V207

Kugelfallviskosimeter

Robin Pelkner
robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser
joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 20.11.2018 Abgabe: 27.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung **3**

2 Theorie **3**

3 Durchführung **4**

4 Fehlerrechnung **5**

5 Auswertung **6**

6 Diskussion **10**

Literatur **10**

1 Zielsetzung

Die Apperaturkonstante des verwendeten Viskosimeters mit zwei unterschiedlichen Kugeln wird mithilfe von diesem Versuch bestimmt. Des Weiteren wird die Reynoldszahl bestimmt, um so zu festzustellen, ob die Flüssigkeit laminares Verhalten hat. Die Viskosität der Flüssigkeit wird weiterhin auf Temperaturabhängigkeit untersucht.

2 Theorie

Auf einen bewegten Körper wirken in einer Flüssigkeit diverse Kräfte. Es wirkt die aus der Gravitation resultierende Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$. Diese wirkt senkrecht Richtung Boden. Antiparallel zu dieser wird die Auftriebskraft $\boldsymbol{F}_A$. Diese verhält sich proportional zu dem Volumen der verdrängten Flüssigkeit. Des Weiteren wirkt die Reibungskraft $\boldsymbol{F}_R$, welche entgegen der Bewegungsrichtung wirkt. Ist die Strömung in der Flüssigkeit laminar, das heißt, es bilden sich keine Wirbel und Turbulenzen, so gilt die Reibung nach Stokes:

$$\boldsymbol{F}_R = 6\pi\eta v r. \tag{1}$$

Dabei ist η die Viskosität der Flüssigkeit, v die Geschwindigkeit mit der sich ein Körper relativ zu der Flüssigkeit bewegt und r ist der Radius der hier genutzten Kugel. Es wird sich hier vorgestellt, dass die Flüssigkeit aus verschiedenen Schichten besteht, die aneinander reiben. Die Reibungskraft steigt mit der Geschwindigkeit, daher bildet sich ab einer gewissen Geschwindigkeit ein Kräftegleichgewicht, sodass diese konstant bleibt.

Um zu bestimmen, ob eine Flüssigkeit laminare Eigenschaften zeigt, wird die Reynoldszahl Re genutzt. Diese ist durch

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \tag{2}$$

definiert. Dabei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit und d der Durchmesser des Rohres. Die in dieser Gleichung ebenfalls vorkommende Viskosität η ist stark von der Temperatur abhängig, was die sogenannte Adradesche Gleichung

$$\eta(T) = A \cdot \mathrm{e}^{\frac{B}{T}} \tag{3}$$

zeigt. Dabei sind A und B Konstanten, die im Laufe des Versuchs bestimmt werden. Ist die resultierende Reynoldszahl kleiner als ein bestimmter Wert, so handelt es sich um eine laminare Strömung und es kann die oben genannte Reibung nach Stokes verwendet werden. Sollte sie jedoch größer als besagter Wert sein, wird von einer sogenannten turbulenten Strömung gesprochen.

Das Viskosimeter ist ein wenig geneigt, damit die Kugeln an einer Seite gleichmäßig hinabgleitet. Dies verhindert Turbulenzen, die durch ein Wackeln der Kugeln enstehen könnten. Die Viskosität der Flüssigkeit lässt sich dann wie mit

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{\mathrm{Fl}})t \tag{4}$$

bestimmen, wobei ρ_K und ρ_{Fl} jeweils die Dichten von der Kugel und der Flüssigkeit sind, t die Fallzeit und K ein Proportionalitätsfaktor ist, der abhängig sowohl von der Fallhöhe als auch von der Geometrie der Kugeln ist.

