

UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 4

Rechenbeispiele

31. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x + e^x - 2$$

Bestimme die Nullstelle der Funktion (im Intervall $[0, 1]$) durch Fixpunkt-Iteration; Startpunkt ist $x_0 = 0$.

Hinweis: Prüfe ob die Voraussetzungen für die Fixpunktiteration erfüllt sind. Gegebenenfalls wird die Voraussetzungen durch geeignete Transformationen hergestellt.

Bitte Skizzen anfertigen!

32. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x + e^x - 2$$

Bestimme die Nullstelle der Funktion (im Intervall $[0, 1]$) mit dem Newton-Verfahren; Startpunkt ist $x_0 = 0$.

Bitte Skizzen anfertigen!

33. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x + e^x - 2$$

Bestimme die Nullstelle der Funktion (im Intervall $[0, 1]$) mithilfe des Bisektionsverfahrens.

Vergleiche das Ergebnis mit denen der beiden vorigen Beispiele (Fixpunkt, Newton).

Bitte Skizzen anfertigen!

34. Wir wollen eine iterative Methode entwickeln, um die Quadratwurzel x einer gegebenen positiven Zahl y zu bestimmen, also

$$f(x) = x^2 - y = 0$$

Jede der unten gegebenen Funktionen g_1 und g_2 gibt ein Fixpunktproblem, das zu dem obigem äquivalent ist. Bestimme für jede dieser Funktionen, ob die zugehörige Fixpunktiteration $x_{k+1} = g_i(x_k)$ lokal konvergiert, wenn $y = 3$ ist

(a) $g_1(x) = y + x - x^2$

(b) $g_2(x) = -1 + x + \frac{x^2}{y}$

- (c) Wie würde die Newton-Methode die Funktion g für die Fixpunkt-Iteration angeben?

Bitte Skizzen anfertigen!

35. Gegeben ist folgendes Problem

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

- (a) Bestimme mit dem Newton-Verfahren zur Nullstellensuche ausgehend vom Startpunkt $x_0 = 1$ den Wert des nächstfolgenden Punktes x_1 .
- (b) Mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ als Startpunkte bestimme den Punkt x_2 für das obige Problem mit der Sekanten Methode.

Bitte Skizzen anfertigen!

36. Die Funktion $f(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^2$ hat Nullstellen bei $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

Zeige, dass das Newton Verfahren nicht konvergiert, wenn bei $x_0 = 1$ gestartet wird (obwohl dies in der "Nähe" der Nullstelle ist).

Bitte eine Skizze anfertigen!

37. (a) Formuliere für folgendes System die Newton-Iteration

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

- (b) Führe die Newton-Iteration mit den Startpunkten $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0.5, 0.5)$, $(-0.5, 0.5)$ durch.

38. Führe folgende Minimierungsaufgaben auf Fixpunktaufgaben zurück

(a) $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = \min$

(b) $(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (0, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \min$

Programmierbeispiele

39. Implementiere Bisektions- und Fixpunktverfahren, um folgende Probleme zu lösen

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b) $e^{-x} = x$

(c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

40. Implementiere Newton- und Sekantenverfahren, um folgende Probleme zu lösen

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b) $e^{-x} = x$

(c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$