

Klasifikacija rukom pisanih znamenki korištenjem HOSVD-a

Marija Nikolić, Maja Soldo, Anamarija Sršen

3.3.2025.

1 Uvod

Klasifikacija rukom pisanih znamenki često se smatra standardnim problemom kod prepoznavanja uzoraka. Zadatak dodjeljivanja nepoznatog objekta jednoj od deset unaprijed definiranih klasa predstavlja težak problem, budući da je varijabilnost objekta unutar svake klase velika, dok istovremeno objekti iz različitih klasa mogu biti vrlo slični.

Neki od pristupa za rješavanje ovog problema su: analiza glavnih komponenti (principal component analysis – PCA), metoda potpornih vektora, metoda najbližeg susjeda i k-najbližih susjeda, regresija, statičko modeliranje te neuronske mreže.

U ovom radu predstaviti ćemo dva algoritma za klasifikaciju rukom pisanih znamenki temeljeni na dekompoziciji singularnih vrijednosti višeg reda – HOSVD tenzora. Prvi algoritam koristi HOSVD za izračunavanje malog skupa baznih matrica koje oblikuju dominantni podprostor za svaku klasu znamenki. Te bazne matrice zatim se koriste za opisivanje nepoznatih znamenki. Ovaj algoritam je usko povezan sa SIMCA¹ i PCA metodama. Drugi algoritam koristi HOSVD za sažimanje skupa podataka za treniranje. Modeli klasa (ovdje bazni vektori) izračunavaju se koristeći samo reducirane podatke, a klasifikacija se izvodi na isti način kao u prvom algoritmu. Ovaj pristup ima dvostruku prednost: modeli klasa zauzimaju manje memorije, a faza klasifikacije je učinkovitija bez gubitka performansi. Algoritam postiže stopu pogreške od 5% čak i nakon što se skup podataka za treniranje smanji za više od 98%.

Posljednjih godina primjena tenzorskih metoda na probleme u prepoznavanju uzoraka i drugim područjima sve se više koristi. Pod tenzorima podrazumijevamo višedimenzionalne ili višemodne nizove podataka. Često podaci imaju višedimenzionalnu strukturu, pa ih nije prirodno organizirati u matrice ili vektore.

U ovom radu koristimo pripremljen skup podataka, znamenke kao digitalne slike u nekom formatu i zadane rezolucije za testiranje performansi predloženih algoritama.

Algoritmi će biti ilustrirani pomoću pseudo-MATLAB koda. U primjerima koda koristiti ćemo notaciju $A(i, j, k)$ koja označava a_{ijk} . Također, u formulama ćemo ponekad koristiti MATLAB-stil notacije. Na primjer, definiramo mod-1 tenzora nit od 3-tenzora A kao stupčane vektore $A(:, j, k)$.

¹Soft independent modelling by class analogy (SIMCA) je statistička metoda za nadziranje klasifikacije podataka. Metoda zahtijeva skup podataka za obuku koji se sastoji od uzorka (ili objekata) sa skupom atributa i njihovim članstvom u klasi.

Niti (fibers) se određuju tako da se fiksira indeks u svim modovima osim u jednom. Slično tome, odsječci tenzora (slices) definiraju se kao podtenzori dobiveni fiksiranjem indeksa u jednom modu, npr. $A(:, :, k)$.

2 Tenzorske metode

Tenzor reda N objekt je s N indeksa. Dimenzije tenzora nazivamo modom. Vektori i matrice mogu se smatrati tenzorima prvog, odnosno drugog reda.

U ovom radu $N = 3$, dakle bavimo se tenzorima trećeg reda $A \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$, gdje su I, J, K pozitivni cijeli brojevi; vektorski prostor $\mathbb{R}^{I \times J \times K}$ ima dimenziju IJK . Generalizacija na tenzore proizvoljnog reda je očita.

Neka je $\mathbb{R}^{I \times J \times K}$ opremljen standardnom euklidskom geometrijom. Skalarni produkt dvaju tenzora $A, B \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ definira se kao:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijk} b_{ijk}.$$

Dva tenzora A i B nazivamo ortogonalnima ako je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$\langle A, B \rangle = 0.$$

Norma tenzora A definirana je kao:

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}.$$

Skalarni produkt i norma vektora i matrica definirani su na analogan način. Ponekad je korisno prerasporediti elemente tenzora tako da formiraju matricu. Ovaj postupak nazivamo *matricizacijom tenzora*. Matricizacija tenzora u n -modu označava operaciju u kojoj se niti n -moda tenzora \mathbf{K} poravnavaju kao stupci matrice, koja se označava kao $\mathbf{K}_{(n)}$. Uobičajeno je pretpostaviti da su stupci $\mathbf{K}_{(n)}$ uređeni u cikličkom redoslijedu unaprijed.

