Instituto de Ingeniería y Agronomía
Matemática III

1. Integración Compleja

Introducción: El cálculo integral de funciones de variable real se distingue entre integrales *definidas* o *indefinidas*.
Las integrales indefinidas en variable real cumplen con la propiedad:

$$F(x) = \int f(x)dx \Longrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{1}$$

La extensión analítica de la definición anterior puede utilizarse para definir las *integrales indefinidas de variable compleja* como:

$$F(z) = \int f(z)dz \Longrightarrow \frac{d}{dz}F(z) = f(z) \tag{2}$$

Por otro lado, la integración definida en variable real ocurre dentro de intervalos cerrados [a,b] que pertenecen al eje real, allí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

en el caso de las funciones de variable compleja debe elegirse primero la trayectoria de integración -que llamaremos C-. es decir, necesitamos indicar el camino que recorre la variable para poder realizar la integración ya que hay infinitos caminos para ir desde un complejo z_0 a otro z_1; esa trayectoria puede, por ejemplo, representarse paramétricamente de la forma:

$$C = \{z : z(t) = x(t) + iy(t), t \in \mathbb{R}, t_a \leq t \leq t_b\}$$

Con las funciones expresadas de esta forma, nos encontramos con lo que llamamos Funciones complejas de variable real. Definiremos sus propiedades y más adelante construiremos las trayectorias de integración y los integrandos sobre ellas:

1.1. Integrales de funciones complejas de variable real

Sea z(t)=u(t)+iv(t) una función de variable real t a valores complejos, con u(t) y v(t) tales que admiten primitivas en el intervalo [a,b], se define la integral de z(t) en [a,b] como:

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \tag{4}$$

Esta definición se resume en dos identidades:

$$Re(\int_a^b z(t)dt) = \int_a^b Re(z(t)dt) \wedge Im(\int_a^b z(t)dt) = \int_a^b Im(z(t)dt) \tag{5}$$

Ejemplo 1.a.: Evaluemos la integral $\int_0^1 (1+it)^2 dt$
de acuerdo a la definición $\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 (1+it)^2 dt + i\int_0^1 (1+it)^2 dt$ por lo tanto $\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 [(1-t^2)+2it]dt = \int_0^1 (1-t^2)dt + i\int_0^1 2tdt = \frac{2}{3}+i$
Con nuestra definición, resulta evidente que las propiedades de las integrales se heredan de las integrales de las funciones reales y que cumplen con la llinealidad y aditividad:
Linealidad: para $z_1(t) = u_1(t) + iv_1(t)$; $z_2(t) = u_2(t) + iv_2(t)$ integrables en [a,b] y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b [\alpha z_1(t) + \beta z_2(t)]dt = \alpha \int_a^b z_1(t)dt + \beta \int_a^b z_2(t)dt \tag{6}$$

Ejemplo 1.b.: Sea$z_1 = 1+2it$ $z_2 = t^2+3i$ $\alpha = 2+3i$ $\beta = i$ entonces:

$$\int_0^1 [(2+3i)(1+2it) + i(t^2+3i)]dt = (2+3i)\int_0^1 (1+2it)dt + i\int_0^1 (t^2+3i)dt$$

$$\int_0^1 [(2+3i)(1+2it) + i(t^2+3i)]dt = (2+3i)[\int_0^1 dt + 2i\int_0^1 tdt] + i[\int_0^1 t^2dt + 3i\int_0^1 dt]$$

$$\int_0^1 [(2+3i)(1+2it) + i(t^2+3i)]dt = (2+3i)t|_0^1 + 2i\frac{t^2}{2}|_0^1 + it^3|_0^1 + 3it|_0^1$$

$$\int_0^1 [(2+3i)(1+2it) + i(t^2+3i)]dt = (2+3i)(1+i) + i(1/3+i) = -4 + \frac{16}{3}i$$

Aditividad: sea para $z(t) = u(t) + iv(t)$ integrable en [a,b] y sea c tal que a <c <b entonces:

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^c z(t)dt + \int_c^b z(t)dt \tag{7}$$

Ejemplo 1.c.:

$$\int_0^\pi (\cos t + 2it)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + 2it)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\cos t + 2it)dt$$

$$\int_0^\pi (\cos t + 2it)dt = \sin t|_0^{\frac{\pi}{2}} + it^2|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin t|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + it^2|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$\int_0^\pi (\cos t + 2it)dt = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) + i(\frac{\pi}{2})^2 + i0^2 + sin\pi - \sin(\frac{\pi}{2}) + i\pi^2 - i(\frac{\pi}{2})^2 = i\pi^2$$

