

V105

Das magnetische Moment

Robin Pelkner

robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser

joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.12.2018

Abgabe: 18.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Bestimmung mittels Gravitation	3
2.2 Bestimmung mittels Schwingung	4
2.3 Bestimmung mittels Präzessionsbewegung	4
3 Durchführung	5
3.1 Bestimmung mittels Gravitation	5
3.2 Bestimmung mittels Schwingung	5
3.3 Bestimmung mittels Präzessionsbewegung	5
4 Auswertung	6
4.1 Bestimmung des magnetischen Moments mittels Gravitation	6
4.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer eines Magneteten	8
4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magneteten	11
5 Diskussion	13
Literatur	14

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll das magnetische Moment von einem sich in einer Kugel befindlichem Stabmagneten bestimmt werden. Dazu sollen Methoden mittels der Gravitation, einer Schwingung und einer Präzessionsbewegung verwendet werden.

2 Theorie

Magnetische Feldlinien sind immer in sich selbst geschlossen. Daher kann es keine magnetischen Monopole geben. Magnetische Dipole können über stromdurchflossene Leiterschleifen oder Permanentmagneten entstehen. Das magnetische Moment von Letzteren ist im Allgemeinen schwierig zu berechnen, kann aber experimentell bestimmt werden. Dazu wird ein möglichst homogenes Magnetfeld benötigt. Dieses wird in diesem Versuch über Helmholtz-Spulen erzeugt. In der Mitte zwischen den beiden Spulen ist ein Magnetfeld, das als homogen betrachtet werden kann. Dieses berechnet sich an dieser Stelle nach

$$B = \frac{\mu_0 N I R^2}{\left(R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Dabei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante, R der Spulenradius, N die Windungszahl, I die Stromstärke und d der Abstand zwischen den beiden Spulen.

2.1 Bestimmung mittels Gravitation

Eine Masse, die mittels einer stabförmigen Halterung an der Kugel befestigt wird, erfährt durch die Gravitation ein Drehmoment \mathbf{D}_G , welches sich mittels der Masse des Objektes m , dessen Abstand zum Kugelmittelpunkt \mathbf{r} und dem \mathbf{g} -Faktor berechnet. Dabei gilt

$$\mathbf{D}_G = m \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}). \quad (2)$$

Das Magnetfeld lässt auf den Permanentmagneten ebenfalls ein Drehmoment wirken. Dieses berechnet sich nach

$$\mathbf{D}_B = \boldsymbol{\mu}_{\text{Di}} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

wobei $\boldsymbol{\mu}_{\text{Di}}$ das magnetische Moment des Permanentmagneten ist. Da sich \mathbf{B} und \mathbf{g} sich in der Richtung nicht unterscheiden, kann zur Berechnung des Betrages des magnetischen Momentes das Kreuzprodukt durch skalare Produkte ersetzt werden. Die vorkommenden $\sin(\theta)$ Terme kürzen sich jeweils. Es ergibt sich

$$\mu_{\text{Di}} = \frac{mrg}{B} \quad (4)$$

für das magnetische Moment.

2.2 Bestimmung mittels Schwingung

Die Schwingung eines Magneten in einem externen Magnetfeld wird mittels der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$-|\mathbf{\mu}_{\text{Di}} \times \mathbf{B}| = J_K \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5)$$

beschrieben. Dabei ist J_K das Trägheitsmoment des Objektes, in diesem Versuch der Kugel, und θ der Auslenkungswinkel. Das Trägheitsmoment einer Kugel berechnet sich dabei nach

$$J_K = \frac{2}{5} m_K R_K^2, \quad (6)$$

wobei m_K die Masse und R_K der Radius der Kugel sind.

Mit der Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich das magnetische Moment als

$$\mu_{\text{Di}} = \frac{4\pi^2 J_K}{BT^2} \quad (7)$$

beschreiben.

