# Robotika in računalniško zaznavanje (RRZ)

# Homogene transformacije

Danijel Skočaj

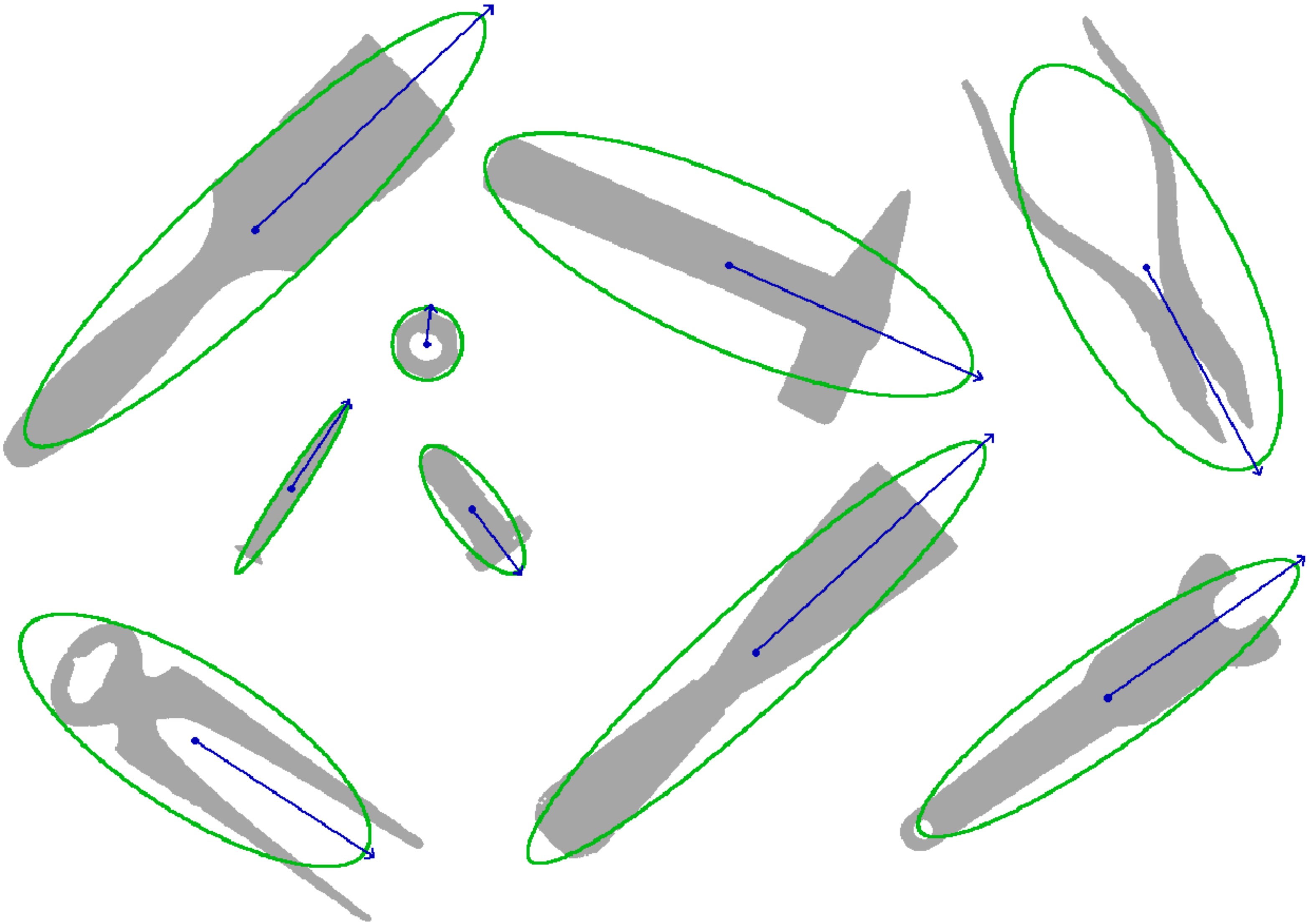
Univerza v Ljubljani

Fakulteta za računalništvo in informatiko

Literatura: Tadej Bajd (2006).
Osnove robotike, poglavje 2

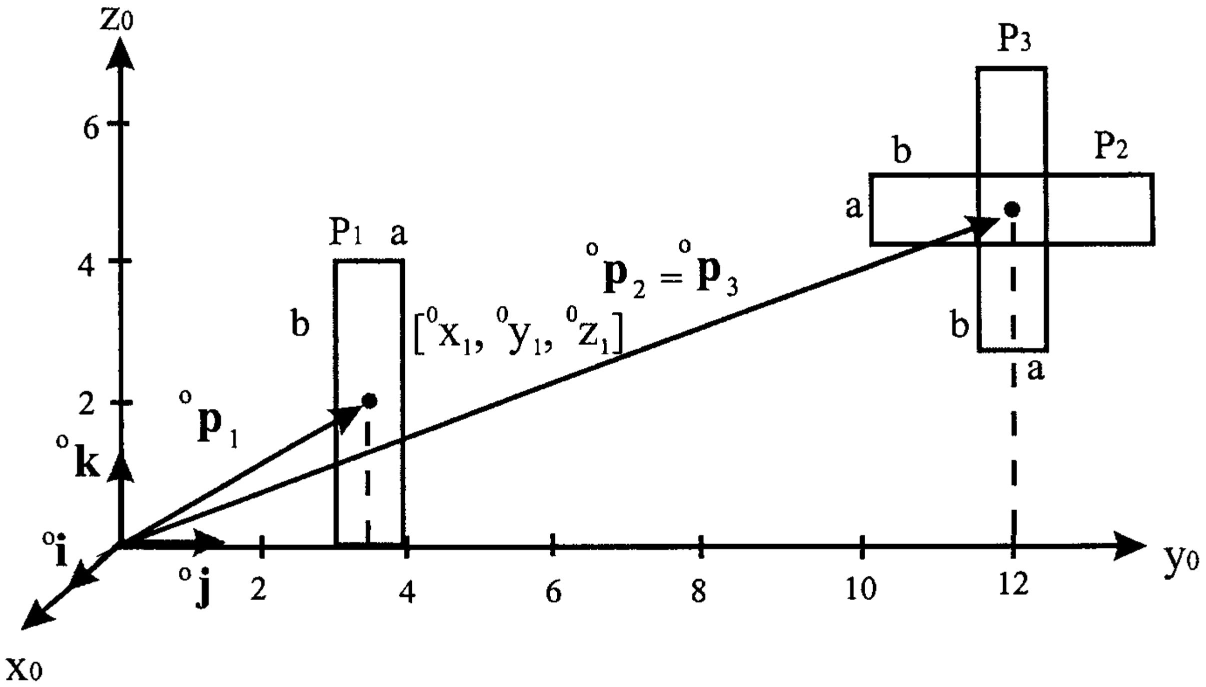
v1.0

# Pozicija in orientacija predmetov



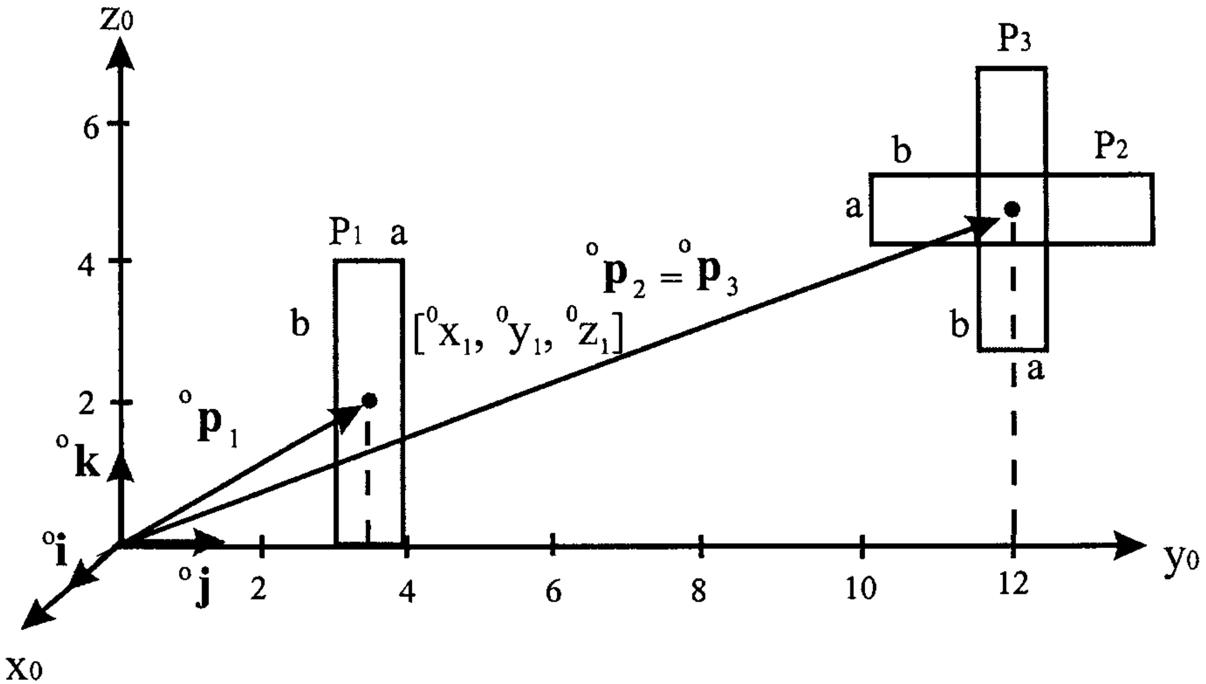
# Pozicija in orientacija

- Lega=Pozicija+Orientacija
  - Pozicija(P2)=Pozicija(P3)
  - Pozicija(P1)~=Pozicija(P2)
  - Orientacija(P1)=Orientacija(P3)
  - Orientacija(P2)~=Orientacija(P3)
  - Lega(P1)~=Lega(P2)~=Lega(P3)



# Translacija in rotacija

- Prestavljanje predmetov:
  - P1 v P3: Translacija (T)
  - P2 v P3: Rotacija (R)
  - P1 v P2: Translacija in rotacija

