V103

Biegung elastischer Stäbe

Robin Pelkner
robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser
joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.12.2018 Abgabe: 11.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung **3**

2 Theorie **3**

2.1 Einseitige Einspannung 3

2.2 Beidseitige Einspannung 4

3 Durchführung **5**

4 Auswertung **6**

4.1 Bestimmung der Flächenträgheitsmomente 6

4.2 Bestimmung der Elastizitätsmodule 7

5 Diskussion **13**

Literatur **13**

1 Zielsetzung

Es soll das Elastizitätsmodul verschiedener elastischer Stäbe untersucht werden und diese anschließend mit Literaturwerten verglichen werden, um so das Metall zu bestimmen.

2 Theorie

Das Elastizitätsmodul E beschreibt die Deformation eines Körpers unter der Einwirkung einer Normalspannung σ. Als Normalspannung wird dabei eine Kraft bezeichnet, welche senkrecht auf der Oberfläche steht. Über das Hook'sche Gesetz lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Normalspannung σ und der Deformation $\frac{\delta L}{L}$ herstellen:

$$\sigma = E\frac{\delta L}{L}. \tag{1}$$

Das Elastizitätsmodul eines elastischen Stabes kann durch Einspannen an einem beziehungsweise beiden Enden bestimmt werden.

2.1 Einseitige Einspannung

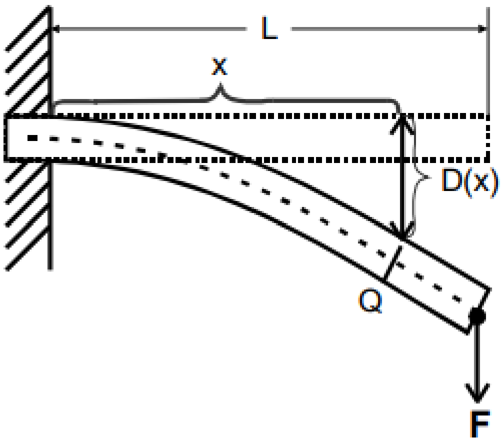


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Durchbiegung eines elastisches Stabes bei einseitiger Einspannung. [4, S. 107]

Beim einseitigen Einspannen, wie in Abbildung 1 zu sehen, wird die Auslenkung $D(x)$ in Abhängigkeit von der Position x am Stab gemessen. Durch Einwirken einer Kraft F am Stab, entstehen zwei Drehmomente. Das äußere Drehmoment M_F ist abhängig von der Kraft F und dem Hebearm am Punkt x und ist daher

$$M_F = F(L - x). \tag{2}$$

Dieses muss entgegengesetzt gleich zum inneren Drehmoment M_σ, damit sich eine endliche Auslenkung $D(x)$ einstellt. Das innere Drehmoment ist definiert über den Abstand y

zwischen der neutralen Faser (die gestrichelte Linie in Abbildung 1), also die Fläche in der keine Spannungen auftreten, somit die Länge der Faser gleichbleibt, und dem Flächenelement dQ, sowie der angelegten Normalspannung σ. Durch Integration über die gesamte Querschnittsfläche Q ergibt sich für das innere Drehmoment:

$$M_\sigma = \int_Q y\,\sigma(y)\,\mathrm{d}Q. \tag{3}$$

Eine Deformation stellt sich dann ein, wenn beide Drehmomente übereinstimmen, so dass sich beide Drehmomente gleichsetzen lassen. Über das Hook'sche Gesetz, Gleichung (1), und einiger differentialgeometrischer Zusammenhänge lässt sich die Normalspannung für eine Änderung der Länge des Stabes Δx erechnen, zu:

$$\sigma(y) = Ey\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}. \tag{4}$$

Hiermit ergibt sich für die gleichgesetzen Drehmomente der Zusammenhang

$$E\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}\int_Q y^2\,\mathrm{d}q = F(L-x), \tag{5}$$

wobei D die Durchbiegung des Stabes ist. Mithilfe der Definition für das Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2\,\mathrm{d}q \tag{6}$$

und zweimaliger Integration nach x ergibt sich die Durchbiegung für $0 \leq x \leq L$ zu

