1. Análisis de variable compleja

1.1. Números complejos

1.1.1. Unidad Imaginaria

Definiremos a la unidad imaginaria como $\sqrt{-1}$ y la denotaremos con la letra i.
A partir de la definición y utilizando propiedades de la potenciación tal como la conocemos en el campo de los números reales es fácil observar que:

$$i^0 = (\sqrt{-1})^0 = 1;$$
$$i^1 = \sqrt{-1} = i;$$
$$i^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1;$$
$$i^3 = ii^2 = i(-1) = -i;$$
$$....$$

1.1.2. Definición e Interpretación geométrica

Un ***número complejo*** se define como $z = x + iy$, donde x y ϵ $\mathbb{R}$.

Llamamos ***parte real de z*** a la primera componente y ***parte imaginaria*** a la segunda, esto es:

$$\text{x}=Re(z) \qquad \wedge \qquad \text{y}=Im(z)$$

Aquellos z en los cuales la ***parte imaginaria es cero***, constituyen el conjunto de los números reales, mientras que si la ***parte real es cero***, diremos que se trata de imaginarios puros. Matemáticamente esto es:

$$Re(z) = 0 \implies \textbf{\textit{real puro}} \quad \wedge \quad Img(z) = 0 \implies \textbf{\textit{imaginario puro}}$$

A partir de su definición, un número complejo esta caracterizado por dos números reales que pueden ser representados en el plano coordenado, ubicando a la parte *Re(z)* en el eje de las abcisas y a la paste *Im(z)* en el eje de las ordenadas.

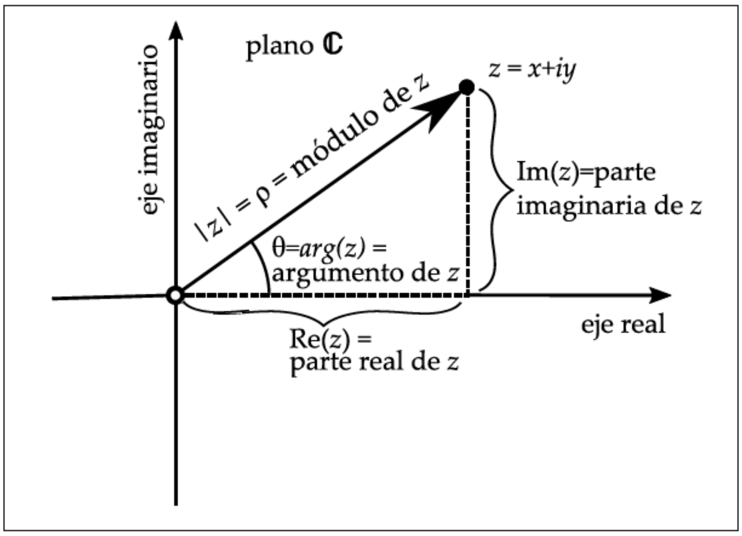


Figura 1: Representación del número complejo z en forma cartesiana. Definición de módulo y argumento.

De esta manera cada complejo posee una representación $z \Rightarrow (x, y)$ y puede ser graficado y ubicado. Más aún, dado un complejo z éste puede ser perfectamente caracterizado por la distancia al origen (0,0) y el ángulo que forma con el eje x.

Esto define un radio $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (al que llamaremos ***módulo de z*** y denotaremos $\mid z \mid$) y un ángulo θ tal que $\mathrm{tg}(\theta) = \frac{y}{x}$ (al que llamaremos ***argumento de z)***

Con esto, tenemos:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

A partir de estas definiciones podemos representar los complejos de diferentes maneras:

- **Forma binómica:** $z = x + iy$

- **Forma polar:** $z = z_\theta$

- **Forma trigonométrica:** $z = \rho\cos(\theta) + i\rho\,\mathrm{sen}(\theta) = \rho(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$

  A partir de la forma trigonométrica, se define:

- **Forma exponencial:** $z =\mid z \mid e^{i\theta}$

  donde $e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)$ es conocida como **Formula de Euler**

Esta notación es particularmente ventajosa a la hora de hacer operaciones tales como productos, potencias y raíces, ya que la función exponencial satisface las propiedades definidas para números reales.

Opuesto:

Se llama ***opuesto de un número complejo*** z al número complejo $-z$ que se obtiene de cambiar el signo a las unidad real e imaginaria, es decir:

$$z = x + iy \qquad \Longrightarrow \qquad -z = -x - iy$$

Graficamente el opuesto de un número es simétrico respecto del origen.

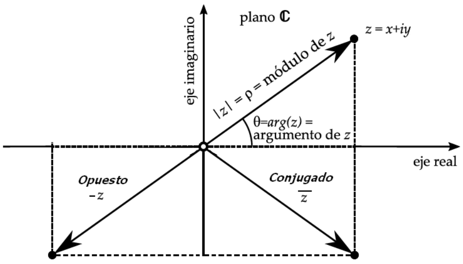


Figura 2: Opuesto y conjugado de z

Conjugado:

Se llama ***conjugado de un número complejo*** z al número complejo $\overline{z}$ que se obtiene de cambiar el signo a la unidad imaginaria, es decir:

$$z = x + iy \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{z} = x - iy$$

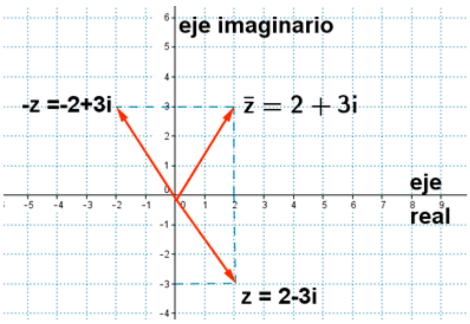


Figura 3: Opuesto y conjugado de z

Graficamente representa una simetría respecto al eje de abscisas.

