

# Robotika in računalniško zaznavanje (RRZ)

## Geometrijski model robota

Danijel Skočaj

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za računalništvo in informatiko

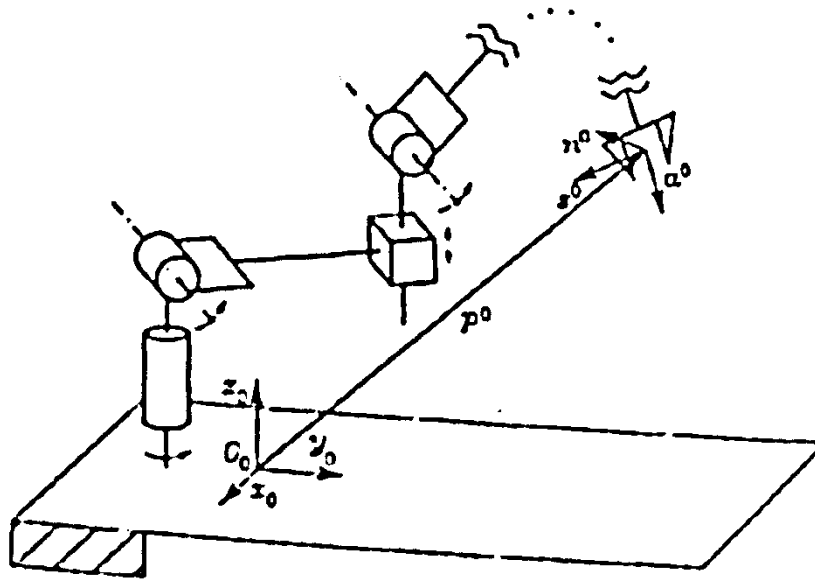
Literatura: Tadej Bajd (2006).

Osnove robotike, poglavje 4

v1.0

# Geometrijski model robota

- Robotski manipulator = veriga togih segmentov povezanih s sklepi
- Sklep je lahko rotacijski ali translacijski
  - 1DOF – 1 spremenljivka



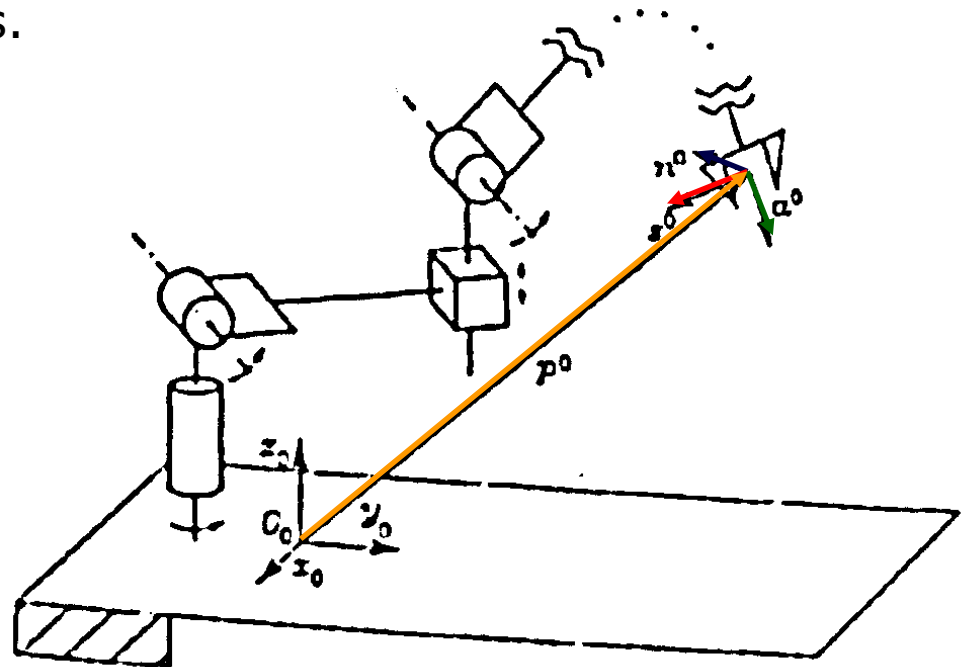
- Geometrijski model robota določa lego (pozicijo in orientacijo) prijemala v odvisnosti od spremenljivk sklepov

# Geometrijski model robota

- Geometrijski model izrazimo s homogeno transformacijo:

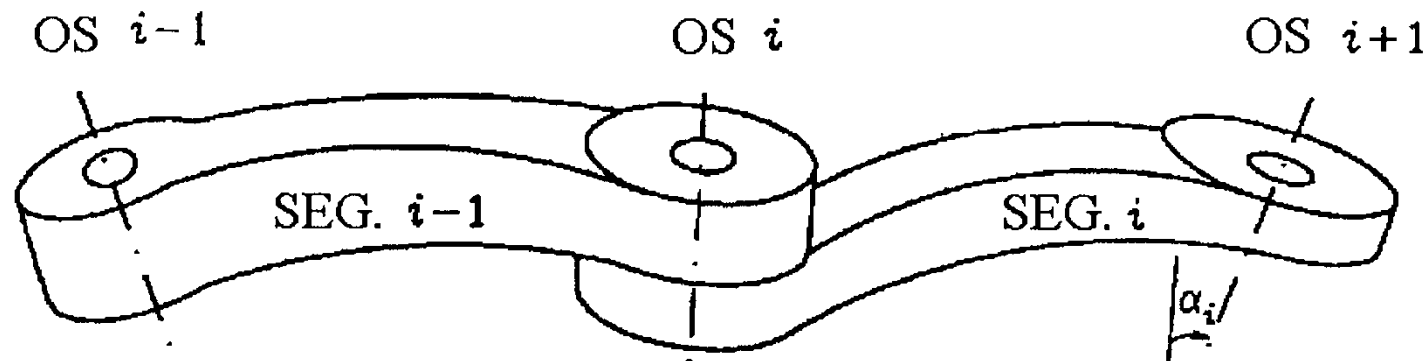
$$T^o(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^o(q) & \mathbf{s}^o(q) & \mathbf{a}^o(q) & \mathbf{p}^o(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **p** : pozicija prijemala v referenčnem koordinatnem sistemu
- **n, s, a** : enotski vektorji k.s. na prijemalu (vrha robota):
  - **a**: approach
  - **s**: sliding
  - **n**: normal
- **q** : vektor s spremenljivkami sklepov



