

UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 1

Bitte rechnen Sie die Beispiele *mit der Hand*, das heißt geben Sie es nicht einfach in Octave oder ein anderes CAS ein und schreiben das Resultat ab. Sie sollten mit den Matrizen-Operationen und Rechenwegen einmal wirklich gut vertraut werden! Selbstverständlich können oder sollten sogar die Resultate danach mit dem Computer überprüft werden.

Die Beispiele müssen nicht in der angegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. Manchmal kann die Rechnung einfacher werden, wenn gewisse Resultate schon vorher erarbeitet werden. Bitte überlegen Sie auch immer, ob Sie lange Rechnungen benötigen. Manchmal sind diese notwendig, manchmal helfen aber auch schon kleine, theoretische Überlegungen, sodass nur wenig oder eventuell auch gar keine weiteres Rechnen mehr notwendig ist.

Rechenbeispiele

1. Gegeben sind folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Matrizen, falls diese existieren

- (a) $A \cdot B$
- (b) $B \cdot A$
- (c) $A \cdot C$
- (d) $A^T \cdot (C + D)$
- (e) $(C + D) \cdot A$

2. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, falls diese existieren

- (a) $\vec{y} A \vec{x}$
- (b) $\vec{y}^T A \vec{x}$
- (c) $\vec{x}^T A \vec{y}$
- (d) $\vec{x}^T (\vec{y}^T A)^T$

3. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass $A = B \cdot C$ und bestimmen Sie die Determinanten von

- (a) A , B und C
- (b) A^2
- (c) A^{-1}
- (d) ABC
- (e) $C^T C$

4. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie

- (a) A^{-1}
- (b) B^{-1}
- (c) C^{-1}
- (d) $C^{-1}B^{-1}$

5. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie

- (a) $B^{-1}C^{-1}$
- (b) $(A^T)^{-1}$
- (c) $(A^{-1})^T$

6. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- (a) Welche der Matrizen A, B, C sind orthogonal?
- (b) Welche der Matrizen A, B, C sind symmetrisch?
- (c) Finden Sie Parameter a und b so, dass die Matrix

$$a \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

orthogonal wird.

7. Welche der folgenden Matrizen ist positiv oder negativ definit?

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. Sei A eine reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \alpha \\ -2 & 6 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Für welche Werte von α ist die Matrix A positiv definit?
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\alpha = 0$.
- (c) Berechnen Sie die Determinante von A .

Programmierbeispiele

9. Schreiben Sie ein Programm, das eine Matrix A und einen Vektor b aus zwei entsprechenden csv-Dateien einliest und die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ausgibt. Sie dürfen dabei beliebige Octave-Funktionen verwenden.
10. Schreiben Sie eine Funktion mit zwei Argumenten A und B , die das Matrix-Vektor beziehungsweise Matrix-Matrix Produkt AB berechnet sowie das Ergebnis ausgibt. Bei inkorrekten Eingabewerten (etwa bei unpassenden Dimensionen) soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden. Verwenden Sie den Operator $*$ und andere allenfalls zur Kontrolle.