

V102

Drehschwingungen

Robin Pelkner
robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser
joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 27.11.2018

Abgabe: 04.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Ziel der Versuch ist es die elastischen Konstanten eines Körpers (hier: einer Kugel) zu bestimmen. Anschließend soll das magnetische Moment eines Permanentmagneten unter Zuhilfenahme eines Helmholtzspulenpaares bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Normal- und Schubspannung

Wenn auf die Oberfläche eines Körpers eine Kraft F wirkt, kann es dabei zu Verformungen und Volumenänderungen am Körper kommen. Hier soll F eine Zugkraft sein, das heißt eine Kraft die an der Oberfläche des Körpers zieht. Diese Kraft wird als Spannung bezeichnet, wobei die auf der Oberfläche senkrechtstehende Komponente als Normalspannung σ bezeichnet wird und die Komponente welche parallel zur Oberfläche verläuft als Schubspannung τ . Zu Beachten ist dabei aber auch, dass sich die an der Oberfläche wirkenden Kräfte auf den ganzen Körper auswirken. Desweiteren wird eine Deformation als elastisch bezeichnet, wenn sich der Körper nach Einwirken einer Kraft wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückversetzt, also seine ursprüngliche Form wieder annimmt. Dies gilt bei jedem Körper für einen gewissen Bereich des Zusammenhanges zwischen Kraft F und Deformation (siehe Unterabschnitt 2.2). Allgemein lässt sich dieser proportionale Zusammenhang mithilfe von Konstanten beschreiben. Auf die Definition und den Zusammenhang dieser Konstanten wird in Unterabschnitt 2.3 näher eingegangen.

2.2 Hook'sches Gesetz

Das Hook'sche Gesetz gilt solange der Körper nur einer geringen Spannung σ ausgesetzt ist, so dass nur eine elastische Deformation vorliegt. Der Aufbau eines Körpers wird dabei als Kristallgitter betrachtet, in dem sich die Atome beziehungsweise Moleküle in einem Abstand r in einem Gleichgewicht befinden. Durch Einwirkung einer äußeren Kraft verschiebt sich dieses Gleichgewicht und der Körper deformiert. Solange die Spannungen nicht zu groß sind, ist diese Deformation reversibel, sodass sich ein proportionaler Zusammenhang zwischen ergibt:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L}, \quad (1)$$

wobei $\frac{\Delta L}{L}$ die relative Längenänderung der Körpers und E das Elastizitätsmodul, auf welches in Unterabschnitt 2.3 näher eingegangen wird, bezeichnet. Insgesamt sind für die Beschreibung des Zusammenhanges zwischen Spannung und Deformation in einem Kristallgitter 36 Konstanten notwendig, durch Symmetrien verringert sich diese Zahl allerdings erheblich.

2.3 Elastische Konstanten isotroper Körper

Als isotrope Materialien werden Stoffe bezeichnet, deren Elastizitätskonstanten richtungsunabhängig sind. Hierdurch verringert sich die Zahl der Konstanten auf zwei. Die

Konstanten sind einerseits das Schub- beziehungsweise Torsionsmodul G , welches die Gestaltselastizität beschreibt, andererseits das Kompressionsmodul Q , welches die Volumenelastizität beschreibt. Hinzu kommen, aus Gründen der Zweckmäßigkeit, noch das bereits erwähnte Elastizitätsmodul E und die Poisson'sche Querkontraktionszahl μ . E beschreibt dabei die Längenänderung des Körpers unter Einfluss einer Normalspannung in Spannrichtung, während μ die Längenänderung des Körpers senkrecht zur Normalspannung beschreibt. Des Weiteren gelten folgende Zusammenhänge zwischen den Modulen:

$$E = 2G(\mu + 1) \quad (2)$$

und

$$E = 3(1 - 2\mu)Q. \quad (3)$$

Hieraus lassen sich die Module direkt berechnen, zu

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (4)$$

und

$$Q = \frac{EG}{9G - 3E} \quad (5)$$

2.4 Bestimmung des Schubmoduls G

G wird durch Betrachtung einer Torsion an einem zylindrischen Körper ermittelt, an dem eine Kraft K an zwei entgegengesetzten Punkten des Körpers wirkt. Das hierdurch entstehende Drehmoment M ruft eine Torsion der unteren Zylinderfläche gegen die obere um den Winkel ϕ hervor. Bei der Berechnung von diesem, ist allerdings noch die Wirkung der Hebelarme, also dem Abstand der Massepunkte von der Drehachse, zu beachten, welcher aber über den Durchmesser des Körpers variiert. Mithilfe der Länge L des Körpers und dem aus Abbildung 1 ablesbaren Scherungswinkel $\alpha = \frac{r\phi}{L}$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Hook'schen Gesetzes das Drehmoment

$$M = \int_0^R 2\pi \frac{G}{L} r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \phi, \quad (6)$$

woraus sich ein Proportionalitätsfaktor, die Richtgröße des Zylinders

$$D := \frac{\pi G R^4}{2L}, \quad (7)$$

ableiten lässt. Durch Betrachtung eines Aufbaus an dem eine Kugel an einem (zylinderförmigen) Draht gehängt und ausgelenkt wird, werden sogenannte elastische Nachwirkungen umgangen. Es greifen nun zwei entgegengesetzt wirkende Drehmomente, einerseits das des Drahtes welches mit Gleichung (6) dargestellt wird und andererseits das der Kugel, welches durch die Trägheit der Kugel Θ hervorgerufen wird:

$$M_K = \Theta \frac{d^2 \phi}{dt^2}. \quad (8)$$

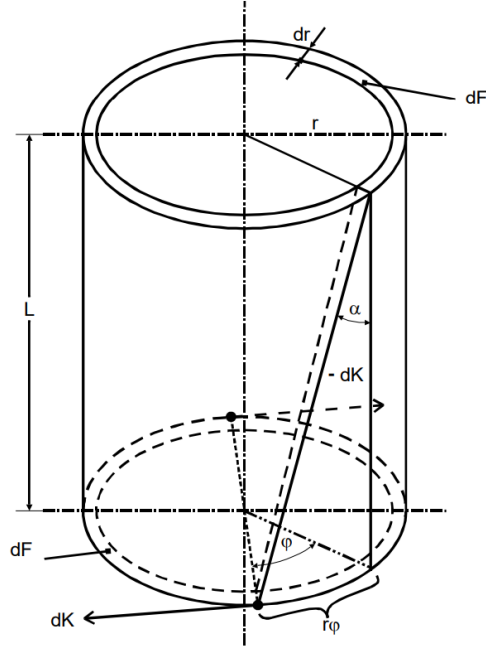


Abbildung 1: Schema zur Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen Drehmoment M und Torsionswinkel ϕ an einem Zylinder [2, S. 97].

Aus den Gleichungen (6), (7) und (8) lässt sich die Bewegungsgleichung als Differentialgleichung zweiter Ordnung formulieren:

$$D\phi + \Theta \frac{d^2\phi}{dt^2} = 0. \quad (9)$$

Durch Lösen mithilfe eines Cosinus-Ansatzes und des Trägheitsmomentes θ einer Kugel

$$\theta = \frac{2}{5}m_K R_K^2 \quad (10)$$

ergibt sich die Periodendauer T zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4m_K R_K^2 L}{5\pi G R^4}}, \quad (11)$$

wobei m_K die Masse und R_K der Radius der Kugel sind. Somit lässt sich das Schubmodul G schließlich über Gleichung (11) bestimmen zu

$$G = \frac{16\pi m_K R_K^2 L}{5T^2 R^4}. \quad (12)$$

2.5 Bestimmung des magnetischen Moments eines Permanentmagneten

Das magnetische Moment \vec{m} ist definiert als Produkt der magnetischen Polstärke der Pole und dem Abstand a zwischen den Polen. Durch Anlegen eines homogenen Magnetfeldes