Ahora bien, teniendo definido el conjunto de los números complejos (al que denotaremos $\mathbb{C}$), nos resta definir sus operaciones:

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z_3 = x_3 + iy_3$, con $x_i \wedge y_i \in \mathbb{R}$

- *Igualdad de complejos:* $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$
- *Suma (resta) de complejos:* $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- *Producto de complejos:* $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

Actividades propuestas:
Siendo $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z_3 = x_3 + iy_3$, con $x_i \wedge y_i \in \mathbb{R}$:

1. Demostrar las siguientes propiedades de la suma:

    a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ Propiedad conmutativa.

    b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ Propiedad asociativa.

2. Demostrar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:
   $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

1.2. Interpretación geométrica de la suma: Reglas del Paralelográmo y la Poligonal

Tal como hemos definido a los números complejos, es natural asociar a $z = x + iy$ con un punto en el plano de coordenadas rectangulares $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$. Así puede pensarse a z como un *vector*, y al plano como el *plano complejo*.

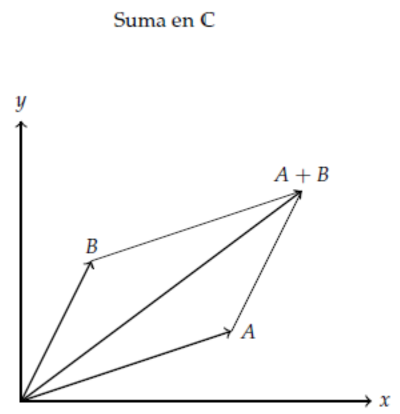


Figura 4: Regla del paralelográmo

De acuerdo a nuestras definiciones de suma (resta) la misma se corresponde en la representación planar con la conocida " regla del paralelogramo ", donde el complejo $z_1 + z_2$ se encuentra en el mismo plano que z_1 y z_2.

La construcción del paralelográmo se efectua graficando ambos vectores, z_1 y z_2 en el *plano complejo*. Luego se construyen las paralelas de ambos vectores, y la intersección de las mismas determina la suma.

Para el caso de la " regla de la poligonal ", los vectores z_1 y z_2 en el *plano complejo* se grafican, uno a continuación del otro. Luego la suma queda determinada a partir de unir el origen de coordenadas, con el extremo del último vector representado.

No podemos encontrar analogía en el producto como lo hemos definido ni con el producto punto ni con el producto cruz definidos en $\mathbb{R}^2$ ya que ninguno de ellos se mantiene en el plano mientras que $z_1 z_2$ sigue perteneciendo al plano complejo. Más adelante discutiremos el significado geométrico del producto.

Las notaciones polar y trigonometricas resultan ser solo la expresión de la transformación del vector z de coordenadas rectangulares a polares.

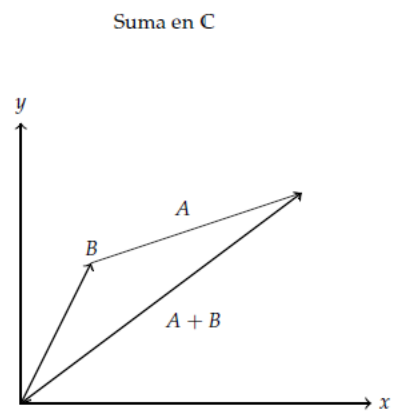


Figura 5: Regla del paralelográmo

El *producto* tal como lo hemos definido, pero ahora expresado en coordenadas polares resulta:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2((\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin\theta_2))^1$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

o, escribiendo en forma exponencial:

$$z_1 z_2 =| z_1 || z_2 | e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

De manera que el nuevo número complejo $z_3 = z_1 z_2$ ***tendrá como módulo el producto de los módulos de los números que lo originan y como argumento la suma de los argumentos de los mismos***.

Actividades propuestas Realice los siguientes productos: 1. $(2 + 2i)i$ 2. $(3 + 0i)i$ 3. $(2 + 2i)(2 + 0i)$ 4. $(x + yi)i$

Al escribir a los números complejos como binomios resulta natural utilizar el binomio de Newton para definir la ***potenciación***, Siendo $z = a + ib \Rightarrow$

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}(ib)^k,\ k \in \mathbb{Z}$$

La expresión correspondiente en polares resulta, por un lado, más "fácil" de utilizar y por otro, resulta más evidente la interpretación geométrica de la potenciación.

[1] Aquí hemos utilizado las identidades trigonométricas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos; esto es:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Si un complejo z se expresa en forma polar y tiene módulo r y $arg(z) = \theta$, entonces, el complejo $w = z^2$ tendrá módulo $w = r^2$ y $arg(w) = 2arg(z) = 2\theta + 2k\pi$ ya que:

$$z^2 = r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \qquad \Rightarrow \qquad z^2 = [(cos^2\theta - \sin^2\theta) + i2\cos\theta\sin\theta]^2$$

$$\Rightarrow |w| = |z^2| = r^2 \text{ y } arg(w) = arg(z^2) = 2\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

de la misma manera que hallamos el cuadrado de un número complejo, podemos encontrar cualquier otra potencia (el método de demostración pertinente es el que llamamos de Inducción Completa) en particular, para $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)] \Rightarrow |z^n| = |z|^n \wedge arg(z^n) = n \cdot arg(z)$$

Habiendo establecido la ***potenciación*** en forma polar, en las mismas condiciones definiremos su operación inversa, la ***radicación***, observando que si queremos hallar un complejo $\sqrt{z}$ debemos encontrar el complejo w tal que $w^2 = z$.

