Análise de Algoritmos

Prof.: Maiquel de Brito
maiquel.b@ufsc.br

CAC3202 - Algoritmos e Estruturas de Dados
Engenharia de Controle e Automação
Departamento de Engenharia de Controle, Autmação e Computação
UFSC Blumenau

Table of contents

Introdução

Análise de Algoritmos

Diferentes algoritmos podem resolver o mesmo problema

ex.: algoritmos de ordenação, pesquisa etc

Como medir se um algoritmo é eficiente?

Tempo de execução, consumo de memória...

dependem da máquina que os executa

Solução: analisar a quantidade de instruções executadas
em função do **tamanho da entrada**

Tamanho da entrada

Tamanho de entrada fixo:

```
void dobro(int n){
    return n*2;
}
```

Tamanho de entrada variável:

```
void dobro(int v[], int n){
    for(int i=0;i<n;i++){
        printf("%d",v[i]*2);
    }
}
```

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

```
void teste(int v[], int n){                    custo   vezes
   for(int i=0;i<n;i++){. . . . . . . . . . . . .  c1       n
      printf("%d - ",v[i]); . . . . . . . . . . .  c2       n
   }
}

void main(){
   int vetor[] = {1,2,3,4,5};
   int tamanho = sizeof(vetor)/sizeof(int);
   teste(vetor,tamanho);
}
```

Complexidade da função `teste`

$$
\begin{aligned}
C(n) &= c_1 \times n + c_2 \times n \\
&= c_1 n + c_2 n \\
&= (c_1 + c_2) n
\end{aligned}
$$

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

```
void teste(int v[], int n)                              custo    vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                                c1        n
        for(int j=0;j<n;j++){                            c2      n x n
            printf("%d - ",v[i]+j);                      c3      n x n
        }
    }
}

void main(){
    int vetor[] = {1,2,3,4,5};
    int tamanho = sizeof(vetor)/sizeof(int);
    teste(vetor,tamanho);
}
```

$$
\begin{aligned}
C(n) &= c_1 \times n + c_2 \times n \times n + c_3 \times n \times n \\
&= c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^2 \\
&= (c_2 + c_3) n^2 + c_1 n
\end{aligned}
$$

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?[1]

```
1 int primeiro_par(int v[], int n){
2     for(int i=0;i<n;i++){
3         if(v[i]%2==0){
4             return i;
5         }
6     }
7     return -1;
8 }
```

[1] A cláusula `return` (linhas 4 e 8) provoca o encerramento da execução do algoritmo.

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int n){                custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                          c1     x
        if(v[i]%2==0){                             c2     x
            return i;                              c3     1
        }
    }
    return -1;                                     c4     1
}
```

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int n){                custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                         c1      x
        if(v[i]%2==0){                            c2      x
            return i;                             c3      1
        }
    }
    return -1;                                    c4      1
}
```

x – depende da posição do primeiro número par dentro do vetor

melhor caso: menor tempo de execução sobre todas as possíveis entradas de tamanho n

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int n){                 custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                          c1     x
        if(v[i]%2==0){                             c2     x
            return i;                              c3     1
        }
    }
    return -1;                                     c4     1
}
```

x – depende da posição do primeiro número par dentro do vetor

melhor caso: menor tempo de execução sobre todas as possíveis entradas de tamanho n

Na função `primeiro_par`, o melhor caso é quando há um número par na primeira posição do vetor. Ex.: `v ={2,3,4,5,6,7,8}`

Nesse caso, $x = 1$ e o custo $C(n) = c_1 \times 1 + c_2 \times 1 + c_3 \times 1 = 3$

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int n){                custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                          c1     x
        if(v[i]%2==0){                             c2     x
            return i;                              c3     1
        }
    }
    return -1;                                     c4     1
}
```

⇝ Assume-se que cada instrução i têm custo $c_i = 1$.

⇝ Assim, pode-se ao menos saber qual a quantidade de instruções executadas.

melhor caso:[2]

$$\begin{aligned} C(n) &= c_1 \times 1 \quad + c_2 \times 1 \quad + c_3 \times 1 \\ &= 1 \times 1 \quad + 1 \times 1 \quad + 1 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

[2] No melhor caso, a instrução c_4 nunca é executada e, por isso, não é incluída no cálculo

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int*n){        custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                 c1      x
        if(v[i]%2==0){                    c2      x
            return i;                     c3      1
        }
    }
    return -1;                            c4      1
}
```

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

código	custo	vezes
`int primeiro_par(int v[], int*n){`		
`    for(int i=0;i<n;i++){`	c_1	x
`        if(v[i]%2==0){`	c_2	x
`            return i;`	c_3	1
`        }`		
`    }`		
`    return -1;`	c_4	1
`}`		

x – depende da posição do primeiro número par dentro do vetor

pior caso: maior tempo de execução sobre todas as possíveis entradas de tamanho n

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função primeiro_par?

