

V602

# **Röntgenemission und -absorption**

Robin Pelkner

robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser

joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 09.04.2019

Abgabe: 16.04.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

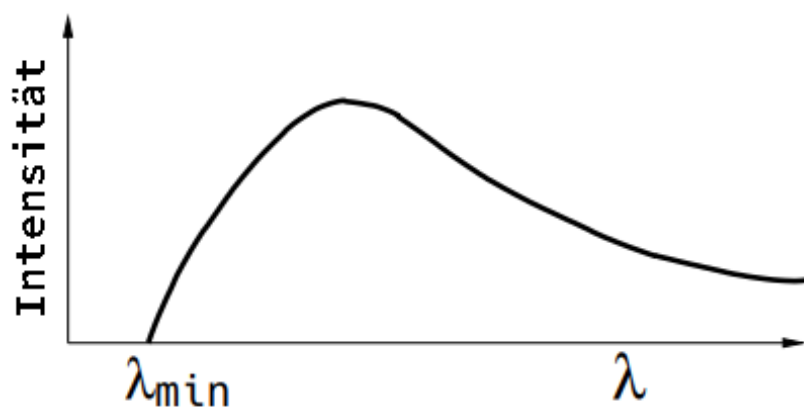
|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Zielsetzung</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2 Theorie</b>   | <b>3</b>  |
| <b>3 Durchführung</b>  | <b>5</b>  |
| <b>4 Auswertung</b>  | <b>5</b>  |
| 4.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung . . . . .                          | 5         |
| 4.2 Das Emmissionsspektrum von Kupfer . . . . .                        | 6         |
| 4.2.1 Maximalenergie des Bremsspektrums . . . . .                      | 6         |
| 4.2.2 Auflösungsvermögen der Apparatur . . . . .                       | 6         |
| 4.2.3 Bestimmung der Abschirmkonstante . . . . .                       | 7         |
| 4.3 Bestimmung der Abschirmkonstanten verschiedener Elemente . . . . . | 8         |
| 4.3.1 Zink . . . . .   | 8         |
| 4.3.2 Brom . . . . .   | 9         |
| 4.3.3 Strontium . . . . .  | 9         |
| 4.3.4 Zirkonium . . . . .  | 10        |
| 4.4 Bestimmung der Rydbergkonstante . . . . .                          | 10        |
| 4.5 Bestimmung der Abschirmkonstanten von Gold . . . . .               | 11        |
| <b>5 Diskussion</b>  | <b>12</b> |
| <b>Literatur</b>   | <b>12</b> |

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden das Emissionsspektrum einer Kupfer-Röntgenröhre sowie diverse Absorptionsspektren aufgenommen und untersucht.

## 2 Theorie

Röntgenstrahlen werden erzeugt, in dem in einer evakuierten Röhre Elektronen aus einer Glühkathode beschleunigt werden. Diese treffen auf eine Kupferanode. An dieser werden sie abgebremst und die verlorene kinetische Energie wird in Photonen umgewandelt. Entsteht ein kontinuierliches Bremsspektrum wie in Abbildung 1 zu sehen.



**Abbildung 1:** Das Bremsspektrum einer Röntgenröhre, ohne Störeinflüsse und ohne das charakteristische Spektrum[1].

Die Kontinuität urt daher, dass die Elektronen sowohl einen Teil ihrer kinetischen Energie wie auch die gesamte kinetische Energie abgeben können. Geben sie ihre gesamte Energie ab, so hat der Lichtquant entsprechend die minimale Wellenlänge

