Úkol č. 1: Point Location Problem

Hugo Majer, Júlia Šušková

14. marca 2022

1 Zadanie

Úloha č. 1: Geometrické vyhledávaní bodu

Vstup: Souvislá polygonová mapa n polygonů $\{P_1, ..., P_n\}$*, analyzovaný bod* Q*.*
Výstup: $P_i, Q \in P_i$*.*

Nad polygonovou mapou implementujete Winding Number Algorithm pro geometrické vyhledávání incidujícího polygonu obsahujícího zadaný bod Q.

Nalezený polygon graficky zvýrazněte vhodným způsobem (např. vyplněním, šrafováním, blikáním). Grafické rozhraní vytvořte s využitím frameworku QT.

Pro generování nekonvexních polygonů můžete navrhnout vlastní algoritmus či použít existující geografická data(např. mapa evropských států).

Polygony budou načítány z textového souboru ve Vámi zvoleném formátu. Pro datovou reprezentaci jednotlivých polygonů použijte špagetový model.

2 Point Location Problem

Nájdenie odpovede na otázku „Kde som?“ je základnou úlohou v počítačových vedách, ktoré pracujú s geometrickými štruktúrami, napríklad v geografických informačných systémoch (GIS) (Snoeyink, 2017). De Berg et al. (2008) popisuje jednoduchú motiváciu a aplikáciu tohto problému – predstavme si interaktívny GIS, ktorý vizualizuje na obrazovke mapu krajín. Užívateľovi sa kliknutím myšou na určitú krajinu zobrazia informácie o danej krajine (napr. názov) a pri kliknutí myšou na inú krajinu sa informácie aktualizujú tak, aby opisovali novozvolenú krajinu.

Point Location Problem je všeobecne definovaný nasledovne: Zadaný priestor o n dimenziách je rozdelený do určitého počtu buniek, pričom bunkou rozumieme spojitú oblasť priestoru. Pre zadaný bod Q hľadáme bunku, v ktorej sa bod Q nachádza. Keďže táto práca je orientovaná geograficko-kartograficky, vyššie uvedenú definíciu môžeme bližšie upraviť. Ako priestor uvažujme mapu, ktorú chápeme ako rozdelenie roviny do m podoblastí, ktoré vo väčšine prípadov majú tvar polygónu, označme ich $\{P_i\}$. Bod Q je špecifikovaný súradnicami a hľadáme región mapy (polygón) P_i obsahujúci bod Q (Overmars, 1992, de Berg et al., 2008). Niektoré zdroje sa v tomto prípade uchyľujú k názvu *Point in Polygon Test*.

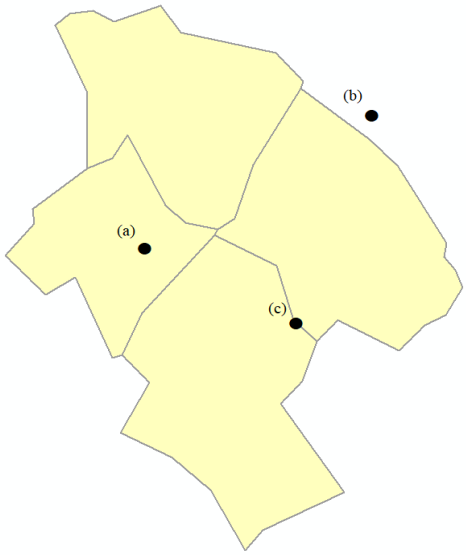
V rámci tejto práce uvažujeme, že vstupom do testu je množina polygónov $\{P_i\}$ a určovaným bodom je bod Q. Môžu nastať tri, resp. štyri výsledky testu (pozri Obr. 1):

(a) Určovaný bod Q leží v konkrétnom polygóne P.

(b) Určovaný bod Q leží mimo všetkých polygónov.

(c) Určovaný bod Q leží na hrane/vrchole konkrétneho polygónu.

Opisovaný problém je možné riešiť rôznymi algoritmami. V tejto súvislosti ale Haines (1994) upozorňuje, že rozlišujeme polygóny *konvexné* a *nekonvexné* a je optimálne zistiť, akého typu sú vstupujúce polygóny do testu a to z dôvodu výberu algoritmu, kedy určitý algoritmus môže byť vhodnejší pre určitý typ polygónov. Konvexný polygón je taký, ktorý nemá žiadny vnútorný uhol väčší ako 180°, pričom nekonvexný musí disponovať aspoň jedným takým. Druhou možnou skúškou je vziať dva ľubovoľné body X, Y patriace polygónu. Ak ich spojnica (úsečka XY) leží v polygóne, jedná sa o konvexný polygón. Ak úsečka XY nepatrí polygónu, daný polygón je nekonvexný. Väčšinou, a v prípade geografických dát to platí taktiež, sa stretávame s nekonvexnými polygónmi. Pre nekonvexné polygóny sú často používané dva algoritmy: *Winding Number Algorithm* a *Ray Crossing Algorithm*.



Obr. 1: Tri možné výsledky *Point in Polygon Test*, zdroj: autor.

2.1 Winding Number Algorithm

Algoritmus spočíva v počítaní tzv. *Winding Number* Ω, ktorý predstavuje počet obehov polygónu P okolo určovaného bodu Q, resp. koľkokrát sa polygón P ovinie okolo bodu Q (Kumar and Bangi, 2018).

Nech polygón P je tvorený množinou vrcholov $\{V_i\}$, potom Ω predstavuje sumu všetkých uhlov φ_i, ktoré zviera úsečka $\overline{QV_i}$ a $\overline{QV_{i+1}}$ v určovanom bode Q, tj. uhly $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ (Horrman and Agathos, 2001) (pozri Obr. 2).

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$$

Poznámka: Aby *Winding Number* Ω predstavoval počet obehov, je nutné výsledok vyššie uvedeného vzorca vydeliť 2π.