3 Durchführung

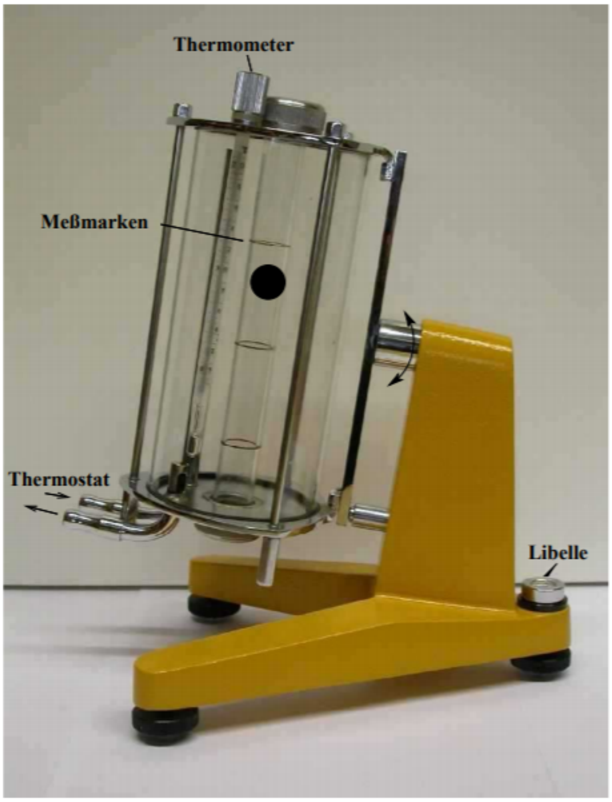

Abbildung 1: Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler. [1, S. 2]

Zunächst werden die Durchmesser und Massen der beiden Probekugeln gemessen. Die Kugeln selbst haben ungefähr dieselbe Größe wie das Rohr im Viskosimeter.

Das Viskosimeter wird gerade aufgestellt, dies wird mithilfe der eingebauten Libelle erreicht.

In Abbildung 1 ist ein Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler zu sehen. In das Glasrohr in der Mitte wird destilliertes Wasser gefüllt. Um dieses herum, befindet sich ein Behälter mir Wasser, das im Laufe des Experimentes erhitzt wird, um so indirekt auch die Temperatur von dem destilliertem Wasser zu erhöhen. Während des gesamten Versuches ist darauf zu achten, dass sich keine Luftblasen im destillierten Wasser befinden, da sie zusätzlichen Auftrieb erzeugen würden und so die Messung verfälschen.

Es wird zunächst die kleinere Kugel in das Rohr gegeben. Anschließend wird das Rohr verschlossen und das System gedreht, sodass die Kugel im Wasser heruntersinkt. Es wird angenommen, dass die Kugel ab der ersten Makierung eine konstante Geschwindigkeit erreicht hat und ab dieser wird die Zeit gemessen, die die Kugel benötigt, um die unterste Makierung zu erreichen. Die unterste und die oberste Makierung sind 100mm von einander entfernt. Diese Messung wird insgesamt zehn mal wiederholt und anschließend wiederum zehn mal mit der größeren Kugel durchgeführt.

Die nächste Messreihe beschäftigt sich mit der Tempreaturabhängigkeit der Viskosität. Mithilfe eines Thermostates kann das Wasser im Viskosimeter erhitzt werden. Die jeweilige Temperatur wird mit einem Thermometer aufgenommen. Die oben beschriebene Messung wird bei insgesamt zehn verschiedenen Temperaturen erneut durchgeführt. Dabei werden zu jeder Temperatur die Fallzeiten je zwei mal gemessen. Während die Temperatur steigt, wird die Entlüftungsschraube am Viskosimeter gelockert, sodass der Druck im Inneren des Rohres nicht zu groß wird. Diese Messreihe wird bis zu einer Temperatur von 70°C durchgeführt.

4 Fehlerrechnung

Wenn fehlerhafte Größen in Rechnungen verwendet werden, so muss der neue Fehler mittels der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet werden. Der neue Fehler ist dann

$$\varDelta f = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\varDelta x_i)^2}, \tag{5}$$

wobei f die zu errechnende Größe bezeichnte und die x_i die fehlerbehaften Größen, von denen f abhängt. Wenn Mittelwerte zu bestimmen sind, errechnen sich diese durch

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{6}$$

Der zum Mittelwert gehörige Fehler ist

$$\varDelta \overline{x} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot (N-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}. \tag{7}$$

Lineare Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b. \tag{8}$$

Die dazugehörigen Parameter a und b sind mittels

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \tag{9}$$

und

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} \tag{10}$$

zu berechnen.