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e_0 U}. \quad (1)$$

Dabei ist  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Das kontinuierliche Spektrum wird des Weiteren von einem charakteristischen Spektrum überlagert. Dieses entsteht, wenn die Elektronen ein Atom ionisieren. Anschließend fällt ein Elektron aus einer höheren Schale herunter und emittiert ein Photon mit einer materialspezifischen Energie. Die Frequenz dieses Photons wird mittels

$$E_m - E_n = h\nu \quad (2)$$

berechnet, wobei  $E_m$  und  $E_n$  die jeweiligen Energieniveaus im Atom sind. Das charakteristische Spektrum zeigt sich als stark ausgeprägte, scharfe Linien. Dabei gilt für die Bindungsenergie

$$E_n = -R_\infty z_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (3)$$

Dies liegt daran, dass die Wechselwirkung der Elektronen untereinander die Coulomb-Kraft zum Kern hin abschirmt. Hierbei ist  $R_\infty = 13.6 \text{ eV}$  die Rydbergenergie,  $\sigma$  die Abschirmkonstante und  $z_{\text{eff}} = z - \sigma$  die effektive Kernladung. Es ist zu beachten, dass sich die Abschirmkonstante für jedes einzelne Elektron unterscheidet. Auch da die äußeren Elektronen sich im Bahndrehimpuls und im Spin unterscheiden, sind die charakteristischen Linien in der Regel eher sehr eng beieinander liegende feinere Linien.

Bei Absorption von Röntgenstrahlen mit Energien  $< 1 \text{ MeV}$  sind der Compton- sowie der Photoeffekt die dominanten Prozesse. Dabei nimmt der Absorptionskoeffizient mit zunehmender Energie ab und steigt sprunghaft, wenn die Photonenenergie gerade groß genug ist, um ein Atom zu ionisieren. Daraufhin fällt er erneut ab, bis ein Elektron aus der nächsten Schale herausgestoßen werden kann.

Die hierbei auftretenden Bindungsenergien  $E_{n,j}$  eines Elektrons lassen sich hier mittels der Sommerfeld'schen Feinstrukturformel

$$E_{n,j} = -R_\infty \left( z_{\text{eff},1}^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \alpha^2 z_{\text{eff},2}^4 \cdot \frac{1}{n^3} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right) \quad (4)$$

berechnen. Dabei ist  $\alpha$  die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante,  $n$  die Hauptquantenzahl und  $j$  der Gesamtdrehimpuls des jeweiligen Elektrons.

Die Abschirmkonstante lässt sich über die Energiedifferenz von zwei  $L$ -Kanten bestimmt werden. Da in diesem Versuch allerdings die ersten zwei Kanten nicht aufgelöst werden können, sodass die Energiedifferenz  $\Delta E_L = E_{L,II} - E_{L,III}$  verwendet wird.

Somit berechnet sich die Abschirmkonstante wie folgt:

$$\sigma_L = Z - \left( \frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta E_L}{R_\infty}} - \frac{5 \Delta E_L}{R_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( 1 + \frac{19}{32} \alpha^2 \frac{\Delta E_L}{R_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Die Energie eines Röntgenquants wird experimentell mittels Bragg'scher Reflexion bestimmt. Dabei wird das Licht an einem Kristall reflektiert und es entsteht bei einem Glanzwinkel  $\theta$  konstruktive Interferenz. Ist die Gitterkonstante  $d$  des Kristalls bekannt, kann die zum Winkel gehörige Wellenlänge über die Bragg'sche Bedingung

$$2d \sin(\theta) = n\lambda \quad (6)$$

berechnet werden. Dabei ist  $n$  die Ordnung, bei der die Interferenz auftritt. Über den Zusammenhang  $E = h\nu$  lässt sich die Bragg'sche Bedingung auch als Energie abhängig von dem Winkel formulieren:

$$E = \frac{hc}{2d \sin(\theta)}. \quad (7)$$

### 3 Durchführung

Der Aufbau des Versuchs besteht aus einer Röntgenröhre mit einer Glühkathode und einer Kupferanode. Die Elektronen aus der Glühkathode werden mit  $U_B = 35 \text{ kV}$  beschleunigt. Der Röntgenstrahl ist so gerichtet, dass er auf einen LiF-Kristall ( $d = 201,4 \text{ pm}$ ) trifft und an diesem reflektiert wird.

