ЛЕКЦИЯ 2

Статистические оценки параметров распределения

1.Статистические оценки параметров распределения
2.Точечные и интервальные оценки. Доверительный интервал, точность оценки, доверительная вероятность (надежность)
3.Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки
4.Точечная оценка генерального среднего по выборочному среднему
5.Точечная оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии
6.Метод моментов для точечной оценки параметров распределения
7.Метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения
8.Интервальные оценки
9.Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известном s.
10.Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестном s.
11.Интервальная оценка среднего квадратического отклонения s нормального распределения

1. Статистические оценки параметров распределения

Пусть имеется генеральная совокупность объема N, исследуется случайная величина X, сделана выборка объема n и получены значения случайной величины $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

О **Выборка** – последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$, распределение которых совпадает с распределением случайной величины X в генеральной совокупности. Конкретный набор чисел $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, полученный при выборе n объектов из генеральной совокупности, именуется **реализацией выборки**.

При повторном отборе объектов возникнет иная реализация выборки, иной набор чисел $x'_1,\ x'_2, \ldots, x'_n$. Таким образом, введенные ранее числовые характеристики выборочного распределения оказываются зависящими от конкретной реализации выборки, т.е. **случайными** величинами.

О **Статистическая оценка неизвестного параметра теоретического распределения** – функция от наблюдаемых случайных величин $X_1,\ X_2,\ldots,X_n$, т.е., случайная величина $\Theta^*\ (X_1,\ X_2,\ldots,X_n)$, которая при различных реализациях выборки $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$; $x'_1,\ x'_2,\ldots,x'_n$;... принимает значения Θ_1^*, Θ_2^*,...; ее значение служит оценкой неизвестного параметра теоретического распределения Θ.

2. Точечные и интервальные оценки. Доверительный интервал, точность оценки, доверительная вероятность

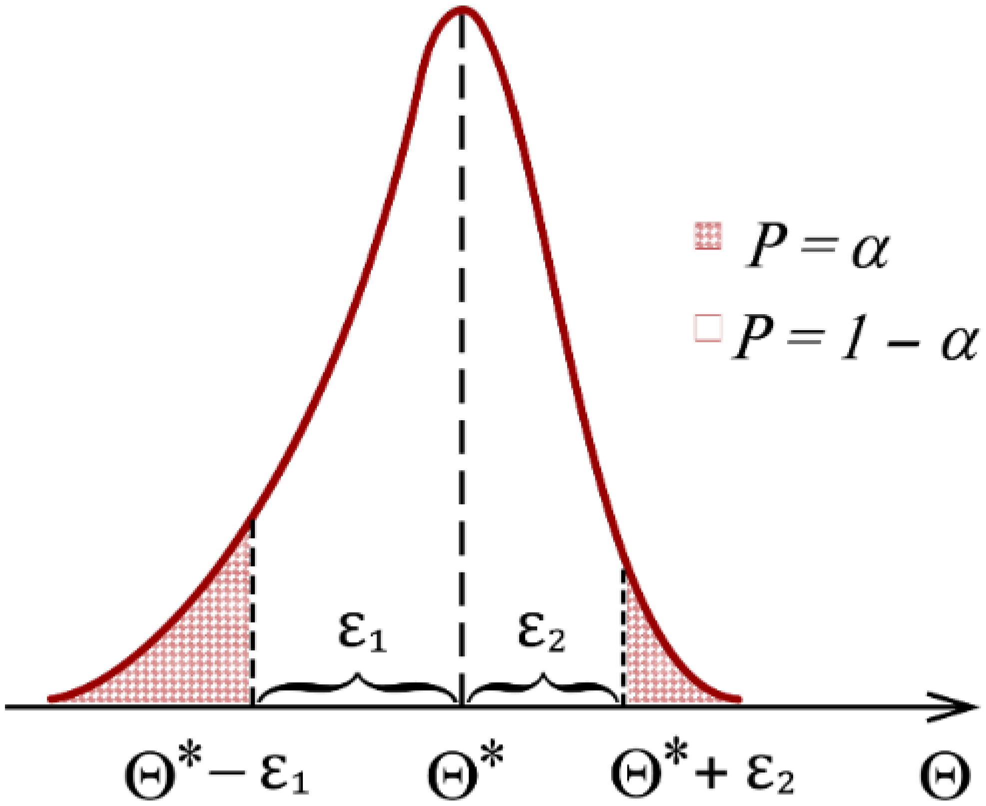
О **Точечная оценка неизвестного параметра** Θ – случайная функция $\Theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, значение которой для любой реализации выборки принимают за приближенное значение параметра Θ:

$$\Theta \approx \Theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

О **Интервальная оценка неизвестного параметра** Θ – случайные функции $\Theta_1^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\Theta_2^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, такие, что $P(\Theta_1^* < \Theta < \Theta_2^*) = \gamma = 1 - \alpha$,
т.е. интервал (Θ_1^*, Θ_2^*) заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ с вероятностью γ.