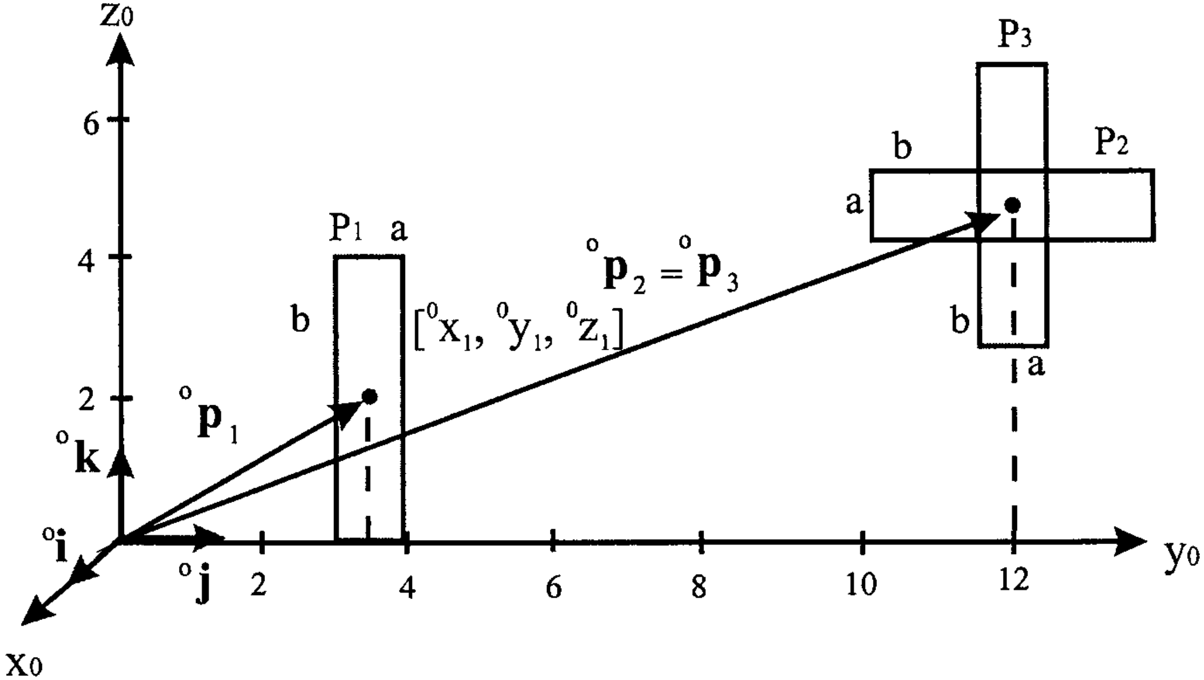


# Pozicija

- Pozicija: vektor, ki poteka od izhodišča koordinatnega sistema do točke, katere položaj želimo izraziti

- Pozicija predmeta P1:

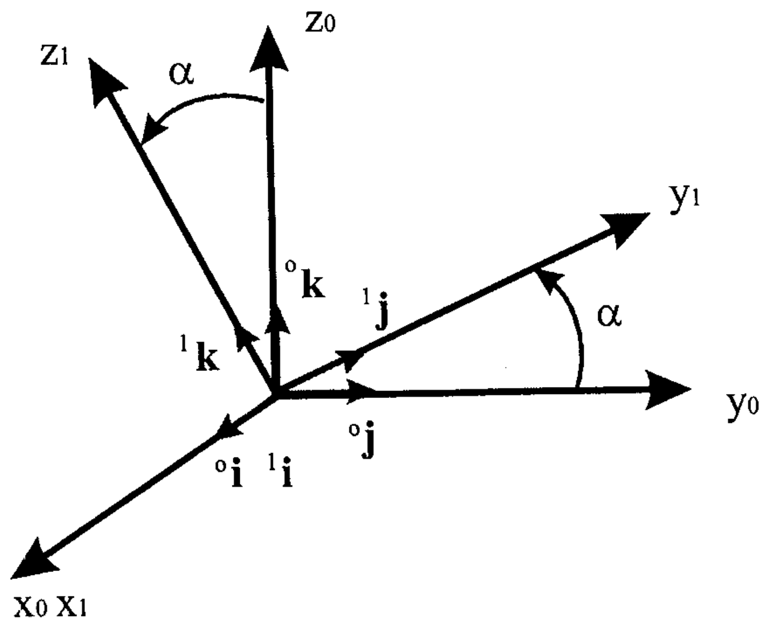
$$^{0}\mathbf{p}_1 = {}^{0}x_1\,{}^{0}\mathbf{i} + {}^{0}y_1\,{}^{0}\mathbf{j} + {}^{0}z_1\,{}^{0}\mathbf{k}$$



# Orientacija

- Desnosučni koordinatni sistem
- Rotacija okrog $x_0$ osi:
- Rotacijska matrika:

$$
{}^{0}\mathbf{R}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}
$$




  - Orientacija k.s. $O_1$ glede na k.s. $O_0$
  - Transformacija vektorja ${}^{1}\mathbf{p}$ izraženega v k.s. $O_1$ v koordinate izražene v k.s. $O_0$ :

$$
{}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_{1} \cdot {}^{1}\mathbf{p}
$$

# Rotacijske matrike

- Rotacija okrog osi x:

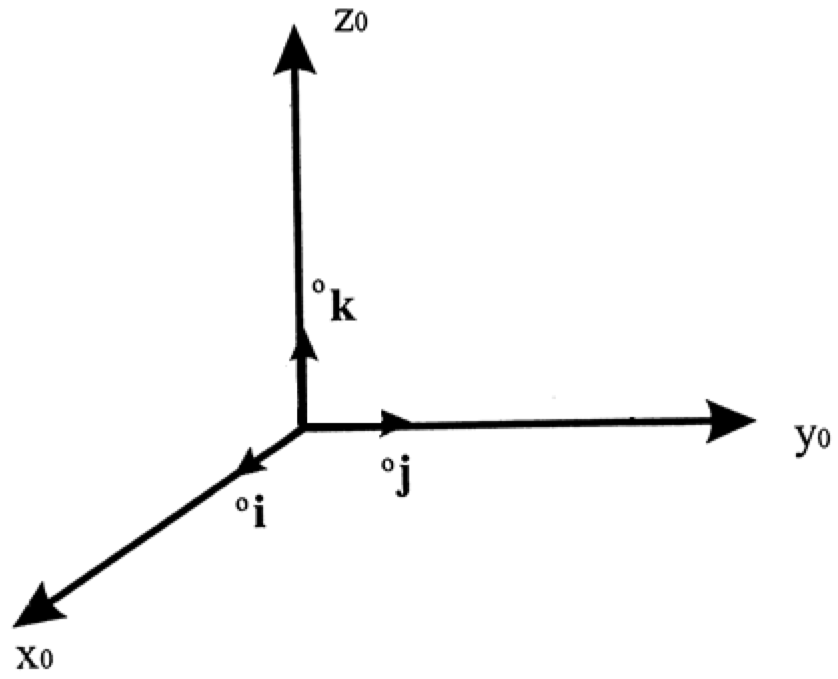
$$\mathbf{R}_{X,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Rotacija okrog osi y:

$$\mathbf{R}_{Y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Rotacija ogrog osi z:

$$\mathbf{R}_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Lastnosti rotacijske matrike

