Guía 2.
Ecuaciones Diferenciales de 2° Orden

Diego Vallejo, Melina Podestá, Eva Almirón

1er. Semestre 2016

Modelo Físico del Resorte. Versión 1.

Consideremos un cuerpo de masa m unido a un resorte. Marquemos como $x = 0$ a la posición A cuando el resorte está en su longitud natural.

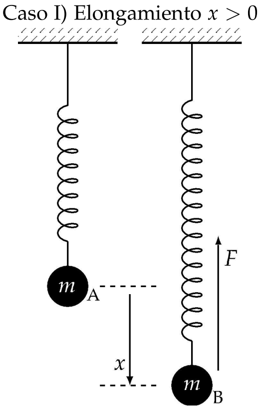
De la Física:
$x'(t) = v(t)$ es la función velocidad,
y $x''(t) = v'(t) = a(t)$
es la función aceleración.

Para diferentes momentos el resorte puede tener diferentes longitudes o elongaciones, y el cuerpo puede ocupar diferentes posiciones, por lo tanto la posición será una función del tiempo $x = x(t)$.

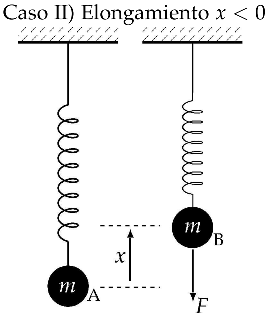
Por la Ley de Hooke el resorte ejercerá sobre el cuerpo de masa m una fuerza restauradora F_H proporcional al elongamiento y opuesto a él: $F_H = -kx$. Aquí llamamos k a la constante de proporcionalidad de la Ley de Hooke.

Sobre el cuerpo de masa m aplicamos la 2da ley de Newton para la Fuerza total F, que en este caso es igual a F_H

Caso I) Elongamiento $x > 0$



Caso II) Elongamiento $x < 0$



Ley Hooke: Un resorte que se elonga x unidades (desde su posición de reposo A hasta la posición B) ejercerá una Fuerza restauradora $F_H = -kx$ (¿porqué tiene un signo "$-$"?).

$$\begin{aligned} ma &= F_H \qquad \text{y como la aceleración } a = x'', \\ mx'' &= -kx \\ mx'' + kx &= 0 \\ x'' + \frac{k}{m}x &= 0 \\ x'' + \omega^2 x &= 0 \quad (*) \qquad [\text{ED DE } 2^{\text{o}} \text{ ORDEN}] \end{aligned}$$

donde hemos llamado $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Un caso particular

Estudiaremos en esta subsección el caso en que el resorte produce una fuerza restauradora de 1 Newton al elongarse 1 metro, o sea, que la constante del resorte es $k = 1N/m$. Además supondremos que el cuerpo tiene una masa $m = 1Kg$. Por lo tanto $\omega^2 = 1/1 = 1$ y la ecuación $(*)$ queda

$$x'' + x = 0 \qquad (**)$$

Recordemos las unidades:
la masa se mide en KG
la fuerza en N
la posición en M
y dado que $k = -F/x$
las unidades de k serán: ... ?

y traducida al castellano quiere decir:

> "¿Cuál es la función que derivada dos veces es igual a sí misma cambiada de signo?" ($x'' = -x$)

Sumas y múltiplos de soluciones

¿Qué pasa con el múltiplo de una solución? Dado que $x_1 = \cos t$ es una solución de la ED, cualquier múltiplo $C_1 x_1 = C_1 \cos t$ también será solución (Vean en el margen)

Asimismo, dado que $x_2(t) = \operatorname{sen} t$ es *también* solución, análogamente $C_2 x_2(t) = C_2 \operatorname{sen} t$ será solución.

¿Y con las sumas de soluciones? Por ser $C_1 x_1$ y $C_2 x_2$ ambas soluciones de la ED (verifiquen aplicando reglas de derivación) la suma:

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$$

será solución. Fíjense que es una SUMA de MÚLTIPLOS de soluciones de la ED. Esta suma de múltiplos de soluciones contiene dos constantes INDEPENDIENTES, y por lo tanto será la SOLUCIÓN GENERAL de la ED.

Miremos el resultado anterior...

¿Toda suma de múltiplos de soluciones será una solución general? .

CASO I. Combinemos las soluciones $x_A = \cos t$ y $x_B = 3\cos t$.

Por ser suma de múltiplos de x_A y x_B también será solución. Sin embargo en este caso NO CONTIENE DOS CONSTANTES INDEPENDIENTES:

$$C_1 \cos t + C_2 3\cos t = C_3 \cos t \qquad \text{con} \quad C_3 = C_1 + C_2 3$$

ya que podemos sacar factor común $\cos t$. Por lo tanto NO ES LA SOLUCIÓN GENERAL de la ED.

