Resumen Matemática 0

Maira Diaz Marraffini
maira.marraffini@gmail.com *maira1001001* *maira.marraffini* *Maira Diaz Marraffini*

Febrero del 2017. Version 2, actualizada y corregida

1. Conectivos Lógicos

1.1. Negación

p	$\neg p$
V	F
F	V

1.2. Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.3. Disjunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.4. Condicional o implicación

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p \to q$ se lee:

- p implica q
- si p, entonces q
- p sólo si q
- q si p
- p es condición suficiente para q
- q es condición necesaria para p

1.5. Recíproco de la implicación

El recíproco de $p \to q$ es $q \to p$
Tienen valores diferentes

1.6. Contrarrecíproco de la implicación

El contrarrecíproco de $p \to q$ es $\neg q \to \neg p$
Tienen los mismos valores

1.7. Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$p \leftrightarrow q$ se lee:

- p si sólo si q
- p es necesario y suficiente para q

1.8. Tautología

1.8.1. Doble negación

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

1.8.2. Leyes conmutativas

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

1.8.3. Leyes asociativas

a) $[(p \wedge q) \wedge r)] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

b) $[(p \vee q) \vee r)] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

1.8.4. Leyes distributivas

a) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

1.8.5. Leyes de idempotencia

a) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

b) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

1.8.6. Leyes de De Morgan

a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

1.8.7. Implicación

a) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

b) $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \to r)]$

c) $[(p \to q) \wedge (p \to r)] \Leftrightarrow [(p \to (q \wedge r))]$

1.8.8. Equivalencia

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

1.8.9. Adición

$p \Rightarrow (p \vee q)$

1.8.10. Simplificación

$(p \wedge q) \Rightarrow p$

1.8.11. Absurdo

$(p \to F) \Rightarrow \neg p$

1.8.12. Modus ponens

$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$

1.8.13. Modus tollens

$[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$

1.8.14. Transitividad del $\leftrightarrow$

$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$

1.8.15. Transitividad del $\to$

$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$

1.8.16. Dilemas constructivos

a) $[(p \to q) \vee (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$

b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$

1.9. Contradicción

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
F	V	F
V	F	F

Ej: “La computadoras es negra y la computadora no es negra”

1.10. Equivalencia lógica

Cuando los resultados de dos proposiciones tienen los mismos valores de verdad, se indica como $p \Leftrightarrow q$

2. Operadores Universal y Existencial

2.1. Universal

$\forall x : p(x)$
Puede leerse :

- Para todo $x, p(x)$
- Para cada x
- Para cualquier x
- Para x arbitrario

2.2. Existencial

$\exists x : p(x)$
Puede leerse :

- Existe un x tal que $p(x)$
- Para algún x, $p(x)$
- Existe, al menos, un x tal que $p(x)$

2.3. Equivalencias

Sea A el universo,

- $\neg \forall x \in A\ p(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A : \neg p(x)$
- $\neg \exists x \in A :\ p(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A\ \neg p(x)$

2.4. Alcance de un operador

El alcance se indica con paréntesis
$(\exists x) :\ x\, es\, verde\ \wedge\ x\, es\, rojo$
$(\exists x) : (\ x\, es\, verde\ \wedge\ x\, es\, rojo)$

3. Conjuntos

3.1. Propiedades

a) **Inclusión**

$A \subset B$ es equivalente a $\forall x : x \in A \to x \in B$

b) **Unión**

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

c) **Intersección**

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

d) **Diferencia**

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

e) **Complemento**

$$C_u A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

f) **Igualdad entre conjuntos**

$A = B \leftrightarrow \forall x, (x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)$

4. Números

4.1. Números N

4.1.1. Te comentamos sobre los naturales

- Que un número natural va después del otro
- Que dentro de dos números naturales consecutivos no puede haber otro
- Que son infinitos

4.1.2. Propiedades

- $0 \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$
- si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n-1 \in \mathbb{N}$, cuando $n \neq 0$
- sea M subconjunto de $\mathbb{N}$ con las siguiente propiedades
  - $0 \in M$
  - $n \in M \Rightarrow n+1 \in M \Rightarrow M = \mathbb{N}$

4.2. Propiedades Algebraicas

Las operaciones de suma $(+)$ con N:

- Ley de Cierre: $\forall a, b \in N \Rightarrow a+b \in N$
- Asociativo: $\forall a, b, c \in N : a + (b+c) = (a+b)+c$
- Conmutativo: $\forall a, b \in N : a+b = b+a$
- Elemento neutro: $\exists 0 \in N \; tal \; que \; \forall a \in N : a+0 = a$

La suma de dos números N es cerrado, es decir, es un N. Sin embargo, para
$n < m : \quad n - m \notin N$
Las operaciones de multiplicación $(\times)$ con N:

- Ley de Cierre: $\forall a, b \in N \Rightarrow a \times b \in N$
- Asociativo: $\forall a, b, c \in N : a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Conmutativo: $\forall a, b \in N : a \times b = b \times a$
- Elemento neutro: $\exists 1 \in N \; tal \; que \; \forall a \in N : a \times 1 = a$
- Distributivo la $\times$ con respecto a la $+$: $\forall a, b, c \in N : a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
- No hay divisores de cero: $\forall a, b \in N$: Si $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

4.3. Números $\mathbb{Z}$

4.3.1. Propiedades Algebraicas

Las operaciones de suma $(+)$ con $\mathbb{Z}$:

- Ley de Cierre: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Z}$
- Asociativo: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a + (b+c) = (a+b)+c$
- Conmutativo: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a+b = b+a$
- Elemento neutro: $\exists 0 \in \mathbb{Z} \; tal \; que \; \forall a \in \mathbb{Z} : a+0 = a$
- Elemento Opuesto: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z} : a + (-a) = 0$

Las operaciones de multiplicación $(\times)$ con $\mathbb{Z}$:

- Ley de Cierre: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{Z}$
- Asociativo: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Conmutativo: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \times b = b \times a$
- Elemento neutro: $\exists 1 \in \mathbb{Z} \; tal \; que \; \forall a \in \mathbb{Z} : a \times 1 = a$
- Distributivo la $\times$ con respecto a la $+$: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
- No hay divisores de cero: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: Si $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

4.3.2. Números Pares

Un número entero n es par $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$

4.3.3. Números Impares

Un número entero n es impar $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k+1$

4.3.4. Divisibilidad

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que a divide a b si $\exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$
Se suele expresar de la forma $a|b$, y se lee "a divide b", "a es un divisor de b"o también "b es múltiplo de a "

4.3.5. Ley de Monotonía

Si $a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

4.3.6. Propiedades del orden de los $\mathbb{Z}$

- Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$, Si $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d$
- Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$, Si $a \leq b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$

4.3.7. Primos

Un número p es primo, si tiene exactamente 4 divisores: $1, -1, p$ y $-p$

4.4. Números $\mathbb{Q}$

4.4.1. Definición

Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros, es decir, una fracción común a/b con numerador a y denominador b distinto de cero.
Esto es equivalente a escribir formalmente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Q} \wedge b \neq 0 \right\}$$

4.4.2. Suma en $\mathbb{Q}$

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, se define la suma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

4.4.3. Multiplicación en $\mathbb{Q}$

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, se define la multiplicación:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

4.4.4. Números equivalentes

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ son equivalentes si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$

4.5. Propiedades Algebraicas

Las operaciones de suma (+) con $\mathbb{Q}$:

- Ley de Cierre: $\forall p, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow p + q \in \mathbb{Q}$
- Asociativo: $\forall p, q, r \in \mathbb{Q} : p + (q + r) = (p + q) + r$
- Conmutativo: $\forall p, q \in \mathbb{Q} : p + q = q + p$
- Elemento neutro: $\exists 0 \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\forall p \in \mathbb{Q} : p + 0 = p$
- Elemento Opuesto: $\forall p \in \mathbb{Q}, \exists -p \in \mathbb{Q} : p + (-p) = 0$

Las operaciones de multiplicación ($\times$) con $\mathbb{Q}$:

