

## Sprawozdanie

### Symulacja komputerowa lista 1

#### Zadanie 1 i 2

W celu wykonania pierwszego zadania z listy pierwszej stworzyłam w programie Excel listę elementów od 1 – 20 oraz listę 100 elementów. Aby wylosować 20 oraz 100 liczb z zakresu  $<0,1$ ) wykorzystałam funkcję losującą ( $=LOS()$ ), która zwraca losową liczbę z danego zakresu (jak na rysunku obok).

elementy20	wartości
1	0,83
2	0,99
3	0,27
4	0,88
5	0,51
6	0,57
7	0,53
8	0,27
9	0,82
10	0,60
11	0,72
12	0,43
13	0,39
14	0,08
15	0,29
16	0,89
17	0,03
18	0,67
19	0,42
20	0,98

W drugim zadaniu należało przedstawić średnią, medianę, modę, odchylenie standardowe, wariancję, skośność, kurtozę oraz wybrana przeze mnie średnią harmoniczną. W celu policzenia średniej wykorzystałam funkcję ( $=ŚREDNIA(;B2:B21)$ ), policzyła ona średnią z wybranego przeze mnie zakresu, w którym znajduje się 20 wybranych losowo liczb z zakresu  $<0,1$ ), analogicznie dla 100 wartości:  $=ŚREDNIA(G2:G101)$ .

Aby obliczyć medianę czyli wartość środkową można posortować wylosowane liczby i wziąć średnią z dwóch z nich które znajdują się w środku posortowanej listy lub wykorzystać funkcję:  $=MEDIANA(B2:B21)$ . Funkcja ta wyznaczyła wartość środkową dla dwudziestu losowych liczb z zakresu  $<0,1$ ), analogicznie dla 100 wartości:  $=MEDIANA(G2:G101)$ .

Moda inaczej dominanta to najczęściej pojawiająca się liczba

Odchylenie standardowe mówi nam o tym jak bardzo nasze losowe liczby są od siebie oddalone. Im mniejsze jest ono tym bliższe średniej są wartości. Aby obliczyć odchylenie standardowe skorzystałam w programie Excel z funkcji:  $=ODCH.STAND.POPUL(B2:B21)$ . Obliczyła mi ona wartość odchylenia standardowego dla 20 wartości, dla stu analogicznie funkcja  $=ODCH.STAND.POPUL(G2:G101)$ .

Wariancja to średnia arytmetyczna kwadratów odchyleń od ich średniej arytmetycznej. Obliczyłam ją za pomocą funkcji  $=WARIANCJA.POP(B2:B21)$  dla kolejnych 20 i 100 wartości.

Skośność jest miarą symetrii rozkładu, jeżeli rozkład jest idealnie symetryczny wynosi ona 0. Dla rozkładów o lewostronnej asymetrii przyjmuje wartości ujemne a dla prawostronnej dodatnie. Do jej obliczenia wykorzystałam funkcję  $=SKOŚNOŚĆ(B2:B21)$ , wyznaczyła mi ona współczynnik skośności dla 20 i 100 losowych elementów z zakresu  $<0,1$ ).

Kurtoza jest jedną z miar koncentracji wyników wokół średniej inaczej mówiąc spłaszczenia rozkładu wartości. Jej dodatnia wartość wskazuje na istnienie dużej ilości wartości bliskiej średniej, ujemna wartość kurtozy odpowiada rozproszonym wynikom wokół średniej.

dla 20 wartości	
średnia	0,531904762
mediana	0,55
moda	0,27
odchylenie standardowe	0,280504456
wariancja	0,07868275
skośność	-0,16144288
kurtoza	-0,897206142
średnia harmoniczna	0,247449696

Aby ją obliczyć wykorzystałam funkcję =KURTOZA(). Wliczyła ona wartości kurtozy dla 20 i 100 elementów.

Średnia harmoniczna jest funkcją dodatkowo wybraną przeze mnie, jest ona miarą położenia podobnie jak średnia arytmetyczna. Jednak średnia harmoniczna jest odwrotnością średniej arytmetycznej odwrotności. Obliczyłam ją za pomocą funkcji =ŚREDNIA.HARMONICZNA(B2:B21) dla 20 kolejnych wartości oraz analogicznie dla 100 wylosowanych liczb.