Das Kristallwinkel kann eingestellt werden. Ebenfalls befindet sich in dem Gerät ein Geiger-Müller-Zählrohr, das sich winkelabhängig verschieben lässt und so die Strahlungsintensität an einem bestimmten Winkel messen kann.

Die Apparatur selbst wird mittels eines Computerprogramms bedient. An diesem wird eingestellt in welchem Winkel der Kristall stehen soll, in welchem Zeitintervall das Geiger-Müller-Zählrohr bewegt werden soll (=Integrationszeit) und bei welchem Winkel dies beginnen und enden soll, sowie die Größe der Schritte. Vor Versuchsbeginn wird überprüft, dass die Schlitzblende auf dem Geiger-Müller-Zählrohr senkrecht zur Drehrichtung ausgerichtet ist.

Zunächst wird die Bragg-Bedingung überprüft. Dazu wird das Kristallwinkel auf  $\theta = 14^\circ$  gestellt. Das Geiger-Müller-Zählrohr wird in dem Winkelbereich von  $\alpha_{GM} = 26^\circ$  bis  $\alpha_{GM} = 30^\circ$  mit einer Schrittgröße von  $\Delta\alpha = 0,1^\circ$  gedreht. Die Messart wird auf "Spektren" gestellt.

Als nächstes wird das Emissionsspektrum der Cu-Röntgenröhre gemessen. Dazu wird in dem Programm der "2:1 Koppelmodus" ausgewählt. Es wird das Röntgenspektrum im Winkelbereich von  $\alpha_{GM} = 4^\circ$  bis  $\alpha_{GM} = 26^\circ$  gemessen. Dabei werden jeweils  $0,2^\circ$  Schritte gemacht und die Integrationszeit betrage  $\Delta t = 5 \text{ s}$ .

Nun wird Absorption von verschiedenen Elementen untersucht.

Zunächst werden vier verschiedene Elemente mit einer Kernladungszahl im Bereich von  $30 \leq Z \leq 50$  untersucht. Dazu wird je eines vor das Geiger-Müller-Zählrohr geschraubt. Der Winkelbereich in dem gemessen wird, wird bei den jeweiligen Elemente so gewählt, dass die K-Linien in diesem gut zu sehen sind. Die Schrittgröße betrage  $\Delta\alpha = 0,1^\circ$  und die Integrationszeit sei  $\Delta t = 20 \text{ s}$ .

Zuletzt wird die Absorptionsmessung mit einem Absorber mit einer Kernladungszahl  $70 \leq Z$ . Die Integrationszeit und Schrittgröße bleibe unverändert. Der Messbereich werde diesmal so gewählt, dass die L-Linien gut zu sehen sind.

### 4 Auswertung

#### 4.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Zur Überprüfung der Bragg-Bedingung wird die Abbildung 1 aus dem Anhang verwendet. Hierzu wird der Winkel unter dem das Maximum zu sehen ist, aufgenommen. Dieser liegt bei

$$\theta = 13.65^\circ$$

und weicht damit um  $0.35^\circ$  (2.5%) vom eingestelltem Winkel  $\theta = 14^\circ$  ab. Daher weisen alle weiteren gemessenen Winkel den gleichen Fehler auf.

## 4.2 Das Emissionsspektrum von Kupfer

Für diesen Auswertungsteil wird das Emissionsspektrum von Kupfer, dargestellt in Abbildung 2 aus dem Anhang, verwendet.