# Lege koordinatnih sistemov segmentov

- Vsak sklep povezuje dva zaporedna segmenta
  - Določimo zvezo med dvema segmentoma in potem rekurzivno zgradimo celoten model
- Koordinatne sisteme lahko poljubno postavljamo na posamezne segmente
- Denavit – Hartenbergova pravila poenostavijo računanje geometrijskega modela robota
  - Določimo lego  $i$ -tega k.s. glede na lego  $(i-1)$ . k.s.
  - Os  $i$  povezuje segmenta  $(i-1)$  in  $i$

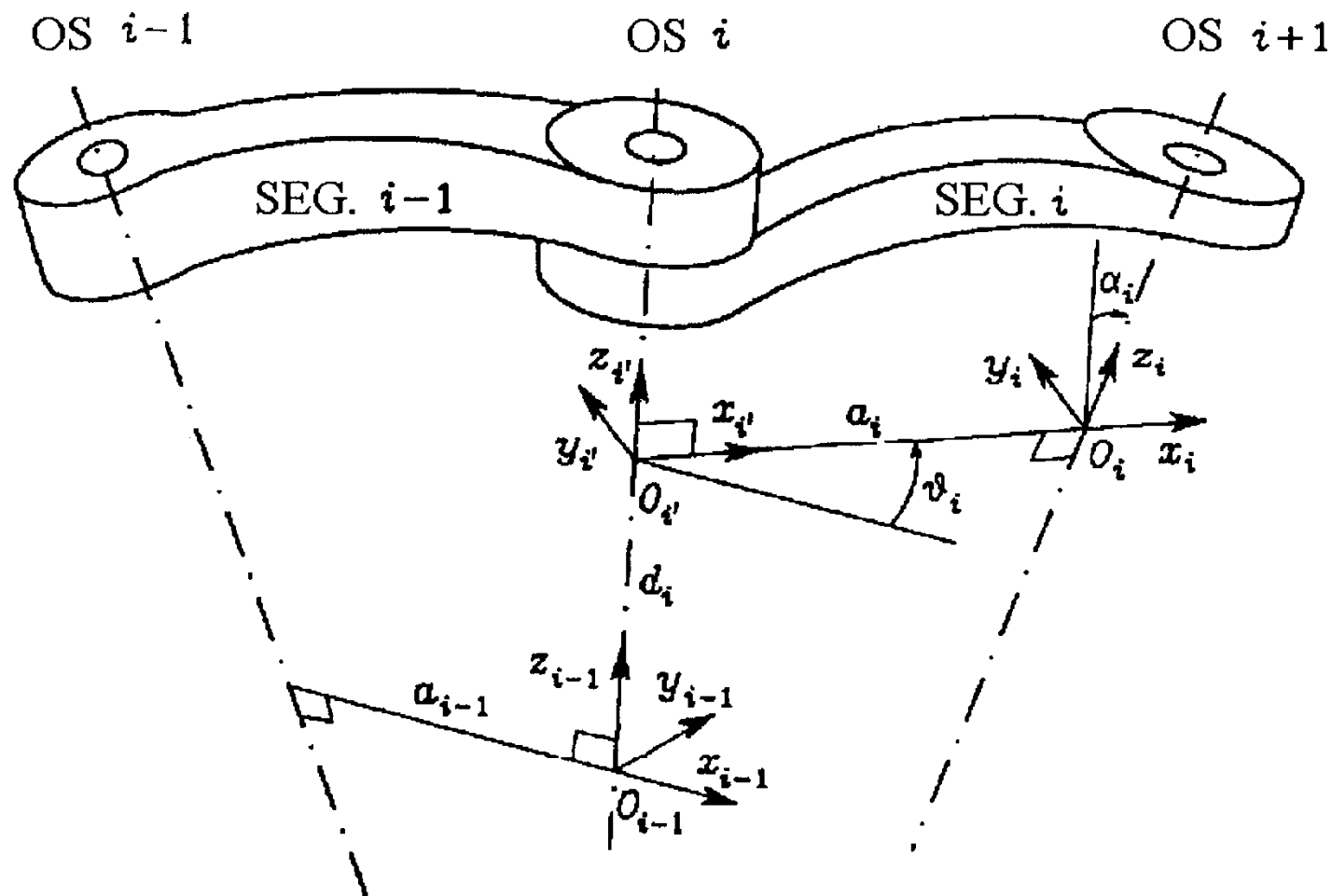


# Denavit – Hartenbergova pravila

---

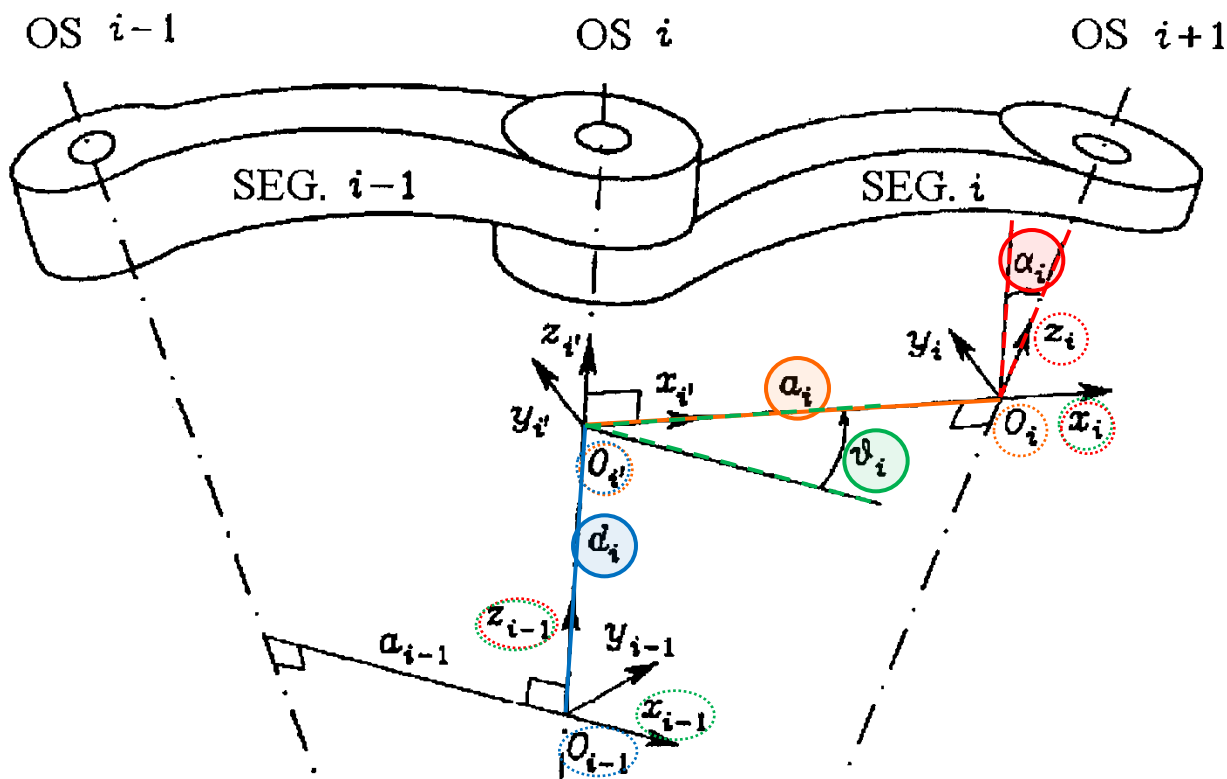
- Opiši koordinatni sistem  $i$ -tega segmenta (s sklepom  $i+1$ ):
  1. Izberi os  $z_i$  vzdolž osi sklepa ( $i+1$ )
  2. Poišči skupno normalo na osi  $z_{i-1}$  in  $z_i$ 
    - Postavi izhodišče  $O_i$  na presečišče osi  $z_i$  s skupno normalo
    - Postavi izhodišče  $O_{i-1}$  na presečišče osi  $z_{i-1}$  s skupno normalo
    - Če sta osi vzporedni, postavi izhodišče kamorkoli
  3. Postavi os  $x_i$  na skupno normalo, tako, da je usmerjena od sklepa  $i$  k sklepu  $i+1$ 