- Ley de Cierre: $\forall p, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow p \times q \in \mathbb{Q}$
- Asociativo: $\forall p, q, r \in \mathbb{Q} : p \times (q \times r) = (p \times q) \times r$
- Conmutativo: $\forall p, q \in \mathbb{Q} : p \times q = q \times p$
- Elemento neutro: $\exists 1 \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\forall p \in \mathbb{Q} : p \times 1 = p$
- Inverso multiplicativo: $\forall p \in \mathbb{Q}, p \neq 0, \exists p^{-1} \in \mathbb{Q} : p \times p^{-1} = 1$
- Distributividad de la ($\times$) en la (+): Si $p, q, r \in \mathbb{Q}$ entonces $p \times (q + r) = (p \times q) + (p \times r)$

4.5.1. Orden en $\mathbb{Q}$

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, se dice que:

- $\frac{a}{b}$ es menor o igual que $\frac{c}{d}$ y se anota $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$
- $\frac{a}{b}$ es mayor o igual que $\frac{c}{d}$ y se anota $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \geq bc$

4.5.2. $\mathbb{Q}$ es denso con la relación $\leq$

Entre dos racionales distintos, siempre existe otro:
Sean

$$\frac{a}{b} \quad y \quad \frac{c}{d} \in Q \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \frac{c}{d}$$

4.6. Números I

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$, con $n \neq 0$
Entre los irracionales más conocidos están $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π

4.7. Números R

4.7.1. Propiedades Algebraicas

Las operaciones de suma (+) con R:

- Ley de Cierre: $\forall a, b \in R \Rightarrow a + b \in R$
- Asociativo: $\forall a, b, c \in R : a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativo: $\forall a, b \in R : a + b = b + a$
- Elemento neutro: $\exists 0 \in R$ *tal que* $\forall a \in R : a + 0 = a$
- Elemento Opuesto: $\forall a \in R, \exists -a \in R : a + (-a) = 0$

Las operaciones de multiplicación ($\times$) con R:

- Ley de Cierre: $\forall a, b \in R \Rightarrow a \times b \in R$
- Asociativo: $\forall a, b, c \in R : a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Conmutativo: $\forall a, b \in R : a \times b = b \times a$
- Elemento neutro: $\exists 1 \in R$ *tal que* $\forall a \in R : a \times 1 = a$
- Inverso multiplicativo: $\forall a \in R, a \neq 0, \exists a^{-1} \in R : a \times a^{-1} = 1$
- Distributivo la $\times$ con respecto a la $+$: $\forall a, b, c \in R : a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

4.7.2. Propiedades de Orden

- $\forall a \in R : a < 0 \Rightarrow a = 0 \vee a > 0$
- $a, b \in R$, si $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$
- $\forall a, b \in R$, si $a < b \Rightarrow a - b < 0$

4.7.3. Potencia de un número R y exponente entero

Sea $a \in R, n \in N, n \neq 0$ entonces $a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \quad veces}$

Recordar: como R tiene elemento inverso, entonces $a^n a^{-n} = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, siempre que $a \neq 0$.

4.7.4. Propiedades de las potencias

Sean $a, b \in R$, y $n \in Z$

- $(a.b)^n = a^n b^n$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^n.a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, y $a \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{n.m} = a^{m.n} = (a^m)^n$
- **OJO**: $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

4.7.5. Radicación

$b \in R$, $n \in Z$ y $n > 1$, $\exists c$:

$$c^n = b \Leftrightarrow c = \sqrt[n]{b}$$

Observar que si $b \in \mathbb{R}$ es:

- b es impar: $\sqrt[n]{b}$ existe
- b es par: $\sqrt[n]{b}$ existe sólo si $b \geq 0$

4.7.6. Propiedades de la radicación

Sean $a, b \in R$, y $n \in Z$

- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}. \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{a}. \sqrt[m]{a} = \sqrt[n+m]{a}$
- $\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[n-m]{a}$, y $a \neq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a} = \sqrt[m.n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
- **¡¡OJO!!** : $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

4.7.7. Raíz Aritmética

- Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

4.7.8. Racionalización de Denominadores

Tenemos dos casos:

- $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$
- $\frac{A}{\sqrt{a}\pm c} = \frac{A}{\sqrt{a}\pm c}.\frac{\sqrt{a}\mp c}{\sqrt{a}\mp c}$

4.7.9. Potencias de Exponente Racional

Sean $n, m \in Z$, y $n \neq 0$:

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- $a^{m+0} = a^m.a^0 = a^m$
- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