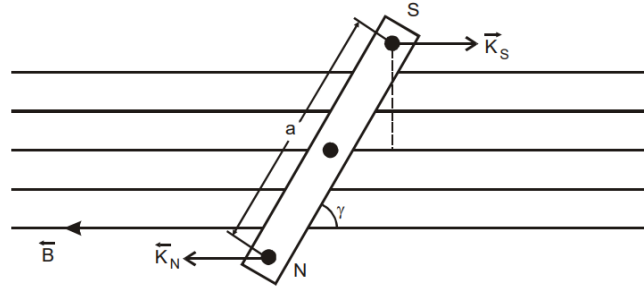


Abbildung 2: Permanentmagnet in einem äußeren, homogenen Magnetfeld [2, S. 103].

wirken, zwei Kräfte an den beiden Polen in entgegengesetzter Richtung, sodass ein Drehmoment M_{mag} resultiert mit

$$M_{\text{mag}} = p\vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (13)$$

Wenn derselbe Aufbau wie zur Bestimmung des Drehmomentes genutzt wird kann die Differentialgleichung (9) zu

$$mB \sin \phi + D\phi + \Theta \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0 \quad (14)$$

aufgestellt werden. Lösen der Differentialgleichung ergibt eine Periodendauer von

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mB + D}}. \quad (15)$$

3 Durchführung

3.1 Bestimmung des Schubmoduls G

Das Schubmodul G wird mittels des in der Abbildung 3 dargestellten Aufbaus ermittelt. Hierzu wird die Vorrichtung durch Betätigung des Justierades leicht ausgelenkt, so dass sie eine Drehbewegung um die eigene Achse vollführt. Zu Beachten ist dabei, dass die Kugel wirklich nur die Drehbewegung vollführt; andere Schwingungen können das Ergebnis beeinflussen und verfälschen. Die Schraube in der Kugel markiert die Ausrichtung des Permanentmagneten in der Kugel, dieser soll senkrecht stehen, um den Einfluss von diesem (besonders mit Einfluss des Erdmagnetfeldes) möglichst gering ist. Ein am Draht angebrachter Spiegel reflektiert drei mal pro Periode einen von einer Leuchtdiode ausgehenden Lichtstrahl auf eine Photodiode, welche dann ein Signal an eine digitale Schaltung übermittelt. Diese ist in Abbildung 4 schematisch dargestellt. Das erste Signal aktiviert die Zeitmessung und schaltet Flip-Flop 1 um. Das zweite Signal entsteht dadurch, dass der reflektierte Strahl die Photodiode, da diese sich nicht an einem der Umkehrpunkte der Schwingung befindet, ein weiteres mal passiert und physikalisch somit keine Aussagekraft hat. Das Signal durchläuft beide Flip-Flops und

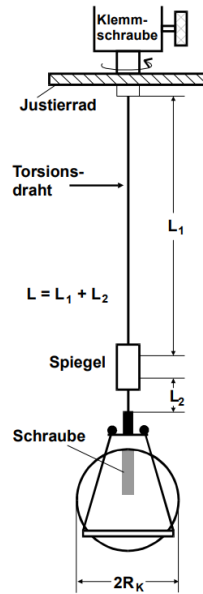


Abbildung 3: Aufbau der Messapparatur [2, S. 100].

schaltet diese um und wird auf diese Weise unterdrückt, sodass das dritte Signal, welches nach einer vollen Periode abgegeben wird, die Stoppuhr anhält und Flip-Flop 1 erneut umstellt. Die Messung ist damit abgeschlossen. Ein weiteres, viertes Signal setzt die Uhr mithilfe einer monostabilen Kippstufe zurück, wobei die Zustände der Flip-Flops ebenfalls wieder den Anfangszustand erreichen, sodass beim nächsten eintreffenden Signal eine weitere Messung erfolgen kann. Die Messaufnahme wird insgesamt zehnmal durchgeführt.

