3. Проверка статистических гипотез

3.1. Понятие статистической гипотезы. Основные этапы проверки гипотезы

Пусть $(x_1, x_2,..., x_n)$ – случайная выборка объема n из некоторой генеральной совокупности (конечной или бесконечной).

Каждое значение x_i в этой выборке само является случайной величиной, даже если генеральная совокупность состоит из конечного числа элементов. Необходимо также иметь в виду, что случайная выборка из какой-либо генеральной совокупности должна соответствовать некоторой схеме испытаний, при реализации которой выявляется искомая случайная величина X. При этом полученные в вышеупомянутой серии испытаний значения случайной величины X должны быть *независимыми* и *распределены по тому же закону*, что и сама генеральная совокупность X (хотя бы и приближенно).

Статистической гипотезой называется любое предположение относительно вида или параметров генерального распределения.

Мы будем рассматривать гипотезы о виде и параметрах распределения некоторой генеральной совокупности, а также о сравнении выборок из различных генеральных совокупностей.

Статистическая гипотеза называется *параметрической*, если она содержит утверждение о значении конечного числа параметров распределения, которое считается известным.

Примеры параметрических статистических гипотез:

– нормально распределенная случайная величина X имеет математическое ожидание a и дисперсию σ^2;

– две нормально распределенные случайные величины имеют одинаковую дисперсию.

Непараметрическая гипотеза – это утверждение о виде распределения.

Например:

– выборка $(x_1, x_2,\dots, x_n)$ соответствует нормально распределенной случайной величине X.

Не располагая сведениями о всей генеральной совокупности, высказанную гипотезу сопоставляют по определенным правилам с выборочными данными и делают вывод о том, можно принять гипотезу или нет. Эта процедура сопоставления называется *проверкой гипотезы.*

Рассмотрим этапы проверки гипотезы и используемые при этом понятия.

Э т а п 1. Располагая выборочными данными и руководствуясь конкретными условиями рассматриваемой задачи, формулируют гипотезу H_0, которую называют *основной* или *нулевой*, и гипотезу H_1, *конкурирующую* с гипотезой H_0. Гипотезу H_1 называют также *альтернативной*.

H_0 и H_1 – две взаимно исключающие гипотезы.

Отметим, что для одной основной гипотезы может быть выдвинуты несколько альтернативных.

Так, например, пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Рассмотрим основную гипотезу:

$H_0 : a = 0,\ \sigma^2 = 1.$

В качестве альтернативных могут быть выдвинуты, например, такие гипотезы:

1) $H_1 : a = 0,\ \sigma^2 = 2;$

2) $H_1 : a \neq 0,\ \sigma^2 = 1.$

Можно было бы выдвинуть альтернативные гипотезы.

H_1: $a < 0$ (так называемая *левосторонняя* гипотеза) или H_1: $a > 0$ (*правосторонняя* гипотеза).

Э т а п 2. Для проверки статистической гипотезы используется специально подобранная случайная величина K с известным законом распределения, называемая *статистическим критерием*. Множество ее возможных значений разбивается на два непересекающихся подмножества: одно из них (*критическая область*) содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отклоняется, второе (*область принятия гипотезы*) – значения K, при которых она принимается. Значения K, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы, называются *критическими точками* k_p.

Сразу отметим, что критерия, позволяющего точно (на 100 %) узнать, верна гипотеза H_0 или нет, не существует в силу ограниченности и случайности выборки (выборка не содержит всей информации о генеральной совокупности). Действительно, абсолютно точную информацию обо всем, что касается генеральной совокупности (в том числе и о справедливости или несправедливости гипотезы H_0) мы бы получили, если бы исследовали *всю* генеральную совокупность. Но мы ведь исследуем *лишь выборку из нее*, поэтому не застрахованы от ошибки в любых своих выводах (об этом, напомним, мы уже говорили в начале).

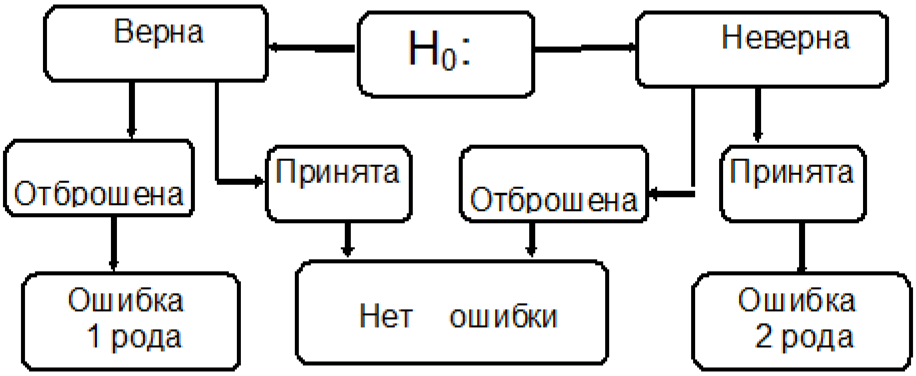
Отклоняя или принимая гипотезу H_0, можно допустить ошибку двух видов:

- *ошибка первого рода* совершается при отклонении гипотезы H_0 (т. е. принимается альтернативная H_1), тогда как на самом деле гипотеза H_0 верна; вероятность такой ошибки обозначим $\alpha = P(H_1 / H_0)$;

- *ошибка второго рода* совершается при принятии гипотезы H_0, тогда как на самом деле высказывание H_0 неверно и следовало бы принять гипотезу H_1; вероятность ошибки второго рода обозначим как

$$\beta = P(H_0 / H_1).$$

Решение, принимаемое о H_0 по выборке	Гипотеза H_0 отвергается, принимается H_1	Гипотеза H_0 принимается
Гипотеза H_0 верна	Ошибка 1-го рода, ее вероятность α	Правильное решение, его вероятность $1 - \alpha$
Гипотеза H_0 неверна, верна H_1	Правильное решение, его вероятность $1 - \beta$	Ошибка 2-го рода, его вероятность β



Вероятность ошибки первого рода при проверке статистических гипотез называют *уровнем значимости* и обычно обозначают α (отсюда название α-errors). Вероятность ошибки второго рода обозначается β (отсюда β-errors). Величина $(1 - \beta)$ – *мощность критерия*.

Чем выше мощность, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода.

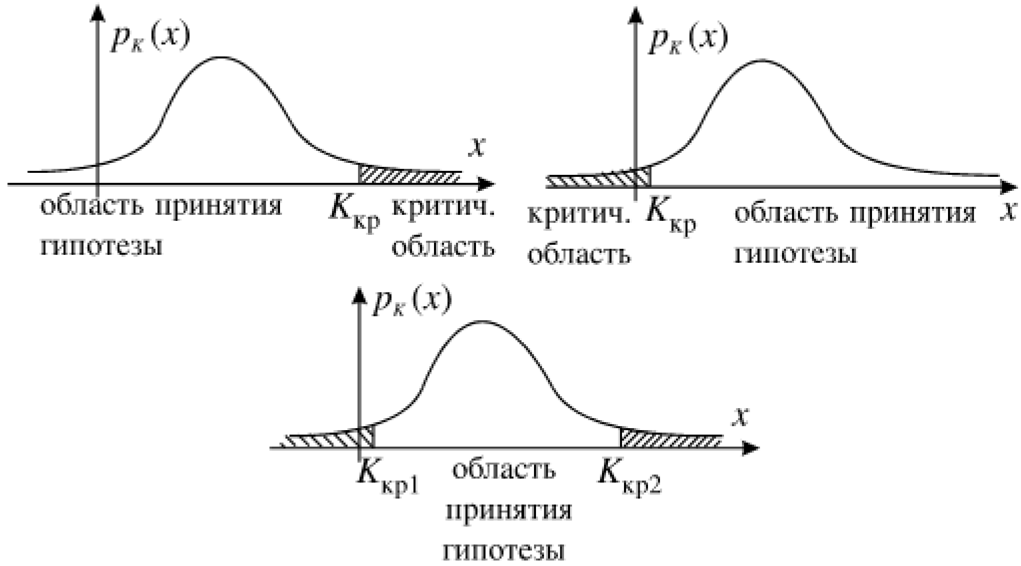
Например, в радиолокации α – вероятность пропуска сигнала, β – вероятность ложной тревоги.

Вероятность α задается малым числом, поскольку это вероятность ошибочного высказывания. При этом обычно используются стандартные значения: 0,05; 0,01; 0,005.

Например, $\alpha = 0{,}05$ означает следующее: если гипотезу H_0 проверять по каждой из 100 выборок одинакового объема, то в среднем в 5 случаях из 100 совершим ошибку первого рода.

Ясно, что чем меньше будут ошибки первого и второго рода, тем точнее статистический вывод. Однако при заданном объеме выборки одновременно уменьшить α и β невозможно. Единственный способ одновременного уменьшения α и β состоит в увеличении объема выборки.