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{1}{3}x^3). \tag{7}$$

2.2 Beidseitige Einspannung

Beim beidseitigem Einspannen eines elastischen Stabes, wie in Abbildung 4 zu sehen, wird das Gewicht in die Mitte des Stabes gehängt, wodurch sich die Kraft auf beide Häften des Stabes gleichmäßig verteilt. Somit gilt für die linke Hälfte ($0 \leq x \leq \frac{L}{2}$)

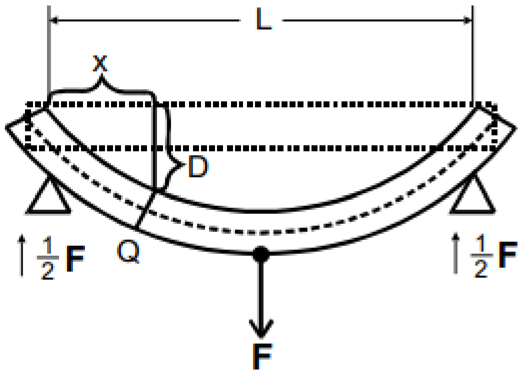
$$M_{\mathrm{F1}} = -\frac{Fx}{2} \tag{8}$$

und für die rechte Hälfte ($\frac{L}{2} \leq x \leq L$)

$$M_{\mathrm{F2}} = -\frac{F}{2}(L-x). \tag{9}$$

Hieraus ließen sich wie zuvor bei der einseitigen Einspannung die Durchbiegungen D erechnen. Hinzu kommt allerdings die Bedingung, dass die Biegekurve in der Mitte eine horizontale Tangente haben soll, sodass

$$C_1 = \frac{FL^2}{16EI} \tag{10}$$



«««< HEAD

Abbildung 2: Schematische Darstellung der Durchbiegung eines elastischen Stabes bei zweiseitiger Auflage. [5]

||||||| merged common ancestors

Abbildung 3: Schematische Darstellung der Durchbiegung eines elastischen Stabes bei zweiseitiger Auflage. [**V103**]

=======

Abbildung 4: Schematische Darstellung der Durchbiegung eines elastischen Stabes bei zweiseitiger Auflage. [4, S. 110]

»»»> ups

und

$$C_2 = \frac{3FL^2}{16EI}, \tag{11}$$

womit sich die Durchbiegungen wie schon bei der einseitigen Einspannung ergeben, zu

$$D_1(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \tag{12}$$

für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ und für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$

$$D_2(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3). \tag{13}$$

3 Durchführung

Die Biegung verschiedener elastischer Stäbe wird mit der Apparatur, welche in Abbildung 5 zu sehen ist, gemessen. Insgesamt werden hiermit die Durchbiegungen dreier Stäbe bestimmt; von einem eckigen und einem runden Stab durch einseitige Einspannung und einem eckigen Stab durch beidseitige Einhängung. Von allen Stäben werden die geometrischen Eigenschaften bestimmt. Das Gewicht der anzuhängenden Gewichte ist ebenfalls zu bestimmen.

Bei der einseitigen Einspannung wird der Stab an der Vorrichtung C aus Abbildung 5 eingespannt. Anschließend wird eine Nullmessung an dem Stab durchgeführt, das heißt