    - Če se osi  $z_{i-1}$  in  $z_i$  sekata, postavimo os  $x_i$  pravokotno na ravnino, ki jo določata osi  $z_{i-1}$  in  $z_i$
  4. Izberi os  $y_i$  tako, da dobiš desnosučni k.s.
- Na podoben način opišemo (oz. smo že opisali) koordinatni sistem segmenta ( $i-1$ )
  - Izhodišče  $O_{i-1}$  je določeno s presečiščem skupne normale na osi  $i-1$  in  $i$
  - Os  $z_{i-1}$  poteka vzdolž  $i$ -te osi sklepa
  - Os  $x_{i-1}$  poteka vzdolž skupne normale od sklepa  $i-1$  proti sklepu  $i$

# Grafična ponazoritev DH zapisa

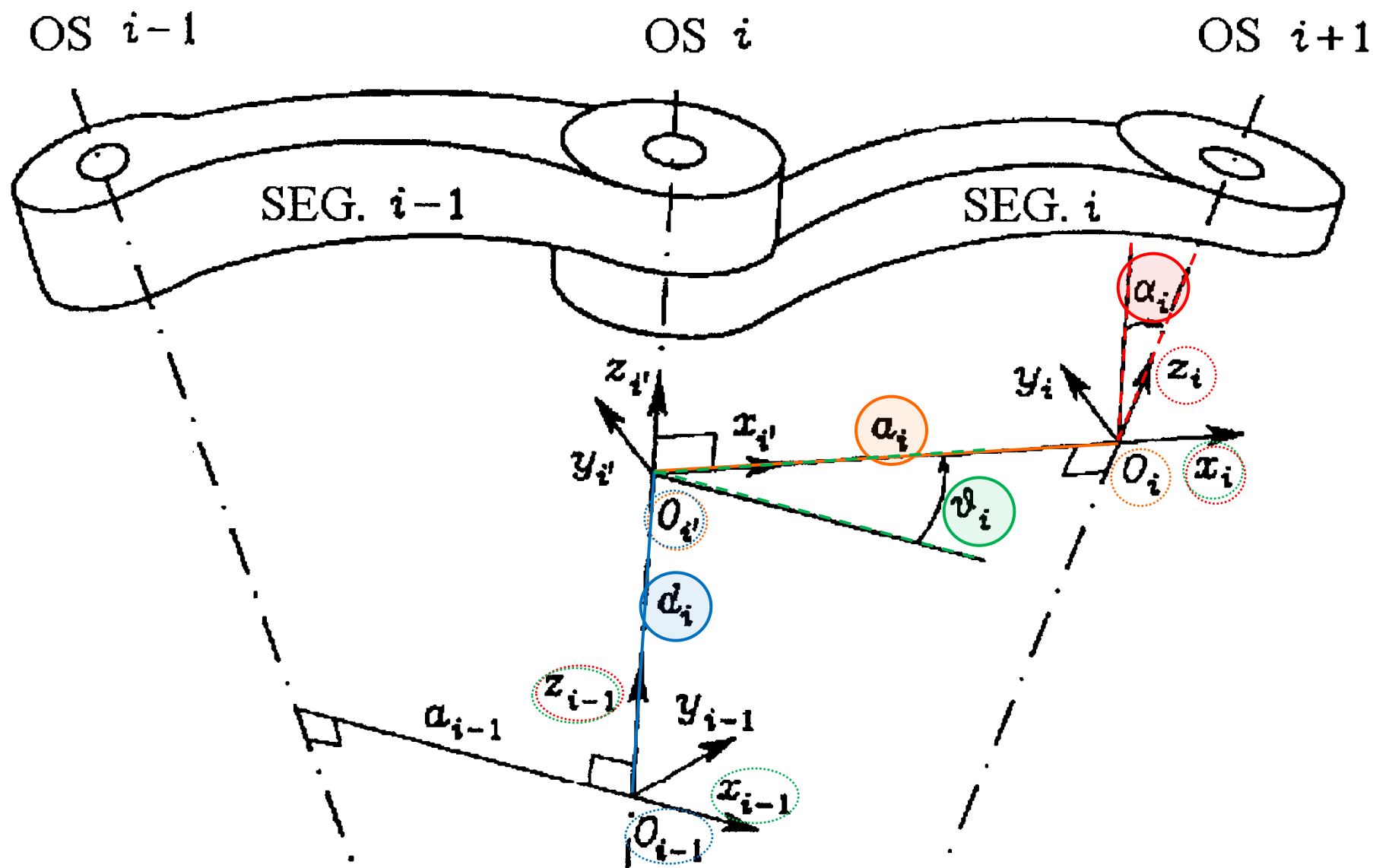


# Denavit – Hartenbergovi parametri

- Lega  $i$ -tega k.s. glede na  $(i-1)$ . k.s. je določena s 4 parametri:
  1.  $a_i$  – razdalja med  $O_i$  in  $O_{i-1}$  vzdolž osi  $x_i$
  2.  $d_i$  – razdalja med  $O_{i-1}$  in  $O_i$  vzdolž osi  $z_{i-1}$
  3.  $\alpha_i$  – kot med osema  $z_{i-1}$  in  $z_i$  okrog  $x_i$
  4.  $\theta_i$  – kot med osema  $x_{i-1}$  in  $x_i$  okrog osi  $z_{i-1}$