3.2 Bestimmung des magnetischen Momentes

Der zuvor verwendete Versuchsaufbau wird beibehalten und erweitert. Zum einen wird ein Helmholtzspulenpaar aufgestellt, welches an der Kugel für ein homogenes Magnetfeld sorgt, zum Anderen wird die Kugel so gedreht, dass die Schraube waagrecht ist, um den Einfluss des Erdmagnetfeldes zu minimieren. Es wird zuerst eine Stromstärke von 0.5A angelegt, welche in 0.5A - Schritten bis 5A erhöht wird. Bei jeder Stromstärke werden insgesamt 10 Messungen durchgeführt. Hier ist es nochmal besonders wichtig auf äußere Schwingungen zu achten, da die Perioden immer kürzer werden mit zunehmender Stromstärke und kleine Einflüsse so vergleichsweise große Auswirkungen haben.

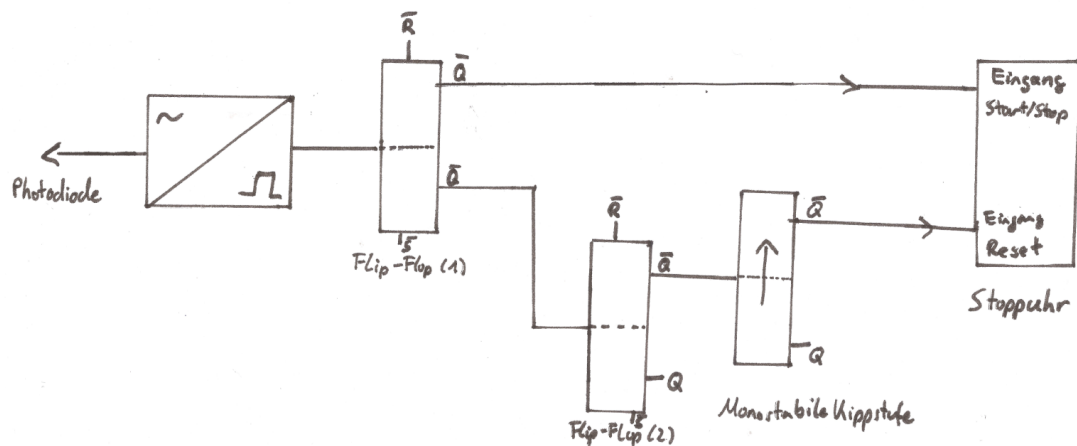


Abbildung 4: Schematische Darstellung der digitalen Schaltung.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Schubmoduls

Tabelle 1: Periodendauern ohne Magnetfeld.

T / s
18,281
18,270
18,276
18,291
18,298
18,287
18,281
18,270
18,284
18,283

Zur Berechnung des Schubmoduls G werden diverse Daten benötigt. Zunächst wird die Periodendauer der Drehschwingung des Systems gemessen, diese sind in Tabelle 1 zu finden, und gemittelt. Zu der Berechnung des Mittelwertes wird

$$\bar{T} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_i \quad (16)$$

verwendet. Der Fehler des Mittelwertes berechnet sich mittels

$$\Delta \bar{T} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot (10 - 1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (T_i - \bar{T})^2} = 9 \cdot 10^{-5} \text{s.} \quad (17)$$

Damit berechnet sich die gemittelte Periodendauer zu

$$\bar{T} = (18.28210 \pm 0.00009) \text{ s.}$$

Die Daten für die Kugel werden an der Apparatur abgelesen und sind in Tabelle 2 zu finden.

Tabelle 2: Eigenschaften der Kugel.

$m_K \pm \Delta m_K / \text{g}$	$R_K \pm \Delta R_K / \text{m} \cdot 10^{-3}$
$588,3 \pm 0,0235$	$25,515 \pm 0,0102$

Die Länge des Drahtes wird gemessen und beträgt $L = 0.85 \text{m}$. Der Radius wird an zehn verschiedenen Stellen gemessen. Diese Werte in Tabelle 3 zu finden. Da die Werte bei jeder Messung dieselben sind, ist der gemittelte Wert von $R = 85 \mu\text{m}$ als fehlerfrei zu betrachten.

Tabelle 3: Der Radius des Drahtes.