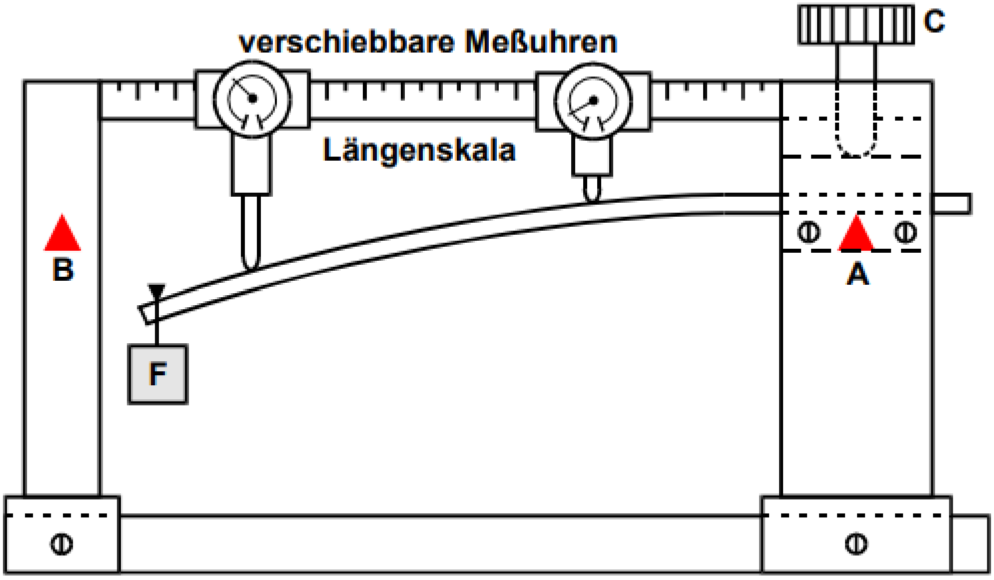


Abbildung 5: Aufbau einer Apparatur zur Bestimmung der Durchbiegung elastischer Stäbe [4, S. 111]

der Stab wird zunächst ohne angehängtes Gewicht mittels einer Messuhr vermessen; anschließend wird die Messung mit angehängtem Gewicht wiederholt. Die einzelnen Messchritte haben in der Nähe der Einspannung einen Abstand von 3 cm und sonst einen Abstand von 2 cm. Insgesamt werden so 22 Messungen je Stab durchgeführt.

Bei der beidseitigen Einspannung liegt der Stab zusätlich an der Befestigung B aus Abbildung 5 auf. Nun werden beide Messuhren verwendet um zunächst wieder eine Nullmessung durchzuführen, wobei jeweils nur bis zur Mitte des Stabes gemessen werden darf. Danach wird in die Mitte des Stabes ein Gewicht gehängt und die Messuhren messen wieder zur Mitte hin die Durchbiegung auf beiden Stabhälften. Die Abstände der Messpunkt sind die gleichen, wie bei der einseitigen Einspannung auch, nur dass beachtet werden muss, dass von beiden Seiten gemessen wird.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Flächenträgheitsmomente

Das Flächenträgheitsmoment des runden Stabes wird mit (6) als

$$I_{\text{sr}} = \frac{\pi \delta_{\text{sr}}^4}{64} = 4,909 \cdot 10^{-10} \text{m}^4$$

bestimmt. Für die beiden eckigen Stäbe ergibt sich

$$I_{\text{se}} = \frac{\delta_{\text{se}}^4}{12} = 8,334 \cdot 10^{-10} \text{m}^4$$

und analog

$$I_{\mathrm{d}} = \frac{\delta_{\mathrm{d}}^4}{12} = 9,759 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}^4.$$

Dabei sind die jeweiligen δ die entsprechend gemessenen Dicken der Stäbe. Diese Werte sind in Tabelle 1 zu finden.

Tabelle 1: Eigenschaften der Stäbe und die jeweils angehängten Massen.

Stab	δ / mm	l / m	m_{Stab} / g	m_{Gewicht} / g
Eckig, zweiseitig (d)	10,4	0,600	167,1	2361,8
Eckig, einseitig (se)	10,0	0,600	502,4	1191,5
Rund, einseitig (sr)	10,0	0,551	121,3	541,8

4.2 Bestimmung der Elastizitätsmodule

Von den jeweils gemessenen Werten für die Durchbiegung des Stabes werden die Werte der jeweiligen Nullmessung subtrahiert, somit werden die Werte für $D(x)$ nach

$$D(x) = D_m(x) - D_{\mathrm{Null}}(x) \tag{14}$$

berechnet. Die Werte für x werden in verschiedene Funktionen überführt, um so eine lineare Ausgleichsrechnung durchführen zu können. Dabei ist die Funktion für den eckigen Stab mit einseitiger Einspannung

$$g_{\mathrm{se}}(x) = l_{\mathrm{se}} \cdot x^2 - \frac{x^3}{3} \tag{15}$$

und für den runden Stab mit ebenfalls einseitger Einspannung

$$g_{\mathrm{sr}}(x) = l_{\mathrm{sr}} \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}. \tag{16}$$

Für den eckigen Stab mit beidseitiger Einspannung wird für die Seite links von dem Gewicht sowie die Seite rechts von dem Gewicht je eine Funktion benötigt. Die Funktion für die linke Seite, also $\frac{l_d}{2} \leq x \leq l_d$, lautet

$$g_{\mathrm{dl}}(x) = 4x^3 - 12l_d \cdot x^2 + 9l_d^2 \cdot x - l_d^3 \tag{17}$$

und der entsprechende für die rechte Seite, also $0 \leq x \leq \frac{l_d}{2}$,lautet

$$g_{\mathrm{dr}}(x) = 3l_d^2 \cdot x - 4x^3. \tag{18}$$

Bei diesen Formeln sind l_d, l_{sr} und l_{se} jeweils die Längen der Stäbe.

