Poročilo:

(Frakcijsko) kromatično število in (frakcijsko) klično število grafa

Skupina 32: Maj Čufer, Anika Tkalec

2023/24

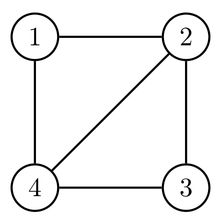
Maksimalne neodvisne množice

Iskanje največjih neodvisnih množic danega grafa z backtracking-om vključuje sistematično upoštevanje vsakega vozlišča kot potencialnega elementa neodvisne množice. Koda bo delovala na neusmerjenih grafih, predstavljenih s seznamom sosedov.

Seznam sosedov v Pythonu podamo kot:

```
Graf = {
    1: [2, 4],
    2: [1, 3, 4],
    3: [2, 4],
    4: [1, 2, 3]
}
```

in dobimo graf



Če želimo uporabiti že definirane grafe, jih lahko pretvorimo v slovar s klicom funkcije `to_dictionary()`.

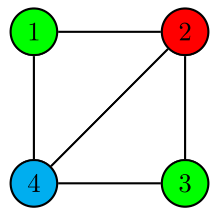
Koda poišče vse maksimalne neodvisne množice z uporabo rekurzije, in sicer tako, da za vsako vozlišče poskuša dodati to vozlišče množici in nadaljuje s preostalimi vozlišči. Hkrati pa preverja, ali je množica z dodanim vozliščem neodvisna. Na koncu izpiše le največje neodvisne množice, in njihovo velikost.

Rezultat kode za zgornji graf:

```
ISKANJE VSEH MAKSIMALNIH NEODVISNIH MNOŽIC VOZLIŠČ
Velikost največje množice vozlišč: 2
Vse maksimalne množice vozlišč: [{1, 3}]
```

Kromatično število

Kromatično število je najmanjše število barv, potrebnih za barvanje vozlišč grafa tako, da nobeni sosednji vozlišči nista pobarvani z enako barvo. Frakcijsko kromatično število v teoriji grafov je koncept, ki posplošuje kromatično število grafa. Medtem ko kromatično število predstavlja minimalno število barv, potrebnih za pobarvanje vozlišč grafa tako, da nobeni dve sosednji vozlišči nimata iste barve, frakcijsko kromatično število razširja to idejo z dovoljenjem frakcijskih vrednosti. Dovoljuje torej dodelitev frakcij barv enemu vozlišču, kjer nobena izmed barv ni enaka barvi sosednjega vozlišča. Vsoto vrednosti frakcijskega barvanja imenujemo teža frakcijskega barvanja in najmanjša teža je iskano frakcijsko kromatično število. Npr., kromatično število spodnjega grafa je 3.



Obe iskani vrednosti se da poiskati z linearnim programiranjem. Kar sva tudi sprogramirala v SageMath. Naj bo $X_{i,k}$ nova spremenljivka, ki označuje ali je vozlišče i pobarvano z barvo k.

$$x_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{vozlišče } i \text{ pobarvano z barvo } k \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Pri obeh programih iščemo minimum optimizacijske funkcije. Cilj je minimizirati število uporabljenih barv:

$$\min \sum_i \sum_k x_{i,k}$$

Pri pogojih:

1. Vsako vozlišče je pobarvano samo z eno barvo:

$$\sum_k x_{i,k} = 1 \quad \forall i$$

2. Sosednja vozlišča morajo imeti različne barve:

$$x_{i,k} + x_{j,k} \quad \forall sosednja \quad i, j$$

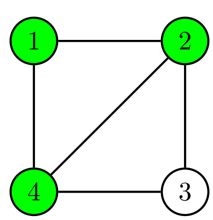
3. Binarni pogoji za spremenljivke:

$$x_{j,k} \in \{0, 1\} \quad \forall j$$

Pri frakcijskem kromatičnem številu je drugače edino to, da to ni celoštevilski linearni program, in tako za $x_{j,k}$ dovoljujemo, da pripada realnim številom med 0 in 1. V SageMath sicer že obstaja vgrajena fukcija za iskanje teh števil, zato sva tako lahko preverila najino kodo.

