1. Thuật toán ước lượng Năng lực thí sinh trong mô hình IRT 3 tham số.

- Xác suất trả lời đúng câu hỏi thứ i của thí sinh có năng lực θ.

$$(1) \quad P_i(\theta) = P(X_i = 1 \mid \theta; a_i, b_i, c_i) = c_i + (1 - c_i)\frac{e^{a_i(\theta - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta - b_i)}}.$$

- Nếu ta đã biết một thí sinh đã trả lời $k-1$ câu hỏi các kết quả $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$, thì hàm hợp lý (Likelihood Function) của trường hợp này

$$L(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} P_i(\theta)^{X_i}\left(1 - P_i(\theta)\right)^{1-X_i}$$

Hàm hợp lý là xác suất để có các sự kiện $X_1, \dots, X_{k-1}$ xảy ra đồng thời với điều kiện thí sinh có năng lực θ.

- Để ước lượng hợp lý hơn trong trường hợp này ta sử dụng suy diễn Bayes, ban đầu ta giả sử θ là biến có phân bố tiên nghiệm (posterior dist.) là $f(\theta)$, sau đó sử dụng hàm hợp lý hậu nghiệm

$$g(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1}) = \frac{f(\theta) . L(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1})}{\int f(\theta) L(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1}) \, d\theta}.$$

để ước lượng θ.

Khi đó ước lượng lớn nhất hậu nghiệm (Maximum a Posteriori Estimator) MAP của θ cho bởi:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} g(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1})$$

$$= \arg\max_{\theta} f(\theta) L(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1})$$

$$= \arg\max_{\theta} \ln (f(\theta) L(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1})).$$

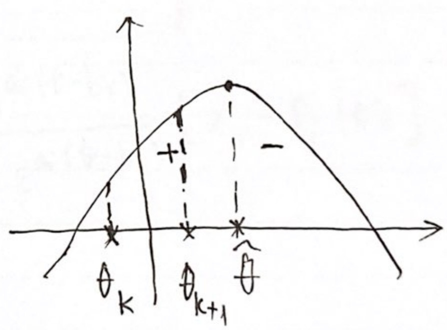
- Hàm $l(\theta) = \ln (f(\theta) L(\theta \mid X_1, \dots, X_{k-1}))$, $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}}$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\theta^2}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} (X_i \ln P_i(\theta) + (1-X_i) \ln Q_i(\theta))$$

$$(Q_i(\theta) = 1 - P_i(\theta)).$$

- Ước lượng $\hat{\theta}$ bằng thuật toán Gradient Descent (Đi ngược đạo hàm).

(2) $$\boxed{\theta_{k+1} = \theta_k + \gamma . l'(\theta_k), \ \gamma > 0}$$



γ - là (hệ số) tốc độ học (Learing rate), thường chọn $\gamma = 0.1$.

- Tính đạo hàm của $l(\theta)$ ta có

$$l'(\theta) = -\theta + \sum_{i=1}^{k-1} \left(X_i . \frac{P_i'(\theta)}{P_i(\theta)} - (1-X_i) . \frac{P_i'(\theta)}{Q_i(\theta)} \right)$$

$$\ell'(\theta) = -\theta + \sum_{i=1}^{K-1}\left(X_i\left[\frac{P_i'(\theta)}{P_i(\theta)} + \frac{P_i'(\theta)}{Q_i(\theta)}\right] - \frac{P_i'(\theta)}{Q_i(\theta)} \right)$$

$$= -\theta + \sum_{i=1}^{K-1}\left(X_i \cdot \frac{P_i'(\theta)}{P_i(\theta)Q_i(\theta)} - \frac{P_i'(\theta)}{Q_i(\theta)} \right)$$

(3) $$\ell'(\theta) = -\theta + \sum_{i=1}^{K-1} \frac{P_i'(\theta)}{P_i(\theta)Q_i(\theta)}\left[X_i - P_i(\theta)\right].$$

- Từ (1) ta có $$P_i'(\theta) = (1-c_i)\frac{a_i e^{a_i(\theta-b_i)}}{\left(1+e^{a_i(\theta-b_i)}\right)^2}$$

$$P_i(\theta)Q_i(\theta) = (1-c_i)\frac{c_i + e^{a_i(\theta-b_i)}}{\left(1+e^{a_i(\theta-b_i)}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_i'(\theta)}{P_i(\theta)Q_i(\theta)} = \frac{a_i e^{a_i(\theta-b_i)}}{c_i + e^{a_i(\theta-b_i)}}} \quad (4)$$

