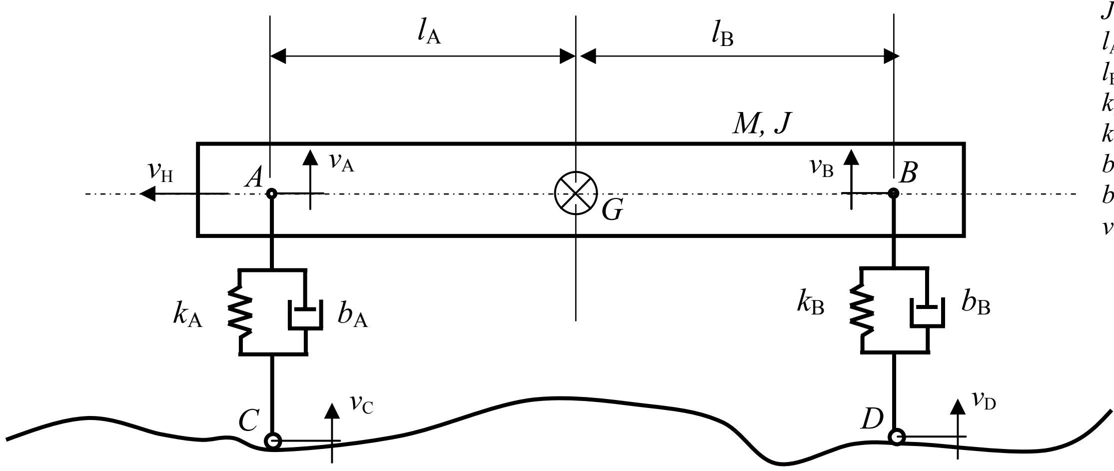
Suspensão veicular – Modelo de ½ de carro

1. Obtenha o modelo de ½ carro:



M = 200 kg;
J = 512 kgm^2;
l_A = 0,8 m;
l_B = 0,8 m;
k_A = 10.000 N/m;
k_B = 10.000 N/m;
b_A = 200 Ns/m;
b_B = 200 Ns/m;
v_H = 10 m/s;

Modelo da dinâmica vertical:
A dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de *G* (v_H) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:

- velocidade vertical v_G do centro de massa *G*.
- velocidade angular ω de *AB* em torno de *G*.
- elongação x_A da mola de rigidez k_A.
- elongação x_B da mola de rigidez k_B.

Entradas: velocidades verticais (v_C e v_D) dos pontos *C* e *D*.
Saídas: velocidade vertical v_G do centro de massa *G* e velocidade angular ω de *AB* em torno de *G*.

Hipóteses simplificadoras:
- Movimento apenas no plano da página.
- *AC* e *BD* permanecem sempre na vertical.
- Considere molas e amortecedores lineares.
- O deslocamento angular do segmento *AB* é pequeno (tal que $sen\alpha \cong tan\alpha \cong \alpha$ e $cos\alpha \cong 1$).

Representação no espaço de estados:

Vetor de estados: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Vetor de entradas: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$

Vetor de saídas: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$

Estrutura do modelo matemático:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

2. Simulação do modelo de ½ carro

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo degrau. Considere condições iniciais nulas e tempo de simulação de 4 segundos.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \qquad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad v_D = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < t_d \\ 1 & \text{se} \quad t \geq t_d \end{cases}$$

Explique o tipo de obstáculo físico que é representado pela entrada degrau, e explique por que a entrada v_D ocorre t_d segundos após a entrada v_C (deve-se calcular t_d antes de se fazer a simulação).

Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo seno. Considere condições iniciais nulas. Simule por tempo suficiente para mostrar cerca de 20 períodos.

Entradas (observe que são duas simulações diferentes): $$v_C = v_D = \text{sen}(9{,}8995t)$$ $$v_C = -v_D = \text{sen}(4{,}9875t)$$

Repita as simulações para valores maiores e menores de freqüência. Compare os resultados.
Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.
Calcule os coeficientes de amortecimento, as freqüências naturais, as freqüências naturais amortecidas e as freqüências de ressonância.