2.3 Bestimmung mittels Präzessionsbewegung

Eine Präzessionsbewegung ist jene, die entsteht, wenn die Drehachse von einem rotierenden Körper sich ebenfalls um eine weitere Drehachse dreht. Dabei ist letztere parallel zu einem Drehimpuls L , der von der Frequenz f und dem oben bereits erwähnten Trägheitsmoment J_K abhängt. Dabei gilt die Relation

$$L = 2\pi f J_K. \quad (8)$$

Das Magnetfeld der Helmholtz-Spule wirkt eine äußere Kraft auf die Kugeln, was die Präzessionsbewegung hervorruft. Diese wird mittels der Differentialgleichung

$$\mathbf{\mu}_{\text{Di}} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (9)$$

beschrieben. Aus dieser folgt die Präzessionsfrequenz Ω_P mit

$$\Omega_P = \frac{\mu_{\text{Di}}}{L}. \quad (10)$$

Daraus folgt direkt

$$\mu_{\text{Di}} = \frac{2\pi L}{BT_P}. \quad (11)$$

Dabei ist T_P die Periodendauer der Präzessionsbewegung.

3 Durchführung

Eine Kugel, in der ein sich ein Permanentmagnet befindet, wird auf einen Zylinder in der Mitte von zwei Helmholtz-Spulen gelegt. Über ein Steuerelement lässt sich ein Luftkissen zwischen Kugel und Zylinder einstellen, sowie die Stromstärke, die durch die Spulen fließt und ein Stroboskop. Letzteres ist am Rand der oberen Spule verbaut. Zunächst werden die Masse und der Radius der Kugel sowie der Radius und der Abstand der Spulen abgemessen.

In dem gesamten Versuch wird der Spulenstrom zwischen den Messungen abgeschaltet, da die Spulen sich sonst stark erwärmen, was deren elektrischen Widerstand erhöht und die Messung verfälscht.

3.1 Bestimmung mittels Gravitation

In dieser Messreihe wird eine verschiebbare Masse an einem Aluminiumstab angebracht. Die Masse wird im Weiteren als Punktmasse angenommen und die Masse des Aluminiumstabes wird vernachlässigt. Die Masse wird zunächst gewogen. Dieses System wird in die Kugel eingelassen und es wird die Distanz von der Masse zu der Oberfläche der Kugel gemessen. Zusammen mit dem Radius der Kugel ergibt dies den Abstand von deren Zentrum. Nun wird das Luftkissen eingeschaltet und zunächst die Stromstärke maximal eingestellt. Letztere wird nun langsam so gesenkt, dass die Kugel kurz vor dem Kippen ist. Der zugehörige Wert wird notiert. Diese Messung wird insgesamt zehn mal mit verschiedenen Abständen von der Masse zu der Kugel durchgeführt.

3.2 Bestimmung mittels Schwingung

Das Luftkissen und das Magnetfeld wird eingeschaltet. Die Kugel wird aus ihrer Ruhelage leicht ausgelenkt und somit in eine Schwingungsbewegung versetzt. Nun wird die Zeit gemessen, die das System benötigt um zehn Perioden zu absolvieren, um so einen Wert für die Periodendauer zu errechnen. Diese Messung wird erneut für zehn verschiedene Stromstärken durchgeführt.

3.3 Bestimmung mittels Präzessionsbewegung

Die Kugel wird händisch in eine Rotationsbewegung versetzt. Dabei soll die Drehachse konstant senkrecht nach oben zeigen. Anschließend wird das Stroboskop eingeschaltet und so in der Frequenz geregelt, dass ein weißer Punkt auf der Kugel als sich nicht bewegend wahrgenommen wird. Die Frequenz des Stroboskops ist dann die Drehfrequenz der Kugel. Es wird darauf geachtet, dass diese Frequenz zwischen 4 und 6 Hz liegt. Nun wird die Kugel leicht ausgelenkt und das Magnetfeld aktiviert, um so die Präzessionsbewegung hervorzurufen. Es wird nun die Periodendauer dieser Bewegung bestimmt. Diese Messung wird ebenfalls für zehn verschiedene Stromstärken durchgeführt.

