

# Kratek opis projekta:

## Frakcijsko kromatično število in frakcijsko klično število grafa

Maj Čufer, Anika Tkalec

2023/24

### Največja neodvisna množica

Iskanje največjih neodvisnih množic danega grafa z backtracking-om vključuje sistematično upoštevanje vsakega vozlišča kot potencialnega elementa neodvisne množice. Koda bo delovala na neusmerjenih grafih, predstavljenih s seznamom sosedov. Začela bova v nekem vozlišču in postopoma dodajala vozlišča, ki niso sosedna, poleg tega pa še preverila, da vozlišče ni sosedno z nobenim drugim v neodvisni množici. Zraven bova beležila moč množice in na koncu izpisala največjo.

### Kromatično in klično število kot celoštevilski linearni program

Naj bo  $G = (V, E)$  graf z množico vozlišč  $V$  in množico povezav  $E$ .

#### Kromatično število

Kromatično število grafa je najmanjše število barv, potrebnih za pobarvanje vozlišč tako, da nobeni dve sosednji vozlišči nista iste barve.

Naj bo  $x_i$  nova spremenljivka, ki označuje, ali je vozlišče  $i$  pobarvano z barvo  $c$ , za  $\forall i \in V$  and  $\forall c$ :

$$x_{i,c} = \begin{cases} 1 & \text{vozlišče } i \text{ pobarvano z barvo } c \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\min \quad \sum_i \sum_c x_{i,c}$$

Pri pogojih:

$$\sum_c x_{i,c} = 1 \quad \forall i \text{ (vsako vozlišče je pobarvano samo z eno barvo)}$$

$$x_{i,c} + x_{j,c} \leq 1 \quad \forall \text{ sosednja } i, j \text{ (sosednja vozlišča morajo imeti različne barve)}$$

#### Klično število

Klično število grafa je velikost največje klike, tj. največje podmnožice vozlišč grafa, kjer so vsa vozlišča sosednja.

Naj bo  $x_i$  nova spremenljivka za vsako vozlišče  $i \in V$ , kjer je

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{vozlišče } i \text{ vključeno v kliko} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\max \sum_i x_i$$

Pri pogojih:

$x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (i, j) \in E$  (za vsaka dva sosednja vozlišča  $i$  in  $j$ ,  $i \neq j$ , mora vsaj eno od vozlišč biti vključeno v klico)

## Relaksacija: frakcijsko kromatično in klično število

Frakcijsko barvanje grafa dovoljuje, da se enemu vozlišču dodelijo frakcije barv, kjer nobena izmed barv ni enaka barvam sosednjega vozlišča. Vsoto vrednosti frakcijskega barvanja imenujemo teža frakcijskega barvanja. Najmanjša teža frakcijskega barvanja je frakcijsko kromatično število.

V programskem okolju SageMath bova spisala program, ki se bo s pomočjo neodvisnih množic sprehodil po vozliščih in vsakemu dodelil frakcijo barv. Cilj je minimizirati skupno frakcijo uporabljenih barv z uporabo linearnega programiranja.

Frakcijska klika je taka nenegativna funkcija, ki vsakemu vozlišču priredi vrednost med 0 in 1, tako da je vsota vrednosti vozlišč, ki so del katerekoli neodvisne množice največ 1. Teža frakcijske klike je vsota vrednosti njenih vozlišč. Največjo tako dobljeno težo imenujemo frakcijsko klično število.

## Eksperimentiranje

Na koncu bova eksperimentalno, z uporabo zgornjih programov, poskušala ugotoviti oz. bolj preveriti, če velja:

$$\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G)$$

kjer je  $\omega(G)$  klično število,  $\omega_f(G)$  frakcijsko klično število,  $\chi(G)$  kromatično število in  $\chi_f(G)$  frakcijsko kromatično število.

Določila bova tudi meje za obravnavane parametre za različne vrste grafov (eksperimentalno), kjer si bova pomagala s pomočjo že znanih primerov.