CASO II. Ahora combinemos las soluciones $x_1 = \cos t$ y $x_2 = \operatorname{sen} t$

En el caso anterior no incluíamos la función $x_2 = \operatorname{sen} t$. ¿Qué pasa si lo hacemos? Vemos que no se puede sacar factor común $\cos t$ como lo hicimos en el caso I:

$$C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$$

Esta expresión CONTIENE DOS CONSTANTES INDEPENDIENTES (al contrario de la del caso I.)y por lo tanto, es la solución general.

¿Qué hay de diferente entre el caso I y el caso II?

En el caso I, el cociente $\dfrac{x_A}{x_B} = \dfrac{\cos t}{3\cos t} = \dfrac{1}{3} = k$ es constante, o sea que x_A es múltiplo de x_B.

En el caso II, el cociente $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t$ no es constante, o sea que x_1 y x_2 no son múltiplos entre sí.

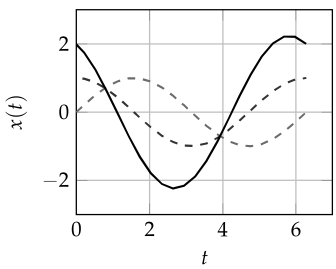
* Verificación que $C_1 \cos t$ es solución:
$x' = -C_1 \operatorname{sen} t$, y $x'' = -C_1 \cos t$.
Reemplazo en la ED $(**)$:

$$\begin{aligned} x'' + x &= 0 \\ -C_1 \cos t + C_1 \cos t &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

* Verifico que $\operatorname{sen} t$ es solución:
$x' = \cos t$, y $x'' = -\operatorname{sen} t$.
Sustituyo en $(**)$:

$$\begin{aligned} x'' + x &= 0 \\ -\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$x_C(t) = 2x_1 - x_2 = 2\cos t - \operatorname{sen} t$



Una combinación lineal $x_C(t)$
de $x_1 = \cos t$ (punteado azul) y
de $x_2 = \operatorname{sen} t$ (punteado rojo)
x_1, x_2, x_C son todas soluciones de la ED
$x'' + x = 0$

Este razonamiento nos indica que para encontrar soluciones generales, deberemos construir sumas de múltiplos de dos funciones que no sean múltiplos entre sí.

Definiciones

↪ Definición

Ecuación Diferencial Ordinaria de 2º orden lineal.
Será toda ecuación de la forma

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x) \qquad \text{[EDO 2º Lineal]}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ son funciones de la variable independiente x pero no de la variable dependiente y. ■

Ejemplo ⥁

Consigna: Muestre que la ecuación $(*)$ de la página 1 es una EDO 2º lineal.

Solución: Comparando la definición anterior con $(*)$

$$\begin{array}{llllll} y'' & +p(x)\,y' & +q(x)\,y & = g(x) & \\ x'' & & +\omega^2 \quad x & = 0 & (*) \end{array}$$

vemos que si elegimos $y \to x$, $p(x) \to 0$, $q(x) \to \omega^2$ y $g(x) \to 0$, ambas ecuaciones resultan idénticas. ■

↪ Definición

EDO de 2º orden lineal a coeficientes constantes.
Será toda ecuación de la forma

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x) \qquad \text{[EDO 2º Lineal CC]}$$

donde a, b son números reales fijos, mientras que $g(x)$ es una función real de la variable dependiente x. ■

Ejemplo ⥁

La ecuación $y'' + 2y' - 4y = e^x$ es una EDO 2º O lineal a coeficientes constantes, mientras que $y'' + 2xy' - 4y = e^x$ no lo es. ■

↪ Definición

EDO de 2º orden lineal homogénea.

Será toda EDO 2º Lineal de la forma

$$y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = 0 \qquad \text{[EDO 2º Lineal H]}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ son funciones de la variable dependiente x. ■

Ejemplo ⥀

La ecuación $y'' + 2y' - 4y = e^x$ no es una EDO 2º O lineal homogénea, mientras que $y'' + 2xy' - 4y = 0$ sí lo es. ■

↪ Definición

EDO de 2º orden lineal Inhomogénea.

Será toda EDO 2º Lineal de la forma

$$y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = g(x) \qquad \text{[EDO 2º Lineal Inh]}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ son funciones de la variable dependiente x y la función $g(x)$ no es cero.