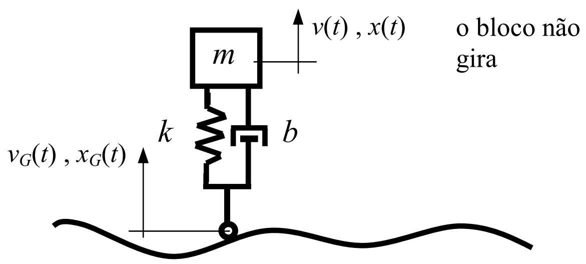
3. Análise de resposta em freqüência

Obtenha os diagramas de Bode do sistema de suspensão e <u>interprete</u> os resultados.

4. Simulação de sistema não linear

Exemplo

Considere o seguinte modelo de ¼ de carro, sem a massa não suspensa (1 grau de liberdade):



Este modelo em particular é a parâmetros concentrados, e será um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Variáveis:
$v(t)$: velocidade vertical do bloco.
$x(t)$: coordenada vertical da massa m.
$v_G(t)$: velocidade vertical do ponto de veículo em contato com solo.
$x_G(t)$: coordenada vertical do solo.

Parâmetros:
m : massa do bloco.
k_M : rigidez da mola.
k_B : rigidez do batente.
b : constante do amortecimento.
l : comprimento natural da mola.
l_C : comprimento da mola totalmente comprimida.

Equações diferenciais:

$\dot{x} = v$ (Eq. 1)

$\dot{x}_G = v_G$ (Eq. 2)

Como mola não está fixa no solo, ou ela está comprimida, ou então não há contato com o solo. E no caso da mola estar comprimida, a deflexão pode ser grande o bastante para que o batente seja atingido. Temos então 3 situações:

a) Não há contato com o solo (l é o comprimento natural da mola):

Condição: $x - x_G > l$

Equação:

$m\dot{v} = -mg$ (Eq. 3a)

b) Existe contato com o solo (l_C é o comprimento da mola totalmente comprimida), mas ainda não se atingiu o batente:

Condição: $l_C < x - x_G < l$

Equação:

$m\dot{v} = -F_{mola} - F_{amortecedor} - mg$ (Eq. 3b)

c) Existe contato com o solo e o batente foi atingido:

Condição: $x - x_G < l_C$

Equação:

$m\dot{v} = -F_{batente} - F_{amortecedor} - mg$ (Eq. 3c)

Sabemos ainda que:

$F_{mola} = k_M (x - x_G - l)$

$F_{batente} = k_B (x - x_G - l)$

$F_{amortecedor} = b(v - v_G)$

Vetor de estados:

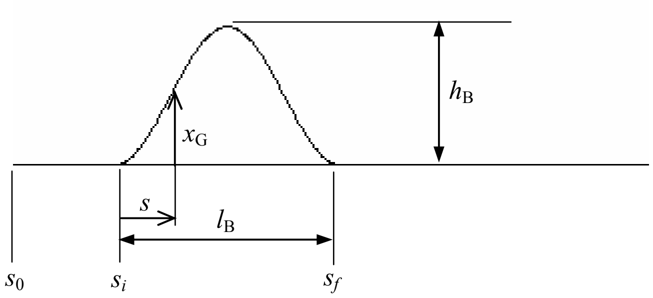
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_G \\ v \end{bmatrix}$, portanto: $\mathbf{x}(1) = x$, $\mathbf{x}(2) = x_G$ e $\mathbf{x}(3) = v$

Salvar em um arquivo denominado sistema.sci

```
// Definicao da funcao que implementa as equacoes diferenciais do sistema
function [xdot]=sistema(t,x,entrada)
if (x(1)-x(2))<lc then xdot=[x(3);entrada(t);(-kB*(x(1)-x(2)-l)-b*(x(3)-entrada(t))-m*g)/m];
elseif (x(1)-x(2))>l then xdot=[x(3);entrada(t);-g];
else xdot=[x(3);entrada(t);(-kM*(x(1)-x(2)-l)-b*(x(3)-entrada(t))-m*g)/m];
end
return
```

Entrada:

Supondo que a entrada seja uma lombada de comprimento l_B , altura h_B , e seu formato seja senoidal.