5 Auswertung

Zur Bestimmung der Dichte der beiden Kugeln sind die Masse und das Volumen beider Kugeln benötigt. Diese sind in Tabelle 1 zu sehen, wobei die Werte für die große Kugel gemessen sind, die Werte der kleinen Kugel jedoch in der Anleitung [1] vorgegeben sind. Die Dichte bestimmt sich dann über die Relation

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{11}$$

Somit ergeben sich die Dichten der beiden Kugeln

Tabelle 1: Geometrische Daten der beiden Kugeln

Kleine Kugel			Große Kugel		
m / g	d / mm	V/m^3	m / g	d / mm	V/m^3
4.4531	15.634	$2.00 \cdot 10^{-6}$	4.9528	15.805	$2.07 \cdot 10^{-6}$

$$\rho_{\text{kl}} = 2225.63 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$
$$\rho_{\text{gr}} = 2395.90 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Des Weiteren ist die Dichte von destilliertem Wasser, also die in der Versuchsreihe genutzte Flüssigkeit, bei Raumtemperatur (20°C) [4]

$$\rho_{\text{Fl}} = 998.20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad .$$

Zur Bestimmung der Proportionalitätskonstanten K wird zunächst über die Fallzeiten, aufgelistet in Tabelle 2, der beiden Kugeln gemittelt, unter Verwendung von

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i. \tag{12}$$

für den Mittelwert der Fallzeitden, wobei t_i die verwendeten Zeiten sind, und

$$\Delta \bar{t} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot (N-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (t_i - \bar{t})^2}. \tag{13}$$

zur Berechnung des Fehlers des Mittelwertes von t. In beiden Rechnungen ist $N = 10$ die Anzahl der berücksichtigten Fallzeiten. So ergeben sich folgende gemittelte Zeiten:

$$t_{\text{kl}} = (11.67 \pm 0.04)\text{s}$$
$$t_{\text{gr}} = (76.59 \pm 0.08)\text{s}$$

.

Zudem ist zur Berechnung ebenfalls noch die Viskosität η benötigt. Zu dessen Be-

Tabelle 2: Fallzeiten beider Kugeln bei 20°C

t_k / s	t_g / s
11.83	76.91
11.69	76.07
11.61	76.59
11.69	76.43
11.63	76.49
11.57	76.92
11.49	76.57
11.84	76.69
11.50	76.62
11.82	76.59

stimmung werden die aus der Anleitung [1] gegebenen Angaben zur Aparatekonstante K der kleinen Kugel verwendet:

$$K_{\mathrm{kl}} = 0.07640 \frac{\mathrm{mPa\,cm^3}}{\mathrm{g}}$$

Unter Verwendung von Gleichung (4) und den Werten für die kleine Kugel aus Tabelle 1, ergibt sich die Viskosität zu

$$\eta = (1.094 \pm 0.004) mPa\, s,$$

wobei sich der Fehler mittels Gleichung (5), der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung, erechnet und somit

$$\Delta\eta = \sqrt{(K(\rho_{\mathrm{kl}} - \rho_{\mathrm{Fl}}))^2 \cdot (\Delta t_{\mathrm{kl}})^2} \tag{14}$$

ist. Mithilfe der Viskosität lässt sich nun die Proportionalitätskonstante K für die große Kugel erechnen, in dem die Gleichung (4) umgestellt wird. Somit gilt:

$$K_{\mathrm{gr}} = \frac{\eta}{(\rho_{\mathrm{gr}} - \rho_{\mathrm{Fl}})t_{\mathrm{gr}}} = (1.022 \pm 0.004) \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{mPa\,m^3}}{kg}, \tag{15}$$

wobei sich auch hier der Fehler wieder mittels Gleichung (5) zu

$$\Delta K_{\mathrm{gr}} = \sqrt{\left(\frac{1}{(\rho_{\mathrm{gr}} - \rho_{\mathrm{Fl}})t_{\mathrm{gr}}}\right)^2 \cdot (\Delta\eta)^2 + \left(\frac{\eta}{(\rho_{\mathrm{gr}} - \rho_{\mathrm{Fl}}})\right)^2 \cdot (\Delta t_{\mathrm{gr}})^2}$$

erechnet.