Porównanie wyników dla odpowiednich statystyk rozkładu równomiernego U[1,0).

Aby porównać otrzymane wyniki z rozkładem równomiernym za pomocą tych wzorów

dane dla rozkładu równoramiennego	
średnia	0,5
mediana	0,5
moda	każda z liczb występuje tak samo często
odchylenie standardowe	0
wariancja	0,083
skośność	0
kurtoza	-1,2

Dla porównania dane statystyczne dla wygenerowanych 20 i 100 elementów:

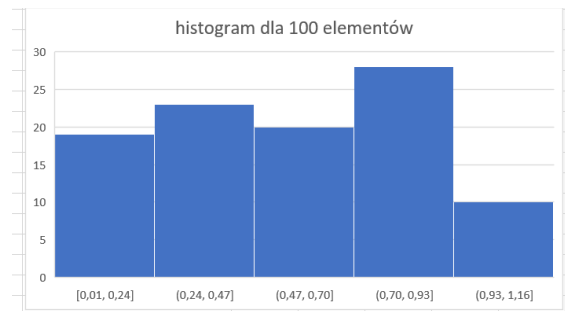
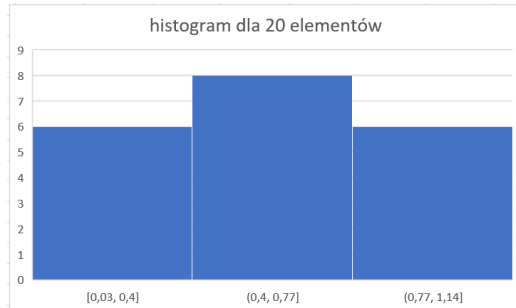
dla 20 wartości	r	dla 100 elementów	
średnia	0,531904762	średnia	0,5445
mediana	0,55	mediana	0,57
moda	0,27	moda	0,01
odchylenie standardowe	0,280504456	odchylenie standardowe	0,300127889
wariancja	0,07868275	wariancja	0,09007675
skośność	-0,16144288	skośność	-0,205616495
kurtoza	-0,897206142	kurtoza	-1,175733371
		średnia harmoniczna	0,1339958833

Jak można zauważyć średnia oraz mediana nie odbiegają zbytnio od wyników dla rozkładu równomiernego jednak pozostałe wartości dla funkcji opisujących rozrzucenie danych różnią się znacznie.

Parametry	$a, b \in (-\infty, \infty)$
Nośnik	$a \leq x \leq b$
Gęstość prawdopodobieństwa	$\frac{1}{b-a}$ dla $a \leq x \leq b$ 0 dla $x < a$ lub $x > b$
Dystrybuanta	0 dla $x < a$ $\frac{x-a}{b-a}$ dla $a \leq x < b$ 1 dla $x \geq b$
Wartość oczekiwana (średnia)	$\frac{a+b}{2}$
Mediana	$\frac{a+b}{2}$
Moda	każda wartość w przedziale $[a, b]$
Wariancja	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Współczynnik skośności	0
Kurtoza	$\frac{6}{5}$
Entropia	$\ln(b-a)$
Funkcja tworząca momenty	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
Funkcja charakterystyczna	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$

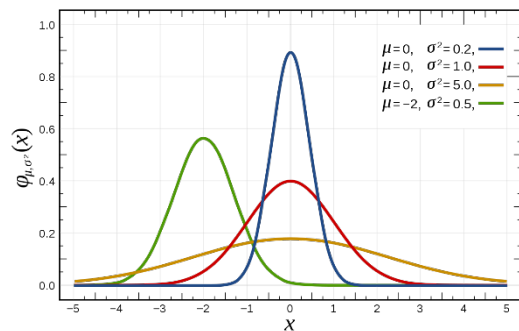
## Zadanie 3

Aby wykonać zadanie 3 wykorzystałam funkcje w programie excel do tworzenia histogramów. Żeby stworzyć histogram dla 20 i 100 losowych elementów zaznaczyłam pola wypełnione wartościami.