Za tenzor trećeg reda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$, matricizacija se definira na sljedeći način, pri čemu se određuje položaj elementa a_{ijk} u matrici:

$$\mathbf{A}_{(1)} \in \mathbb{R}^{I \times JK}, \mathbf{A}_{(1)} : a_{ijk} = a_{iv}^{(1)}, v = j + (k - 1)K,$$

$$\mathbf{A}_{(2)} \in \mathbb{R}^{J \times IK}, \mathbf{A}_{(2)} : a_{ijk} = a_{jv}^{(2)}, v = k + (i - 1)I,$$

$$\mathbf{A}_{(3)} \in \mathbb{R}^{K \times IJ}, \mathbf{A}_{(3)} : a_{ijk} = a_{kv}^{(3)}, v = i + (j - 1)J,$$

Ne postoji jedinstven način za generalizaciju pojma ranga za tenzore višeg reda prema definicijama ranga za matrice. Jedna od mogućnosti je definirati n -rang tenzora \mathbf{A} kao dimenziju podprostora koji oblikuju vektori moda n , tj.

$$\text{rank}_n(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}_{(n)}),$$

gdje je $\mathbf{A}_{(n)}$ matricizirani \mathbf{A} duž n -tog moda, a "rank" bez podindeksa označava rang matrice.

Sada dajemo opću definiciju množenja tenzora i matrice.

Definicija 1. (n -modno množenje tenzora i matrice). Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ i $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$. Tada je n -modno množenje tenzora \mathbf{A} i matrice \mathbf{F} , označeno kao $\mathbf{A} \times_n \mathbf{F}$, definirano kao:

$$(\mathbf{A} \times_n \mathbf{F})(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N) = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathbf{A}(i_1, \dots, i_n) F(j_n, i_n).$$

Na primjer, 1-modno množenje tenzora $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ s matricom $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{L \times I}$ daje:

$$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{L \times J \times K}, \mathbf{B} = \mathbf{A} \times_1 \mathbf{F}, \quad \mathbf{B}(l, j, k) = \sum_{i=1}^I A(i, j, k) F(l, i).$$

Za tenzor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ i matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{L \times I}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{M \times J}$, i $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times L}$, množenje tenzora i matrica zadovoljava sljedeće osobitosti:

$$(\mathbf{A} \times_1 \mathbf{F}) \times_2 \mathbf{G} = (\mathbf{A} \times_2 \mathbf{G}) \times_1 \mathbf{F} = \mathbf{A} \times_1 \mathbf{F} \times_2 \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{L \times M \times K},$$

$$(\mathbf{A} \times_1 \mathbf{F}) \times_1 \mathbf{H} = \mathbf{A} \times_1 (\mathbf{H}\mathbf{F}) \in \mathbb{R}^{N \times J \times K}.$$

Budući da su stupčasti vektori $\mathbf{A}_{(n)}$ n -modne niti tenzora \mathbf{A} , slijedi da n -modno množenje $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times_n \mathbf{X}$ može biti izraženo u terminima matriciziranog tenzora: običnim množenjem matrica

$$\mathbf{B}_{(n)} = \mathbf{X}\mathbf{A}_{(n)},$$

a zatim slijedi reorganizacija $\mathbf{B}_{(n)}$ u tenzor \mathbf{B} .

2.1 Viši red SVD-a

Singularna dekompozicija (SVD) matrice vrlo je korisno sredstvo u mnogim primjenama. Bez gubitka općenitosti, pretpostavljamo da je $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pri čemu vrijedi $m \geq n$.

2.1.1 Teorem 2 (SVD matrice)

Svaka matrica $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ može se zapisati kao produkt

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

gdje su $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalne matrice, a $\mathbf{\Sigma}$ je dijagonalna matrica veličine $m \times n$ s nenegativnim elementima koji su poredani na sljedeći način:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Stupci matrica \mathbf{U} i \mathbf{V} nazivaju se lijevim i desnim singularnim vektorima, a σ_i su singularne vrijednosti.

Ako matricu tretiramo kao tenzor drugog reda, možemo izraziti SVD u terminima n -modnog produkta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Sigma} \times_1 \mathbf{U} \times_2 \mathbf{V}.$$

Jedna od mogućih generalizacija SVD-a naziva se HOSVD (Higher Order Singular Value Decomposition). Ovdje iznosimo rezultat za 3-tenzor \mathbf{A} .

