

Algoritmos e estruturas de Dados

Heaps

Filas de prioridades - problemática

Uma tarefa comum em programas de computador é selecionar um dado entre vários de acordo com alguma prioridade (ex. menor valor, maior valor etc)

Há várias formas de implementar filas de prioridades. Ex:

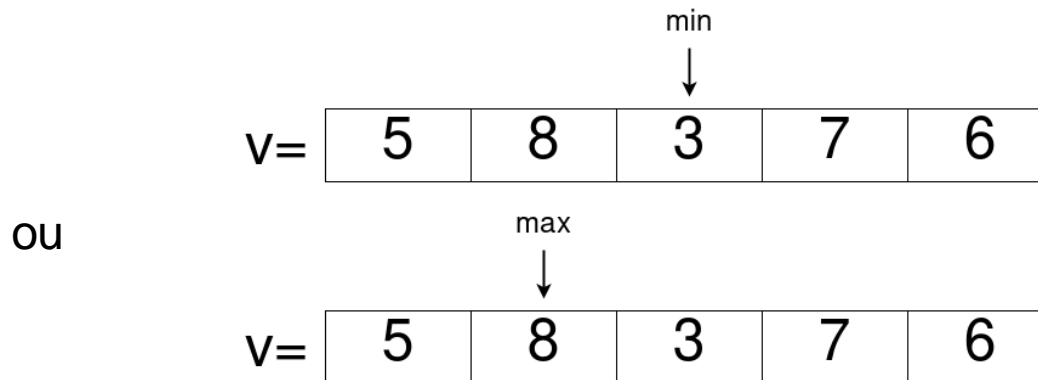
- armazenar dados em uma lista e manter um ponteiro para o menor elemento;
- armazenar os dados de forma ordenada.

Em todas essas estratégias, há operações que tem complexidade $O(n)$ (cf. próximos slides)

Filas de prioridades - problemática

Estratégia 1:

armazenar dados em uma lista e manter um ponteiro para o menor (ou maior) elemento



Vantagem: o menor (ou maior) elemento é acessado em $O(1)$

Desvantagem: ao remover um elemento, deve-se atualizar o indicador *min* (ou *max*). Para isso, deve-se avaliar todos os elementos em $O(n)$.

Filas de prioridades - problemática

Estratégia 2:

- armazenar os dados de forma ordenada

v=

3	5	6	7	8
---	---	---	---	---

ou

v=

8	7	6	5	3
---	---	---	---	---

Vantagem: o menor elemento é o primeiro e pode ser acessado em $O(1)$

Desvantagem: ao inserir um novo elemento, deve-se procurar a sua posição correta. Isso pode ser feito em $O(\log n)$ usando pesquisa binária. Mas, ao fazer a inserção, todos os demais elementos devem ser deslocados à direita, com custo $O(n)$ no pior caso.

Heaps

Heaps são estruturas que permitem a implementação de filas de prioridade com operações de complexidade máxima $O(\log n)$

Há dois tipos de heap:

- *min_heap*: o elemento prioritário é aquele que tem menor valor
- *max_heap*: o elemento prioritário é aquele que tem maior valor

Heaps

Formalmente:

Um *min_heap* é uma sequência v com n elementos indexado por $i=1, \dots, n$, em que, para $i \leq 2 \leq n$:

$$v[\lfloor i/2 \rfloor] \leq v[i]$$

Exemplo:

i	1	2	3	4	5	6	7
$v=$	1	2	5	10	3	7	11

$$v[1] \leq v[2] \quad v[2] \leq v[4] \quad v[3] \leq v[6]$$

$$v[1] \leq v[3] \quad v[2] \leq v[5] \quad v[3] \leq v[7]$$

Heaps

Formalmente:

Um *max_heap* é uma sequência v com n elementos indexado por $i=1, \dots, n$, em que, para $i \leq 2 \leq n$:

$$v[\lfloor i/2 \rfloor] \geq v[i]$$

Exemplo:

i	1	2	3	4	5	6	7
$v=$	11	7	10	5	2	1	3

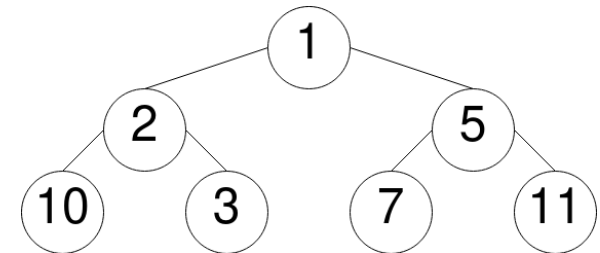
$$v[1] \geq v[2] \quad v[2] \geq v[4] \quad v[3] \geq v[6]$$