Samotné uhly $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ spočítame pomocou známeho vzorca pre odchýlku dvoch vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pričom $\vec{u}$ je smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{QV_i}$ a $\vec{v}$ smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{QV_{i+1}}$:

$$\cos\varphi_i = \frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Uhly $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ ale môžu byť kladné alebo záporné (Huang and Shih, 1997) a to v závislosti na ich orientácií, resp. v závislosti na polohe bodu Q a priamky $p \approx \overleftrightarrow{V_iV_{i+1}}$, kedy rozlišujeme, či bod Q leží v ľavej polrovine σ_l alebo pravej polrovine σ_r, ktoré od seba oddeľuje priamka p.

Polohu bodu Q voči priamke p určíme za pomoci vektorového súčinu smerového vektoru priamky p (označme $\vec{u}$) a vektoru definovaným bodom V_i a bodom Q (označme $\vec{v}$).
Stanovme, že $Q = [x_q, y_q]$, $V_i = [x_i, y_i]$ a $V_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]$, potom:

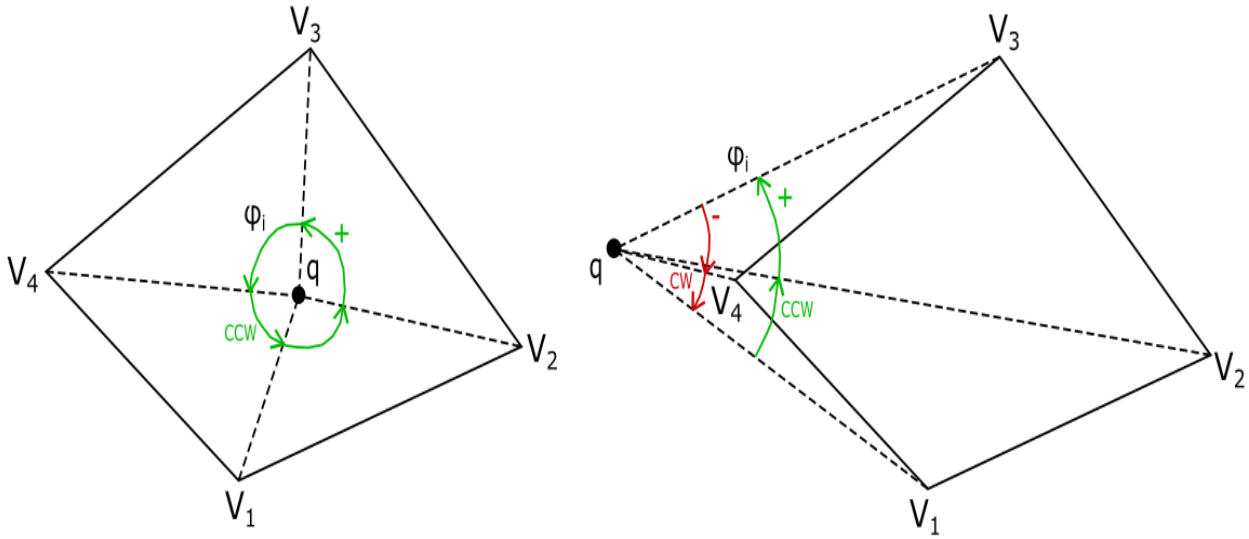
$$\vec{u} = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)$$
$$\vec{v} = (x_q - x_i, y_q - y_i)$$

Vektorový súčin môžeme zapísať maticovo a výpočítať pomocou determinantu, ktorého znamienko určí, v ktorej polrovine voči priamke p sa bod Q nachádza:

$$t = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x * v_y - v_x * u_y \Rightarrow \begin{cases} t > 0, & Q(p) \in \sigma_l \\ t = 0, & Q \in p \\ t < 0, & Q(p) \in \sigma_r \end{cases}$$

Ak je bod Q v ľavej polrovine σ_l , uhol $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ má CCW orientáciu. Ak je bod Q v pravej polrovine σ_r, uhol $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ má CW orientáciu (pozri Obr. 2).
Ak má uhol $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ CCW orientáciu, tak vstupuje do výpočtu Ω ako kladná hodnota, ak má CW orientáciu tak ako záporná hodnota (Horrman and Agathos, 2001, Huang and Shih, 1997).

$$\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1}) = \begin{cases} +\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1}), & CCW & \iff Q(p) \in \sigma_l \\ -\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1}), & CW & \iff Q(p) \in \sigma_r \end{cases}$$



Obr. 2: Orientácia a znamienko uhlov $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ v závislosti na polohe bodu Q a priamky $p \approx \overleftrightarrow{V_i V_{i+1}}$, zdroj: autor.

Na základe výslednej hodnoty *Winding Number* Ω dokážeme určiť, či určovaný bod Q leží v polygóne P alebo leží mimo neho.

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & Q \in P \\ 0, & Q \notin P \end{cases}$$

Algoritmus *Winding Number* by sa dal formálne pseudokódom zapísať nasledovne:

Algorithm 1 *Winding Number Algorithm*

1: Inicializácia *Winding Number* $\Omega = 0$, inicializácia odchýlky ϵ.
2: Pre každú hranu polygónu (V_i, V_{i+1}) opakuj:
3: Urči polohu Q voči p, $p \approx \overleftrightarrow{V_i V_{i+1}}$.
4: Vypočítaj $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$.
5: Ak $Q(p) \in \sigma_r$, tak nastav $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ zápornú hodnotu.
6: Pripočítaj $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ do Ω.
7: Ak platí $||\Omega| - 2\pi| < \epsilon$, tak $Q \in P$.
8: V inom prípade: $Q \notin P$.