Die Werte in Tabelle 4, Tabelle 2 sowie Tabelle 3 werden genutzt um mit den oben genannten Gleichungen eine lineare Ausgleichsrechnung durchzuführen. Die Ergebnisse werden mittels Python 3.7.0 geplottet und mit einem Fit der Form $D(x) = a * g(x) + b$ angenähert. Die dazugehörigen Parameter a und b sind mittels

Tabelle 2: Einseitig eingespannter eckiger Stab.

x / cm	D_{Null} / mm	D_m / mm
3	0,00	0,05
6	−0,02	0,17
9	−0,03	0,34
12	−0,01	0,63
14	0,01	0,86
16	0,03	1,11
18	0,08	1,41
20	0,12	1,71
22	0,18	2,06
24	0,19	2,36
26	0,19	2,69
28	0,20	3,04
30	0,24	3,42
32	0,25	3,83
34	0,25	4,24
36	0,30	4,60
38	0,31	5,00
40	0,33	5,41
42	0,32	5,84
44	0,32	6,24
46	0,32	6,64
48	0,32	7,05

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N}(D(x)_i - \overline{D(x)})(g(x)_i - \overline{g(x)})}{\sum_{i=1}^{N}(D(x)_i - \overline{D(x)})^2} \tag{19}$$

und

$$b = \overline{g(x)} - a \cdot \overline{D(x)} \tag{20}$$

zu berechnen. Die entstehenden Plots sind in Abbildung 6, Abbildung 7 sowie Abbildung 8 und Abbildung 9 zu sehen.

Die Werte für a_i und b_i werden mittels Python 3.7.0 bestimmt und lauten

$$a_{\text{sr}} = (63,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{m}^2}$$
$$b_{\text{sr}} = (1,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

$$a_{\text{se}} = (66,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{m}^2}$$
$$b_{\text{se}} = (1 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

$$a_{\text{dr}} = (6,137 \pm 0,09) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{m}^2}$$

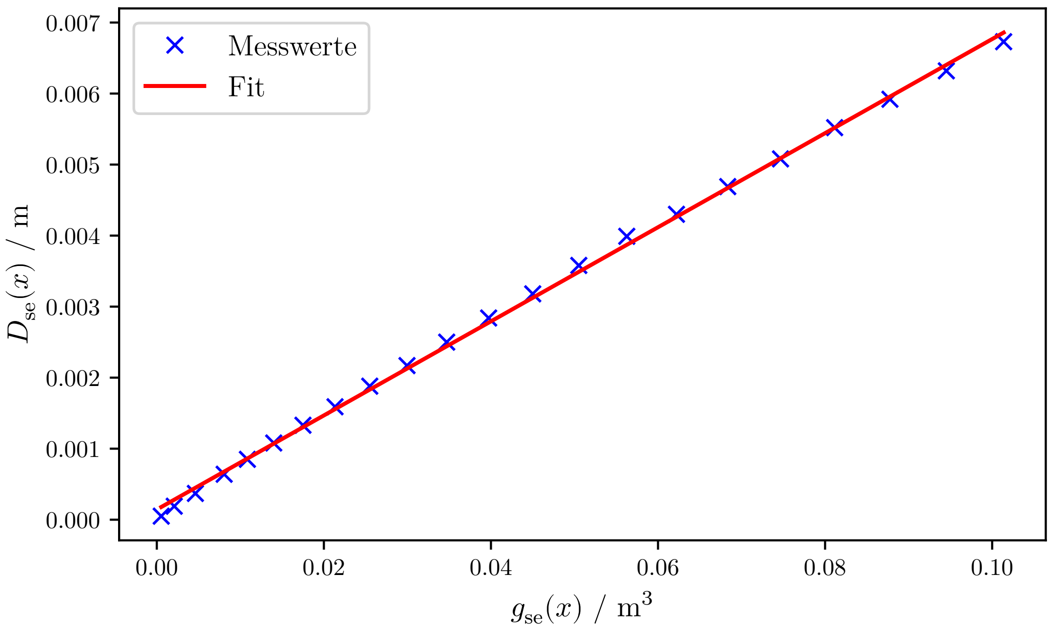


Abbildung 6: Plot der Messwerte von dem einseitig eingespanntem eckigen Stab.