### 4.2.1 Maximalenergie des Bremsspektrums

Zur Bestimmung der maximalen Energie des Bremsspektrums von Kupfer wird der kleinste Winkel aus der Grafik abgelesen, bei dem sich das Spektrum von Null unterscheidet. Dieser liegt bei

$$\theta = (4.70 \pm 0.35)^\circ.$$

Mittels Gleichung (7) ergibt sich damit eine maximale Energie von

$$E_{\max} = (37.76 \pm 2.8)\text{keV}$$

und damit nach Gleichung (1) eine minimale Wellenlänge von

$$\lambda_{\min} = (3.3 \pm 0.25) \cdot 10^{-11}\text{m}.$$

Die Fehler der Gesamtenergie beziehungsweise der Wellenlänge ergeben sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta E = \frac{hc}{2d} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \Delta \theta \quad (8)$$

und

$$\Delta \lambda = \frac{hc}{E^2} \Delta E, \quad (9)$$

wobei  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $d$  die Gitterkonstante und die mit  $\Delta$  bezeichneten Größen die absoluten Fehler dieser sind. Der Theoriewert liegt bei

$$E_{\text{theorie}} = e_0 \cdot U = 35\text{keV}$$

und damit um 7.31% unterhalb des gemessenen Wertes, wobei  $e_0$  die Elementarladung und  $U$  die angelegte Spannung ist.

### 4.2.2 Auflösungsvermögen der Apparatur

Um das Auflösungsvermögen der Apparatur zu bestimmen werden die Winkel abgelesen an denen die  $K_\alpha$  und die  $K_\beta$  Line auf die Hälfte ihres Maximums abgesunken sind. Diese

liegen bei:

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha,1} &= (22.06 \pm 0.35)^\circ \\ \theta_{\alpha,2} &= (22.64 \pm 0.35)^\circ \\ \theta_{\beta,1} &= (20.00 \pm 0.35)^\circ \\ \theta_{\beta,2} &= (20.44 \pm 0.35)^\circ.\end{aligned}$$

Aus den Winkeln ergeben sich mittels Gleichung (7) und (8) die zugehörigen Energien

$$\begin{aligned}E_{\alpha,1} &= (8.20 \pm 0.12)\text{keV} \\ E_{\alpha,2} &= (8.00 \pm 0.12)\text{keV} \\ E_{\beta,1} &= (9.00 \pm 0.15)\text{keV} \\ E_{\beta,2} &= (8.81 \pm 0.14)\text{keV},\end{aligned}$$

woraus sich die Energiedifferenzen

$$\begin{aligned}E_{\alpha} &= (0.2 \pm 0.17)\text{keV} \\ E_{\beta} &= (0.19 \pm 0.21)\text{keV}\end{aligned}$$

ergeben. Über diese Differenzen wird nun gemittelt um eine Energieauflösung von

$$E = (0.20 \pm 0.14)\text{keV}.$$

### 4.2.3 Bestimmung der Abschirmkonstante

Es werden die Winkel aufgenommen unter denen die  $K_{\alpha}$ - beziehungsweise die  $K_{\beta}$ -Linien auftreten. Sie liegen bei

$$\theta_{K_{\alpha}} = (22.21 \pm 0.35)^\circ$$

und

$$\theta_{K_{\beta}} = (20.00 \pm 0.35)^\circ.$$

Durch die Gleichungen (7) und (8) lassen sich die zugehörigen Energien,

$$\begin{aligned}E_{\alpha} &= (8.14 \pm 0.12)\text{keV} \\ E_{\beta} &= (9.00 \pm 0.15)\text{keV}.\end{aligned}$$

berechnen. Der Theoriewert der K-Kante liegt bei  $K = 8.979\text{keV}$  [ ] über die die erste Abschirmkonstante berechnet werden kann. Die Abschirmkonstanten berechnen sich dann zu:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= z - \sqrt{\frac{E_K}{R_\infty}} = 3.49, \\ \sigma_2 &= z - 2\sqrt{\frac{R_\infty(z-\sigma_1)^2 - E_\alpha}{R_\infty}} = 13.4 \pm 1.1. \\ \sigma_3 &= z - 2\sqrt{\frac{R_\infty(z-\sigma_1)^2 - E_\beta}{R_\infty}} = 28.57.\end{aligned}$$

Bei der Bestimmung von  $\sigma_3$  wird ein kleinstmöglicher Fehler von 22eV von  $E_\beta$  abgezogen, da der Wurzelterm sonst negativ ist und nicht sinnvoll bestimmbar wäre. In allen Rechnungen ist  $z = 29$  die Ordnungszahl von Kupfer und  $R_\infty = 13.6\text{eV}$  die Rydbergenergie.