2.1.1 Winding number - ošetrenie singularít

Literatúra udáva, že výsledkom *Winding Number Algorithm* sú dva stavy – bod vnútri polygónu / bod mimo polygónu. V kapitole 2 bol ale spomenutý aj tretí prípad, ktorý môže nastať, a to síce, že určovaný bod Q bude ležať na hrane polygónu, tj. $Q \in \partial P$, prípadne že určovaný bod Q je totožný s vrcholom polygónu, tj. $Q \equiv V_i$. Jedná sa o singularity, ktoré je nutné v rámci tohto algoritmu ošetriť.

Ak určovaný bod Q leží na hrane polygónu (V_i, V_{i+1}), tak sa jedná o jeho kolinearitu s priamkou $p \approx \overleftrightarrow{V_i V_{i+1}}$, ktorá spája dva susedné vrcholy polygónu. Informáciu o prípadnej kolinearite v rámci algoritmu dostávame v 3. kroku, kde vyšetrujeme polohu bodu Q voči priamke p. Len informácia o kolinearite ale nestačí, pretože bod Q síce leží na priamke p, ale nemusí ležať „medzi“ bodmi V_i a V_{i+1}, tj. nie na hrane polygónu (V_i, V_{i+1}). Z tohto dôvodu musíme porovnať súradnice bodu Q a bodov V_i a V_{i+1}.
Opäť stanovme, že $Q = [x_q, y_q]$, $V_i = [x_i, y_i]$ a $V_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]$. Aby bod Q skutočne ležal na hrane (V_i, V_{i+1}), musí okrem kolinearity s priamkou p platiť:

$$(x_i \leq x_q \leq x_{i+1}) \quad \wedge \quad (y_i \leq y_q \leq y_{i+1})$$

O situácií, kedy určovaný bod Q je totožný s vrcholom polygónu V_i sa takisto dozvedáme už v existujúcom kroku algoritmu, konkrétne v 4. kroku, tj. pri výpočte uhlu $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$. Ako bolo spomenuté vyššie, daný uhol sa počíta ako odchýlka dvoch vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Poznamenajme, že $\vec{u}$ je smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{QV_i}$ a $\vec{v}$ smerový vektor priamky $\overleftrightarrow{QV_{i+1}}$. Ak $Q \equiv V_i$, tak jedna z noriem $\|\vec{u}\|$ alebo $\|\vec{v}\|$ vstupujúcich do výpočtu odchýlky dvoch vektorov musí byť nulová:

$$Q \equiv V_i \quad \iff \quad (\|\vec{u}\| = 0) \vee (\|\vec{v}\| = 0)$$

Pseudokód *Winding Number Algorithm*, ktorý dokáže detegovať aj stavy, kedy určovaný bod Q leží na hrane polygónu alebo je totožný s vrcholom polygónu:

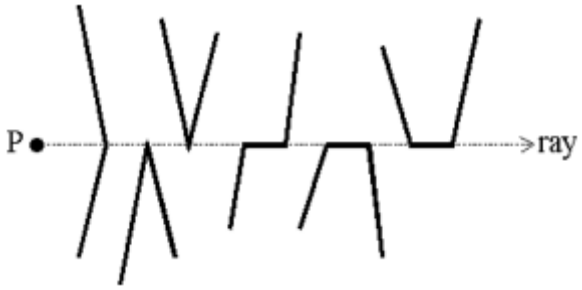
Algorithm 2 *Winding Number Algorithm s detekciou singularít*

1: Inicializácia *Winding Number* $\Omega = 0$, inicializácia odchýlky ϵ.
2: Pre každú hranu polygónu $(V_i, V_{i+1)}$ opakuj:
3: Urči polohu Q voči p, $p \approx \overleftrightarrow{V_iV_{i+1}}$.
4: Ak $Q \in p$ (kolinearita), a zároveň platí: $(x_i \leq x_q \leq x_{i+1}) \wedge (y_i \leq y_q \leq y_{i+1})$, tak $Q \in \partial P$.
5: Vypočítaj $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$.
6: Ak $(\|\vec{u}\| = 0) \vee (\|\vec{v}\| = 0)$, tak $Q \equiv V_i$.
7: Ak $Q(p) \in \sigma_r$, tak nastav $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ zápornú hodnotu.
8: Pripočítaj $\varphi_i(V_i, Q, V_{i+1})$ do Ω.
9: Ak platí $||\Omega| - 2\pi| < \epsilon$, tak $Q \in P$.
10: V inom prípade: $Q \notin P$.

2.2 Ray Crossing Method

Metóda *Ray Crossing* je považovaná za veľmi intuitívnu metódu. Uvažuje, že určovaným bodom Q vedieme paprsok (angl. *ray*), tj. priamku r, a počíta sa počet kontaktov (pretnutí) priamky r a hrán polygónu. Ak je počet pretnutí párny, bod Q sa nenachádza v polygóne P. Naopak, ak je nepárny, bod Q je vnútri polygónu P. Namiesto priamky je možné použiť aj polpriamku vedenú z bodu Q smerom doprava a to rovnobežne s kladnou časťou osy X (Sunday, 2021).

Pri tejto metóde je nutné ošetriť niektoré špeciálne situácie, ako je prechod paprsku r vrcholom polygónu P alebo jej totožnosť s hranou polygónu (Sunday, 2021) (pozri Obr. 3).



Obr. 3: Špeciálne prípady nastávajúce pri *Ray Crossing Method*, zdroj: (Sunday, 2021).

V rámci tejto práce uvažujeme jednu z variant *Ray Crossing*, konkrétne variantu s *redukciou súradníc k určovanému bodu* Q. Tá spočíva v nastavení počiatku súradnicového systému do bodu Q a následným prepočítaním vrcholov $\{V_i\}$ do tohto novovzniknutého súradnicového systému.

Poznámka: Vo vzorcoch nižšie už pracujeme s prepočítanými súradniciami vrcholov $\{V_i\}$ do nového súradnicového systému.