$$v[1] \geq v[3] \quad v[2] \geq v[5] \quad v[3] \geq v[7]$$

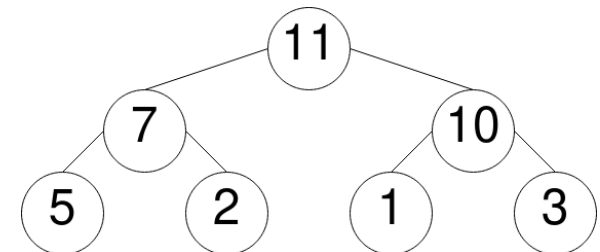
Heaps

Heaps podem ser visualizados na forma de árvores binárias de forma que, para um elemento para o elemento $v[i]$ terá $v[2i]$ como seu filho à esquerda e $v[2i+1]$ como seu filho à direita.

i	1	2	3	4	5	6	7
v=	1	2	5	10	3	7	11



i	1	2	3	4	5	6	7
v=	11	7	10	5	2	1	3



Heaps

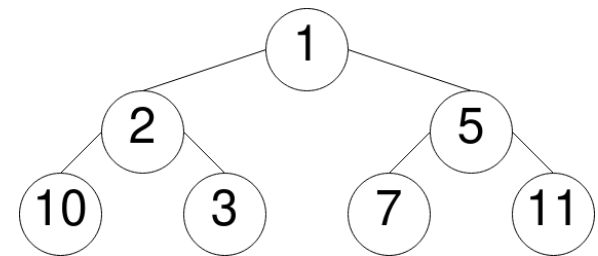
Heaps podem ser armazenados na forma de árvores.

Também podem ser armazenados na forma de alguma estrutura sequencial, como vetores ou listas.

O armazenamento em vetores é uma abordagem comum pois otimiza o uso de memória ao evitar o uso de ponteiros (*Kleinberg e Tardos, 2006*). A limitação do tamanho fixo dos vetores pode ser tratada com alocação dinâmica de memória.

Mesmo ao utilizar vetores, considera-se que os elementos de um heap de tamanho n são indexados de 1 a n , enquanto os elementos do vetor que contém o heap são indexados de 0 a $n-1$.

i	1	2	3	4	5	6	7
v=	11	7	10	5	2	7	3



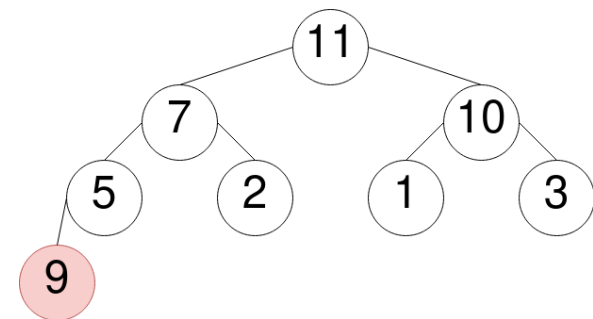
Operações em Heaps

A primeira posição de um *heap* será ocupada pelo menor elemento no caso de *min_heap* e pelo maior elemento no caso de *max_heap*. Assim, esses elementos podem ser recuperados em $O(1)$.

Novos elementos podem ser adicionados ao final do vetor. No entanto, isso pode violar a propriedade de *heap* da estrutura.

Por exemplo, no *max_heap* abaixo, ao adicionar-se o elemento 9 na posição 8, tem-se $v[4] < v[8]$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
v=	11	7	10	5	2	1	3	9