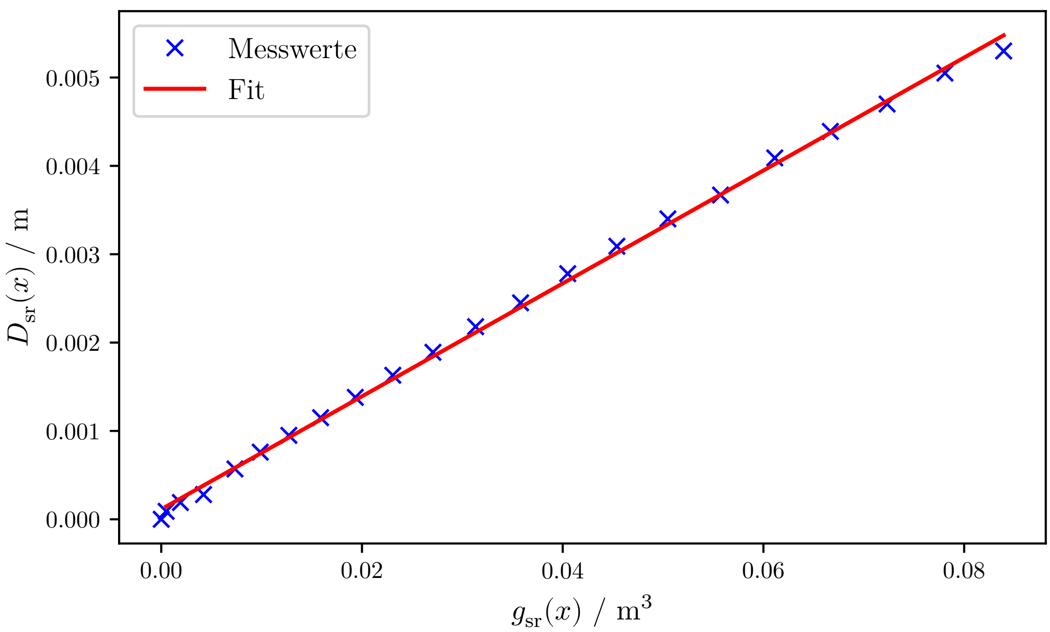


Abbildung 7: Plot der Messwerte von dem einseitig eingespanntem runden Stab.

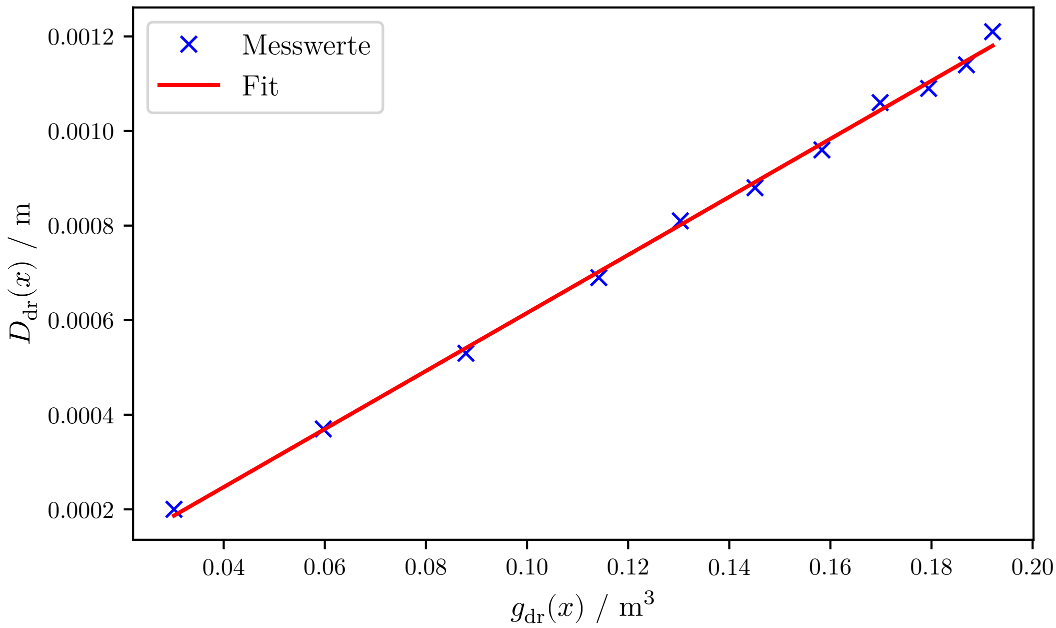


Abbildung 8: Plot der Messwerte rechts von dem Gewicht von dem zweiseitig eingespanntem eckigen Stab.