En los dos últimos ejemplos, al momento de ïntegrar"lo hemos hecho como siempre. Esto es

así porque las ecuación (1) que hemos utilizado para definir la integración esta compuesta por integrales reales".Las reglas de integración como la de cambio de variable y/o de integración por partes siguen siendo válidas para estas integrales.
De la misma manera, sigue aplicando el **Teorema Fundamental del Cálculo** que da lugar a la llamada **Regla de Barrow:** Sea z(t)=u(t)+iv(t), u(t) y v(t) integrables, de manera que U(t) es una primitiva de u(t) y V(t) una primitiva de v(t) [1] entonces Z(t)=U(t)+iV(t) es una primitiva de z(t) ya que cumple Z'(t)=z(t). Entonces:

$$\int_a^b z(t)dt = U(t)|_a^b + iV(t)|_a^b = Z(b) - Z(a) \tag{8}$$

[1]Decimos que U(t) y V(t) son primitivas de u(t) y v(t) respectivamente porque cumplen que U'(t)=u(t) y V'(t)=v(t)

A partir de este resultado, reformularemos el:

> **Teorema Fundamental del Cálculo:** Sea una región abierta $D \subseteq$ en el dominio de $f(z)$ y C una curva suave en D. Si en ella se cumple:
>
> 1. $f(z)$ es una función continua y
> 2. $f(z)$ admite una antiderivada $F(z)$ analítica
>
> $$\Rightarrow \int_C f(z)dz = F(z_f) - F(z_i) \tag{9}$$
>
> donde z_i y z_f son los puntos inicial y final del recorrido sobre la curva C

Ejemplo 1.d.: Integrar $\int_0^{\pi/4} eitdt$ Como $-ie^{it}$ es una primitiva de eit entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}dt = -ie^{it}|_0^{\frac{\pi}{4}} = -ie^{i\frac{\pi}{4}} + ie^{i0} = -ie^{i\frac{\pi}{4}} + i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) + i = \frac{1}{\sqrt{2}} + i(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Ejemplo 1.e.: Podemos volver a realizar la integral del Ejemplo 1.a. donde ahora consideraremos que:

$$\frac{d}{dt}[-i\frac{(1+it)^3}{3}] = (1+it)^2$$

Luego

$$\int_0^1 (1+it)^2 dt = -i\frac{(1+it)^3}{3}|_0^1 = -i\frac{(1+it)^3}{3} + \frac{i}{3} = \frac{2}{3} + i$$

1.2. Integrales sobre curvas o de contorno

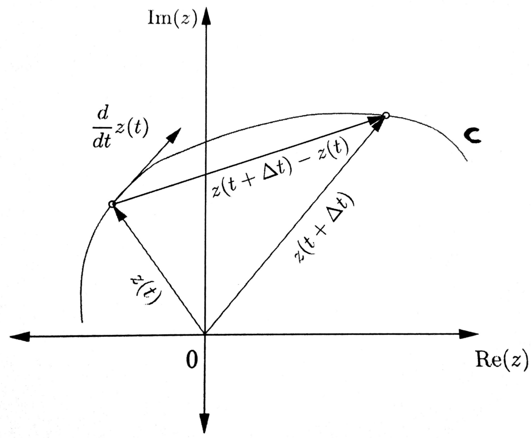
Tal como habíamos anticipado, para poder establecer límites de integración debemos indicar la trayectoria sobre la cual integramos, esto es:

$$C = \{z : z(t) = x(t) + iy(t), t \in \mathbb{R}, t_a \leq t \leq t_b\}$$

La tangente de cada punto de esa curva se puede calcular por la derivada:

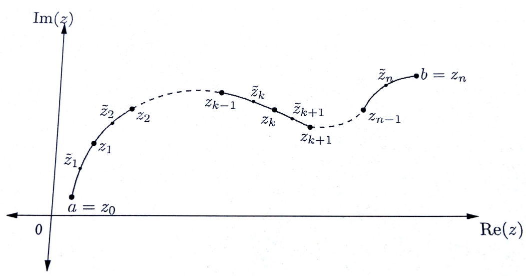
$$\frac{d}{dt}z(t) = lim_{\Delta t \longrightarrow 0}\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

Si esta derivada existe, es distinta de cero y es continua para un intervalo $[t_a, t_b]$ se dice que la trayectoria z(t) es una *curva suave*.



