Klasifikacija rukom pisanih znamenki korištenjem HOSVD-a

Marija Nikolić, Maja Soldo, Anamarija Sršen

3.3.2025.

Uvod

- standardni problem prepoznavanja uzoraka
- Zadatak je dodjeljivanje nepoznatog objekta jednoj od unaprijed definiranih klasa.

- Neki od pristupa za rješavanje ovog problema su: analiza glavnih komponenti (principal component analysis – PCA), metoda potpornih vektora, metoda najbližeg susjeda i k-najbližih susjeda, regresija, statičko modeliranje te neuronske mreže.
- U ovom radu predstavit ćemo dva algoritma temeljena na HOSVD-u.

Tenzorske metode

- Matricizacija tenzora: Postupak pretvaranja tenzora u matricu radi lakšeg rukovanja.

$$\mathbf{A}_{(1)} \in \mathbb{R}^{I\times JK}, \mathbf{A}_{(1)} : a_{ijk} = a^{(1)}_{iv}, v = j + (k-1)K,$$

$$\mathbf{A}_{(2)} \in \mathbb{R}^{J\times IK}, \mathbf{A}_{(2)} : a_{ijk} = a^{(2)}_{jv}, v = k + (i-1)I,$$

$$\mathbf{A}_{(3)} \in \mathbb{R}^{K\times IJ}, \mathbf{A}_{(3)} : a_{ijk} = a^{(3)}_{kv}. v = i + (j-1)J,$$

- n-modno množenje tenzora i matrice:

$$(\mathbf{A} \times_n \mathbf{F})(i_1, \ldots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \ldots, i_N) = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathbf{A}(i_1, \ldots, i_N) F(j_n, i_n).$$

Teorem 1 (SVD matrice)

Svaka matrica $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ može se zapisati kao produkt

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T,$$

gdje su $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalne matrice, a Σ je dijagonalna matrica veličine $m \times n$ s nenegativnim elementima koji su poredani na sljedeći način:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Stupci matrica $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ nazivaju se lijevim i desnim singularnim vektorima, a σ_i su singularne vrijednosti.

Teorem 2 (HOSVD)

Tenzor $\mathcal{A}$ možemo zapisati kao $\mathcal{A} = S \times_1 U \times_2 V \times_3 W$, gdje su U, V i W ortogonalne matrice, S je tenzor istih dimenzija kao i $\mathcal{A}$ te zadovoljava sljedeća svojstva:

- **(potpuna ortogonalnost)** Svaka dva odsječka istog tipa su okomiti, tj. za sve $i \neq j$ vrijedi

$$\langle S(i,:,:), S(j,:,:)\rangle_F = \langle S(:,i,:), S(:,j,:)\rangle_F = \langle S(:,:,i), S(:,:,j)\rangle_F = 0.$$

- **(poredak)** Norme odsječaka (singularne vrijednosti matriciziranih tenzora) za svaki mod su poredane silazno. Primjerice za prvi mod,

$$\sigma_j^{(1)} = \|S(j,:,:)\|_F, \quad j = 1, \ldots, l,$$

vrijedi

$$\sigma_1^{(1)} \geq \sigma_2^{(1)} \geq \cdots \geq \sigma_l^{(1)} \geq 0.$$

Ako je $l > mn$, onda vrijedi:

$$S(i,:,:) = 0, \quad \text{za } i > mn.$$

Ortogonalne osnovne matrice

Matrica $\mathbf{F}$ može se zapisati kao suma matrica ranga jedan koristeći SVD:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T .$$

Slično tome, za tenzore trećeg reda vrijedi:

$$\mathbf{A} = \sum_{v=1}^{K} \mathbf{A}_v \times_3 \mathbf{w}_v ,$$

gdje je $\mathbf{A}_v = \mathbf{S}(:,:,v) \times_1 \mathbf{U} \times_2 \mathbf{V}$. Zbog potpune ortogonalnosti od $\mathbf{S}$, matrice $\mathbf{A}_v$ su međusobno ortogonalne:

$$\langle \mathbf{A}_l, \mathbf{A}_m \rangle = 0$$

kada je $l \neq m$. Ove ortogonalne matrice mogu se interpretirati kao skup linearno neovisnih osnovnih matrica.

Algoritam 1: Klasifikacija pomoću HOSVD-a

- Faza treniranja:
  1. Sortirajte znamenke za treniranje u tenzore s znamenkama iste vrste.
  2. Izračunajte HOSVD tenzora.
  3. Izračunajte i pohranite normalizirane bazne matrice $(A_\nu^\mu)_{\nu=1}^k, \ \mu = 0, 1, \ldots, 9.$
- Faza testiranja:
  1. Normalizirajte nepoznatu znamenku.
  2. Izračunajte $R(\mu) = 1 - \sum_{\nu=1}^k \langle D, A_\nu^\mu \rangle^2, \ \mu = 0, 1, \ldots, 9.$
  3. Odredite $\mu_{\min} := \arg\min_\mu R(\mu)$ i klasificirajte D kao $\mu_{\min}$.

Algoritam 2

- Faza treniranja:
  1. Sortirajte i vektorizirajte znamenke iz skupa za treniranje u tenzor $\mathcal{D}$.
  2. Izračunajte HOSVD od $\mathcal{D}$, jednadžba
  $$\mathcal{D} = \mathcal{S} \times_1 U \times_2 V \times_3 W \approx \mathcal{F} \times_1 U_p \times_2 V_q, \qquad (1)$$
  3. Izračunajte reducirani tenzor $\mathcal{F}$ koji predstavlja skup za treniranje, jednadžba
  $$\mathbb{R}^{p \times q \times 10} \ni \mathcal{F} = \mathcal{D} \times_1 U_p^T \times_2 V_q^T. \qquad (2)$$
  4. Izračunajte i pohranite bazne matrice B^μ za svaku klasu.
- Faza testiranja:
  1. Izračunajte niskodimenzionalnu reprezentaciju $d_p = U_p^T d$ nepoznate znamenke.
  2. Izračunajte ostatke $R(\mu) = \|d_p - B^\mu (B^\mu)^T d_p\|$, $\mu = 0, 1, \ldots, 9$.
  3. Odredite $\mu_{\min} = \arg\min_\mu R(\mu)$ i klasificirajte d kao $\mu_{\min}$.