```
int primeiro_par(int v[], int*n){                    custo  vezes
   for(int i=0;i<n;i++){                              c1     x
      if(v[i]%2==0){                                  c2     x
         return i;                                    c3     1
      }
   }
   return -1;                                         c4     1
}
```

x – depende da posição do primeiro número par dentro do vetor

pior caso: maior tempo de execução sobre todas as possíveis entradas de tamanho n

Na função primeiro_par, é (i) quando o primeiro número par está na última posição ou (ii) quando não há número par no vetor. Ex.: v={3,5,7,9,11}

Nesse caso, $x = n$ e o custo $C(n) = 2n + 1$

$$\begin{aligned} C(n) &= c_1 \times n + c_2 \times n + c_4 \times 1 \\ &= 1 \times n + 1 \times n + 1 \times 1 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int*n){                    custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                              c1     x
        if(v[i]%2==0){                                 c2     x
            return i;                                  c3     1
        }
    }
    return -1;                                         c4     1
}
```

A função `primeiro_par` tem custo, no pior caso, de $C(n) = 2n + 1$.

Considerando $C(n)$ a quantidade de instruções executadas em função do tamanho da entrada, qual será essa quantidade para uma entrada de tamanho

- $n = 1000?$ $\rightsquigarrow$ $C(1000) = 2 * 1000 + 1 = 2001$ instruções
- $n = 20000?$ $\rightsquigarrow$ $C(20000) = 2 * 20000 + 1 = 40001$ instruções

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int*n){                custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                          c1     x
        if(v[i]%2==0){                             c2     x
            return i;                              c3     1
        }
    }
    return -1;                                     c4     1
}
```

A função `primeiro_par` tem custo, no pior caso, de $C(n) = 2n + 1$.

Considerando $C(n)$ o tempo de execução em milissegundos, qua será o tempo gasto para executar a função uma entrada de tamanho

- $n = 1000$? $\rightsquigarrow C(1000) = 2 * 1000 + 1 = 2001$ milissegundos
- $n = 20000$? $\rightsquigarrow C(20000) = 2 * 20000 + 1 = 40001$ milissegundos

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int*n){          custo  vezes
    for(int i=0;i<n;i++){                    c1     x
        if(v[i]%2==0){                       c2     x
            return i;                        c3     1
        }
    }
    return -1;                               c4     1
}
```

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Qual é o desempenho da função `primeiro_par`?

```
int primeiro_par(int v[], int*n){                    custo  vezes
   for(int i=0;i<n;i++){                              c1     x
      if(v[i]%2==0){                                  c2     x
         return i;                                    c3     1
      }
   }
   return -1;                                         c4     1
}
```

x – depende da posição do primeiro número par dentro do vetor

caso médio: média dos tempos de execução de todas as entradas de tamanho n.

Requer uma distribuição de probabilidades sobre a entrada.

Se cada posição do vetor tem $\frac{1}{2}$ chances de ter um número par,então:

$$x = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + \cdots + n \times \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$$

$$C(n) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}\right) + 1$$

Desempenho em função do tamanho da entrada (n)

Instruções podem ter custo diferente de 1.

```
int conta_dobro(int v[], int n){                          custo    vezes
    int cont=0, i;                                          1        1
    for(i=0;i<n;i++){                                       1        n
        cont = cont + procura_dobro(v,n,v[i]);            3n+2       n
    }
    return cont;                                            1        1
}

int procura_dobro(int v[], int n, int x){
    int cont = 0, i;                                       1        1
    for(i=0;i<n&cont==0;i++){                              1        n
        if(v[i]/x==2)                                      1        n
            cont=1;                                        1        n
    }
    return cont;                                           1        1
}
```

Custo da função `conta_dobro`: $3n^2 + 3n + 2$

Análise assintótica

Análise assintótica

Foco: verificar o crescimento do tempo de execução em função do crescimento do tamanho da entrada

Exemplo: Sejam dois algoritmos a_1 e a_2 cujo desempenho é dado, respectivamente por $C_1(n) = 10^6(n) + 10^4$ e $C_2(n) = n^2 + 1$. Qual deles é mais rápido?