La trayectoria será cerrada si $z(t_a) = z(t_b)$ y diremos que es simple si para $t_a \neq t_b$ tenemos que $z(t_a) \neq z(t_b)$, esto quiere decir que no hay intersecciones en nuestra curva.
Una vez descripta nuestras curvas, vamos a describir las integrales en sí:

Sea f(z) una función compleja, continua en todos los puntos sobre una curva simple C de longitud finita que uno a los puntos a y b. Dividiremos la curva en n segmentos a través de los puntos $\{z_0 = a, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = b\}$ y tomamos un punto $\check{z}_k$ sobre cada uno de los segmentos $z_{k-1}z_k$ como muestra la figura siguiente:



De esta manera hemos subdividido la curva sobre la cual vamos a integrar y estamos en condiciones de escribir la sucesión:

$$S_n = f(\check{z}_1)(z_1 - z_0) + f(\check{z}_2)(z -_2 - z_1) + ... + f(\check{z}_n)(z_{n-1} - z_n)$$

Donde si escribimos $z_k - z_{k-1}$ como Δz_k toma la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\check{z}_k)\Delta z_k$$

Si n se hace crecer de tal modo que la magnitud del mayor $|\Delta_k|$ se aproxime a un diferencial dz infinitisimalmente pequeño, entonces la suma S_n se aproximará a un valor que no depende de la subdivisión de la curva, es lo que llamamos integral de contorno o de linea de f(z)a lo largo de C, y denotamos como:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\mapsto\infty |\Delta_k|\mapsto 0} \sum_{k=1}^{n} f(\check{z}_k)\Delta z_k$$

Si la trayectoria es cerrada, es decir, el punto inicial a es igual al punto final b, se utiliza la siguiente expresión:

$$\oint_C f(z)dz$$

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde $z = x + iy$ la integral de contorno toma la forma:

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x,y) + iv(x,y)](dx + idy)$$

$$= \int_C [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i \int_C [v(x,y)dx + u(x,y)dy]$$

que corresponden a dos integrales de línea de variable real, de quienes hereda sus propiedades.

Ahora bien, si nuestra curva está *parametrizada* podemos escribirla como $C = \{z : z(t) = x(t) + iy(t), t \in \mathbb{R}, t_a \leq t \leq t_b\}$, de manera que:

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt \tag{10}$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_a}^{t_b} [u(x(t), y(t) + iv(x(t), y(t)][\frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}]dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} [u(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} - v(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt}]dt + i\int_{t_a}^{t_b} [v(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} + u(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt}]dt$$

Adoptaremos a la ecuación 8 como **definición**:

Integrales de contorno: Sea $f(z) : D \mapsto \mathbb{C}$, una curva suave $C : [a,b] \mapsto D$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Definimos la integral de f sobre la curva D como:

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t))z'(t)dt \tag{11}$$

Como ya hemos dicho, la integral de contorno hereda las propiedades de las integrales de línea, entre ellas, las siguientes:
i) Cambio de orientación de la curva: Si C y -C representan la misma curva pero recorrida en sentido contrario entonces:

$$\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz$$

ii) Invarianza bajo cambios de parametrización que mantengan la orientación de la curva: Si $z_1(t_1)$ y $z_2(t_2)$ corresponden a dos parametrizaciones distintas de la misma curva C entonces:

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_{1a}}^{t_{1b}} f(z_1(t_1))z_1'(t_1)dt_1 = \int_{t_{2a}}^{t_{2b}} f(z_2(t_2))z_2'(t_2)dt_2$$

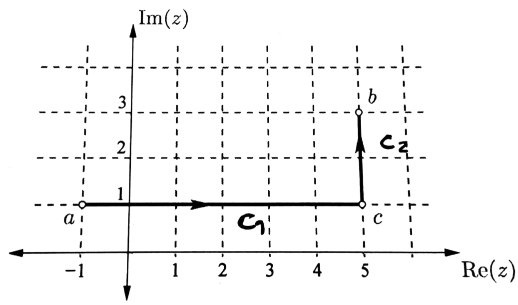
iii) Aditividad de las curvas: Si C_1 y C_2 representan dos curvas orientadas que tienen un punto en común entonces:

$$\int_{C_1 \bigcup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

1.3. Resolución de Integrales de contorno:

Para utilizar la Ec. 10 que define nuestras integrales, resolver una integral implica primero hallar la parametrización de nuestra curva para luego si realizar la integración.