- Rotacija je ortogonalna transformacijska matrika
- Inverzna transformacija:

$$^{1}\mathbf{R}_{0} = (^{0}\mathbf{R}_{1})^{-1} = (^{0}\mathbf{R}_{1})^{T}$$

- V desnosučnem koordinatnem sistemu je determinanta enaka 1

- Seštevanje kotov:

$$\mathbf{R}_{X,\alpha_1} \cdot \mathbf{R}_{X,\alpha_2} = \mathbf{R}_{X,\alpha_1+\alpha_2}$$

- Rotacija nazaj

$$\mathbf{R}_{X,\alpha}^{-1} = \mathbf{R}_{X,-\alpha}$$

# Zaporedne rotacije

- Vektor, ki ga želimo rotirati, moramo premultiplicirati z rotacijsko matriko
- Zaporedne rotacije

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{p} \qquad {}^{1}\mathbf{p} = {}^{1}\mathbf{R}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{p} $$

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 \, {}^{2}\mathbf{p} $$

  - Rotacijski zapisi so postmultiplicirani:

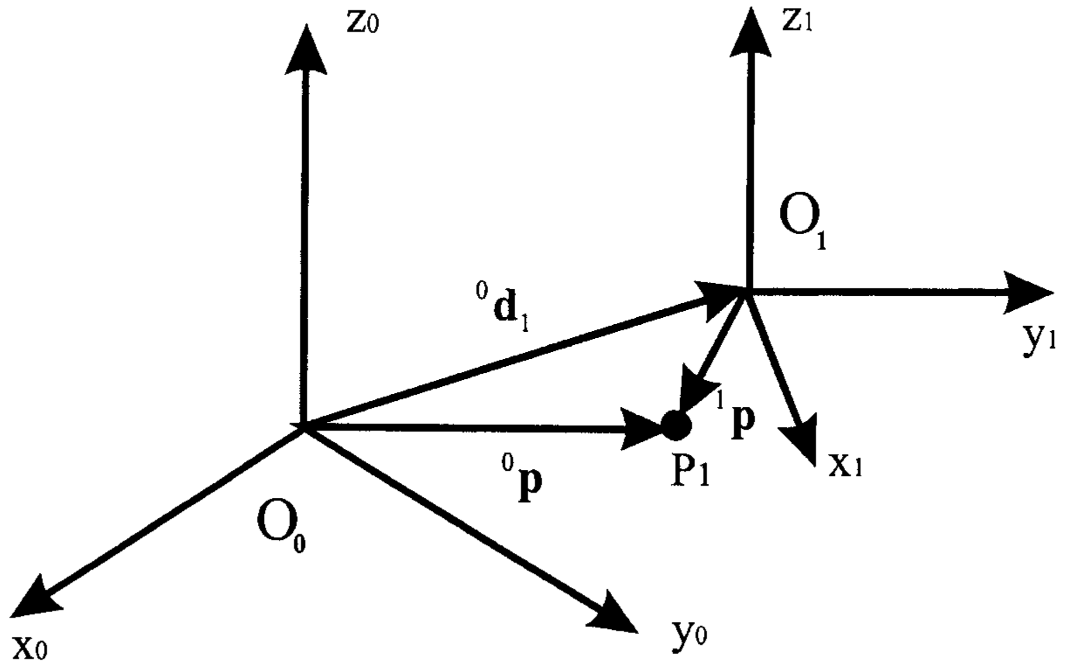
$$ {}^{0}\mathbf{R}_2 = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 $$

- V splošnem:
  - Postmultipliciramo matrike vsake naslednje rotacije
  - Rotacije se nanašajo na vsakokratni relativni trenutni koordinatni sistem

$$ {}^{0}\mathbf{R}_n = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 \cdots {}^{n-1}\mathbf{R}_n $$

# Transformacije

- Transformacija iz enega KS v drugi:




- Če sta k.s. vzoredna:
  - Samo translacija

$$^{0}\mathbf{p} = {}^{1}\mathbf{p} + {}^{0}\mathbf{d}_1$$

- Če k.s. nista vzporedna:
  - Rotacija in translacija
  - Splošni opis lege

$$^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{p} + {}^{0}\mathbf{d}_1$$

# Matrični zapis

- Trije koordinatni sistemi:

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{p} + {}^{0}\mathbf{d}_1 \qquad {}^{1}\mathbf{p} = {}^{1}\mathbf{R}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{p} + {}^{1}\mathbf{d}_2 $$

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{p} + {}^{0}\mathbf{d}_2 $$

- Združimo transformacije:

$$ {}^{0}\mathbf{R}_2 = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 \qquad {}^{0}\mathbf{d}_2 = {}^{0}\mathbf{d}_1 + {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{d}_2 $$