Критическая область может быть *правосторонней* (если она задается неравенством $K > k_{кр}$), *левосторонней* ($K < k_{кр}$) или *двусторонней* ($K < (k_{кр})_1, K > (k_{кр})_2$).



Для нахождения границ области нужно задать вероятность ошибки первого рода α (уровень значимости); тогда, например, правосторонняя критическая область задается условием $p(K > k_{кр}) = \alpha$.

В следующей таблице приведены данные о критических областях широко используемых распределений.

Распре-деление	Критические области и критические точки		
	левосторонняя	двусторонняя	правосторонняя
Z нормальное	$Z < Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$	$\lvert Z \rvert < Z_{1-\alpha/2}$ $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$ Приложение 1	$Z > Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$
t Стьюдента	$t < t_{кр}(\alpha; n-1)$	$\lvert t \rvert < t_{кр}(\alpha; n-1)$ Приложение 2	$t > t_{кр}(\alpha; n-1)$
χ^2 Пирсона	–	– Приложение 3	$\chi^2_{кр}(\alpha; n-1)$
F Фишера	–	$F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1\right)$ Приложение 5	$F_{кр}(\alpha; n_1-1; n_2-1)$

Порядок проверки статистической гипотезы таков:

1) задается уровень значимости α, выбирается статистический критерий K и вычисляется (обычно по таблицам для закона распределения K) значение $k_{кр}$; определяется вид критической области;

2) по выборке вычисляется наблюдаемое значение критерия $K_{набл}$;

3) если $K_{набл}$ попадает в критическую область, нулевая гипотеза отвергается; при попадании $K_{набл}$ в область принятия гипотезы нулевая гипотеза принимается.

По своему прикладному содержанию статистические гипотезы можно подразделить на несколько основных типов:

- о числовых значениях параметров;
- о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей;
- об однородности выборок;
- о согласии эмпирического распределения и выбранной модели;
- о стохастической независимости элементов выборки.

Рассмотрим способы проверки этих типов статистических гипотез.

3.2. Проверка гипотез о числовых значениях параметров. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности (со стандартом, нормативом)

Имеется генеральная совокупность с нормальным законом распределения $N(a, \sigma)$. Требуется на основе анализа простой случайной выборки проверить гипотезу о среднем значении генеральной совокупности a.

Нулевая гипотеза $H_0: a_1 = a$ о равенстве генерального среднего наперед заданному числу (предполагаемому на основании предшествующего опыта или теоретически).

Критерии значимости для проверки гипотез о генеральном среднем

Предположения	Статистика критерия	H_1	Область принятия гипотезы H_0
1. Выборка из нормальной генеральной совокупности с известной σ^2	$Z = \dfrac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$	$a_1 > a_2$	$Z < Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
		$a_1 < a_2$	$Z > Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
		$a_1 \neq a_2$	$\lvert Z \rvert < Z_{1-\alpha/2}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$
2. Выборка из нормальной генеральной совокупности с неизвестной σ^2	$t = \dfrac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{S}$	$a_1 > a_2$	$t < t(\alpha; n-1)$
		$a_1 < a_2$	$t > t(\alpha; n-1)$
		$a_1 \neq a_2$	$\lvert t \rvert < t(\alpha; n-1)$
3. Выборка из произвольной совокупности большого объема	$Z = \dfrac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{S}$	$a_1 > a_2$	$Z < Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
		$a_1 < a_2$	$Z > Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
		$a_1 \neq a_2$	$\lvert Z \rvert < Z_{1-\alpha/2}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$

Пример 1. Известно, что люди проводят перед телевизором в среднем 29,4 ч в неделю со стандартным отклонением 2 ч. Случайная выборка из 25 студентов имеет среднее 27 ч. В одном из журналов утверждается, что студенты смотрят телевизор меньше других. Необходимо проверить утверждение на уровне значимости α = 0,01.

Решение:

Дисперсия генеральной совокупности известна, используем *z*-распределение.

$$H_0 : a \geq 29,4; \quad H_1 < 29,4.$$

Статистическим критерием для проверки этой гипотезы является нормированная нормально распределенная случайная величина

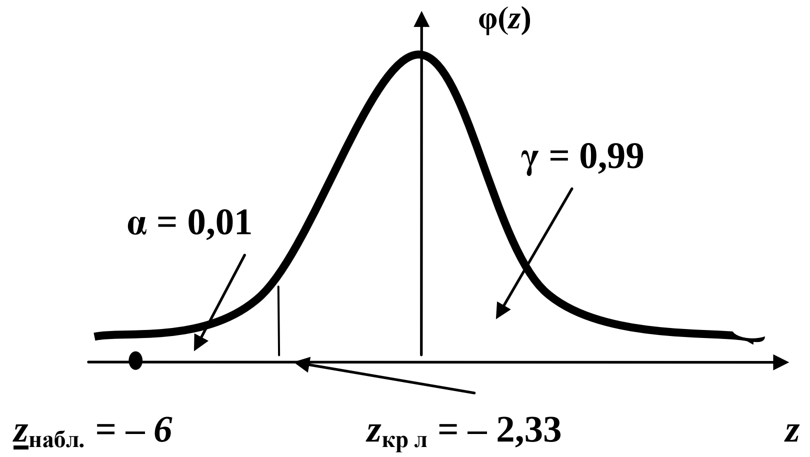
$$z = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Наблюдаемое значение критерия $z_{\text{набл}} = \dfrac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}.$

$$z_{\text{набл}} = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(27 - 29,4)\sqrt{25}}{2} = -6.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы левосторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1 - 2\alpha}{2} = 0,49;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = -2,33.$

Изобразим результаты графически на графике плотности стандартного нормального закона распределения:



Гипотеза отвергается, т. е. студенты значимо меньше смотрят телевизор, чем обычные жители.

Пример 2. За последние 20 лет средний уровень преступности в городе N составляет 399,40 преступлений на 100 тысяч жителей. Руководство города заявило в печати, что преступность находится на среднем региональном уровне. Требуется проверить справедливость этого утверждения на уровне значимости 5 %, если известно, что средний уровень преступности в регионе составляет 394,82 со стандартным отклонением 8,93.

Решение:

Дисперсия генеральной совокупности неизвестна, используем t-распределение.

$$H_0 : a \le 394{,}4; \quad H_1 : a > 394{,}4.$$

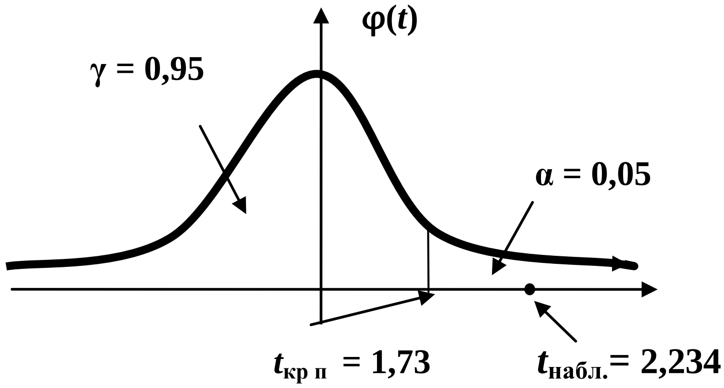
Критическая область правосторонняя.

По выборке вычисляем значение статистики:

$$T_{\text{набл}} = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{S} = \frac{(399{,}82 - 394{,}82)\sqrt{19}}{8{,}93} = 2{,}234.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в нижней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n - 1$ находим критическую точку $t_{\text{кр}}(\alpha; k)$.

$$t_{\text{кр.пр}}(0{,}05; 18) = 1{,}73.$$



Таким образом, основная гипотеза отклоняется. Отличие в уровне преступности от регионального является статистически значимым на уровне 5 %.

3.3. Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей

Важнейшим вопросом, возникающим при анализе двух выборок, является *задача выявления однородности выборок*. Эта задача сводится к проверке гипотез об оценке *различия между их параметрами* – между средними (математическими ожиданиями) и между дисперсиями.

3.3.1. Сравнение двух дисперсий нормально распределенных совокупностей

Эта гипотеза возникает при сравнении точности двух одинаковых измерительных приборов, при сравнении разброса значений параметров продуктов производства двух станков, цехов, заводов.

Пусть имеются две выборки объемов n_1 и n_2, извлеченные из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y с исправленными выборочными дисперсиями S_x^2 и S_y^2 .

Нулевая гипотеза $H_0 : D(X) = D(Y)$: генеральные дисперсии двух независимых нормально распределенных выборочных совокупностей равны между собой с доверительной вероятностью α .

Конкурирующая гипотеза: генеральные дисперсии существенно отличаются.

Критерием служит случайная величина $F = \dfrac{S_Б^2}{S_M^2}$ – отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, которая при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$.

Критическая область зависит от вида конкурирующей гипотезы:

1. Если H_1: $D(X) > D(Y)$, то критическая область правосторонняя:

$$p(F > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)) = \alpha.$$

При этом критическая точка $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ находится по таблице критических точек распределения Фишера.