### 4.3 Bestimmung der Abschirmkonstanten verschiedener Elemente

In diesem Versuchsteil sind Absorptionsspektren verschiedener Elemente aufgenommen worden. Aus diesen werden die Energien der K-Kanten entnommen und daraus die zugehörigen Abschirmzahlen bestimmt. Diese werden mit Literaturwerten verglichen.

#### 4.3.1 Zink

Das Absorptionsspektrum von Zink ist in Abbildung 3 des Anhangs zu sehen. Die K-Kante von Zink ist bei einem Winkel von  $(18.9 \pm 0.35)^\circ$  zu sehen. Der darauffolgende wesentlich stärkere Anstieg bei ca.  $20^\circ$  kann mit Abschnitt 4.2.2 als  $K_\beta$ -Linie des Kupfers identifiziert werden und wird daher hier nicht weiter beachtet. Mittels Gleichung (7) und (8) lässt sich die Absorptionsenergie an der K-Kante zu

$$E_{K,Zn} = (9.500 \pm 0.17)\text{keV}$$

bestimmen, wodurch eine Abweichung von 1.67% vom Literaturwert

$$E_{\text{Lit},Zn} = 9.659 \text{ keV [2]}$$

vorliegt. Über die Gleichung (4) wird die Abschirmkonstante

$$\sigma_{K,Zn} = (3.76 \pm 0.23)$$

berechnet, wobei die Ordnungszahl von Zink  $Z = 30$  ist. Über die selbe Gleichung wird ein Vergleichswert mit dem Literaturwert der Energie errechnet. Dieser ist

$$\sigma_{\text{Lit},Zn} = 3.54,$$

womit eine Abweichung von 5.85% vorliegt.



### 4.3.2 Brom

In diesem Teil der Auswertung wird Abbildung 4 aus dem Anhang verwendet. Bei Brom ist die K-Kante bei einem Winkel von  $(13.4 \pm 0.35)^\circ$  zu sehen. Nach Gleichung (7) ergibt sich dadurch eine Absorptionsenergie von

$$E_{K,Br} = (13.280 \pm 0.34)\text{keV},$$

welche somit 1.44% vom Literaturwert

$$E_{Lit,Br} = 13.474 \text{ keV [2]}$$

abweicht. Mit Gleichung (4) errechnet sich die zugehörige Abschirmkonstante zu

$$\sigma_{K,Br} = (4.00 \pm 0.4),$$

welche vom zuvor bestimmten Wert

$$\sigma_{Lit,Br} = 3.75$$

um 6.25% abweicht. Die einzusetzende Ordnungszahl von Brom ist  $Z = 35$ .

### 4.3.3 Strontium

Das Absorptionsspektrum von Strontium ist in Abbildung 5 des Anhanges zu sehen. Das Maximum wird hier bei einem Winkel von  $(11.2 \pm 0.35)^\circ$  erreicht, womit sich nach Gleichung (7) eine Absorptionsenergie von

$$E_{K,Sr} = (15.8 \pm 0.5)\text{keV}$$

ergibt. Verglichen mit dem Literaturwert

$$E_{Lit,Sr} = 16.105 \text{ keV [2]}$$

ergibt sich eine relative Abweichung von 1.93%. Die Abschirmkonstante errechnet sich wieder über Gleichung (4), wobei die Ordnungszahl hier  $Z = 38$  ist, zu

$$\sigma_{K,Sr} = (4.1 \pm 0.5).$$

Diese weicht um 6.34% vom zuvor bestimmten Wert von

$$\sigma_{Lit,Sr} = 3.84$$

ab.