# Grafična ponazoritev DH parametrov





# Denavit – Hartenbergovi parametri

---

- $a_i$  in  $d_i$  sta vedno konstantna
  - Odvisna sta od geometrije in povezav med sklepoma, ki povezujeta  $i$ -ti segment
  - Se ne spreminjata med delovanjem robota
- Od ostalih dveh parametrov je le en spremenljivka
  - $\theta_i$ , če je  $i$ -ti sklep rotacijski
  - $d_i$ , če je  $i$ -ti sklep translacijski

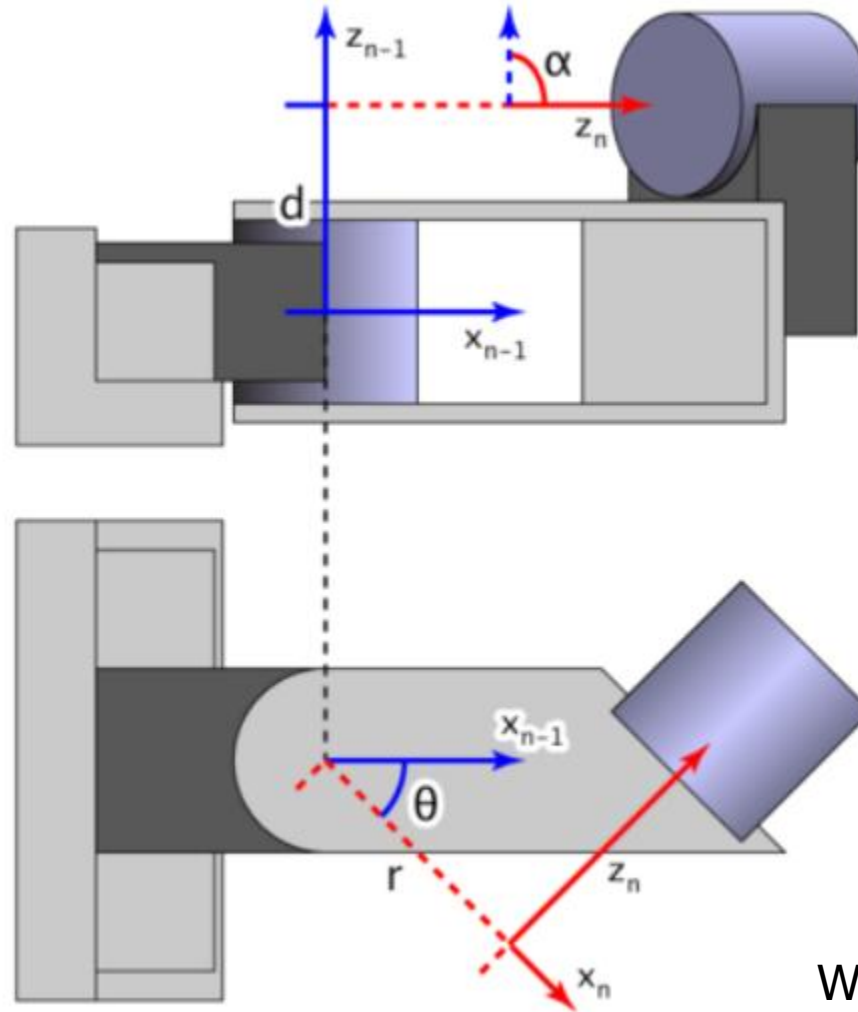
# Izjeme

---

- Nekatere nedoločenosti in izjeme lahko izkoristimo, da postopek poenostavimo:
  - Osi  $z_i$  in  $z_{i-1}$  sta vzporedni  $\rightarrow d_i=0$
  - Osi  $z_i$  in  $z_{i-1}$  se sekata  $\rightarrow O_i$  je v presečišču
  - V primeru baznega (0-tega) segmenta: določena je le os  $z_0$ 
    - $\rightarrow$  postavi izhodišče  $O_0$  v prvi sklep
    - $\rightarrow$  poravnaj  $x_0$  in  $x_1$
  - V primeru vrha robota (n-ti k.s.): določena je samo os  $x_n$  pravokotna na  $z_{n-1}$ ,
    - $\rightarrow z_n$  naj bo vzporeden z  $z_{n-1}$
  - Če imamo translacijski sklep:
    - $\rightarrow$  smer osi  $z_{i-1}$  vzdolž translacije
    - $\rightarrow O_{i-1}$  postavimo na začetek translacije

# Denavit – Hartenbergovi parametri

- Drugi pogled
  - $r=a$



Wikipedia

# Denavit – Hartenbergovi parametri

- Video:



[http://en.wikipedia.org/wiki/Denavit-Hartenberg\\_Parameters](http://en.wikipedia.org/wiki/Denavit-Hartenberg_Parameters)

# Denavit – Hartenbergova transformacija

- Transformacija med i-tim k.s. in (i-1)-im k.s.:

1. Izberi koordinatni sistem povezan s segmentom (i-1)  $O_{i-1}$

2. Premakni ga za  $d_i$  in zavrti za  $\Theta_i$  vzdolž in okrog  $z_{i-1}$ , da se poravna s k.s.  $O_i$ .

$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Premakni k.s.  $O_i$  za  $a_i$  in ga zavrti za  $\alpha_i$  vzdolž in okrog  $x_{i'}$ , da se poravna z  $O_i$

$$\mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. DH transformacijo dobimo s postmultiplikacijo obeh transformacij

- funkcija ene spr.:

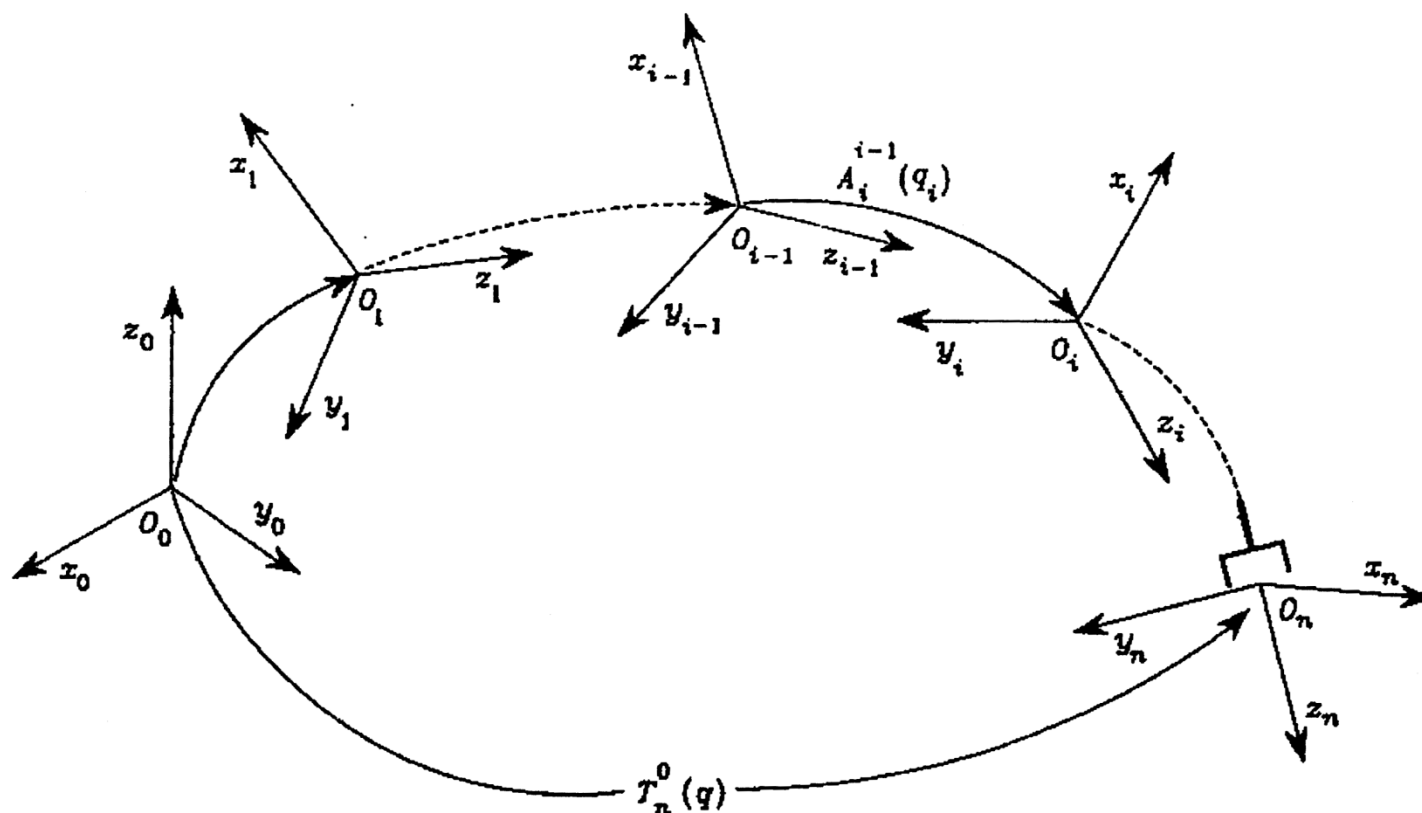
$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{A}_i^{i'}$$