Если $F_{набл} = \dfrac{S_Б^2}{S_M^2} < F_{кр}$ – нулевая гипотеза принимается, в противном случае – отвергается.

2. При конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$ критическая область двусторонняя:

$$p(F < F_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad p(F > F_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

При этом достаточно найти $F_2 = F_{кр}(\dfrac{\alpha}{2}, k_1, k_2)$. Тогда, если $F_{набл} = \dfrac{S_Б^2}{S_M^2} < F_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, если $F_{набл} > F_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Участковый терапевт хочет проверить, есть ли различие между частотой биения сердца (кол-во ударов в минуту) курящих и некурящих студентов. Отобраны две группы: курящие n_1 = 26 чел., и некурящие n_2 = 18 чел. По данным этих выборок найдены исправленные выборочные дисперсии $S_1^2 = 36$ и $S_2^2 = 10$. Проверить при уровне значимости α = 0,05, прав ли участковый терапевт.

Решение:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

По выборке вычисляем значение статистики:

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{36}{10} = 3,6.$$

По таблице (прил. 5), по уровню значимости α = 0,05 и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 25;\ k_2 = n_2 - 1 = 17$, находим критическую точку

$$F_{\text{кр}}(0,05;\,25;\,17) = 2,19.$$

Так как $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ – то необходимо отвергнуть гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются значимо.

3.3.2. Сравнение двух средних нормально распределенных совокупностей

При проведении экспериментальных исследований измерительную информацию о некоторой физической величине постоянного размера можно получать сериями – в разное время, в разных условиях, разными методами, разными экспериментаторами. Если объединить все результаты измерений в общий массив, то можно было бы получить более точный и надежный результат за счет увеличения объема выборки. Однако такое объединение возможно только при условии, что вид закона распределения (например, нормальный) обеих выборок один и тот же и математические ожидания у них равны (дисперсии могут быть различны).

Эта гипотеза возникает также на производстве при сравнении средних значений контролируемого параметра продукции, выпускаемого двумя станками, цехами, заводами. В экономике сравнивают средний уровень заработных плат, средний объем выпускаемой продукции. В социальной сфере гипотеза возникает при сравнении таких социальных факторов, как средний возраст, средний уровень правонарушений.

Предполагается, что случайные величины X и Y имеют нормальные законы распределения. При этом $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$.

Относительно σ_1 и σ_2 при неизвестных a_1 и a_2, возможны две ситуации:

σ_1 и σ_2 – известны;

σ_1 и σ_2 – неизвестны.

Критерии проверки гипотез о равенстве двух средних с учетом этих условий приводятся в таблице.

Критерии проверки гипотез о равенстве двух средних

H_0	Предположения	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$a_1 = a_2$	σ_1 и σ_2 – известны	$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_y}}}$	$a_1 > a_2$	$Z < Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
			$a_1 < a_2$	$Z > Z_{кр}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
			$a_1 \neq a_2$	$\lvert Z \rvert < Z_{1-\alpha/2}$ $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$
	σ_1 и σ_2 – неизвестны	$t = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_x} + \dfrac{1}{n_y}}}$, где $S^2 = \dfrac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}$	$a_1 > a_2$	$t < t_{\alpha, n_x + n_y - 2}$
			$a_1 < a_2$	$t > t_{\alpha, n_x + n_y - 2}$
			$a_1 \neq a_2$	$\lvert t \rvert < t_{\alpha/2, n_x + n_y - 2}$

Пример 1. Проводится сравнение роста студентов НТИ и пединститута. На основе двух случайных выборок были получены следующие данные. Для выборки из 75 студентов НТИ средний рост оказался равным 179 см, и стандартное отклонение, которое оказалось равным 8 см. Для выборки из 57 студентов пединститута средний рост оказался равным 176 см со стандартным отклонением 10 см.

На основе этих экспериментальных данных следует проверить гипотезу о равенстве средних величин роста студентов Нижнего Тагила. Принять доверительную вероятность равной 90 %. Предполагается, что рост юношей подчиняется нормальному закону распределения.

Решение:

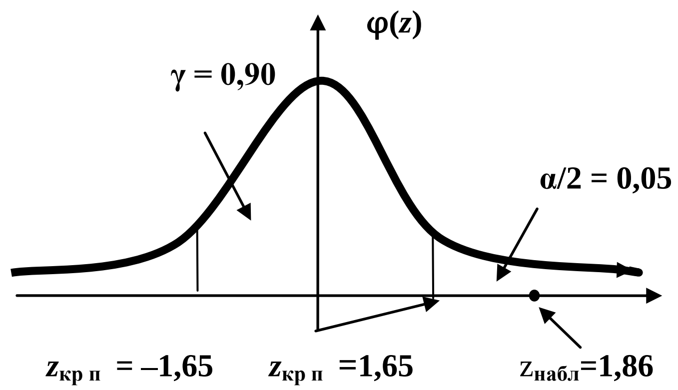
$H_0: a_1 = a_2;\quad H_1: a_1 \neq a_2.$

Вычислим на основе экспериментальной информации наблюдаемое значение критерия, который при справедливости нулевой гипотезы приближенно имеет стандартный нормальный закон распределения:

$$z_{\text{набл}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_x} + \frac{\sigma_2^2}{n_y}}} = \frac{179 - 176}{\sqrt{\frac{64}{75} + \frac{100}{57}}} = 1{,}86.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы двусторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = 0{,}45;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = 1{,}65.$

Изобразим результаты графически на графике плотности стандартного нормального закона распределения:



Поскольку наблюдаемое значение критерия попало в критическую область значений параметра, то следует отвергнуть основную гипотезу в пользу альтернативной гипотезы и сказать, что средний рост студентов НТИ и пединститута отличается значимо.

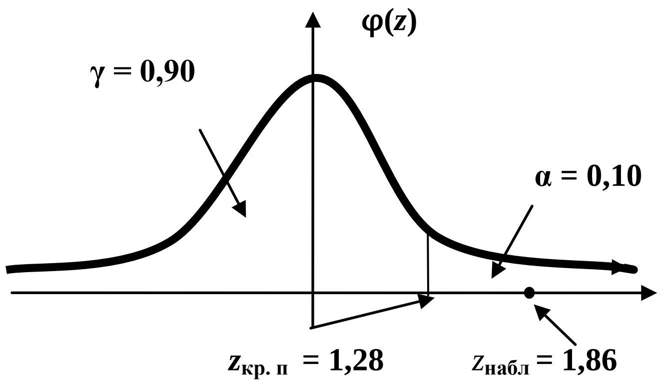
Для того чтобы решить, чьи студенты выше, решим эту же задачу с теми же самыми исходными данными в случае иной, более естественной в данном случае альтернативной гипотезой. Ее естественность обусловлена конкретными экспериментальными значениями.

$H_0 : a_1 = a_2; \quad H_1 : a_1 > a_2.$

Такая постановка задачи требует построения правосторонней критической области.

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы двусторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2} = 0,4;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = 1,28.$

Наблюдаемое значение критерия не меняется.



Таким образом, гипотеза H_0 отвергается, т. е. справедлива гипотеза H_1: юноши НТИ выше юношей пединститута.

Пример 2. Декан полагает, что среди студентов девушки чаще, чем юноши, прогуливают занятия. Выборочное исследование показало, что девушки пропустили в среднем 3,9 дня в семестр, а юноши 3,6 дня. В исследовании участвовало 16 девушек и 22 юношей. Стандартные отклонения составили 0,6 и 0,8 дня соответственно. Проверьте предположение исследователя на уровне значимости α = 0,01. Считать, что генеральные дисперсии равны.

Решение:

$H_0 : a_1 \le a_2; \quad H_1 : a_1 > a_2.$

По условию дисперсии неизвестны, но предполагаются равными.

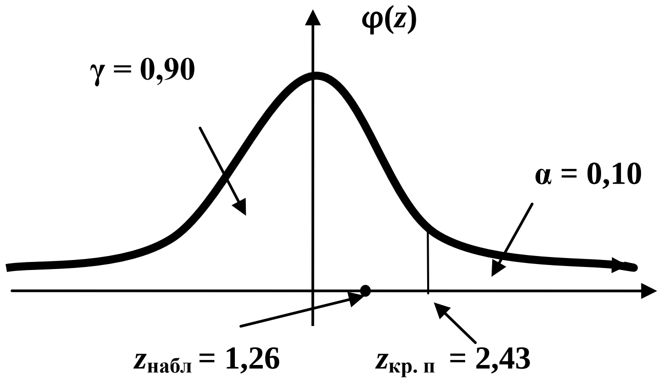
$$S^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2} = \frac{(16-1)\cdot 0,6^2 + (22-1)\cdot 0,8^2}{16+22-2} = 0,523.$$

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_x} + \dfrac{1}{n_y}}} = \frac{3,9 - 3,6}{0,523\sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{22}}} = 1,263.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы правосторонней критической области в соответствии с таблицей прил. 4 (смотреть нижнюю строку уровня значимости):

$$t_{\text{кр}} = t_{\alpha, n_x + n_{y-2}} = t(0,01; 36) = 2,43.$$

Сравним полученное значение с критической областью.