#### 4.3.4 Zirkonium

Aus Abbildung 6 des Anhangs ist die K-Kante von Zirkonium bei einem Winkel von  $(10.8 \pm 0.35)^\circ$  abzulesen. Dieser Wert ist der kleinste aus der Abbildung ablesbare Winkel. Die tatsächliche Kante liegt außerhalb des dargestellten Spektrums, weshalb die hier errechneten Werte nicht den tatsächlichen Werten entsprechen. Damit errechnet sich über Gleichung (7) die Absorptionsenergie

$$E_{K,Zr} = (16.400 \pm 0.5) \text{keV},$$

welche eine Abweichung von 8.87% vom Literaturwert

$$E_{\text{Lit},Zr} = 17.998 \text{ keV [2]}$$

abweicht. Mittels Gleichung (4) und der Ordnungszahl  $Z = 40$  ist die Abschirmkonstante

$$\sigma_{K,Zr} = (3.5 \pm 0.6)$$

und weicht damit um 46.29% vom Vergleichswert

$$\sigma_{\text{Lit},Zr} = 1.88$$

ab.

#### 4.4 Bestimmung der Rydbergkonstante

Die Ordnungszahlen der zuvor untersuchten Elemente werden gegen die Wurzel der in Unterabschnitt 4.3 bestimmten Absorptionsenergien aufgetragen. Dies ist in Abbildung 2 dargestellt. Dabei werden die Werte von Zirkonium ausgelassen, da diese, wie bereits erwähnt nicht den tatsächlichen entsprechen und damit das Ergebnis verfälschen würden. Über die Punkte wird mittels Python 3.7.0 eine lineare Regression durchgeführt, sodass sich eine Funktion der Form

$$\sqrt{E_K} = a \cdot Z + b \tag{10}$$

ergibt. Dadurch ergeben sich folgende Werte:

$$a = (3.53 \pm 0.02) \frac{\sqrt{\text{eV}}}{\text{Ordnungszahl}}$$

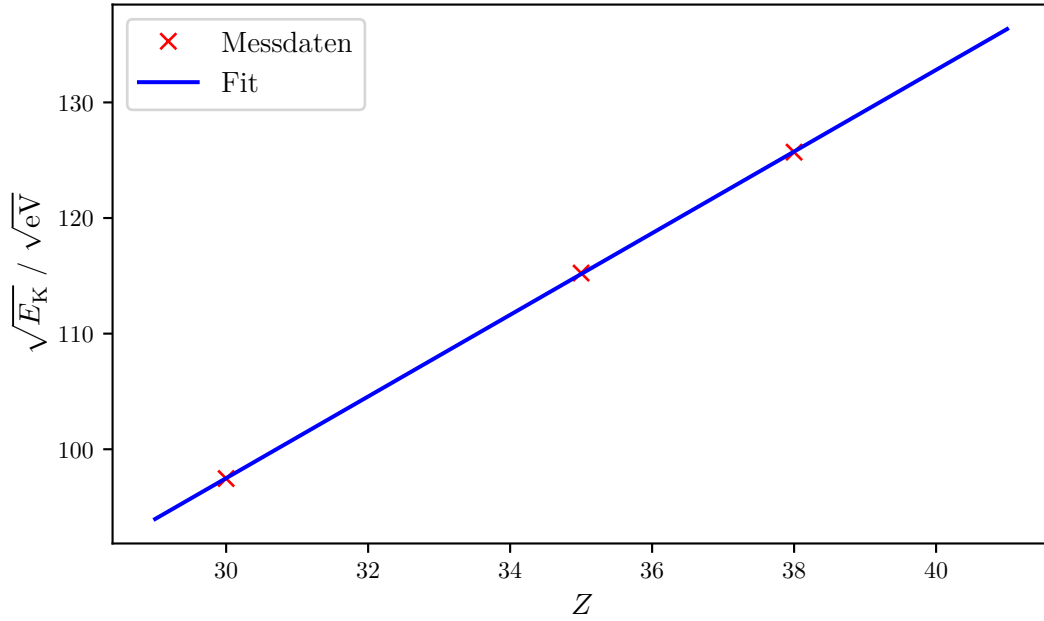
$$b = (-8.44 \pm 0.61) \sqrt{\text{eV}}.$$