Sean $\sqrt{z} = w$; $z = r(cos\theta + isen\theta)$ y $w = R(cos\psi + isen\psi)$. Debemos hallar $|w| = R$ y $arg(w) = \psi$ tal que verifiquen $w^2 = z$

Planteamos la igualdad:

$$w^2 = z \quad \Rightarrow \quad R^2[cos(2\psi)+isen(2\psi)] = r(cos\theta+isen\theta) \quad \Rightarrow \quad R^2 = r \wedge 2\psi = \theta+2k\pi \quad \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{z} \quad \wedge \quad \psi = \tfrac{\theta+2k\pi}{2}, \quad \text{con } k = 0{,}1$$

luego

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}[cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{2}) + isen(\tfrac{\theta+2k\pi}{2})], \quad \text{con } k = 0{,}1$$

[2] Donde hemos vuelto a utilizar las identidades trigonométricas de seno y coseno de la suma de ángulos en el caso en que $\alpha = \beta$

Análogamente a la potencia, por inducción, puede demostrarse que:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}[cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) + isen(\tfrac{\theta+2k\pi}{n})], \qquad \text{con } k = 0 \cdots (n-1)$$

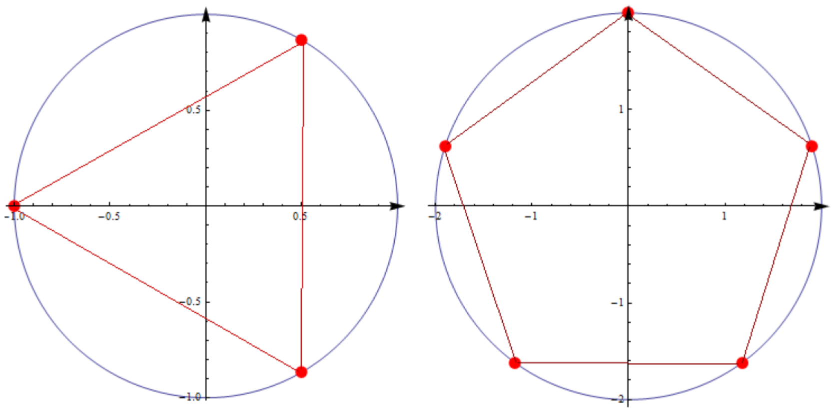
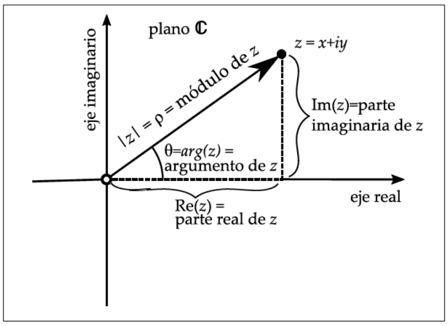


Figura 6: La primera gráfica representa la raices de la ecuación dada por $z^3 = -1$. La segunda gráfica se corresponde a las raices de la ecuación $z^5 = 32i$

Actividades propuestas:

1. Calcular z^3, $\sqrt{z}$, $\sqrt[3]{z}$ y $\sqrt[4]{z^3}$ siendo $z = 8[cos(\pi/5) + isen(\pi/5)]$

RESUMIENDO:



Nombre	Significado	Símbolo
Cantidades:		
1. **módulo de** z	Longitud de z	$\|z\| = \rho$
2. **argumento de** z	ángulo de z	$arg(z) = \theta$
3. **parte real de** z	coordenada x de z	$\mathrm{Re}(z) = x$
4. **parte imaginaria de** z	coordenada y de z	$\mathrm{Im}(z) = y$
5. **conjugado de** z	reflexión de z en el eje real	z
Además:		
número imaginario	un múltiplo real de i	
eje imaginario	el conjunto de los imaginarios	
eje real	el conjunto de los números reales	$\mathbb{R}$

- **Forma binómica:** $z = x + iy$
- **Forma polar:** $z = z_\theta$
- **Forma trigonométrica:** $z = \rho(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$
- **Forma exponencial:** $z = \mid z \mid e^{i\theta}$

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos complejos cuales quiera, se definen las operaciones en este campo de la siguiente manera:

1. **Suma (resta) de complejos:** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. **Multiplicación de complejos:** $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

3. **División:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2)}$

4. **Potenciación:**: $z^n = \rho^n[cos(\theta n) + isen(\theta n)]$

5. **Radicación:** $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}[cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$,con $k = 0 \cdots (n-1)$

Actividades:

1. Sean $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 1 - i$. Calcular.

    a) $z_1 + z_2 - z_3$
    b) $z_1 \cdot (z_2 + z_3)$
    c) $|z_1| \cdot |z_3|$
    d) $(z_1 \cdot z_2)^2$

2. Escribe los complejos de la actividad 1. en forma polar y trigonométrica.

3. Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$

    a) $(1 + i)^3$
    b) $i^3 + i^{17}$
    c) $(2 + 3i)(3 - 4i)^{-1}$
    d) $\frac{1}{2}(1 + i)(1 + i^{-8})^{-2}$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

    a) $z + 2 = i$
    b) $\sqrt{z} = i$
    c) $2z + 3 - i^3 = 0$

5. Si z es un número complejo, demostrar que:

    a) $Re(iz) = -Im(z)$,
    b) $Re(z) = Im(iz)$,
    c) $Re(z) \leq |z|$,
    d) $Im(z) \leq |z|$,
    e) $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$,
    f) $(\bar{z})^2 = \bar{z^2}$,
    g) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,
    h) $arg(\bar{z}) = -arg(z)$.