Paprsok r_1 vedieme horizontálne bodom Q:

$$r_1(Q) : y = y_q$$

Keďže bod Q je počiatkom súradnicového systému, tak:

$$y_q = 0$$

Aby sme sa vyhli nesprávnemu počítaniu priesečníkov kvôli vyššie uvedeným špeciálnym situáciam (pozri Obr. 3), tak priesečníky paprsku r_1 a hrany polygónu (V_i, V_{i+1}) započítavame vtedy, keď hrana polygónu je v oboch alebo len hornej polrovine vzhľadom ku horizontálnemu paprsku r_1, tj. ak je splnená práve jedna z nasledujúcich podmienok:

(a) Ak vrchol $V_i = [x_i, y_i]$ leží na paprsku alebo pod ním, a zároveň vrchol $V_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]$ leží nad paprskom.

$$(y_i \leq 0) \quad \wedge \quad (y_{i+1} > 0)$$

(b) Ak bod $V_i = [x_i, y_i]$ leží nad paprskom, a zároveň bod $V_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]$ leží buď na paprsku alebo pod paprskom.

$$(y_i > 0) \quad \wedge \quad (y_{i+1} \leq 0)$$

Z podmienok vyššie vyplýva podmienka:

$$(y_i > 0) \neq (y_{i+1} > 0)$$

Následne je treba spočítať x-ovú súradnicu priesečníku $C = [x_C, 0]$, a zároveň brať do úvahy len ten priesečník, ktorý leží v pravej polrovine od bodu Q:

$$x_C = \frac{x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}}{y_{i+1} - y_i} > 0$$

Poznámka: Z tvrdení vyššie je zrejmé, že ako paprsok r_1 využívame polpriamku vedenú z bodu Q smerom doprava, rovnobežne s kladnou časťou osy X.

Priesečník spĺňajúci vyššie uvedenú podmienku považujeme za vyhovujúci. Na základe počtu týchto vyhovujúcich priesečníkov k (párny/nepárny počet) dokážeme určiť, či určovaný bod Q leží v polygóne alebo leží mimo polygónu.

$$k\%2 = \begin{cases} 1, & Q \in P \\ 0, & Q \notin P \end{cases}$$

Implementovaný algoritmus by sme formálne pseudokódom mohli zapísať nasledovne:

Algorithm 3 *Ray Crossing Method s redukciou súradníc ku Q*

1: Inicializácia počtu priesečníkov $k = 0$.
2: Pre $\forall$ vrcholy polygónov $\{V_i\}$ opakuj:
3: Prepočítanie súradníc vrcholov $\{V_i\}$ do nového súradnicového systému s počiatkom v určovanom bode Q.
4: Ak platí: $(y_i > 0) \neq (y_{i+1} > 0)$
5: Spočítanie x-ových súradníc x_C priesečníkov C.
6: Ak $x_C > 0$, jedná sa o vyhovujúci priesečník, aktualizuj k: $k = k + 1$
7: Ak $k\%2 \neq 0$, $Q \in P$.
8: V inom prípade: $Q \notin P$.

2.2.1 Ray Crossing Method - ošetrenie singularít

Podobne ako pri *Winding Number Algorithm* musíme ošetriť singularity – určovaný bod Q totožný s vrcholom polygónu a druhý prípad, kedy bod Q leží na hrane polygónu.

Aby sme detegovali stav, kedy určovaný bod Q leží na hrane polygónu je nutné pracovať s dvoma paprskami, tj. je nutné pridať druhý paprsok r_2, ktorý je tvorený polpriamkou začínajúcou v bode Q a ktorá je vedená smerom doľava, rovnobežne so zápornou častou osy Y. Paprsok r_2 bude priesečníky s hranou polygónu (V_i, V_{i+1}) započítavať vtedy, keď hrana polygónu je v oboch alebo len spodnej polrovine vzhľadom ku paprsku r_2, tj. ak je splnená nasledujúca podmienka:

$$(y_i < 0) \neq (y_{i+1} < 0)$$

Pri paprsku r_1 považujeme priesečník $C = [x_C, 0]$ za vyhovujúci práve vtedy, ak sa nachádza v pravej polrovine od bodu Q. Pri paprsku r_2 je priesečník vyhovujúci, ak leží v ľavej polrovine od bodu Q, takže pre jeho x-ovú súradnicu platí:

$$x_C = \frac{x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}}{y_{i+1} - y_i} < 0$$

Veľmi dôležitou poznámkou je, že počet priesečníkov musíme počítať pre každý paprsok zvlášť, tj. k_r pre paprsok r_1 a k_l pre paprsok r_2. Ak určovaný bod Q leží na hrane polygónu, tak jedna z hodnôt počtu priesečníkov musí byť párna a druhá nepárna:

$$k_r \% 2 \neq k_l \% 2$$

Stále platí, že ak určovaný bod Q leží v polygóne, tak počet priesečníkov k_r (pre paprsok r_1) musí byť nepárny. V každom inom prípade analyzovaný bod Q leží mimo polygónu.

Prípad totožnosti bodu Q s vrcholom polygónu detegujeme jednoducho a to tak, že porovnávame súradnice bodu Q s každým jedným vrcholom polygónu vo vstupných dátach. Ak sú súradnice bodu Q totožné s jedným vrcholom V_i, bod Q je s ním totožný.

$$Q \equiv V_i \quad \Longleftrightarrow \quad (x_q = x_i) \wedge (y_q = y_i)$$

Pseudokód *Ray Crossing Method s redukciou súradníc ku Q*, ktorý dokáže detegovať aj stavy, kedy určovaný bod Q leží na hrane polygónu alebo je totožný s vrcholom polygónu:

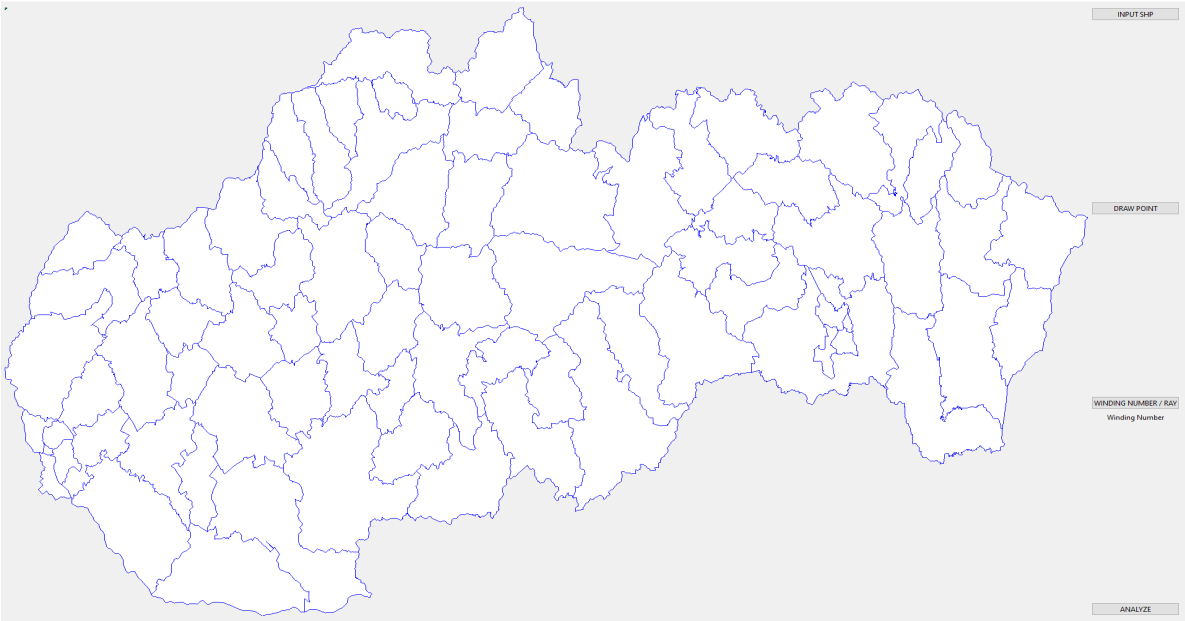
Algorithm 4 *Ray Crossing Method s redukciou súradníc ku Q s detekciou singularít*

Inicializácia počtu priesečníkov $k_r = 0$, $k_l = 0$.
Pre $\forall$ vrcholy polygónov $\{V_i\}$ opakuj:
    Ak $(x_q = x_i) \wedge (y_q = y_i)$, tak $Q \equiv V_i$.
    Prepočítaj súradníce vrcholov $\{V_i\}$ do nového súradnicového systému s počiatkom v určovanom bode Q.
    Ak platí: $(y_i > 0) \neq (y_{i+1} > 0)$ //pravy paprsok r_1
        Spočítaj x-ové súradnice x_C priesečníkov C.
        Ak $x_C > 0$, jedná sa o vyhovujúci priesečník, aktualizuj k_r: $k_r = k_r + 1$
    Ak platí: $(y_i < 0) \neq (y_{i+1} < 0)$ //lavy paprsok r_2
        Spočítaj x-ové súradnice x_C priesečníkov C.
        Ak $x_C < 0$, jedná sa o vyhovujúci priesečník, aktualizuj k_l: $k_l = k_l + 1$
Ak $k_r \% 2 \neq k_l \% 2$, tak $Q \in \partial P$.
Ak $k \% 2 \neq 0$, $Q \in P$.
V inom prípade: $Q \notin P$.

3 Aplikácia

Aplikácia bola vytvorená vo vývojovom prostredí QT 6. Slúži na analýzu polohy bodu voči polygónom, pričom sú v nej implementované obidva spomenuté algoritmy – *Winding Number Algorithm* a *Ray Crossing Method*.

Užívateľské rozhranie je veľmi jednoduché a intuitívne. Prevažnú časť okna aplikácie tvorí zobrazovacia plocha, na ktorej sa vizualizujú do aplikácie nahrané dáta (pozri Obr. 4) Tie užívateľ do aplikácie nahrá tlačidlom *INPUT SHP*. Po kliknutí naň vyskočí pop-up okno s možnosťou prehliadať súbory v PC. Je nutné zvoliť SHP súbor polygónovej vrstvy.

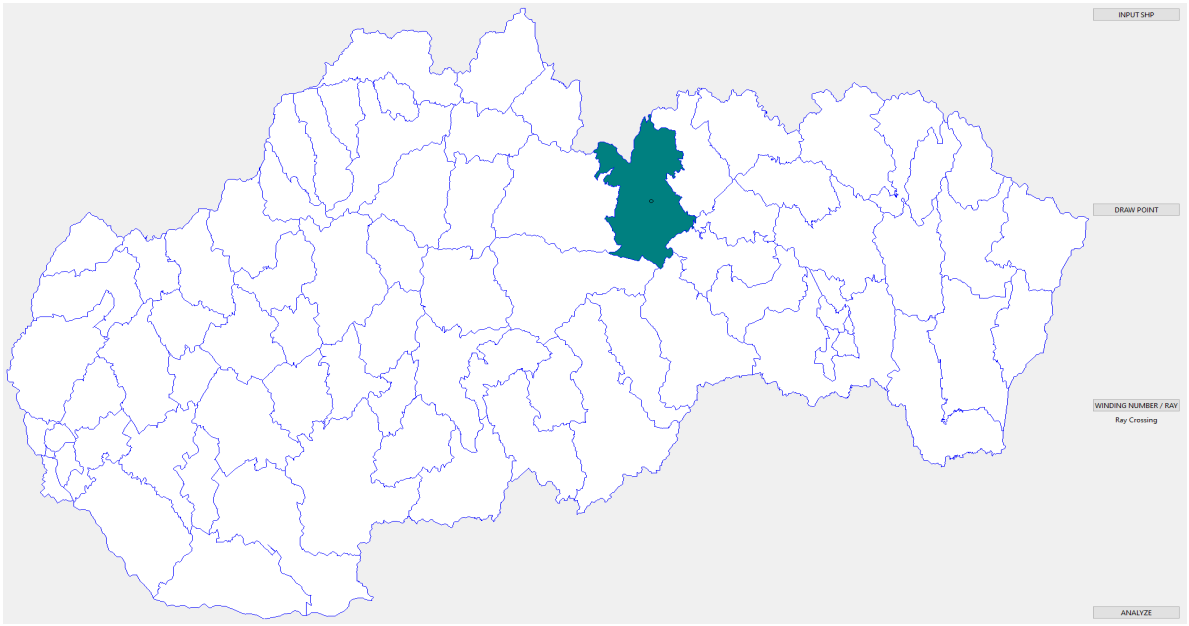


Obr. 4: Užívateľské rozhranie po načítaní dát, zdroj: autor.