2.1.2 Teorem 3. (HOSVD)

Tenzor \mathcal{A} možemo zapisati kao $\mathcal{A} = S \times_1 U \times_2 V \times_3 W$, gdje su U , V i W ortogonalne matrice, S je tenzor istih dimenzija kao i \mathcal{A} te zadovoljava sljedeća svojstva:

- **(potpuna ortogonalnost)** Svaka dva odsječka istog tipa su okomiti, tj. za sve $i \neq j$ vrijedi

$$\langle S(i, :, :), S(j, :, :) \rangle_F = \langle S(:, i, :), S(:, j, :) \rangle_F = \langle S(:, :, i), S(:, :, j) \rangle_F = 0.$$

- **(poredak)** Norme odsječaka (singularne vrijednosti matriciziranih tenzora) za svaki mod su poredane silazno. Primjerice za prvi mod,

$$\sigma_j^{(1)} = \|S(j, :, :)\|_F, \quad j = 1, \dots, l,$$

vrijedi

$$\sigma_1^{(1)} \geq \sigma_2^{(1)} \geq \dots \geq \sigma_l^{(1)} \geq 0.$$

Ako je $l > mn$, onda vrijedi:

$$S(i, :, :) = 0, \quad \text{za } i > mn.$$

Svojstvo poretka implicira da je "energija" ili "masa" jezgrenog tenzora S koncentrirana u blizini kuta $(1, 1, 1)$. Ovo svojstvo omogućuje kompresiju podataka pomoću HOSVD-a.

Za tenzor $A \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$, HOSVD se računa zasebnim izračunom ortogonalnih matrica U, V i W kao lijevih singularnih matrica matriciziranih tenzora za svaki mod:

1. Izračunavaju se tri SVD-a:

$$A_{(1)} = U \Sigma^{(1)} (V^{(1)})^T,$$

$$A_{(2)} = V \Sigma^{(2)} (V^{(2)})^T,$$

$$A_{(3)} = W \Sigma^{(3)} (V^{(3)})^T,$$

pri čemu se desne singularne matrice ne trebaju eksplicitno računati.

2. Jezgreni tenzor računa se kao:

$$S = A \times_1 U^T \times_2 V^T \times_3 W^T.$$

Izbjegavanjem izračuna desnih singularnih matrica postiže se značajna ušteda u računskoj složenosti, posebno kada su dimenzije tenzora vrlo različite (npr. $l \ll mn$).

2.2 Aproksimacija tenzora pomoću HOSVD-a

Kod matrica se kompresija podataka često provodi aproksimacijom niskog ranga: najbolja aproksimacija ranga k za matricu \mathbf{F} dobiva se pomoću SVD-a:

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{U}_k \Sigma_k \mathbf{V}_k^T,$$

gdje su \mathbf{U}_k i \mathbf{V}_k matrice dobivene uzimanjem prvih k stupaca iz \mathbf{U} i \mathbf{V} , a Σ_k je dijagonalna matrica s prvih k singularnih vrijednosti.

Kod tenzora se aproksimacija može postići pomoću HOSVD-a na sličan način, zahvaljujući svojstvu poretka. Međutim, za opće tenzore aproksimacija nije optimalna u normi:

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{S}' \times_1 \mathbf{U}' \times_2 \mathbf{V}' \times_3 \mathbf{W}',$$

gdje su \mathbf{S}' , \mathbf{U}' , \mathbf{V}' , \mathbf{W}' reducirane verzije odgovarajućih tenzora i matrica.

Kvaliteta aproksimacije mjeri se promatranjem pada singularnih vrijednosti za svaki mod. Ako je norma izostavljenog dijela jezgrenog tenzora mala, pogreška aproksimacije također je mala.

2.3 Ortogonalne osnovne matrice

Matrica \mathbf{F} može se zapisati kao suma matrica ranga jedan koristeći SVD:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Slično tome, za tenzore trećeg reda vrijedi:

$$\mathbf{A} = \sum_{v=1}^K \mathbf{A}_v \times_3 \mathbf{w}_v,$$

gdje je $\mathbf{A}_v = \mathbf{S}(:, :, v) \times_1 \mathbf{U} \times_2 \mathbf{V}$. Zbog potpune ortogonalnosti od \mathbf{S} , matrice \mathbf{A}_v su međusobno ortogonalne:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_l, \mathbf{A}_m \rangle &= \text{tr}((\mathbf{A}_l)^T \mathbf{A}_m) \\ &= \text{tr}((\mathbf{U} \mathbf{S}(:, :, l) \mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U} \mathbf{S}(:, :, m) \mathbf{V}^T)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{V} \mathbf{S}(:, :, l)^T \mathbf{S}(:, :, m) \mathbf{V}^T) \\ &= \langle \mathbf{S}(:, :, l), \mathbf{S}(:, :, m) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

kada je $l \neq m$. Ove ortogonalne matrice mogu se interpretirati kao skup linearno neovisnih osnovnih matrica.

3 Algoritmi

3.1 Algoritam 1: Klasifikacija pomoću HOSVD-a

Znamenke promatramo kao točke u $\mathbb{R}^{20 \times 20}$. U originalnim podacima znamenke su dane kao 16×16 slike, ali koristeći zamagljivanje Gaussovom funkcijom, povećavamo ih na 20×20 .

