Računalniška grafika - Bezierove krivulje in krpe

1 Bezierove krivulje

1.1 Parametrična oblika zapisa

Bezierovo krivuljo tretje stopnje lahko zapišemo s pomočjo enačbe v parametrični obliki:
$p(t) = 0p_0 B_0^3(t) + p_1 B_1^3(t) + p_2 B_2^3(t) + p_3 B_3^3(t)$, kjer je $t \in [0, 1]$

Kjer so $B_i^n(t)$ Bernsteinovi polinomi n-te stopnje, določeni s formulo:
$B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$

Izračun enačbe v parametrični obliki je dokaj počasen in potraten zaradi veliko nepotrebnega računanja. Zata se večkrat uporablja matrična oblika zapisa.

1.2 Matrična oblika zapisa

Bezierovo krivuljo lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$p(t) = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix},$$

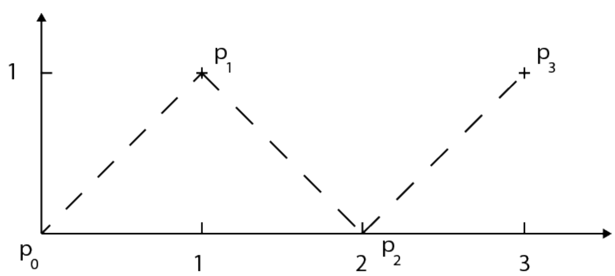
kjer so v prvi matriki točke, ki določajo krivuljo tretje stopnje, v drugi matriki pa so členi Bernsteinovih polinomov tretje stopnje. Prednost matrične predstavitve je v tem, da sta prvi dve matriki konstantni za izračun celotne krivulje, spreminja pa se samo zadnja matrika s parametrom. Tako je za izračun posamezne točke potrebnih dosti manj operacij.

1.3 Primer izračuna krivulje

V primeru so izračunane točke na Bezierovi krivulji za vrednosti parametra $t \in [0 : 0,2 : 1]$ (Od 0 do 1, s korakom po $0,2$).

Točke:

$p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$



Izračuni:

$$p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Najprej lahko izračunamo produkt prvih dveh matrik:

$$p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Nato pa sledijo izračuni za posamezne vrednosti t-ja;

$t = 0,\ t^2 = 0,\ t^3 = 0$

$$p(0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$t = 0,2,\ t^2 = 0,04,\ t^3 = 0,008$

$$p(0,2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2 \\ 0,04 \\ 0.008 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,392 \end{bmatrix}$$

$t = 0,4,\ t^2 = 0,16,\ t^3 = 0,064$

$$p(0,4) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4 \\ 0,16 \\ 0.064 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,496 \end{bmatrix}$$

$t = 0,6,\ t^2 = 0,36,\ t^3 = 0,216$

$$p(0,6) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6 \\ 0,36 \\ 0.216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 0,504 \end{bmatrix}$$

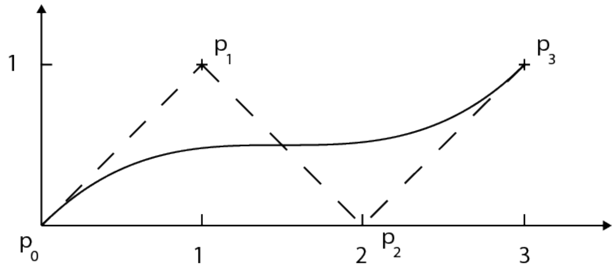
$t = 0,8,\ t^2 = 0,64,\ t^3 = 0,512$

$$p(0,8) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,64 \\ 0.512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,4 \\ 0,608 \end{bmatrix}$$

$t = 1,\ t^2 = 1,\ t^3 = 1$

$$p(1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tako dobimo 6 točk na krivulji. V kolikor želimo večjo natančnost moramo točke na krivulji računati pri manjših spremembah parametra t. Primer takšne krivulje je prikazan na sliki.



2 Bezierove krpe

Računajo se podobno kot Bezierove krivulje, s to razliko, da imamo pri krpah dva parametra, ki določata njeno obliko, zaradi česar je tudi več računanja.

2.1 Parametrična oblika zapisa

Bezierovo krpo tretje stopnje lahko zapišemo s pomočjo enačbe v parametrični obliki:

$p(u, v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} p_{ij} B_i^3(u) B_j^3(v)$

Tudi tukaj velja, da je izračun zelo počasen in se večkrat uporablja matrična oblika zapisa.

2.2 Matrična oblika zapisa

Bezierovo krpo tretje stopnje lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 & v & v^2 & v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & p_{0,3} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,0} & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix},$$

Velja podobno kot pri krivuljah, srednje tri matrike lahko zmnožimo v naprej in tako prihranimo ogromno računanja pri računanju posamezne točke na površini krpe.