

Klasifikacija rukom pisanih znamenki korištenjem HOSVD-a

Marija Nikolić, Maja Soldo, Anamarija Sršen

3.3.2025.

Uvod

- ▶ standardni problem prepoznavanja uzoraka
- ▶ Zadatak je dodjeljivanje nepoznatog objekta jednoj od unaprijed definiranih klasa.

- ▶ Neki od pristupa za rješavanje ovog problema su: analiza glavnih komponenti (principal component analysis – PCA), metoda potpornih vektora, metoda najbližeg susjeda i k-najbližih susjeda, regresija, statičko modeliranje te neuronske mreže.
- ▶ U ovom radu predstaviti ćemo dva algoritma temeljena na HOSVD-u.

Tenzorske metode

- ▶ Matricizacija tenzora: Postupak pretvaranja tenzora u matricu radi lakšeg rukovanja.

$$\mathbf{A}_{(1)} \in \mathbb{R}^{I \times JK}, \mathbf{A}_{(1)} : a_{ijk} = a_{iv}^{(1)}, v = j + (k - 1)K,$$

$$\mathbf{A}_{(2)} \in \mathbb{R}^{J \times IK}, \mathbf{A}_{(2)} : a_{ijk} = a_{jv}^{(2)}, v = k + (i - 1)I,$$

$$\mathbf{A}_{(3)} \in \mathbb{R}^{K \times IJ}, \mathbf{A}_{(3)} : a_{ijk} = a_{kv}^{(3)}, v = i + (j - 1)J,$$

- n-modno množenje tenzora i matrice:

$$(\mathbf{A} \times_n \mathbf{F})(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N) = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathbf{A}(i_1, \dots, i_N) F(j_n, i_n).$$

Teorem 1 (SVD matrice)

Svaka matrica $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ može se zapisati kao produkt

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

gdje su $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalne matrice, a $\mathbf{\Sigma}$ je dijagonalna matrica veličine $m \times n$ s nenegativnim elementima koji su poredani na sljedeći način:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Stupci matrica \mathbf{U} i \mathbf{V} nazivaju se lijevim i desnim singularnim vektorima, a σ_i su singularne vrijednosti.

Teorem 2 (HOSVD)

Tenzor \mathcal{A} možemo zapisati kao $\mathcal{A} = S \times_1 U \times_2 V \times_3 W$, gdje su U , V i W ortogonalne matrice, S je tenzor istih dimenzija kao i \mathcal{A} te zadovoljava sljedeća svojstva:

- ▶ **(potpuna ortogonalnost)** Svaka dva odsječka istog tipa su okomiti, tj. za sve $i \neq j$ vrijedi

$$\langle S(i, :, :), S(j, :, :) \rangle_F = \langle S(:, i, :), S(:, j, :) \rangle_F = \langle S(:, :, i), S(:, :, j) \rangle_F = 0.$$

- ▶ **(poredak)** Norme odsječaka (singularne vrijednosti matriciziranih tenzora) za svaki mod su poredane silazno. Primjerice za prvi mod,

$$\sigma_j^{(1)} = \|S(j, :, :)\|_F, \quad j = 1, \dots, l,$$

vrijedi

$$\sigma_1^{(1)} \geq \sigma_2^{(1)} \geq \dots \geq \sigma_l^{(1)} \geq 0.$$

Ako je $l > mn$, onda vrijedi:

$$S(i, :, :) = 0, \quad \text{za } i > mn.$$

Ortogonalne osnovne matrice

Matrica \mathbf{F} može se zapisati kao suma matrica ranga jedan koristeći SVD:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Slično tome, za tenzore trećeg reda vrijedi:

$$\mathbf{A} = \sum_{v=1}^K \mathbf{A}_v \times_3 \mathbf{w}_v,$$

gdje je $\mathbf{A}_v = \mathbf{S}(:, :, v) \times_1 \mathbf{U} \times_2 \mathbf{V}$. Zbog potpune ortogonalnosti od \mathbf{S} , matrice \mathbf{A}_v su međusobno ortogonalne:

$$\langle \mathbf{A}_l, \mathbf{A}_m \rangle = 0$$

kada je $l \neq m$. Ove ortogonalne matrice mogu se interpretirati kao skup linearno neovisnih osnovnih matrica.

Algoritam 1: Klasifikacija pomoću HOSVD-a

► Faza treniranja:

1. Sortirajte znamenke za treniranje u tenzore s znamenkama iste vrste.
2. Izračunajte HOSVD tenzora.
3. Izračunajte i pohranite normalizirane bazne matrice $(A_v^\mu)_{v=1}^k$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$.

► Faza testiranja:

1. Normalizirajte nepoznatu znamenku.
2. Izračunajte $R(\mu) = 1 - \sum_{v=1}^k \langle D, A_v^\mu \rangle^2$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$.
3. Odredite $\mu_{\min} := \arg \min_{\mu} R(\mu)$ i klasificirajte D kao μ_{\min} .