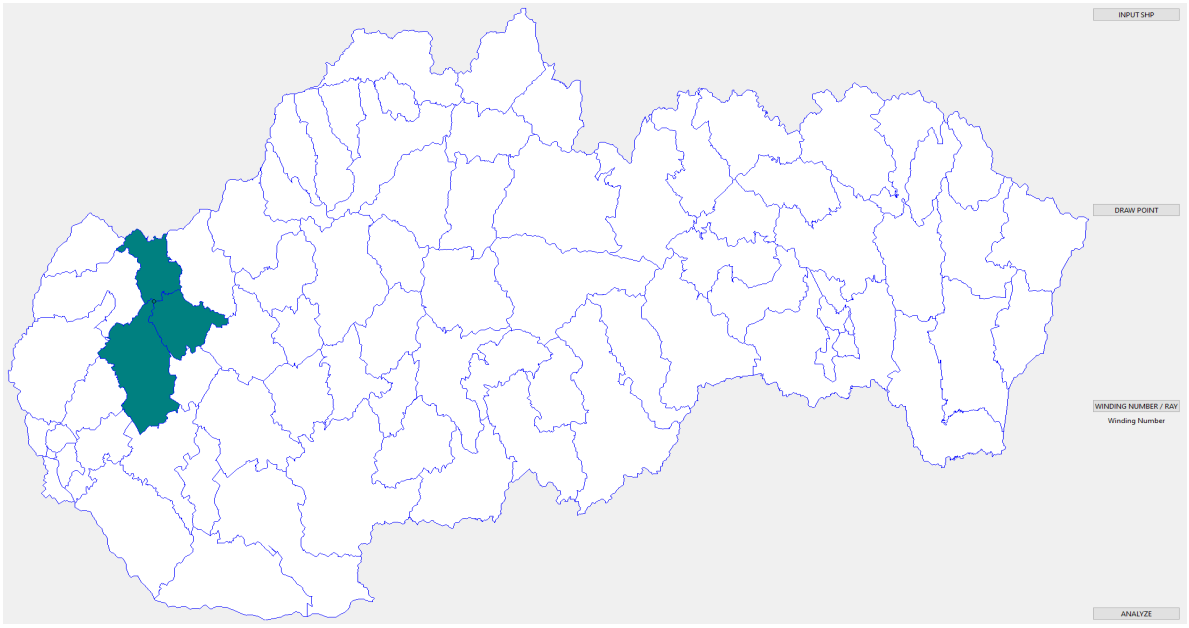
Aby bolo možné pristúpiť k analýze, musí užívateľ nakresliť bod, ktorého vzťah voči polygónom bude analyzovaný. Je nutné kliknúť na tlačidlo *DRAW POINT*, ktoré zapína/vypína mód kreslenia bodu (defaultne po spustení aplikácie je mód kreslenia vypnutý).

V poradí tretie tlačidlo zhora je tlačidlo *WINDING NUMBER / RAY*, ktoré, ako z jeho názvu vyplýva, prepína medzi algoritmami používanými k analýze. Textové pole pod týmto tlačídlom informuje, ktorý algoritmus je zvolený.

Po načítaní polygónových dát, nakreslení bodu a zvolení algoritmu je možné pristúpuť k analýze a to kliknutím na tlačidlo *ANALYZE*. Výsledok analýzy sa zobrazí v zobrazovacej ploche. Ak určovaný bod leží v polygóne, daný polygón sa zvýrazni (pozri Obr. 5) Ak bod leží na hrane, resp. na vrchole, zvýraznia sa polygóny, ktoré zdieľajú danú hranu, resp. vrchol (pozri Obr 6).



Obr. 5: Výsledok analýzy, kedy určovaný bod leží v polygóne, zdroj: autor.



Obr. 6: Výsledok analýzy, kedy určovaný bod je totožný s vrcholom, ktorý zdieľajú tri polygóny, zdroj: autor.

4 Dokumentácia programu

Samotný program bol napísaný v jazyku Python 3.9 v SW PyCharm. Okrem externých modulov QT bol využitý aj modul `pyshp`, ktorý slúži na prečítanie SHP súboru. Program pozostáva z troch tried:

1. Trieda `MainForm`:
   Predstavuje užívateľské rozhranie pre aplikáciu, obsahuje šesť metód:

   Metódy `setupUi` a `retranslateUi` boli automaticky vygenerované prostredníctvom vývojového prostredia QT a prepisom QML do Pythonu.

   Metóda `input` inicializuje vloženie vstupných dát do programu. Zisťuje šírku a výšku zobrazovacej plochy aplikácie z dôvodu nutného preškálovania súradníc vstupných dát do súradníc zobrazovacej plochy aplikácie. Hodnoty šírky a výšky predáva metóde `setPath`.

   Metóda `drawPoint` sa týka tlačídla *DRAW POINT*, odkazuje na metódu `setSource`. Zabezpečuje zapínanie/vypínanie módu kreslenia bodu, ktorého poloha bude analyzovaná.