Полученное значение статистики не попало в критическую область. Мы принимаем основную гипотезу. У нас нет оснований думать, что девушки прогуливают занятия чаще юношей.

3.4. Проверка гипотезы о равенстве долей признака

3.4.1 Сравнение генеральной доли со стандартом (нормативом)

Рассмотрим генеральную долю признака $W = \dfrac{K}{N}$ – это часть объектов генеральной совокупности, обладающих определенным признаком (N – объем генеральной совокупности; K – количество объектов генеральной совокупности, обладающих данным признаком). Эту величину можно также трактовать как вероятность p того, что случайно выбранный объект из генеральной совокупности будет обладать этим признаком, причем полагаем, что величина вероятности не меняется при переходе от одного объекта к другому объекту и имеет место независимость появления признака для каждого объекта генеральной совокупности, т. е. рассматривается модель явления, присущая биномиальному закону распределения признака.

Следовательно, постановку задачи можно осуществлять как в терминах «генеральная доля признака», так и в терминах «вероятность биномиального закона распределения». Все зависит от того, как поставлена исходная задача, какой акцент мы хотим придать получающимся результатам.

Выборочной долей признака является величина $w = \dfrac{k}{n}$ – это точечная оценка генеральной доли и, одновременно, точечная оценка вероятности в биномиальном законе распределения (n – объем случайной выборки; k – количество объектов в выборке, обладающих данным признаком).

Будем рассматривать только случай больших выборок, т. е. $n > 30$.

Нулевая гипотеза $H_0 : p = p_0$, где p_0 – заданная условием задачи константа.

Конкурирующая гипотеза $H_1 : p \neq p_0$.

Статистическим критерием для проверки этой гипотезы является нормированная нормально распределенная случайная величина

$$z = \frac{w - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}}.$$

Наблюдаемое значение критерия $z_{\text{набл}} = \dfrac{w - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$.

Вид критической области зависит от типа конкурирующей гипотезы:

– при альтернативной гипотезе типа $H_1 : p \neq p_0$ строим двустороннюю критическую область;

– при альтернативных гипотезах типа $H_1 : p > p_0$ или $H_1 : p < p_0$ строим одностороннюю критическую область (левую или правую).

Процедура проверки справедливости нулевой гипотезы полностью повторяет тот алгоритм, который был реализован в разд. 3.2.1.

Рассмотрим решение конкретного примера.

Пример. Известно, что примерно 83 % студентов НТИ защищают диплом на отличную оценку. На основе наблюдений этого года было выяснено, что из 100 случайно отобранных дипломников отличную оценку получил 91 студент. Можно ли с 98 % уровнем доверия сказать, что наблюдения этого года не противоречат ранее сделанному статистическому выводу?

Решение:

$H_0 : p = 0{,}83.$

$H_1 : p > 0{,}83.$

Экспериментальные данные:

$$n = 100; \;\; k = 91; \;\; \gamma = 0{,}98; \;\; \alpha = 0{,}02.$$

Вычислим значение выборочной доли (или найдем точечную оценку вероятности биномиального закона распределения, т. е. вероятности того, что случайно выбранный студент получит отличную оценку за диплом):

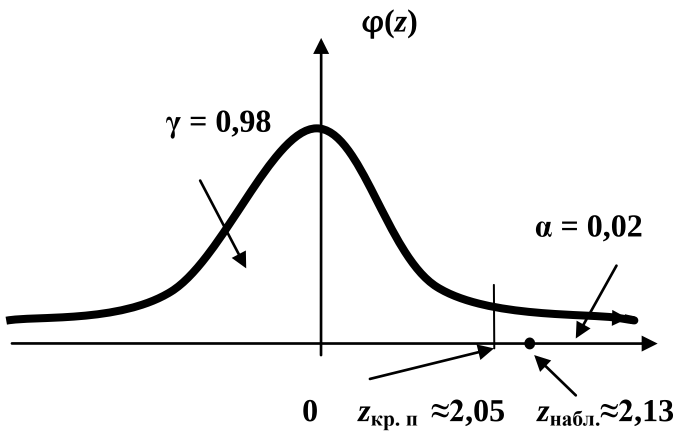
$$w = \frac{k}{n} = \frac{91}{100} = 0{,}91.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$z_{\text{набл}} = \frac{0{,}91 - 0{,}83}{\sqrt{\dfrac{0{,}9(1-0{,}9)}{100}}} = 2{,}13.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы правосторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2} = 0{,}48;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = 2{,}05.$

Покажем полученные результаты на графике плотности стандартного нормального закона распределения:



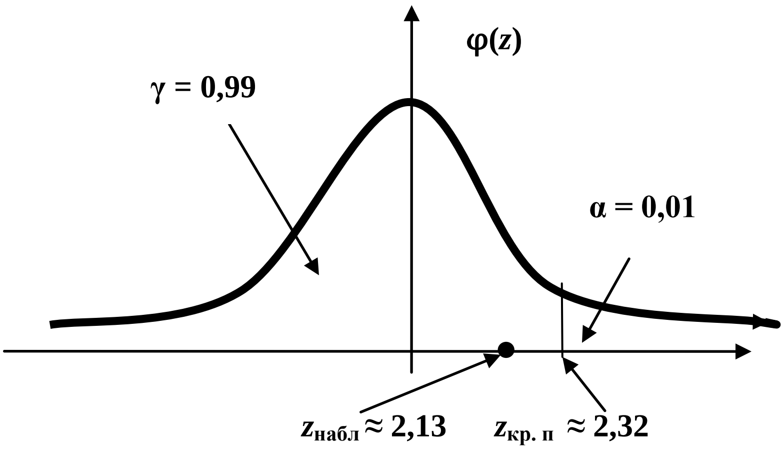
Поскольку наблюдаемое значение критерия попадает в область критических значений этой случайной величины, то следует отвергнуть нулевую гипотезу как противоречащую экспериментальным данным и, следовательно, принять альтернативную гипотезу.

Таким образом, утверждение, высказанное в нулевой гипотезе, противоречит экспериментальным данным и поэтому не может быть признано верным. В действительности доля студентов, получивших отличную оценку за диплом, значимо превосходит ту долю, которая указана в нулевой гипотезе. Однако в данной ситуации вывод по задаче следует сделать иной, если задать другое значение уровня значимости.

Решим эту же самую задачу, сделав в ней единственное изменение: примем $\alpha = 0{,}01$ (ранее было задано значение $\alpha = 0{,}02$).

Наблюдаемое значение $t_{\text{набл}}$ в этом случае не изменяется; изменяется лишь $t_{\text{кр. п}}$.

$\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2} = 0{,}49;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = 2{,}32.$



В этом случае из-за изменения положения границы критической области наблюдаемое значение критерия попало в область принятия нулевой гипотезы, следовательно, вывод в результате решения примера мы должны сделать иной.

Принимаем нулевую гипотезу о том, что генеральная доля студентов, которые сдают диплом на «отлично», можно считать равной 83 %, поскольку значения выборочной доли отличников и заявленного значения генеральной доли отличников различаются незначимо, несущественно.

Решение этой задачи позволяет отметить одну особенность: когда наблюдаемое значение критерия находится недалеко от границы критической области, то при изменении уровня значимости вывод по задаче можно получить противоположный по своему смыслу (и этим данная ситуация неприятна). Поэтому при решении задачи надо обязательно указывать, при каком уровне значимости был получен данный вывод и, возможно, отметить, что вывод может быть иным при изменении принятого в задаче уровня значимости.

3.4.2. Проверка гипотезы о равенстве долей признака в двух совокупностях

Сравнение долей признака в двух совокупностях – часто встречающаяся на практике задача.

Например, если выборочная доля признака в одной совокупности отличается от такой же доли в другой совокупности, то указывает ли это на то, что наличие признака в одной совокупности действительно вероятнее, или полученное расхождение долей является случайным?

Задача ставится следующим образом. Имеется две совокупности, генеральные доли признака, в которых равны соответственно p_1 и p_2. Необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных долей, т. е. $H_0 : p_1 = p_2$.

Гипотеза H_1 формулируется так же, как при проверке средних, т. е.

$H_1 : p_1 < p_2$; $\quad$ $H_1 : p_1 > p_2$; $\quad$ $H_1 : p_1 \neq p_2$.

Для проверки гипотезы H_0 из двух генеральных совокупностей взяты две независимые выборки достаточно большого объема (n_1 и n_2). Выборочные доли (частость) соответственно равны

$$W_1 = \frac{m_1}{n_1} \text{ и } W_2 = \frac{m_2}{n_2},$$

где m_1 и m_2 – число элементов в первой и второй выборках, обладающих данным признаком.