6. Dado un complejo $z = x + iy$ no nulo, hallar su inverso multiplicativo.

7. Calcular:

    a) $(\sqrt{3} + i)^{15}$,
    b) $(1 - i)^{10}$,
    c) $i^{1/2}$,
    d) $(-27)^{1/3}$

8. Hallar las soluciones a las siguientes ecuaciones:

    a) $z^2 + z + 1 = 0$

b) $z^3 - 1 = 0$

c) $z^4 = -1$

d) $(z+1)^5 = z^5$

e) $z^2 - 2iz - 2 = 0$

f) $z^3 - 1 = i\sqrt{3}$

9. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes relaciones:

   a) $Re(z) = 2$

   b) $-1 \leq Im(z) \leq 3$

   c) $\bar{z} = z$

   d) $z^2 = \bar{z}$

   e) $|z - 2| > 1$

   f) $\pi/4 < Arg(z) < \pi \wedge |z| > 2$

   g) $|z| < |z - 2i|$

   h) $|z| > Im(z)$

   i) $|z| \leq |z - 1| \leq |z - i|$

   j) $|z - i| \geq |z + 2|$

   k) $|z| = Re(z)$

   l) $z \cdot \bar{z} = z - \bar{z}$

10. Represente los siguientes subconjuntos del plano complejo:

    a) $C_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 2\}$

    b) $C_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 2 + i| \leq 2\}$

    c) $C_3 = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) = 1\}$

    d) $C_4 = \{z \in \mathbb{C}; |Re(z)| \leq 2\}$

    e) $C_5 = \{z \in \mathbb{C}; 1 \leq |z - 1 - i| \leq 2 \wedge arg(z) = \pi/4\}$

    f) $C_6 = \{z \in \mathbb{C}; 2 \leq |z| \leq 3 \wedge \pi/6 \leq arg(z) \leq 7\pi/6\}$

1.3. Funciones analíticas

Funciones de variable compleja

Definiciones:
Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función compleja de variable compleja*. Esto es, que a todo número complejo perteneciente al conjunto D le corresponde por f un único número complejo perteneciente al conjunto $\mathbb{C}$. D es el llamado dominio de definición. Lo que es equivalente a escribir:

$$f(z) = w, \text{ con } z \in D \wedge w \in \mathbb{C}$$

Siendo que z y w son complejos, pueden ser expresados en forma binómica, si $z = x + iy$ y $w = u + iv$ la ecuación que define la función puede escribirse como:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

lo que nos lleva nuevamente al estudio de funciones reales, ya que por definición, las partes real e imaginarias de un número complejo son números reales. De manera que ahora tenemos dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que son funciones reales de dos variables[3].

Por ejemplo: Sea $f(z) = z^2$, con $z = x + iy$ y $w = u(x; y) + iv(x; y)$ definidas en el párrafo anterior resulta:

$$w = (x + iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2ixy = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

con lo cual:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x, y) = 2xy$$

También podemos representar las partes real e imaginaria en coordenadas polares (ρ,θ) de la forma:

$$w = z^2 = f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$$

Volviendo a nuestro ejemplo:

$$w = z^2 = (\rho e^{i\theta})^2 = \rho^2 \cdot e^{2i\theta} = \rho cos(\theta) + i\rho\,\mathrm{sen}(\theta)$$

con lo cual:

$$u(\rho, \theta) = \rho cos(\theta) \text{ y } v(\rho, \theta) = \rho\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Para tener en cuenta:

1. Las funciones no tienen por qué tomar valores complejas, puede que sólo tome valores reales -esto es, cuando $v = 0$ en todo el dominio de definición-. Un ejemplo es $f(z) = |z|$.

2. También es posibles que las relaciones sean multivaluadas; es el caso de $f(z) = arg(z)$. En estos casos hay que especificar la determinación para saber cómo es la función.

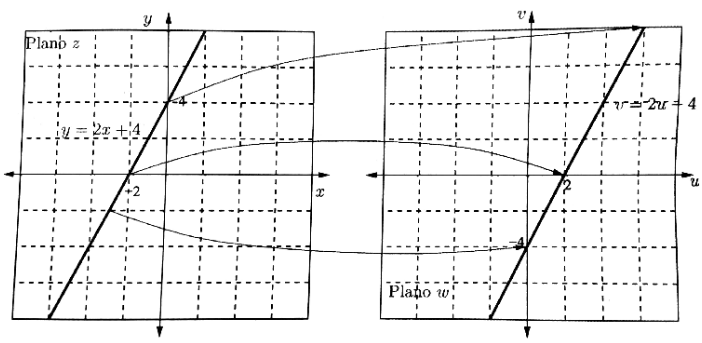
[3]Matemáticamente hablando la topología de $\mathbb{C}$ y la de $\mathbb{R}^2$ coinciden -esto puede entenderse pensando que ambos conjuntos de números describen el "mismo"plano-. Esto implica que los conceptos de límite y continuidad en $\mathbb{C}$ se "hereden"de $\mathbb{R}^2$ y que habitualmente pasemos de un conjunto a otro sin demasiadas explicaciones

Si bien existe cierta analogía entre las funciones complejas de valores complejas y las funciones reales con dominio en $\mathbb{R}^2$, la representación de las mismas es completamente distinta. Sabemos que para funciones $f(x,y) : \omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la *gráfica* corresponde al conjunto de puntos $(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$, en el caso de las $f(z) = D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tanto el dominio como la imagen de la función constituyen subconjuntos del plano complejo.