   Metóda `changeAlgorithm` sa týka tlačidla *WINDING NUMBER / RAY*, ktoré zabezpečuje prepínanie medzi algoritmami *Winding Number Algorithm* a *Ray Crossing Method* a odkazuje na metódu `switchMethod`. Obsahuje podmienku, ktorá testuje *True/False* hodnotu premennej, podľa ktorej určí, ktorý algoritmus má byť použitý na analýzu.

   Metóda `analyze` odkazuje na metódu `getQ`, čím si preberá súradnice analyzovaného bodu a zapisuje ich do premennej. K tomu istému dochádza za pomoci metódy `getPolygon` s tým, že sa predáva list, ktorý obsahuje všetky polygóny vstupných dát vo formáte `QPolygon`. Následne vyvoláva triedu `Algorithms`.
   V jej ďalšej časti sú inicializované pomocné premenné pre uloženie výsledkov.
   Následne sa iteruje cez každý element listu polygónov a aplikuje sa jeden z algoritmov, pričom sa prihliada (formou podmienky), ktorý algoritmus je zvolený. V poslednom kroku prekresluje zobrazovaciu plochu.

2. Trieda `Draw`:
   Je zodpovedná za grafickú stránku aplikácie a zobrazovacej plochy. Trieda obsahuje inicializátor a sedem metód:

   `Inicializátor` má dva pozičné argumenty a inicializuje premenné pre túto triedu. Konkrétne sa jedná o inicializáciu analyzovaného bodu, ktorý je dátového typu `QPoint`. Inicializovaný je aj prázdny list polygónov a takisto aj prázdny list výsledkov, do ktorého sa pri každej iterácií z metódy `analyze` ukladajú výsledky pre každý jeden polygón.

Inicializované sú aj premenné zodpovedné za prepínanie medzi jednotlivými algoritmami a zapínaním / vypínaním módu kreslenia bodu.

Metóda `setPath` má dva argumenty a to šírku a výšku zobrazovacej plochy aplikácie. Do premennej ukladá cestu k SHP súboru, ktorý predstavuje vstupné dáta, ktorý užívateľ vyberie z pop-up okna. Na prečítanie SHP súboru sa využíva externý modul `pyshp`.
V ďalšom kroku extrahuje súradnice zo SHP súboru a to tak, aby sa zachovala informácia, ktoré súradnice (vrcholy) tvoria ktorý polygón.
Z dôvodu rozličného súradnicového systému vstupných dát a zobrazovacej plochy aplikácie vstupné dáta navyše preškálováva. V prvom rade je bod najbližší počiatku súradnicového systému zobrazovacej plochy presunutý do jeho počiatku. Následne sa vykoná normalizácia do intervalu $< 0, 1 >$ a hodnoty sú vynásobené šírkou a výškou zobrazovacej plochy. Navyše Y súradnice preklápa cez osu X.
Metóda vracia list polygónov.

Metóda `mousePressEvent` s argumentom, ktorý predstavuje kliknutie myšou v prvom kroku zapisuje súradnice miesta, kde sa vykonalo kliknutie myšou. Za podmienky aktivovaného módu kreslenia analyzovaného bodu zapisuje súradnice miesta kliknutia myšou ako súradnice analyzovaného bodu. Následne dochádza k prekresleniu zobrazovacej plochy.

Metóda `paintEvent` má argument `QPaintEvent` z modulu `QtGui`. Dochádza tu ku začiatku vizualizácie na zobrazovacej ploche. Vykresluje sa každý polygón a pokiaľ je splnená podmienka, že list výsledkov nie je prázdny a zároveň pre aktuálny polygón iterácie je výsledkom hodnota 1, tak sa mení sfarbenie daného polygónu, ktoré značí príslušnosť analyzovaného bodu tomuto polygónu. Metóda je zodpovedná aj za vizualizáciu analyzovaného bodu, ktorý zobrazuje ako elipsu.
Poznámka: Hodnotu 1 do listu výsledkov pre daný polygón vracajú metódy algoritmov a to v prípade, ak analyzovaný bod leží v danom polygóne, alebo leží na jeho hrane.

Metódy `setSource` a `switchMethod` negujú premenné, ktoré sú zodpovedné za prepínanie medzi jednotlivými algoritmami a zapínaním / vypínaním módu kreslenia analyzovaného bodu.

Metódy `getQ` a `getPolygon` vracajú analyzovaný bod a list polygónov.

3. Trieda `Algorithms`:
   Trieda obsahuje matematické metódy, pomocou ktorých sú realizované jednotlivé algoritmy analýzy, ktoré sú taktiež zapísané v tejto triede.

Metóda `getPointAndLinePosititon` má na vstupe tri argumenty, všetky predstavujú body v dátovom type `QPoint`. Slúži na určenie polohy analyzovaného bodu a priamky.
V prvom kroku je definovaná prijateľná odchýlka `epsilon`, nasleduje výpočet zložiek dvoch vektorov a výpočet vektorového súčinu pomoocu determinantu a testovanie podmienok, do ktorých vstupuje hodnota determinantu a podľa ktorej sa určí pozícia bodu voči priamke.
Metóda vracia hodnotu 1 ak je bod v ľavej polrovine, hodnotu 0 ak je bod v pravej polrovine, v prípade kolinearity vráti hodnotu -1.

Metóda `get2LinesAngle` má na vstupe štyri body, opäť všetky v dátovom type `QPoint`. Slúži na výpočet uhlu dvoch priamok. Opäť sú spočítané dva vektory, ich skalárny súčin a ich norma.
Figuruje v nej podmienka, ktorá rieši singularitu analyzovaného bodu na vrchole polygónu, a to na základe nulovej hodnoty jednej z noriem vektorov. Metóda v tomto prípade vracia hodnotu 0.
Druhá podmienka slúži na vyhnutie sa prípadu, kedy arccos uhlu dvoch priamok sa počíta z hodnoty, ktorá je väčšia ako 1. V takomto prípade metóda vracia výslednú hodnotu z $|\arccos(1)|$.
Mimo spomenutých prípadov funkcia vracia hodnotu uhlu dvoch priamok v kladných hodnotách.