Možemo pretpostaviti da podaci iz skupa za treniranje čine 10 relativno dobro odvojenih klasa, inače bi bilo koji algoritam za klasifikaciju imao lošu učinkovitost. Istovremeno, "dominantni" vektori u svakoj klasi znamenki razapinju potprostor u \mathbb{R}^{400} . Za svaku klasu konstruiramo mali skup ortogonalnih baznih matrica (vektora) koji razapinju dominantne dijelove odgovarajućih potprostora. Zatim procjenjujemo koja baza najbolje reprezentira nepoznatu znamenku uspoređujući pogreške aproksimacije za svih 10 baza. HOSVD se koristi za izračun različitih skupova baznih matrica.

3.1.1 Faza treniranja

Skup ortogonalnih baznih matrica konstruiramo kako je opisano u Odjeljku 2.3. Bazu za svaku klasu određujemo na temelju tenzora trećeg reda koji obuhvaća sve znamenke za treniranje te klase. Neka je $\mathcal{A}^{znam} \in \mathbb{R}^{20 \times 20 \times K}$ tenzor s određenom znamenkom i pretpostavimo da je izračunat HOSVD. Tada iz prethodne jednadžbe

$$\mathcal{A}^{znam} = \sum_{v=1}^k A_v^{znam} \times_3 w_v^{znam}, \quad (1)$$

gdje su A_v^{znam} ortogonalne bazne matrice. Ova jednadžba pokazuje da se svaka znamenka u tenzoru \mathcal{A}^{znam} može zapisati kao jedinstvena linearna kombinacija istih baznih matrica A_v^{znam} , pri čemu su koeficijenti dani elementima vektora w_v^{znam} .

Smanjujemo k u sumi (1) kako bismo dobili mali i dominantni k -dimenzionalni potprostor za svaku klasu znamenki. Pretpostavimo da su baze konstruirane za svih 10 klasa, svaka sadrži k baznih matrica, i označimo $T_\mu = (A_v^\mu)_{v=1}^k$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$. Dodatno, pretpostavimo da su bazne matrice normalizirane. Dakle, $\langle A_v^\mu, A_\lambda^\mu \rangle = \delta_{v\lambda}$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$, gdje je $\delta_{v\lambda}$ Kroneckerov delta simbol. Neka je D nepoznata znamenka za koju pretpostavljamo da je normalizirana, $\|D\| = 1$.

3.1.2 Faza testiranja

Promatramo problem minimizacije

$$\min \|D - \sum_{v=1}^k \alpha_v^\mu A_v^\mu\|, \quad \mu \text{ je fiksni indeks klase} \quad (2)$$

u kojem su α_v^μ nepoznati skalari koje treba odrediti. Ovo je problem najmanjih kvadrata kojeg je lako riješiti jer su A_v^μ ortonormalne za fiksni μ . Rješenje je dano s $\hat{\alpha} = \langle D, A_v^\mu \rangle$, $v = 1, 2, \dots, k$. Primijetimo da je α_1^μ kosinus kuta između matrica D i A_1^μ ,

$$\hat{\alpha}_1^\mu = \cos(\theta^\mu) = \langle D, A_1^\mu \rangle. \quad (3)$$

Uvrštavanjem rješenja u jednadžbu (2) i korištenjem ortonormalnosti baznih matrica, dobivamo sljedeći izraz za kvadrat norme,

$$\begin{aligned} R(\mu) &= \left\| D - \sum_{v=1}^k \hat{\alpha}_v^\mu A_v^\mu \right\|^2 = \left\langle D - \sum_{v=1}^k \hat{\alpha}_v^\mu A_v^\mu, D - \sum_{v=1}^k \hat{\alpha}_v^\mu A_v^\mu \right\rangle \\ &= \langle D, D \rangle - \sum_{v=1}^k \langle D, A_v^\mu \rangle^2 = 1 - \sum_{v=1}^k \langle D, A_v^\mu \rangle^2. \end{aligned} \quad (4)$$

D pripisujemo klasi za koju je $R(\mu)$ najmanji.

Algoritam 1. Klasifikacija pomoću HOSVD-a

- Faza treniranja:
 1. Sortirajte znamenke za treniranje u tenzore s znamenkama iste vrste.
 2. Izračunajte HOSVD tenzora.
 3. Izračunajte i pohranite normalizirane bazne matrice $(A_v^\mu)_{v=1}^k$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$.
- Faza testiranja:
 1. Normalizirajte nepoznatu znamenku.
 2. Izračunajte $R(\mu) = 1 - \sum_{v=1}^k \langle D, A_v^\mu \rangle^2$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$.
 3. Odredite $\mu_{\min} := \arg \min_{\mu} R(\mu)$ i klasificirajte D kao μ_{\min} .

3.2 Algoritam 2: Kompresija i klasifikacija pomoću HOSVD-a

Ideja ovog algoritma je napraviti kompresiju skupa za treniranje prije izračuna baznih vektora za različite kalse. Prednost je što se sve znamenke iz različitih klasa projiciraju na jedan zajednički potprostor pa se nepoznata znamenka projicira samo jednom. Inače bi postojali različiti potprostori za različite znamenke pa bismo morali projicirati nepoznatu znamenku na svaki od tih potprostora što bi zahtijevalo veću količinu izračuna i memorije.