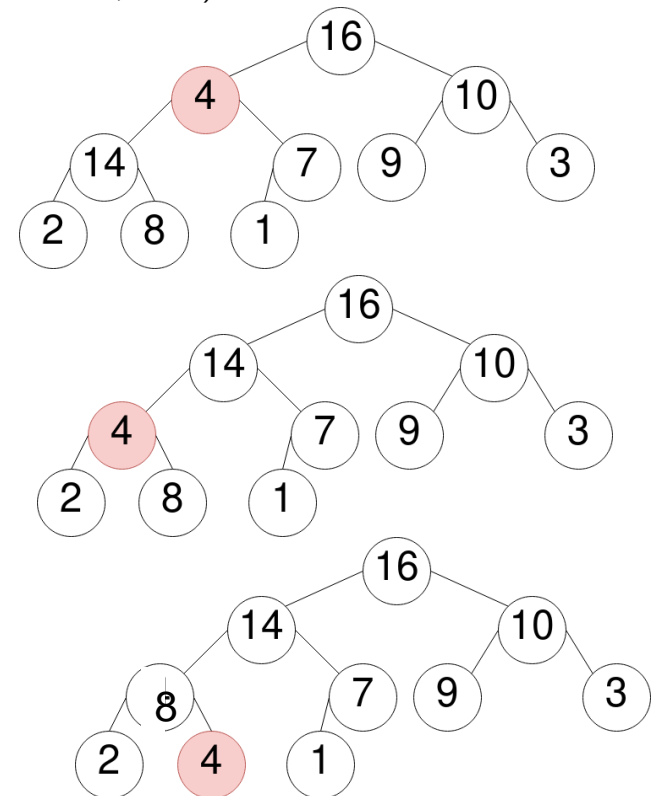


Para resolver este problema, aplica-se uma operação sobre a estrutura para manter sua propriedade de *heap*. Esta operação é comumente conhecida como *max_heapify* (em *max_heaps*) ou *min_heapify* (em *min_heaps*).

Operações em Heaps

A função *max_heapify* é aplicada sobre o elemento que ocupa a posição *i* no *max_heap* *h*, de tamanho *n*, para posicioná-lo adequadamente dentro da estrutura, mantendo a propriedade de *heap* (Cormen et al., 2012)

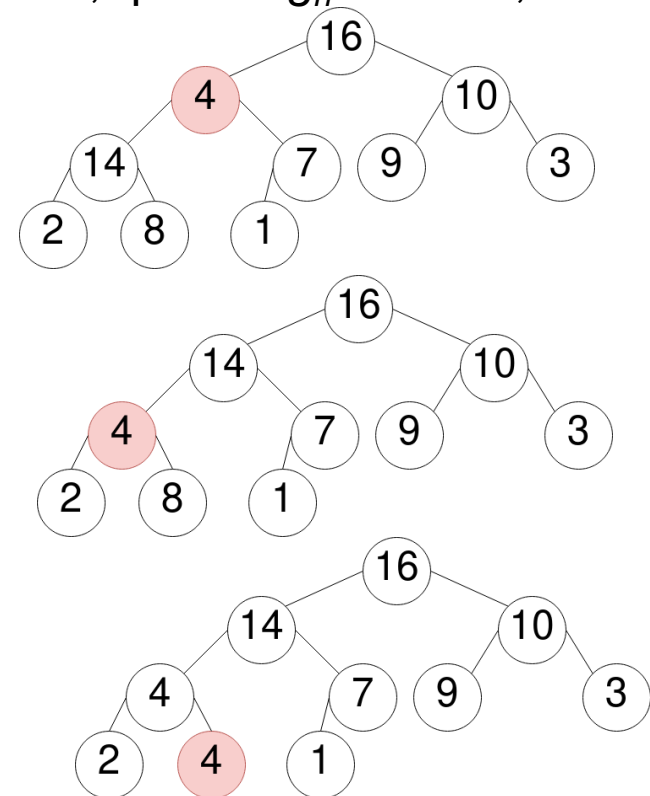
```
max_heapify(h, i, n)
  l = 2i
  r = 2i+1
  se l ≤ n e h[l] > h[i]
    maior = l
  senão
    maior = i
  se r ≤ n e h[r] > h[maior]
    maior = r
  se maior ≠ i
    troca h[maior] com h[i]
    max_heapify(h, maior, n)
```



Operações em Heaps

A função *max_heapify* faz as trocas necessárias e, se for o caso, é chamada recursivamente para tratar do elemento em sua nova posição. O máximo de chamadas recursivas corresponde à altura da árvore, que é $\log_2 n$. Assim, a complexidade de *max_heapify* é $O(\log n)$.

```
max_heapify(h, i, n)
  l = 2i
  r = 2i+1
  se l ≤ n e h[l] > h[i]
    maior = l
  senão maior = r
  se r ≤ n e h[r] > h[maior]
    maior = r
  se maior ≠ i
    troca h[maior] com h[i]
    max_heapify(h, maior, n)
```



A construção de um Heap

Pode-se transformar uma sequência qualquer em um *heap* trocando os elementos de posição caso necessário para atingir a propriedade *heap*.

