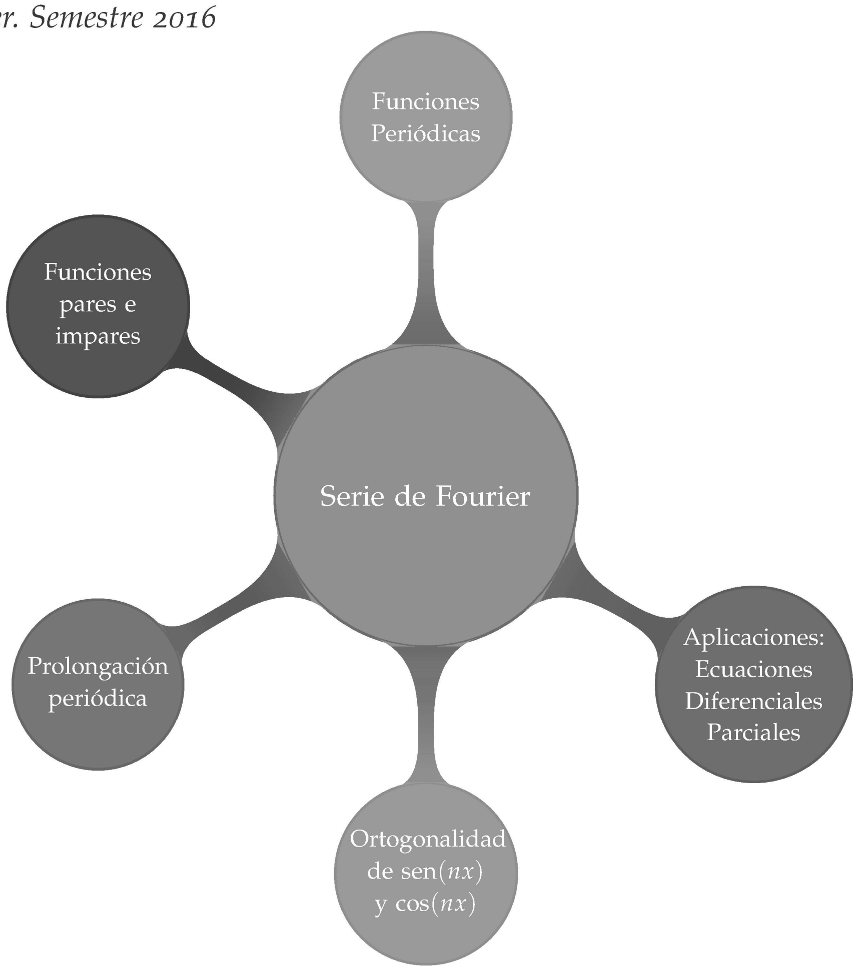
Guía 4 - Serie de Fourier

Diego Vallejo, Melina Podestá, Eva Almirón

1er. Semestre 2016

Con aportes del Material
del Dr. Octavio Miloni



Funciones Periódicas

> *"Se llama fenómenos periódicos a aquellos que se repiten sucesivamente, siempre de idéntica forma. El movimiento circular uniforme, las vibraciones de un diapasón, las señales luminosas de un faro, [...] son ejemplos de fenómenos periódicos. [...] Los fenómenos periódicos son trascendentales no solo porque existen muchos en la naturaleza, sino también porque gracias a ellos podemos tener noción del tiempo. Ello se debe a que la única forma de medir el tiempo consiste en contar el número de veces que se repite un fenómeno periódico. Cuando contabilizamos el tiempo en días, contamos las vueltas del movimiento de rotación de la Tierra; si lo hacemos en años, contamos las de su movimiento de traslación alrededor del Sol. Por otra parte, los relojes no hacen otra cosa que contar las oscilaciones de un péndulo o de una pequeña ruedecilla o las vibraciones de un cristal de cuarzo"* –Fisica 2. Ed. Casals.