3.2.1 Faza treniranja

Prvo gradimo tenzor sa svim znamenkama iz skupa za treniranje. Sve znamenke su preoblikovane u vektore u \mathbb{R}^{400} . Sortirane su tako da svaki slice sadrži znamenke samo jedne klase.

Neka \mathcal{D} ima HOSVD

$$\mathcal{D} = \mathcal{S} \times_1 U \times_2 V \times_3 W \approx \mathcal{F} \times_1 U_p \times_2 V_q, \quad (5)$$

gdje su $U_p = U(:, 1 : p)$, $V_q = V(:, 1 : q)$ i $\mathcal{F} = \mathcal{S}(1 : p, 1 : q, :) \times_3 W$. Ovom aproksimacijom smanjujemo reprezentaciju pojedinačnih znamenki s \mathbb{R}^{400} na \mathbb{R}^p i količinu znamenki u svakoj klasi na q . Reducirani tenzor \mathcal{F} koji predstavlja skup za treniranje može se izračunati kao

$$\mathbb{R}^{p \times q \times 10} \ni \mathcal{F} = \mathcal{D} \times_1 U_p^T \times_2 V_q^T. \quad (6)$$

Reduciranu reprezentaciju slike možemo promatrati kao projekciju na prostor stupaca od U_p .

Pod pretpostavkom da su i p i q mnogo manji od odgovarajućih dimenzija tenzora \mathcal{D} , možemo postići značajno smanjenje originalnog skupa za treniranje.

Preformulirajmo aproksimaciju iz jednadžbe (5) kao niskodimenzionalnu reprezentaciju tenzora znamenki u načinu piksela

$$\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \times_1 U_p^T = \mathcal{F} \times_2 V_q. \quad (7)$$

Tada je svaki vektor stupac u \mathcal{D}_p p -elementna reprezentacija neke znamenke. Različiti presjeci \mathcal{F} na desnoj strani sastoje se od q baznih vektora za različite klase.

Redovi od V_q su koordinate u smislu baznih vektora za različite znamenke. Jedan redak od V_q daje koordinate za znamenke koje pripadaju svim 10 klasa.

Stupci od $F^\mu := \mathcal{F}(:, :, \mu)$ predstavljaju bazne vektore za neku klasu danu s μ . Da bismo dobili ortonormalne i uređene bazne vektore za različite klase, računamo SVD od F^μ i uzimamo k najznačajnijih lijevih singularnih vektora,

$$F^\mu = \left[B^\mu (B^\mu)^\perp \Sigma^\mu (Q^\mu)^T \right], \quad \mu = 0, 1, \dots, 9,$$

gdje smo k -stupčane bazne matrice označili s $B^\mu \in \mathbb{R}^{p \times k}$. Stupci od B^μ razapinju dominantni k -dimenzionalni potprostor od F^μ .

3.2.2 Faza testiranja

Neka je $d \in \mathbb{R}^{400}$ neklasificirana znamenka. U fazi testiranja računamo niskodimenzionalnu reprezentaciju $d_p = U_p^T d$ i rješavamo sljedeće mnogo manje probleme najmanjih kvadrata,

$$\min_{x^\mu} \|d_p - B^\mu x^\mu\|, \quad \mu \text{ je fiksni klasni indeks.} \quad (8)$$

Budući da su stupci od B^μ ortonormirani, rješenje je dano s

$$\hat{x}^\mu = (B^\mu)^T d_p.$$

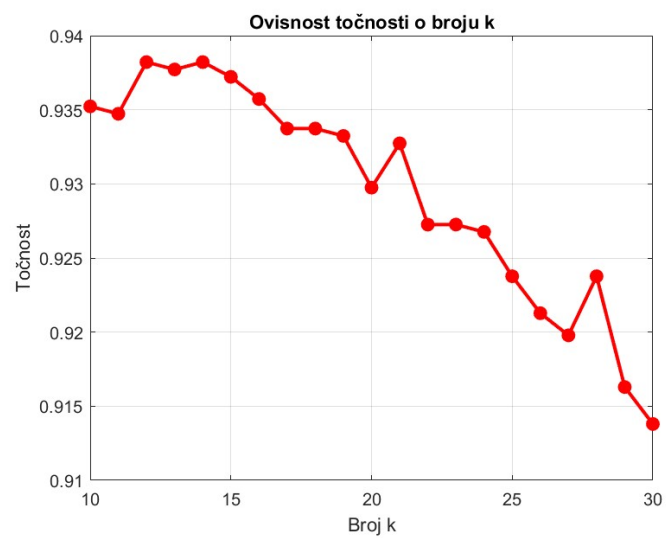
Uvrštavanjem \hat{x}^μ u jednadžbu (8) dobivamo