■

Ejemplo ⥀

La ecuación $xy'' + \ln(x)y' + 3y = \cos x$ se puede escribir como una EDO 2º O lineal inhomogénea, ya que dividiendo por x:

$$y'' + \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{p(x)}\ y' + \underbrace{\frac{3}{x}}_{q(x)}\ y = \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{g(x)}$$

queda de esa forma.

La ecuación $y'' + 2xy' - 4y = 0$ en cambio, no es Inhomogénea. ■

Ejercitación ⊞

---

1. Para cada ecuación marque de qué clase es, y luego indique cuál es la variable dependiente.

ED	EDO 2º Lineal	EDO 2º Lineal CC	EDO 2º Lineal H	EDO 2º Lineal Inh
$x'' + 2x' - 4x = e^t$	☐	☐	☐	☐
$y'' + 2xy' - 4\cos(x)y = 0$	☐	☐	☐	☐
$y'' + 2y' - 4y = 0$	☐	☐	☐	☐
$x^2y'' + 2y' - 4xy = e^x$	☐	☐	☐	☐
$y^2y'' + 2y' - 4xy = e^x$	☐	☐	☐	☐

y si no es de ninguna clase, ¿se la podría reescribir para que lo sea?

2. Idem al ejercicio anterior para la ecuación $(*)$ de la pág. 1.

El resorte en un medio viscoso. Versión 2.

Este es un modelo sencillo de la acción del medio sobre el resorte. No es el único modelo, pueden buscar en internet qué otros hay, si lo desean.

Supondremos ahora que el cuerpo está colocado en un medio viscoso y éste ejerce una fuerza resistiva opuesta a la velocidad y proporcional a la misma $F_v = -b.v$

La ecuación $(**)$ quedará modificada

$$\begin{aligned} ma &= F_H - Fv \qquad \text{velocidad } v = x' \\ mx'' &= -kx - bx' \\ mx'' + bx' + kx &= 0 \\ x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x &= 0 \qquad \text{llamo } c = b/m \\ x'' + cx' + \omega^2 x &= 0 \quad (***) \qquad [\text{EDO } 2^{\circ} \text{ lineal H a CC}] \end{aligned}$$

Ejercitación ⊞

1. ¿De qué clase es la ecuación diferencial anterior?
2. ¿Cuál es la variable independiente? ¿cuál la dependiente?

Ahora introduciremos dos definiciones más relacionadas con lo que vimos en la sección *Sumas y Múltiplos* en la página 2.

↪ Definición

Dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son **linealmente dependientes** si una es múltiplo de la otra:

$$y_1(x) = ky_2(x) \qquad \text{para algún número real} \quad k$$

En caso contrario serán **linealmente independientes** ■

Esta definición equivale a decir que el cociente $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ es constante.

Ejercitación ⊞

Los siguientes pares de funciones, ¿son Linealmente Dependientes?

1. $y_1(x) = 1 \qquad y_2(x) = 3$
2. $y_1(x) = \ln x \qquad y_2(x) = e^x$
3. $y_1(x) = \ln x \qquad y_2(x) = \ln(1/x)$
4. $y_1(x) = x^2 \qquad y_2(x) = -x^2$
5. Las funciones x_A y x_B (de la pág. 2).
6. Las funciones x_1 y x_2 (misma página)

↪ DEFINICIÓN

Llamaremos **Combinación Lineal** de dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ a:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde C_1 y C_2 son números constantes reales. ■

EJERCITACIÓN ⊞

1. Verifique que $f(x)$ no es combinación lineal de $g(x)$ y $h(x)$:
   a) $f(x) = x^2 \quad g(x) = e^x \quad h(x) = \log x$
   b) $f(x) = x^3 \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = x$
2. Verifique que $f(x)$ es combinación lineal de $g(x)$ y $h(x)$, y halle los coeficientes C_1 y C_2:
   a) $f(x) = x^2 + x \quad g(x) = 2x^2 \quad h(x) = -x$
   b) $f(x) = \log x \quad g(x) = \log(1/x) \quad h(x) = \cos x$
3. ¿Puede ser un polinomio cuadrático combinación lineal de dos polinomios cúbicos? Dé un ejemplo.
4. ¿Puede ser un polinomio cuadrático combinación lineal de dos polinomios lineales? Dé un ejemplo.

Generalizando el resultado de la página 2, vemos que

↱EN SÍNTESIS:↰

para resolver una Ecuación diferencial ordinaria de 2º orden lineal Homogénea (EDH), precisamos una combinación lineal de dos funciones linealmente independientes.

Método para Resolver ED Homogéneas a Coeficientes constantes:

Vean el método en EDO 2do ORDEN - SEPARATA CAP17. STEWART páginas 1112 hasta la 1115, en particular los Casos I, II, y III, y los ejemplos 1,2,3 y 4. Continúen con Problema de Valor Inicial (PVI), el ejemplo 5 y 6. (No veremos Problema con valores en la frontera).