↪ DEFINICIÓN

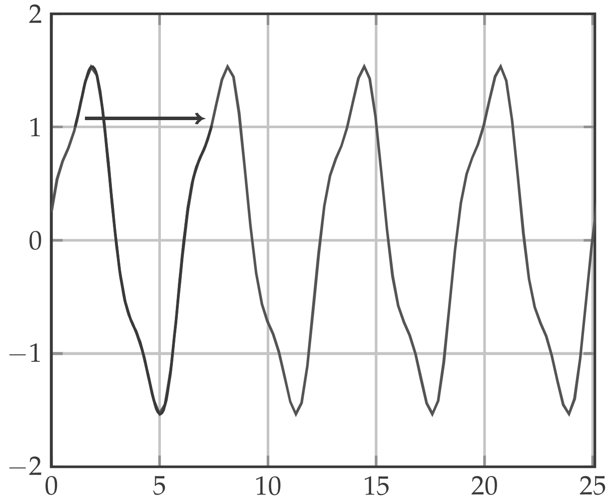
Una función se denomina **periódica** si

$$f(x+p) = f(x) \qquad \text{donde} \quad p \in \mathbb{R}$$

. El número p se denomina **período**. ■

Esto significa que la gráfica de una función periódica $f(x)$ con período p, puede *trasladarse* p unidades a lo largo del eje x, sin que la gráfica cambie:

Función Periódica. Período $p \approx 6{,}4$



Observación: La función $\operatorname{sen}(x)$ es periódica de período $p = 2\pi$, dado que (verificar con la circunferencia unitaria):

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x)$$

EJERCITACIÓN ⊞

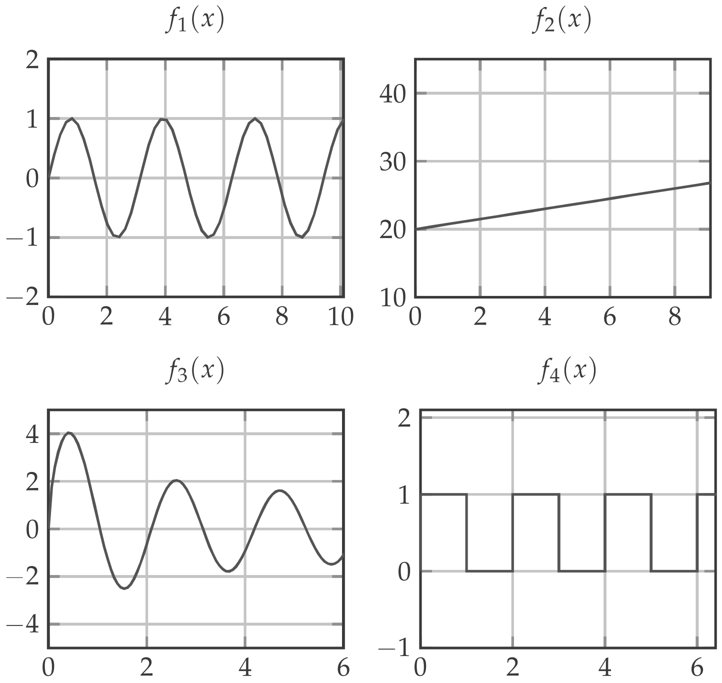
1. La función $\operatorname{sen}(x)$ verifica que $\operatorname{sen}(x+4\pi) = \operatorname{sen}(x)$ Esto ¿quiere decir que su período es 4π? ¿Cuál es su período entonces?

2. La función $\cos(x)$ ¿es periódica? ¿cuál es su período?

3. La función $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, que es un cociente de dos funciones periódicas de período 2π, ¿es periódica? ¿cuál es su período?

4. la función compleja de variable real t: $f(t) = e^{it}$ ¿es periódica? ¿que período tiene?

5. Determine si las funciones de las siguientes gráficas pueden ser o no periódicas, y en caso afirmativo, estime su período.



