vektor $\mathbb{X} = (X_1; X_2)'$ vektor středních hodnot $E\mathbb{X} = (1; 2)'$ kov. matice $\Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 4 \end{bmatrix}$

1) Najděte korelační matici $\rho_X = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 1 \end{bmatrix}$

2) Navrhněte takovou lineární transfomaci vektoru $\mathbb{X}$ na vektor $\mathbb{Y}$ takovou, aby platilo
$E\mathbb{Y} = (5; 1)'$

$$\mathbb{Y} = (2X_2 + 1 \; ; \; X_2 - X_1)'$$

3) Tuto transformaci zapište v maticovém i rovnicovém tvaru

$$Y_1 = 2X_2 + 1$$
$$Y_2 = (-X_1) + X_2$$

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Najděte kovarianční a korelační matici $\mathbb{Y}$

$$\Sigma_Y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -7{,}5 & 2{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\rho_Y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{10}}{8} \\ \frac{\sqrt{10}}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

Pro zvolenou kovarianční matici Σ dále najděte

1) determinant a stopu

$$D(\Sigma) = 9 \cdot 4 - 1{,}5^2 = \underline{33{,}75} \qquad \text{stopa}(\Sigma) = 9 + 4 = \underline{13}$$

2) inverzní matici

$$\Sigma^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 9 & 1{,}5 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 \\ 1{,}5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 3{,}75 & -\frac{1}{6} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{45} & \frac{4}{15} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{16}{135} & -\frac{2}{45} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{45} & \frac{4}{15} \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ ověření správnosti $\begin{bmatrix} \frac{16}{135} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{45} & \frac{4}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

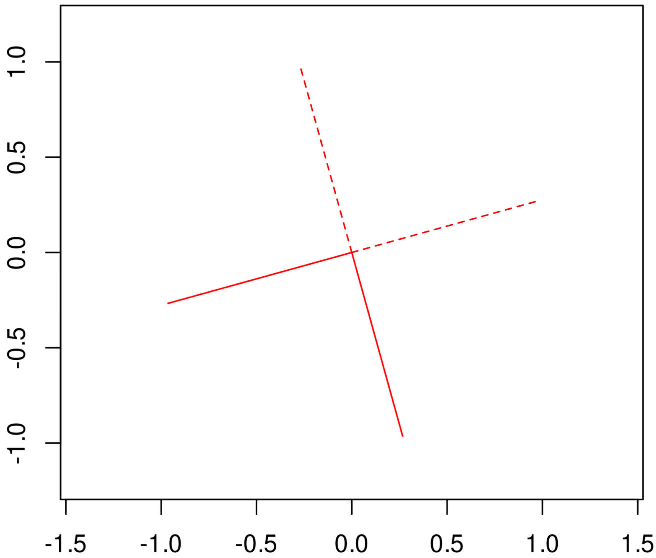
3) charakteristická čísla

→ k výpočtu vlastních čísel využijeme v příkaz eigen$values

vlastní čísla (ε) => 9,415476 a 3,584524

4) ortonormální charakteristické vektory

→ využijeme stejný příkaz v eigen$vectors



5) odmocninovou matici

$$\begin{bmatrix} -0{,}9637149 & 0{,}2669336 \\ -0{,}2669336 & -0{,}9637149 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{9{,}415476} & 0 \\ 0 & \sqrt{3{,}584524} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}9637149 & -0{,}2669336 \\ 0{,}2669336 & -0{,}9637149 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}9847290 & 0{,}3023128 \\ 0{,}3023128 & 1{,}9770197 \end{bmatrix}$$