Seja s a coordenada do deslocamento do veículo ao longo da via. Entre $s = s_i$ e $s = s_f$ temos que:

$$x_G(s)=\frac{h_B}{2}\left[1-\cos\left(2\pi\cdot\frac{(s-s_i)}{l_B}\right)\right]$$

Se a velocidade do carro é constante e igual a v_C, então:

$$s=v_C\cdot t \quad\Rightarrow\quad \dot{s}=\frac{ds}{dt}=v_C$$

Calculando v_G:

$$v_G(t)=\dot{x}_G=\frac{dx_G}{dt}=\frac{dx_G}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{h_B}{2}\frac{2\pi}{l_B}\sin\left(2\pi\cdot\frac{(v_C\cdot t-s_i)}{l_B}\right)\cdot v_C$$

Vamos supor ainda que o veículo atinja a lombada sempre t_i segundos depois do início da simulação. Assim, a distância s_i será sempre:

$$s_i=v_C\cdot t_i$$

Antes de t_i (antes do veículo atingir a lombada):

$$v_G(t)=0$$

Entre t_i e t_f (quando o veículo está passando sobre a lombada):

$$v_G(t)=\frac{h_B}{2}\frac{2\pi}{l_B}\sin\left(2\pi\cdot\frac{(v_C\cdot t-v_C\cdot t_i)}{l_B}\right)\cdot v_C \quad\Rightarrow\quad v_G(t)=\frac{h_B}{2}\frac{2\pi}{l_B}v_C\cdot\sin\left(v_C\cdot\frac{2\pi}{l_B}\cdot(t-t_i)\right)$$

E depois de t_f (o veículo já passou pela lombada):

$$v_G(t)=0$$

Observe ainda que:

$$t_f=t_i+\frac{l_B}{v_C}$$

Salvar em um arquivo denominado entrada.sci

```
// Definicao da funcao que implementa a entrada vG:
function[ut]=entrada(t)

if t<ti then
ut=0;
elseif t<(ti+lB/vc) then
ut=(hB*2*%pi*vc/(2*lB))*sin((vc*2*%pi/lB)*(t-ti));
else
ut=0
end,

return
```

Finalmente, para efetuar a integração numérica das equações diferenciais (como o sistema NÃO É linear, é mais adequado usar o comando ode, de integração numérica, ao invés do comando `csim`):

```
// Definicao do arquivo que implementa a simulacao:
clear all

// Use o caminho correto em seu computador:
// Carregar a funcao que implementa o modelo matematico do sistema
getf("C:\Arquivos de programas\Scilab-3.0\sistema.sci");
// Carregar a função que implementa a entrada
getf("C:\Arquivos de programas\Scilab-3.0\entrada.sci");

// Definir os valores dos parametros
m=250;         // massa [kg]
b=1885;         // constante de amortecimento [Ns/m]
g=9.8;         // aceleracao da gravidade [m/s2]
```

```
kM=14213;      // rigidez da mola [N/m]
kB=142130;     // rigidez do batente [N/m]
l=0.4;         // comprimento natural da mola [m]
lc=0.1;        // comprimento da mola totalmente comprimida [m]
hB=0.2;        // altura da lombada [m]
lB=2;          // comprimento da lombada [m]
ti=0.1;        // tempo percorrido ate atingir a lombada [s]
vch=35;        // velocidade do carro [km/h]

vc=vch/3.6;    // velocidade do carro [m/s]

x0=[l-m*g/kM;0;0];  // condições iniciais
// O valor l-m*g/kM reflete a posição de equilíbrio da suspensão
// quando apenas o peso esta atuando.

t0=0;               // instante inicial
t=0:0.0001:2.8;      // vetor de tempo

x=ode(x0,t0,t,list(sistema,entrada));

// Plotando a diferenca entre a coordenada da massa e a coordenada
// do solo menos o comprimento natural da mola (deflexao):
plot2d(t,x(1,:)-x(2,:)-l)

// Se este valor eh negativo, a mola esta comprimida.
// Se este valor eh positivo, o carro "descolou" do solo.
// Se este valor diminui ate lc-l metros (neste caso -0.3 m),
// o batente eh atingido.

// Plotando xG:
plot2d(t,x(2,:),2)

// Usando a variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitoria da suspensao","Tempo t [s]","Solução [m]","Deflexao","xG
(perfil da via)");
// Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parametro 4):
legends([T(4),T(5)],[1,2],4);
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));
```

Exercício

Modele um sistema não linear de suspensão veicular do tipo ¼ de carro, incluindo a massa não suspensa (2 graus de liberdade), com três entradas, a velocidade v_G imposta pelo movimento do veículo, uma força de perturbação F e uma força de controle u. Implemente a simulação do sistema não linear (considerando as não linearidades do exemplo da suspensão de ¼ de carro sem massa suspensa, e adicionando a saturação da entrada u, etc.).