Klično število

Klično število grafa je velikost največje klike, tj. največje podmnožice vozlišč grafa, kjer so vsa vozlišča povezana. Na primer, v spodnjem grafu je klično število 3.



CLP za klično število

Naj bo $G = (V, E)$ graf z množico vozlišč V in množico povezav E. Naj bo x_i binarna spremenljivka za vsako vozlišče $i \in V$, kjer je

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{vozlišče } i \text{ vključeno v kliko} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Cilj je maksimizirati vsoto po x_i, kar predstavlja velikost klike.

$$\max \sum_i x_i$$

Pri pogojih:

1. Če ni povezave med dvema vozliščema, potem ne moreta biti oba v kliki:

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E$$

Frakcijsko klično število

Uradna definicija frakcijske klike in posledično frakcijskega kličnega števila je sledeča: Frakcijska klika je taka nenegativna funkcija, ki vsakemu vozlišču priredi vrednost med 0 in 1, tako da je vsota vrednosti vozlišč, ki so del katerekoli neodvisne množice največ 1. Teža frakcijske klike je vsota vrednosti njenih vozlišč. Največjo tako dobljeno težo imenujemo frakcijsko klično število.

To v resnici pomeni, da lahko v povezavi nastopa le delček nekega vozlišča.

CLP za frakcijsko klično število je tako praktično enak prejšnjemu, le da relaksiramo pogoj binarne spremenljivke x_i. Torej, da x_i sedaj lahko zavzame vse vrednosti med 0 in 1.

Naj bo $G = (V, E)$ graf z množico vozlišč V in množico povezav E. Naj bo x_i zvezna spremenljivka za vsako vozlišče $i \in V$, kjer je

$$x_i \in [0, 1]$$

Cilj je maksimizirati vsoto po x_i.

$$\max \sum_i x_i$$

Pri pogojih:

1. Edini pogoj je, da je vsota frakcij za vsako vozlišče v kliki največ 1:

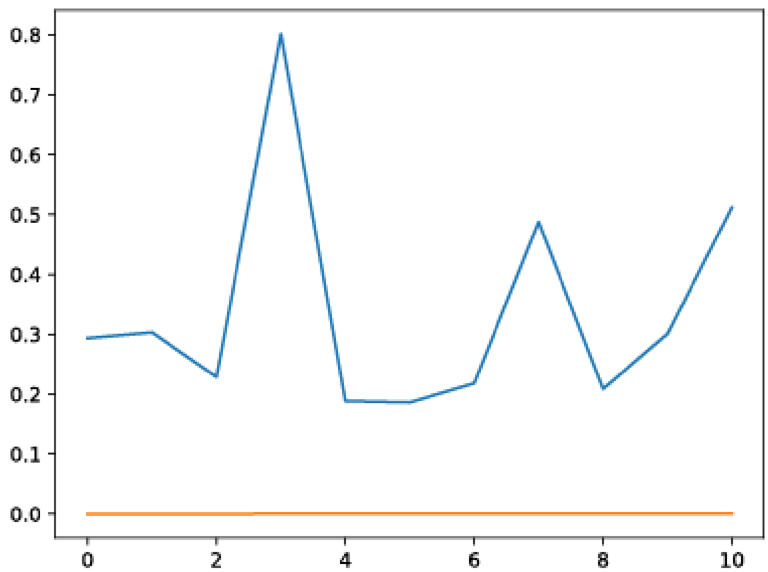
$$\sum_{i \in C} x_i \leq 1 \quad \text{kjer je C klika v G}$$

Eksperimentiranje

Časovna zahtevnost

Časovno zahtevnost sva merila s pomočjo knjižnice `time`, in sicer tako, da sva definirala funkcijo, ki meri izmeri koliko časa funkcija potrebuje, da vrne rezultat. Primerjala sva časovno efektivnost funkcije, ki sva jo spisala sama v obliki celoštevilskega linearnega programiranja, v primerjavi z že obstoječo funkcijo v SageMath.