4 Auswertung

Die geometrischen Angaben zum Helmholtzspulenpaar sind der Anleitung [1, S. 2] entnommen und stimmen mit den am Gerät abzulesenden Daten überein. Die Daten sind in Tabelle 1 zu sehen.

Tabelle 1: Physikalische Angaben zum Helmholtzspulenpaar.

Radius der Spulen R_{Spule} / m	Abstand der beiden Spulen d / m	Anzahl Windungen N
0.109	0.138	195

Die gemessenen, geometrischen Daten der zu untersuchenden Kugel sind in Tabelle 2 zu sehen.

Tabelle 2: Geometrische Daten der Kugel.

Radius der Kugel r_K / m	Masse der Kugel m_K / kg	Länge des Stiels der Kugel r_{Stiel} / m
0.02615	0.14197	0.01225

Das Trägheitsmoment der Kugel ist dann somit

$$J_K = \frac{2}{5} m_K r_K^2 = 3.88 \cdot 10^{-5} \text{kgm}^2.$$

4.1 Bestimmung des magnetischen Moments mittels Gravitation

Die für diesen Versuchsteil benötigte Masse m_M , welche in verschiedenen Abständen zum Stiel der Kugel gemessen wird, hat ein Gewicht von $m_M = 1.63\text{g}$. Der zur Bestimmung des magnetischen Moments gemessener Zusammenhang zwischen Abstand der Masse m_M und der für das Magnetfeld aufgewandte Stromstärke I ist in Tabelle 3 zu sehen. Aus den Stromstärken I lassen sich dann mittels Gleichung (1) und den Werten aus Tabelle 1 die aufgebrachten Magnetfeldstärken errechnen. Die Abstände sind als Abstände zwischen der Masse M_m und dem Zentrum der Kugel zu betrachten, weshalb zu den Abständen aus Tabelle 3 noch der Radius der Kugel r_K und die Länge des Stieles der Kugel r_{Stiel} aus Tabelle 2 addiert werden müssen. Dieser Abstand r wird gegen die magnetische Flussdichte B aufgetragen und anschließend eine lineare Regression der Form

$$y = a \cdot x + b \quad (12)$$

durchgeführt. y beschreibt in diesem Fall die magnetischen Flussdichten B und x die Abstände r , sodass die Steigung a hier durch $a = \frac{B}{r}$ gegeben ist. Die Konstanten a und b errechnen sich über

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (13)$$

Tabelle 3: Gemessener Zusammenhang zwischen Abstand der Masse m_M zum Stiel an der Kugel und aufgewandter Stromstärke.

I / A	$l_{\text{Masse}} / \text{cm}$
2.5	5.460
2.4	5.000
2.4	4.575
2.2	4.045
2.1	3.500
1.9	3.030
1.9	2.505
1.7	2.000
1.6	1.495
1.5	1.000

und

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}, \quad (14)$$

wobei die x_i beziehungsweise y_i die einzelnen aufgetragenen Werte darstellen und \bar{x} beziehungsweise \bar{y} die Mittelwerte dieser nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (15)$$

mit dem Fehler

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot (N-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (16)$$

Der Fehler von a berechnet sich außerdem jeweils nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta a = \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \cdot \left(\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - b - mx_i)^2 \right)}. \quad (17)$$

Die Anzahl der verwendeten Messwerte ist in allen Versuchsteilen $N = 10$. Die aufgetragenen Werte und die zugehörige Ausgleichsgerade sind in Abbildung 1 zu sehen. Die Steigung der Geraden beträgt nach Gleichung (13) und (17)

$$a = (31.258 \pm 1.324) \frac{\text{T}}{\text{m}}.$$

Mittels Gleichung (4) lässt sich das magnetische Dipolmoment dann zu

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0.507 \pm 0.021) \text{Am}^2$$

bestimmen, wobei sich der Fehler durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung errechnet zu

$$\Delta\mu_{\text{Dipol}} = m \cdot g \cdot \Delta a.$$

Tabelle 4: Abstand r zwischen Kugelmittelpunkt und aufgesteckter Masse und zugehörige magnetische Flussdichte B .

r / m	$B / 10^{-3} \text{ T}$
0.093	3.390
0.088	3.254
0.084	3.254
0.079	2.983
0.073	2.848
0.069	2.576
0.063	2.576
0.058	2.305
0.053	2.170
0.048	2.034

4.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer eines Magneten

Die für diesen Auswertungsteil gemessenen Stromstärken I und zehnfache Periodendauern T sind in Tabelle 5 dargestellt.