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 \, {}^{2}\mathbf{p} + {}^{0}\mathbf{R}_1 \, {}^{1}\mathbf{d}_2 + {}^{0}\mathbf{d}_1 $$

  - Translacijske vektorje smemo sešteti, če jih izrazimo v istem koordinatnem sistemu
- Matrični zapis zgornjih dveh enačb:

$$ \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{R}_1 & {}^{0}\mathbf{d}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{1}\mathbf{R}_2 & {}^{1}\mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 & {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{d}_2 + {}^{0}\mathbf{d}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} $$

# Homogena transformacija

- Splošno lego

$$ {}^{0}\mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot {}^{1}\mathbf{p} + \mathbf{d} $$

  je mogoče izraziti v matrični obliki:

$$ \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} $$

- Homogena transformacija, ker homogenizira (združi) rotacijsko in translacijsko transformacijo v eni matriki
  - Zelo zgoščen in priročen zapis

- Homogena matrika razsežnosti 4x4 (za 3D prostor)
  - Dodamo eno vrstico, tudi 1 v zapisu vektorja položaja:

$$ \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} {}^{1}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \begin{bmatrix} {}^{1}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} $$

# Homogena matrika

- Rotacija za R in translacija za d:

$$\begin{bmatrix} \boxed{R} & \boxed{d} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Samo rotacija:

$$\begin{bmatrix} \boxed{R} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Samo translacija:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{d} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Lastnosti homogene transfromacije

- Inverz homogene transformacije:

$$^{0}\mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot {}^{1}\mathbf{p} + \mathbf{d}$$
$$^{1}\mathbf{p} = \mathbf{R}^{T} \cdot {}^{0}\mathbf{p} - \mathbf{R}^{T}\mathbf{d}$$

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{T} & -\mathbf{R}^{T} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- Zaporedne lege:
  - Postmultiplikacija homogenih transformacij:

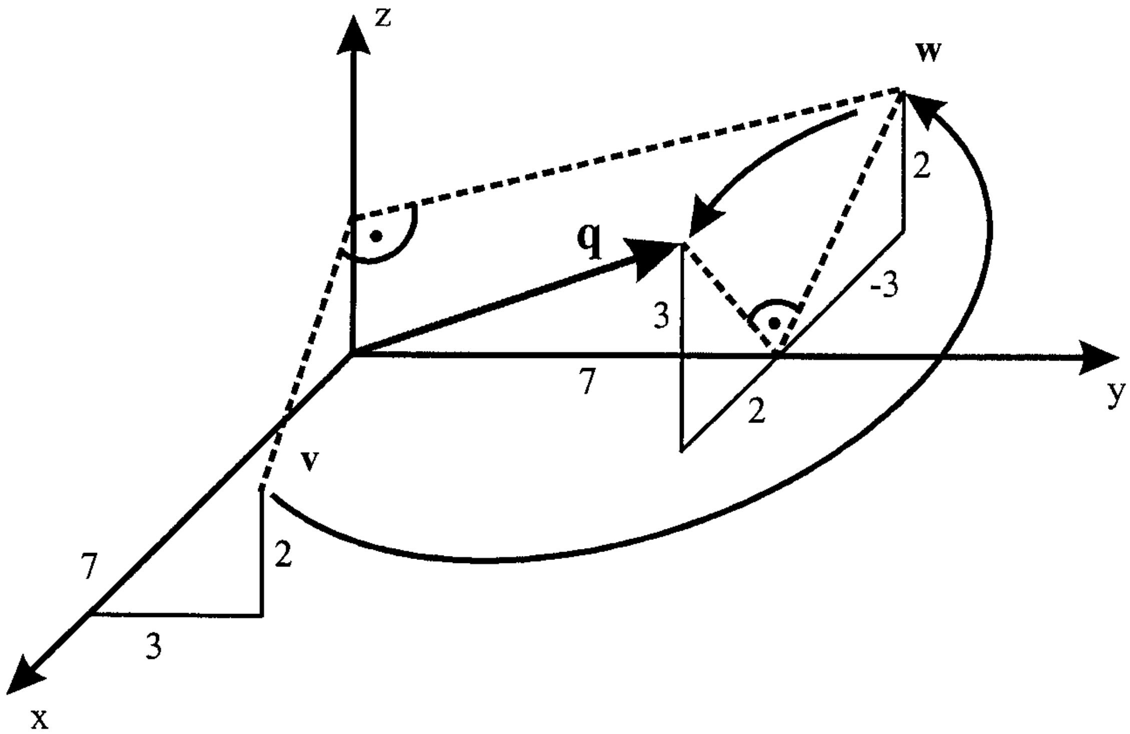
$$^{0}\mathbf{H}_{2} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \cdot {}^{1}\mathbf{H}_{2}$$
$$^{0}\mathbf{H}_{n} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \cdot {}^{1}\mathbf{H}_{2} \ldots {}^{n-1}\mathbf{H}_{n}$$

  - Nek element lahko poljubnokrat transformiramo – s postmultiplikacijo homogenih matrik

# Primer

- Primer dvakratne rotacije
  - Vektor $\mathbf{v} = [7, 3, 2, 1]^T$
    najprej zarotiraj za 90° okrog z
    in potem še za 90° okrog y osi

$$\mathbf{w} = \mathbf{Rot}\,(z, 90)\,\mathbf{v}$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{Rot}\,(y, 90)\,\mathbf{w}$$



# Primer – dvojna rotacija

$$\mathbf{w} = \mathbf{Rot}\,(z, 90)\,\mathbf{v}$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{Rot}\,(y, 90)\,\mathbf{w}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{Rot}\,(y, 90)\;\mathbf{Rot}\,(z, 90)\,\mathbf{v}$$

$$\mathbf{Rot}(y,90)\,\mathbf{Rot}(z,90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Primer - translacija