Die Rydbergenergie lässt sich aus der Steigung  $a$  ermitteln und beträgt

$$R_{\infty, gem} = (12.47 \pm 0.0003) \text{ eV}.$$

Dieser Wert hat eine Abweichung von 9.06% von der tatsächlichen Rydbergenergie

$$R_{\infty} = 13.6 \text{ eV}.$$



**Abbildung 2:** Ordnungszahl  $Z$  gegen die Wurzeln der Absorptionsenergien an den K-Linien mit Ausgleichsgerade.

#### 4.5 Bestimmung der Abschirmkonstanten von Gold

Das Absorptionsspektrum von Gold ist in Abbildung 7 des Anhangs zu sehen. Daraus sind die Winkel der auftretenden L-Kanten zu entnehmen. Diese liegen bei:

$$\theta_{L,3} = (15.2 \pm 0.35)^\circ,$$

$$\theta_{L,2} = (12.8 \pm 0.35)^\circ.$$

Mittels Gleichung (7) und (8) lassen sich die Energien der beiden Kanten zu

$$E_{L,3} = (11.74 \pm 0.26) \text{ keV},$$

$$E_{L,2} = (13.90 \pm 0.4) \text{ keV},$$

berechnen, woraus sich die Energiedifferenz zu

$$\delta E = E_{L,2} - E_{L,3} = (2.2 \pm 0.4) \text{ keV}$$

berechnet. Die Abschirmkonstante berechnet sich dann nach Gleichung (5) mit der Ordnungszahl  $Z = 79$  zu

$$\sigma_L = (1 \pm 4).$$

## 5 Diskussion

Alle aus den Grafiken abzulesenden Winkel haben eine Abweichung von  $0.35^\circ$ , wie die Überprüfung des Bragg-Winkels gezeigt hat. Hinzu kommt, dass das menschliche Auge nur mit einer gewissen Genauigkeit ablesen kann, womit das Ergebnis verfälscht werden kann. Die Vergleichs- und Literaturwerte, beziehungsweise die Abweichungen von diesen sind bereits in den vorherigen Kapiteln bestimmt worden. Im Allgemeinen sind diese als eher gering einzuschätzen, was auf eine zumindest insgesamt gute Messung schließen lässt. Auffällig ist nur die Abweichung bei Zirkonium; die Abweichung der bestimmten Abschirmkonstante vom Literaturwert um 46.29% fällt gegenüber den Abweichungen der Messung der anderen Elemente deutlich auf, was aber auf Grund des falsch eingestellten Messbereiches zu erwarten ist. Daher sind die Werte von Zirkonium bei der Bestimmung der Rydbergenergie auch nicht weiter beachtet worden. Da die Rydbergenergie hier nur eine Abweichung von 9.06% aufweist, zeigt allerdings, dass die Messung der anderen Materialien in Ordnung sind. Des Weiteren zeigt die Abweichung der maximalen, gemessenen Energie vom Sollwert um 7.31%, dass nicht die gesamte Energie in Röntgenstrahlung umgewandelt wird und das Ergebnis dadurch ebenfalls verfälscht wird. Zur Verringerung der Fehler wären Messungen in kleinschrittigeren Winkelabständen, mit jeweils höherer Messzeit, sowie eine digitale Auswertung, um eventuelle Ablesefehler zu vermeiden, notwendig.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V602 - Röntgenemission und -absorption*. 2019.
- [2] Allsites LLC. *Yourperiodictable*. 2019. URL: [yourperiodictable.com](https://yourperiodictable.com).