Доверительный интервал и доверительные границы

Сам интервал носит название **доверительного интервала**, величина $\gamma = 1 - \alpha$ называется **доверительной вероятностью** оценки (**надежностью, коэффициентом доверия**), числа Θ_1^* и Θ_2^* – **доверительными границами**, α – **уровнем значимости.**



Доверительные границы часто откладывают от $\Theta^*\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ – точечной оценки параметра Θ:

$$\Theta_1^* = \Theta^* - \varepsilon_1\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right),$$

$$\Theta_2^* = \Theta^* + \varepsilon_2\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right).$$

$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} = \frac{\Theta_2^*-\Theta_1^*}{2}$ называется **точностью оценки.**

Если плотность распределения $\Theta^*\left(X_1,\ X_2,\ldots,X_n\right)$ симметрична относительно своей медианы, то нижняя и верхняя границы доверительного интервала симметричны относительно точечной оценки $\Theta^*\left(X_1,\ X_2,\ldots,X_n\right)$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ и

$$P\left(\left|\Theta^*\left(X_1,\ X_2,\ldots,X_n\right)-\Theta\right|<\varepsilon\right)=\gamma=\mathbf{1}-\alpha.$$

В этом случае точность ε равна половине ширины доверительного интервала.

При несимметричной плотности распределения $\Theta^*\left(X_1,\ X_2,\ldots,X_n\right)$ для нахождения доверительных границ обычно пользуются условиями:

$$P\left(\Theta < \Theta^*\left(X_1,\ X_2,\ldots,X_n\right) - \varepsilon_1\right) = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\left(\Theta > \Theta^*\left(X_1,\ X_2,\ldots,X_n\right) + \varepsilon_2\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

3. Несмещенные, состоятельные и эффективные оценки

O Статистическая оценка Θ^* называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно Θ, т.е. $M\left[\Theta^*\right] = \Theta$.

O Статистическая оценка Θ^* называется **состоятельной**, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\Theta^* - \Theta\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

O Статистическая оценка Θ^* называется **эффективной**, если при данном объеме выборки из всех возможных оценок она имеет наименьшую дисперсию.

4. Точечная оценка генерального среднего по выборочному среднему

Выберем в качестве оценки генерального среднего $M[X] = a$ среднее арифметическое случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$: $\overline{X_B} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$; для конкретной реализации выборки значения этой величины равны выборочным средним. Найдем математическое ожидание оценки $\overline{X_B}$:

$$M\left[\overline{X_B}\right] = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot a = a,$$

следовательно, $\overline{X_B}$ – **несмещенная** оценка $M[X]$.

По теореме Чебышева

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

используя предыдущее равенство, это можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X_B} - M\left[X\right]\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

т.е. по определению, $\overline{X_B}$ – **состоятельная** оценка $M\left[X\right]$. Если случайная величина Xраспределена нормально, то оценка $\overline{X_B}$ будет и **эффективной**. На практике во всех случаях для оценки математического ожидания используется среднее арифметическое $\overline{X_B}$ (обозначается также $\overline{X}$).

5. Точечная оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии

Покажем, что выборочная дисперсия $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_B}\right)^2$ (среднее значение квадрата отклонения) является смещенной оценкой генеральной дисперсии. Найдем математическое ожидание D_B:

$$M\left[D_B\right] = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_B}\right)^2\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2\right) - \frac{1}{n^2}M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 \frac{1}{n}\cdot M\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2\right) -$$

$$-\frac{1}{n^2}\cdot M\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 2\left(\underbrace{X_1X_2 + X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_{n-1}X_n}_{C_n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\cdot\left(MX_1^2 + MX_2^2 + \ldots + MX_n^2\right) - \frac{2}{n^2}\cdot\left(MX_1\cdot MX_2 + MX_1\cdot MX_2 + MX_2\cdot MX_3 + \ldots + MX_{n-1}\cdot MX_n\right.$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\cdot\left(\underbrace{MX^2 + MX^2 + \ldots + MX^2}_{n}\right) -$$

$$-\frac{2}{n^2}\cdot\left(\underbrace{MX\cdot MX + MX\cdot MX + \ldots + MX\cdot MX}_{\frac{n(n-1)}{2}}\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\cdot n\cdot MX^2 - \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n\left(n-1\right)}{2}\cdot\left(MX\right)^2 = \frac{n-1}{n}\cdot MX^2 - \frac{n-1}{n}\cdot\left(MX\right)^2 =$$

Так как $M\left[D_B\right] \neq DX$, **выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии**. Для получения несмещенной оценки достаточно перейти к исправленной выборочной дисперсии: $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$,

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X_B}\right)^2,$$

Очевидно, что **исправленная выборочная дисперсия является несмещенной оценкой генеральной дисперсии**.

