA:CRC Press,1994.

Agradecimentos

- UDESC
- Prof.º Orientador: Dr. Rogério de Aguiar
- Prof.º Dr. Luiz Coelho.

E-mail para contato:
maikonadams@gmail.com