Tabelle 5: Stromstärke I und zugehörige zehnfache Schwingungsdauer T .

I / A	$10 \cdot T / \text{s}$
0.5	23.49
0.9	17.60
1.3	14.63
1.7	12.70
2.1	11.61
2.4	10.55
2.8	9.96
3.2	9.27
3.6	8.55
4.0	8.32

Die quadratischen Periodendauern T^2 werden gegen $\frac{1}{B}$ aufgetragen und anschließend mittels linearer Regression eine Ausgleichsgerade, wie in Gleichung (12), bestimmt, wobei y in diesem Fall die Kehrwerte der magnetischen Flussdichten $\frac{1}{B}$ darstellt und x die

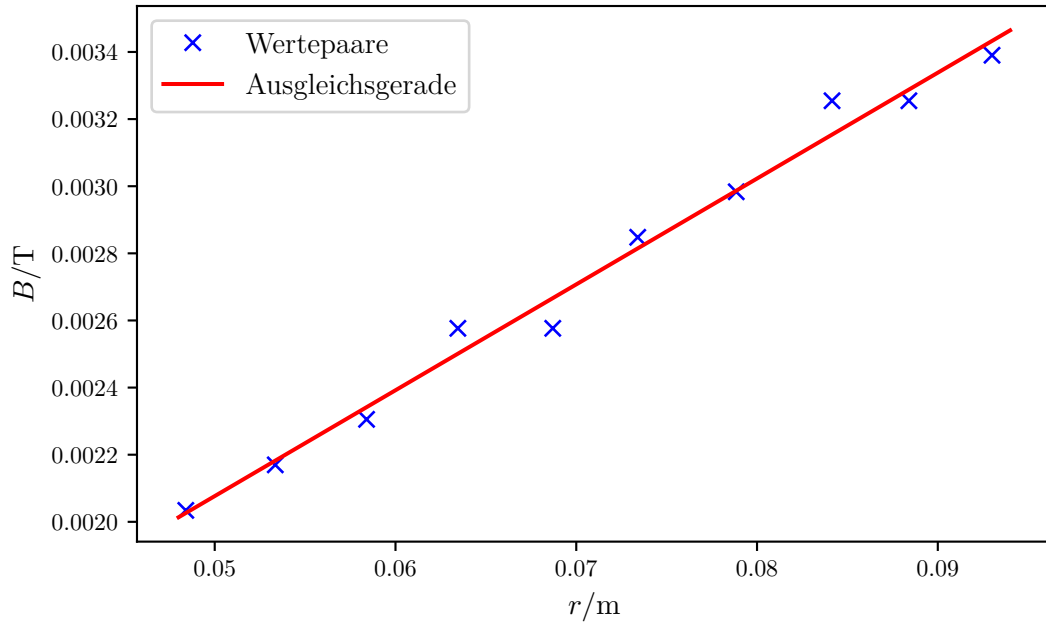


Abbildung 1: Auftragung des Abstandes r zwischen Kugelzentrum und angesteckter Masse gegen die magnetische Flussdichte B , mit Ausgleichsgerade.

quadratischen Periodendauern T^2 . Die verwendeten Werte sind in Tabelle 6 zu sehen; die magnetischen Flussdichten werden wieder mittels Gleichung (1) und mithilfe der Werte aus Tabelle 1 bestimmt. Die aufgetragenen Werte, sowie die zugehörige Ausgleichsgerade finden sich in Abbildung 2. Die Steigung der Ausgleichsgerade ist dabei nach Gleichung (13) und (17)

$$a = T^2 B = (266.07 \pm 1.46) \text{Ts}^2.$$

Mittels Gleichung (7) lässt sich damit das magnetische Moment errechnen zu

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0.4079 \pm 0.0022) \text{Am}^2,$$

wobei sich der zugehörige Fehler über

$$\Delta\mu_{\text{Dipol}} = \frac{4\pi^2 J_K}{a} \Delta a.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel J_K ist bereits zuvor bestimmt worden.