Покажем, что **исправленная выборочная дисперсия является состоятельной оценкой генеральной дисперсии.** Рассмотрим выборочную дисперсию; для ее состоятельности необходимо, чтобы для $\forall\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|D_B - DX\right| < \varepsilon\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_B}\right)^2 - M\left[\left(X - M\left[X\right]\right)^2\right]\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - M\left[X^2\right]\right) - \left(\left(\overline{X_B}\right)^2 - \left(M\left[X\right]\right)^2\right)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\alpha_2^*\left[X\right] - \alpha_2\left[X\right]\right) - \left(\left(\alpha_1^*\left[X\right]\right)^2 - \left(\alpha_1\left[X\right]\right)^2\right)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\alpha_2^*\left[X\right]-\alpha_2\left[X\right]\right|<\varepsilon\right)=1$$

и

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\alpha_1^*\left[X\right]\right)^2-\left(\alpha_1\left[X\right]\right)^2\right|<\varepsilon\right)=1,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\alpha_2^*\left[X\right]-\alpha_2\left[X\right]\right)-\left(\left(\alpha_1^*\left[X\right]\right)^2-\left(\alpha_1\left[X\right]\right)^2\right)\right|<\varepsilon\right)=1,$$

т.е. **выборочная дисперсия – состоятельная оценка генеральной дисперсии.** Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}=1$,

$$\lim_{n\to\infty} s^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty} D_B=DX,$$

следовательно, и **исправленная выборочная дисперсия является состоятельной оценкой генеральной дисперсии.**

6. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения

Оценка одного параметра. Пусть известен вид плотности распределения $f(x,\theta)$, зависящей от одного параметра θ, но не известно значение этого параметра. Для нахождения его оценки достаточно составить одно уравнение, например, для начальных моментов первого порядка: $\bar{x}_B = M(X)$. Так как математическое ожидание признака генеральной совокупности $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,\theta)\,dx = \varphi(\theta)$ зависит от неизвестного параметра θ, а выборочное среднее $\bar{x}_B = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ зависит от реализации выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то после решения уравнения $\varphi(\theta) = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ мы получаем $\theta^* = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – оценку неизвестного параметра как функцию значений конкретной выборки.

Пример 1.

Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ (x \geq 0)$ и неизвестным параметром λ. Методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить значение этого параметра.

Решение.

$$M(X) = \int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \|\lambda x = t\| = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty t e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda} = \bar{x}_B,$$

т.е. $\lambda = \frac{1}{\bar{x}_B}$.

Итак, оценка параметра распределения $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_B}$.

Оценка двух параметров. Пусть задан вид плотности распределения, зависящей от двух неизвестных параметров, $f(x, \theta_1, \theta_2)$. Для их оценки можно, например, приравнять начальные моменты первого порядка и центральные моменты второго порядка, т.е.

$$\alpha_k^*[X] = \overline{x^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^k, \ \ \mu_2^*[X] = \mu_2[X]$$

или

$$M(X) = \bar{x}_B, \ \ D(X) = D_B.$$

Как и в случае с одним параметром, теоретические моменты есть функции параметров $\theta_1, \ \theta_2$, а выборочные моменты зависят от реализации выборки. Решая полученную систему относительно неизвестных параметров, получаем их точечные оценки:

$$\theta_1{}^* = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \theta_2{}^* = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 2.

Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью распределения

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

и неизвестными параметрами a и σ. Методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить значение этих параметров.

Решение. Приравняем теоретические и эмпирические средние и дисперсии. Как известно, для нормального распределения $M\left(X\right)=a$, $D\left(X\right)=\sigma^2$.

Тогда

$$a^*=\bar{x}_B=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \qquad \sigma^*=\sqrt{D_B}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x_B}\right)^2}.$$

7. Метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения

Дискретные случайные величины. Пусть X – дискретная случайная величина, для которой в результате опыта получена выборка значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вид закона распределения известен; закон содержит неизвестный параметр θ, для которого требуется найти точечную оценку на основании данных выборки.

Обозначим вероятность $P(X = x_i) = p(x_i; \theta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента θ и данных выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = p(x_1; \theta) \cdot p(x_2; \theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n; \theta).$$

В качестве точечной оценки параметра θ принимается значение $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает наибольшего значения. Полученную оценку называют **оценкой максимального правдоподобия**.

В качестве точечной оценки параметра θ принимается значение $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает наибольшего значения. Полученную оценку называют **оценкой максимального правдоподобия**.

Так как функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении θ, при практических вычислениях чаще используют вторую функцию, называемую **логарифмической функцией правдоподобия**:

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \ln p(x_1; \theta) + \ln p(x_2; \theta) + \ldots + \ln p(x_n; \theta).$$

❗ Оценки, полученные методом максимального правдоподобия:

- состоятельны (но могут оказаться смещенными);
- распределены асимптотически нормально (при $n \to \infty$ закон их распределения приближается к нормальному);
  среди всех асимптотически нормальных оценок оценки, полученные
- методом максимального правдоподобия, имеют наименьшую дисперсию, т.е., если для параметра θ существует эффективная оценка $\theta^*{}_{\text{эфф}}$, то она совпадает с той, что полученна методом максимального правдоподобия.

Пример 3.

Случайная величина X распределена по закону Пуассона:

$$P_m\left(X = x_i\right) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где m – длина серии испытаний, x_i – число появлений события в i-й серии испытаний, n – объем выборки (число проведенных серий испытаний), λ – неизвестный параметр распределения. Методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить значение этого параметра.

