UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 5

Rechenbeispiele

41. Gegeben sind die Stützstellen

$$\begin{array}{ll} x_0 = 2 & y_0 = 3 \\ x_1 = 7 & y_1 = 2 \\ x_2 = 10 & y_2 = 4 \end{array}$$

  (a) Bestimme das Interpolationspolynom M in der monomialen Basis.

  (b) Bestimme die Lagrange-Polynome l_j
  und das Lagrange-Interpolationspolynom P.

  (c) Erstelle eine Grafik für M und P mit den entsprechenden Stützstellen.

  (d) Bestimme die Werte an den Stellen $x = 3$, 5 und 8 für M und für P.

42. Gegeben sind die Stützstellen

$$\begin{array}{ll} x_0 = -1 & y_0 = 0 \\ x_1 = 1 & y_1 = 2 \\ x_2 = 2 & y_2 = 4 \end{array}$$

  (a) Bestimme das Newton-Interpolationspolynom.

  (b) Erstelle dazu eine Grafik.

  (c) Berechne die Werte des Newton-Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 0$.

43. Gegeben sind die Stützstellen

$$\begin{array}{ll} x_0 = -1 & y_0 = 0 \\ x_1 = 1 & y_1 = 2 \\ x_2 = 2 & y_2 = 4 \end{array}$$

  (a) Bestimme mit dem Schema der dividierten Differenzen die Koeffizienten für das Newton-Interpolationspolynom.

  (b) Füge eine weitere Stützstelle $x_3 = 3 \quad y_3 = 2$ hinzu und bestimme das neue Polynom.

  (c) Berechne die Werte an der Stelle $x = 0$ jeweils für die Newton-Interpolationspolynome aus Beispiel (a) und (b).

  (d) Erstelle zu obigen Beispielen Grafiken.

44. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \log(x) - \frac{x-1}{x}$$

Bestimme für die folgenden Mengen von Stützstellen durch Interpolation den Funktionswert an der Stelle $x = 5,25$ und vergleiche jeweils dieses Ergebnis mit dem exakten Wert. Erstelle dazu auch grafische Darstellungen!

(a) $x_0 = 4, \quad y_0 = f(x_0)$
$x_1 = 8, \quad y_1 = f(x_1)$

(b) $x_0 = 4, \quad y_0 = f(x_0)$
$x_1 = 8, \quad y_1 = f(x_1)$
$x_2 = 10, \quad y_2 = f(x_2)$

(c) $x_0 = 2, \quad y_0 = f(x_0)$
$x_1 = 4, \quad y_1 = f(x_1)$
$x_2 = 8, \quad y_2 = f(x_2)$

45. Wieviele Multiplikationen werden benötigt, um den Wert des Polynoms $p(t)$ vom Grad $n-1$ an einer gegebenen Stelle t zu bestimmen, wenn das Polynom dargestellt wird in

(a) monomialer Basis?
(b) Lagrange-Basis?
(c) Newton-Basis?

46. Bestimme die Werte von a, b, c, d, und e derart, dass die folgende Funktion ein kubischer Spline ist.

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2 & x \in [1,3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Zusätzlich soll gelten, dass

$$f(1) = 1 \qquad f'''(0) = 6 \qquad f'''(4) = 6$$

Zeichne die erhaltene Funktion!

47. Welche Eigenschaften eines natürlichen kubischen Splines besitzt die folgende Funktion und welche nicht?

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) + (x+1)^3 & x \in (-1, 0] \\ 4 + (x-1) + (x-1)^3 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Zeichne die erhalten Funktion f!

Programmierbeispiele

48. Ein Experiment ergab folgende Daten:

t	0.0	0.5	1.0	6.0	7.0	9.0
y	0.0	1.6	2.0	2.0	1.5	0.0

Interpolieren Sie die Daten mit einem Polynom vom Grad 5 und erstellen Sie eine grafische Darstellung im gegebenen Bereich $t \in [0, 9]$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

49. Ein Experiment ergab folgende Daten:

t	0.0	0.5	1.0	6.0	7.0	9.0
y	0.0	1.6	2.0	2.0	1.5	0.0

Bestimmen Sie einen kubischen Spline, der die gegebenen Daten interpoliert und erstellen Sie eine grafische Darstellung im gegebenen Bereich $t \in [0, 9]$.

50. Folgende Datenpunkte sind gegeben:

t	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Eine Interpolation dieser Datenpunkte sollte eine Approximation der Wurzelfunktion ergeben.

(a) Bestimmen Sie ein Polynom vom Grad 8, das diese 9 Datenpunkte interpoliert.

(b) Erstellen Sie eine grafische Darstellung des erhaltenen Polynoms und der vom System erstellen Wurzelwerte (`sqrt`) im Bereich $[0, 64]$.

(c) Erstellen Sie eine grafische Darstellung des erhaltenen Polynoms und der vom System erstellen Wurzelwerte (`sqrt`) im Bereich $[0, 1]$ und vergleichen Sie die Werte.