- $\Theta_i$  za rotacijski sklep
- $d_i$  za translacijski sklep

$$\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

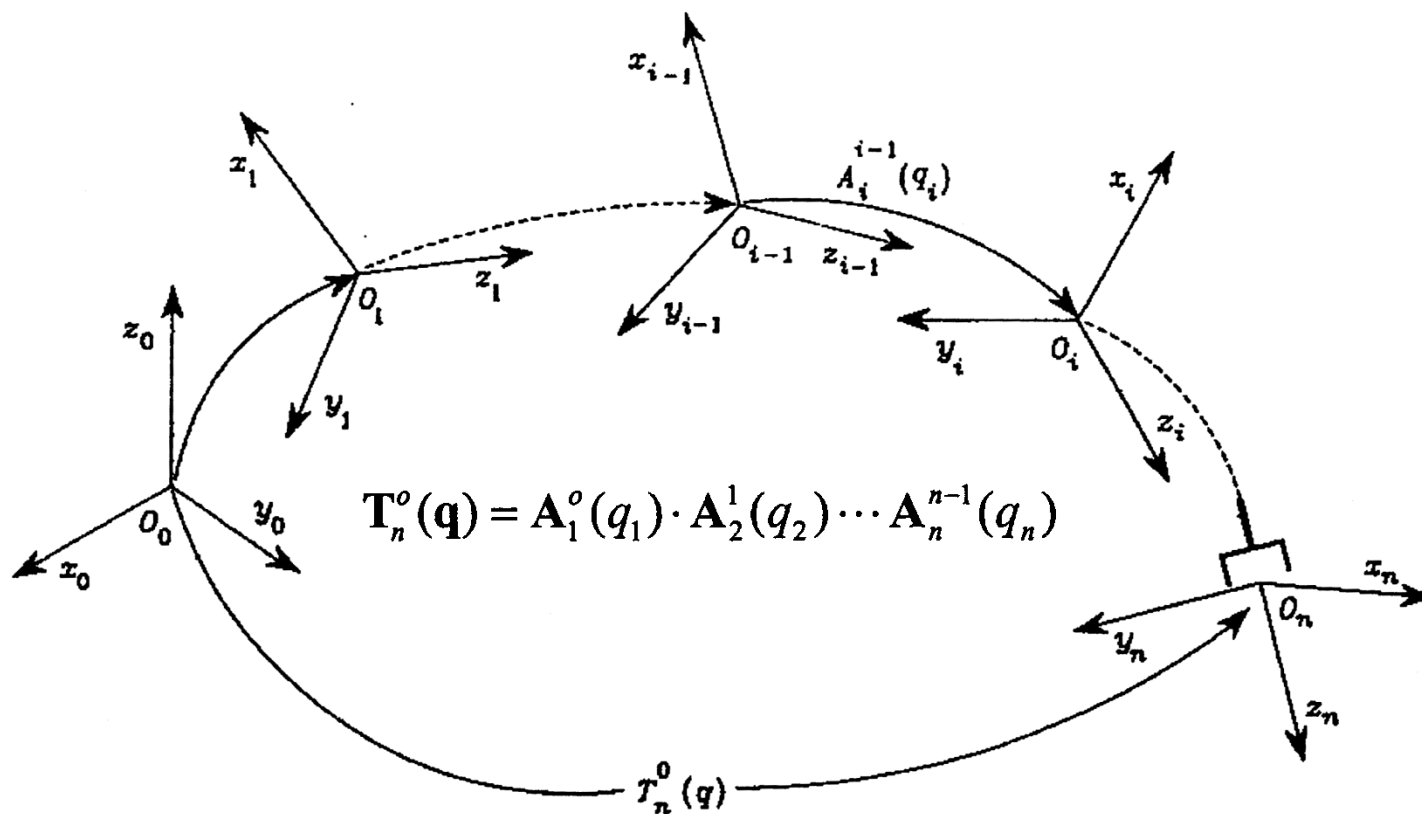
# Izračun geometrijskega modela

1. Postavi koordinatne sisteme za vse segmente
2. Napiši tabelo DH parametrov  $a_i, d_i, \alpha_i$  in  $\theta_i$  za  $i=1,2,\dots,n$
3. Izračunaj DH transformacije  $A_i^{i-1}(q_i)$  za  $i=1,2,\dots,n$
4. Izračunaj geometrijski model:  $T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdots A_n^{n-1}(q_n)$

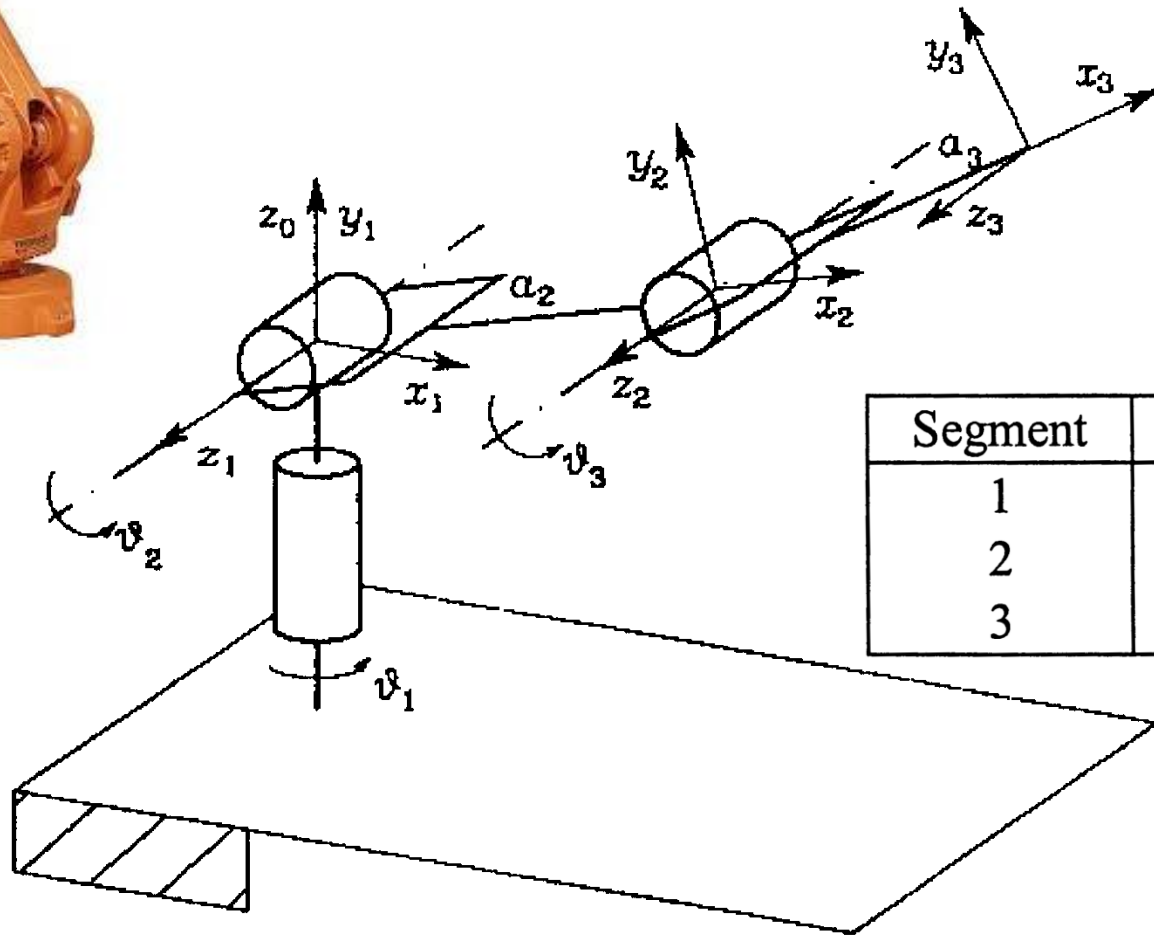


# Uporaba geometrijskega modela

- Geometrijski model robota določa lego (pozicijo in orientacijo) prijemala v odvisnosti os spremenljivk sklepov  $\mathbf{q}$
- Poda lego koordinatnega sistema n glede na osnovni koordinatni sistem