Veamos un ejemplo, sea $f(z) = 2z + 6$. El Dominio de $f(z)$ incluye a todos los complejos, pero vamos a considerar un subconjunto del dominio, esto es:

$$S = \{z \in \mathbb{C}; z = (x,y), x, y \in \mathbb{R}; y = 2x + 4\}$$

Como $w = u+iv = f(z) = 2z+6 = 2(x+iy)+6 = (2x+6)+i(2y) \Rightarrow u(x,y) = 2x+6$ además $v(x,y) = 2y$ de donde podemos despejar: $x = \frac{u-6}{2}$ de dónde $v(x,y) = 2y = 2(2x+4) \Rightarrow v = 2u - 4$ De manera que una recta en el plano dado por z donde viven los *(x,y)* se transforma



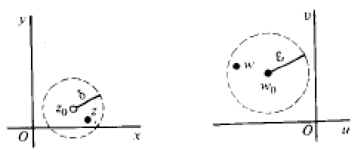
mediante $f(z)$ en otra recta pero en el plano w donde viven los *(u,v)*.

1.3.1. Límites y continuidad

Límites: Diremos que $f : D \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene límite[4]:

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = w,$$

si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.



$|f(z) - w_0| < \varepsilon$ **siempre que** $0 < |z - z_0| < \delta.$

[4]Los conceptos de límite y continuidad de las funciones se heredan directamente de $\mathbb{R}^2$, de ahí la definición.

Resulta sencillo demostrar que:

$$\lim_{z\to z_o} f(z) = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{z\longrightarrow z_0} Ref(z) = Re\,(w) \\ \lim\limits_{z\longrightarrow z_0} Imf(z) = Im\,(w) \end{cases}$$

Usaremos este resultado como nuestra **DEFINICION**. Esto es: dada una función $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ decimos que: $\lim\limits_{z\to z_o} f(z) = L_1 + i\,L_2 \quad$ *si y sólo si* $\quad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \\ \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} v(x,y) = L_2 \end{cases}$

Resulta evidente que las propiedades algebraicas de los límites se trasladan sin cambios, esto es, suma, producto, cociente, etc. se comportan tal como lo hacen en $\mathbb{R}^2$.

1.3.2. Continuidad:

Diremos que $f : D \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in D$ *si y sólo si*

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Dado que la continuidad deriva de las propiedades de los límites, la sumas, productos, cocientes o composiciones de funciones continuas resultan ser funciones continuas. También resultan serlo $\bar{z}$, $Re(z)$, $Im(z)$ y $|z|$ en todo el plano complejo.

1.3.3. Derivabilidad

Sea $f : D \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja y $z_0 \in D$. La derivada de $f(z)$ en z_0 se define por la ecuación:

$$f'(z_0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \tfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

Donde no debemos perder de vista que h es un número complejo.
Veamos un ejemplo: Sea $f(z) = z^2$ y calculemos su derivada en algún punto genérico de su dominio:

$$f'(z_0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \tfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \tfrac{(z_0+h)^2-z_0^2}{h} \Rightarrow$$

$$f'(z_0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \tfrac{z_0^2+2z_0h+h^2-z_0^2}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \tfrac{2z_0h+h^2}{h} \Rightarrow$$

$$f'(z_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \tfrac{h(2z_0+h)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} (hh^{-1})(2z_0 + h^2) \Rightarrow$$

$$f'(z_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} 2z_0 + h = 2z_0$$

En este ejemplo parece oculto el hecho de tener una función compleja ya que hemos tratado al límite tal como si hubieramos tenido variables reales. El concepto de derivada, al igual que en el caso de varias variables, establece la existencia del límite que da lugar a la derivada cuando h, que es un complejo arbitrario no nulo, se acerca al 0 por cualquiera de los infinitos caminos posibles.

A partir del ejemplo anterior: Podría inferir el valor de la derivada de $f(z) = z^n$?

Siendo que la definición de derivada deviene de la de límite, se cumplen las mismas propiedades que en el caso real, esto es: si *f,g* son funciones derivables en z_0 y α y $\beta \in \mathbb{C}$

- **Linealidad:** $\alpha f + \beta g$ es derivable y $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$
- **Regla de Leibnitz:** $f \cdot g$ es derivable en z_0 y $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- **Regla del cociente:** si $g'(z_0) \neq 0$, f/g es derivable y $\frac{f}{g}'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$
- **Regla de la cadena:** Si f es derivable en z_0 y g lo es en $f(z_0)$ entonces $g \circ f$ es derivable y $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

Para un estudio más general de las derivadas *(que no implica calcular límites)* vamos a definir con más precisión y dar condiciones precisas de derivabilidad, llamadas condiciones de *Cauchy-Riemann.*

1.3.4. Condiciones de *Cauchy-Riemann*

Vamos a calcular la derivada de la función $f(z)$ en el punto z_0, a partir de la definición:

$$f'(z_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Si consideramos $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, $h = h_1 + i\,h_2$ con $h_1\,h_2 \in \mathbb{R}$ podemos escribir:

$$z_0 + h = x_0 + h_1 + i(y_0 + h_2)$$

Entonces:

$$f(z_0 + h) = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + i\,v(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$$

Para calcular la derivada debemos utilizar:

$$f(z_0+h) - f(z_0) = u(x_0+h_1, y_0+h_2) + i\,v(x_0+h_1, y_0+h_2) - [u(x_0, y_0) + i\,v(x_0, y_0)] \quad \Rightarrow$$

$$f(z_0+h)-f(z_0)=[u(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)]+i[v(x_0+h_1,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)]$$

Con lo cual:

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{u(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)}{h_1+h_2}+i\frac{v(x_0+i\,h_1,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)}{h_1+i\,h_2}$$

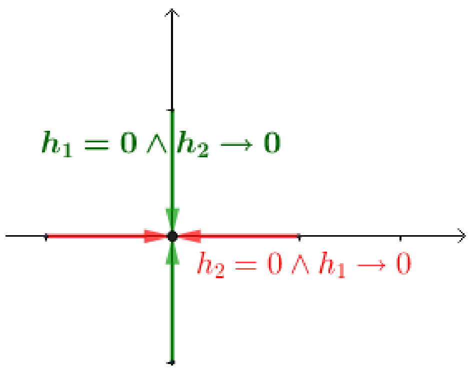
es el cociente incremental sobre el cual debemos tomar el límite para $(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)$. Asumamos que el límite existe. Si es así, existe y es el mismo para todo camino que lleve a h al origen. En particular, sinos acercamos al origen por un segmento horizontal ($h_2=0$) o vertical ($h_1=0$).