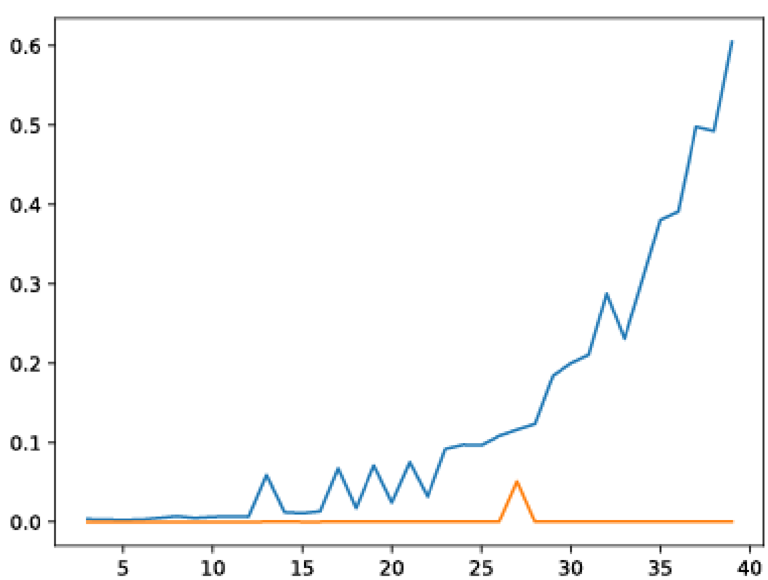
Primer: Kromatično število za popoln graf, ob večanju števila vozlišč. (Slika 1)



Slika 1: Kromatično število: CLP vs. vgrajena funkcija

Modra funkcija je CLP funkcija, oranžna je vgrajena funkcija `chromatic_number()`. Vidi se, da je vgrajena funkcija efektivnejša oz. hitrejša, predvsem pa veliko bolj stabilna.

Primer: Klično število za popoln graf, ob večanju števila vozlišč. (Slika 2)



Slika 2: Klično število: CLP vs. vgrajena funkcija

Modra funkcija je CLP funkcija, oranžna je vgrajena funkcija `clique_number()`. Vidi se, da je vgrajena funkcija efektivnejša oz. hitrejša, čeprav sta za število vozlišč do 15 dokaj izenačeni. Predvsem pa je bolj stabilna, torej nima skokov pri poljubnih vozliščih, čeprav se blizu tudi pri vgrajeni pojavi skok. Računanje po CLP metodi spominja na eksponentno obliko, kar pomeni, da se z večanjem števila vozlišč čas računanja zelo hitro povečuje.

Relacije in meje

Spodaj je prikaz rezultat, ki ga vrne koda. Iz njega se da razbrati potrebne ocene in relacije za kromatično in frakcijsko kromatično število, ter za klično in frakcijsko klično število.

Spodnja primera prikazujeta izračune za krožne grafe, kjer se število vozlišč veča do 10 oz.20. Preverjala sva tudi, kako vpliva število povezav v krožnih grafih. Torej v prvem sklopu je vsako vozlišče povezano s 1. in 2. vozliščem od sebe. V drugem sklopu dodatno še s tretjim in v četrtem sklopu, dodatno še s četrtim.