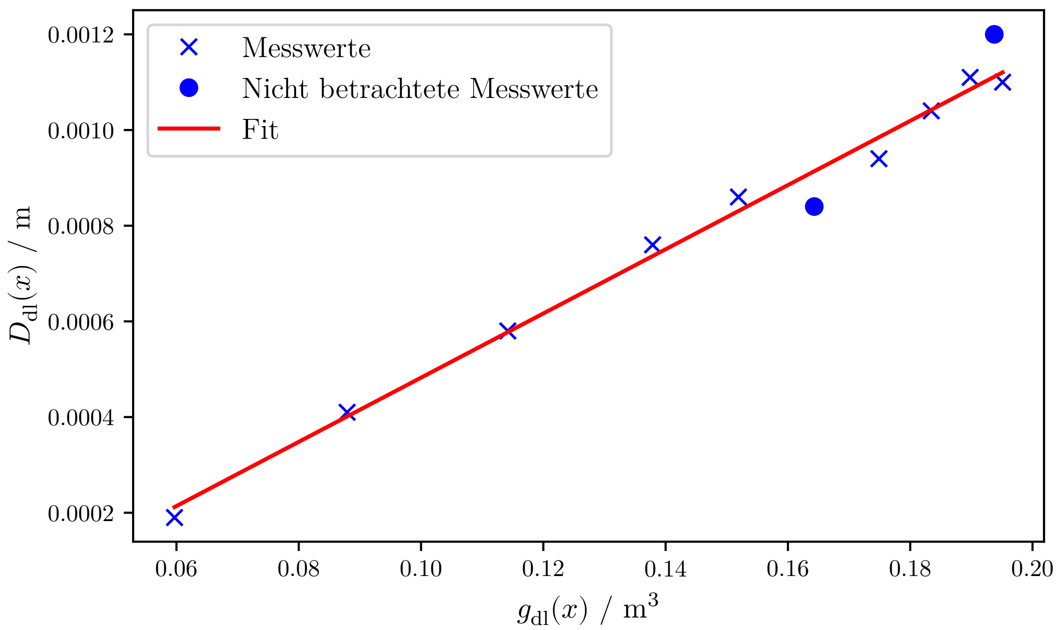


Abbildung 9: Plot der Messwerte links von dem Gewicht von dem zweiseitig eingespanntem eckigen Stab groß.

Tabelle 3: Einseitig eingespannter runder Stab.

x / cm	D_{Null} / mm	D_m / mm
3	0,00	0,09
6	−0,05	0,14
9	−0,07	0,21
12	−0,06	0,51
14	−0,01	0,75
16	0,05	1,00
18	0,13	1,28
20	0,22	1,60
22	0,32	1,95
24	0,42	2,31
26	0,52	2,70
28	0,65	3,10
30	0,75	3,53
32	0,87	3,96
34	0,99	4,39
36	1,19	4,86
38	1,24	5,33
40	1,34	5,73
42	1,50	6,20
44	1,70	6,75
46	1,85	7,15

$$b_{\text{dr}} = (0 \pm 1) \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

$$a_{\text{dl}} = (6,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{m}^2}$$
$$b_{\text{dl}} = (-1,9 \pm 0,o3) \cdot 10^{-4}\ \text{m}.$$

Mittels (7) kann das Elastizitätsmodul für die einseitig eingespannten Stäbe als

$$E = \frac{mg}{2Ia} \tag{21}$$

bestimmt werden.
Somit sind die Elastizitätsmodule für die einseitig eingespannten Stäbe

$$E_{\text{sr}} = (65,4 \pm 0,5) \cdot 10^9\ \text{Pa}$$

und

$$E_{\text{se}} = (105,9 \pm 0,8) \cdot 10^9\ \text{Pa}\ .$$

Für den beidseitig eingespannten Stab ergibt sich aus (13) der Zusammenhang

Tabelle 4: Zweiseitig eingespannter eckiger Stab.

