UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 3

Rechenbeispiele

21. Durch folgende Punkte soll eine Gerade gelegt werden

$$(0,1) \qquad (1,2) \qquad (3,3)$$

    (a) Stelle das (überbestimmte) dazugehörige Gleichungssystem für das Linear Least Squares Problem auf.
    (b) Bestimme die dazugehörigen Normalgleichungen.
    (c) Bestimme die Lösung des Linear Least Squares Problems mit Hilfe der Cholesky-Faktorisierung.

22. Bestimme die Householder-Transformation, die im Vektor $(1,1,1,1)^T$ alle Einträge bis auf den ersten annihiliert: Wenn

$$(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was ist dann der Wert von α und wie sieht der Vektor v aus?

23. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

    (a) Wieviele Housholder-Transformationen werden für eine QR-Faktorisierung benötigt?
    (b) Wie sieht die erste Spalte nach der ersten Householder-Transformation aus?

24. Gegeben sei die Matrix wie im vorherigen Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

    (a) Wie viele Givens-Rotationen werden für die QR-Faktorisierung von A benötigt?
    (b) Wie sieht die erste Spalte nach der ersten Givens-Rotation aus, wenn man an der Position 2-1 (2. Zeile, 1. Spalte) eine Null erreichen will?

(c) Wie sieht die erste Spalte aus, wenn die Givens-Rotationen unterhalb des ersten Eintrages lauter Nullen erzeugt?

25. Gegeben sei der Vektor

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimme

(a) eine Elementarmatrix, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert.

(b) eine Householder-Transformation, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert.

(c) eine Givens-Rotation, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert.

26. (a) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix der Householder-Transformation

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v} \qquad (v \neq 0)$$

(b) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix der Givens-Rotation

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \quad \text{mit } c^2 + s^2 = 1$$

27. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die SVD ist gegeben durch

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{195}} & -\frac{3}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{7}{\sqrt{195}} & 2\sqrt{\frac{2}{13}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{5}{39}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

(a) Was sind die Singulärwerte von A?

(b) Bestimme die Pseudoinverse A^+ von A.

(c) Bestimme die Lösung x von $Ax \cong b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

durch Anwendung der Pseudoinversen A^+.

28. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.2 & 3 & 0.5 \\ -0.4 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die Gershgorin-Kreise für A.

(b) Fertige eine Zeichnung oder einen Plot mit den Kreisen und den Eigenwerten an.

Programmierbeispiele

29. (a) Schreiben Sie eine Funktion, die mittels normalisierter Power-Iteration den dominanten Eigenwert und den dazugehörigen Eigenvektor einer Matrix ermittelt. Als Abbruchkriterium kann dienen, dass sich die Norm des Vektors, auf den der Algorithmus operiert (angewendet wird), um weniger als einen bestimmten, sehr kleinen Wert ändert.

(b) Wenden Sie Ihre Funktion auf die folgende Matrix A an

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 & 4 \\ -1 & -7 & -4 & -2 \\ -7 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

und prüfen Sie, ob es sich bei dem berechneten Vektor wirklich um einen Eigenvektor handelt.

(c) Machen Sie dasselbe für die Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

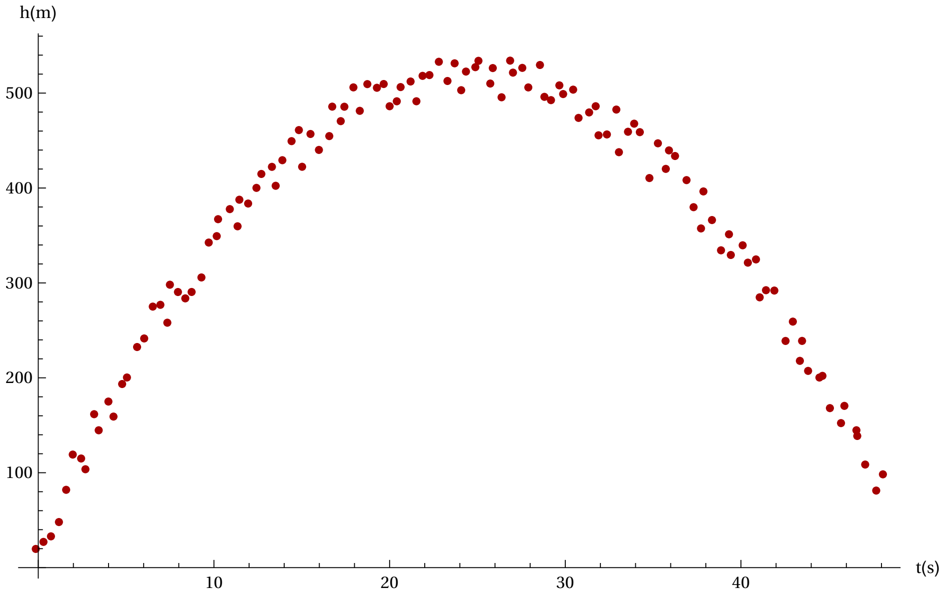
(d) Bei einer der beiden Matrizen versagt das Verfahren. Bei welcher – und warum?

30. (a) Schreiben Sie eine Funktion, die eine csv-Datei einliest, die (t, y)-Wertepaare enthält, und die Koeffizienten x_1, x_2 und x_3 eines quadratischen Ausgleichspolynoms

$$f(x,t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

berechnet. Stellen Sie dazu die entsprechende Vandermode-Matrix A auf und lösen Sie das System der Normalgleichungen (hierfür ist die Verwendung der Operation „\" in Ordnung).

(b) Auf Moodle finden Sie unter „Übungen" die Datei „`height.csv`". Sie enthält die gemessenen Höhen einer senkrecht nach oben geworfenen Probemasse auf einem nicht allzu weit entferntem Himmelskörper .



Fallhöhe als Funktion der Zeit

Verwenden Sie die von Ihnen programmierte Funktion, um ein Ausgleichspolynom zu diesem Datensatz zu finden, und stellen Sie Messwerte und Ausgleichsfunktion im selben Plot graphisch dar.

Freiwillige Zusatzfrage: Können Sie auf Basis ihrer Ergebnisse und Google oder ChatGPT herausfinden, um welchen Himmelskörper es sich handelt?