$$R(\mu) = \|d_p - B^\mu (B^\mu)^T d_p\|.$$

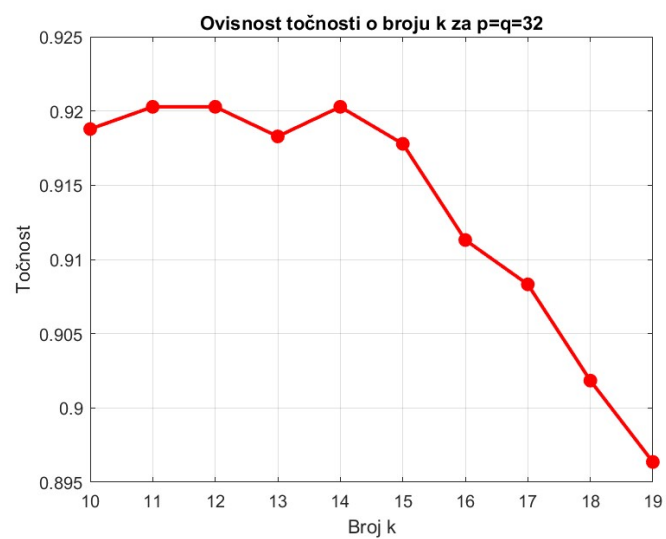
Ponovno, indeks μ za koji dobivamo najmanji rezidual daje predviđenu klasu nepoznate znamenke.

3.2.3 Algoritam 2

- Faza treniranja:
 1. Sortirajte i vektorizirajte znamenke iz skupa za treniranje u tenzor \mathcal{D} .
 2. Izračunajte HOSVD od \mathcal{D} , jednadžba (5).
 3. Izračunajte reducirani tenzor \mathcal{F} koji predstavlja skup za treniranje, jednadžba (6).
 4. Izračunajte i pohranite bazne matrice B^μ za svaku klasu.
- Faza testiranja:
 1. Izračunajte niskodimenzionalnu reprezentaciju $d_p = U_p^T d$ nepoznate znamenke.
 2. Izračunajte rezidualne $R(\mu) = \|d_p - B^\mu (B^\mu)^T d_p\|$, $\mu = 0, 1, \dots, 9$.
 3. Odredite $\mu_{\min} = \arg \min_{\mu} R(\mu)$ i klasificirajte d kao μ_{\min} .



Slika 1: Grafički prikaz točnosti Algoritma 1 u ovisnosti o parametru k .

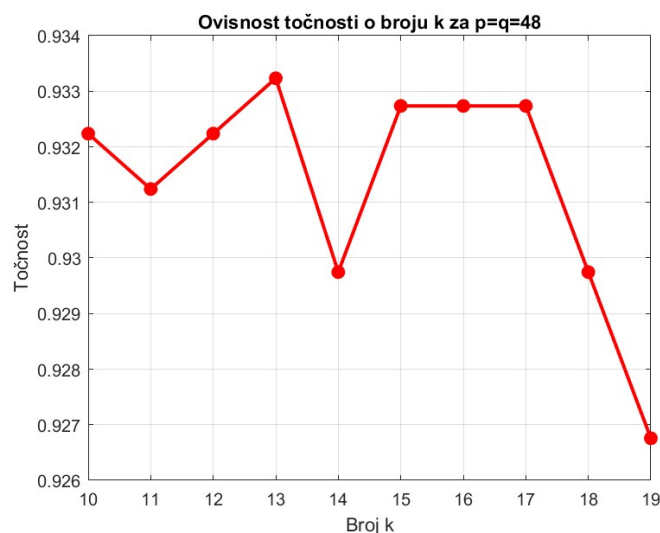


Slika 2: Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametru k za fiksne $p=q=32$.

4 Rezultati

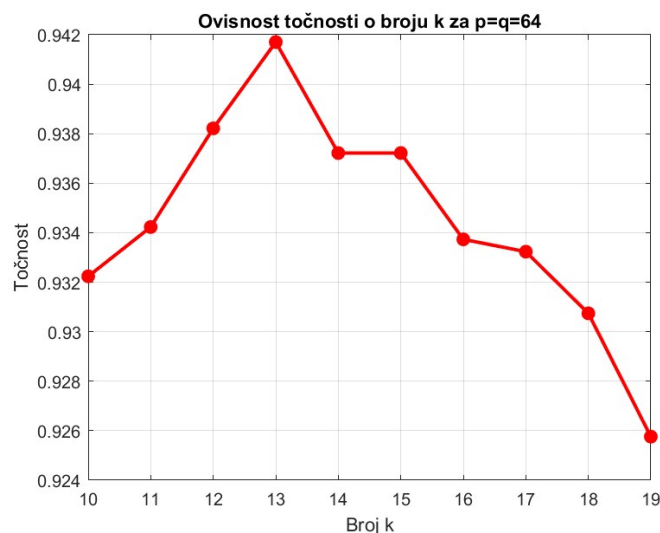
U Algoritmu 1 varirali smo parametar k od 10 do 30. Vidimo na slici da se najveća točnost postiže za $k \in [10, 16]$. Što je k veći, točnost je manja.