Funciones trigonométricas de un múltiplo x

Las funciones de la clase $\operatorname{sen}(nx)$ y $\cos(nx)$ con $n \in \mathbb{N}$ son periódicas, por ser básicamente senos y cosenos. Calculemos su período.

Ejemplo ⟲

Consigna: Obtenga el período de $f(x) = \cos(2x)$

Solución: Sabemos que

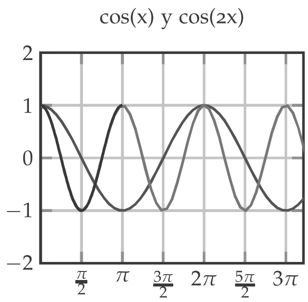
$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi) \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

si la función $f(x)$ es periódica con un período p (que aún no conocemos) verifica que:

$$f(x) = f(x + p)$$

o sea

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos\left(2(x+p)\right] \\ \cos\underbrace{(2x)} &= \cos\underbrace{(2x+2p)} \qquad \text{comparo con (Ecuación 1):} \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 2\pi) \end{aligned}$$



La función $\cos 2x$ tiene período $p = \pi$ igual a la mitad del período de $\cos x$.

Veo que $\alpha = 2x$ y que $2p = 2\pi$ o sea el período $p = \pi$.

■

Ejercitación ⊞

Verifica el periodo para cada una de las siguientes funciones:

1. $\cos(2x)$ [R: $p = \pi$]
2. $\mathrm{sen}(\frac{x}{4})$ [R: $p = 8\pi$]
3. $\cos(\frac{2\pi}{5}x)$ [R: $p = 5$]
4. $\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{a}x)$ [R: $p = a$]

Funciones pares e impares

↪ Definición

Diremos que una función $f(x)$ es una **función par**, si su gráfica es simétrica respecto del eje y (es decir si colocando un espejo sobre el eje y su gráfica se refleja sobre sí misma).

Una función $f(x)$ será una **función impar** si su gráfica no varía al rotarla un ángulo $\theta = \pi$ radianes (es decir media vuelta) alrededor del origen de coordenadas. ■

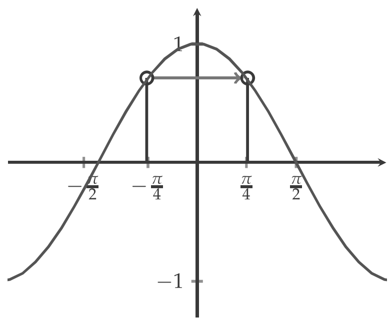
Ejemplo ⟳

1. La función $f(x) = \cos(x)$ tiene la siguiente gráfica:

   Vemos que es simétrica respecto del eje y, o sea, es una función *par*. Notemos que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4})$, y para *cualquier* x:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

.



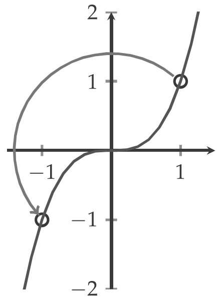
La función $f(x) = \cos x$ es par.

2. La función $f(x) = x^3$ tiene la siguiente gráfica:

   Vemos que no cambia al rotarla π radianes respecto del origen o sea, es una función *impar*.

   Notemos que $1^3 = -(-1)^3$ y en general, para *cualquier* x:

$$x^3 = -(-x)^3$$



La función $f(x) = x^3$ es impar.

■

Ejercitación ⊞

1. ¿Habrá alguna función que sea a la vez par e impar? ¿Puede dar un ejemplo? ¿Habrá más de una? Grafique.

2. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, decida para cada caso si la función es *i)* par, *ii)* impar, o *iii)* ni par ni impar. Si puede utilice herramientas gráficas.

   a) $f_1(x)$ que verifica $f_1(x) = f_1(-x)$

   b) $g_1(x)$ tal que $g_1(x) = -g_1(-x)$

   c) $f_2(x) = 3$ *d)* $f_3(x) = \text{sen}(x)$ *e)* $f_4(x) = x^2$

   f) $f_5(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y n impar.

   g) $f_6(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y n par.