- Po dvojni rotaciji hočemo vektor še translirati za (4,-3,7)
  - Združiti hočemo
    - Translacijo $\mathbf{Trans}(4\mathbf{i}\ -3\mathbf{j}\ +\ 7\mathbf{k})$
      z rotacijama $\mathbf{Rot}(y,90)\cdot\mathbf{Rot}(z,90)$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{Trans}\,(4, -3, 7)\ \mathbf{Rot}\,(y,90)\ \mathbf{Rot}\,(z, 90)$$

- Transformacija točke (7,3,2):

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Preslikava koordinatnega sistema

- Homogena trnsformacijska matrika preslika osnovni koordinatni sistem

$$\mathbf{Trans}(4, -3, 7)\ \mathbf{Rot}(y, 90)\ \mathbf{Rot}(z, 90)$$

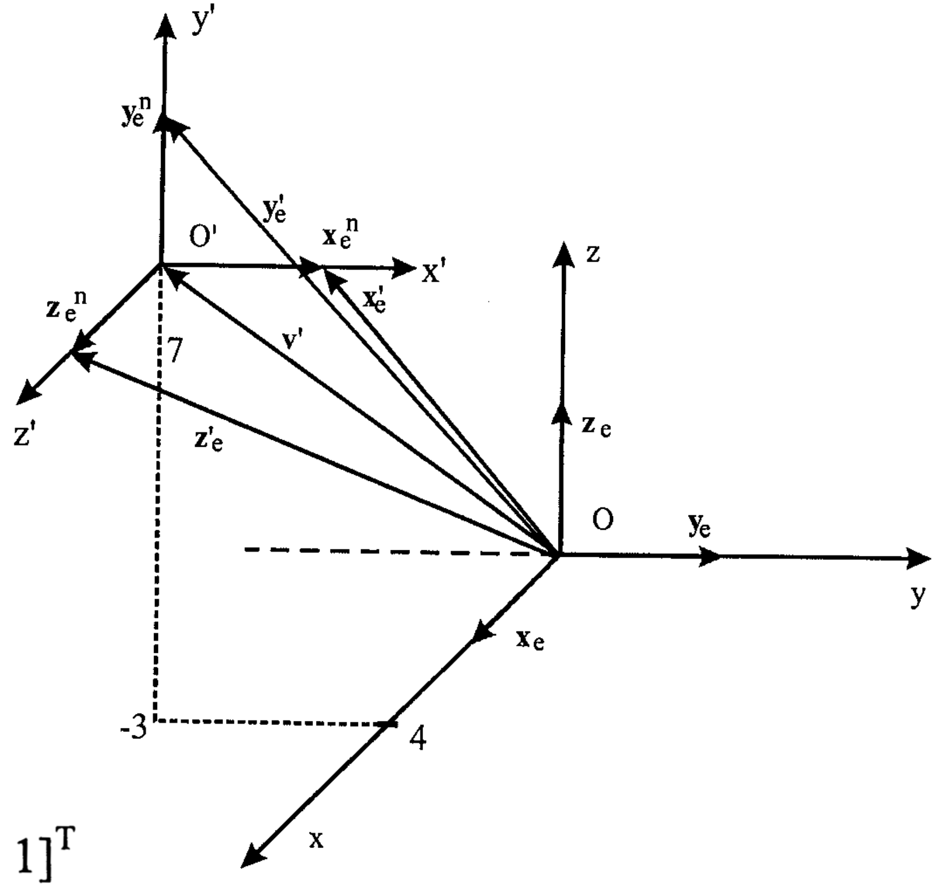
  - Izhodiščni vektor k.s.:

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}'$$

  - Enotske vektorje k.s.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_e'$$

$$\mathbf{y}_e' = [4, -3, 8, 1]^T \quad , \quad \mathbf{z}_e' = [5, -3, 7, 1]^T$$



# Opis lege koordinatnega sistema

- Enotski vektorji novega koordinatnega sistema:

$x_e^n$ : $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

$x_e^n = [0, 1, 0, 0]^T$

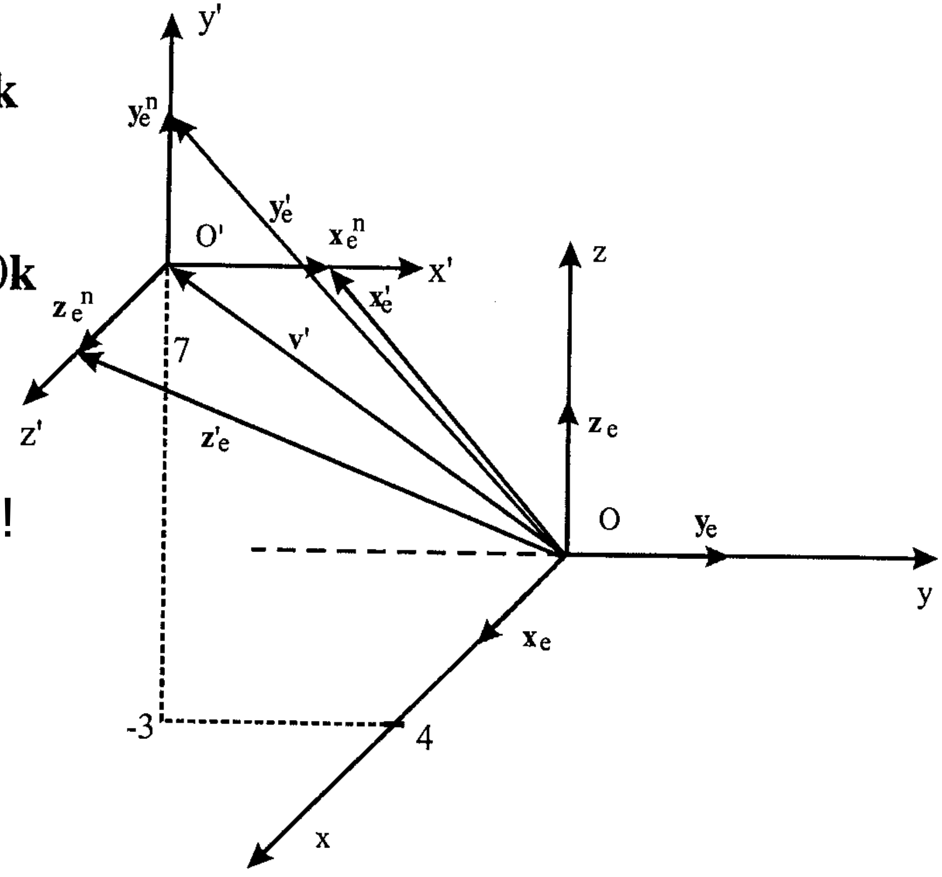
$y_e^n$ : $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$