- Vậy $$\ell'(\theta) = -\theta + \sum_{K=1}^{K-1}\frac{a_i e^{a_i(\theta-b_i)}}{c_i + e^{a_i(\theta-b_i)}}\left[X_i - P_i(\theta)\right]$$

- Thay vào (2) ta được

$$\theta_K = \theta_{K-1} - \gamma\theta_{K-1} + \gamma\sum_{K=1}^{K-1}\frac{a_i e^{a_i(\theta_{K-1}-b_i)}}{c_i + e^{a_i(\theta_{K-1}-b_i)}}\left[X_i - P_i(\theta_{K-1})\right]$$

$$\theta_K = (1-\gamma)\theta_{K-1} + \gamma\sum_{K=1}^{K-1}\frac{a_i e^{a_i(\theta_{K-1}-b_i)}}{c_i + e^{a_i(\theta_{K-1}-b_i)}}\left[X_i - c_i - (1-c_i)\frac{e^{a_i(\theta_{K-1}-b_i)}}{1+e^{a_i(\theta_{K-1}-b_i)}}\right]$$

Công thức cập nhật NL thí sinh sau khi trả lời $K-1$ câu hỏi ($K \geq 2$).

$$⑤ \quad \boxed{\hat{\theta}_K = (1-\gamma)\hat{\theta}_{K-1} + \gamma \sum_{i=1}^{K-1} \frac{a_i e^{a_i(\hat{\theta}_{K-1}-b_i)}}{c_i + e^{a_i(\hat{\theta}_{K-1}-b_i)}}\left[X_i - c_i - (1-c_i)\frac{e^{a_i(\hat{\theta}_{K-1}-b_i)}}{1+e^{a_i(\hat{\theta}_{K-1}-b_i)}}\right]}$$

2, Thuật toán chọn câu hỏi

Sau khi thí sinh trả lời $K-1$ câu hỏi thì năng lực của thí sinh được ước lượng theo công thức ⑤ là $\hat{\theta}_K$. Tiếp theo ta đi tìm câu hỏi thứ K phù hợp, việc lựa chọn này dựa vào tiêu chuẩn thông tin tối đa (của Fisher) (Maximum Information Criterion)

$$i_K = \arg\max_j \{ I_j(\hat{\theta}_{K-1}), j \in \{1, 2, \dots, n\} \}, \; n \text{ - số lượng}$$

câu hỏi trong ngân hàng, ở đó hàm thông tin Fisher được tính bằng

$$I_j(\hat{\theta}_{K-1}) = \frac{\left(P_j'(\hat{\theta}_{K-1})\right)^2}{P_j(\hat{\theta}_{K-1}) \cdot Q_j(\hat{\theta}_{K-1})}.$$

Cụ thể $$I_j(\hat{\theta}_{K-1}) = (1-c_j)\frac{a_j^2 \cdot e^{2a_j(\hat{\theta}_{K-1}-b_j)}}{\left(1+e^{a_j(\hat{\theta}_{K-1}-b_j)}\right)^2\left(c_j + e^{a_j(\hat{\theta}_{K-1}-b_j)}\right)}$$

hàm này đạt max tại điểm b_j sao cho

$$e^{a_j(\hat{\theta}_{K-1}-b_j)} = \frac{1+\sqrt{1+8c_j}}{2} \approx 1$$

$$\left(c_j \leq \frac{1}{3}\right)$$

- Như vậy cần hỏi tiếp theo được lựa chọn có độ khó b_K sao cho $b_K \approx \hat{\theta}_K$.

- Sử dụng thuật toán tìm kiếm nhị phân.

- Cho trước một giá trị a, tìm kiếm trong tập hợp $b_1, \ldots, b_n$ một giá trị gần nhất với a.

- Ta cần so sánh a với giá trị trung vị của $b_1, \ldots, b_n$ nếu a nhỏ hơn giá trị trung vị thì tìm bên trái, a lớn hơn giá trị trung vị thì ta tìm kiếm nửa bên phải của dãy.

- Thuật giải như sau.

```
Input: ε, a, b1, b2, ..., bn
Ouput:  b (giá trị xấp xỉ của a, |a-b|<ε)
 L:=0
 R:=n
 Do while (L < R)
      m:= [L + n/2]
      if (|a - bm| < ε) then   b = bm
      else
         if  (a < bm - ε) then  R:= m-1
           else
              L:= m+1
           endif
      endif
 enddo
```