Tabelle 6: Kehrwert der Magnetfeldstärke $\frac{1}{B}$ und quadratische Periodendauer T^2 .

$\frac{1}{B} / \frac{1}{\text{T}}$	T^2 / s^2
1474.860	5.519
819.348	3.098
567.241	2.140
433.772	1.613
351.149	1.348
307.255	1.113
263.362	0.992
230.441	0.859
204.837	0.731
184.353	0.692

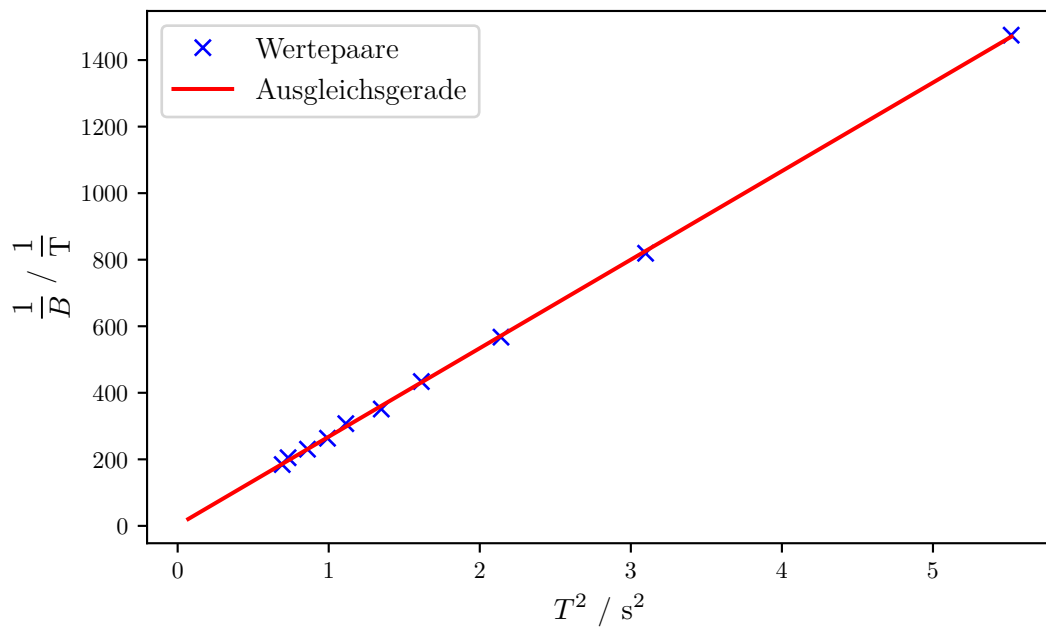


Abbildung 2: Auftragung der quadratischen Periodendauer T^2 gegen den Kehrwert der magnetischen Flussdichte $\frac{1}{B}$, mit Ausgleichsgerade.

4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magneten

Die zur Bestimmung des magnetischen Momentes gemessenen Stromstärken und die dazugehörigen Umlaufzeiten sind in Tabelle 7 dargestellt. Bei der Messung wird eine Rotationsfrequenz von $f = 4.9\text{Hz}$ verwendet, womit sich der Drehimpuls nach Gleichung (8) zu

$$L_K = 0.0012 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

errechnet. Die Kehrwerte der Periodendauern $\frac{1}{T}$ werden gegen die magnetischen Fluss-

Tabelle 7: Stromstärke I und zugehörige Periodendauer T .

