Статистическая проверка гипотез

1. Статистическая проверка гипотез: основные типы гипотез и общая логическая схема статистического критерия; характеристики качества критерия.
2. Проверка статистических гипотез.
3. Критическая область. Мощность критерия.
4. Отношение правдоподобия и лемма Неймана-Пирсона.
5. Пример построения наиболее мощного критерия.
6. Проверка гипотез об определенных значениях параметров нормальных распределений.
7. Проверка гипотезы о равенстве средних при известной дисперсии.
8. Проверка гипотезы о равенстве средних при неизвестной дисперсии.

Статистическая гипотеза – это предположение о виде распределения и свойствах случайной величины в наблюдаемой выборке данных.

Простая и сложная статистические гипотезы

Простая гипотеза, в отличие от сложной, полностью определяет теоретическую функцию распределения случайной величины.

Например,

1. гипотезы «вероятность появления события в схеме Бернулли равна 1/2»,
2. «закон распределения случайной величины нормальный с параметрами $a = 0$, $a^2 = 1$»
3. «вероятность появления события в схеме Бернулли заключена между 0,3 и 0,6»,
4. «закон распределения не является нормальным»

Простая – это гипотеза содержащая только одно предположение.

Сложная – гипотеза состоящая из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Проверяемую гипотезу называют ***нулевой (основной)***, обозначают её H_0.

Выдвинутая гипотеза может быть принята или отвергнута.

Наряду с выдвинутой гипотезой H_0 рассматривают и противоречащую ей гипотезу, которую называют ***конкурирующей (альтернативной)*** и обозначают H_1.

В зависимости от выборочных данных принимается либо основная гипотеза, либо конкурирующая.

Задача: проверить, верна ли нулевая гипотеза H_0 при альтернативной гипотезе H_1?

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка 1-го рода
Неверна	Ошибка 2-го рода	Правильное решение

Обозначим через α – вероятность допустить ошибку 1-го рода, через β – 2-го рода.

Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, то есть отвергнуть верную гипотезу H_0, называют ***уровнем значимости***.

Общая схема проверки статистических гипотез

1 этап

Задаём уровень значимости α.

α – вероятность ошибки 1-го рода (ошибочно отвергнуть верную гипотезу)

В качестве α обычно берётся малое значение:

$$0.05, \quad 0.01, \quad 0.005, \quad 0.001.$$

2 этап

Строим случайную величину K, называемую ***статистическим критерием***, для которой выполняются следующие условия:

1) она является функцией от выборочных данных: $K=K(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

2) её значения позволяют судить о «расхождении выборки с гипотезой H_0», то есть о том, надо принимать или отвергать гипотезу H_0;

3) распределение этой величины известно.

3 этап

Вычисляем значения критерия, подставляя в него выборочные данные. Это число называют ***наблюдаемым значением критерия*** и обозначают $K_{набл}$.

4 этап

Находим ***критическую область*** данного критерия, то есть совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Все остальные значения критерия образуют область, называемую ***областью принятия гипотезы***.

Если наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, то гипотезу отвергаем, если в область принятия гипотезы, то принимаем.

Точки, которые отделяют критическую область от области принятия гипотезы, называют ***критическими точками***.

Чаще всего встречаются следующие виды критических областей:

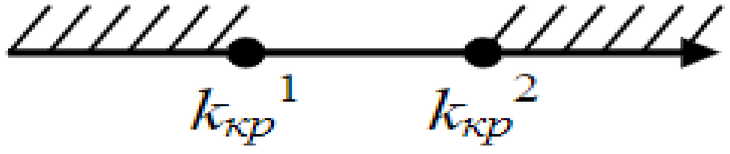
а) левосторонняя

$K < k_{кр}$

б) правосторонняя

$K > k_{кр}$

в) двусторонняя



$K < k_{кр}^1$

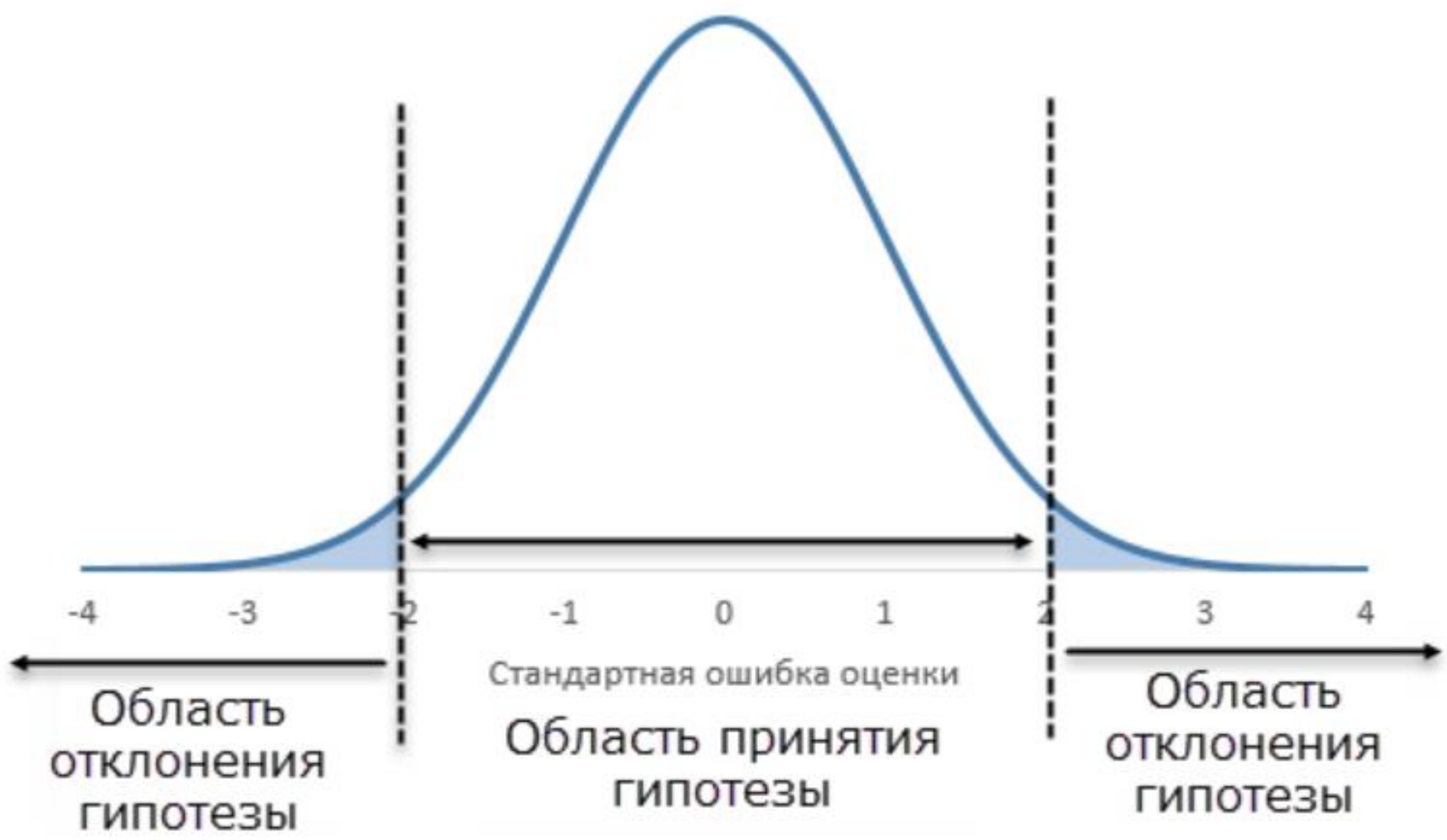
$K > k_{кр}^2$

Критическую область W целесообразно находить согласно следующим требованиям:

1. $p(K \in W) = \alpha$
2. вероятность β ошибки 2-го рода – минимальная, то есть вероятность $(1-\beta)$ – максимальная

Вероятность $(1-\beta)$ не допустить ошибку 2-го рода, то есть отвергнуть гипотезу H_0, когда она неверна, называется ***мощностью*** критерия.