Si nos acercamos por un camino horizontal $h_2=0$ tendremos:

$$\lim_{h_1\longrightarrow 0}[\frac{u(x_0+h_1,y_0)-u(x_0,y_0)}{h_1}+i\frac{v(x_0,h_1,y_0)-v(x_0,y_0)}{h_1}]$$

que, recordando la definición de derivada resulta en:

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}$$



Si ahora consideramos un camino vertical $h_1=0$ resulta:

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h_2\longrightarrow 0}[\frac{u(x_0,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)}{h_2}+i\frac{v(x_0,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)}{h_2}]$$

con lo cual:

$$f'(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Como hemos considerado que el limite existe, este debe tener el mismo valor independientemente del camino que tomemos, con lo cual:

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\tfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\tfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\tfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Igualando parte real e imaginaria de la igualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\[2ex]\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\end{cases}$$

llamadas ***Condiciones de Cauchy-Riemann (CR)***

Analicemos el procedimiento seguido: Consideramos que la derivada existía lo que, por la definición de la derivada, implica la existencia del límite. Que el límite exista quiere decir que el valor del mismo será el mismo independientemente del camino de acercamiento que tomemos. Por ello, consideramos dos caminos distintos -en este caso, un acercamiento horizontal y otro vertical- e igualamos los resultados obtenidos, que corresponden a números complejos. Como la igualdad entre complejos implica que sus partes real e imaginarias coinciden obtenemos las igualdades que llamamos Condiciones de Cauchy-Riemman.
De manera que si la derivada **no** existiera no hubieramos podido hallar las igualdades. Esto convierte a las igualdades de C-R en una **CONDICION NECESARIA**. Esto es si la derivada existen entonces se cumple C-R.
Esto se expresa en el teorema siguiente.

Teorema -Condición **necesaria** para existencia de la derivada-: Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ derivable en $z_0 = (x_0, y_0) \Rightarrow u(x,y) \wedge v(x,y)$ satisfacen las Condiciones de Cauchy-Riemman y ademàs:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + +i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

La demostración de este teorema es, precisamente, el procedimiento que realizamos anteriormente.

Si a las hipótesis del teorema anterior le agregamos la continuidad de las derivadas de las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ podemos enunciar:

Teorema: Condición necesaria y suficiente para la existencia de la derivada [5]

Si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ poseen derivadas continuas en $z_0 = x_0 + i\,y_0$ y verifican C-R en dicho punto $\Rightarrow f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es derivable en z_0.

Esto implica que utilizando este teorema, podremos saber si una función compleja es derivable y cual es su dominio de derivabilidad. Veamoslo en el siguiente ejemplo:

Sea $f(z) = x^2y + i\,(y^2 - x) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2y \\ v(x,y) = y^2 - x \end{cases}$

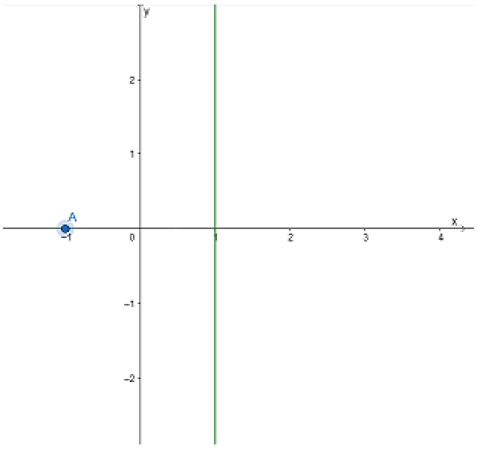
Para averiguar dónde es derivable, planteamos las condiciones de C-R:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 2y \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Dado que las derivadas parciales son continuas, las condiciones de C-R nos llevan a un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas que debemos resolver para hallar en que puntos (x,y) la función es derivable y cuál es el valor de su derivada.

[5] La demostración de este teorema requiere procedimientos para tratar límites en dos dimensiones que exceden a lo tratado en este curso o anteriores.

$$\left\{\begin{array}{l} 2xy = 2y \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y(x-1) = 0 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \vee x = 1 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$



Analizando los resultados[6], observamos que:

- Si $x = 1$ ambas ecuaciones se satisfacen $\forall$ valor de $y \Rightarrow$ tenemos como solución a los pares $(1, y)$
- Si $x = -1$ la única forma de satisfacer la primer ecuación es que $y = 0 \Rightarrow$ la solución corresponde sólo al punto $(-1, 0)$

Luego el dominio de derivabilidad de $f(z)$ es:

$$D_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = (1, y) \vee (x, y) = (-1, 0)\}$$

y el valor de la derivada -según el teorema de existencia- es $\left\{\begin{array}{l} f`(1 + iy) = 2y + i \\ f'(-1 + 0i) = i \end{array}\right.$

En este ejemplo nos encontramos con una situación usual cuando tratamos con variables complejas pero no tan habitual en reales, donde estamos habituados a trabajar, que es la existencia de un dominio de derivabilidad muy reducido respecto del dominio de existencia y/o continuidad de una función. En este caso, la función sólo tiene derivada sobre una recta y en un punto aislado. Ninguno de los puntos donde la función es derivable está rodeado"por otros puntos en los cuales la función sea derivable (existirá la derivada segunda en estos puntos?)