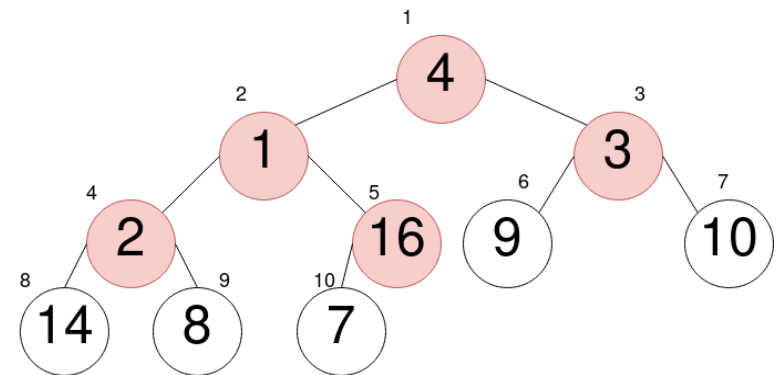
Compara-se cada elemento com seus filhos, trocando-os de posição caso necessário.

Em uma sequência v de tamanho n , os elementos de $v[(\lfloor n/2 \rfloor + 1) \dots n]$ (i.e. a segunda metade da sequência) são folhas da árvore e não têm com quem serem comparados.