1. $p(K \in W) = \alpha$
2. мощность критерия – максимальная



-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
Стандартная ошибка оценки
Область отклонения гипотезы
Область принятия гипотезы
Область отклонения гипотезы

Схема проверки статистических гипотез

1. Задаём уровень значимости.
    - зависит от «тяжести последствий» ошибок 1-го и 2-го рода для каждой конкретной задачи
2. Строим статистический критерий.
    - для каждой гипотезы имеет свой вид
    - описаны в литературе

3. Вычисляем наблюдаемое значение критерия.

- подставляем в формулу выборочные данные

4. Находим критическую область и проверяем, попадает ли в неё наблюдаемое значение критерия.

- критическая область зависит от вида конкурирующей гипотезы
- критические точки находятся по специальным таблицам или с помощью компьютера

Критерий Стьюдента

Известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону, но его параметры неизвестны.

a, σ – параметры распределения $\qquad M(X) = a$

Проверить гипотезу: $H_0 : a = a_0$

a_0 – некоторое число

Критерий:

$$T = \frac{\overline{x_в} - a_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

$\overline{x_в}$ – выборочная средняя

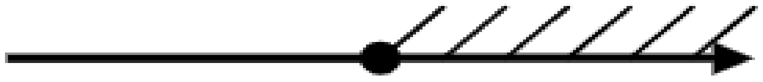
n – объём выборки

s – исправленное среднее квадратическое отклонение

T имеет распределение Стьюдента с (n-1) степенями свободы

1. $H_1 : a > a_0$

Критическая область W – правосторонняя:



$t_{пр,кр}$

$F(x)$ – функция распределения Стьюдента с $(n$-1) степенями свободы

$$F(t_{пр,кр}) = 1 - \alpha \qquad \Rightarrow \qquad t_{пр,кр} = F^{-1}(1-\alpha)$$

2. $H_1 : a < a_0$

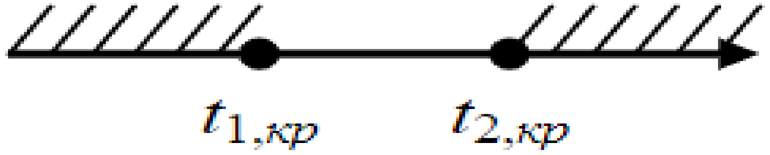
Критическая область W – левосторонняя:

$F(x)$ – функция распределения Стьюдента с (n-1) степенями свободы

$$F(t_{лев,кр}) = \alpha \quad \Rightarrow \quad t_{лев,кр} = F^{-1}(\alpha)$$

3. $H_1 : a \neq a_0$

Критическая область W – двусторонняя:



$F(x)$ – функция распределения Стьюдента с (n-1) степенями свободы

$$t_{2,кр} = F^{-1}(1-\alpha/2), \quad t_{1,кр} = -t_{2,кр}$$

или

$$t_{1,кр} = F^{-1}(\alpha/2), \quad t_{2,кр} = -t_{1,кр}$$

Пример.

Проектный контролируемый размер изделий, изготовляемых станком-автоматом, $a = 35$ *мм*. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

x_i	34.8	34.9	35.0	35.1	35.3
n_i	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости 0.05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 35$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 35$.

x_i	34.8	34.9	35.0	35.1	35.3
n_i	2	3	4	6	5

$n = 20$

$\alpha = 0.05$

$H_0: a = 35$ $\qquad H_1: a \neq 35$ $\qquad a_0 = 35$

$$T = \frac{\overline{x_в} - a_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

$\overline{x_в}$ – выборочная средняя

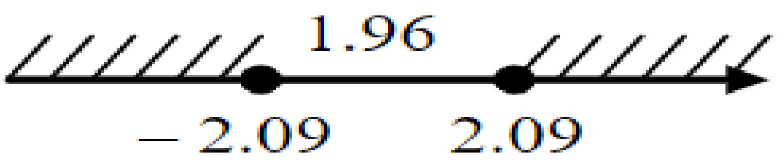
s – исправленное среднее квадратическое отклонение

$\overline{x_в} = 35.07$

$s = 0.16$

$$T_{набл} = \frac{35.07 - 35}{0.16} \cdot \sqrt{20} \approx 1.96$$

Критическая область двусторонняя:



Принимаем нулевую гипотезу, то есть станок обеспечивает проектный размер изделий.