La derivada de una función compleja es, cuando existe, una función compleja. De manera que calcular la derivada segunda de, por ejemplo, $f(z)$ es equivalente a calcular la derivada de $g(z) = f'(z)$ Recordemos nuestra definición de derivada en un punto: se trata del límite del cociente incremental mientras nos acercamos al punto dado. Para que el límite exista debe ser independiente del camino elegido para acercarnos al punto.
Volvamos a nuestro ejemplo: $g(z) = f'(z) = 2y + i$ es una función de z, con dominio $D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = (1, y)$, será derivable en algún punto?

[6] Recordemos que resolver un sistema de ecuaciones implica hallar el conjunto de puntos que satisfacen ambas ecuaciones a la vez

1.3.5. Funciones Analíticas

Cuando $f(z)$ sea derivable en z_0 y en *todo entorno* de z_0 diremos que $f(z)$ es analítica en z_0. Si $f(z)$ es analítica en todo $z_0 \in$ a su dominio, diremos que $f(z)$ es analítica.

Para entender esta definición vamos a definir lo que llamamos **entorno**: llamamos entorno de radio r del complejo z_0 al conjunto $0 < |z - z_0| < r$ que representa un círculo abierto centrado en z_0.

De manera que nuestra definición indica
que para que una función sea analítica
en un punto debe ser derivable en ese punto
y en *todos los puntos interiores*
a *todo círculo abierto* centrado en el punto.

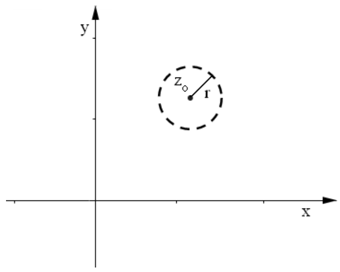


Figura 7: Entorno reducido de centro z_0 y radio r

Volviendo a nuestro ejemplo anterior, observemos la gráfica del dominio de derivabilidad de nuestra $f(z)$ y ubiquemonos en cualquier punto donde la función es derivable. Si generamos un entorno del punto, en los puntos interiores a la circunferencia $f(z)$ es derivable?. Así sabemos que la función no es analítica.

El estudio de las funciones analíticas constituye una parte importante del análisis de variable compleja, por varias razones. En particular por un resultado muy importante (que no demostraremos en este curso) que es el hecho que *una función analítica admite derivada de todo orden y todas sus derivadas son analíticas*[7].

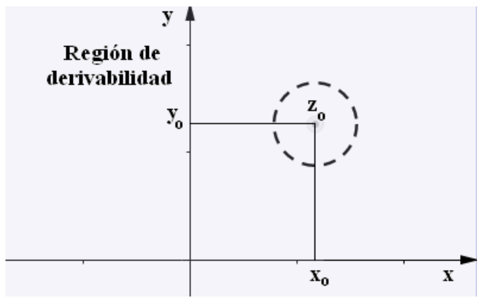


Figura 8: Este gráfico muestra la región de derivabilidad de una función y como es posible definir un entorno a un punto z_0 en la misma de modo que las derivadas existen en todo punto del entorno.

[7] No es tan fácil encontrar por inspección funciones analíticas -más allá de las funciones elementales- siendo que es deseable trabajar con funciones infinitamente derivables, por ejemplo, para desarrollar funciones en series.

Actividades:

1. Sean $f(z) = z(2-z)$. Hallar los valores de $w = f(z)$ para:

   a) $z = 1 + i$

   b) $z = 2 - 2i$

2. Considere la función $w = f(z) = \frac{2z+1}{3z-2}$, $z \neq 2/3$.

   a) Encuentre $f(0)$, $f(i)$, $f(1+i)$

   b) Encuentre los valores de z tales que $f(z = i)$ y $f(z) = 2 - 3i$

   c) Encuentre los valores de z para los cuales $f(z) = z$. Esos puntos son llamados invariantes o puntos fijos de la transformación. Podría interpretar geométricamente el por qué?

3. Un cuadrado C en el plano complejo tiene a (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1) como vértices. Determinar la región en el plano $w = f(z)$ en la cual C es transformado por:

   a) $w = z^2$

   b) $w = \frac{1}{z+1}$

4. Separe las siguientes funciones en parte real y parte imaginaria (es decir, llevarlas a la forma $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$):

   a) $f(z) = z^2 - 3iz$,

   b) $f(z) = z + \frac{1}{z}$,

   c) $f(z) = \sqrt{z}$,

5. Usando la definición, calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f(z) = 3z^2 + 5z + 2i$ en $z = 2$

   b) $f(z) = \frac{z+2i}{2z-1}$ en $z = i$

6. Calcular usando la definición, la derivada de:

   a) $f_1(z) = Im(z)$

   b) $f_2(z) = z \cdot Re(z)$

   c) $f_3(z) = |z|^2$

   d) $f_4(z) = \bar{z}$

7. Si $f(z)$ es derivable, calcular la derivada de:

   a) $w = z \cdot (f(z))^2$

   b) $w = f(z^3) + 2f(3z)$

8. Si $f(z)$ es continua en z_0 y $g(z) = z^2 - z_0^2$, demostrar que $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ es derivable en z_0 y verifica que $h'(z_0) = 2z_0 f(z_0)$

9. Hallar y graficar el dominio de derivabilidad y de analiticidad de las siguientes funciones y calcular $f'(z)$ en los puntos donde exista:

   a) $f_1(z) = 3xy^2 + i(y^3 + x^3)$
   b) $f_2(z) = -2yx^2 + 6x^2 + i(2x^2 + 6yx^2)$