Llamamos curva parametrizada a una función que asigna a cada valor de $t \in [a, b], a, b \in \mathbb{R}$ un punto en el (en nuestro caso) plano complejo. La imagen de dicha función es una curva en el plano [2].
Integremos $f(z) = z^2$ sobre las curvas C_1 y C_2 que se muestran en la siguiente figura:



La curva C_1 corresponde a los complejos que se encuentran sobre la recta $Im(z) = 1$ orientada en sentido antihorario, esto es: $C_1 = \{z : z(t) = t + i1, t \in \mathbb{R}, -1 \leq t \leq 5\}$ con lo cual podemos escribir como parametrización de C_1:

$$C_1 : z(t) = t + i;\ -1 \leq t \leq 5;\ z'(t) = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} z^2 dz = \int_{-1}^{5} [t + i]^2 (1) dt = \frac{(t + i)^3}{3} |_{-1}^{5} = \frac{108}{3} + i\frac{72}{3}$$

La curva C_2 corresponde a los complejos para quienes $Re(z) = 5$ de manera orientados desde el punto c al punto b, de manera que $C_2 = \{z : z(t) = 5 + it, t \in \mathbb{R}, 1 \leq t \leq 3\}$ por lo que una parametrización de la curva será:

$$C_2 : z(t) = 5 + ti;\ 1 \leq t \leq 3;\ z'(t) = i \Rightarrow$$

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_{1}^{3} [5 + it]^2 (i) dt = \frac{(5 + ti)^3}{3} i|_{-1}^{5} = -\frac{120}{3} + i\frac{124}{3}$$

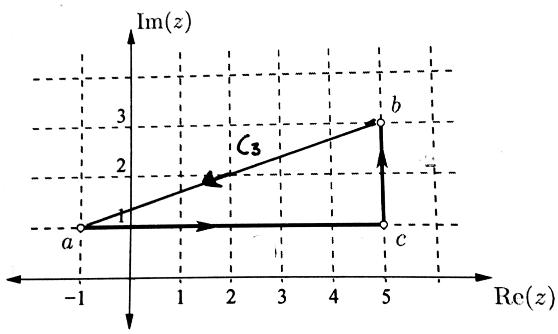
[2] Ya hemos tratado con curvas paramétricas al construir rectas en el espacio. El sistema de ecuaciones $x - x_0 = at; y - y_0 = bt; z - z_0 = ct$ construidos a partir de las coordenadas de los vectores $\vec{P_0 P}$ -distancia entre un punto fijo P_0 y un punto arbitrario P ambos sobre la recta- y $\vec{v}t$ -v era un vector que indicaba la pendiente de la misma- era, precisamente, las ecuaciones parametricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

Si quisieramos integrar sobre la curva $C = C_1 \cup C_2$, esto es, la curva que une los puntos a y b, en virtud de la propiedad iii) tendremos:

$$\int_C z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_{-1}^{5} [t+i]^2 (1) dt + \int_{1}^{3} [5+it]^2 (i) dt = (\frac{108}{3} + i\frac{72}{3}) - \frac{120}{3} + i\frac{124}{3}$$

$$\int_C z^2 dz = -\frac{12}{3} + i\frac{196}{3}$$

Consideremos ahora la integral de la misma función pero sobre la curva que une los puntos $b = (5,3)$ y $a = (-1,1)$, orientada *desde* b *hasta* a



Nuestra curva C_2 es un segmento de la recta de pendiente 1/3 que pasa por a y b que normalmente escribimos $y(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. El dominio de $y(x)$ es el conjunto de los reales, para indicar que sólo considero el segmento entre a y b, restringimos los posibles valores de x entre -1 y 5. En el plano complejo, la parametrización tiene la forma:

$$z(t) = t + i(\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}); -1 \leq t \leq 5$$

Sin embargo al evaluar los valores inicial y final de z(t) nos encontramos con que:

$$t_1 = -1 \Rightarrow z_1 = z(t_1) = (-1,1); \quad t_2 = 5 \Rightarrow z_2 = z(t_2) = (5,3) \tag{12}$$

Es decir, la curva está orientada desde a hacia b y no como pretendíamos.
Reformulemos nuestra parametrización para que tenga la orientación correcta: vamos a considerar un nuevo parámetro que llamaremos t^*, con la parametrización:

$$z(t) = -t^* + i(\frac{-1}{3}t^* + \frac{4}{3}); -5 \leq t^* \leq 1$$

de esta forma encontramos que:

$$t_1^* = -1 \Rightarrow z_1 = z(t_1^*) = (5,3); \quad t_2^* = 5 \Rightarrow z_2 = z(t_2^*) = (-1,1) \tag{13}$$