При достаточно больших n_1 и n_2 выборочные доли W_1 и W_2 имеют приближенно нормальный закон распределения с $\mu_1 = p_1$, $\mu_2 = p_2$ и

$$\sigma_1^2 = \frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n_1}, \qquad \sigma_2^2 = \frac{p_2 \cdot (1 - p_2)}{n_2}.$$

При справедливости гипотезы $H_0 : p_1 = p_2$ разность $W_1 - W_2$ имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием

$$M[W_1 - W_2] = p - p = 0$$

и дисперсией $$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = p \cdot (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right),$$

поэтому вводится статистика

$$Z = \frac{W_1 - W_2}{\sqrt{p(1 - p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}},$$

которая имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$.

Наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле

$$Z_{\text{набл}} = \frac{\dfrac{m_1}{n_1} - \dfrac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}},$$

Построение критической области:

а) при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$ $z_{\text{кр}}$ определяется из равенства $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$, и двусторонняя критическая область задается неравенством $|Z| > z_{\text{кр}}$;

б) при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 > p_2$ $z_{\text{кр}}$ для правосторонней критической области находится из условия $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$, и вид критической области: $Z > z_{\text{кр}}$;

в) при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 < p_2$ левосторонняя критическая область имеет вид $Z < -z_{\text{кр}}$, где $u_{\text{кр}}$ находится по формуле из п. б).

Пример. Контрольную работу по высшей математике по индивидуальным вариантам выполняли студенты двух групп первого курса. В 1-й группе было предложено 105 задач, из которых верно решено 60, во второй группе из 140 предложенных задач верно решено 69. На уровне значимости 0,02 проверить гипотезу об отсутствии существенных различий в усвоении учебного материала студентами обеих групп.

Решение:

$H_0 : p_1 = p_2 = p$; $H_1 : p_1 \neq p_2$.

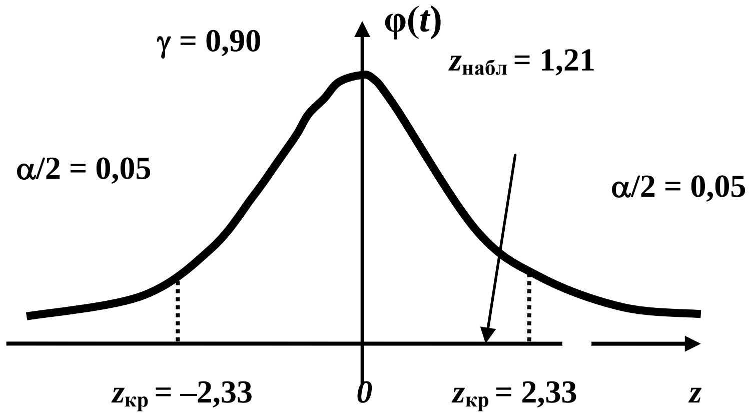
Оценкой p является $p = \dfrac{60+69}{105+140} = 0{,}527.$

Выборочные доли для каждой группы:

$$W_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{60}{105} = 0.571; \quad W_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{69}{140} = 0.493;$$

$$z_{\text{набл}} = \frac{0{,}571-0{,}493}{\sqrt{0{,}527(1-0{,}527)\left(\dfrac{1}{105}+\dfrac{1}{140}\right)}} = 1{,}21.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы двусторонней критической области $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = 0,49;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{кр} = 2,33.$



Таким образом, усвояемость высшей математики студентами двух групп отличается малозначимо.

3.5. Исключение резко выделяющихся наблюдений

Пусть $x^*, x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка, где x^* – резко выделяющееся наблюдение. Необходимо решить вопрос о принадлежности резко выделяющегося наблюдения x^* к остальным наблюдениям.

Алгоритм исключения состоит в следующем.

Для ряда наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяют $\overline{X}$ и S.

Выдвигается гипотеза $H_0 : \overline{X} = x^*$.

Альтернативная гипотеза $H_1 : \overline{X} > x^*$ или $H_1 : \overline{X} < x^*$.

Определяется статистика $t = \dfrac{\overline{X} - x^*}{S}$.

Статистика t имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы. Гипотеза H_0 отвергается, если $|t| > t_{1-2\alpha,n-1}$, и принимается, если $|t| < t_{1-2\alpha,n-1}$.

Пример. Имеются следующие данные об урожайности пшеницы на 8-ми опытных участках одинакового размера:

26,5; 26,2; 35,9; 30,1; 32,3; 29,3; 26,1; 25,0.

Есть основание предполагать, что значение урожайности третьего участка ($x^* = 35,9$) зарегистрировано неверно. Является ли это значение резко выделяющимся для $\alpha = 0,05$?

Решение:

Исключив $x^* = 35,9$, определяем

$$\overline{X} = \frac{1}{7}(26,5 + 26,2 + 30,1 + 32,3 + 29,3 + 26,1 + 25,0) = 27,93; \; S = 2,67;$$

$$H_0 : \overline{X} = x^*; \;\; H_1 : \overline{X} < x^*;$$

$$t = \frac{27,93 - 35,9}{2,67} = -2,98; \; t_{1-2\alpha,\, n-1} = t_{1-0,1,\, 6} = t_{0,9,\, 6} = 1,94;$$

$$|t| = 2,98 > 1,94.$$

H_0 отвергается, т. е. наблюдение $x^* = 35,9$ является резко выделяющимся и его следует отбросить.

3.6. Проверка гипотезы о виде распределения. Критерий согласия Пирсона

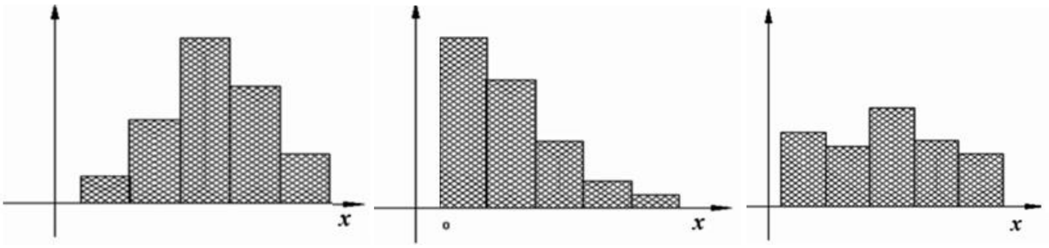
В предыдущих пунктах рассматривались методы проверки гипотез относительно отдельных параметров генерального распределения. Особое место занимают гипотезы относительно согласованности выборочного распределения с теоретическим (генеральным) распределением.

Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Критерий согласия позволяет ответить на вопрос о том, является ли различие между выборочными и теоретическим распределениями столь незначительными, что они могут быть приписаны лишь случайным факторам.

Пусть закон распределения генеральной совокупности неизвестен, но есть основания предполагать, что он имеет определенный вид. В частности, если выполняются условия центральной предельной теоремы, есть основания ожидать, что генеральное распределение – нормальное. Если же выборочное среднее и выборочная дисперсия равны, то следует предположить, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона.

Кроме этого, сравнение гистограммы с известными кривыми функций плотностей позволяет также выдвинуть гипотезу о виде распределения генеральной совокупности. Так, исходя из приведенных ниже гистограмм, можно предположить, что исследуемая генеральная совокупность распределена по нормальному (*а*), показательному (*б*) и равномерному (*в*) закону распределения.



а *б* *в*

Эти утверждения носят характер гипотез, а не категорических утверждения, и должны быть подвергнуты статистической проверке.

Для проверки гипотезы H_0 : закон распределения имеет данный вид (равномерный, нормальный и т. д.), используем *критерий согласия Пирсона* (или *хи-квадрат* критерий).

Пусть по выборке объема *n* получено эмпирическое распределение:

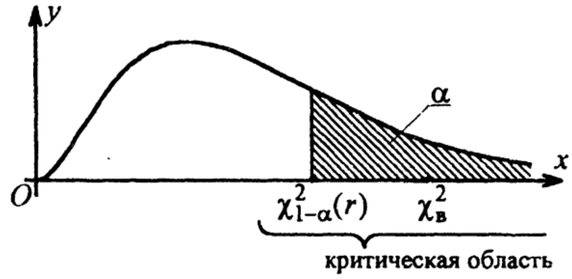
Варианты x_i	x_1	x_2	...	x_s
Частоты n_i	n_1	n_2	...	n_s

С помощью критерия Пирсона можно проверить гипотезу о различных законах распределения генеральной совокупности (равномерном, нормальном, показательном и др.) Для этого в предположении о конкретном виде распределения вычисляются теоретические частоты n_i', и в качестве критерия выбирается случайная величина

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

называемая *критерий Пирсона* или *критерий* '*ХИ-квадрат*', имеющая закон распределения χ^2 с числом степеней свободы $k = s - 1 - r$, где s – число частичных интервалов выборки, r – число параметров предполагаемого распределения.