EJERCITACIÓN ⊞

Resuelvan las siguientes ED:

1. $y'' - y' - 6y = 0$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$

Resuelvan los siguientes PVI:

4. $\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x'' - 2x' + x = 0 \\ x(0) = 5 \\ x'(0) = 10 \end{cases}$

Método: ED Inhomogéneas a coeficientes Constantes

Vean el método en la sección 17.2 de EDO 2do Orden - Separata Cap17. Stewart (páginas 1117-1122). Método de Coeficientes Indeterminados, ejemplos 1,2,3,4,5,6.

Ejercitación ⊞

Resuelvan las siguientes ED:

7. $y'' + 3y' + 2y = x$
8. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$
9. $y'' - y' = xe^x$

Resuelvan los siguientes PVI:

10. $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 4x \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x'' - x' = te^t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

Método de la Transformación de Laplace

Funciones definidas mediante Integrales

Recordemos algunas propiedades de las Integrales definidas.

Concepto previo: *Integral definida*

P1 La integral no depende de la variable de integración.

La siguiente integral definida

Concepto previo: *Regla de Barrow*

$$\int_1^5 4x^3 dx = x^4\Big|_1^5 = 5^4 - 1^4$$

la evaluamos por Regla de Barrow, reemplazando la variable x por los límites 1 y 5, y así la integral no depende de x. Podemos cambiar la variable x por otra variable u y nada varía:

$$\int_1^5 4x^3 dx = \int_1^5 4u^3 \mathrm{d}u$$

P2 La integral depende de los límites de integración.

Si repetimos el cálculo para un límite variable t queda:

$$\int_1^t 4x^3 dx = x^4\Big|_1^t = t^4 - 1^4 = f(t)$$

nuevamente vemos que la integral no depende de x, y sí es función de la variable t que está en un límite.

Recordemos que si tomamos límite para la variable t tendiendo a cualquier valor o a infinito el resultado no depende de t.

P3 La integral depende de otras variables que no se integran.

También es posible que haya otras variables independientes dentro del integrando:

$$\int_1^5 4sx^3 dx = s\int_1^5 4x^3 dx = s(\,x^4\Big|_1^5) = s(5^4 - 1^4) = f(s)$$

otra vez, la integral no depende de x pero sí de s.

Ejercitación ⊞

1. ¿De qué variables depende $\int_1^t 4\cos(y^2)dy$?
2. ¿Cuánto vale la derivada parcial de $\int_1^5 s\frac{1}{u}du$ con respecto a u? ¿y la derivada parcial con respecto a s?

Concepto previo: *Derivada parcial*

Integrales Impropias

↪ Definición

Hay otros casos de integrales impropias que no nos interesan en este curso de Matemática III.

Llamaremos **integral impropia** a una integral que lleva el símbolo ∞ en el límite superior de integración. Esta se calcula mediante:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)dx$$

Notemos que la integral impropia puede *no existir* si la operación $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)dx$ no existe. En este caso diremos que la integral *no converge* o que *diverge*. ■

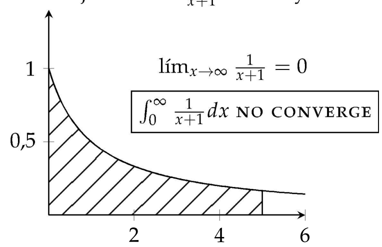
Ejemplo ⥀

Consigna:

Verifiquen si existen las siguientes integrales impropias. En caso de existir calculen su valor (ver al margen).

1. $\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx$ 2. $\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^2}dx$ 3. $\int_0^\infty e^{-2u}du$

1. Área bajo la curva $\frac{1}{x+1}$ entre 0 y t.



Concepto previo: *límite al infinito de* $\ln x$.

Solución:

1. $\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx$

a. Reemplazo el símbolo ∞ por t, y calculo:

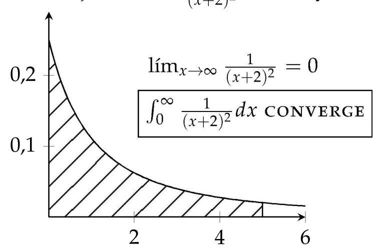
$$\int_0^t \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)|_0^t = \ln(t+1) - \ln(0+1) = \ln(t+1)$$

b. Tomo límite tendiendo a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x+1}dx = \lim_{t\to\infty} \ln(t+1) = \infty$$

Conclusión: la integral impropia *diverge* o no converge.

