

$$\mathbf{x}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{dobu (dnů)} \\ \text{počet (školá)} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu}_{x_1} = \begin{bmatrix} 48 \\ 61 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{x_1} = \begin{bmatrix} 18 & -42 \\ -42 & 260 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{věk (roky)} \\ \text{vzdálenost (km)} \\ \text{vážnost (index)} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu}_{x_2} = \begin{bmatrix} 35 \\ 45 \\ 2,5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{x_2} = \begin{bmatrix} 70 & 110 & 1,3 \\ 110 & 2260 & 4,5 \\ 1,3 & 4,5 & 0,1 \end{bmatrix}$$

1) Najděte pravděpodobnostní rozdělení elektronů \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2

$$\mathbf{x}_1 \sim N \left(\begin{bmatrix} 48 \\ 61 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 18 & -42 \\ -42 & 260 \end{bmatrix} \right) \quad \mathbf{x}_2 \sim N \left(\begin{bmatrix} 35 \\ 45 \\ 2,5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 70 & 110 & 1,3 \\ 110 & 2260 & 4,5 \\ 1,3 & 4,5 & 0,1 \end{bmatrix} \right)$$

Najděte podmíněné pravděpodobnostní rozdělení elektron \mathbf{x}_1 za podmínky $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$

$$\boldsymbol{\mu}_x = \begin{bmatrix} 48 \\ 61 \\ \hline 35 \\ 45 \\ 2,5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_x = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & \\ & & \boldsymbol{\Sigma}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -42 & 20 & 20 & 1 \\ -42 & 260 & -110 & -215 & -3 \\ \hline 20 & -110 & 70 & 110 & 1,3 \\ 20 & -215 & 110 & 2260 & 4,5 \\ 1 & -3 & 1,3 & 4,5 & 0,1 \\ \hline & & \boldsymbol{\Sigma}_{11} & & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

$$E(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 48 \\ 61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 20 & 1 \\ -110 & -215 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 70 & 110 & 1,3 \\ 110 & 2260 & 4,5 \\ 1,3 & 4,5 & 0,1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_{2(1)} - 35 \\ x_{2(2)} - 45 \\ x_{2(3)} - 2,5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot 298 \cdot 658}{106 \cdot 601} + \frac{15 \cdot 690}{106 \cdot 601} \cdot x_{2(1)} + \frac{1 \cdot 688}{106 \cdot 601} \cdot x_{2(2)} + \frac{938 \cdot 000}{106 \cdot 601} \cdot x_{2(3)} \\ \frac{14 \cdot 812 \cdot 716}{106 \cdot 601} + \frac{283 \cdot 925}{213 \cdot 202} \cdot x_{2(1)} + \frac{1 \cdot 183}{213 \cdot 202} \cdot x_{2(2)} + \frac{1 \cdot 325 \cdot 900}{106 \cdot 601} \cdot x_{2(3)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 21,56 \\ 138,95 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,15 & 0,02 & 8,80 \\ 1,53 & 0,01 & 12,45 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_2$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{x_1 | x_2 = x_2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{21} = \begin{bmatrix} 18 & -42 \\ -42 & 260 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 20 & 1 \\ -110 & -215 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 70 & 110 & 1,3 \\ 110 & 2260 & 4,5 \\ 1,3 & 4,5 & 0,1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 20 & -110 \\ 20 & -215 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{700 \cdot 773}{106 \cdot 601} & -\frac{300 \cdot 262}{106 \cdot 601} \\ -\frac{300 \cdot 262}{106 \cdot 601} & \frac{15 \cdot 991 \cdot 025}{213 \cdot 202} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,57 & -2,82 \\ -2,82 & 75,00 \end{bmatrix}$$

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim N \left(\begin{bmatrix} 21,56 \\ 188,95 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,15 & 0,02 & 8,80 \\ 1,53 & 0,01 & 12,43 \end{bmatrix} \cdot x_2 ; \begin{bmatrix} 6,57 & -2,82 \\ -2,82 & 75,00 \end{bmatrix} \right)$$

- 2) Zapište rovnici (teoretická) regresní funkce popisující závislost střední hodnoty celkovu X_1 na podmínce znalosti $X_2 = x_2$

$$E(X_1 | X_2 = x_2) = \begin{bmatrix} a_{2 \times 1} \\ 21,56 \\ 188,95 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2 \times 3} \\ 0,15 & 0,02 & 8,80 \\ 1,53 & 0,01 & 12,43 \end{bmatrix} \cdot x_2$$

Pozn.: Přijde mi trochu zvláštní, že střední hodnota počtu (na škálu) vychází tak velká, snad jsem se nedopusťla výpočetní chyby.