Análise assintótica

Exemplo: Sejam dois algoritmos a_1 e a_2 cujo desempenho é dado, respectivamente por $C_1(n) = 10^6(n) + 10^4$ e $C_2(n) = n^2 + 1$. Qual deles é mais eficiente?

n	$C_1(n) = 10^6 n + 10^4$	$C_2(n) = n^2 + 1$
1	1.010.000	2
2	2.010.000	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.000.000	$1,00000001 \times 10^{12}$	1×10^{12}
1.000.001	$1,00000101 \times 10^{12}$	$1,00000200 \times 10^{12}$
1.000.002	$1,00000201 \times 10^{12}$	$1,00000400 \times 10^{12}$

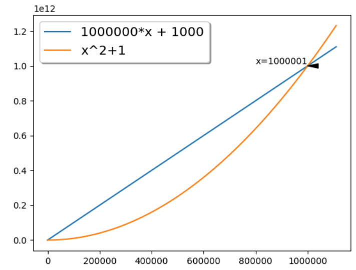
Análise assintótica

Exemplo: Sejam dois algoritmos a_1 e a_2 cujo desempenho é dado, respectivamente por $C_1(n) = 10^6(n) + 10^4$ e $C_2(n) = n^2 + 1$. Qual deles é mais eficiente?

C_2 é menor para um grande número de n

Mas, a partir de um certo n, C_2 passa a ser maior

Pode-se dizer que $C_2(n) > C_1(n)$ quando $n \to \infty$



Análise assintótica - notação O (big-O):

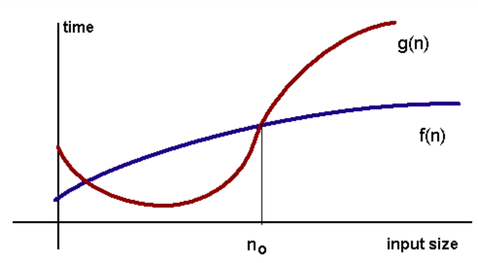
Formalmente

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ duas funções mapeando números inteiros não negativos em números reais. Diz-se que $f(n) = \boldsymbol{O}(g(n))$ se e somente se existem constantes $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq c.g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Informalmente

Uma função $f(n)$ é $\boldsymbol{O}(g(n))$ se existe um número n_0 a partir do qual $g(n)$ será sempre maior que $f(n)$.
ou
Uma função $f(n)$ é $\boldsymbol{O}(g(n))$ se $f(n)$ não cresce mais que $g(n)$.

Análise assintótica - notação O (big-O):

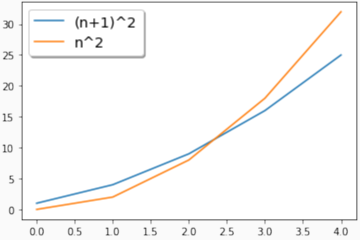


Análise assintótica - notação O (big-O):

Exemplo: Seja $f(n) = (n+1)^2$ e $g(n) = n^2$.
Pode-se afirmar que $f(n)$ é $\boldsymbol{O}(g(n))$.

Para $c = 2$, tem-se $n_0 \approx 2,42$

n	$f(n) = (n+1)^2$	$c.g(n) = c.n^2$
1	4	2
2	9	8
3	16	18
4	25	32
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Demonstração Aqui

Análise assintótica - notação O (big-O):

Exemplo: Seja $f(n) = 10^6 n^2 + 10^4$ e $g(n) = n^2$.
Pode-se afirmar que $f(n)$ é $\boldsymbol{O}(g(n))$.
para $n \geq 1$ e $c = 1.010.001$.