x / cm	D_{Null} / mm	D_m / mm
3	0,00	0,20
6	−0,12	0,25
9	−0,25	0,28
12	−0,34	0,35
14	−0,31	0,50
16	−0,21	0,67
18	−0,10	0,86
20	−0,01	1,05
22	0,14	1,23
24	0,24	1,38
26	0,35	1,56
29	−1,01	0,09
31	−1,00	0,20
33	−0,88	0,23
35	−0,78	0,26
37	−0,63	0,31
39	−0,56	0,28
41	−0,55	0,31
43	−0,48	0,28
46	−0,34	0,24
49	−0,16	0,25
52	0,00	0,19

$$E = \frac{mg}{48Ia}. \tag{22}$$

Damit errechnen sich die Werte für das Elastizitätsmodul des Stabes

$$E_{\text{dr}} = (81 \pm 1) \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$E_{\text{dl}} = (74 \pm 2) \cdot 10^9 \text{ Pa}.$$

Die beiden Werte werden gemittelt, da beide den gleichen Werte haben sollte, da es sich um denselben Stab handelt.
Damit ergibt sich

$$E_{\text{d}} = (78 \pm 1) \cdot 10^9 \text{ Pa}.$$

Bei all diesen Werten berechnet sich der Fehler nach der Gauß. Also

$$\sigma_{E_e} = \frac{mg}{2I^2a} \tag{23}$$

für die einseitig eingespannten Stäbe und

$$\sigma_{E_e} = \frac{mg}{48I^2a} \tag{24}$$

für den beidseitig eingespannten Stab.
Zur Bestimmung des Materials werden an dieser Stelle die Dichten der Stäbe nach

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{25}$$

berechnet und ergeben sich somit zu

$$\rho_{\mathrm{sr}} = 3861.3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\rho_{\mathrm{se}} = 8373.3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\rho_{\mathrm{d}} = 1869.1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

5 Diskussion

Bei dem einseitig eingespannten, eckigen Stab handelt es sich wahrscheinlich um Messing. Die Dichte von Messing (CuZn37) beträgt $\rho_{\mathrm{Me}} = 8410\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ [3]. Der gemessene Werte von $\rho_{\mathrm{se}} = 8373,3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ weicht nur sehr gering von diesem ab. Auch das Elastizitätmodul liegt innerhalb von dem in der Literatur gefundenem Rahmen von 78 GPa bis 123 GPa [3].

Die Elastizitätmodule der anderen beiden Stäbe sind sehr ähnlich mit dem von Aluminium von $E_{\mathrm{Al}} = 70$ GPa [2]. Sie weichen lediglich um -6 % im Falle des runden Stabes beziehungsweise um $+11$ % im Falle des eckigen Stabes ab. Die Dichte von Aluminium beträgt $\rho_{\mathrm{Al}} = 2700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ [1]. Hier haben die Messwerte eine große Abweichung von $+43$ % für den runden Stab und -30 % für den eckigen. Da allerdings die Elastizitätmodule sehr nah an den Literaturwerten liegen, kann in diesem Fall von Messfehlern ausgegangen werden.

Fehler, die bei der Messung der Dicken der Stäbe gemacht werden, wirken sich sehr stark auf das Endergebnis aus, da die Formeln von der vierten Potenz dieser abhängen.

Eine der beiden Messuhren hängt sehr wacklig an der Apperatur und bereits Verschiebungen entlang des Stabes können die Messwerte abweichen lassen. Stöße an den Tischen verändern den von der Uhr angezeigten Wert teilweise sehr stark. Der Fehler, der durch die Krümmung des Stabes existiert, wird durch die Nullmessung gut herausgerechnet.

Literatur

[1] LUMITOS AG. *Aluminium.* 2018. URL: `http://www.chemie.de/lexikon/Aluminium.html`.

[2] LUMITOS AG. *Elastizitätsmodul.* 2018. URL: `http://www.chemie.de/lexikon/Elastizit%C3%A4tsmodul.html`.

[3] LUMITOS AG. *Messing.* 2018. URL: `http://www.chemie.de/lexikon/Messing.html`.

[4] TU Dortmund. *V103 - Biegung elastischer Stäbe - S.107.* 2018.

[5] TU Dortmund. *V103 - Biegung elastischer Stäbe - S.110*. 2018.