Критическая область выбирается правосторонней, и граница ее при заданном уровне значимости α $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ находится по таблице критических точек распределения χ^2.



Теоретические частоты n_i' вычисляются для заданного закона распределения как количества элементов выборки, которые должны были попасть в каждый интервал, если бы случайная величина имела выбранный закон распределения, параметры которого совпадают с их точечными оценками по выборке.

Для проверки гипотезы о нормальном законе распределения найдем произведение $n_i' = nP_i$, где n – объем выборки, $P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{S}\right)$, x_i и x_{i+1} – левая и правая границы i-го интервала, $\bar{x}_B$ – выборочное среднее, S – исправленное среднее квадратическое отклонение. Поскольку нормальное распределение характеризуется двумя параметрами, число степеней свободы $k = n - 3$.

Для проверки гипотезы о показательном распределении генеральной совокупности в качестве оценки параметра λ принимается $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_B}$. Тогда теоретические частоты $n_i' = n \cdot P_i$, $P_i = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$.

Показательное распределение определяется одним параметром, поэтому число степеней свободы $k = n - 2$.

Для проверки гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности концы интервала, в котором наблюдались возможные значения X, оцениваются по формулам

$$a^* = \bar{x}_B - \sqrt{3} \cdot \sigma_B; \; b^* = \bar{x}_B + \sqrt{3} \cdot \sigma_B.$$

Тогда плотность вероятности $f(x) = \frac{1}{b^* - a^*}$; $n_1' = \frac{n(x_1 - a^*)}{b^* - a^*}$;

$$n_2' = n_3' = \ldots = n_{s-1}' = \frac{n(x_i - x_{i-1})}{b^* - a^*}; \; i = 2,3,\ldots,s-1, \; n_s' = \frac{n(b^* - x_{s-1})}{b^* - a^*}.$$

Число степеней свободы $k = n - 3$, т. к. равномерное распределение оценивается двумя параметрами.

***Замечания*:**

1. Объем выборки должен быть достаточно велик $(n \ge 50)$.

2. Малочисленные частоты $(n_i < 5)$ следует объединить. В этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить.

Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле $k = m - 3$ следует в качестве m принять число интервалов, оставшихся после объединения частот.

Пример 1. Для заданного интервального выборочного ряда (начальное значение $x_{\min} = 2$, шаг $h = 2$) проверить гипотезу: закон распределения генеральной совокупности является равномерным при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

x_i	(2;4)	(4;6)	(6;8)	(8;10)	(10;12)	(12;14)	(14;16)	(16;18)	(18;20)	(20;22)
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Решение:

Объем выборки n = 200. Будем считать вариантами середины частичных интервалов: $x_1 = 3$; $x_2 = 5, \ldots, x_{10} = 21$.

В итоге получим эмпирическое распределение равностоящих вариант.

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Найдем $\bar{x}_B = 12{,}31$; $\sigma_B = 5{,}81$.

Следовательно,

$$a^* = 12{,}31 - \sqrt{3} \cdot 5{,}81 = 2{,}26;$$

$$b^* = 12{,}31 + \sqrt{3} \cdot 5{,}81 = 22{,}36.$$

Найдем дифференциальную функцию предполагаемого равномерного распределения.

$$f(x) = \frac{1}{a^* - b^*} = \frac{1}{22{,}36 - 2{,}26} = 0{,}05.$$

Найдем теоретические частоты:

$$n_1' = n \cdot f(x)(x_1 - a^*) = 200 \cdot 0{,}05(4 - 2{,}26) = 17{,}4;$$

$$n_2' = 200 \cdot 0{,}05(x_2 - x_1) = 200 \cdot 0{,}05(6 - 4) = 20;$$

$$n_2' = n_3' = \ldots = n_9' = 20;$$

$$n_{10}' = n \cdot f(x)(b^* - x_9) = 200 \cdot 0{,}05(22{,}36 - 20) = 23{,}6.$$

Сравним эмпирические и теоретические частоты. Для этого составим расчетную таблицу.

Номер п/п	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$\left(n_i - n_i'\right)^2$	$\dfrac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$
1	21	17,3	3,6	12,96	0,744828
2	16	20	-4	16	0,8
3	15	20	-5	25	1,25
4	26	20	6	36	1,8
5	22	20	2	4	0,2
6	14	20	-6	36	1,8
7	21	20	1	1	0,05
8	22	20	2	4	0,2
9	18	20	-2	4	0,2
10	25	23,6	1,4	1,96	0,083051
Сумма	–	–	–	–	**7,127878**

Из расчетной таблицы получаем $\chi^2_{\text{набл}} \approx 7{,}13$.

Найдем $\chi^2_{\text{кр}}$ по таблице прил. 3 при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 10 - 3 = 7$.

$$\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;7) = 14{,}1.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза о равномерном распределении принимается.

Пример 2. Даны 100 значений количества инъекций, проводимых в день процедурной сестрой кардиологического отделения Демидовской больницы.

52	48	52	51	52	48	52	51	48	46
52	47	50	52	49	53	51	53	48	47
47	48	47	49	53	50	53	49	51	52
49	49	53	49	54	50	49	50	51	50
52	50	50	52	51	52	53	52	53	49
52	52	49	49	50	52	49	50	49	52
51	49	52	51	50	51	50	49	50	51
50	49	51	54	52	49	46	49	52	46
56	55	56	46	48	49	56	52	50	48
50	54	48	51	52	54	47	50	52	54

Предполагая, что наблюдаемая случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать гипотетическую функцию распределения случайной величины *X*. Найти теоретические частоты нормального распределения и проверить согласие гипотетической функции распределения с нормальным законом с помощью критерия согласия Пирсона (уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$).

Решение:

Количество инъекций является дискретной случайной величиной. Обозначим ее *X*. Число вариант $n = 100$.

Так как наибольшая варианта равна 56, а наименьшая 46, то вся выборка попадает в интервал (46; 56). Разобьем ряд на 5 интервалов. Длина каждого частичного интервала равна $\frac{56-46}{5} = 2$. Получаем следующие пять интервалов:

[45; 47), [47; 49), [49; 51), …, [55; 57).

а соответствующий интервальный вариационный ряд представлен в таблице.

x_i	[45; 47)	[47; 49)	[49; 51)	[51; 53)	[53; 55)	[55; 57)
n_i	4	13	34	32	12	5

Вычислим точечные оценки параметров нормального распределения:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = \frac{46 \cdot 4 + 48 \cdot 13 + \ldots + 56 \cdot 5}{100} = 51;$$

$$\bar{x}_в{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i)^2 n_i}{n} = \frac{46^2 \cdot 4 + 48^2 \cdot 13 + \ldots + 56^2 \cdot 5}{100} = 2606{,}17;$$

$$\sigma_в = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\bar{x}_в^2 - (\bar{x}_в)^2\right)} = \sqrt{\frac{100}{99}(2606{,}17 - 2601)} = 2{,}285.$$

Запишем функцию распределения нормального закона:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-51}{2{,}285}\right).$$

Вычислим вероятности P_i попадания значений рассматриваемой случайной величины *X* с функцией распределения $F(x)$ в i-й частичный интервал и теоретические частоты $n_i' = nP_i$. Значения функции $\Phi(x)$ возьмем из таблицы прил. 1.

Контролируем выполнение неравенства $n_i' = nP_i > 10$. Это необходимо для того, чтобы обеспечить близость закона распределения χ^2-статистики Пирсона к χ^2-распределению.

$$P_1 = P(-\infty < X < 47) = \Phi\left(\frac{47-51}{2,285}\right) - \Phi(-\infty) = -0,4599 + 0,5 = 0,0401;$$

$n_1' = nP_1 = 4,01 < 10;$

$$P_2 = P(47 < X < 49) = \Phi\left(\frac{49-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{47-51}{2,285}\right) = 0,3078 + 0,4599 = 0,1521;$$

$n_2' = nP_2 = 15,21 > 10;$

$$P_3 = P(49 < X < 51) = \Phi\left(\frac{51-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{49-51}{2,285}\right) = 0 + 0,3078 = 0,3078;$$

$n_3' = nP_3 = 30,78 > 10;$

$$P_4 = P(51 < X < 53) = \Phi\left(\frac{53-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{51-51}{2,285}\right) = 0,3078 + 0 = 0,3078;$$

$n_4' = nP_4 = 30,78 > 10;$

$$P_5 = P(53 < X < 55) = \Phi\left(\frac{55-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{53-51}{2,285}\right) = 0,1521;$$

$n_5' = nP_5 = 15,21 > 10;$

$$P_5 = P(55 < X < 57) = \Phi\left(\frac{57-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{55-51}{2,285}\right) = 0,5 - 0,4599 = 0,0401;$$

$n_6' = nP_6 = 4,01 < 10.$

Тогда

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \frac{(4-4,01)^2}{4,01} + \frac{(13-15,21)^2}{15,21} + \ldots +$$
$$+ \frac{(5-4,01)^2}{4,01} = 1,6305.$$

$\chi^2_{\text{кр}}$ выберем по таблице значений прил. 3: $\chi^2_{\text{кр}}(0,05;3) = 7,815$, т. к. нормальное распределение характеризуется двумя параметрами, и число степеней свободы $k = n - 3$.

$$\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}.$$

Гипотеза о нормальном распределении количества инъекций с параметрами $a = 51$, $\sigma_в = 2,285$ согласуется с опытными данными.

