Deep Learning course: Entry test

Mai Xuan Bach

Ngày 22 tháng 10 năm 2022

1 Đại số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1.1 Tính $(A+B), (A-B), (A^T B)$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+4 & 2+2 & 3+1 \\ 5+5 & 1+5 & 1+1 \\ 3+1 & 2+2 & 1+1 \\ 1+1 & 1+2 & 1+4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-4 & 2-2 & 3-1 \\ 5-5 & 1-5 & 1-1 \\ 3-1 & 2-2 & 1-1 \\ 1-1 & 1-2 & 1-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^TB &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 5\cdot 5 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 5\cdot 5 + 3\cdot 2 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 5\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 5 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 2 + 1\cdot 5 + 2\cdot 2 + 1\cdot 2 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ 3\cdot 4 + 1\cdot 5 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 2 + 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 33 & 35 & 13 \\ 16 & 15 & 9 \\ 19 & 15 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

1.2 Tính $rank(A^TB)$

Ma trận A^TB là một ma trận vuông 3x3, để tính hạng của ma trận này, ta tính định thức của ma trận. Định thức cấp 3 của ma trận là:

$$
\begin{aligned}
det(A^TB) &= \begin{vmatrix} 33 & 35 & 13 \\ 16 & 15 & 9 \\ 19 & 15 & 9 \end{vmatrix} \\
&= 33 \begin{vmatrix} 15 & 9 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} - 35 \begin{vmatrix} 16 & 9 \\ 19 & 9 \end{vmatrix} + 13 \begin{vmatrix} 16 & 15 \\ 19 & 15 \end{vmatrix} \\
&= 33(15\cdot 9 - 15\cdot 9) - 35(16\cdot 9 - 19\cdot 9) + 13(16\cdot 15 - 19\cdot 15) \\
&= 0 - 35\cdot 9(-3) + 13\cdot 15(-3) \\
&= 360
\end{aligned}
$$

Vì định thức cấp 3 $det(A^TB) \neq 0$ nên ta được $rank(A^TB) = 3$.

1.3 Tìm eigenvalue, eigenvector của ma trận:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Gọi $\lambda \in \mathbb{R}$ là eigenvalue và u là eigenvector của ma trận A. Ta có: $Au = \lambda u$. Trước tiên, ta giải phương trình đặc trưng của ma trận A:

$$
\begin{aligned}
det(A - \lambda I) &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 3-\lambda \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1) + (\lambda-1) + (-1-\lambda) + 3 - 1 + 3(\lambda-3) \\
&= -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1) + 3\lambda - 9 \\
&= -(\lambda-3)(\lambda^2 - 1 - 3) \\
&= -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+2)
\end{aligned}
$$

Ta được: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.
Với $\lambda_1 = 3$, eigenvector tương ứng là $u_1 = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - 3I)u_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ -3x + y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \tag{1}$$

$\Rightarrow$ Eigenvector ứng với $\lambda_1 = 3$ có dạng $u_1 = (-1, 1, 1)a, a \neq 0$.
Với $\lambda_2 = 2$, eigenvector tương ứng là $u_2 = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - 2I)u_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -3x + y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$\Rightarrow$ Eigenvector ứng với $\lambda_2 = 2$ có dạng $u_2 = (1, 0, -1)b, b \neq 0$.
Với $\lambda_3 = -2$, eigenvector tương ứng là $u_3 = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A + 2I)u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 4x \end{cases} \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Eigenvector ứng với $\lambda_3 = -2$ có dạng $u_3 = (1, -1, 4)c, c \neq 0$.

2 Probability

Đề bài: Dây chuyền lắp ráp nhận được các sản phẩm do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 60% sản phẩm, máy thứ hai cung cấp 40% sản phẩm. Khoảng 90% sản phẩm do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% sản phẩm do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất?

Trả lời:

Biến máy sản xuất có hai giá trị là Máy 1 và Máy 2. Gọi biến máy sản xuất là M = {1, 2}.

Biến chất lượng có hai giá trị là Đạt và Không đạt. Gọi biến chất lượng là Q = {1, 0}

Theo bài ra ta có:

$$P(M = 1) = 0.6 \tag{4}$$
$$P(M = 2) = 0.4 \tag{5}$$

$$P(Q = 1|M = 1) = 0.9 \tag{6}$$

$$P(Q=1|M=2)=0.85 \tag{7}$$

Để giải quyết bài toán, ta sử dụng **Baye's Rule**:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A).P(A)}{P(B)} \tag{8}$$

Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất là:

$$\begin{aligned}
P(M=1|Q=1) &= \frac{P(Q=1|M=1).P(M=1)}{P(Q=1)} && (9)\\
&= \frac{P(Q=1|M=1).P(M=1)}{P(Q=1,M=1)+P(Q=1,M=2)} && (10)\\
&= \frac{P(Q=1|M=1).P(M=1)}{P(Q=1|M=1).P(M=1)+P(Q=1|M=2).P(M=2)} && (11)\\
&= \frac{0.9*0.6}{0.9*0.6+0.85*0.4} && (12)\\
&= 0.614 && (13)
\end{aligned}$$

Như vậy, xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất là **0.614**