# Antropomorfni robotski manipulator



Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$
3	$a_3$	0	0	$\theta_3$

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$$



# Antropomorfni robotski manipulator

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$
3	$a_3$	0	0	$\theta_3$

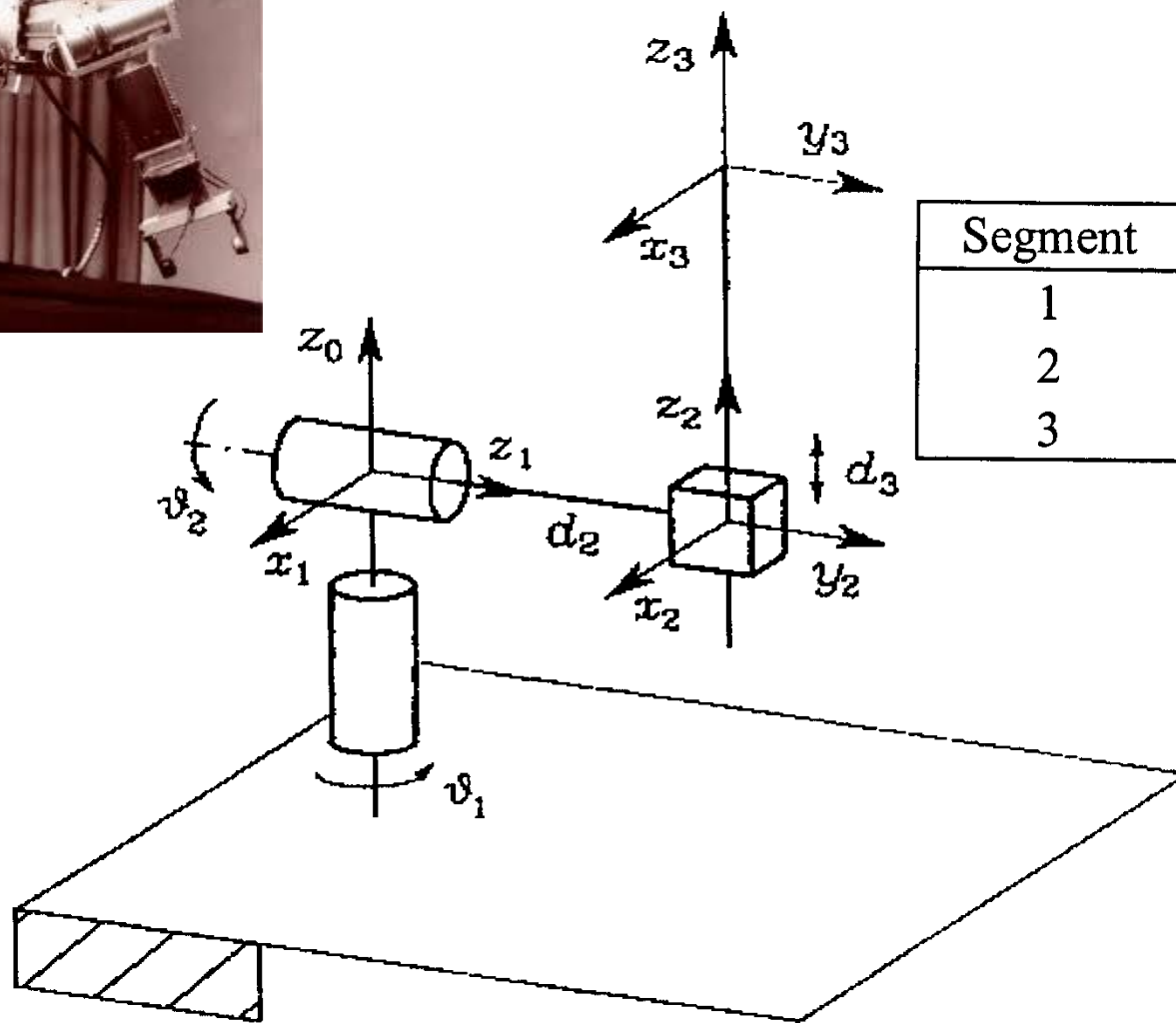
$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1^o(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(\theta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i=2,3$$

$$\mathbf{T}_3^o(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^o \cdot \mathbf{A}_2^1 \cdot \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Stanfordski robotski manipulator



Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\theta_1$
2	0	$\pi/2$	$d_2$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$$

# Stanfordski robotski manipulator

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\theta_1$
2	0	$\pi/2$	$d_2$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$$

$$\mathbf{A}_1^o(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

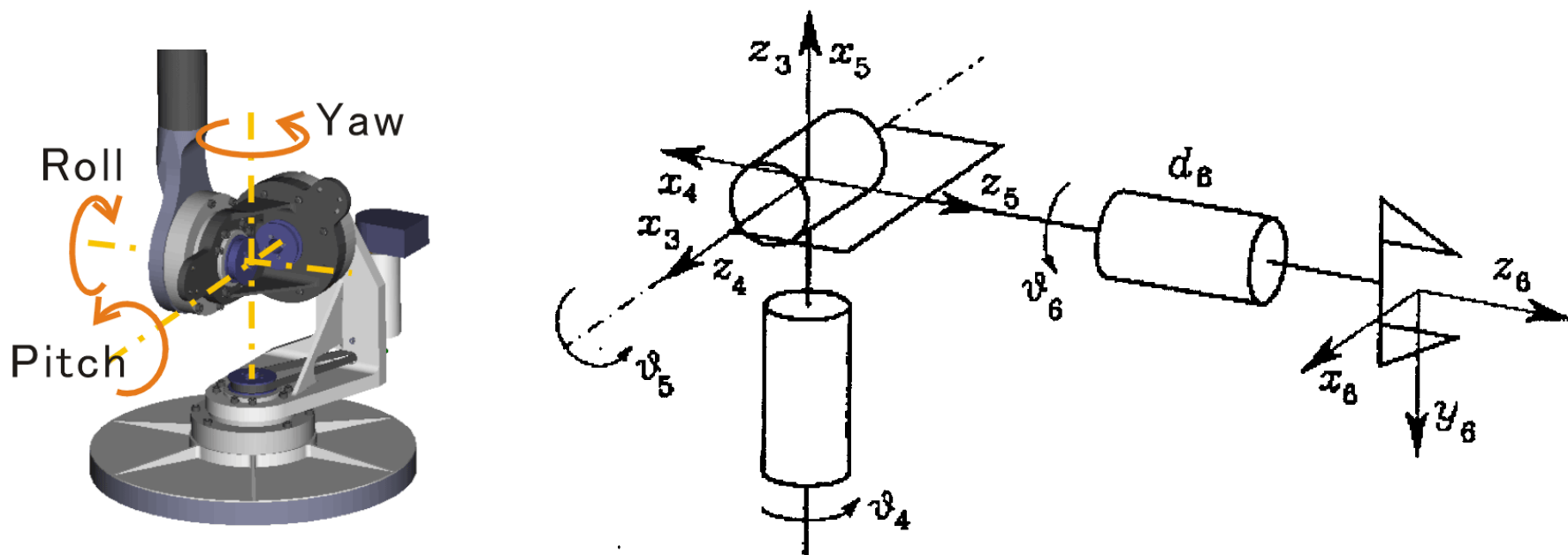
$$\mathbf{A}_2^1(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^o(\underline{q}) = \mathbf{A}_1^o \cdot \mathbf{A}_2^1 \cdot \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Sferično robotsko zapestje