Zur Berechnung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität wird die zuvor durchgeführte Rechnung zur Bestimmung der Viskosität für alle Messungen wiederholt, hierzu wird die zuvor berechnete Proportionalitätskonstante K_{gr} und die Dichte der Kugel ρ_{gr} verwendet. Die verwendeten Dichten des destillierten Wassers ρ_{Fl} enstammen der Literatur [4]. Die verwendeten und erechneten Werte finden sich in Tabelle 3. Zur temperaturabhängigen Bestimmung der Viskosität werden die erechneten Viskositäten logarithmisch gegen den Kehrwert der Temperaturen aufgetragen, wie in Abbildung 2 zu sehen. Die Werte hierzu finden sich in Tabelle 4. Nach Gleichung (3) (Andradeschen Gleichung) wird eine lineare Ausgleichsrechung der Form

$$\ln(\eta) = \ln(A) + B \cdot \tfrac{1}{T},$$

wobei A und B Konstanten sind. Die Konstanten A und B sind damit:

$$\begin{aligned} A &= (-12.56 \pm 0.08) \\ B &= (1722 \pm 26) \end{aligned} \quad .$$

Zur Beurteilung, ob die Strömung in dem Viskosimeter tatsächlich laminar ist, wird

Tabelle 3: Messdaten und erechnete Werte zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität.

T / K	t / s	ρ_{Fl} / $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	η / 10^{-3}Pa s
295.15	76.62	997.77	$1{,}222 \pm 0{,}004$
295.15	76.59	997.77	$1{,}221 \pm 0{,}004$
304.15	63.00	995.34	$1{,}006 \pm 0{,}004$
304.15	62.71	995.34	$1{,}002 \pm 0{,}004$
307.15	59.14	994.37	$0{,}945 \pm 0{,}003$
307.15	59.58	994.37	$0{,}952 \pm 0{,}003$
312.15	54.88	992.59	$0{,}878 \pm 0{,}003$
312.15	54.91	992.59	$0{,}878 \pm 0{,}003$
316.15	51.14	991.03	$0{,}819 \pm 0{,}003$
316.15	50.10	991.03	$0{,}802 \pm 0{,}002$
320.15	47.96	989.36	$0{,}769 \pm 0{,}002$
320.15	47.09	998.36	$0{,}751 \pm 0{,}002$
324.15	44.73	987.58	$0{,}718 \pm 0{,}002$
324.15	44.32	987.58	$0{,}711 \pm 0{,}002$
329.15	40.15	985.20	$0{,}645 \pm 0{,}002$
329.15	40.65	985.20	$0{,}653 \pm 0{,}002$
334.15	38.52	982.15	$0{,}620 \pm 0{,}002$
334.15	38.64	982.15	$0{,}622 \pm 0{,}002$

die Reynoldszahl nach Gleichung (2) bestimmt. Hierbei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit,

Tabelle 4: Zum Erstellen der Ausgleichsgerade verwendete Werte.

$\ln(\eta)$	$\frac{1}{T}$ / $10^{-3}K^{-1}$
−6,706	3,388
−6,707	3,388
−6,901	3,287
−6,905	3,287
−6,963	3,255
−6,956	3,255
−7,037	3,203
−7,036	3,203
−7,106	3,163
−7,127	3,163
−7,170	3,123
−7,194	3,123
−7,238	3,084
−7,247	3,084
−7,345	3,038
−7,332	3,038
−7,384	2,992
−7,381	2,992