De esta manera describimos <u>el mismo</u> segmento de recta sólo que orientado tal como queríamos, el punto inicial es el punto b y el punto final el punto a.
Una vez hallada la parametrización de nuestra curva resolvamos la integral.

$$C_3 : z(t^*) = -t^* + i(\frac{-1}{3}t^* + \frac{4}{3}); \ -5 \leq t^* \leq 1; \ z'(t^*) = (-1 - \frac{1}{3}i) \Rightarrow$$

$$\int_{C_3} z^2 dz = \int_{-5}^{1} [-t^* + i(\frac{-1}{3}t^* + \frac{4}{3})]^2(-1 - \frac{1}{3}i)dt^* = \frac{(-t^* + i(\frac{-1}{3}t^* + \frac{4}{3}))^3}{3}|_{-5}^{1} =$$

$$\int_{C_3} z^2 dz = (\frac{(1+i)^3}{3} - \frac{(5+3i)}{3})\frac{1}{3} = \frac{1}{3}[(2+2i) - (-10+198i)] = \frac{12}{3} - \frac{196}{3}i$$

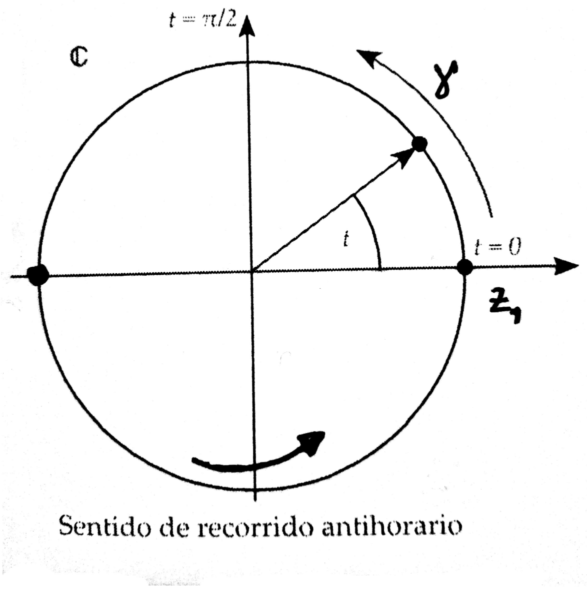
Integremos ahora la misma función pero sobre el trayecto $c_1 \cup C_2 \cup C_3$, esto es, recorremos (utilizando rectas) el camino que sale del punto a y regresa al punto a, pasando por los puntos b y c.
Utilizando la propiedad de aditividad iii) no necesitamos realizar nuevos cálculos ya que.

$$\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz \Rightarrow$$

$$\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f(z)dz = (\frac{108}{3} + i\frac{72}{3}) + (-\frac{120}{3} + i\frac{124}{3}) + (\frac{12}{3} - \frac{196}{3}i) \Rightarrow$$

$$\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f(z)dz = 0$$

Integremos ahora $f(z) = z^2$ pero sobre las curva γ que se muestra en la siguiente figura:



Aquí, la curva γ recorre la circunferencia de radio unidad centrada en el origen en el sentido antihorario, desde z_1 hasta volver a z_1.
Sabemos que $|z| = 1$ corresponde a esta circunferencia y que además podemos escribir

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{14}$$

con lo cual podemos describir la curva como $\gamma : \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Nuestro parámetro en esta ecuación es θ ya que cuando medimos en radianes el ángulo es un número real y tenemos a las variables x e y dependiendo del mismo número real. Habitualmente al parámetro se lo designa con la letra t (lo cual es indistinto) y a la ecuación $z = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ se la llama ecuación paramétrica compleja de γ, recorrida en el sentido creciente de t.
Realicemos ahora nuestra integral.