U Algoritmu 2 prvo smo varirali parametar k za fiksne $p = q = 32$, $p = q = 48$ i $p = q = 64$. U ovom slučaju najveća točnost postiže se za $k = 11, 12, 14$ i iznosi 92 %. U usporedbi Algoritmom 1, Algoritam 2 je imao manju točnost.



Slika 3: Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametru k za fiksne $p=q=48$.

Najveća točnost postiže se za $k = 13$ i iznosi 93.3 %. Uspoređujući s Algoritmom 1, vidimo da Algoritam 2 i dalje postiže nešto manju točnost.

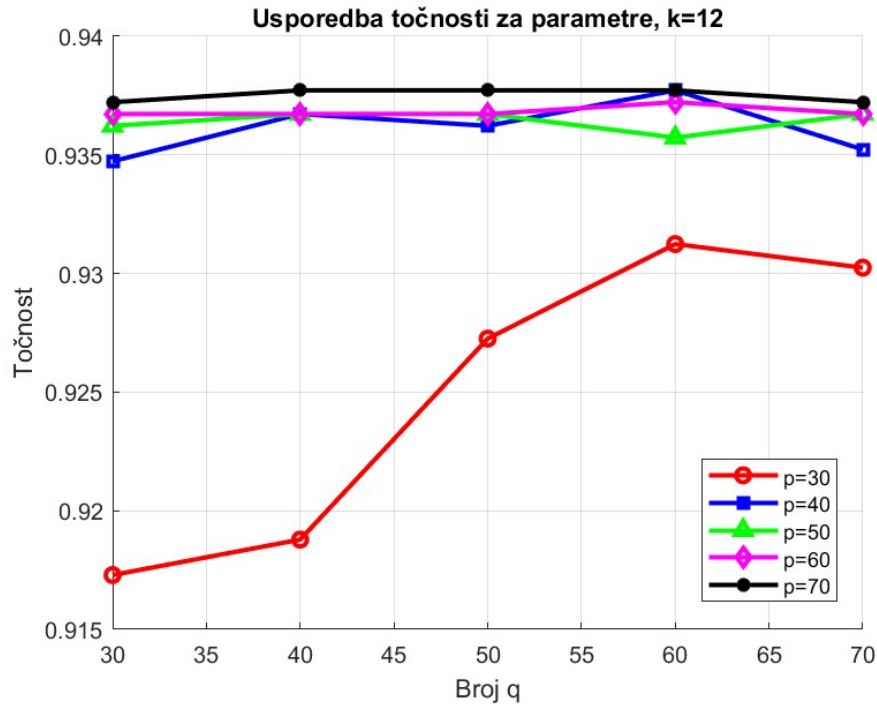


Slika 4: Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametru k za fiksne $p=q=64$.

Ponovno se najveća točnost postiže za $k = 13$ i iznosi 94.2 %. Algoritam 2 postiže za pojedine k veću točnost od Algoritma 1.

Vidimo da se u svim slučajevima dosta velika točnost postizala za $k \in [12, 15]$, a najveća je postignuta u slučaju $p = q = 64$ i $k = 13$.

Zbog toga smo odlučili fiksirati $k = 12, 13, 14$ i za svaki varirati p i q . Dobili smo sljedeće rezultate.



Slika 5: Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametrima p i q za $k=12$.

Najveća točnost postiže se za $p = 70$ i $q \in [30, 70]$ te $p = 40$ i $q = 60$. Znatno lošiji rezultati dobiju se za $p = 30$.

Dosta velika točnost postiže se za $p = 50, 60, 70$. Za $p = 30$ i dalje je najmanja točnost.

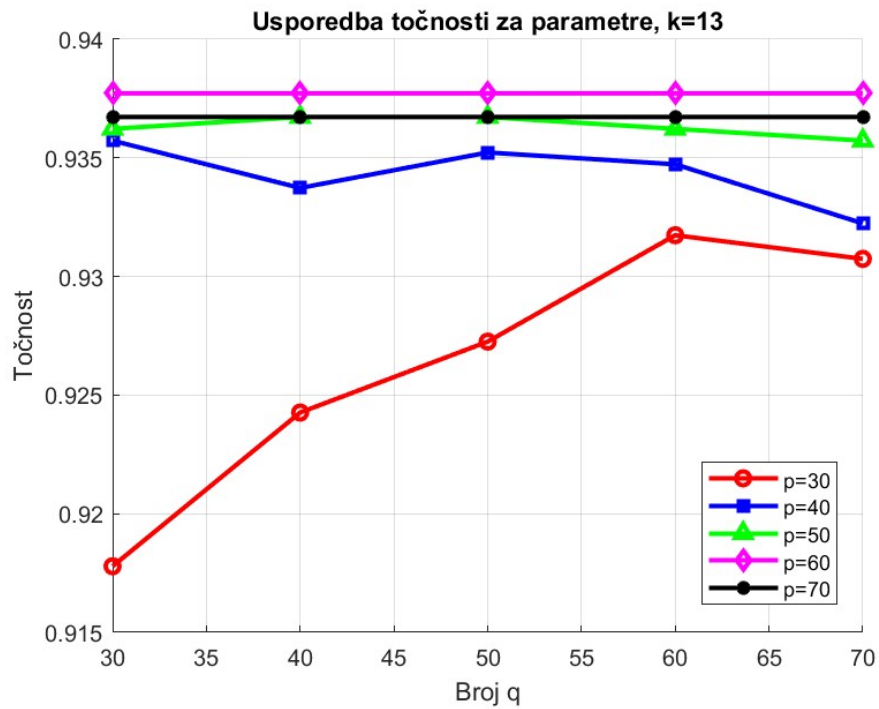
Velika točnost postiže se za $p = 50, 60, 70$, te za $p = 40$ i $q = 30, 40, 70$. Za $p = 30$ dobije se najmanja točnost.