Типовые примеры по теме
«*Проверка статистических гипотез*»

Пример 1. Установлено, что в прошлом году покупатель за одно посещение магазина в среднем осуществлял покупки на сумму 956 руб. В этом году на основе случайной выборки 76 посетителей было найдено, что средняя цена покупки при одном посещении составила 1021 руб.

Предполагается, что темп роста трат покупателя есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с $\sigma = 427$ руб. Можно ли на основе этой информации сделать вывод о том, что за год среднее количество денег, которые тратит за одно посещение магазина покупатель, фактически не изменилось? Принять уровень значимости 5 %.

Решение:

Дисперсия генеральной совокупности известна, используем z-распределение.

$H_0 : a_0 = 956; \quad H_1 : a_0 \neq 956.$

Статистическим критерием для проверки этой гипотезы является нормированная нормально распределенная случайная величина

$$z = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Наблюдаемое значение критерия $z_{\text{набл}} = \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$.

Условием задачи заданы следующие экспериментальные значения:

$$\bar{x} = 1021; \ \sigma = 427; \ n = 76.$$

При справедливости нулевой гипотезы поведение этого критерия можно приближенно описать стандартным нормальным законом распределения. Вычислим наблюдаемое значение критерия на основе экспериментальных значений:

$$z_{\text{набл}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{S} = \frac{(1021 - 956)\sqrt{76}}{427} = 1{,}33.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы двусторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = 0{,}475;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = 1{,}96.$

$$z_{\text{набл}} < z_{\text{кр}}.$$

Поскольку наблюдаемое значение критерия попало в область естественных значений критерия, то в результате решения задачи следует сделать такой вывод: принимаем с уровнем доверия в 95 % утверждение о том, что средняя сумма денег, которую оставляет в гипермаркете покупатель за одно посещение, значимо за год не изменилась.

Пример 2. Установлено, что в прошлом году покупатель за одно посещение гипермаркета в среднем осуществлял покупки на сумму 956 руб. В этом году на основе случайной выборки 76 посетителей было найдено, что средняя цена покупки при одном посещении магазина составила 1021 руб. со стандартным отклонение для одного покупателя 427 руб.

Можно ли на основе этой информации сделать вывод о том, что за год среднее количество денег, которые тратит за одно посещение магазина покупатель, фактически не изменилось? Принять уровень значимости 5 %. (Полагаем, что сумма покупок меняется по нормальному закону распределения).

Решение:

Дисперсия генеральной совокупности неизвестна, используем t-распределение.

$H_0 : a_0 = 956; \quad H_1 : a_0 \neq 956.$

Статистическим критерием для проверки этой гипотезы является нормированная нормально распределенная случайная величина

$$t = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{S}.$$

Величина t имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы.

Наблюдаемое значение критерия $t_{\text{набл}} = \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{S}$.

Условием задачи заданы следующие экспериментальные значения:

$$\bar{x} = 1021; \; S = 427; \; n = 76.$$

$$t_{\text{набл}} = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{S} = \frac{(1021 - 956)\sqrt{76}}{427} = 1{,}33.$$

Далее по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы $k = n - 1$ находим критическую точку $t_{\text{кр}}, (\alpha; k) = 1{,}99$.

$$t_{\text{набл}} < t_{\text{кр}}.$$

Поскольку по-прежнему наблюдаемое значение критерия попало в область принятия нулевой гипотезы, то ранее полученный вывод не изменился, т. е. мы принимаем нулевую гипотезу об отсутствии значимых изменений в той сумме денег, которую в среднем тратит покупатель за одно посещение гипермаркета.

Пример 3. По утверждению руководства фирмы, средний размер дебиторского счета равен 187,5 тыс. руб. Ревизор составляет случайную выборку из 10 счетов и обнаруживает, что средняя арифметическая выборки равна 175 тыс. руб. при среднем квадратическом отклонении 35 тыс. руб. Выяснить, может ли оказаться в действительности правильным объявленный размер дебиторского счета. Принять уровень значимости равным 0,05.

Решение:

Имеем: $\bar{x}=175;\ a_1=187{,}5;\ n=10;\ \sigma=35;\ \alpha=0{,}05.$

$H_0: a_1=a_2;\quad H_1: a_1\neq a_2.$

Так как дисперсия неизвестна, то для проверки гипотезы H_0 воспользуемся распределением Стьюдента.

Тогда наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}}=\frac{(\bar{x}-a_1)\sqrt{n}}{\sigma}=\frac{(175-187{,}5)\sqrt{10}}{35}=-1{,}129.$$

По таблице распределения Стьюдента (прил. 4) найдем $t_{\text{двус.кр}}(0{,}05;9)=2{,}26.$

Так как $|t_{\text{набл}}|<t_{\text{двус.кр}}$, то гипотезу H_0 о среднем размере дебиторского счета можно принять на уровне доверия 0,95.

Пример 4. На двух токарных станках обрабатывается втулки. Отобраны две пробы: n_1 = 11 штук – из втулок, обработанных на первом станке, и $n_2=14$ штук – из втулок, обработанных на втором станке. По данным этих выборок найдены исправленные выборочные дисперсии $S_x^2=0{,}76$ и $S_y^2=0{,}38$. Проверить при уровне значимости α = 0,05 гипотезу H_0 об одинаковой точности этих двух станков при альтернативной гипотезе H_1 о том, что второй станок точнее, чем первый.

Решение:

Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}}=\frac{S_Б^2}{S_М^2}=\frac{0{,}76}{0{,}38}=2\,.$$

По таблице (прил. 5), по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ находим критическую точку

$$F_{кр},(0{,}05;10;13) = 2{,}67.$$

Так как $F_{набл} < F_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются незначимо.

Пример 5. На кафедре математики утверждают, что в прошлом году более половины студентов второго курса сдали экзамен на пятерки и четверки. Усомнившись, несколько студентов решили провести исследование, в ходе которого из 30 опрошенных студентов лишь 12 сдали экзамен по математике на пятерки и четверки. Есть ли основания думать, что кафедра математики лукавит? Проверить гипотезу на уровне значимости 1 %.

Решение:

$H_0: p \geq 0{,}5;\quad H_1: p < 0{,}5.$

Задан уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

Вычислим значение выборочной доли (или найдем точечную оценку вероятности биномиального закона распределения, т. е. вероятности того, что случайно выбранный студент получит хорошую или отличную оценку):

$$w = \frac{k}{n} = \frac{12}{30} = 0{,}4.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$z_{набл} = \frac{0{,}4 - 0{,}5}{\sqrt{\dfrac{0{,}5(1 - 0{,}5)}{30}}} = -1{,}095.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы левосторонней критической области $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1 - 2\alpha}{2} = 0{,}49$; и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{кр} = 2{,}33$.

Полученное значение статистики не попало в критическую область. Мы принимаем основную гипотезу. У нас нет оснований сомневаться в истинности утверждения кафедры математики о результатах экзамена.

Пример 6. Компания год назад провела исследование и выяснила, что 5 % покупателей заинтересованы в выпуске нового продукта. Спустя год после начала выпуска, компания провела новое исследование, в ходе которого из 6000 опрошенных 335 положительно отнеслись к выпуску нового продукта.

На 2 % уровне значимости определить, возрос ли интерес покупателей к новому продукту?

Решение:

$H_0: p \geq 0{,}05; \quad H_1: p < 0{,}05.$

Задан уровень значимости $\alpha = 0{,}02$.

Вычислим значение выборочной доли (или найдем точечную оценку вероятности биномиального закона распределения, т. е. вероятности того, что случайно выбранный студент получит хорошую или отличную оценку):

$$w = \frac{k}{n} = \frac{335}{6000} = 0{,}056.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$z_{\text{набл}} = \frac{0{,}056 - 0{,}05}{\sqrt{\dfrac{0{,}05(1-0{,}05)}{6000}}} = 2{,}14.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы левосторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2} = 0{,}48;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = 2{,}05.$

$$t_{\text{набл}} > t_{\text{кр}}.$$

Полученное значение статистики попало в критическую область. Мы отклоняем основную гипотезу. Таким образом, в результате исследования выявлено, что интерес покупателей к новой марке возрос.