$y_e^n = [0, 0, 1, 0]^T$

$z_e^n = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 1\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

$z_e^n = [1, 0, 0, 0]^T$

$\mathbf{v}' = [4, -3, 7, 1]^T$




- Transformacijska matrika predstavlja koordinatni sistem!

$$\begin{array}{cccc} x_e^n & y_e^n & z_e^n & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Opis premika koordinatnega sistema

- Premultiplikacija oz. postmultiplikacija transformacije (predmeta oz. k.s.) s transformacijo

- Primer:

  - Koordinatni sistem:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{i}_c & \mathbf{j}_c & \mathbf{k}_c & \end{array} \\
\mathbf{C} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ \phantom{0} \end{array}
\end{array}
$$

  - Transformacija:

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(10,0,0) \cdot \mathbf{Rot}(z,90)
$$

# Premultiplikacija

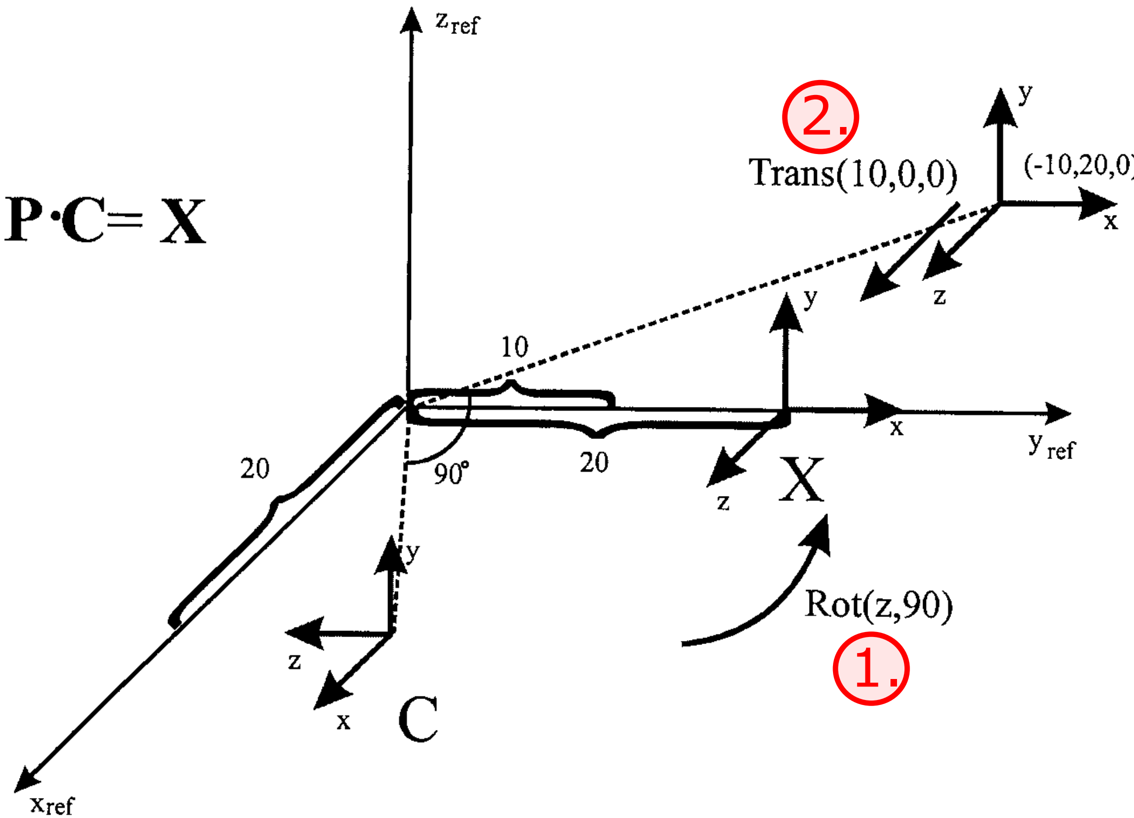
$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&-1&0&10\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&20\\0&0&-1&10\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&20\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- Objekt je preslikan glede na **stalen**, **referenčni**, koordinatni sistem, v katerem smo predočili objekt.