2. Área bajo la curva $\frac{1}{(x+2)^2}$ entre 0 y t.



Concepto previo: *límite al infinito de un cociente.*

2. $\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^2}dx$

a. Reemplazo el símbolo ∞ por t, y calculo:

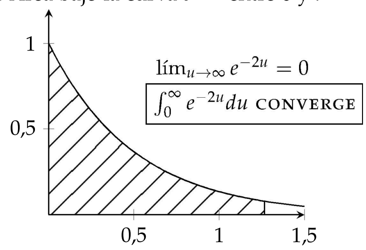
$$\int_0^t \frac{1}{(x+2)^2}dx = -(x+2)^{-1}\Big|_0^t = -\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{0+2}\right) = -\frac{1}{t+2} + \frac{1}{2}$$

b. Tomo límite tendiendo a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x+1}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t+2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusión: la integral impropia *existe* y *converge* al valor 1/2.

3. Área bajo la curva e^{-2u} entre 0 y t



Concepto previo: *límite al infinito de* e^x.

3. $\int_0^\infty e^{-2u}du$

a. Reemplazo el símbolo ∞ por t, y calculo:

$$\int_0^t e^{-2u}du = \frac{1}{-2}e^{-2u}\Big|_0^t = -\left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2\times 0}\right) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

b. Tomo límite tendiendo a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-2u}du = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusión: la integral impropia *existe* y *converge* al valor 1/2.

■

Los ejemplos muestran que la sola inspección del gráfico de la función no permite determinar si la integral impropia converge o no.

Ejercitación ⊞

Mirá nuevamente los ejemplos de la página anterior y respondé:

1. Si $f(x)$ es función creciente ¿puede ocurrir que $\int_0^\infty f(x)dx$ converja? (¿hay funciones que sean crecientes y tiendan a cero para $x \to \infty$?)
2. Si $f(x) \to +\infty$ para $x \to \infty$ ¿puede ocurrir que $\int_0^\infty f(x)dx$ converja?
3. Si $f(x) \to 0$ para $x \to \infty$ ¿puede ocurrir que $\int_0^\infty f(x)dx$ converja? ¿Necesariamente $\int_0^\infty f(x)dx$ converje?
4. Verifiquen si existen las siguientes integrales impropias. En caso de existir calculen su valor:

a) $\int_0^\infty e^{4x}dx$

b) $\int_0^\infty e^{-3x}dx$

c) $\int_0^\infty te^{-3t}dt$

d) $\int_0^\infty e^{-st}dt$.
El resultado ¿es una función de t, de s o de ambas variables? Analicen qué ocurre si s es un número negativo, o si es positivo o cero.

La Transformada de Laplace

↪ Definición

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (es decir que $f(t)$ está definida para $t \geqslant 0$).

La **Transformada de Laplace** de f es una nueva función $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Se obtiene mediante:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

si existe (o sea converje) la Integral Impropia. ■

Notemos que la Transformada de una función, es una integral impropia:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)e^{-st}dt$$

y por lo tanto *puede no existir* para algunas funciones $f(t)$. En el Anexo pueden ver las condiciones de existencia de $\mathcal{L}[f(t)]$.

Ejercitación ⊞

¿Y si buscás $\boxed{\text{Laplace Transform}}$ en wolframalpha ?

1. La transformada $\mathcal{L}[f(t)]$ ¿depende de t? ¿De qué variable depende?

Ejemplo ⥀

Consigna: Obtengan la transformada $F(s) = \mathcal{L}[e^{4t}]$

Solución: Debo calcular

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{4t}] = \int_0^\infty e^{4t} e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{4t} e^{-st} dt$$

a. Antiderivada (ver margen):
b. Por Regla Barrow:

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{4t} e^{-st} dt &= \left[\frac{1}{4-s} e^{(4-s)t}\right]_0^b \\ &= \frac{1}{4-s} e^{(4-s)b} - \frac{1}{4-s} e^{(4-s)0} \\ &= \frac{1}{4-s} e^{(4-s)b} - \frac{1}{4-s}\end{aligned}$$

c. Tomo límite tendiendo a infinito (ver margen):

$$\lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{4-s} e^{(4-s)b} - \frac{1}{4-s}\right] = \frac{1}{4-s} \lim_{b\to\infty} e^{(4-s)b} - \frac{1}{4-s}$$

Analizo tres casos:
1. $r = 4 - s < 0$, es decir que si $s > 4$ la transformada existe y vale

$$\frac{1}{4-s} \lim_{b\to\infty} e^{(4-s)b} - \frac{1}{4-s} = \frac{1}{4-s} \times 0 - \frac{1}{4-s} = \frac{1}{s-4}$$

2. $r = 4 - s > 0$ es decir que si $s < 4$, la transformada no existe ya que el límite no existe.
3. $r = 4 - s = 0$, o sea $s = 4$, y al igual que en el caso b) la transformada tampoco existe.
Por lo tanto la transformada buscada es:

$$\mathcal{L}[e^{4t}] = \frac{1}{s-4} \qquad \text{si} \quad s > 4.$$

■

---

a. Cálculo de la Antiderivada:

Por propiedades de los exponentes

$$\begin{aligned}\int e^{4t} e^{-st} dt &= \int e^{4t-st} dt \\ &= \int e^{(4-s)t} dt\end{aligned}$$

aplico sustitución: $u = (4-s)t$

$$\begin{aligned}&= \int e^u \frac{1}{4-s} du \\ &= e^u \frac{1}{4-s} \\ &= \frac{1}{4-s} e^{(4-s)t}\end{aligned}$$

c. Cálculo de $\lim_{x\to\infty} e^{rx}$

Con e^{rx} hay tres casos (ya lo han visto en los ejercicios de la página 10.)

1. $r > 0$: exponencial creciente, el límite a $+\infty$ no existe. Ej: $\lim_{x\to\infty} e^{4x} = \infty$.
2. $r < 0$: es exponencial decreciente y el límite a $+\infty$ da cero. Ej: $\lim_{x\to\infty} e^{-3x} = 0$.
3. $r = 0$: $e^{0x} = 1$ es constante. No podemos tomar límite $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$ ya que *no es más una función exponencial* así que volvemos al punto a. y antiderivamos: $\int e^{4t-st} dt = \int e^{0t} dt = \int 1 dt = t$. Aplico Barrow: $t|_0^b = b - 0 = b$. Tomo límite: $\lim_{b\to\infty} b = \infty$, y por lo tanto tampoco en este caso el límite existe.

Grafiquen en Geogebra y verifiquen.

Ejercitación ⊞

---

1. En la ejercitación anterior (ejercicio 4 de la página 10) hemos estudiado integrales impropias. ¿Cuáles de estas integrales son efectivamente transformadas de Laplace? y en caso de que lo sean: ¿de qué función son transformadas?

2. Verifiquen las siguientes Transformadas de Laplace:

a) $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$

b) $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$

c) $\mathcal{L}[e^{-5t}] = \dfrac{1}{s+5}$ si $s > -5$

d) $\mathcal{L}[\text{sen}(kt)] = \dfrac{k}{s^2+k^2}$ (Para este utilice GeoGebra o WolframAlpha)

Actividad ▶

Investiguemos la relación entre la Transformada de una función y la Transformada de su derivada. Para ello calculemos $\mathcal{L}[f'(t)]$ y veamos en qué se parece a $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Por definición la transformada de f es $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Y por la misma definición la transformada de f' es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt\end{aligned}$$

a. Antiderivo (ver margen)
b. Aplico regla de Barrow:

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} f'(t)dt &= e^{-st} f(t)\big|_0^b + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt \\ &= e^{-sb} f(b) - \underbrace{e^{-s\times 0}}_{=1} f(0) + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

c. Tomo límite tendiendo a infinito:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt\right] \\ &= \underbrace{\lim_{b\to\infty} e^{-sb} f(b)}_{\to 0 \text{ ver margen}} - f(0) + \underbrace{s\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)e^{-st}dt}_{\text{Transformada de } f(t)} \\ &= -f(0) + sF(s)\end{aligned}$$

Conclusión: $\boxed{\mathcal{L}[f'] = -f(0) + s\mathcal{L}[f]}$

■

Observación: para el caso de una función que pasa por el origen, $f(0) = 0$, y resulta que *Transformada de f'= $s\times$Transformada de f*. Dicho

a. Antiderivada $\int e^{-st} f'(t)dt$

Integro por partes,

elijo $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)dt$.

Entonces $du = -se^{-st}dt$ y $v = f(t)$

$$\begin{aligned}\int e^{-st} f'(t)dt &= e^{-st} f(t) - \int f(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\ &= e^{-st} f(t) + s\int f(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

Orden de una función:
Si $f(x)$ es de orden menor a una exponencial cumple que:
$\lim_{b\to\infty} e^{-sb} f(b) = 0$ si $s > 0$.
Lo anotamos: $\mathcal{O}(f(x)) \ll \mathcal{O}(e^x)$

Ejemplo:
Grafiquen en Geogebra $g(x) = e^{-2x}x^3$ y a partir del gráfico intenten deducir cuánto vale $\lim_{x\to\infty} e^{-2x}x^3$

¿Es $f(x) = x^3$ de orden menor a una exponencial?

en castellano: multiplicar por s una transformada de una función f, nos dará la transformada de la derivada de f.

Ejercitación ⊞

1. Dado que la primitiva de $f(t) = 1$ es $g(t) = t$ ¿qué relación hay entre $\mathcal{L}[1]$ y $\mathcal{L}[t]$?

2. Para funciones cuya gráfica pasa por el origen (¿Cuánto vale $f(0)$?), si *multiplicar por s* equivale (en el mundo "transformado") a *derivar*, a qué equivaldrá *dividir por s*?

   Dicho de otro modo, qué relación hay entre la Transformada de una función f y la de su primitiva?

3. Verifique que las gráficas de $F(t) = \frac{1}{2}t^2$ y $G(t) = \frac{1}{3}t^3$ pasan por el origen.

   Ahora con la información de los anteriores dos incisos obtenga del modo más sencillo posible (vean la ayuda en el margen)

   a) $\mathcal{L}[\frac{1}{2}t^2]$ *b*) $\mathcal{L}[\frac{1}{3}t^3]$

Pistas: La función $F(t) = \frac{1}{2}t^2$ es una antiderivada de $f(t) = t$.

La función $G(t) = \frac{1}{3}t^3$ es una antiderivada de $g(t) = t^2$.

4. Para la siguiente tabla: a) verifique las transformadas 1., 2. y 5. y b) Calcule y complete las Transformadas 3., 4. y 6. (Nota: Llamaremos $F(s)$ a la transformada de $f(t)$. En ningún caso integre. Para el punto 6: la función $g(t)$ es una primitiva de $f(t)$)

Prop.	$f(t)$	$\mathcal{L}[f]$
1.	t^2	$2!/s^3$
2.	t^3	$3!/s^4$
3.	t^4	
4.	t^n	
5.	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
6.	$g(t)$	

Concepto previo: *Factorial $n!$ de un número natural. Ejemplo:* $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ *= el producto de todos los números naturales menores o iguales a 5. Se escribe* $5!$

5. Considera la función escalón:

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

   Grafíquenla, y calculen $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)]$.

Concepto previo: *La integral definida es* aditiva *respecto del intervalo de integración. Es decir:* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *donde* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y las tres integrales existen.*

6. Definimos la **función de Heaviside** $\mathcal{U}_a$ (donde a es un número real no negativo) como

$$\mathcal{U}_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geqslant a \end{cases}$$

Grafíquenla y obtengan $\mathcal{L}[\mathcal{U}_a(t)]$.

¿Qué relación hay entre la función escalón $\mathcal{U}(t)$ y la función de Heaviside $\mathcal{U}_0(t)$ en $a = 0$?

7. Sea $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la Transformada de Laplace de la función $f(t)$. Escriban la Transformada $\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)]$ en términos de $F(s)$

Propiedades de la Transformada

Por ser una integral, la Transformada posee también las propiedades de toda integral:

a. La Transformada de una suma es la suma de las transformadas

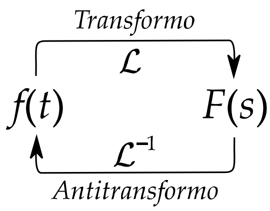
$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]$$

b. Una constante multiplicativa sale afuera de la integral.

$$\mathcal{L}[k.f(t)] = k\mathcal{L}[f(t)]$$

Transformada Inversa

Hay una relación *1 a 1* entre una función $f(t)$ y su transformada $F(s)$, de tal modo que: dada una función $f(t)$ existe una única transformada $F(s)$ y viceversa, dada una transformada $F(s)$ existe una única función original $f(t)$ también llamada *antitransformada*:



$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

La antitransformada posee similares propiedades a la transformada:
a. La Antitransformación es distributiva respecto de la suma.
b. Una constante multiplicativa sale afuera de la integral.

Ejercitación ⊞

---

1. Dadas las siguientes funciones $F(s)$, hallar la transformada inversa, es decir, recuperar la $f(t)$.

Consulten la tabla del Anexo, página 18.

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^3}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s+3}$ c) $F(s) = \dfrac{1}{3s+5}$

d) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2}$ (Qué relación tendrá con $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{e^{-s}}{s}]$?)

Cálculo de Antitransformadas: Vean Geogebra, o www.wolframalpha.com

Verifiquen con la tabla de pág. 18.

Transformada y Ecuaciones Diferenciales

Utilizaremos la Transformación Laplace para resolver Ecuaciones Diferenciales lineales. El método es particularmente sencillo si los coeficientes de la Ecuación son constantes.