Kromatično število

```
CIRCULAN GRAFI [1,2]
3 : Kromatično število: 3 ,  Frak. kromat. število: 3.0
4 : Kromatično število: 4 ,  Frak. kromat. število: 4.0
5 : Kromatično število: 5 ,  Frak. kromat. število: 5.0
6 : Kromatično število: 3 ,  Frak. kromat. število: 3.0
7 : Kromatično število: 4 ,  Frak. kromat. število: 3.5
8 : Kromatično število: 4 ,  Frak. kromat. število: 4.0
9 : Kromatično število: 3 ,  Frak. kromat. število: 3.0
10 : Kromatično število: 4 ,  Frak. kromat. število: 3.33

CIRCULAN GRAFI [1,2,3]
4 : Kromatično število: 4 ,  Frak. kromat. število: 4.0
5 : Kromatično število: 5 ,  Frak. kromat. število: 5.0
6 : Kromatično število: 6 ,  Frak. kromat. število: 6.0
7 : Kromatično število: 7 ,  Frak. kromat. število: 7.0
8 : Kromatično število: 4 ,  Frak. kromat. število: 4.0
9 : Kromatično število: 5 ,  Frak. kromat. število: 4.5
10 : Kromatično število: 5 ,  Frak. kromat. število: 5.0

CIRCULAN GRAFI [1,2,3,4]
5 : Kromatično število: 5 ,  Frak. kromat. število: 5.0
6 : Kromatično število: 6 ,  Frak. kromat. število: 6.0
7 : Kromatično število: 7 ,  Frak. kromat. število: 7.0
8 : Kromatično število: 8 ,  Frak. kromat. število: 8.0
9 : Kromatično število: 9 ,  Frak. kromat. število: 9.0
10 : Kromatično število: 5 ,  Frak. kromat. število: 5.0
```

Klično število

```
CIRCULAN GRAFI [1,2]
3 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.0
4 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.0
5 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.0
6 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.0
7 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.5
8 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 4.0
9 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.0
10 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.33
11 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.67
12 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.0
13 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.25
14 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.5
15 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.0
16 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.2
17 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.4
18 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.0
19 : Klično število: 3 ,  Frakcijsko klično število: 3.17
CIRCULAN GRAFI [1,2,3]
4 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.0
5 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.0
6 : Klično število: 6 ,  Frakcijsko klično število: 6.0
7 : Klično število: 7 ,  Frakcijsko klično število: 7.0
8 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.0
9 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.5
10 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 5.0
11 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 5.5
12 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.0
13 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.33
14 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.67
15 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 5.0
16 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.0
17 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.25
18 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.5
19 : Klično število: 4 ,  Frakcijsko klično število: 4.75
CIRCULAN GRAFI [1,2,3,4]
5 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.0
6 : Klično število: 6 ,  Frakcijsko klično število: 6.0
7 : Klično število: 7 ,  Frakcijsko klično število: 7.0
8 : Klično število: 8 ,  Frakcijsko klično število: 8.0
9 : Klično število: 9 ,  Frakcijsko klično število: 9.0
10 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.0
11 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.5
12 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 6.0
13 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 6.5
14 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 7.0
15 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.0
16 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.33
17 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 5.67
18 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 6.0
19 : Klično število: 5 ,  Frakcijsko klično število: 6.33
```

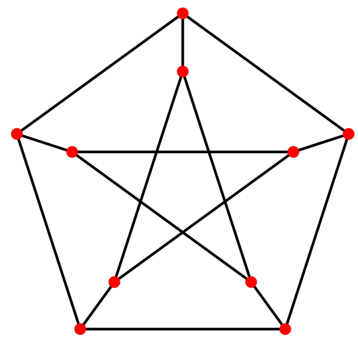
Enako sva naredila tudi na drugih grafih in sicer še na popolnih grafih, ki niso zares zanimivi, na kubičnih ter na Kneserjevih grafih. Spodaj je kratek povzetek ugotovitev in prikaz na eksplicitnem primeru.

V splošnem velja neenakost oziroma enakost:

$$\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G)$$

kjer je $\omega(G)$ klično število, $\omega_f(G)$ frakcijsko klično število, $\chi(G)$ kromatično število in $\chi_f(G)$ frakcijsko kromatično število.

Npr.: Naj bo G Kneserjev graf, ki ga dobimo kot KneserGraph(5,2)



Slika 3: Kneserjev graf (5,2), znan tudi kot Petersonov graf

$$5/2 = \chi_f(G) \leq \chi(G) = 3$$

$$2 = \omega(G) \leq \omega_f(G) = 5/2$$

Torej, klično število je spodnja meja za frakcijsko klično število, ki je enako frakcijskemu kromatičnemu številu, ki je navzgor omejeno s kromatičnim številom.