3. Decida para cada caso si la función es *i)* par, *ii)* impar, o *iii)* ni par ni impar. ¿Podría ayudarse para resolver mediante alguna gráfica?

   a) El producto $[f.g](x) = x^3 \cos x$, donde $f(x) = x^3$ es impar y $g(x) = \cos(x)$ es par.

   b) El producto de una función par por una impar.

   c) El producto de dos funciones pares.

   d) El producto de dos funciones impares.

4. Mirando la gráfica de...

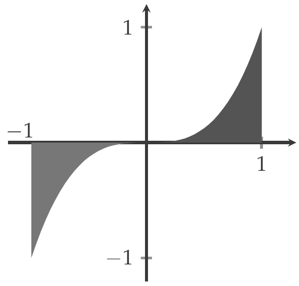
   a) ... $f(x) = x^3$ ¿qué puede decir de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

   Y para cualquier función $f(x)$ impar ¿qué puede decir de $\int_{-a}^{a} f(x)dx$? (a es un número real positivo).

   b) ... $g(x) = x^2$ ¿qué relación hay entre $\int_{-1}^{0} g(x)dx$ y $\int_{0}^{1} g(x)dx$? ¿Qué relación hay entre $\int_{-1}^{0} g(x)dx$ y $\int_{-1}^{1} g(x)dx$?

   Y para cualquier función $g(x)$ par ¿Qué puede decir de $\int_{-a}^{a} g(x)dx$? ($a > 0$ $a \in \mathbb{R}$).

Concepto previo: *Signo de la Integral definida. Área bajo la curva.*



Gráfica de $f(x) = x^3$
Area roja: $A_R = -\int_{-1}^{0} f(x)dx$.
Area Azul: $A_A = \int_{0}^{1} f(x)dx$.

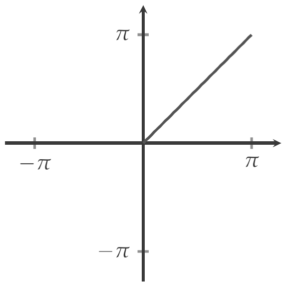
$A_A = A_R$

¿Puede visualizar la igualdad anterior mediante una rotación?

↱EN SÍNTESIS:↰

Propiedades de las funciones pares e impares.

1. Cualquier función PAR $f_P(x)$ verifica que:
   a) $f_P(x) = f_P(-x)$ b) $\int_{-a}^{a} f_P(x)dx = 2\int_0^a f_P(x)dx$.
2. Cualquier función IMPAR $f_I(x)$ verifica que:
   a) $f_I(x) = -f_I(-x)$ b) $\int_{-a}^{a} f_I(x)dx = 0$.
3. El producto de dos funciones pares es par.
4. El producto de dos funciones impares es par.
5. El producto de una función par por una impar es impar.



Función original

Prolongación Periódica

Prolongación par e impar

Introduciremos este tema mediante el siguiente EJEMPLO ⟲

CONSIGNA: obtenga la prolongación par $f_P(x)$ y la prolongación impar $f_I(x)$ al intervalo $[-\pi, \pi]$ de la función

$$f(x) = x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

SOLUCIÓN:

Podemos definir dos nuevas funciones que coincidan con la original $f(x)$ en su dominio $[0, \pi]$ y que sean respectivamente, par e impar.

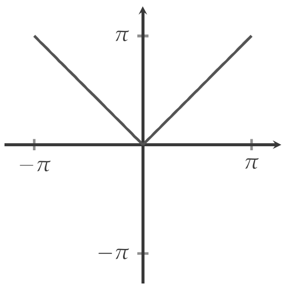
a. Extensión par:

$$f_P(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leqslant x < 0 \\ x & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases} \tag{1}$$

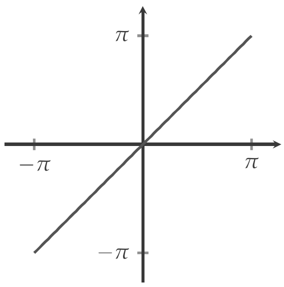
b. Extensión impar:

$$f_I(x) = x, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Notemos que todas las funciones coinciden en el intervalo $[0, \pi]$. ■