- Vrstni red transformacij:

$$\mathbf{Trans}(10,0,0)\cdot\mathbf{Rot}(z,90)$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{X}$$



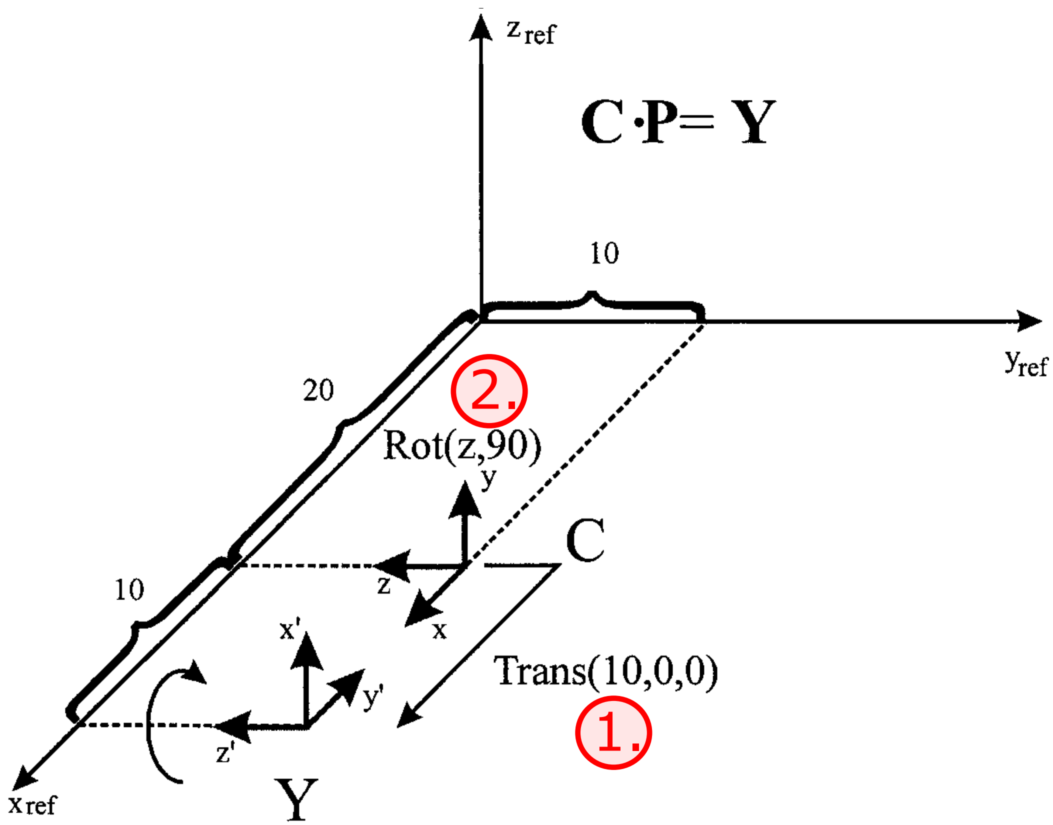
# Postmultiplikacija

$$\underline{C}\cdot P = Y = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{i}_c & \mathbf{j}_c & \mathbf{k}_c & \phantom{20} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ \phantom{1} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Objekt je preslikan glede na **lasten**, **relativni**, koordinatni sistem, v katerem smo predočili objekt.

- Vrstni red transformacij:

$$\mathbf{Trans}(10,0,0)\cdot\mathbf{Rot}(z,90) \longrightarrow$$



# Premik referenčnega k.s.

- Primer: **Trans**(2,1,0)**Rot**(z,90)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

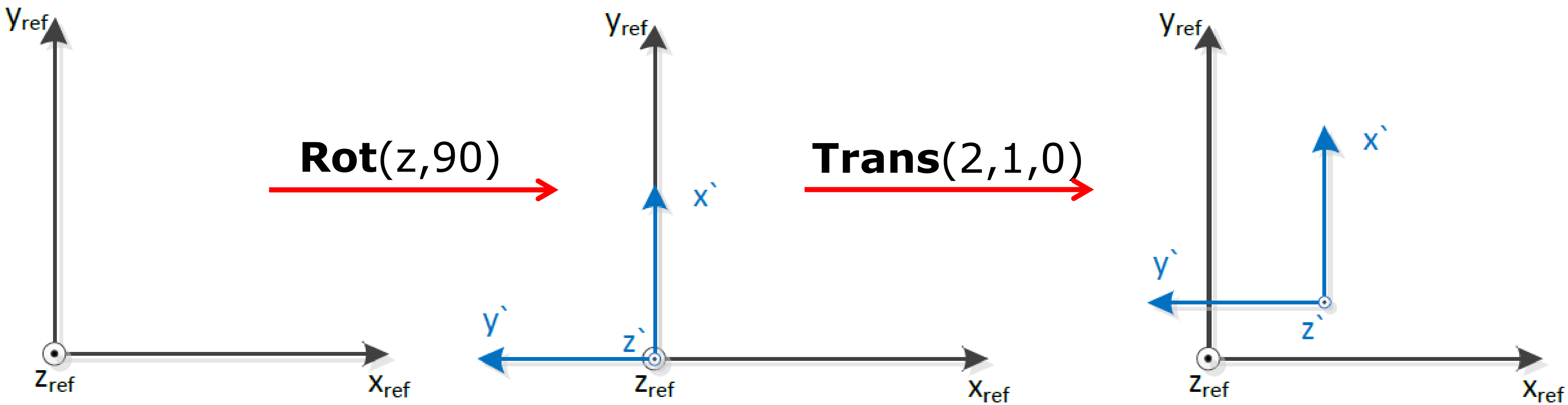
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Premik referenčnega k.s.

- Primer: **Trans**(2,1,0)**Rot**(z,90)

Glede na referenčni koordinatni sistem:




Glede na relativni koordinatni sistem: