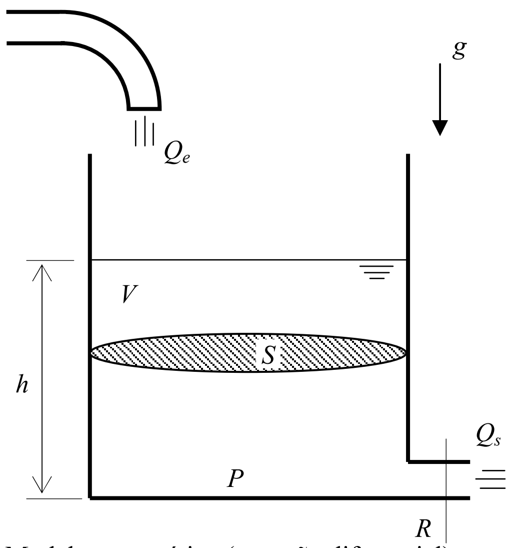
Simulação numérica

Exemplo do reservatório

Objetivo: solução numérica de equações diferenciais ordinárias usando a função ODE.
Considere novamente o sistema de um reservatório:



Reservatório com água
Parâmetros:
S = 10 m^2 - área da seção transversal (constante)
$R = 2\times10^8$ Pa/(m^3/s)^2 - parâmetro que relaciona vazão com queda de pressão (perda de carga)
ρ = 1000 kg/m^3 - massa específica da água
g = 10 m/s^2 - aceleração da gravidade na superfície da terra

Variáveis:
Q_e = 0,010247 m^3/s - vazão de entrada
h: nível do reservatório [m]
V: volume de água no reservatório [m^3]
P: pressão relativa à atmosférica, no fundo do reservatório [Pa]
Q_s: vazão de saída [m^3/s]

Admite-se que a água seja incompressível.

Modelo matemático (equação diferencial):

$$\dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S}$$

Simulação
A solução numérica da equação diferencial pode ser determinada no Scilab da seguinte forma:
Em um programa de edição de texto sem formatação, como o Notepad, deve se escrever um arquivo de texto, com o nome "`reservatorio.sci`", definindo a função que representa a equação diferencial:

```
// Definicao da funcao que implementa a equacao nao linear
function [hdot]=tanque(t,h,Qe)
hdot=(-sqrt(rho*g*h/R)+Qe(t))/S
endfunction
```

No mesmo arquivo texto de nome "`reservatorio.sci`", pode-se acrescentar a função que calcula a entrada do sistema. Esta entrada é uma função do tempo qualquer. Neste exemplo, adotaremos:

$Q_e(t) = Q_{ei}$ onde Q_{ei} é um termo constante.

(na verdade poderia ser qualquer função do tempo, por exemplo, $Q_e(t) = K_1 sen(\omega t) + K_2 t^{-2}$)

```
// Definicao da funcao que implementa a entrada Qe:
function [u]=entrada(t)
u=Qei;
// supondo o exemplo, u=K1*sin(w*t)+K2*t^(-2)
endfunction
```

Um outro arquivo texto deve ser criado para usar as funções definidas acima, por exemplo com o nome "`simulacao.sce`":

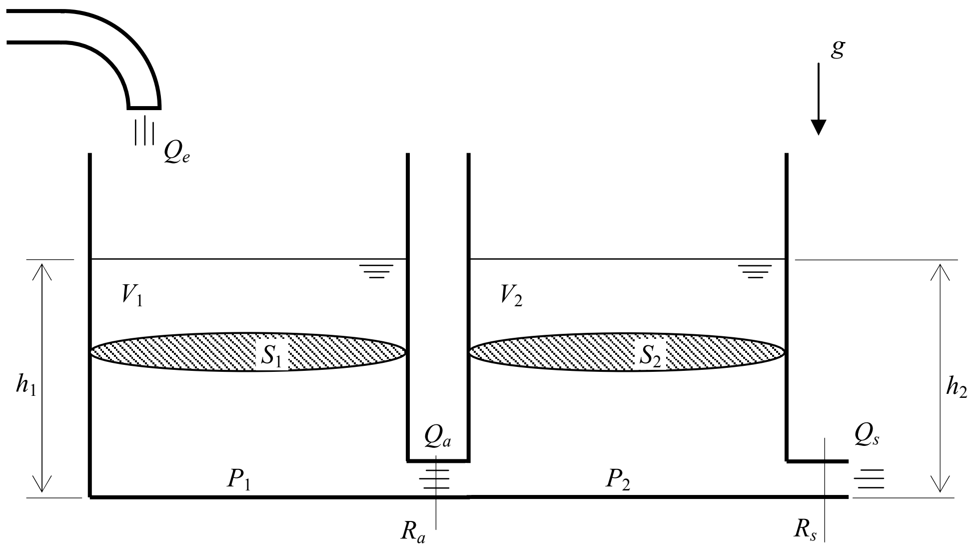
```
// Definicao do arquivo que implementa a simulacao:
clear all  // apaga as variaveis anteriores
// Carregar a funcao que implementa o modelo matematico do sistema
// Use o caminho correto em seu computador:
getf("C:\Documents and Settings\Administrador\Desktop\Curso\reservatorio.sci");

// Definir parametros:
S=10;          // [m^2] Area da secao transversal do reservatorio
```

```
rho=1000;      // [kg/m^3] massa especifica da agua
g=10;          // [m/s^2] aceleração da gravidade na superficie da Terra
R=2*10^8;      // [Pa/(m^3/s)^2] parametro que relaciona pressao e vazao
ho=2;          // [m] nivel do reservatorio em regime
hi=0.1;        // [m] nível adicional desejado
Qei=sqrt(rho*g*(ho+hi)/R);  // [m^3/s] vazao na entrada

// Definir a condicao inicial:
h0=2;          // [m] nivel do reservatorio na condicao inicial

// Definir o vetor t de instantes de tempo:
t=0:10:40000;    // vetor de tempo. Observe que t(1) eh o instante inicial

// Comando que realiza a simulacao numérica:
h=ode(h0,t(1),t,list(tanque,entrada));    // h eh o nivel do reservatorio [m]

// Plotando o resultado em verde:
plot2d(t,h,3)

// Definindo uma variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitoria do reservatorio","Tempo t [s]","Nivel h [m]");
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));
// Colocando uma grade azul no grafico:
xgrid(2)
```