Решение:

Составим логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L\left(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_n; \lambda\right) = \ln\left(\frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!} \cdot \frac{\lambda^{x_2} e^{-\lambda}}{x_2!} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{\lambda^{x_n} e^{-\lambda}}{x_n!}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ \ldots \ \cdot x_n!} e^{-n\lambda}\right) = \left(\sum x_i\right) \ln\lambda - n\lambda - \ln\left(x_1! \cdot x_2! \cdot \ \ldots \ \cdot x_n!\right).$$

Уравнение правдоподобия: $\frac{d\ln L}{d\lambda} = \frac{\left(\sum x_i\right)}{\lambda} - n = 0$,

его решение (критическая точка): $\lambda = \frac{\left(\sum x_i\right)}{n} = \overline{x_B}$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума: $\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{\left(\sum x_i\right)}{\lambda^2} < 0$, т.е. $\lambda = \overline{x_B}$ – точка максимума, и в качестве оценки максимального правдоподобия параметра λ распределения Пуассона нужно взять выборочное среднее $\lambda^* = \overline{x_B}$.

Непрерывные случайные величины. Пусть X – непрерывная случайная величина, для которой в результате опыта получена выборка значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вид плотности распределения известен; плотность содержит неизвестный параметр θ, $f(x) = f(x, \theta)$, для которого требуется найти точечную оценку на основании данных выборки.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X называют функцию аргумента θ и данных выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n; \theta).$$

Пример 4.

Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения $f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x}\ \left(x\geq 0\right)$ и неизвестным параметром λ. Методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить значение этого параметра.

Решение. Составим логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda\right) = \ln\left(\lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda e^{-\lambda x_n}\right) =$$

$$= \ln\left(\lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}\right) = n \ln \lambda - \lambda\left(\sum x_i\right).$$

Уравнение правдоподобия: $\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum x_i\right) = 0,$

его решение (критическая точка): $\lambda = \frac{n}{\left(\sum x_i\right)} = \left(\frac{\left(\sum x_i\right)}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{\overline{x}_B}.$

Проверим выполнение достаточных условий экстремума: $\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$, т.е. $\lambda = \frac{1}{\overline{x}_B}$ – точка максимума, и в качестве оценки максимального правдоподобия параметра λ показательного распределения нужно взять величину, обратную выборочному среднему, $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_B}$, что совпадает с оценкой, полученной методом моментов.

Пример 5.

Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

и неизвестными параметрами a и σ. Методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить значение этих параметров.

Решение.

Составим логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, \sigma\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x_1-a\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x_2-a\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x_n-a\right)^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\left(x_i-a\right)^2}\right) =$$

$$= -n\ln\sigma - \frac{n}{2}\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum\left(x_i-a\right)^2.$$

Уравнения правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{\sum x_i - na}{\sigma^2} = 0, \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum (x_i - a)^2}{\sigma^3} = 0,$$

их решение (критическая точка):

$$a = \frac{\left(\sum x_i\right)}{n} = \overline{x_B}, \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - a)^2}{n} = D_B$$

8. Интервальные оценки

При получении точечной оценки необходимо знать лишь выражение для оценки $\Theta^* \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ как функцию данных выборки, а для получения интервальной оценки необходимо также знать закон распределения $\Theta^* \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$, с помощью которого рассчитывается вероятность, вид генерального распределения и значение параметров распределения, которые и подлежат оценке.

Первое затруднение преодолевается тем, что иногда вид генерального распределения может постулироваться (нормальное распределение, равномерное распределение и т.д.). В некоторых случаях при достаточно большом объеме выборки реальную функцию распределения оценки с достаточной точностью можно заменить асимптотической (соответствующей $n \to \infty$). В частности, из теоремы Ляпунова следует, что распределения выборочной средней $\overline{X_B} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ или относительной частоты значения признака $w_i = \frac{n_i}{n}$ распределены асимптотически нормально независимо от вида генерального распределения.

Попытки разрешения второго затруднения приводят к двум способам построения интервальной оценки: **приближенному** и **точному**.

Приближенный способ состоит в замене неизвестных параметров генеральной совокупности, от которых зависит распределение Θ^*, на их точечные оценки, полученные в результате выборки. Далее оценка строится, как если бы параметры распределения были бы известны.

Точный способ может быть использован лишь в том случае, когда известен закон генерального распределения. При этом строятся вспомогательные случайные величины, распределение которых не зависит от неизвестных параметров генеральной совокупности, а зависит лишь от объема выборки. В частности, при оценке среднего значения нормально распределенной генеральной совокупности можно использовать оценку:

$$\Theta^* = T = \frac{M\left[X\right] - \overline{X_B}}{\sqrt{\frac{n}{n-1}D_B}} \cdot \sqrt{n},$$

которая подчиняется распределению Стьюдента, зависящему только от объема выборки n.

9. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известном

Пусть случайная величина X генеральной совокупности распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $\sigma = \sqrt{D[X]}$, $a = M[X] = \overline{X}$, при этом среднее квадратическое отклонение s считаем известным.

Пусть сделана выборка объема n и вычислена $\overline{X_B}$, которая является точечной оценкой математического ожидания *a* генеральной совокупности.