Algoritam 2

► Faza treniranja:

1. Sortirajte i vektorizirajte znamenke iz skupa za treniranje u tenzor \mathcal{D} .
2. Izračunajte HOSVD od \mathcal{D} , jednačba

$$\mathcal{D} = \mathcal{S} \times_1 U \times_2 V \times_3 W \approx \mathcal{F} \times_1 U_p \times_2 V_q, \quad (1)$$

3. Izračunajte reducirani tenzor \mathcal{F} koji predstavlja skup za treniranje, jednačba

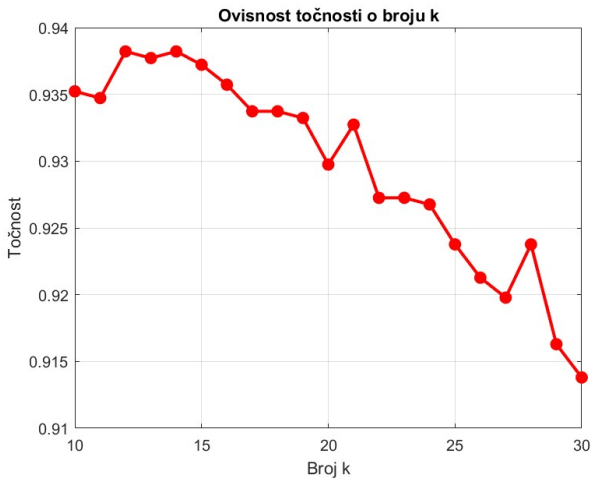
$$\mathbb{R}^{p \times q \times 10} \ni \mathcal{F} = \mathcal{D} \times_1 U_p^T \times_2 V_q^T. \quad (2)$$

4. Izračunajte i pohranite bazne matrice B^μ za svaku klasu.

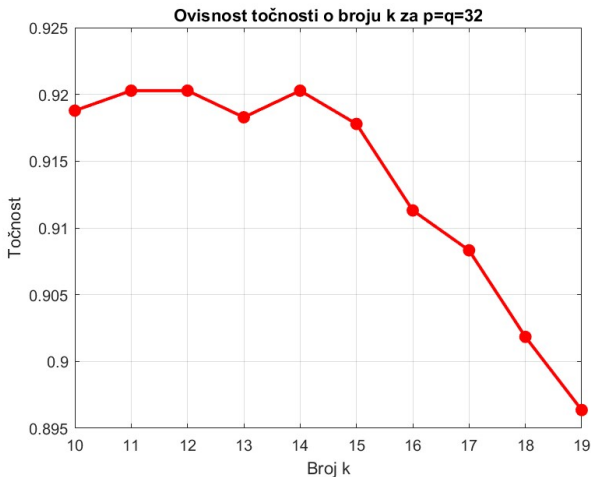
► Faza testiranja:

1. Izračunajte niskodimenzionalnu reprezentaciju $d_p = U_p^T d$ nepoznate znamenke.
2. Izračunajte ostatke $R(\mu) = \|d_p - B^\mu (B^\mu)^T d_p\|$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$.
3. Odredite $\mu_{\min} = \arg \min_{\mu} R(\mu)$ i klasificirajte d kao μ_{\min} .

Grafički prikaz točnosti Algoritma 1 u ovisnosti o parametru k



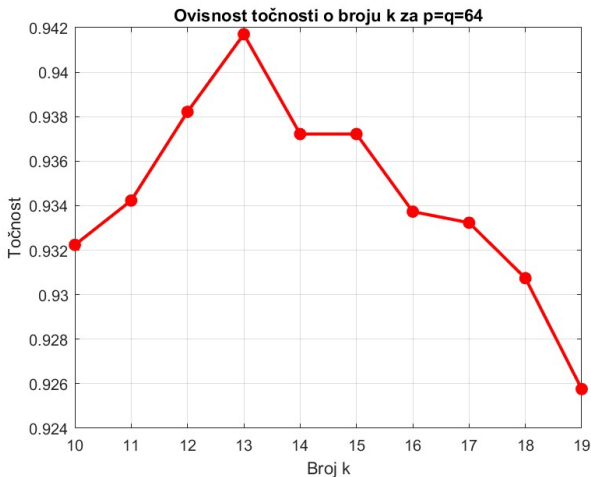
Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametru k za fiksne $p=q=32$



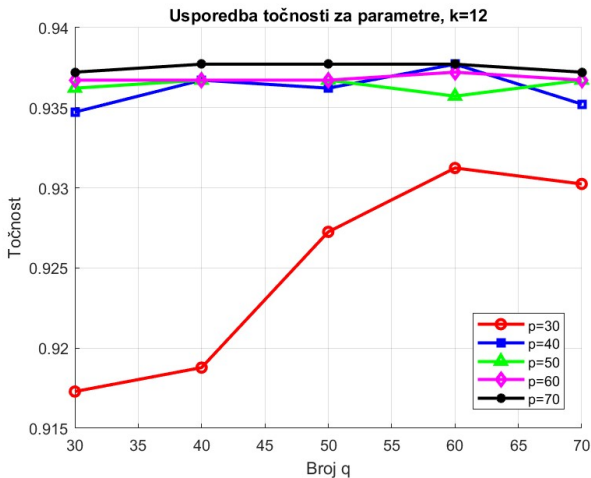
Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametru k za fiksne $p=q=48$



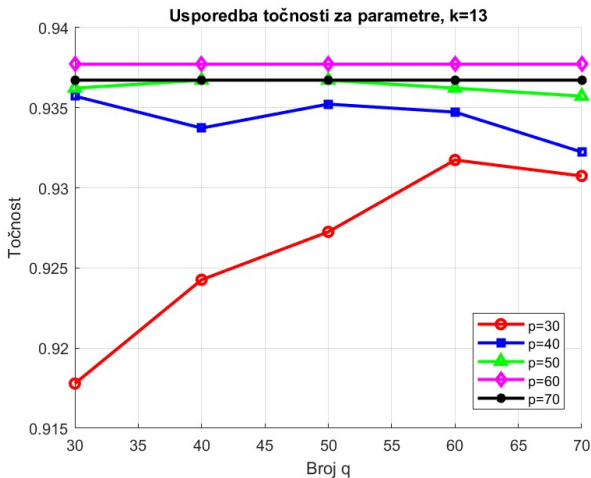
Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametru k za fiksne $p=q=64$



Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametrima p i q za $k=12$



Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametrima p i q za $k=13$



Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametrima p i q za $k=14$