- Ponavadi je pričvrščeno na vrh robotske roke



- Vse tri osi rotacijskih sklepov se sekajo v isti točki

$$\mathbf{q} = [\theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$$

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$

# Sferično robotsko zapestje

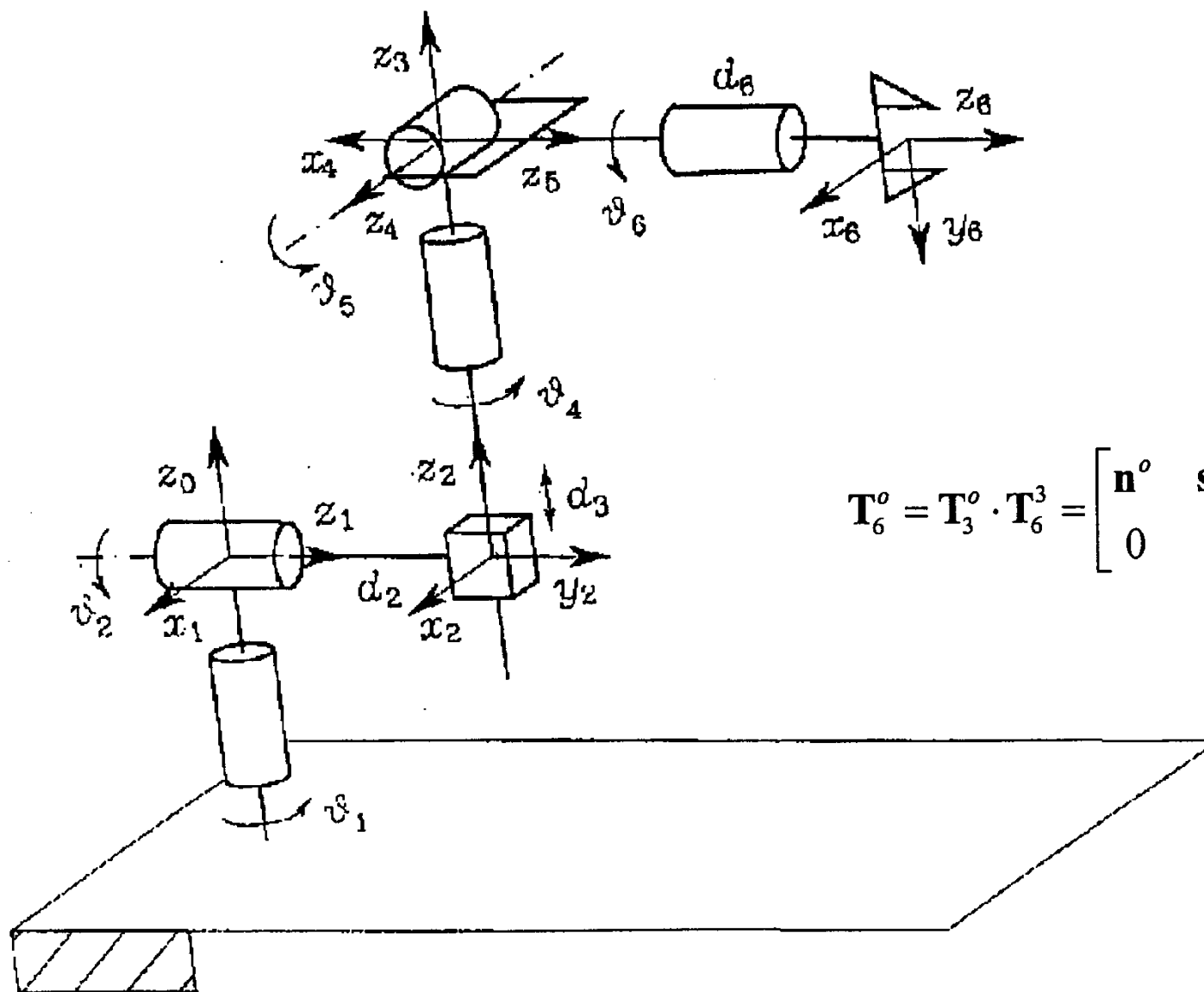
Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$

$$\mathbf{q} = [\theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$$

$$\mathbf{A}_4^3(\theta_4) = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_5^4(\theta_5) = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_6^5(\theta_6) = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_6^3(\underline{q}) = \mathbf{A}_4^3 \cdot \mathbf{A}_5^4 \cdot \mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Stanfordski manipulator z zapestjem



$$\mathbf{T}_6^o = \mathbf{T}_3^o \cdot \mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^o & \mathbf{s}^o & \mathbf{a}^o & \mathbf{p}^o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Stanfordski manipulator z zapestjem

$$\mathbf{p}^o = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 - c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^o = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^o = \begin{bmatrix} c_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) - s_1 (-s_4 c_5 c_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) + c_1 (-s_4 c_5 c_6 + c_4 c_6) \\ s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^o = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

# Inverzni geometrijski model robota

- Geometrijski model robota določa lego prijemala v odvisnosti od spremenljivk sklepov
  - Kako se bo prijemalo premaknilo, če premaknem posamezne segmente za določen kot oz. razdaljo  $T(q)$
  - Lega prijemala je enoumno določena
- Inverzni model pomeni določiti spremenljivke sklepov, ki ustrezajo dani legi prijemala  $q(T)$ 
  - Kako naj premaknemo posamezne segmente, da bo prijemalo prišlo v dano lego
  - Zahteven problem:
    - Enačbe, ki jih rešujemo so nelinearne
    - Rešitev ni enoumno določena
      - Lahko dobimo več rešitev
      - V nekaterih primerih dobimo tudi neskončno rešitev
      - V nekaterih primerih rešitev sploh ni možna
  - Pri računanju upoštevamo razne kriterije, ki določijo katera rešitev je optimalna
  - Včasih lahko izračunamo analitično rešitev, včasih pa lahko rešitev dobimo le na numerični način