Logo, aplica-se a função *max_heap* à primeira metade da sequência (i.e. $v[1 \dots \lfloor n/2 \rfloor]$)

```
build_max_heap(n)
  para i de  $\lfloor \text{tamanho}(n)/2 \rfloor$  até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 $v = [4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7]$

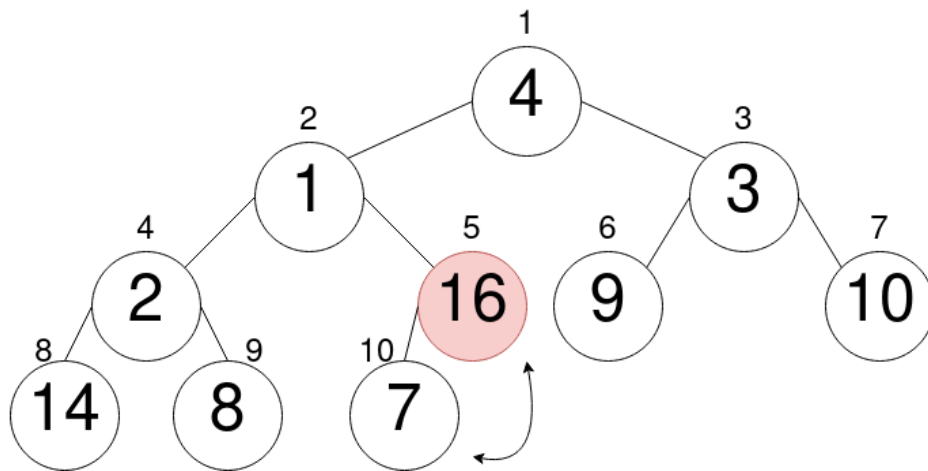


A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7]$



para $i=5$

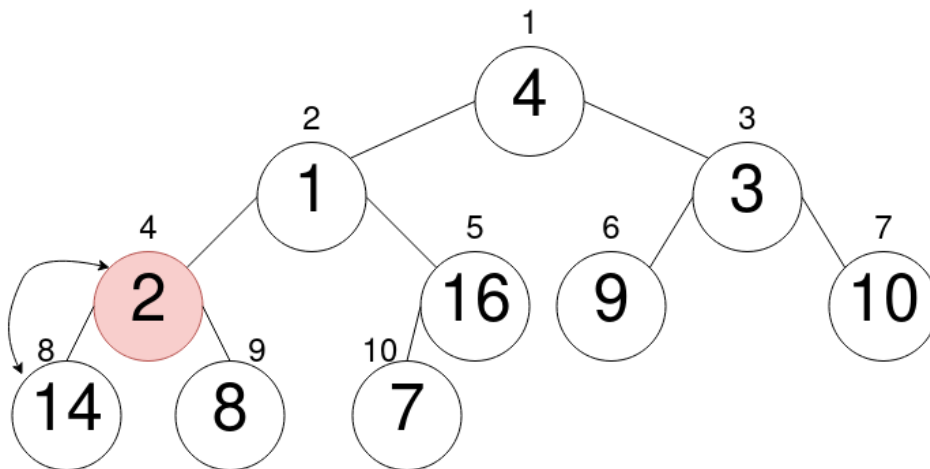
$v[i]$ é maior que seus sucessores
logo, nenhuma troca é necessária

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7]$



para $i=4$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

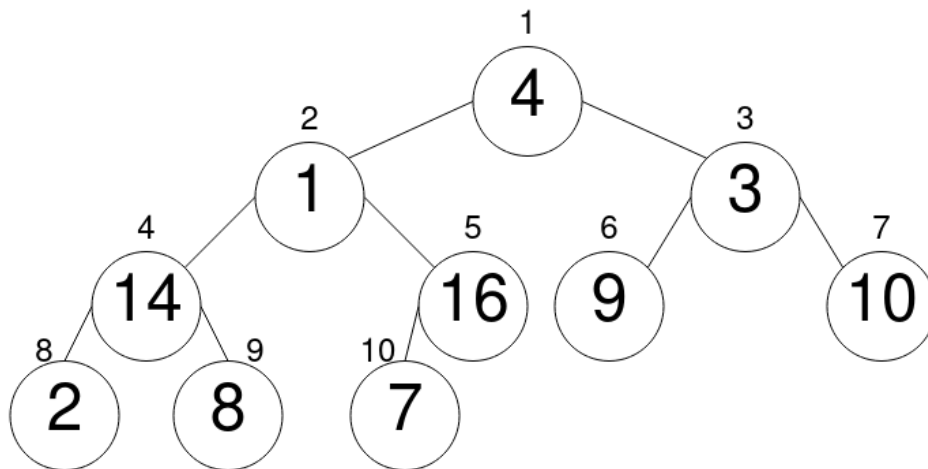
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 1, 3, 14, 16, 9, 10, 2, 8, 7]$



para $i=4$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

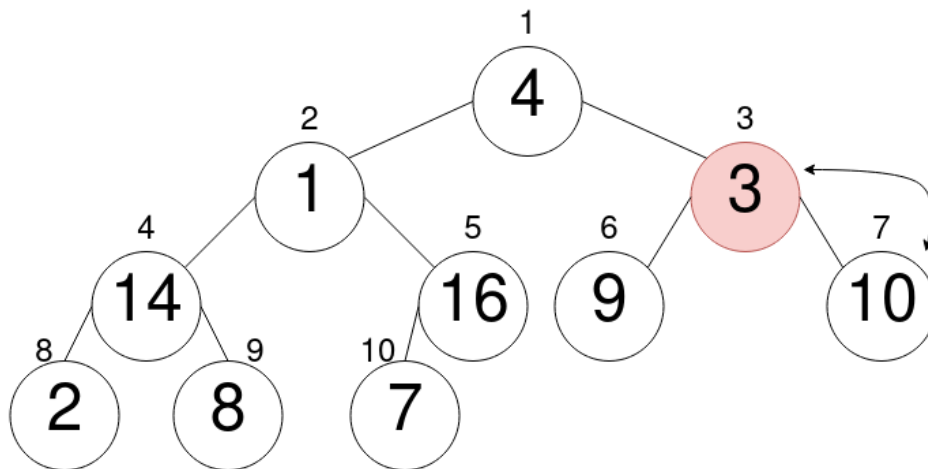
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 1, 3, 14, 16, 9, 10, 2, 8, 7]$



para $i=3$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