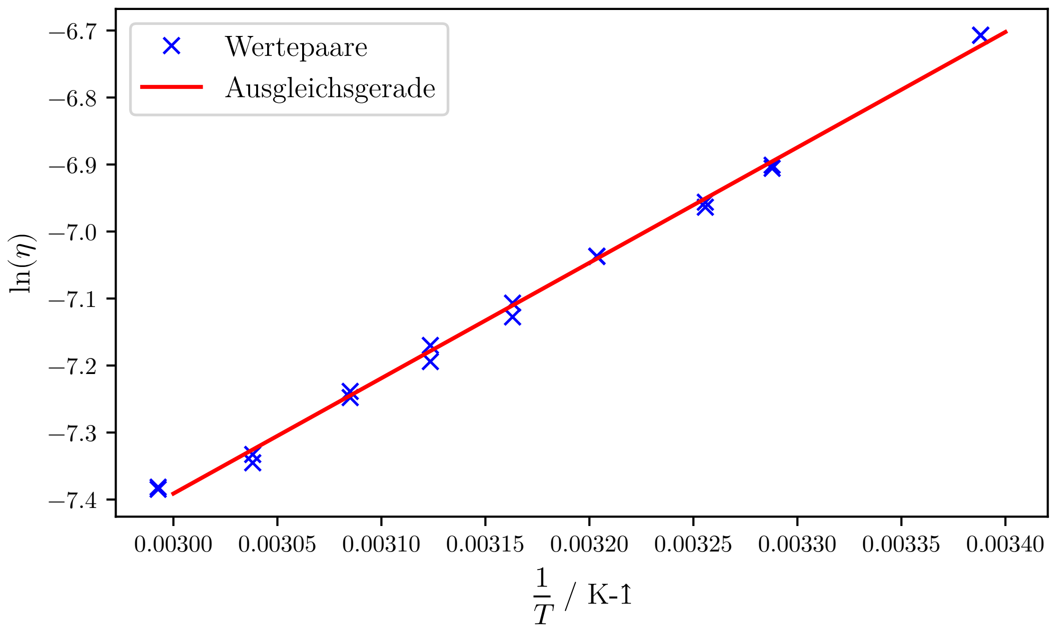

Abbildung 2: Ausgleichsgerade zur Bestimmung der Konstanten der Andradeschen Gleichung.

$v = \frac{x}{t}$ die Geschwindigkeit der Kugel mit der Fallstrecke $x = 0.1\mathrm{m}$ und der Fallzeit t, sowie der Viskosität η und $d = 2 \cdot r$ der Durchmesser der Kugel. Somit ergibt sich die Reynoldszahl zu

$$Re = \frac{\rho_{\mathrm{Fl}} 2rx}{t\eta} \tag{16}$$

und es wird deutlich, dass für die Berechnung eines Maximums der Reynoldszahl der Wert aus Tabelle 3, welcher die geringste Viskosität und geringste Fallzeit aufweist. Somit ergibt sich für die Reynoldszahl:

$$Re = 63.53 \pm 0.2.$$

Der Fehler der Reynoldszahl erechent sich mittels Gleichung (5) zu

$$\mathit{\Delta} Re = \sqrt{\left(-\frac{\rho v d}{\eta^2}\right)^2 \cdot \eta^2}. \tag{17}$$

6 Diskussion

Der berechnete Proportionalitätsfaktor K_{gr} liegt in der selben Größenordnung vor, wie der Faktor K_{kl}, weshalb davon auszugehen ist, dass der erechnete Wert innerhalb der Messgenauigkeit liegt. Des Weiteren ist der Fehler der Proportionalitätskonstante niedrig (ca. 0.4% Abweichung), was auf eine präzise Messung schließen lässt, welche unter anderem durch die hohe Anzahl an Messungen zustande kommt. Dennoch ist davon auszugehen, dass weder der Wert der Konstante K noch die Viskosität η genau ist, da es unmöglich ist, einerseits die Apparatur vollständig von Luftbläschen zu befreien, welche für eine erhöhte Reibung sorgen und so die Ergebnisse verfälscht, andererseits ist es die begrenzte menschliche Genauigkeit bei der Messung der Zeit. Dies erklärt auch die Abweichung der erechneten Viskosität um ca. 17 % vom Literaturwert ($\eta = 1.0087\,\mathrm{Pa\,s}$) [2], welche aber dennoch im Bereich der Messgenauigkeit liegt. Die Luftbläschen waren besonders bei der Messung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität hinderlich, weshalb der Versuch bereits nach neun Messungen abgebrochen werden musste. Die Konstanten der Andradeschen Gleichung sind aber aufgrund der vergleichsweisen geringen statistischen Fehler als richtig anzusehen. Wie ebenfalls zu erwarten, verhält sich die Strömung in der Apparatur tatsächlich laminar, was durch die die Reynoldszahl belegt wird. Diese liegt nämlich deutlich unter dem kritischen Wert von 2300 [3]. Somit sind auch alle Annahmen, die eine laminare Strömung zugrunde legen, als richtig anzusehen.

Literatur

[1] TU Dortmund. *V207: Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. 2018.

[2] Bürkle GmbH. *Viskosität von Flüssigkeiten*. 2011. URL: `www.rotek.at/produkte/pdf-aktuell/%C3%9Cbersicht%20Viskosit%C3%A4t%20diverser%20Stoffe.pdf`.

[3] Wenger Engineering GmbH. *Reynoldszahl*. 2018. URL: www.simulations-plattform.de/dimensionslose-kennzahlen/reynoldszahl.

[4] Steffen Thomas. *Dichte von Wasser*. 2018. URL: wissen.science-and-fun.de/tabellen-zur-chemie/dichtetabellen/dichte-von-wasser/.