10. Si $f(z)$ y $|f(z)|$ son ambas analíticas en $D \Rightarrow f(z)$ es una función constante en D.

11. Si $g(z)$ y $g(\bar{z})$ son ambas analíticas $\Rightarrow g(z)$es constante.

12. Decidir, para cada caso, dónde es derivable y dónde es analítica la función $f(z)$ que verifica las condiciones de C-R en:

   a) $\{z \in \mathbb{C}/Re(z) = 1\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C}/Re(z) < Im(z)\}$
   c) $\{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C}/|z| > 1\}$

   Halle los dominios de derivabilidad y analiticidad de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = x^2 + iy^2$
   b) $f(z) = x^2 + +2x - iy$
   c) $f(z) = \frac{z}{z+i}$
   d) $f(z) = Im(z)$
   e) $f(\bar{z}) = z(1 + \bar{z})$
   f) $f(z) = 3z^2 + 5z + 2i$

1.2.3 Funciones elementales

En variable real conocemos y utilizamos las funciones e^x, sen(x), cos(x), $ln(x)$, ... , veremos que estas funciones pueden extenderse a variable compleja.

Exponencial compleja -$f(z) = e^z$-

Se pretende definir la exponencial compleja de modo que si z es real -esto es, si z es de la forma $z = x+iy$- coincida con la exponencial real, es decir debemos exigirle que $f(x+i0) = e^x$. Además como la derivada de e^x es igual a e^x, es natural imponer que $f'(z) = f(z)\forall z$.

Consideremos la función $f(z) = e^x cos(y) + ie^x sen(y)$, en ella $u(x,y) = e^x cos(y) \wedge v(x,y) = e^x sen(y)$. El dominio de continuidad de f es el conjunto $\mathbb{C}$ ya que tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son funciones continuas de $\mathbb{R}^2$. Planteando las condiciones de C-R, obtenemos:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} e^x cos(y) = e^x cos(y) \\ -e^x sen(y) = -e^x \sin(y) \end{cases}$$

sistema que satisfacen todos los pares (x, y) de números reales, como además $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas podemos afirmar que f es derivable y analítica en todo $\mathbb{C}$.

Además su derivada es $f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos(y) + i\, e^x \sin(y)$, es decir verifica que $f'(z) = f(z) \forall z$ y además cumple que $f(x+0i) = e^x$, de manera que definimos a la exponencial compleja como:

$$\textit{Función exponencial}: exp(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

Actividades propuestas.

Justificar las siguientes propiedades:

1. $|e^z| = e^x$
2. $|e^{iy}| = 1,\ \forall y \in \mathbb{R}$
3. $e^z = 1 \Rightarrow z = i\, 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
4. $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = i\, 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
5. $e^{z_1 + z-2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

1.3.6. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Sabemos que si α es real (según la fórmula de Euler) valen las siguientes igualdades:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \qquad \wedge \qquad e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$$

cuya suma y resta son respectivamente:

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha) \qquad \wedge \qquad e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2\sin(\alpha)$$

Despejando $\cos(\alpha)$ y $\sin(\alpha)$ de estas últimas obtenemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \qquad \wedge \qquad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, se define:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \wedge \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \ {}^{8}$$

[8] Si z es real, es decir si $z = x$ entonces $\cos(z)$ y $\sin(z)$ coinciden con el $\cos(x)$ y el $\sin(x)$, ya conocidos de la variable real.

Tangente, cotangente, secante y cosecante de un complejo se definen como:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \cot(z) = \frac{1}{\tan(z)} \quad \sec(z) = \frac{1}{\cos(z)} \quad \csc(z) = \frac{1}{\sin(z)}$$

El dominio de cada una de estas funciones son todos los complejos que no anulan el denominador y todas son analíticas en dichos dominios.

Ambas funciones son analíticas en todo el plano complejo por ser suma y resta de analíticas y es sencillo verificar que :

$$(\cos(z))' = -\sin(z) \qquad \wedge \qquad (\sin(z))' = \cos(z)$$

Definimos las funciones hiperbólicas como:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \cosh(z) = (z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Observemos que si z es real y vale $z = x$ entonces $\cosh(z)$ y $\sinh(z)$ coinciden con el $\cosh(x)$ y el $\sinh(x)$ ya conocidos en variable real. Ambas funciones son analíticas en todo el plano complejo y vale que :

$$(\cosh(z))' = \sinh(z) \text{ y } (\sinh(z))' = \cosh(z)$$

Actividades propuestas. Justificar que los ceros de las funciones $\sin z$ y $\cos z$ son los mismos que los de las funciones $\sin x$ y $\cos x$ de variable real, es decir probar que:

1. $\sin z = 0 \Longrightarrow z = k\pi + 0i, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \qquad ,$
2. $\cos z = 0 \Longrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi + 0i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \qquad ,$

1.1.4 Ejercicios adicionales:

1. Expresar en forma binómica los siguientes complejos:
   a) $e^{i\pi/2}$
   b) $e^{(3-i\pi)/2}$
   c) $\cos(-i)$
   d) $\sin(\pi - i)$
   e) $\sinh(1 - i)$
   f) $\cosh(\pi i/2)$
2. Demostrar:
   a) $\bar{e^z} = e^{\bar{z}}$
   b) $e^{-z} = 1/z$
   c) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
   d) $\sin(iz) = \sinh z$
   e) $e^z = \cosh z + \sinh z$
   f) $\bar{\sin} z = \sin \bar{z}$
3. Hallar los complejos que satisfacen las siguientes ecuaciones:
   a) $e^{2z} = -1$
   b) $e^{-iz} = 2$
   c) $\cos z = 2i$

d) $\cosh z = -2$

e) $\cos z = \sin z$

f) $e^z = 1 - i$

g) $\sin(iz) = \sinh z$

4. Hallar los dominios de derivabilidad y analiticidad de $f(z) = \frac{|z|^2+2}{z^2+2iz}$ y $g(z) = \frac{\cos z}{\bar{z}}$