Para realizar a simulação:
Grava-se estes dois arquivos, "**reservatorio.sci**" e "**simulacao.sce**", na pasta informada anteriormente:
"**C:\Documents and Settings\Administrador\Desktop\Curso**"

Abre-se o Scilab, e se executa o seguinte comando:
exec('C:\Documents and Settings\Administrador\Desktop\Curso\simulacao.sce')

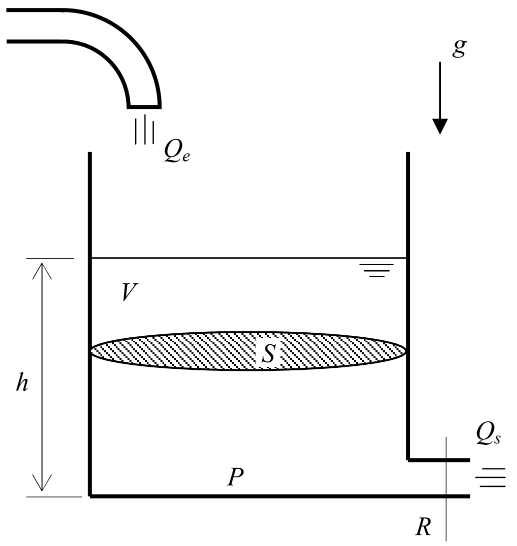
Exercício:
Simular o sistema com dois reservatórios:



$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \left[Q_e - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} \right] \dfrac{1}{S_1} \\ \dot{h}_2 = \left[\sqrt{\dfrac{\rho g}{R_a}(h_1 - h_2)} - \sqrt{\dfrac{\rho g}{R_s} h_2} \right] \dfrac{1}{S_2} \end{cases}$$

Linearização

Considere o sistema de um reservatório:



Reservatório com água

Parâmetros:

S = 10 m^2 - área da seção transversal (constante)

R = 2×10^8 Pa/(m^3/s)^2 - parâmetro que relaciona vazão com queda de pressão (perda de carga)

ρ = 1000 kg/m^3 - massa específica da água

g = 10 m/s^2 - aceleração da gravidade na superfície da terra

Variáveis:

Q_e = 0,010247 m^3/s - vazão de entrada

h: nível do reservatório [m]

V: volume de água no reservatório [m^3]

P: pressão relativa à atmosférica, no fundo do reservatório [Pa]

Q_s: vazão de saída [m^3/s]

Admite-se que a água seja incompressível.

Como foi visto anteriormente, o modelo matemático não linear é dado por:

$$\dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S}$$

Linearização do modelo:

Ponto de equilíbrio:

O ponto de equilíbrio é o estado do sistema em que não há alterações, ou seja, a variação no tempo é nula. No exemplo do tanque, o ponto de equilíbrio $h = h_o$, definido para uma dada entrada constante $Q_e = Q_{eo}$, é dado por:

$$\dot{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h_o}{R}} + Q_{eo} \right) \frac{1}{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_o = \frac{R Q_{eo}^2}{\rho g}$$

Expansão em série de Taylor:

Seja a função $f(h, Q_e)$ definida a seguir:

$$\dot{h} = f(h, Q_e) = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S}$$

A expansão em série de Taylor da função $f(h, Q_e)$ é:

$$f(h, Q_e) = f(h_o, Q_{eo}) + \left. \frac{\partial f(h, Q_e)}{\partial h} \right|_{eq} \cdot (h - h_o) + \left. \frac{\partial f(h, Q_e)}{\partial Q_e} \right|_{eq} \cdot (Q_e - Q_{eo}) + T.O.S.$$

O índice "*eq*" significa que a derivada parcial é calculada no ponto de equilíbrio, ou seja, para $h = h_o$ e $Q_e = Q_{eo}$.
O termo "*T.O.S.*" significa "Termos de Ordem Superior". Estes termos representam a parcela não linear da expansão em série de Taylor e será desprezada para se obter um modelo linear aproximado.