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{t=i}^{t_f} (z(t)^2) z'(t) dt$$

con nuestra parametrización (y considerando que recorremos la circunferencia completa):

$$\oint_\gamma z^2 dz = \int_{t=0}^{t=2\pi} (e^{it})^2 (e^{it})' dt$$

$$\oint_\gamma z^2 dz = \int_{t=0}^{t=2\pi} i(e^{2it}) e^{it} dt = i \int_{t=0}^{t_{2\pi}} (e^{3it}) dt = 3i^2 e^{3it}|_0^{2\pi}$$

Recordando la fórmula de Euler:

$$3i^2 e^{3it}|_0^{2\pi} = -3(\cos(t) + i\sin(t))|_0^{2\pi} = -3\{(\cos(2\pi) - \cos(0)) + i(\sin(2\pi) - \sin(0))\} = 0$$

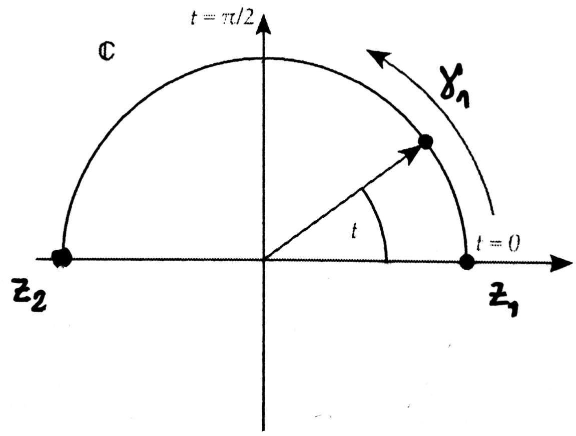
$$\Rightarrow \oint_\gamma z^2 dz = 0$$

Podríamos haber predicho este resultado?

Evaluemos si se cumplen las hipótesis del Teorema Fundamental del Cálculo en esta situación. La función a evaluar es $f(z) = z^2$; tal como hemos visto en el estudio de funciones, la función z^2 resulta analítica en todo el plano complejo, además admite antiderivada ya que dada $F(z) = \frac{z^3}{3}$ -la cual es analítica, por tando derivable en todo el plano- resulta $F'(z) = f(z)$
Luego:

$$\oint_\gamma z^2 dz = F(z_f) - F(z_i) = \frac{z^3}{3}|_0^0 = 0$$

El cero en la última ecuación responde a que evaluamos nuestra función primitiva -independientemente de cual sea esta- con el punto inicial igual al punto final.
De la misma manera podemos utilizar el teorema para considerar, por ejemplo, la integral sobre la curva γ_1 que es la semicircunferencia de radio unidad, recorrida en sentido antihorario entre los puntos $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$:



Sentido de recorrido antihorario

Las hipótesis del teorema son independientes de los puntos que consideremos, luego:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{1^3}{3} = -\frac{2}{3}$$

Si llamamos γ_2 a la semicircunferencia inferior recorrida desde z_2 hasta z_1 resulta fácil obtener el valor de la integral ya que:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1 \bigcup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = -\frac{2}{3} + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)dz = \frac{2}{3}$$

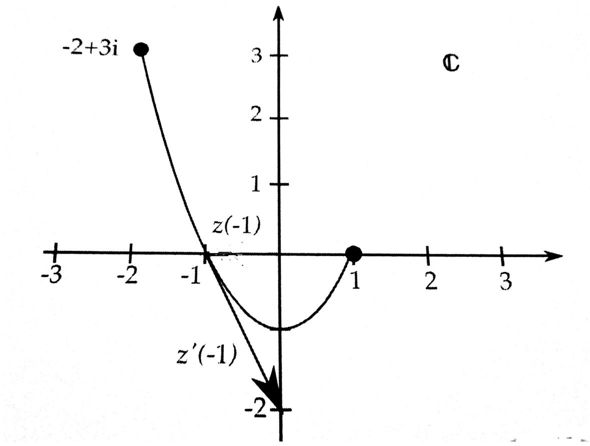
Sobre parametrizaciones en general: No sólo rectas y circunferencias pueden parametrizarse, en general la gráfica $y = f(x)$ con $a \leq x \leq b$ admite (entre otras, recordemos que las parametrizaciones no son únicas) la parametrización trivial: C : $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$
Aquí también el cambio de parámetro $t \longmapsto t* = -t$ invierte el sentido de recorrido de la curva.

Consideremos el siguiente ejemplo: Parametricemos la porción de parábola $y = x^2 - 1$ que va desde el punto (-2,3) hasta (1,0):
Proponemos la parametrización: $C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 1$

Verificamos el sentido en que estamos recorriendo la curva verificando que los puntos iniciales y finales coincidan:

$$\begin{cases} t = -2 \Rightarrow z(-2) = -2 + 3i \\ t = 1 \Rightarrow z(1) = 1 + 0i \end{cases}$$

Luego podemos escribir $z(t) = t + i(t^2 - 1)$, con $z'(t) = 1 + 2ti$
En la figura siguiente graficamos el tramo de parabola y sus vector tangente. Observemos la dirección de $z'(t)$ [3], la misma indica el sentido del "movimiento". Si este coincide con lo deseado, estamos seguros de que la parametrización representa correctamente el sentido en que recorremos la curva.