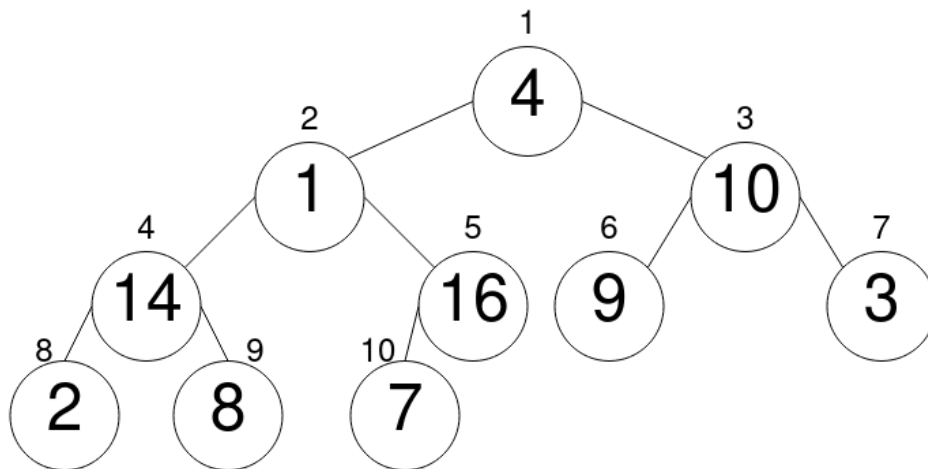
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 1, 10, 14, 16, 9, 3, 2, 8, 7]$



para $i=3$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

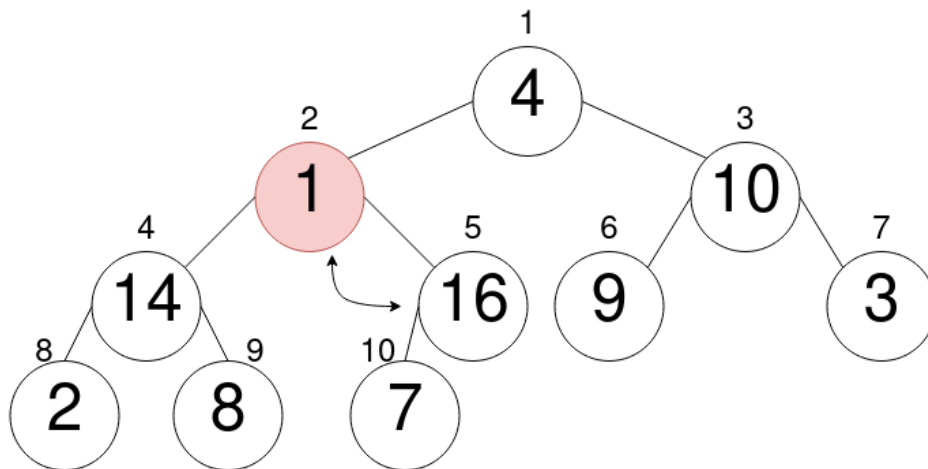
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, \textcolor{red}{1}, 10, 14, \textcolor{red}{16}, 9, 3, 2, 8, 7]$



para $i=2$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

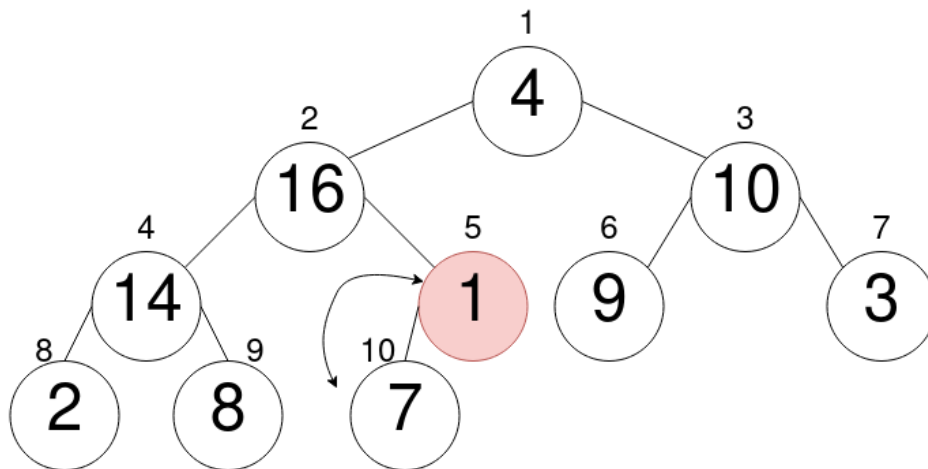
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores (recursivamente)

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n,i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 16, 10, 14, \mathbf{1}, 9, 3, 2, 8, \mathbf{7}]$



para $i=2$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

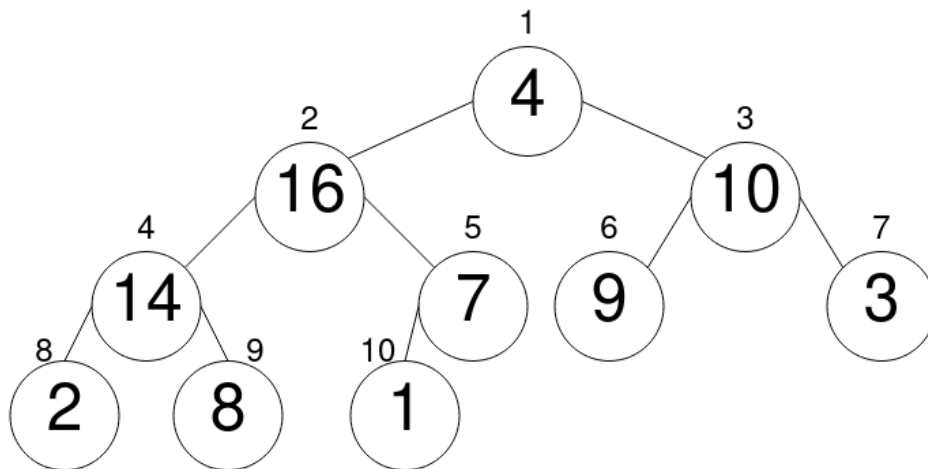
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores (recursivamente)

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 16, 10, 14, \textcolor{red}{1}, 9, 3, 2, 8, \textcolor{red}{7}]$