I / A	T / s
0.5	20.21
0.9	11.58
1.3	9.80
1.7	6.56
2.1	6.36
2.4	4.73
2.8	4.96
3.2	3.66
3.6	3.55
4.0	3.03

dichten B aufgetragen. Die magnetischen Flussdichten B werden wieder durch Gleichung (1) und den Werten aus Tabelle 1 bestimmt. Die bei der Auftragung verwendeten Werte sind in Tabelle 8 zu sehen. Über die gegeneinander aufgetragenen Werte wird eine lineare Regression, zur Bestimmung einer Ausgleichsgerade derselben Form wie Gleichung (12) durchgeführt, wobei y hier die magnetischen Flussdichten B und x die Kehrwerte der Periodendauern $\frac{1}{T}$ darstellt. Die aufgetragenen Werte, sowie die Ausgleichsgerade sind in Abbildung 3 dargestellt. Die Steigung der Geraden ist nach Gleichung (13) und (17)

$$a = T \cdot B = 0.0170 \pm 0.0009\text{Ts}.$$

Zusammen mit den bestimmten Drehimpuls L_K lässt sich das magnetische Moment durch Gleichung (11) zu

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0.442 \pm 0.024)\text{Am}^2$$

bestimmen. Der Fehler des magnetischen Moments errechnet sich dabei zu

$$\Delta\mu_{\text{Dipol}} = \frac{2\pi L}{a} \Delta a.$$

Tabelle 8: Magnetische Flussdichte B und Kehrwert der Periodendauer $\frac{1}{T}$.

$B/10^{-3} \cdot \text{T}$	$\frac{1}{T}/\frac{1}{\text{s}}$
0.678	0.049
1.220	0.086
1.763	0.102
2.305	0.152
2.848	0.157
3.255	0.211
3.797	0.202
4.339	0.273
4.882	0.282
5.424	0.330

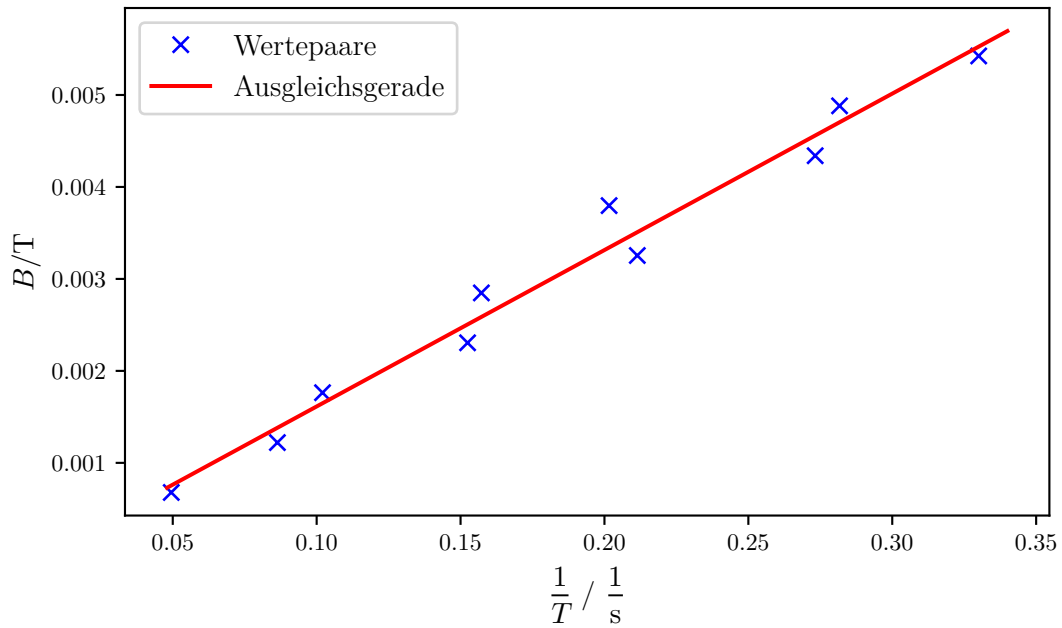


Abbildung 3: Auftragung des Kehrwertes der Periodendauer $\frac{1}{T}$ gegen die magnetische Flussdichte B , mit Ausgleichsgerade.