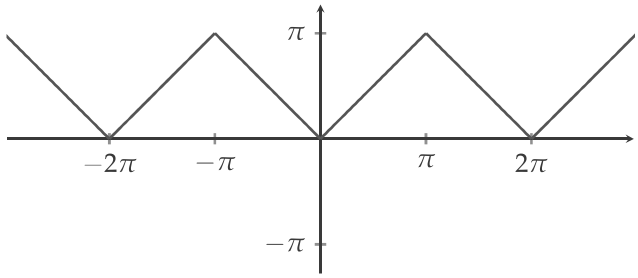


$f_P(x)$: Extensión como Función Par.

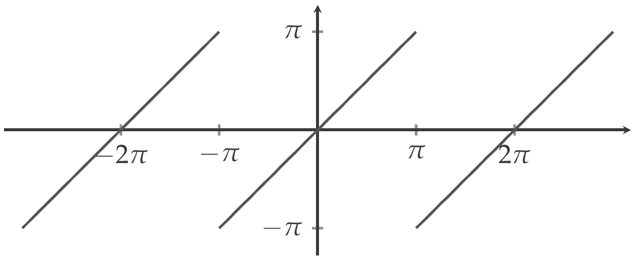


$f_I(x)$: Extensión como Función Impar

Ahora, demos un paso más en las prolongaciones de las funciones. Extenderemos tanto la función f_{par} o f_{impar} periódicamente, es decir, repitiendo el gráfico de las funciones a lo largo del eje x:



$f_P(x)$: Extensión Periódica a $\mathbb{R}$ como Función par.



$f_I(x)$: Extensión Periódica a $\mathbb{R}$ como Función impar.

EJERCITACIÓN ⊞

Determina las prolongaciones par e impar al intervalo $[-1, 1]$ de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
2. $f(x) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
3. $f(x) = -x + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

Para cada una grafica sus prolongaciones periódicas a todo $\mathbb{R}$. ¿Cuál será el período de cada función?

Serie de Fourier

↪ DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función contínua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Supongamos que extendemos periódicamente a la función a toda la recta $\mathbb{R}$, con periodo $p = 2\pi$.

La **Serie de Fourier** de la función $f(x)$ se define como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\right]$$

Concepto Previo: Una *Serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ se define de modo similar a la integral impropia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Concepto Previo: Análogamente a la Integral impropia una *Serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ no depende de la variable k de la sumatoria. Dicho de otro modo: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{u=0}^{\infty} a_u$

■

Cálculo de los coeficientes:

Para este cálculo aplicaremos las propiedades de ortogonalidad de las funciones senos y cosenos.

Pueden consultar en internet sobre estas propiedades

donde los coeficientes a_0, a_k y b_k se obtienen a partir de

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(kx)\,dx$$

EJEMPLO ⟲

CONSIGNA: Obtenga la Serie de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leqslant x < 0 \\ \ \ 1 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Obtener la serie de Fourier consiste básicamente en obtener los coeficientes. Aplicaremos propiedades del recuadro de página 6. Para ello notemos que $f(x)$ es impar.

I. Cálculo de a_0:

Por propiedades de funciones impares

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

I. Cálculo por integración de a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}[0-(-\pi)] + \frac{1}{\pi}[\pi - 0] \\ &= -1+1 = 0 \end{aligned}$$

II. Cálculo de los a_k:

Notemos que $f(x)\cos(kx)$ es *impar* por ser producto de función impar por una función par. Por lo tanto

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0$$

II. Cálculo por integración de a_k

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\ \cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\ \cos(kx)dx \\ &= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{\text{sen}(k\,0)}{k} - \frac{\text{sen}(k\,(-\pi))}{k}\right] \\ &+ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\text{sen}(k\,\pi)}{k} - \frac{\text{sen}(k\,0)}{k}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

III. Cálculo de los b_k:

$f(x)\,\text{sen}\,(kx)$ es *par* por ser producto de dos funciones impares.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(kx)\,dx$$

Ya que el integrando es par:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left[2\int_0^{\pi} 1 \ \mathrm{sen}(kx)dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(k\,\pi)}{k} - \frac{-\cos(k\,0)}{k}\right] \\
&= \frac{2}{k\pi}\left[-\cos(k\,\pi)+1\right]
\end{aligned}
$$

Tabla de Valores de $\cos(k\pi)$.

k	$\cos(k\pi)$
1	-1
2	1
3	-1
4	1
...	...

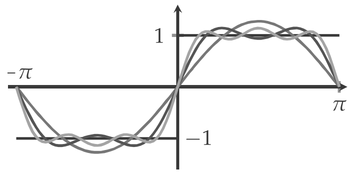
Cuando k es par, tendremos $\cos(k\,\pi) = 1$ (ver tabla) con lo cual $b_{k\ par} = 0$.

Cuando k es impar, $\cos(k\,\pi) = -1$, con lo que resulta $b_{k\ impar} = \frac{4}{k\pi}$

Así, la serie de Fourier de $f(x)$ es:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}(x) + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{3} + \frac{\mathrm{sen}(5x)}{5} + \frac{\mathrm{sen}(7x)}{7} + \cdots\right]$$

■



Sucesivas aproximaciones de Fourier de la onda cuadrada:
Rojo: $\frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}(x)\right]$
Azul: $\frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}(x) + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{3}\right]$
Verde: $\frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}(x) + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{3} + \frac{\mathrm{sen}(5x)}{5}\right]$

Ejercitación ⊞

Para las siguientes funciones, encontrar el desarrollo de Fourier

1. $f(x) = x, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leqslant x < 0 \\ 1/2 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$
3. $f(x) = x^2, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

Cuando el intervalo es $[-L, L]$

Si la función está definida en otro intervalo diferente de $[-\pi, \pi]$, mediante el cambio de variables $x \to \pi x/L$, se puede reducir al caso anterior. La Serie queda ahora:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \ \mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]$$

donde los coeficientes se obtienen mediante fórmulas similares a las anteriores:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\
a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx \\
b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx
\end{aligned}
$$

Aplicación: Ecuaciones Diferenciales Parciales

Recordemos del primer módulo que una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación en la cual una función de varias variables (incógnita) está relacionada con sus derivadas parciales. Un ejemplo de EDP es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - f(x,y) = 0$$

En este caso, debido a que el orden de derivación es uno (involucra primeras derivadas parciales como máximo orden de derivación) la ecuación es de primer orden. Los problemas a resolver incluyen dos tipos de restricciones:
i) las condiciones iniciales, y
ii) las condiciones de contorno o de frontera.

Consideraremos estos casos de EDP de segundo orden:

1. Ecuación del Calor en una barra unidimensional

   Wikipedia:Ecuación del calor

   Supondremos que nos interesa la evolución en el tiempo de las temperaturas en una barra conductora de calor unidimensional de longitud L (la que ubicamos sobre el eje x). A lo largo de la barra, la temperatura u depende de la posición x de cada punto de la barra y del instante de tiempo t, o sea es una *función* $u = u(x,t)$. Esta función u satisface la ecuación diferencial:

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   donde α es la constante de difusividad térmica.

   Wikipedia:Difusividad Térmica

2. Ecuación de una cuerda vibrante

   Aquí estudiamos una cuerda (como la de una guitarra) de longitud L sujeta en sus extremos. En el inicio podemos estirar la cuerda (describiendo determinada curva en el plano xy). Al soltar la cuerda, esta adopta formas variables según pasa el tiempo. En cada posición habrá un *apartamiento* u de su posición de equilibrio el cual será una función $u(x,t)$. Esta satisface la ecuación de onda:

   Wikipedia: Ecuación de onda

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   donde c es la velocidad de propagación de la onda.

   Utilizamos siempre la variable u como función incógnita en los tres casos de EDP. En el primer caso u es la Temperatura en una posición x y un instante dado t. En el segundo caso u es un apartamiento (una distancia) de la cuerda al punto de equilibrio, que también es función de x y de t. En el tercer caso u es el potencial eléctrico, o gravitatorio, que es una función de la posición (x,y) en el plano xy y no depende del tiempo t.

3. Ecuación del potencial o de Laplace

   La ecuación denominada del potencial es la ecuación diferencial parcial que es satisfecha por el potencial gravitatorio o eléctrico, que en su versión bidimensional posee la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Principio de Superposición

Para la resolución de EDP utilizaremos el principio de superposición. Este establece que

Si conozco las soluciones u_1, $u_2, \cdots, u_n, \cdots$ de una ecuaciones diferenciales (del calor, de la cuerda vibrante o del potencial), la suma

$$u = \sum_{n=1} u_n$$

también es una solución.

Este principio es simplemente la aplicación de la propiedad de linealidad de este tipo de Ecuaciones Diferenciales. Ya lo hemos visto en la Guía 2, cuando hablamos de Combinación Lineal para Ecuaciones Diferenciales Homogéneas.

Método de separación de variables

Utilizaremos el método de separación de variables para Ecuaciones Diferenciales Parciales. Este método:

I) Busca todas las soluciones expresables como un producto de funciones cada una de una variable,

II) Forma una combinación lineal de ellas (Guía 2)

III) Aplica Condiciones de Frontera y Condiciones Iniciales.

IV) Obtiene una Serie de Fourier.

Por ejemplo, tanto en la ecuación del calor como en la ecuación de onda, suponemos que la función u puede escribirse como el producto:

$$u(x,t) = \overbrace{X(x)}^{\text{no depende de } t} \cdot \underbrace{T(t)}_{\text{no depende de } x}$$

Esta separación permite calcular las derivadas parciales de manera sencilla, ya que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{(¿Porqué?)}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

Para la EDP del potencial en el plano xy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En las derivadas vemos que la función u depende de x y de y. La separación vendrá dada por el producto de una función de x por una función de y:

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

y las derivadas parciales quedarán:

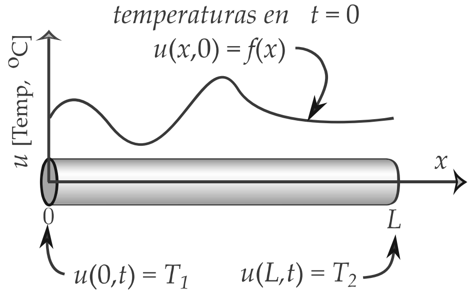
$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Veamos el método con un ejemplo.

Ejemplo ⥁

Ecuación del calor en una barra



Consideremos una barra de longitud $L = \pi$ sobre el eje x. Los extremos de la barra se mantienen a temperatura $T = 0$. Llamaremos $u(x,t)$ a la temperatura de la barra en la posición x y el instante t.

Supondremos que en el instante inicial, la temperatura de la barra esta determinada por la función $f(x) = u(x,0)$. Veamos, por simplicidad, el caso en que la difusividad térmica es $\alpha = 1$.

Entonces la ecuación del calor queda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con las condiciones

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \text{Condiciones de Frontera}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{Condiciones Iniciales}$$

Aplicando el método de separación de variables, supongamos que la función $u = X \cdot T$, con lo cual reemplazando las derivadas tenemos

$$X \cdot T' = X'' \cdot T$$
$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$

Como X es sólo una función de x y T es sólo una función de t, la última ecuación establece que el cociente debe ser una constante (¿Porqué? Ayuda en el margen). con lo cual

Mirando el lado izquierdo del igual, $\frac{T'}{T}$ no depende de x, y mirando el lado derecho del igual $\frac{X''}{X}$ no depende de t, por lo tanto ninguno de los dos puede depender ni de x ni de t.

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Donde asumimos que λ es mayor que cero (dado lo que se verá a continuación). Obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{T'}{T} = -\lambda$$

cuya solución es $T(t) = ce^{-\lambda t}$ (¿Porqué?) y la ecuación

Si λ fuera negativo, la función $e^{-\lambda t}$ sería una exponencial creciente... y ¿eso podría ocurrir con la temperatura en función del tiempo?

$$\frac{X''}{X} = -\lambda$$

cuya solución general es

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

Entonces la solución $u = X \cdot T$ será:

$$u(x,t) = e^{-\lambda t}[A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)]$$

Para determinar los coeficientes, planteamos:

$$u(0,t) = e^{-\lambda t}[A\cos(\sqrt{\lambda}0) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}0)] = e^{-\lambda t}A = 0$$

con lo que tenemos que $A = 0$

$$u(\pi,t) = e^{-\lambda t}B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

donde, la única posibilidad es que $\sqrt{\lambda} = n$, con n entero (¿Porqué?). A partir de estas condiciones, obtenemos que

$$u_n(x,t) = B_n e^{-n^2 t}\,\mathrm{sen}(nx)$$

donde agregamos el subíndice n dado que los coeficientes B pueden depender de n.

Ver principio de superposición, pág. 11

Una suma de soluciones también será solución, por lo que la suma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ debe ser solución. O sea:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t}\,\mathrm{sen}(nx) \qquad \text{[Solución General]}$$

Sólo falta determinar los coeficientes B_n. Para ello, apliquemos a la Solución General, la condición inicial $u(x,0) = f(x)$:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 0}\,\mathrm{sen}(nx)$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(nx)$$

Los números B_n son así los coeficientes de Fourier de la serie de senos de la función $f(x)$ considerada impar entre $[-\pi,\pi]$ es decir,

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx$$

Con la función $f(x)$ obtendremos los coeficientes B_n y así la solución del problema. Resolvamos un caso particular a continuación.

Caso de Temperatura Inicial constante

Consideremos la temperatura inicial constante e igual a la unidad: $u(x,0) = f(x) = 1$. En este caso queda $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{sen}(nx)dx$, o sea iguales a los coeficientes b_k ya calculados en la página 9.

En el documento `http://www.geogebra.org/m/nH3rRGPM` hay una

También estará subido al grupo de Facebook, con el nombre: `SolucionEcCalor1DTcte.ggb` implementación de esa solución. Descarguen ese documento y resuelvan las 4 preguntas al pie. ■

Ejercitación ⊞

1. Para la ecuación de la cuerda vibrante (item 2 de la página 10), plantea completamente el método de separación de variables.

"Plantear completamente" quiere decir obtener la Solución General

2. Para la ecuación del potencial (item 3, pág. 10), plantea completamente el método de separación de variables.
3. Resuelve la siguiente ecuación con las condiciones dadas, en una barra de longitud $L = \pi$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x) \end{cases}$$

4. Para cada uno de los dos problemas siguientes responde:
   i) ¿Qué tipo de Ecuación es (Calor, Cuerda o Potencial)? ¿Cómo lo supo?
   ii) ¿Podés distinguir cuáles son las condiciones de borde de las condiciones que son iniciales?
   iii) Estos problemas tienen una condición más que los anteriores, ¿es condición inicial o de frontera?
   iv) ¿Porqué hay una condición más? ¿Qué relación tiene esto con las Ecuaciones diferenciales de 2do orden (lo vimos en guía 2)?
   v) Resuelve el problema *a)* y el problema *b)*.
   vi) Modificá el documento `SolucionEcCalor1DTcte.ggb` (que mostraba el ejemplo del calor) para mostrar la solución del problema *a)*.
   [Nota: Ambos problemas refieren a una cuerda de longitud $L = \pi$, colocada a lo largo del eje x, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$]

$$a) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0{,}01\operatorname{sen}(3x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 10\operatorname{sen}(2x) \end{cases}$$