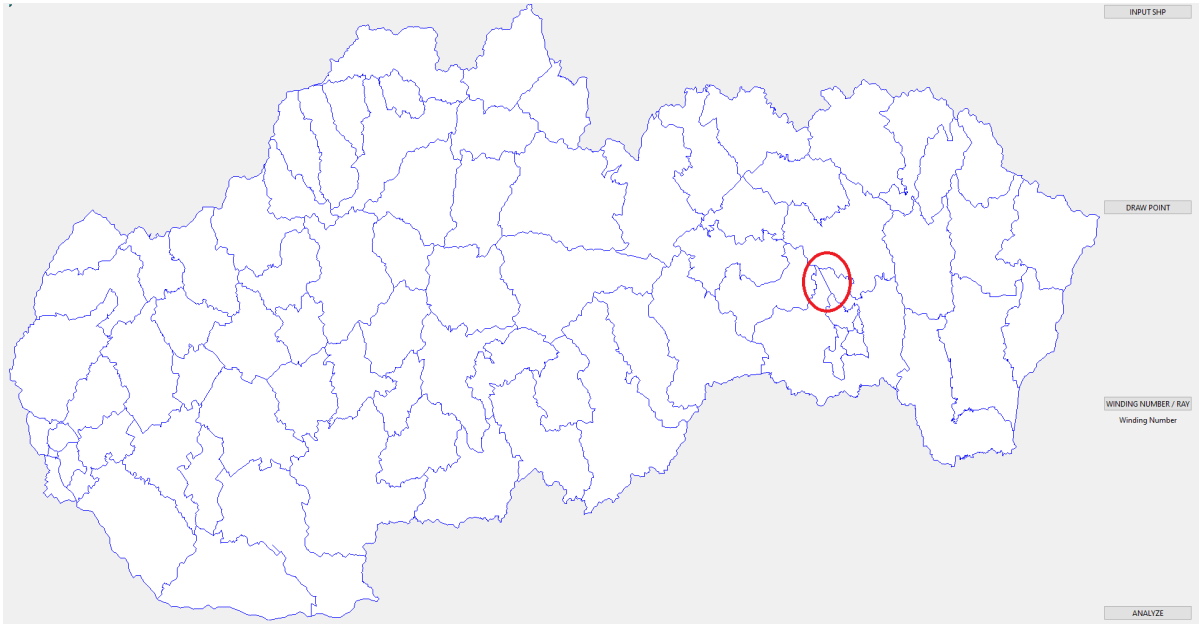
Metóda `windingNumber` má dva vstupné argumenty a to analyzovaný bod dátového typu `QPoint` a vstupné dáta (polygóny) v dátovým type `QPolygon`. Je v nej implementovaný *Winding Number Algorithm*, ktorý je detailne popísaný v kapitole 2.1.
Metóda vracia hodnotu 1 ak určovaný bod patrí do polygónu, alebo leží na hrane polygónu. Hodnotu 0 ak leží mimo polygónu.

Metóda `reducedRayCrossing` má dva vstupné argumenty a to určovaný bod dátového typu `QPoint` a vstupné dáta (polygóny) v dátovým type `QPolygon`. Je v nej implementovaný *Ray Crossing Method*, ktorý je detailne popísaný v kapitole 2.2.
Metóda vracia hodnotu 1 ak určovaný bod patrí do polygónu, alebo leží na hrane polygónu. Hodnotu 0 ak leží mimo polygónu.

5 Záver

Vytvorená aplikácia a program rieši úspešne vzťah bodu k polygonu. V rámci oboch algoritmov sa podarilo ošetriť singularity – pokiaľ sa bod nachádza na hrane alebo vo vrchole polygonu.

Problémom aplikácie je správne prečítanie polygonovej vrsty v prípade, ak obsahuje menší polygon v polygone (napr. prípad enkláv). V takomto prípade vzniká úsečka medzi posledným bodom prvého polygonu a prvým bodom nasledujúceho polygonu enklávy (pozri Obr. 7). Táto úsečka negatívne ovplyvňuje výsledky analýz a to pre oba algoritmy.



Obr. 7: Zvýraznená chyba spôsobená prečítaním shapefilu, zdroj: autor.

Čo sa týka preškálovania vstupných dát kvôli ich vizualizácii, tak dochádza k jemnej deformácii tvaru územia a to kvôli roztiahnutiu polygonu v oboch smeroch do maximálneho možného intervalu.

6 Použité zdroje

Prednášky z predmetu *Algoritmy počítačové kartografie*.

DE BERG, M. et al. 2008: Computational Geometry. Berlin : Springer. ISBN 978-3-540-77973-5.

HAINES, E. 1994: Point in Polygon Strategies. In: HECKBERT, P. S. (1994): Graphics Gems IV. Academic Press. ISBN 978-0-12-336156-1.

HORRMAN, K., AGATHOS, A. 2001: The point in polygon problem for arbitrary polygons. Computational Geometry, 20, 3, s. 131 - 144.

HUANG, H., SHIH, T. 1997: ON THE COMPLEXITY OF POINT-IN-POLYGON ALGORITHMS. Computers & Geoscience, 23, 1, s. 109 - 118.

KUMAR, G. N., BANGI, M. 2018: An Extension to Winding Number and Point-in-Polygon Algorithm. IFAC-PapersOnLine, 51, 1, s. 548 - 553.

OVERMARS M. H. 1992: Point location in fat subdivisions. Information Processing Letters, 44, s. 261 - 265.

SNOEYINK, J. 2017: Point location. In: GOODMAN J. E. et al. (2017): Handbook of Discrete and Computational Geometry. New York (NY) : Chapman and Hall/CRC. ISBN 9781315119601.

SUNDAY, D. 2021: Practical Geometry Algorithms. ISBN 979-8749449730.