

Problème du plus court chemin

COLARD-CLAUDY Maéva et MAILLO Valentin

15 avril 2020

Résumé

Dans ce document, nous allons vous montrer notre démarche afin d'implémenter deux algorithmes permettant le calcul de plus courts chemins, sur un graphe d'une part, et dans un domaine ouvert d'autre part.

Table des matières

1	Le phénomène de percolation	2
1.1	Définitions et exemples de percolation	2
1.2	Graphes	2
1.3	Réseau carré de taille $N = 5$	3
1.4	Réseau triangulaire de taille $N = 5$	3
1.5	Probabilité critique des arêtes et des sommets.	4
2	Recherche du plus court chemin dans un graphe : l'algorithme de Dijkstra	10
2.1	Retrouver le chemin le plus court avec l'algorithme de Dijkstra	10
2.2	Propriété de l'algorithme de Dijkstra	10
2.3	Complexité de l'algorithme de Dijkstra	10
2.4	Amélioration de l'algorithme de Dijkstra avec l'utilisation d'heuristiques	12
3	Méthode du fast marching	12
3.1	Consistance entre (1) et (2)	12
3.1.1	Prenons le couple $(0, 0)$	12
3.1.2	Prenons le couple $(\lambda - d(x - he_1), \lambda - d(x - he_2))$	12
3.1.3	Prenons le couple $(\lambda - d(x + he_1), \lambda - d(x + he_2))$	13
3.1.4	Prenons le couple $(\lambda - d(x - he_1), \lambda - d(x + he_2))$	14
3.1.5	Prenons le couple $(\lambda - d(x + he_1), \lambda - d(x - he_2))$	15
3.1.6	Prenons le couple $(0, \lambda - d(x - he_2))$	15
3.1.7	Prenons le couple $(0, \lambda - d(x + he_2))$	16
3.1.8	Prenons le couple $(\lambda - d(x + he_1), 0)$	16
3.1.9	Prenons le couple $(\lambda - d(x - he_1), 0)$	17
3.2	Justifier que l'équation (3) admet une unique solution.	17
3.3	Méthode de résolution du problème local (3).	17

1 Le phénomène de percolation

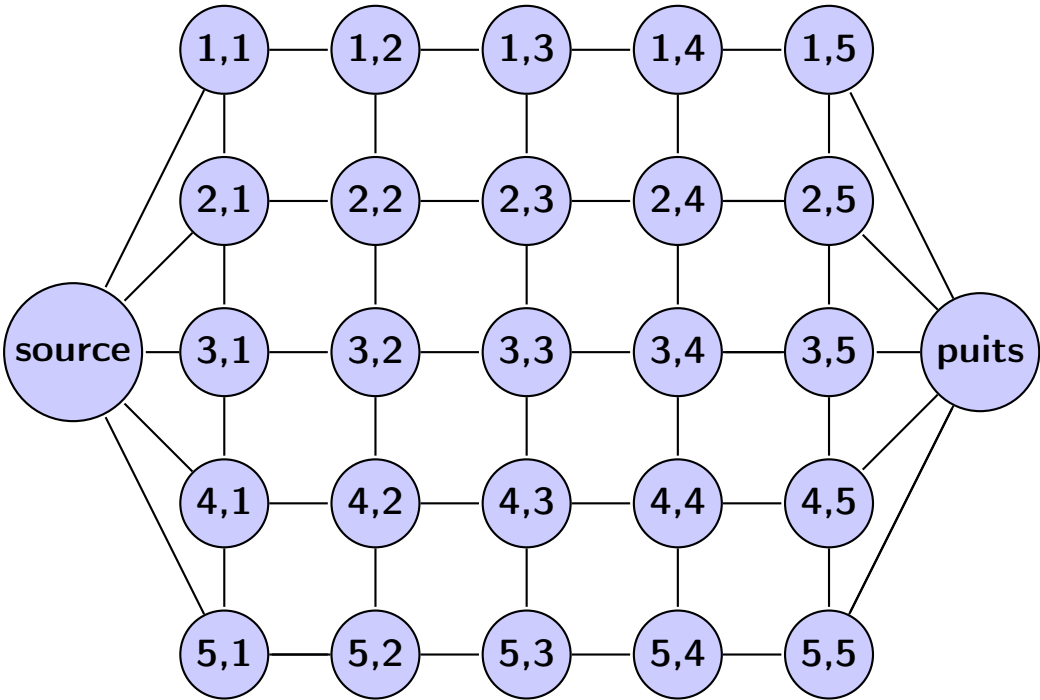
1.1 Définitions et exemples de percolation

1. La percolation désigne dans un premier temps le passage d'un liquide à travers une matière poreuse. Les modèles de percolation consistent à trouver un chemin qui traverse un espace aléatoirement connecté, comme un graphe, avec une certaine probabilité p que les sommets contigus soient de même nature.
2. La probabilité critique autrement appelé point critique p_c est la probabilité que p devrait approcher afin d'avoir percolation dans un graphe donné. Ainsi la probabilité critique dépend du graphe donné.
3. Exemple 1. Supposons qu'on ait un aquarium rempli de billes dont l'une des parties est conductrice de l'électricité et l'autre non. La probabilité que le courant puisse passer d'une bille à l'autre sera la proportion des billes conductrices. Le processus de percolation est dans ce cas, un modèle qui nous permettra d'affirmer si le mélange est conducteur ou non, c'est-à-dire qui nous montrera qu'il est possible d'avoir un chemin conducteur d'électricité du haut de l'aquarium jusqu'au bas de celui-ci.
4. Exemple 2. Imaginons qu'un particulier veuille refaire le carrelage de sa cuisine avec des dalles hexagonale, il choisit deux couleurs différentes : des dalles blanches et des dalles noires. Il place donc la première dalle au plus proche du mur opposé à la porte et tire à pile ou face la couleur de la dalle qu'il va poser, face il pose une dalle noire, pile il pose une dalle blanche. Il répète ainsi l'expérience pour chaque dalle posée. Cet homme se demande quelle est la probabilité qu'il puisse rejoindre la porte en partant du mur opposé à la porte et en marchant uniquement sur des dalles de couleur noire. Cette probabilité dépend de la forme de la pièce considérée, en effet si la pièce est carré la probabilité de pouvoir ainsi traverser la pièce (appelé probabilité critique dans le cas de phénomène de percolation) est de $1/2$ car il y a autant de chance qu'il y ait une ligne de dalle noire qui rejoigne les deux murs (celui opposé à la porte et celui de la porte) que une ligne de dalle blanche qui rejoigne les deux autres murs. Cependant, si la pièce est d'une forme différente le problème est plus complexe. La question que cet homme se pose est donc un exemple du phénomène de percolation.

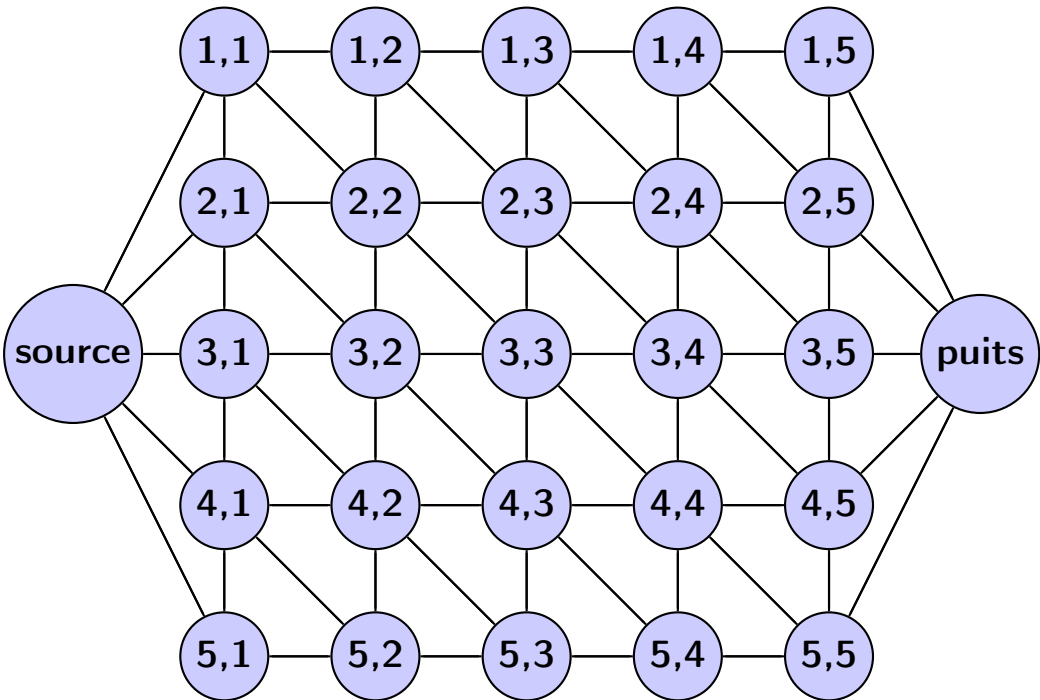
1.2 Graphes

1. La vie quotidienne, nous donne des exemples de graphes comme le réseau ferroviaire, le réseau de métro parisien, le réseau TGV, le réseau RER où les sommets représentent les stations et les arrêtes représentent les lignes. Dans notre cas, le graphe peut représenter le réseau routier où les sommets représentent les villes et les arrêtes l'ensemble des routes.
2. Nous allons travailler dans un graphe non-orienté, c'est-à-dire un graphe ne comportant pas de flèches indiquant dans quels sens les sommets sont reliés.

1.3 Réseau carré de taille $N = 5$



1.4 Réseau triangulaire de taille $N = 5$



1.5 Probabilité critique des arêtes et des sommets.

Nous avons créé deux fonctions distincts nous permettant de connaître la probabilité critique des arêtes et des sommets. Avec les valeurs qu'on a pu obtenir, nous avons décidé de faire des intervalles de confiance afin d'affiner cette probabilité et ainsi vérifier son efficacité. De ce fait, nous avons effectué l'étude statistique suivante :

$X_i \sim \text{Ber}(p)$, $p \in]0; 1[$. On a donc $P(X_i = 1) = p$ (il y a un chemin possible) et $P(X_i = 0) = 1 - p$ (il n'y a pas de chemin possible).

$$E[X_i] = E[X_1] = 0(1 - p) + 1(p)$$

$$\text{Var}[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

$$\text{Donc } E[X_i] = p \text{ et } \text{Var}[X_i] = p(1 - p).$$

Comme $E[X_i] = p$, alors \bar{X}_n est un estimateur de p par la méthode des moments.

On a $E[X_i] < \infty$ et $\text{Var}[X_i] < \infty$. D'après le théorème centrale limite, on a :

$$\frac{\bar{X}_n - E[X_i]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{X}_n]}} = \frac{\bar{X}_n - E[X_i]}{\sqrt{\frac{\text{Var}[X_i]}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - E[X_i])}{\sqrt{\text{Var}[X_i]}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Or, $E[X_i] = p$ et $\text{Var}[X_i] = p(1 - p)$ car $X_i \sim \text{Ber}(p)$.

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, p(1 - p))$$

Donc X_n est asymptotiquement normal et la variance de la loi normale limite est $p(1 - p)$

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, p(1 - p)) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1 - p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

On cherche à estimer $p(1 - p)$.

$E[X_i] = p$, donc \bar{X}_n est un estimateur de p .

On a $E[X_i] < \infty$ et $\text{Var}[X_i] < \infty$. D'après la loi des grands nombre, on a $\bar{X}_n \xrightarrow{P} E[X_i] = p$.

Posons $g(x) = x(1 - x)$. g est une fonction continue sur \mathbb{R} et $P(X_i \in \mathbb{R}) = 1$.

Donc d'après le lemme de l'application continue on a : $g(\bar{X}_n) \xrightarrow{P} g(p)$.

Donc, $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \xrightarrow{P} p(1 - p)$.

Par le lemme de Slutsky, on a $\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\text{Donc } P(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(X_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \leq p \leq X_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha$$

Donc, l'intervalle de confiance est $IC(X_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}}; X_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}})$

Nous avons donc effectué un fichier.R afin de représenter correctement l'ensemble des intervalles de confiance.

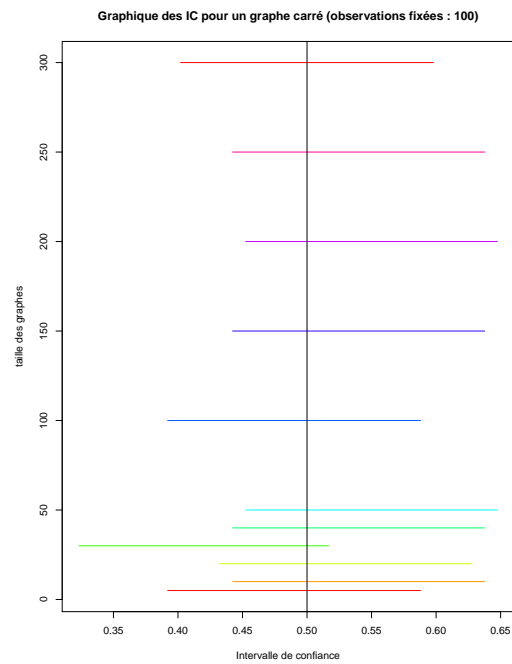


FIGURE 1 – Graphique des IC pour la proportion p des arêtes pour un graphe carré (observations fixées : 100)

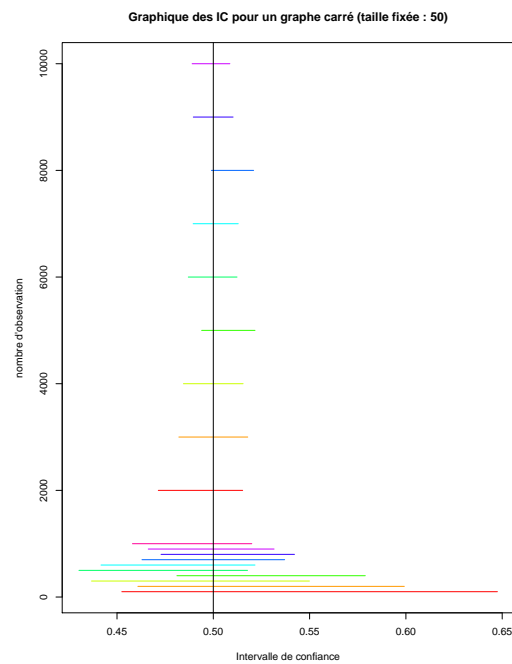


FIGURE 2 – Graphique des IC pour la proportion p des arêtes pour un graphe carré (taille fixe : 50)

Celui-ci nous permet de conclure que la probabilité critique de la proportion p des arêtes conservées est pour un graphe carré de 0,5.

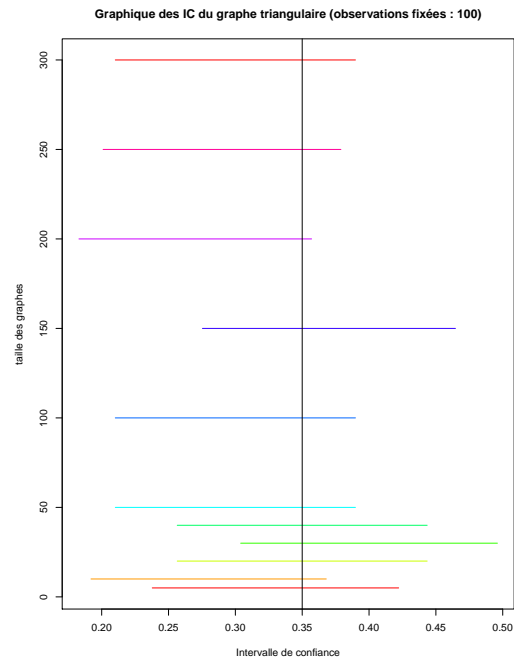


FIGURE 3 – Graphique des IC pour la proportion p des arêtes pour un graphe triangulaire (observations fixées : 100)

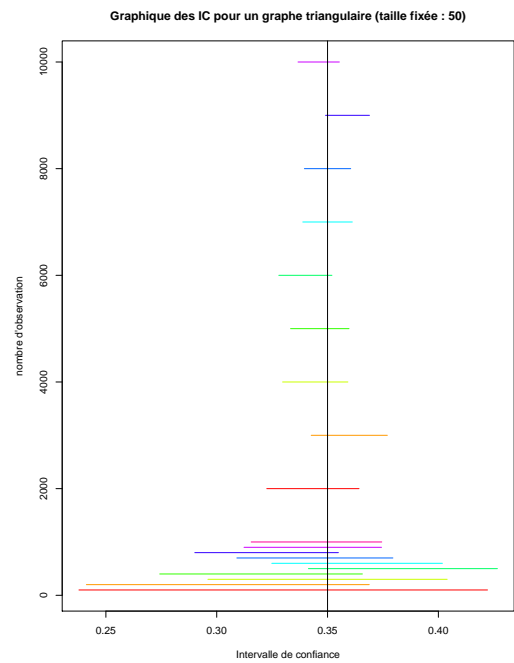


FIGURE 4 – Graphique des IC pour un graphe triangulaire (taille fixe : 50)

Celui-ci nous permet de conclure que la probabilité critique de la proportion p des arêtes conservées est pour un graphe triangulaire de 0,35.

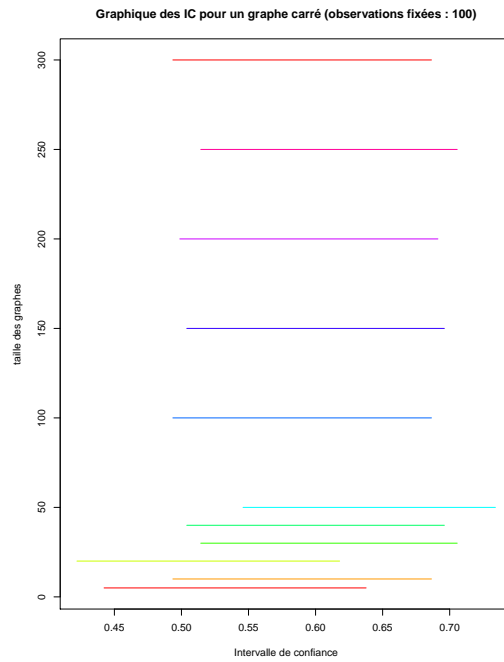


FIGURE 5 – Graphique des IC pour la proportion p des sommets pour un graphe carré (observations fixées : 100)

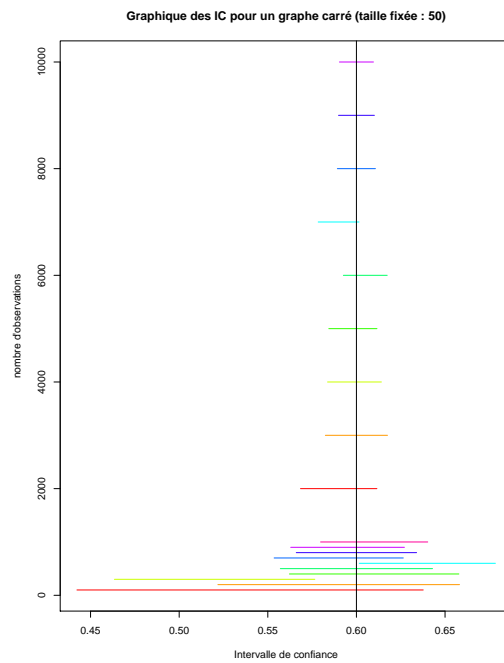


FIGURE 6 – Graphique des IC pour la proportion p des sommets pour un graphe carré (taille fixe : 50)

Celui-ci nous permet de conclure que la probabilité critique de la proportion p des sommets conserves est pour un graphe carré de 0,6.

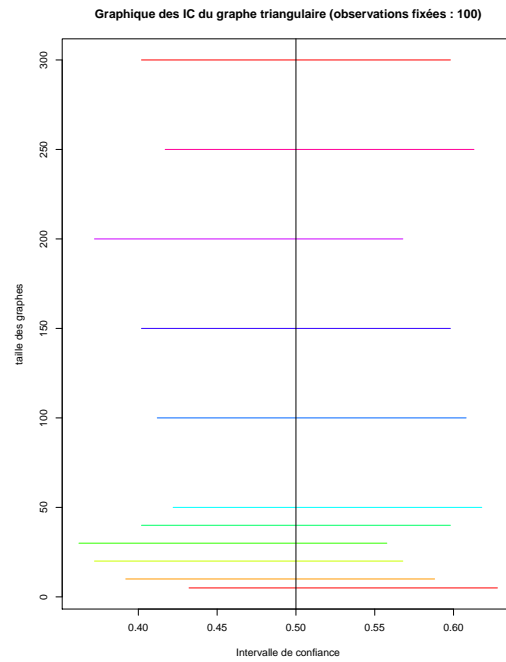


FIGURE 7 – Graphique des IC pour la proportion p des sommets pour un graphe triangulaire (observations fixées : 100)

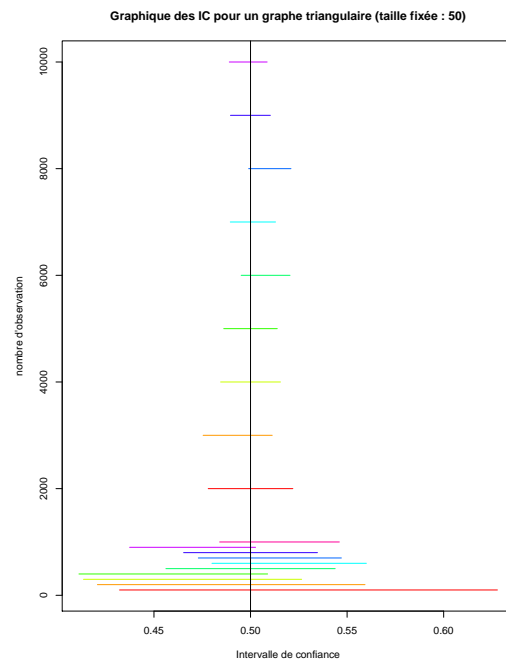


FIGURE 8 – Graphique des IC pour la proportion p des sommets pour un graphe triangulaire (taille fixe : 50)

Celui-ci nous permet de conclure que la probabilité critique de la proportion p des sommets conservees est pour un graphe triangulaire de 0,5.

Concernant la liaison entre la source et le puits ainsi que la longueur du chemin minimal change selon le graphe pris. De ce fait, nous avons répondu à ces questions dans notre code qui s'adapte à n'importe quel graphe. Voici quelques exemples.

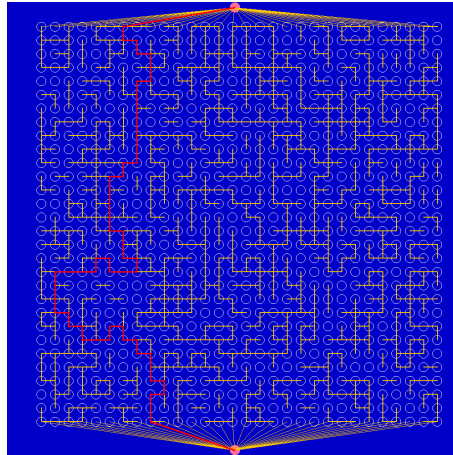


FIGURE 9 – Graphique représentant un chemin pour un graphe carré avec une probabilité p d'arête de 0,5.

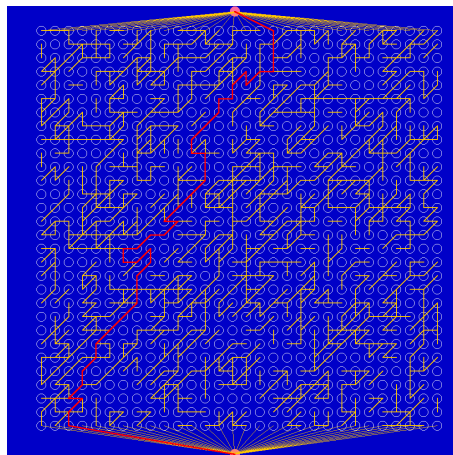


FIGURE 10 – Graphique représentant un chemin pour un graphe triangulaire avec une probabilité p d'arête de 0,35.

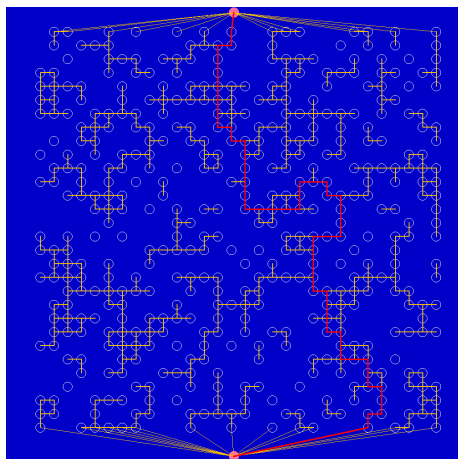


FIGURE 11 – Graphique représentant un chemin pour un graphe carré avec une probabilité p de sommets de 0,6.

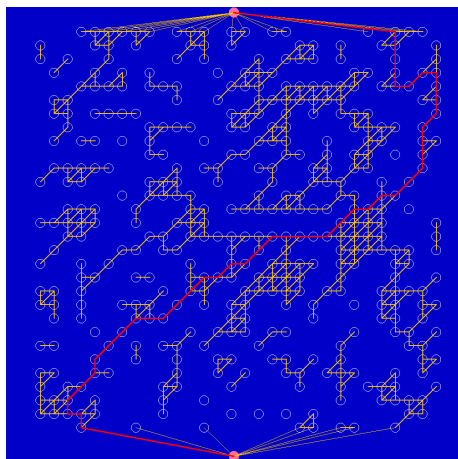


FIGURE 12 – Graphique représentant un chemin pour un graphe carré avec une probabilité p de sommets de 0,5.

2 Recherche du plus court chemin dans un graphe : l'algorithme de Dijkstra

2.1 Retrouver le chemin le plus court avec l'algorithme de Dijkstra

Le fait de stocker le prédécesseur de chaque point parcouru lors de l'exécution de l'algorithme de Dijkstra nous permettra dans une autre fonction de retrouver le chemin le plus court par backtracking (retour en arrière). En partant du point d'arrivée nous pouvons alors retrouver son « meilleur voisin » c'est à dire le point par laquelle l'algorithme de Dijkstra est passé afin de trouver le chemin le plus court. Une fois que nous avons trouvé le meilleur voisin du point d'arrivée on peut trouver le meilleur voisin de ce point et ainsi de suite jusqu'à arriver au point de départ. On fait donc un retour en arrière en partant du point d'arrivée jusqu'au point de départ.

2.2 Propriété de l'algorithme de Dijkstra

1. Un coût négatif est le fait de pouvoir revenir plusieurs fois sur un sommet déjà traité, cela revient à passer une nouvelle fois sur une arête déjà traitée mais dans le sens inverse. L'algorithme de Dijkstra ne donne donc pas de résultat correct si certains coûts sont négatifs.
2. L'alternative à utiliser dans ce cas est l'algorithme de Bellman-Ford qui permet de résoudre le problème des plus courts chemins depuis une source avec des coûts négatifs. En effet, l'algorithme de Bellman-Ford résout le problème des plus courts chemins où le coût des sommets peuvent avoir des valeurs négatives. Alors, l'algorithme retourne une valeur booléenne indiquant s'il existe un circuit de coût négatif accessible. S'il n'en existe pas, l'algorithme donne les plus courts chemins ainsi que leurs coûts.

2.3 Complexité de l'algorithme de Dijkstra

La complexité de l'algorithme de Dijkstra peut changer en fonction de son implémentation (Si l'algorithme est implémenté de manière amélioré ou pas). La complexité en temps d'un algorithme représente le nombre d'étapes de calcul de cet algorithme.

1. On sait que notre file de priorité nous permet deux opérations d'insertion et de suppression en un temps d'ordre logarithmique de $O(\log(x))$ avec x représentant le nombre d'éléments de la file. Dans notre cas, un sommet peut être ajouté à notre file autant de fois qu'il y a d'arêtes qui le précèdent. Ce qui signifie qu'on aura au plus m éléments dans la file avec m insertions et m suppressions au maximum.
Notre complexité en temps est donc de $O(m \log(m) + m \log(m))$ soit $O(2m \log(m))$ qu'on peut simplifier en $O(m \log(m))$ car 2 est une constante qui ne représente rien pour des valeurs de m élevées.
2. Cependant, il est possible d'améliorer le nombre d'éléments dans notre file de priorité en mettant à jour les valeurs des sommets déjà enfilés. Cette opération s'effectue aussi en temps d'ordre logarithmique, et nous permet de garder au maximum v éléments dans notre file. On a donc au plus v insertions, v suppressions, et m mises à jour d'éléments dans la file.
Ceci nous donne une nouvelle complexité en temps de $O(2v \log(v) + m \log(v))$ que l'on peut simplifier en $O(m \log(v))$ car on aura de manière générale $m \geq v$.
Nous avons implémenté cette version de l'algorithme de Dijkstra.
3. On peut encore améliorer notre algorithme afin de réduire le temps d'exécution en utilisant une variante de la file de priorité : le tas de Fibonacci (structure de données similaire au tas binomial). Cette structure a un temps constant pour l'insertion et pour la mise à jour d'éléments.
Ce qui nous donne une complexité finale de $O(v + v \log(v) + m)$, on suppose que de manière générale on a $m \geq v$, on a donc une complexité en temps de $O(v \log(v) + m)$.

2.4 Amélioration de l'algorithme de Dijkstra avec l'utilisation d'heuristiques

L'algorithme de Dijkstra ne fait aucune différence entre les différents chemins qu'il emprunte. C'est ce qu'on essaie d'améliorer avec la variante de l'algorithme qui est appelée A*. Cette dernière fonctionne exactement comme l'algorithme de Dijkstra, mais utilise une technique dite heuristique lors de la sélection du prochain sommet à visiter. Cette fonction heuristique doit estimer la distance qu'il y a entre le prochain sommet et l'arrivée. Dans notre cas l'algorithme A*, qui utiliserait une certaine forme d'intelligence artificielle appelé heuristique (méthode de calcul qui fournit rapidement une solution réalisable mais pas exacte) dont la fonction heuristique est la fonction nulle, serait plus efficace, par exemple la distance à vol d'oiseau.

3 Méthode du fast marching

$$||\nabla D(x)|| = c(x) \quad (1)$$

$$\Lambda d(x) = d(x) \quad (2)$$

$$\max\{0, \lambda - d(x - he_1), \lambda - d(x + he_1)\}^2 + \max\{0, \lambda - d(x - he_2), \lambda - d(x + he_2)\}^2 = h^2 c(x)^2 \quad (3)$$

3.1 Consistance entre (1) et (2)

On cherche à montrer que l'équation aux dérivées partielles (1) est consistante, au premier ordre, avec l'équation discrétisée (2). Pour cela, on veut tester (2) avec chaque couple possible (couple représentant les deux maximum choisis), afin de montrer que (2) et (1) sont égales. On pose

$$\lambda = \Lambda d(x). \quad (4)$$

3.1.1 Prenons le couple (0,0).

On obtient

$$0^2 + 0^2 = h^2 c(x)^2 \Leftrightarrow c(x) = 0.$$

Or, ce n'est pas possible car la fonction c n'est pas défini en 0.

3.1.2 Prenons le couple $(\lambda - d(x - he_1), \lambda - d(x - he_2))$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} [\lambda - d(x - he_1)]^2 + [\lambda - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ [\Lambda d(x) - d(x - he_1)]^2 + [\Lambda d(x) - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ [d(x) - d(x - he_1)]^2 + [d(x) - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ \left(\frac{d(x) - d(x - he_1)}{h}\right)^2 + \left(\frac{d(x) - d(x - he_2)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\ (\partial_1 d(x))^2 + (\partial_2 d(x))^2 &= c(x)^2 \\ ||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1) \end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1).

Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_1 d(x) = d(x)$ et $\partial_2 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{d(x) - d(x - he_1)}{h} &= d(x) \\ \frac{d(x) - (d(x) - hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\ \frac{hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\ d(x) - O(h) &= d(x)\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1.

$$\begin{aligned}\frac{d(x) - d(x - he_2)}{h} &= d(x) \\ \frac{d(x) - (d(x) - hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\ \frac{hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\ d(x) - O(h) &= d(x)\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1. On sait que lorsque que deux composant est d'ordre 1, son addition l'est aussi. Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

3.1.3 Prenons le couple $(\lambda - d(x + he_1), \lambda - d(x + he_2))$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}[\lambda - d(x + he_1)]^2 + [\lambda - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ [\Lambda d(x) - d(x + he_1)]^2 + [\Lambda d(x) - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ [d(x) - d(x + he_1)]^2 + [d(x) - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ \left(\frac{d(x) - d(x + he_1)}{h}\right)^2 + \left(\frac{d(x) - d(x + he_2)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\ (\partial_1 d(x))^2 + (\partial_2 d(x))^2 &= c(x)^2 \\ ||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1)\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1). Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_1 d(x) = d(x)$ et $\partial_2 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{d(x) - d(x + he_1)}{h} &= d(x) \\ \frac{d(x) - (d(x) + hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\ \frac{-hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\ -d(x) - O(h) &= d(x)\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x + he_2)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) + hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{-hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
-d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1. On sait que lorsque que deux composantes est d'ordre 1, leur somme l'est aussi. Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

3.1.4 Prenons le couple $(\lambda - d(x - he_1), \lambda - d(x + he_2))$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
[\lambda - d(x - he_1)]^2 + [\lambda - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[\Lambda d(x) - d(x - he_1)]^2 + [\Lambda d(x) - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[d(x) - d(x - he_1)]^2 + [d(x) - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
\left(\frac{d(x) - d(x - he_1)}{h}\right)^2 + \left(\frac{d(x) - d(x + he_2)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\
(\partial_1 d(x))^2 + (\partial_2 d(x))^2 &= c(x)^2 \\
||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1). Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_1 d(x) = d(x)$ et $\partial_2 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x - he_1)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) - hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x + he_2)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) + hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{-hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
-d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1. On sait que lorsque que deux composantes est d'ordre 1, leur somme l'est aussi. Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

3.1.5 Prenons le couple $(\lambda - d(x + he_1), \lambda - d(x - he_2))$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
[\lambda - d(x + he_1)]^2 + [\lambda - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[\Lambda d(x) - d(x + he_1)]^2 + [\Lambda d(x) - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[d(x) - d(x + he_1)]^2 + [d(x) - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
\left(\frac{d(x) - d(x + he_1)}{h}\right)^2 + \left(\frac{d(x) - d(x - he_2)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\
(\partial_1 d(x))^2 + (\partial_2 d(x))^2 &= c(x)^2 \\
||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1). Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_1 d(x) = d(x)$ et $\partial_2 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x + he_1)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) + hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{-hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
-d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x - he_2)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) - hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

On a bien l'ordre 1. On sait que lorsque que deux composantes est d'ordre 1, leur somme l'est aussi. Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

3.1.6 Prenons le couple $(0, \lambda - d(x - he_2))$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
[0]^2 + [\lambda - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[\Lambda d(x) - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[d(x) - d(x - he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
\left(\frac{d(x) - d(x - he_2)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\
(\partial_2 d(x))^2 &= c(x)^2 \\
||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1). Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_2 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x - he_2)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) - hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

3.1.7 Prenons le couple $(0, \lambda - d(x + he_2))$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
[0]^2 + [\lambda - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[\Lambda d(x) - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[d(x) - d(x + he_2)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
\left(\frac{d(x) - d(x + he_2)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\
(\partial_2 d(x))^2 &= c(x)^2 \\
||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1). Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_2 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x + he_2)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) + hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{-hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
-d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

3.1.8 Prenons le couple $(\lambda - d(x + he_1), 0)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
[\lambda - d(x + he_1)]^2 + [0]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[\Lambda d(x) - d(x + he_1)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
[d(x) - d(x + he_1)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\
\left(\frac{d(x) - d(x + he_1)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\
(\partial_1 d(x))^2 &= c(x)^2 \\
||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1). Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_1 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x) - d(x + he_1)}{h} &= d(x) \\
\frac{d(x) - (d(x) + hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\
\frac{-hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\
-d(x) - O(h) &= d(x)
\end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

3.1.9 Prenons le couple $(\lambda - d(x - he_1), 0)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} [\lambda - d(x - he_1)]^2 + [0]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ [\Lambda d(x) - d(x - he_1)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ [d(x) - d(x - he_1)]^2 &= h^2 c(x)^2 \\ \left(\frac{d(x) - d(x - he_1)}{h}\right)^2 &= c(x)^2 \\ (\partial_1 d(x))^2 &= c(x)^2 \\ ||\nabla D(x)|| &= c(x) = (1) \end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1). Montrons maintenant son ordre de consistance. Posons $\partial_1 d(x) = d(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{d(x) - d(x - he_1)}{h} &= d(x) \\ \frac{d(x) - (d(x) - hd(x) + O(h^2))}{h} &= d(x) \\ \frac{hd(x) - O(h^2)}{h} &= d(x) \\ d(x) - O(h) &= d(x) \end{aligned}$$

Donc (2) est consistant avec (1) au premier ordre.

Donc l'équation aux dérivées partielles (1) est consistante, au premier ordre, avec l'équation discrétisée (2).

3.2 Justifier que l'équation (3) admet une unique solution.

Pour cela, on montrera que le membre de gauche de (3) est une fonction croissante de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(\lambda) = \max\{0, \lambda - d(x - he_1), \lambda - d(x + he_1)\}$.

f est une fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ positive croissante. Donc f^2 est une fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ strictement croissante.

Posons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $g(\lambda) = \max\{0, \lambda - d(x - he_2), \lambda - d(x + he_2)\}$.

g est une fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ positive croissante. Donc g^2 est une fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ strictement croissante.

On en conclut que $f^2 + g^2$ est une fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ strictement croissante.

D'après le théorème de la bijection croissante : soit $f^2 + g^2$ une fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ strictement croissante et $k \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f^2 + g^2 = k$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Donc l'équation (3) admet une unique solution.

3.3 Methode de resolution du probleme local (3).

Pour cela, on montrera que le terme de gauche de (3) est une fonction polynomiale par morceaux.

La fonction f^2 possède deux comportements différents.

- Si $d(x - he_1) < d(x + he_1)$. Alors $\lambda - d(x - he_1) > \lambda - d(x + he_1)$.

On peut se ramener à $f(\lambda)^2 = \max\{0, \lambda - d(x - he_1)\}^2$.

$$\text{Donc } f(\lambda)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < d(x - he_1) \\ (\lambda - d(x - he_1))^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $d(x - he_1) > d(x + he_1)$. Alors $\lambda - d(x - he_1) < \lambda - d(x + he_1)$.
On peut se ramener à $f(\lambda)^2 = \max\{0, \lambda - d(x + he_1)\}^2$.

$$\text{Donc } f(\lambda)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < d(x + he_1) \\ (\lambda - d(x + he_1))^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction g^2 possède deux comportements différents.

- Si $d(x - he_2) < d(x + he_2)$. Alors $\lambda - d(x - he_2) > \lambda - d(x + he_2)$.
On peut se ramener à $g(\lambda)^2 = \max\{0, \lambda - d(x - he_2)\}^2$.

$$\text{Donc } g(\lambda)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < d(x - he_2) \\ (\lambda - d(x - he_2))^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $d(x - he_2) > d(x + he_2)$. Alors $\lambda - d(x - he_2) < \lambda - d(x + he_2)$.
On peut se ramener à $g(\lambda)^2 = \max\{0, \lambda - d(x + he_2)\}^2$.

$$\text{Donc } g(\lambda)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < d(x + he_2) \\ (\lambda - d(x + he_2))^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On introduit $\lambda_1 = \min\{d(x - he_1), d(x + he_1)\}$ et $\lambda_2 = \min\{d(x - he_2), d(x + he_2)\}$.

$$f(\lambda)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < \lambda_1 \\ (\lambda - \lambda_1)^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$g(\lambda)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < \lambda_2 \\ (\lambda - \lambda_2)^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{Donc } f(\lambda)^2 + g(\lambda)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < \lambda_1 \text{ et } \lambda < \lambda_2 \\ (\lambda - \lambda_1)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc le terme de gauche de (3) est bien une fonction polynomiale par morceaux.

Donc la méthode de résolution du problème local (3) que nous proposons est de résoudre $f(\lambda)^2 + g(\lambda)^2 = h^2 c(x)^2$.

Cela revient à résoudre $0 = h^2 c(x)^2$ si $\lambda < \lambda_1$ et $\lambda < \lambda_2$ et $(\lambda - \lambda_1)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2 = h^2 c(x)$ sinon. Nous nous intéressons ici qu'au cas où $\lambda > \lambda_1$ et $\lambda > \lambda_2$.

Posons $h^2 c(x)^2 = m^2$. Alors on a :

$$(\lambda - \lambda_1)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2 = m^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\lambda_1 + \lambda_1^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda_2 + \lambda_2^2 = m^2$$

$$2\lambda^2 - 2\lambda\lambda_1 + \lambda_1^2 - 2\lambda\lambda_2 + \lambda_2^2 = m^2$$

$$2\lambda^2 - 2\lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = m^2$$

$$\lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - m^2) = 0$$

Comme c'est un polynôme du second degré, on calcule le déterminant afin de trouver la solution.

$$\Delta = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - m^2)$$

$$\Delta = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 + 2m^2$$

$$\Delta = 2m^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2$$

$$\Delta = 2m^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

Donc $\lambda = \begin{cases} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{\Delta}}{2} & \text{si } \Delta \geq 0 \\ \min(\lambda_1, \lambda_2) & \text{sinon} \end{cases}$ <div style="text-align: right; margin-top: -10px;">avec $\Delta = 2m^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.</div>
--