Cambiemos ahora la orientación de la curva, es decir, consideremos a $(1,0)$ como punto inicial y a (-2,3) como punto final. Proponemos ahora: $C : \begin{cases} x = -t^* \\ y = (t^*)^2 - 1 \end{cases} \quad -1 \leq t^* \leq 2$
Con lo cual:

$$\begin{cases} t^* = -1 \Rightarrow z(-1) = 1 + 0i \\ t^* = 2 \Rightarrow z(2) = 2 + 3i \end{cases}$$

luego $z(t^*) = -t^* + i((t^*)^2 - 1)$, con $z'(t^*) = -1 + 2t^*i$. [4]

Utilicemos estas parametrizaciones en una integral. Sean:

$$C_1 = z(t) = t + i(t^2 - 1) \ \ -2 \leq t \leq 1$$

$$C_2 = z(t) = -t^* + i((t^*)^2 - 1) \ \ -1 \leq t^* \leq 2$$

y calculemos

$$\int_{C_i} Re(z)dz$$

.
Consideremos la integral sobre C_1, luego:

$$\int_{C_1} Re(z)dz = \int_{-2}^{1} Re(t + i(t^2 - 1))(1 + 2ti)dt = \int_{-2}^{1} t(1 + 2ti)dt$$

$$\int_{C_1} Re(z)dz = \int_{-2}^{1} t + 2i \int_{-2}^{1} t^2dt = (\frac{t^2}{2} + i\frac{2t^3}{3}|_{-2}^{1} = -\frac{3}{2} + 6i$$

[3]hemos elegido graficar el vector $z'(t)$ a partir del extremo del vector $z(t)$ en vez de hacerlo a partir del origen para mejor visualización

[4]utilizar t^* es equivalente a utilizar $-t$

Integremos ahora la misma función pero sobre C_2:

$$\int_{C_2} Re(z)dz = \int_{-1}^{2} Re(-t^* + i((t^*)^2 - 1))(-1 + 2t^*i)dt* = \int_{-1}^{2} -t^*(-1 + 2t^*i)dt^*$$

$$\int_{C_2} Re(z)dz = \int_{-1}^{2} t^* + 2i \int_{-1}^{2} (t^*)^2 dt^* = (\frac{(t^*)^2}{2} - i\frac{2(t^*)^3}{3}|_{-1}^{2} = \frac{3}{2} - 6i$$

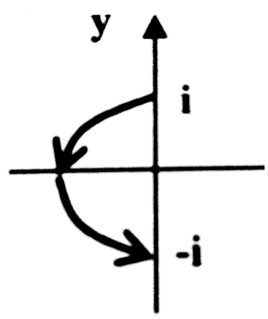
$$\Rightarrow \int_{C_1} Re(z)dz = -\int_{C_2} Re(z)dz = -\int_{-C_1} Re(z)dz$$

tal como esperábamos de acuerdo a la propiedad 1.2.i).

1.4. Ejemplos:

1. Calcular $\int_\gamma Im(z)dz$ siendo γ: $x = y^2 - 1$ desde i hasta -i

Escogemos parametrizar tomando $y = t$, con lo cual el trozo de parábola que nos interesa tiene ecuación paramétrica $z(t) = (t^2 - 1) + it$ con $-1 \leq t \leq 1$. Sin embargo, esta elección describe correctamente la curva pero orientada en el sentido contrario al deseado ya que $z(t_1) = z(-1) = -i$ y $z(t_2) = z(1) = i$ (el vector tangente $z'(t) = 2t+i$ en todo punto de la curva también indica que la trayectoria está descripta en sentido contrario). En este punto podemos optar entre modificar nuestra parametrización o utilizar la propiedad de las integrales respecto del cambio de orientación de la curva.