Так как $\overline{X_B} = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ – среднее арифметическое случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, распределенных так же, как и признак генеральной совокупности *X*, то закон распределения $\overline{X_B}$ также нормален, $M[X_B] = M[X] = a$, а дисперсия случайной величины $\overline{X_B}$ в n раз меньше дисперсии случайной величины X: $\sigma^2\left[\overline{X_B}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$.

1) Определим, с какой надежностью математическое ожидание a покрывается доверительным интервалом при заданной точности ε, т.е. найдем $P\left(\left|\overline{X_B}-a\right|<\varepsilon\right)$ или

$[P\left(\overline{X_B}-\varepsilon<a<\overline{X_B}+\varepsilon\right)$.

Тогда,

$$P\left(\left|\overline{X}_{\text{в}}-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\left(\overline{X}_{\text{в}}\right)}\right)=2\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi\left(t\right)=\gamma,$$

где $t=\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$,

где $\Phi\left(t\right)$ – функция Лапласа. Зная σ, ε и n, можно найти по таблице значений функции Лапласа надежность γ оценки $\overline{X_B}$ математического ожидания α.

2) По выборочному значению математического ожидания $\overline{X_B}$ и известному σ найти доверительный интервал, который с заданной надежностью γ покрывает математическое ожидание α генеральной совокупности. Это и есть задача получения интервальной оценки $\overline{X_B}$. Используя таблицы значений функции Лапласа, по γ определяют $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$, отсюда $\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Таким образом получают искомый доверительный интервал $\left(\overline{X_B} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_B} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, с надежностью γ покрывающий неизвестный параметр α; точность оценки $\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

3) По заданным σ, ε и γ, используя соотношение $2\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma$, найти объем выборки n. Решая уравнение $2\left(t\right) = \gamma$, по γ находят t, а затем из $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ определяют минимальный объем выборки $n = \left(\frac{t\sigma}{\varepsilon}\right)^2$.

Пример 5.

Измерение массы 50 случайно отобранных после изготовления деталей дало $\overline{X_B{}^*}$ = 10 г. Есть основания полагать, что генеральная дисперсия $\sigma^2 = 0,09.$

Решение:

Дано: $n = 50,\ \overline{X_B^*} = 10,\ \sigma^2 = 0,09$ и $P = 0,95$. Введем дополнительную гипотезу, основываясь на теореме Ляпунова: масса деталей распределена по нормальному закону, что позволяет использовать соответствующую функцию распределения. В предлагаемых обстоятельствах можно поставить 3 различные задачи.

1) Определить с вероятностью $P = 0,95$ доверительные границы для средней массы деталей $\overline{X}$ во всей партии.
Из равенства $P = 2\,(t) = 0,95$ по таблицам функции Лапласа находим $t = 1,96$, откуда

$$\varepsilon = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 0,3}{\sqrt{50}} = 0,083.$$

Таким образом, получаем, что с вероятностью 0,95 средняя масса содержится в промежутке [9,917; 10,083].

2) Определить при тех же условиях, с какой доверительной вероятностью можно гарантировать ошибку выборки, не превышающую 0,05. По величине $\varepsilon = 0,05$ вычисляем

$$t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,05 \cdot \sqrt{50}}{0,3} = 1,1785$$

.

По таблицам функции Лапласа $P = 2\,(1,1785) \approx 0,76.$

3) Определить объем выборки, при котором указанная предельная ошибка ε = 0,05 гарантируется с вероятностью $P = 0,95$. Из $P = 0,95$ находим $t = 1,96$, откуда

$$n = \left(\frac{t\sigma}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 0,3}{0,05}\right)^2 \approx 138,2976 \approx 140.$$

10. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестном

Для решения поставленной в заголовке задачи используется закон распределения случайной величины $T=\{t\}, t=\frac{\overline{X}_{в}-a}{s_{в}/\sqrt{n}}$, где $s_{в}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}_{в}\right)^2}$ – несмещенная оценка среднего квадратичного отклонения.

Стьюдент (псевдоним английского математика Госсета) показал, что закон распределения случайной величины T (плотность вероятности) описывается выражением

$$f_n(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Здесь $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция Эйлера. Это распределение называется распределением Стьюдента.