Ejemplo

Consigna: Halle la función $y(x)$ solución del PVI.

$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

mediante Transformación de Laplace.

Solución:

a. Transformo la ecuación. Llamaremos $F(s) = \mathcal{L}[y]$ a la transformada de la solución $y(x)$.

$$\mathcal{L}[y' - y] = \mathcal{L}[1]$$
$$\underbrace{\mathcal{L}[y']}_{-y(0)+sF(s)} - \underbrace{\mathcal{L}[y]}_{F(s)} = 1/s$$

Donde apliqué la transformada de y'. (Ver ejemplo en página 12)

$$-y(0) + sF(s) - F(s) = 1/s$$

teniendo en cuenta la condición inicial $y(0) = 1$

$$-1 + sF(s) - F(s) = 1/s$$

despejo la transformada $F(s)$

$$(s-1)F(s) = 1/s + 1$$
$$F(s) = \frac{1/s}{(s-1)} + \frac{1}{s-1}$$
$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{s-1}$$

b. He obtenido la transformada de la *solución* $y(x)$. Para obtener la solución, debo antitransformar.

Vean la Tabla de página 18.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{s-1}]$$

antitransformada de una suma:

$$= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s-1)}]}_{\textbf{b.1}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}]}_{\textbf{b.2}}$$

b.1= $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}] = e^x$ (La variable independiente es x en vez de t.)

b.2= $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s-1)}]$.

Mediante la Tabla (cambiando $t \to x$):

$\mathcal{L}[\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}] = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$ y comparo con $\frac{1}{s(s-1)}$.

Si elijo $a = 0$ y $b = 1$ queda:

$$\mathcal{L}[\frac{e^{0x}-e^{1x}}{0-1}] = \frac{1}{(s-0)(s-1)}$$
$$\mathcal{L}[-1+e^x] = \frac{1}{s(s-1)}$$
$$-1+e^x = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s-1)}] = \mathbf{b.2}$$

¿Cómo pueden obtener $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s-1)}]$ mediante GeoGebra?

c. La solución será **b.1+b.2**

$$y(x) = -1 + 2e^x$$

■

Ejercitación ⊞

Verifiquen la solución obtenida en el ejemplo para el PVI:

$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

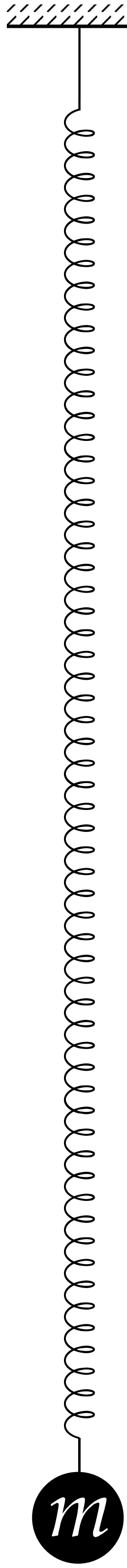
mediante los conocimientos de ecuaciones diferenciales del primer módulo. ¿Es necesario aplicar el método de separación de variables o de ecuaciones lineales?

Ejercitación ⊞

Aplicando transformada de Laplace, halla la solución $y(x)$ de los siguientes problemas con valor inicial:

1. $\{\ y'' - y = 1; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
2. $\{\ y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$
3. $\{\ y'' + y' = x; \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$
4. $\{\ y'' - 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

Volvamos al Resorte



Miremos nuevamente las situaciones de las páginas 1 y 5.

Analicemos qué tipo de movimientos predice la ecuación diferencial

$$x'' + cx' + \omega^2 x = 0$$

para el cuerpo unido a un resorte.

Estudiá los siguientes casos y graficá la solución con Geogebra.

Caso I: $\begin{cases} x'' + 5x' + 4x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

Caso II: $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

Caso III y ... ¿qué otros casos hay? ¿dónde podrías mirar información?

¿Cuál será la importancia de las vibraciones, oscilaciones y movimientos ondulatorios para la Ingeniería?

Anexo: Tabla de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$\mathcal{U}_a(t)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$f(t-a)\mathcal{U}_a(t)$	$e^{-as}F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) -$
	$\cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\dfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$
$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$

$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2 - k^2}$
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2 - k^2}$
$\dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\dfrac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at} \sin kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2 + k^2}$
$e^{at} \cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$
$e^{at} \sinh kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2 - k^2}$
$e^{at} \cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 - k^2}$
$t \sin kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
$t \cos kt$	$\dfrac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
$t \sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$
$t \cosh kt$	$\dfrac{s^2 - k^2}{(s^2 - k^2)^2}$
$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan \dfrac{a}{s}$