Natomiast kształtem funkcji gęstości rozkładu równomiernego  $U[0,1)$ :

Porównywanie go z przykładem z 20 elementami nie jest optymalne ponieważ przy tak małej ilości elementów jest zbyt duża niedokładność przez co przedstawiony histogram może być tendencyjny. Natomiast przy dużej próbie stu elementów widać jak odbiega on od gęstości rozkładu równomiernego  $U[0,1)$ .



## Zadanie 4

Zadanie 4 polega na sprawdzeniu testami statystycznymi czy średnie z prób równe są 0,5.

Dla ciągu 20 wartości aby sprawdzić średnie wykorzystałam test T-studenta. Aby przeprowadzić rozkład T studenta wyznaczam hipotezę:  $h_0$  – średnia z prób jest równa 0,5. Hipoteza alternatywna:  $h_1$  – średnia z prób nie jest równa 0,5. Jako poziom istotności wybrałam  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = 0,1$ ,  $\alpha_3 = 0,05$ .

Rozkład t studenta wyliczyłam z następującego wzoru:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n-1}$$

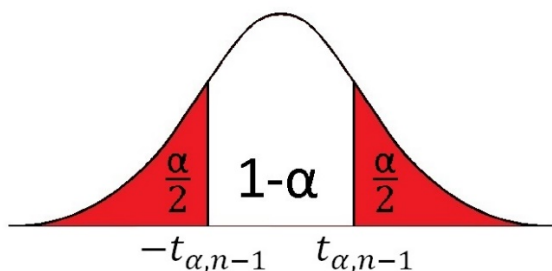
gdzie  $\bar{X}$  – to średnia z próby,  $\mu_0$  – wartość hipotezy  $h_0$ ,  
– odchylenie standardowe,  $n$  – liczność próby.

I za pomocą formuły:

$$=(\$D\$2-F2)/\$D\$5*PIERWIASTEK(\$A\$21-1)$$

Następnie skorzystałam z tabelki dla  $k = 19$  i  $\alpha = 0,05$  co daje  $t_\alpha = 2,093$

k \ $\alpha$	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.378	1.963	3.078	6.314	7.026	7.916	9.058	10.578	12.708	15.895	21.205	31.821	63.657
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	3.104	3.320	3.578	3.896	4.303	4.849	5.643	6.965	9.925
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	2.471	2.605	2.763	2.951	3.182	3.482	3.896	4.541	5.841
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.226	2.333	2.456	2.601	2.776	2.999	3.298	3.747	4.604
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.098	2.191	2.297	2.422	2.571	2.757	3.003	3.365	4.032
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.019	2.104	2.201	2.313	2.447	2.612	2.829	3.143	3.707
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	1.966	2.046	2.136	2.241	2.365	2.517	2.715	2.998	3.499
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	1.928	2.004	2.090	2.189	2.306	2.449	2.634	2.896	3.355
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	1.899	1.973	2.055	2.150	2.262	2.398	2.574	2.821	3.250
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	1.877	1.948	2.028	2.120	2.228	2.359	2.527	2.764	3.189
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.798	1.859	1.928	2.007	2.096	2.201	2.328	2.491	2.718	3.106
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	1.844	1.912	1.989	2.076	2.179	2.303	2.461	2.681	3.055
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	1.832	1.899	1.974	2.060	2.160	2.282	2.436	2.650	3.012
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	1.821	1.887	1.962	2.046	2.145	2.264	2.415	2.624	2.977
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	1.812	1.878	1.951	2.034	2.131	2.249	2.397	2.602	2.947
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	1.805	1.869	1.942	2.024	2.120	2.235	2.382	2.583	2.921
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	1.798	1.862	1.934	2.015	2.110	2.224	2.368	2.567	2.898
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	1.792	1.855	1.926	2.007	2.101	2.214	2.356	2.552	2.878
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	1.786	1.850	1.920	2.000	2.093	2.205	2.346	2.539	2.861
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	1.782	1.844	1.914	1.994	2.086	2.197	2.336	2.528	2.845
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	1.777	1.840	1.909	1.988	2.080	2.189	2.328	2.518	2.831



rozkład t studenta		
0,495784041		0,5
2,093		

Więc obszar krytyczny dla 20 stopni swobody i poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  wynosi

$(-\infty, -2,093] \cup [2,093, \infty)$  więc dla  $t = 0,496$  nie mamy podstawy do odrzucenia hipotezy  $h_0$ .