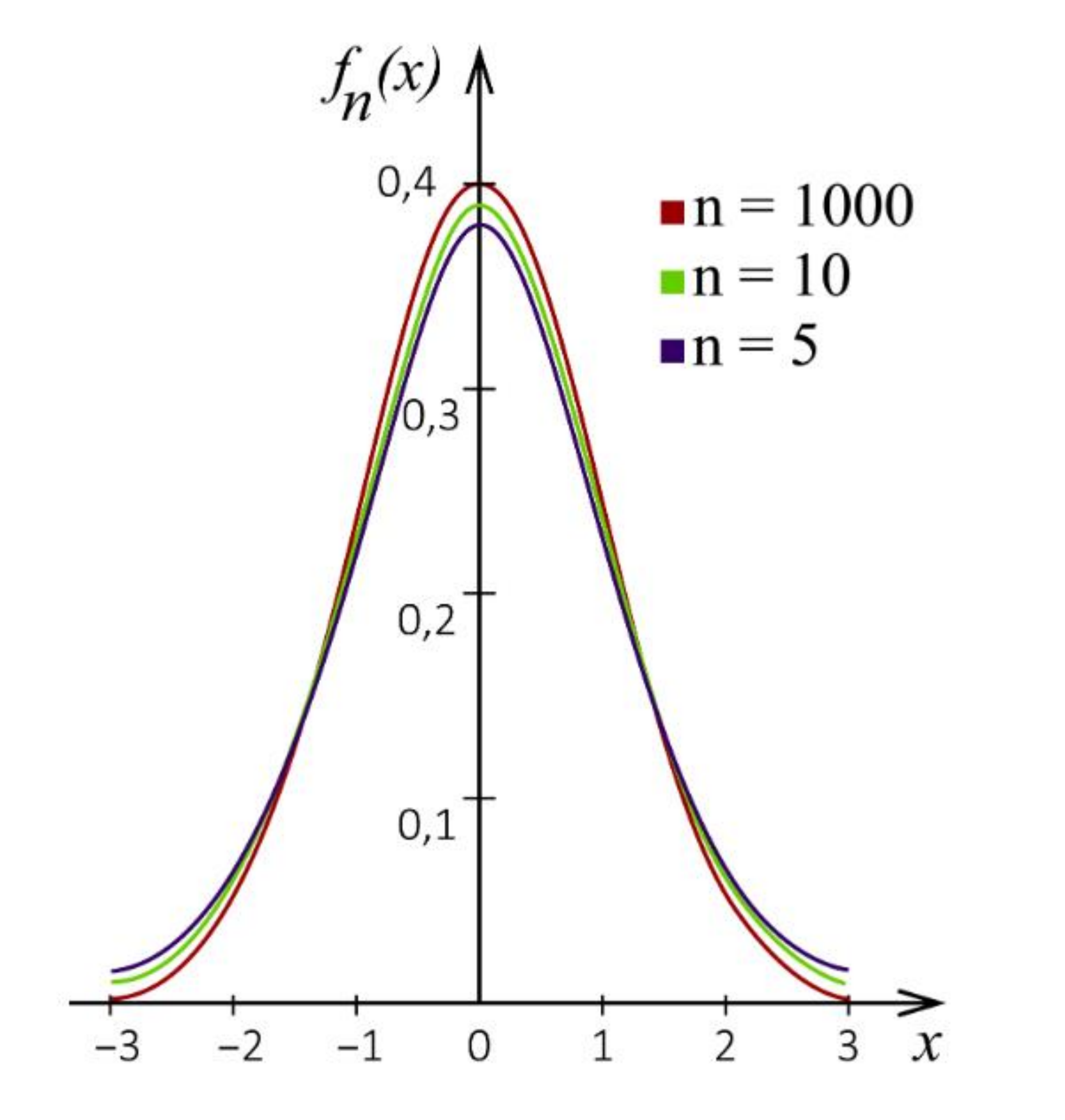


Рис. 2. График плотности распределения Стьюдента при различных числах степеней свободы

График $f_n\left(t\right)$ похож на график плотности вероятности нормального закона, но $f_n\left(t\right)$ определяется только объемом выборки n и не зависит от неизвестных параметров α и σ. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Очевидно, что

$$P\left(\left|t\right| < t_\gamma\right) = \int\limits_{-t_\gamma}^{t_\gamma} f_n\left(t\right) dt = \gamma.$$

Функция $f_n(t)$ четная, поэтому можно записать $\gamma = 2\int\limits_0^{t_\gamma} f_n(t)\,dt$. Это равенство позволяет найти t_γ по заданным n и γ. Во всех книгах по математической статистике имеются таблицы, по которым можно найти t_γ, зная n и γ. Учитывая, что $t = \frac{\overline{X}_в - a}{s_в/\sqrt{n}}$, можно записать $P\left(|t| < t_\gamma\right) = P\left(\frac{\left|\overline{X}_в - a\right|}{s_в/\sqrt{n}} < t_\gamma\right) = \gamma$, или $P\left(\left|\overline{X}_в - a\right| < \frac{t_\gamma s_в}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$.

Таким образом, определив t_γ по таблице Стьюдента, можно найти доверительный интервал, покрывающий с надежностью g математическое ожидание *a* генеральной совокупности.

Итак, по имеющейся выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ находим $\overline{X}_в$ и $s_в$. Затем, задаваясь надежностью γ, определяем доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание *a*. Другими словами, находим интервальную оценку математического ожидания.

Пример 5.

Случайная величина X имеет нормальное распределение. С надежностью $\gamma = 0,95$ найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания *a*, если при объеме выборки $n = 36$ получено $\overline{X}_{\text{в}} = 24$, $s = 3$.

Решение. По таблицам распределения Стьюдента при $n = 36$ и $\gamma = 0,95$ находим $t_\gamma = 2,03$. Тогда точность оценки $\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}03 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 1,015$.

Доверительный интервал для *a*

$$\left(\overline{X}_{\text{в}} - 1,015; \overline{X}_{\text{в}} + 1,015\right) = (22,985; 25,015)\,.$$

O Так как при $n \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному, то практически при $n > 30$ можно пользоваться вместо распределения Стьюдента нормальным распределением.