Pode-se, então afirmar que $f(n)$ é $\boldsymbol{O}(n^2)$

Análise assintótica - notação O (big-O):

Na notação $\boldsymbol{O}$, despreza-se constantes e termos de mais baixa ordem da função

- O foco está no crescimento da função ($n \to \infty$)
- Constantes e termos de baixa ordem tornam-se irrelevantes quando $n \to \infty$

Ex: $f(n) = 3n^2 + 10n + 10$

Para $n = 10$:

- $3n^2 = 73,2\%$ do resultado
- $10n = 24,2\%$ do resultado
- $10 = 2,4\%$ do resultado

Para $n = 100$:

- $3n^2 = 96,7\%$ do resultado
- $10n = 3,2\%$ do resultado
- $10 = 0,1\%$ do resultado

Análise assintótica - notação O (big-O):

Complexidade	Exemplo
$\boldsymbol{O}(log_2^n)$	Busca binária
$\boldsymbol{O}(n)$	Busca linear
$\boldsymbol{O}(nlog_2^n)$	Quick sort (melhor caso)
$\boldsymbol{O}(n^2)$	Bubble sort
$\boldsymbol{O}(2^n)$	Fibonacci recursivo
$\boldsymbol{O}(n!)$	Gerar todas as permutações em um conjunto

Análise assintótica - notação O (big-O):

n	log_2^n	n	$nlog_2^n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
2	1	2	4	4	8	4	2
4	2	4	8	16	64	16	24
8	3	8	24	64	512	256	40320
16	4	16	64	256	4096	65536	
32	5	32	160	1024	32768	4294967296	
64	6	64	384	4096	262144	$1,84 \times 10^{19}$	
128	7	128	896	16384	2097152	$3,40 \times 10^{38}$	
256	8	256	2048	65536	16777216	$1,15 \times 10^{77}$	
512	9	512	4608	262144	134217728	$1,34 \times 10^{154}$	
1024	10	1024	10240	1048576	1073741824	$1,79 \times 10^{308}$	

Análise assintótica - notação Ω

Formalmente

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ duas funções mapeando números inteiros não negativos em números reais. Diz-se que $f(n) = \Omega(g(n))$ se e somente se existem constantes $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \geq c.g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Informalmente

Uma função $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ se existe um número n_0 a partir do qual $g(n)$ será sempre *menor* que $f(n)$.
ou
Uma função $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ se $g(n)$ não cresce mais que $f(n)$.

Análise assintótica - notação Ω (Omega):

Exemplo: $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ porque, para qualquer n à direita de m, $f(n)$ é maior que $c.g(n)$.

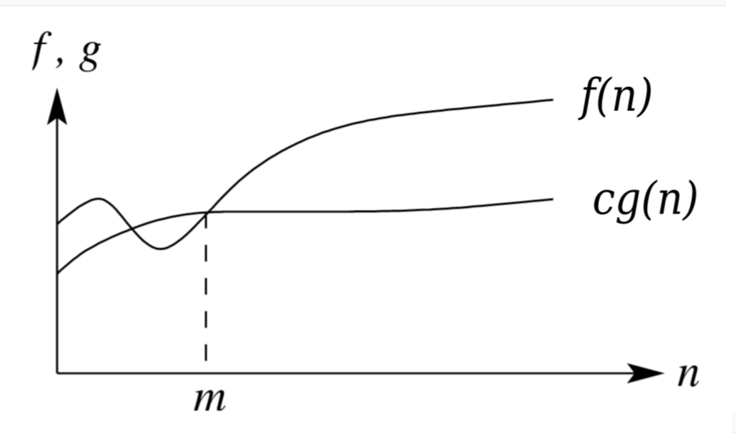


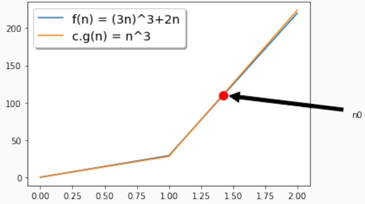
Figura 1: Adaptado de Ziviani, 2010.

Análise assintótica - notação Ω (Omega):

Exemplo: Seja $f(n) = (3n)^3 + 2n$ e $g(n) = n^2$. Pode-se afirmar que $f(n)$ é $\Omega(g(n))$.

Para $c = 28$, tem-se $n_0 \approx 1,42$

n	$f(n) = (3n)^3 + 2n$	$c.g(n) = c.n^2$
0.01	0,020027	0,000001
⋮	⋮	⋮
1.4	$76,888$	$76,832$
1.41	$78,506967$	$78,490188$
1.42	$80,148776$	$80,172064$
⋮	⋮	⋮



Demonstração Aqui

Leituras complementares

Capítulo 1 de *Ziviani, Nivio. Projeto De Algoritmos Com Implementações Em Pascal E C 3ed.: CENGAGE, 2010. ISBN: 9788522110506*.

Capítulo 6 de *Adamson, Iain T. Data Structures and Algorithms: A First Course. Springer, 1996. ISBN: 978-1-4471-1023-1*
(disponível no acervo eletrônico da BU-UFSC)