Natomiast dla istotności  $\alpha = 0,70$  obszar krytyczny dla 20 stopni swobody i poziomie wynosi  $(-\infty, -0,39] \cup [0,39, \infty)$  więc dla  $t = 0,496$  więc  $t$  należy do obszaru krytycznego, przez co odrzucamy  $h_0$  i przyjmujemy hipotezę alternatywną.

Natomiast dla ciągu 100 wartości aby sprawdzić średnie z prób wykorzystałam Test Z. Aby przeprowadzić rozkład Z wyznaczam hipotezę:  $h_0$  – średnia z prób jest równa 0,5. Hipoteza alternatywna:  $h_1$  – średnia z prób nie jest równa 0,5. Jako poziom istotności wybrałam  $\alpha_1 = 0,7$ ,  $\alpha_3 = 0,05$ .

Rozkład Z wyliczyłam z następującego wzoru:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

gdzie  $\bar{X}$  – to średnia z próby,  $\mu_0$  – wartość hipotezy  $h_0$ ,

$S$  – odchylenie standardowe,  $n$  – liczność próby.

I za pomocą formuły:  $=(L2-L12)/L5*PIERWIASTEK(I101)$

dla 100 elementów	
średnia	0,5445
mediana	0,57
moda	0,01
odchylenie standardowe	0,300127889
wariancja	0,09007675
skośność	-0,205616495
kurtoza	-1,175733371
średnia harmoniczna	0,1339958833
rozkład z	
1,482701261	0,5

Następnie skorzystałam z tabelki dla  $k = 100$  i  $\alpha = 0,05$  co daje  $t_{\alpha} = 1,98$ . Więc obszar krytyczny dla poziomu istotności  $\alpha = 0,05$

wynosi:  $(-\infty, -1,98] \cup [1,98, \infty)$  co

oznacza dla  $t = 1,48$  że nie znajduje się on w obszarze krytycznym, czyli nie mamy podstawy do odrzucenia hipotezy  $h_0$  na korzyść hipotezy alternatywnej.

Jednak przy poziomie istotności  $\alpha = 0,4$  i  $t_{\alpha} = 0,85$  obszar krytyczny wynosi:  $(-\infty, -0,85] \cup [0,85, \infty)$ , więc  $t = 1,48$  należy do obszaru krytycznego czyli mamy podstawę do odrzucenia hipotezy  $h_0$  na korzyść hipotezy alternatywnej.

Tabela 1: Dystrybuanta odwrotna rozkładu t-studenta

	0.1	0.3	0.2	0.1	0.05	0.04	0.02	0.01	0.002	0.001
1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	15.8945	31.8205	63.6567	318.3088	636.6192
2	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	4.8487	6.9646	9.9248	22.3271	31.5991
3	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	3.4819	4.5407	5.8409	10.2145	12.9240
4	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	2.9985	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	2.7565	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	2.6122	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.5168	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.4490	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.3984	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.3593	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.3281	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
12	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.3027	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
13	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.2816	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
14	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.2638	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.2485	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.2354	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
17	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.2238	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.2137	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
19	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.2047	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
20	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.1967	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
21	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.1894	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
22	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.1829	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
23	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.1770	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.1715	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.1666	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.1620	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
27	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.1578	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
28	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.1539	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.1503	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
30	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.1470	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
35	0.8520	1.0520	1.3062	1.6896	2.0301	2.1332	2.4377	2.7238	3.3400	3.5911
40	0.8507	1.0500	1.3031	1.6839	2.0211	2.1229	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
45	0.8497	1.0485	1.3006	1.6794	2.0141	2.1150	2.4121	2.6896	3.2815	3.5203
50	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.1087	2.4033	2.6778	3.2614	3.4960
60	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.0994	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
70	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.0927	2.3808	2.6479	3.2108	3.4350
80	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.0878	2.3739	2.6387	3.1953	3.4163
90	0.8456	1.0424	1.2910	1.6620	1.9867	2.0839	2.3685	2.6316	3.1833	3.4019
100	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.9840	2.0809	2.3642	2.6259	3.1737	3.3905