UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 6

Rechenbeispiele

51. Berechne eine Approximation des Integrals

$$\int_0^1 x^3 \, dx$$

nach der Mittelpunktsregel, nach der Trapezregel und nach der Simpsonregel. Erstelle eine grafische Darstellung und vergleiche die Genauigkeit der Approximationen.

52. Es gilt

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} \, dx = \pi \, .$$

Daher kann durch numerische Integration eine Approximation für den Wert von π berechnet werden. Berechne nach der Mittelpunktsregel, nach der Trapezregel und nach der Simpsonregel den Wert von π und vergleiche die Approximationen mit dem „exakten“ Wert.

53. Verwende numerische Integration, um die folgende Behauptung zu überprüfen:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+10x^2} \, dx \approx 0.4 \, .$$

54. Berechne eine Approximation an das Integral

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

unter Verwendung der Trapezregel und unter Verwendung der Gauss-Quadratur. Erstelle eine grafische Darstellung.

55. Verwende die Gauss-Quadratur zur Berechnung einer Approximation des Integrals

$$\int_0^1 \cos(x) \, dx$$

durch Transformation auf das Intervall $[-1, 1]$.

Erstelle grafische Darstellungen.

56. Approximiere die folgenden Integrale durch Anwendung der zusammengesetzten Trapezregel und der zusammengesetzten Simpsonregel.

    (a) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$

    (b) $\int_0^1 e^x\,dx$

    Erstelle dazu grafische Darstellungen und vergleiche die Ergebnisse mit dem exakten Wert.

57. Das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

    ist ein uneigentliches Integral.
    Transformiere das Integral durch $t = \sqrt{x}$ auf ein eigentliches Integral und berechne eine Approximation.

58. Überprüfe mittels numerischer Integration die folgende Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

    Hinweis: Ersetze das uneigentliche Integrationsintervall durch ein symmetrisches Intervall um 0, etwa $[-2,2],[-3,3],[-4,4],\ldots$

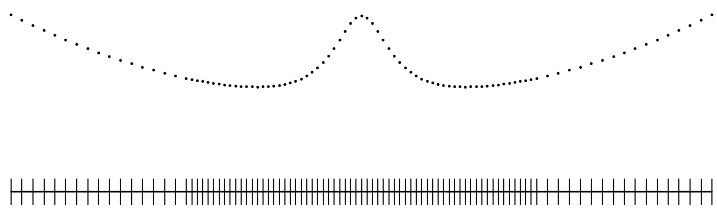
Programmierbeispiele

59. Schreiben Sie drei Funktionen, die eine Funktion f, Anfangs- und Endpunkte eines Intervalls $[a,b]$ sowie eine natürliche Zahl m als Argumente erhalten, und das bestimmte Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

    mittels zusammengesetzer Mittelpunkts-, Trapez- und Simpsonregel berechnen.
    Überprüfen Sie die Korrektheit ihrer Implementierungen mit Octave, beispielsweise mit einigen der Funktionen aus den vorherigen Beispielen.
    Vgl. `https://docs.octave.org/v5.1.0/Functions-of-One-Variable.html`

60. Bei sich schnell ändernden Funktionen verlieren die bisher diskutierten Verfahren zunehmend an Genauigkeit. Eine Möglichkeit, dem zu entgehen ist die sogenannte *adaptive Quadratur*. Die Idee ist hier, die numerische Integration so lange auf kleineren Teilintervallen fortzusetzen, bis kaum noch eine relative Änderung eintritt - zu diesem Zeitpunkt wird das Ergebnis zurückgegeben.



Mögliche Anordnung der betrachteten Intervalle bei einer sich nicht überall gleich schnell ändernden Funktion; aus Heath: Scientific Computing.

In Pseudocode hat der Algorithmus die folgende Form, wobei hier noch die ein oder andere Integralauswertung eingespart werden könnte:

Algorithmus 1: adSimpson(f, a, b, ϵ)

$I_1 = \text{simpson}(f,\, a,\, b)$;
$I_2 = \text{simpson}(f,\, a,\, (a+b)/2) + \text{simpson}(f,\, (a+b)/2,\, b)$;
if $|(I_1 - I_2)/I_1| < \epsilon$ **then**
  return I_2 ;
else
  return adSimpson(f, a, $(a+b)/2$, ϵ) + adSimpson(f, $(a+b)/2$, b, ϵ) ;
end

Schreiben Sie eine Funktion, die eine adaptive Quadratur mittels der Simpsonregel durchführt. Testen Sie diese an

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

und vergleichen Sie mit der einfachen und zusammengesetzten Simpsonregel für verschieden feine Unterteilungen.

Garantiert das hier verwendete Abbruchkriterium, dass wir eine gute Näherung an den tatsächlichen Wert des Integrals erhalten?