Calculando as derivadas parciais:

$$\left. \frac{\partial f(h, Q_e)}{\partial h} \right|_{eq} = \left. \frac{\partial \left[\left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S} \right]}{\partial h} \right|_{eq} = -\frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{R}} \left. h^{1/2} \right|_{eq} = -\frac{1}{2S} \sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}$$

$$\left.\frac{\partial f(h,Q_e)}{\partial Q_e}\right|_{eq} = \left.\frac{\partial\left[\left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e\right)\frac{1}{S}\right]}{\partial Q_e}\right|_{eq} = \left.\frac{1}{S}\right|_{eq} = \frac{1}{S}$$

Como, no ponto de equilíbrio, temos variação nula ao longo do tempo:

$$\dot{h} = f(h_o, Q_{eo}) = 0$$

$$f(h,Q_e) = f(h_o,Q_{eo}) + \left.\frac{\partial f(h,Q_e)}{\partial h}\right|_{eq}\cdot(h-h_o) + \left.\frac{\partial f(h,Q_e)}{\partial Q_e}\right|_{eq}\cdot(Q_e - Q_{eo}) + T.O.S. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \dot{h} = f(h,Q_e) = 0 - \frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}\cdot(h-h_o) + \frac{1}{S}\cdot(Q_e - Q_{eo}) + T.O.S.$$

Desprezando os termos de ordem superior:

$$\dot{h} \approx -\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}\cdot(h-h_o) + \frac{1}{S}\cdot(Q_e - Q_{eo})$$

Definindo:

$$x = (h - h_o) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{h} - \dot{h}_o = \dot{h} - 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{h}$$

(já que h_o é constante, ou seja, sua derivada no tempo é nula)

$$u = (Q_e - Q_{eo})$$

Obtemos o modelo linear cujo comportamento é aproximadamente igual ao do modelo não linear, pelo menos nas proximidades do ponto de equilíbrio:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}x + \frac{1}{S}u$$

Observe que para uma variação x_i no nível, a vazão adicional necessária será: $u_i = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}x_i$

Esta equação diferencial ordinária, linear e a parâmetros constantes de 1ª ordem pode ser expressa de modo genérico como:

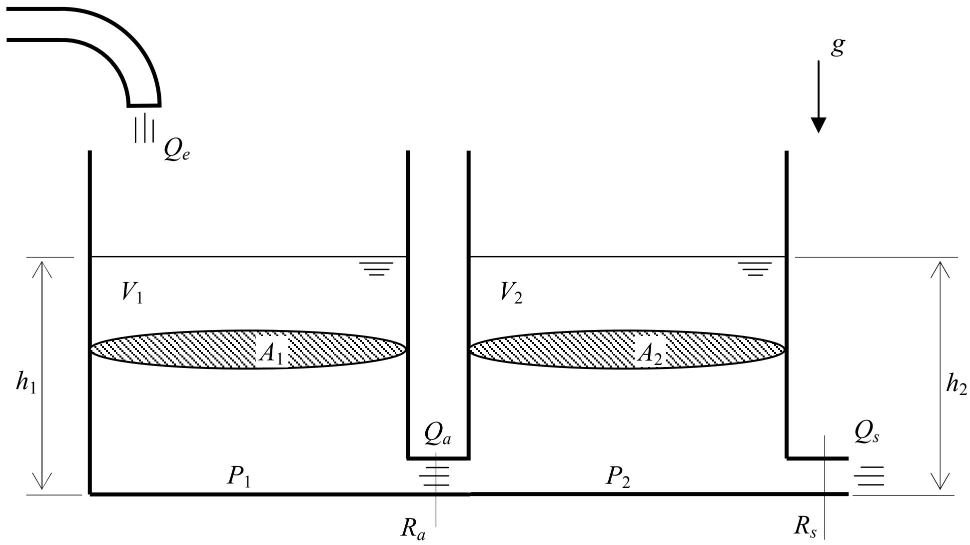
$$\dot{x} = ax + bu$$

Com: $a = -\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}$ e $b = \frac{1}{S}$

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{2S}\sqrt{\frac{\rho g}{R h_o}}}_{a}x + \underbrace{\frac{1}{S}}_{b}u$$

Exercício

Obtenha o modelo linearizado do sistema com dois reservatórios:



Observe que o sistema linear será representado adotando-se as seguintes definições de variáveis:

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ (equações diferenciais)

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$ (equações algébricas)

com $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$x_1 = (h_1 - h_{1o})$$
$$x_2 = (h_2 - h_{2o})$$
$$u = (Q_e - Q_{eo})$$
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2$$

Neste caso, **A**, **B**, **C** e **D** são matrizes, **x** é o vetor de estados, **y** é o vetor de saídas e *u* é a entrada.

<u>Lição de casa</u>:

Termine esta lista.

Estude a lista D.