Пример 7. Студенты двух вузов сдавали экзамены по физике. В первом вузе экзаменовалось 30 студентов, средняя оценка 52, во втором вузе – 36 студентов, средняя оценка 47 (по100-бальной системе оценок). Стандартное отклонение σ оценок на экзаменах, вычисленное для нескольких тысяч студентов, равно 12. Можно ли утверждать с вероятностью 95 %, что первый вуз дает подготовку по физике лучше, чем второй?

Решение:

Имеем:

$\overline{X}=52;\ \overline{Y}=47;\ n_x=30;\ n_y=36;\ \sigma_1=\sigma_2=12;\ \alpha=0{,}05.$

$H_0: a_1=a_2; \quad H_1: a_1>a_2.$

$$z_{\text{набл}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_x}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_y}}}=\frac{52-47}{12\sqrt{\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{36}}}=1{,}69.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы правосторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}})=\dfrac{1-2\alpha}{2}=0{,}45;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}}=1{,}65.$

$z_{\text{набл}}>z_{\text{кр}},$ следовательно, гипотеза H_0 отвергается, т. е. подготовка студентов по физике вуза *A* лучше, чем вуза *B*.

Пример 8. Имеются независимые выборки значений нормально распределенных случайных величин

X: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6

и *Y*: 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 9.

Требуется проверить для уровня значимости α = 0,1 при условии равенства генеральных дисперсий нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X)\neq M(Y)$.

Решение:

Объемы выборок $m = 10$, $n = 15$. Вычислим выборочные средние и исправленные выборочные дисперсии:

$$\bar{x}_B=3{,}8;\ \bar{y}_B=4{,}93;\ S_x^2=1{,}73;\ S_y^2=3{,}21.$$

$$S^2=\frac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}=\frac{9\cdot 1{,}73^2+14\cdot 3{,}21^2}{23}=7{,}44.$$

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

$$T_{\text{набл}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_x}+\dfrac{1}{n_y}}}=\frac{3{,}8-4{,}93}{2{,}73\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}}}=-1{,}02.$$

Критическая область – двусторонняя, $t_{\text{двуст.кр.}}(0{,}1;\ 23)=1{,}71$.

Итак, $|T_{\text{набл}}|<t_{\text{двуст.кр.}}$, следовательно, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу – можно считать, что математические ожидания генеральных совокупностей равны.

Пример 9. В ходе проведения выборов было установлено, что в Москве из 1500 потенциальных случайно выбранных избирателей реально в выборах приняли участие 480 человек, а в Санкт-Петербурге из 1630 потенциальных избирателей на избирательные участки пришли 490 человек. На уровне значимости α = 10 % проверить гипотезу о равенстве генеральных долей избирателей в двух этих городах, реально принявших участие в выборах.

Решение:

$H_0: W_1 = W_2.$

$H_1: W_1 \neq W_2.$

Экспериментальные данные:

$n_1 = 1500;\ k_1 = 480;\ n_2 = 1630;\ k_2 = 490;\ \gamma = 0{,}90;\ \alpha = 0{,}10.$

Тогда $W_1 = \dfrac{480}{1500} = 0{,}32;\quad W_2 = \dfrac{490}{1630} = 0{,}30;$

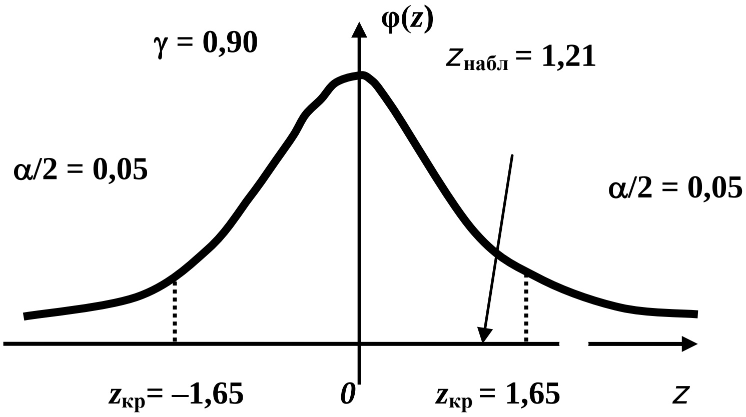
и $\hat{p} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{970}{3130} = 0{,}31.$

Вычислим на основе экспериментальных данных наблюдаемое значение критерия:

$$z_{\text{набл}} = \frac{W_1 - W_2}{\sqrt{\hat{p}\cdot\left(1-\hat{p}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0{,}32 - 0{,}30}{\sqrt{0{,}31\cdot 0{,}69\cdot\left(\dfrac{1}{1500}+\dfrac{1}{1630}\right)}} = 1{,}21.$$

В соответствии с приведенной выше таблицей критериев критических областей найдем границы двусторонней критической области $\Phi(z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = 0{,}45;$ и в соответствии с таблицей прил. 3 $z_{\text{кр}} = 1{,}65.$

Покажем все найденные значения на графике плотности стандартного нормального закона распределения, который описывает поведение случайной величины *t* при справедливости нулевой гипотезы.



Поскольку наблюдаемое значение критерия попало в область естественных для данного закона распределения значений (в данном случае стандартного нормального закона распределения), то гипотеза H_0 принимается как не противоречащая экспериментальным данным с уровнем доверия 90 %, т. е. генеральные доли электората, реально принявших участие в выборах в Москве и Санкт-Петербурге, значимо не отличаются (их можно считать одинаковыми).

Пример 10. Для выборки, интервальный статистический ряд которой имеет вид

Номер интервала	Границы интервала	Эмпирические частоты
1	2–5	6
2	5–8	8
3	8–11	15
4	11–14	22
5	14–17	14
6	17–20	5

проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу:

а) о показательном; б) равномерном; в) нормальном законе распределения генеральной совокупности с помощью критерия Пирсона.

Решение:

Объем выборки $n = 70$. Будем считать вариантами середины частичных интервалов: $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 6{,}5, \ldots, x_6 = 18{,}5$.

Найдем $\overline{x}_B = 11{,}43$; $\sigma_B = 4{,}03$; $s = 4{,}05$.

а) Вычислим теоретические частоты в предположении о показательном распределении генеральной совокупности при $\lambda^* = \dfrac{1}{11{,}43} = 0{,}087$:

$$n_1' = 70\left(e^{-0{,}087\cdot 2} - e^{-0{,}087\cdot 5}\right) = 70\left(e^{-0{,}174} - e^{-0{,}435}\right) = 13{,}44;$$

аналогично $n_2' = 10{,}37$; $n_3' = 8{,}05$; $n_4' = 6{,}23$; $n_5' = 4{,}76$; $n_6' = 3{,}64$.

Наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(6-13{,}44)^2}{13{,}44} + \ldots + \frac{(5-3{,}64)^2}{3{,}64} = 69{,}02.$$

Критическая точка $\chi^2(0{,}05;4) = 9{,}5$; $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ и гипотеза о показательном распределении отклоняется.

б) Для равномерного распределения

$$a^* = 11{,}43 - \sqrt{3} \cdot 4{,}03 = 4{,}45;$$
$$b^* = 11{,}43 + \sqrt{3} \cdot 4{,}03 = 18{,}41;$$
$$f(x) = \frac{1}{a^* - b^*} = \frac{1}{18{,}41 - 4{,}45} = 0{,}072.$$

Теоретические частоты:

$$n_1' = 70 \cdot (5 - 4{,}45) \cdot 0{,}072 = 2{,}77;$$
$$n_2' = n_3' = n_4' = n_5' = 70 \cdot 3 \cdot 0{,}072 = 15{,}12;$$
$$n_6' = 70 \cdot (18{,}41 - 17) \cdot 0{,}072 = 7{,}1.$$

Наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(6 - 2{,}77)^2}{2{,}77} + \ldots + \frac{(5 - 7{,}1)^2}{7{,}1} = 10{,}95.$$

Критическая точка $\chi^2(0{,}05;3) = 7{,}8$; $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ и гипотеза о равномерном распределении отклоняется.

в) Теоретические частоты для нормального распределения:

$$n_1' = 70 \cdot \left(\Phi\left(\frac{5 - 11{,}43}{4{,}05} \right) - \Phi\left(\frac{2 - 11{,}43}{4{,}05} \right) \right) = 70 \cdot \left(\Phi(-1{,}588) - \Phi(-2{,}328) \right) =$$
$$= 70 \cdot \left(\Phi(2{,}328) - \Phi(1{,}588) \right) = 70 \cdot (0{,}4900 - 0{,}4441) = 3{,}2.$$

Так же вычисляются

$$n_2' = 9{,}9; \quad n_3' = 18{,}2; \quad n_4' = 19{,}6; \quad n_5' = 12{,}5; \quad n_6' = 4{,}7.$$

Наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(6 - 3{,}2)^2}{3{,}2} + \ldots + \frac{(5 - 4{,}7)^2}{4{,}7} = 3{,}87.$$

Критическая точка $\chi^2(0{,}05;\ 3) = 7{,}8$. Поскольку $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.