5. Polinomios

5.1. Monomio

$$M(x) = ax^n$$

donde $a \in R, n \in N$, y x es una indeterminada

- Si $a \neq 0, n$ es el grado del polinomio
- Si $a = 0$, el monomio no tiene grado

5.2. Polinomio

Un Polinomio es la suma de varios monomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ son los coeficientes, x es la indeterminada, y $n, n-1, \ldots, 1, 0 \in N$

5.3. Grado de un Polinómio

5.3.1. Definición

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

El grado de $P(x)$ es n, y se escribe $gr(P) = n$

5.3.2. Multiplicación de Polinomios

Si hacemos $P(x) \cdot Q(x)$, el grado de la multiplicación es:

$$gr(P(x).Q(x)) = gr(P(x)) + gr(Q(x))$$

5.4. Características

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- Coeficiente principal: a_n
- Término independiente: a_0

5.5. División de Polinómios

Dados dos polinómios $D(x)$ y $d(x)$, con $d(x) \neq 0$, existen y son únicos dos polinómios $C(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + r(x)$$

con $gr[r(x)] < gr[d(x)]$ o $r(x) = 0$
$C(x)$: cociente; $r(x)$: resto.

5.6. Raíces de un Polinomio

$x = a$ es raíz de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$

5.7. Teorema del Resto

$$P(x) = (x-a)C(x) + r$$

Si $x = a$, lo reemplazamos en la igualdad anterior resulta: $P(a) = (a-a).C(a) + r$, entonces $r = P(a)$

5.8. Divisibilidad de Polinomios

$P(x)$ es divisible por $Q(x)$, si el resto de la división de $P(x)$ con $Q(x)$ es nulo.

5.8.1. Factorización

- Factor Común

  $$EJ: \quad x^5 - 8x^3 - x^2 = x^2(x^3 - 8x - 1)$$

- Diferencia de cuadrados

  $$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

- Trinomio Cuadrado Perfecto

  $$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

  $$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

  no hemos inventado nada :D

5.8.2. Raíces de un Polinomio con coeficientes enteros

5.8.3. Teorema de Gauss

Cuando una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, p divide al término independiente, y q divide al coeficiente principal
Ej: $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$. Divisores del término independiente $a_0 = 6$: $p = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Divisores del coeficiente príncipal $a_3 = 2$: $q = 1, -1, 2, -2$.
Posibles raíces del polinomio: $\frac{p}{q}$ (todas las combinaciones de $\frac{p}{q}$)

5.9. Polinomio Lineal

$$L(x) = ax + b, \quad con \quad a, b \in R \wedge a \neq 0$$

5.9.1. Ecuación Lineal

$L(x) = ax + b = 0$

5.9.2. Soluciones de la Ecuación Lineal

- Determinada compatible: Solución única.
- Determinada incompatible: ∞ soluciones
- Indeterminada: $\nexists$ Solución

5.10. Polinomio cuadrático

$$C(x) = ax^2 + bx + c, \quad con \quad a, b, c \in R \wedge a \neq 0$$

5.10.1. Ecuación cuadrática

$$C(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

5.10.2. Soluciones de la Ecuación Cuadrática

La ecuación cuadrática puede expresarse de diferentes formas:

a)
$$x^2 = \alpha$$

$x^2 = \alpha$	soluciones	
$\alpha > 0$	$x = \pm\sqrt{\alpha}$	2 soluciones $\neq$
$\alpha < 0$	No tiene	$\nexists$ solución
$\alpha = 0$	$x = 0$	solución única

b)
$$(x - k)^2 = \alpha$$

$x^2 = \alpha$	soluciones	
$\alpha > 0$	$x = k \pm \sqrt{\alpha}$	2 soluciones $\neq$
$\alpha < 0$	No tiene	$\nexists$ solución
$\alpha = 0$	$x = k$	solución única

c)
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \alpha = b^2 - 4ac$$

$ax^2 + bx + c = 0$	soluciones	
$\alpha > 0$	$\frac{-b\pm\sqrt{\alpha}}{2a}$	2 soluciones $\neq$
$\alpha < 0$	no tiene	$\nexists$ solución
$\alpha = 0$	$x = \frac{-b}{2a}$	solución única