11. Интервальная оценка среднего квадратического отклонения нормального распределения

Пусть случайная величина X распределена нормально и требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение (СКО) σ по исправленному выборочному СКО s. Как было показано при рассмотрении точечных оценок, выборочное СКО. служит точечной оценкой параметра σ. Поставим теперь вопрос об интервальной оценке σ, т.е., о построении доверительного интервала, покрывающего параметр σ с заданной надежностью γ.

При рассмотрении распределений, связанных с нормальным, обсуждалось распределение χ^2 (Пирсона). Рассматривая выборку как совокупность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, распределенных так же, как и признак генеральной совокупности X, заметим, что величины $X_i - \overline{X_B}$ являются центрированными, $M\left(X_i - \overline{X_B}\right) = 0$, а $\frac{X_i - \overline{X_B}}{\sigma}$ – стандартными ($m = 0, \sigma = 1$). Сумма квадратов этих величин пропорциональна исправленной выборочной дисперсии, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_B}\right)^2$, и распределена по закону χ^2. Поскольку эти величины связаны еще одной зависимостью, $\overline{X_B} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$, то число степеней свободы χ^2-распределения равно $n-1$.

Рассмотрим симметричный доверительный интервал:

$$P\left(s-\delta<\sigma<s+\delta\right)=\gamma$$

и преобразуем двойное неравенство (учитывая, что $\sigma > 0$):

$$1-\frac{\delta}{s}<\frac{\sigma}{s}<1+\frac{\delta}{s};$$

обозначив $\frac{\delta}{s}=q$, получим $1-q<\frac{\sigma}{s}<1+q$, что дает:

при $q<1$: $1-q<\frac{\sigma}{s}<1+q$, $\frac{1}{1+q}<\frac{s}{\sigma}<\frac{1}{1-q}$, $\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}<\frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma}<\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$;

при $q\geq 1$: $0<\frac{\sigma}{s}<1+q$ (так как σ и s положительны),

$$\frac{1}{1+q}<\frac{s}{\sigma}<\infty,\qquad \frac{\sqrt{n-1}}{1+q}<\frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma}<\infty.$$