Lo haremos de este modo, recordando que:

$$\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz =$$

nuestra integral resulta:

$$-\int_{-C} f(z)dz = -\int_{-1}^{1} Im((t^2 - 1) + it)(2t + i)dt$$

$$-\int_{-C} f(z)dz = -\int_{-1}^{1} t(2t + i)dt = -2\int_{-1}^{1} t^2 dt - i\int_{-1}^{1} tdt$$

$$-\int_{-C} f(z)dz = -2\{\frac{t^3}{3} + i\frac{t^2}{2}\}|_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}$$

2. Calcular $\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}dz$ siendo γ el trozo de circunferencia $|z| = 2$ desde el punto $(2,0)$ hasta (0,-2)
Parametrizamos la curva, $z(t) = 2e^{it}$ con $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ luego:

$$\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\bar{z}(t)dt} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2e^{-it}}2ie^{2it}dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} ie^{2it}dt = i\frac{e^{2it}}{2i}]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}dz = 2(e^{i3\pi} - e^0) = -4$$

En ninguno de los dos ejemplos hemos utilizado el Teorema Fundamental del Cálculo. Si bien las curvas sobre las que trabajamos son suaves y están contenidas en el dominio de la funciones, estas no tienen primitivas por lo que las hipótesis del TFC no se cumplen.

3. Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz$ siendo $\gamma : |z| = 1$
La función $f(z) = 1/z^2$ es continua sobre la curva γ ya que $f(z)$ es continua en $\mathbb{C} - 0$ y $F(z) = -1/z$ es una primitiva de $f(z)$ por lo tanto el TFC (Regla de Barrow) son aplicables y como la curva es cerrada la integral vale cero, pues el punto final coincide con le punto inicial.

1.5. Ejercitación:

1. Calcular las siguientes integrales:

$$\int_C Re(z)dz; \qquad \int_C Im(z)dz; \qquad \int_C \bar{z}dz$$

en los siguientes casos:

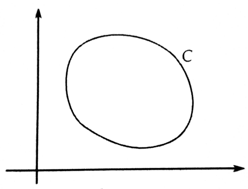
   a) $C : z(t) = 1 + i\,t; \quad 0 \leq t \leq 1$
   b) $C : |z| = 1$
   c) $C : |z - a| = R$

   las curvas b) y c) recorridas en sentido antihorario. Grafique las curvas.

2. Calcular $\int_C Re(z)dz$ donde C es el segmento de recta que va desde $z_0 = 0$ a $z_i = 1 - i$

3. Calcular $int_C \cos(z)dz$ donde C es el segmento de recta que une $z = 1$ y $z = -i$

4. Cuánto vale la integral de $f(z) = \sin(z)$ a lo largo de la curva C_1: circunferencia de radio 1 centrada en el origen?
Cuánto valdrá a lo largo de la Curva C_2: circunferencia de radio R centrada en (a, b)?
¿Y a lo largo de cualquier curva C cerrada y suave?



La integral $\int_C f(z)dz = 0$ de una función $f(z)$ a lo largo de la curva cerrada C, es cero, si existe $F(z)$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$

5. Evaluar $\int_C e^z dz$ cuando C es:

a) C es la trayectoria en el primer cuadrante de la circunferencia $|z| = 1$ que une $z = 1$ con $z = i$.

b) C es el segmento de recta que une $z = 1$ con $z = i$.

c) C es la trayectoria a lo largo de los ejes coordenados que une $z = 1$ con $z = i$. Los resultados son los que esperaba?

6. Evaluar $\int_C Im(z)dz$ en las curvas dadas en el item anterior.
   Esperaba estos resultados?. Puede afirmar que la integral es independiente del camino? Contradicen estos resultados el Teorema Fundamental del Cálculo?

7. Evaluar $\int_C z^{1+i}dz$ sobre la Curva $C : |z| = 1$

8. Evaluar $\int_C (2\bar{z} - z)dz$ donde C es el arco de parábola $y = x^2$ desde $z = 0$ hasta $z = -2+4i$

9. Calcular:

   a) $\int_\gamma (z - 2i)\,dz$ siendo γ el segmento de recta que une $2 + i$ con $3 - 2i$

   b) $\int_\gamma e^{-2z}\,dz$ siendo $\gamma : y = 2x^2$ desde $z = -1 + 2i$ a $z = 2 + 8i$

   c)
   $$\int_{-i}^{2i} \sin(2z),\ dz$$

   d)
   $$\oint_C \frac{1}{|z-1|}^2 dz$$
   donde C es la circunferencia de ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

   e)
   $$\oint_C \frac{1}{|z|}\,dz$$
   donde C es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$

   f)

   g)
   $$\oint_C \frac{1}{|z+1-i|}\,dz$$
   donde C es la circunferencia de ecuación $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$