5 Zaključak

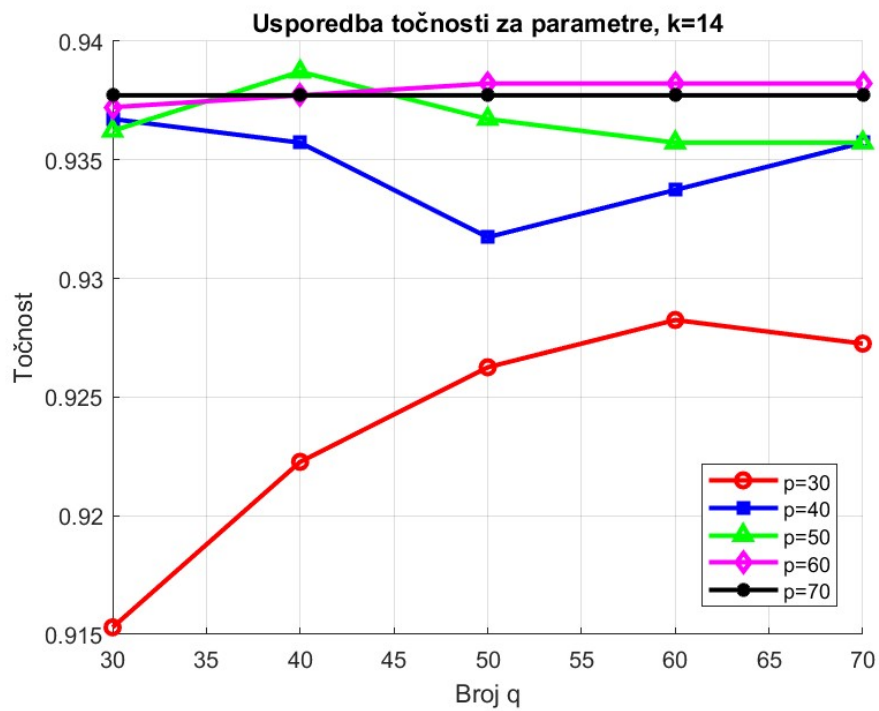
U oba predstavljena algoritma najveća točnost klasifikacije postiže se za broj baznih matrica/vektora $k \in [11, 15]$. Za testirane parametre, najveća točnost dobivena je u Algoritmu 2 za $p = q = 64$ i $k = 13$. To sugerira da je ovaj raspon optimalan za reprezentaciju različitih klasa znamenki, pružajući dovoljno informacija za razlikovanje klasa bez pretjeranog prilagođavanja podacima za treniranje.

Algoritam 1, koji koristi HOSVD za konstrukciju modela klasa, postiže stopu pogreške manju od 6 % za optimalne vrijednosti k . Ovaj rezultat je prilično dobar s obzirom na njegovu jednostavnost.

U Algoritmu 2 za testirane parametre, najveća točnost dobivena je za $p=q=64$ i $k=13$, što ukazuje na optimalan odnos između kompresije podataka i očuvanja bitnih informacija.



Slika 6: Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametrima p i q za k=13.



Slika 7: Grafički prikaz točnosti Algoritma 2 u ovisnosti o parametrima p i q za k=14.

Algoritam 2 u nekim slučajevima nadmašuje Algoritam 1 u točnosti, unatoč značajnoj kompresiji podataka. To nam pokazuje potencijal HOSVD-a za efikasno izdvajanje relevantnih značajki iz višedimenzionalnih podataka.

6 Reference

- [1] SAVAS, Berkant; ELDÉN, Lars. Handwritten digit classification using higher order singular value decomposition. *Pattern recognition*, 2007, 40.3: 993-1003.
- [2] Prezentacije iz kolegija Matrične i tenzorske metode u analizi podataka, Zlatko Drmač