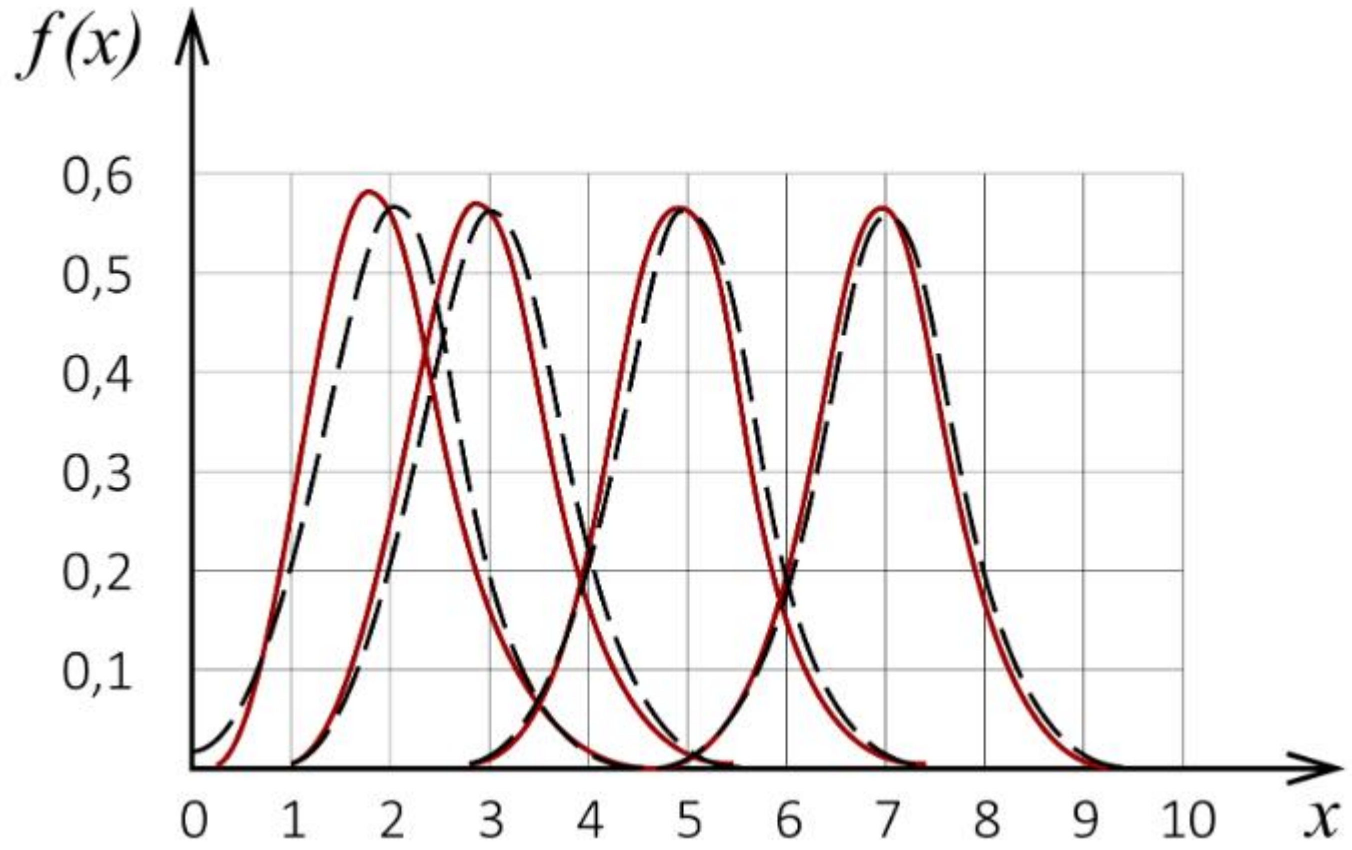


Рис. 3. Плотность хи–распределения (корень из хи-квадрат), n – число степеней свободы, n = 4, 9, 25, 49 (слева направо). Для сравнения приведена плотность нормального распределения $N\left(\sqrt{n},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Величину $\frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma}$ естественно обозначить через $\chi = \sqrt{\chi^2}$.
Тогда полученные ранее неравенства можно записать в виде:
$\chi_1 < \chi < \chi_2$ $(q < 1)$ или $\chi_1 < \chi < \infty$ $(q \geq 1)$, где $\chi_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{1+q}$, $\chi_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$.

Плотность распределения величины χ имеет вид:

$$f\left(x, n\right) = \frac{x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

она не зависит от оцениваемого параметра σ, но зависит от объема выборки n. Ниже приведены графики плотности этой величины для нескольких значений объема выборки n.

Исходное условие для доверительного интервала принимает вид:

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} f\left(x, n\right) dx = \gamma.$$

Решения этого уравнения $q = q\left(n, \gamma\right)$, можно найти в статистических таблицах. Симметричный доверительный интервал после нахождения q будет выглядеть как $D = \left(s - qs,\ s + qs\right)$ при $q < 1$ или $D = \left(0, s + qs\right)$ при $q \geq 1$, причем $P\left(\sigma \in D\right) = \gamma$.

Так как более доступны таблицы квантилей распределения χ^2, изложим еще один способ построения доверительного интервала, покрывающего генеральное СКО σ с заданной доверительной вероятностью. Запишем его в виде:

$$P\left(s-\delta_{-}<\sigma<s+\delta_{+}\right)=\gamma,$$

где границы $s-\delta_{-}$ и $s+\delta_{+}$ пока не определены. Неравенства для σ могут быть преобразованы в неравенства для $\chi^2=\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$: $P\left({\chi^2}_{-}<\chi^2<{\chi^2}_{+}\right)=\gamma$ и величины ${\chi^2}_{-}$ и ${\chi^2}_{+}$ определяются из условий: $P\left(\chi^2\leq{\chi^2}_{-}\right)=\frac{1-\gamma}{2}=\alpha$, $P\left(\chi^2\geq{\chi^2}_{+}\right)=\alpha$, $P\left(\chi^2\leq{\chi^2}_{+}\right)=1-\alpha$, т.е. являются квантилями распределения χ^2 уровня α и уровня $1-\alpha$, соответственно.

Часто в таблицах приводятся не **квантили** q_p $\left(P\left(X<q_p\right)=p\right)$, а **критические точки** распределений k_p $(P\left(X>k_p\right)=p)$. Неравенства из предыдущего раздела с использованием критических точек будут выглядеть так:

$$P\left(\chi^2{}_{\text{кр}(-)}<\chi^2<\chi^2{}_{\text{кр}(+)}\right)=\gamma,$$

$$P\left(\chi^2>\chi^2{}_{\text{кр}(+)}\right)=\frac{1-\gamma}{2}=\alpha, \qquad P\left(\chi^2>\chi^2{}_{\text{кр}(-)}\right)=1-\alpha.$$

Пример 6.

Известно, что СВ Xраспределена нормально. По выборке объема $n = 25$ найдено исправленное выборочное СКО $s = 0,8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное СКО с надежностью 0,95.

Решение:

1 способ. По таблице $q = q(n, \gamma)$ и данным $n = 25$ и $\gamma = 0,95$ находим $q = 0,32$. Искомый доверительный интервал (симметричный): $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$,
$0,8(1 - 0,32q) < \sigma < 0,8(1 + 0,32)$ или $0,544 < \sigma < 1,056$.

2 способ. По $\gamma = 0,95$ находим $\alpha = 0,025$, и критические точки для $n = 25$:

$$\chi^2{}_{\text{кр}(-)} = 13,12 \qquad \chi^2{}_{\text{кр}(+)} = 40,65,$$

и интервал (несимметричный) для σ:

$$\frac{s\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2{}_{\text{кр}(+)}}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2{}_{\text{кр}(-)}}}, \qquad 0,625 < \sigma < 1,113.$$

Заметим, что **оба** полученных доверительных интервала с вероятностью 0,95 покрывают неизвестное генеральное СКО σ; второй интервал, несимметричный относительно s, несколько уже: 1,056 – 0,544 = 0,512; 1,113 – 0,625 = 0,488.