- 3) Zapište dvě konkrétní podmíněná rozdělení

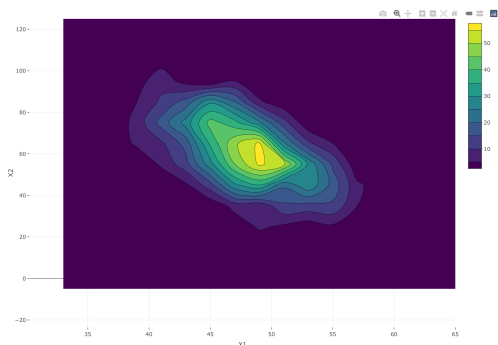
a) $x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{věk} & = & 22 \\ \text{vzdálenost} & = & 10 \\ \text{váženost} & = & 4,0 \end{bmatrix} \quad X_1 \sim N \left(\begin{bmatrix} 60,25 \\ 218,03 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 6,57 & -2,82 \\ -2,82 & 75,00 \end{bmatrix} \right)$

Za podmínky, že věk = 22, vzdálenost = 10 a váženost = 4,0 nám střední hodnoty podmíněného rozdělení $X_1 | X_2 = x_2$ vychází tak, že doba shrávání v nemocnici je 60,25 dní a počet vychází na škálu na hodnotu 218,03.

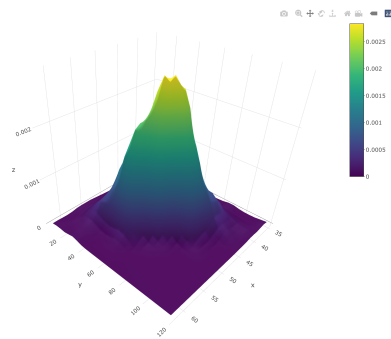
b) $x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{věk} & = & 12 \\ \text{vzdálenost} & = & 70 \\ \text{váženost} & = & 0,2 \end{bmatrix} \quad X_1 \sim N \left(\begin{bmatrix} 26,52 \\ 158,10 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 6,57 & -2,82 \\ -2,82 & 75,00 \end{bmatrix} \right)$

Za podmínky, že věk = 12, vzdálenost = 70 a váženost = 0,2 nám střední hodnoty podmíněného rozdělení $X_1 | X_2 = x_2$ vychází tak, že doba shrávání v nemocnici je 26,52 dní a počet vychází na škálu na hodnotu 158,10.

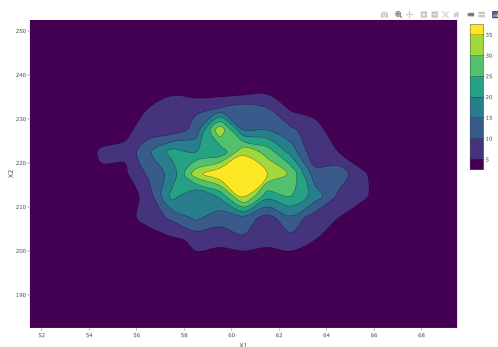
4) Grafy jednotlivých rozdílů



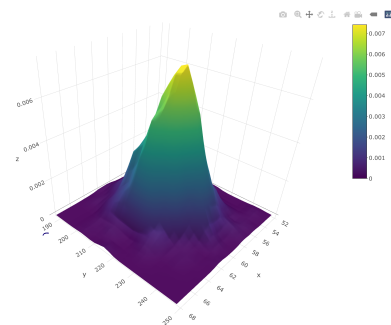
nepodmíněné rozdílů x_1 2D



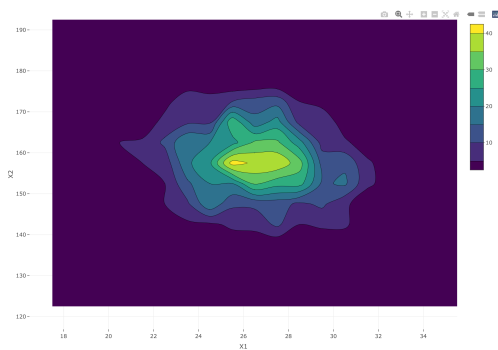
nepodmíněné rozdílů x_1 3D



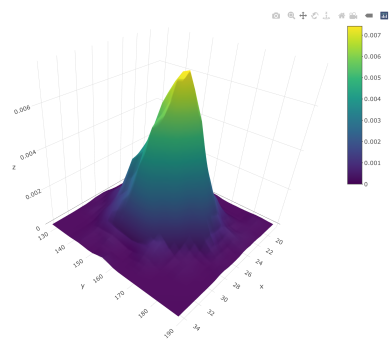
podmíněné rozdílů x_1 viz a) 2D



podmíněné rozdílů x_1 viz a) 3D



podmíněné rozdílů x_1 viz b) 2D



podmíněné rozdílů x_1 viz b) 3D