para $i=2$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

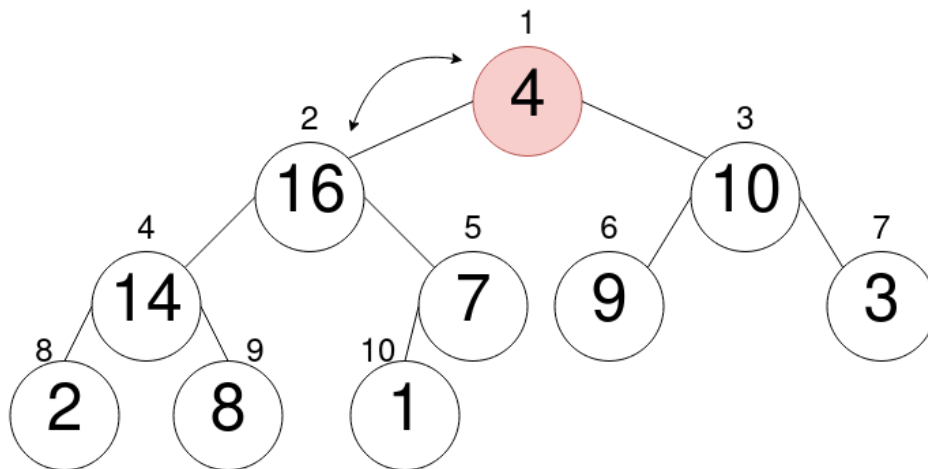
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores (recursivamente)

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [4, 16, 10, 14, 1, 9, 3, 2, 8, 7]$



para $i=1$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

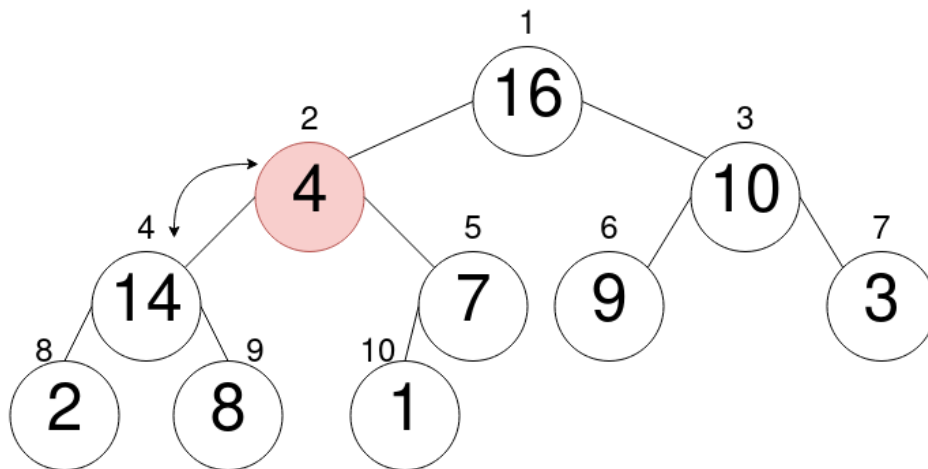
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores (recursivamente)

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [16, 4, 10, 14, 1, 9, 3, 2, 8, 7]$



para $i=1$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

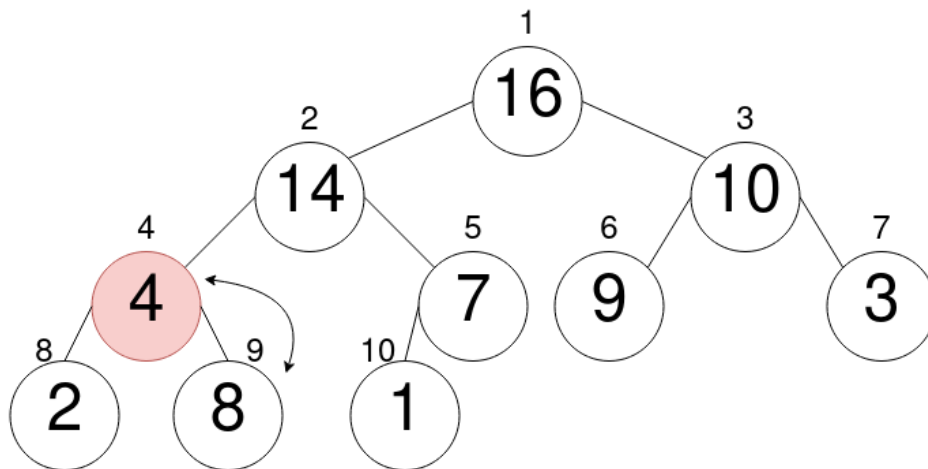
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores (recursivamente)

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [16, 14, 10, 4, 1, 9, 3, 2, 8, 7]$



para $i=1$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

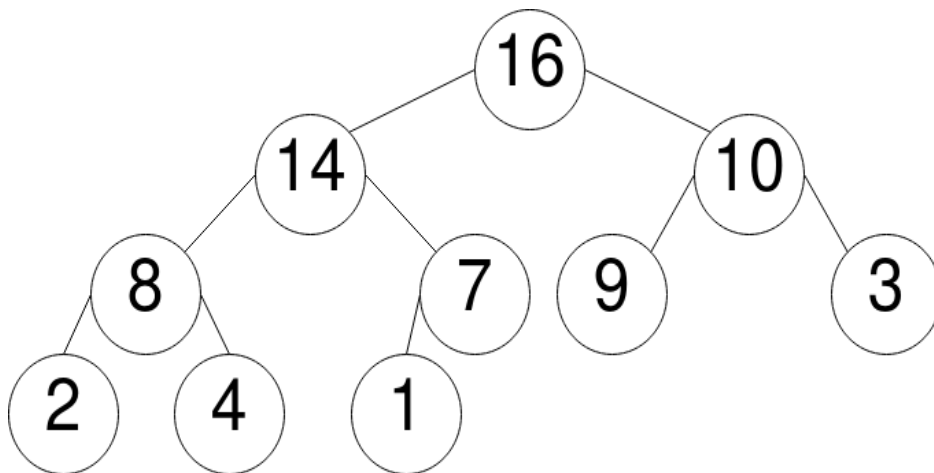
troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores (recursivamente)

A construção de um Heap