5 Diskussion

Die magnetischen Momente mit relativen Fehlern der drei Messreihen lauten:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{Gravitation}} &= 0.507 \text{Am}^2 \pm 4.1\% \\
 \mu_{\text{Schwingung}} &= 0.4079 \text{Am}^2 \pm 0.5\% \\
 \mu_{\text{Präzession}} &= 0.442 \text{Am}^2 \pm 5.4\% .
 \end{aligned}$$

Wie die relativen Fehler zeigen, ist die Bestimmungsmethode über die Schwingungsdauer eines Magneten, die die geringste Abweichung hat. Da die relativen Fehler bei allen drei Ergebnissen ausschließlich vom Fehler der Steigung der jeweiligen Ausgleichsgeraden abhängen, ist davon auszugehen, dass die Fehlerwerte somit repräsentativ für die verwendeten, aufgetragenen Messwerte steht und die Messwerte der Schwingungsdauermessung somit am besten sind. Bei der Betrachtung der Abweichung der drei magnetischen Momente untereinander sind folgende Abweichungen festzustellen:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\mu_{\text{Gravitation}}, \mu_{\text{Schwingung}}} &= 24\% \\
 \Delta_{\mu_{\text{Präzession}}, \mu_{\text{Schwingung}}} &= 8\% \\
 \Delta_{\mu_{\text{Gravitation}}, \mu_{\text{Präzession}}} &= 15\% .
 \end{aligned}$$

Besonders deutlich ist dabei die Abweichung zwischen der Gravitationsmessung und den anderen beiden Messungen. Dies lässt darauf schließen, dass die Messung mit der Gravitationsmethode merklich schlechter ist als die anderen Messungen. Diese Abweichungen lassen sich durch bei der Durchführung des Versuches auftretende Fehler erklären. Bei der Messung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation ist die größte Fehlerquelle die analoge Stromstärkenanzeige des Steuergerätes, welche nur eine Skala von 0.1A zulässt und den Wert der Stromstärke so stark verfälschen kann. Dieser Fehler tritt allerdings bei den beiden weiteren Messungen ebenso auf, weshalb es die starke Abweichung nicht erklären kann. Des Weiteren ist die Masse, welche am Stiel der Kugel befestigt ist, bei der Messung teilweise etwas verrutscht, da sie sich nicht gut fixieren ließ, was die Messung des Abstandes zwischen Kugel und Masse beeinträchtigt hat. Ein weiterer Faktor ist die Betrachtung der angehängten Masse als Punktmasse, sowie die Vernachlässigung der Masse des Aluminiumstabes, wenngleich diese Fehlerquellen eher als gering einzuschätzen sind. Das größte Fehlerpotenzial bei der Messung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer des Magneten, liegt in der Messung der Schwingungsdauer, welche mithilfe einer Stoppuhr per Hand durchgeführt wird und daher sehr fehleranfällig ist. Der Fehler, der durch die Reibung der Kugel entsteht, ist auf Grund des Luftkissens sehr gering. Bei der Messung des magnetischen Momentes über die Präzession der Kugel kommt es zu weiteren Fehlern. Das Stroboskop der Apparatur ist nicht leicht einzustellen und die eingestellte Frequenz kann sich während der Messung auf Grund der Instabilität des Stroboskopes verändern. Hinzu kommt, dass die Präzession der Kugel ebenfalls per Hand angeregt werden muss und daher eine konstante Frequenz nur sehr schwierig zu erreichen ist, zumal diese im Laufe des Versuches abnimmt. Das heißt, dass längere gemessene Umlaufzeiten etwas stärker fehlerbehaftet sind als kürzere. Eine weitere Fehlerquelle ist die erneute Zeitmessung mit der Stoppuhr, welche aber hier das zusätzliche Problem aufweist, dass ein Start- beziehungsweise Endpunkt der Umdrehung nicht immer ganz konkret auszumachen ist. Auch leichte Nutationsbewegungen der Kugel sind nicht ganz zu vermeiden, werden aber nur eine untergeordnete Rolle bei der Betrachtung der Fehler spielen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V105 - Das magnetisches Moment*. 2018.