```
build_max_heap(n)
  para i de [tamanho(n)/2] até 1
    max_heapify(n, i)
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$v = [16, 14, 10, 8, 1, 9, 3, 2, 4, 7]$



para $i=1$

$v[i]$ é menor que seus sucessores

troca-se $v[i]$ com o maior de seus sucessores (recursivamente)

Filas de prioridades

Uma das aplicações mais populares de heaps são as *filas de prioridades*, que são estruturas em que tem-se acesso unicamente ao elemento de maior prioridade. Essa prioridade é definida por algum valor associado a cada elemento. Se o elemento prioritário é o que tem valor mais alto, utiliza-se um *max-heap*. Se o elemento prioritário é o que tem valor mais baixo, utiliza-se um *min-heap*.

As operações mais comuns em filas de prioridades são:

- *Insert* (H, x): insere o elemento x no heap H ;
- *Priority*(H): retorna o elemento prioritário armazenado no heap H ;
- *Extract*(H): retorna o elemento prioritário armazenado no heap H e o remove da estrutura;
- *UpdateKey*(H, i, k): altera o valor da chave do i -ésimo elemento para k ;

Filas de prioridades

Priority(H): retorna o elemento prioritário armazenado no heap H ;

```
priority(H)  
    Return H[1]
```

Filas de prioridades

Extract(H): retorna o elemento prioritário armazenado no heap H e o remove da estrutura;

```
extract_max(H)
    se tamanho(H) >= 1
        max = H[1]
        H[1] = H[tamanho(H)]
        tamanho(H) = tamanho(H) - 1
        max_heapify(H, 1, tamanho(H))
```

Filas de prioridades

UpdateKey(H,i,k): altera o valor da chave do i -ésimo elemento para k ;

```
increase_key(H, i, k)
    se  $k > i$ 
         $H[i] = k$ 
        enquanto  $i > 1$  e  $H[\lfloor i/2 \rfloor] < H[i]$ 
            troca( $H[i], H[\lfloor i/2 \rfloor]$ )
             $i = \lfloor i/2 \rfloor$ 
```

Filas de prioridades

Insert (H, k): insere o elemento k no heap H ;

```
max_insert( $H, k$ )  
    tamanho( $H$ ) = tamanho( $H$ ) + 1  
     $H[tamanho(H)] = -1$   
    increase_key( $H, tamanho(H), k$ )
```

Referências

Kleinberg, Jon M., Tardos, Éva . Algorithm design. Addison-Wesley 2006, ISBN 978-0-321-37291-8, pp. I-XXIII, 1-838

Cormen, Thomas H., Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest and Clifford Stein. Algoritmos: Teoria E Prática. 3 ed.: Campus, 2012. ISBN: 9788535236996.