$R / \text{m} \cdot 10^{-6}$
85
85
85
85
85
85
85
85
85
85

Damit lässt sich nach (12) das Schubmodul

$$G = (1.4675 \pm 0.0012) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

bestimmen. Der Fehler ergibt sich dabei nach Gauß zu

$$\Delta G = \frac{16\pi L}{5R^4} \cdot \sqrt{\left(\frac{2m_K R_K^2}{\bar{T}^3} \cdot \Delta \bar{T}\right)^2 + \left(\frac{2m_k R_k^2}{\bar{T}^2} \cdot \Delta R_K\right)^2 + \left(\frac{R_K^2}{\bar{T}^2} \cdot \Delta m_K\right)^2} = 1.2 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (18)$$

4.2 Bestimmung der Querkontraktionszahl und des Kompressionsmoduls

Die Querkontraktionszahl μ berechnet sich nach (4). Der zugehörige Fehler ergibt sich nach Gauß zu

$$\Delta \mu = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{G} \cdot \Delta E\right)^2 + \left(\frac{E}{G^2} \cdot \Delta G\right)^2} = 0.002. \quad (19)$$

Dazu wird zusätzlich der Wert für das Elastizitätsmodul

$$E = (21.00 \pm 0.05) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

benötigt. Dieser und dessen zugehöriger Fehler wurden angegeben. Damit ergibt sich

$$\mu = -0.285 \pm 0.002.$$

Das Kompressionsmodul Q kann mit (5) berechnet werden und ist somit

$$Q = (4.56 \pm 0.02) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Der Fehler ΔQ ergibt sich dabei nach Gauß zu

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{G^2}{(E - 3G)^2} \cdot \Delta E\right)^2 + \left(\frac{E^2}{3(3G - E)^2} \cdot \Delta G\right)^2} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (20)$$

4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes

Die Werte in Tabelle 4 werden zur Veranschaulichung in einem Plot aufgetragen. Die Werte werden hier mittels linearer Regression mit einem Graphen der Form $\frac{1}{T_m^2} = aB_H + b$ angenähert. Dabei ist B_H die magnetische Feldstärke in der Mitte der Helmholtzspule. Diese berechnet sich nach

$$B_H = \left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^3 \cdot \frac{\mu_0 N I}{R}. \quad (21)$$

Dieser Plot ist in Abbildung 5 zu sehen.

Mittels Python 3.7.0 werden die Variablen als

$$a = (1.08 \pm 0.03) \frac{1}{\text{T s}^2}$$

$$b = (1.63 \pm 0.08) \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{s}^2}$$

bestimmt. Des Weiteren folgt dem Verhältnis für T_m und m in (15) direkt

$$aB + b = \frac{mB_H}{4\pi^2\theta} + \frac{D}{4\pi^2\theta}. \quad (22)$$

Tabelle 4: Messdaten mit eingeschaltetem Magnetfeld.

(a) $I = 0.5$ A	(b) $I = 1.0$ A	(c) $I = 1.5$ A	(d) $I = 2.0$ A	(e) $I = 2.5$ A
T / s	T / s	T / s	T / s	T / s
11,558	9,024	7,543	6,591	5,940
11,556	9,025	7,539	6,576	5,950
11,549	9,013	7,541	6,590	5,934
11,547	9,016	7,540	6,582	5,934
11,540	9,007	7,543	6,583	5,933
11,545	9,002	7,540	6,585	5,931
11,524	9,012	7,531	6,567	5,935
11,531	9,002	7,521	6,567	5,937
11,528	8,996	7,520	6,574	5,934
11,523	9,008	7,519	6,577	5,929
(f) $I = 3.0$ A	(g) $I = 3.5$ A	(h) $I = 4.0$ A	(i) $I = 4.5$ A	(j) $I = 5.0$ A
T / s	T / s	T / s	T / s	T / s
5,445	5,060	4,749	4,461	4,243
5,448	5,060	4,740	4,449	4,216
5,444	5,057	4,737	4,452	4,244
5,446	5,050	4,749	4,476	4,208
5,438	5,057	4,750	4,466	4,201
5,443	5,058	4,754	4,458	4,198
5,446	5,057	4,752	4,479	4,202
5,449	5,057	4,745	4,475	4,201
5,442	5,050	4,754	4,472	4,283
5,444	5,051	4,730	4,475	4,286

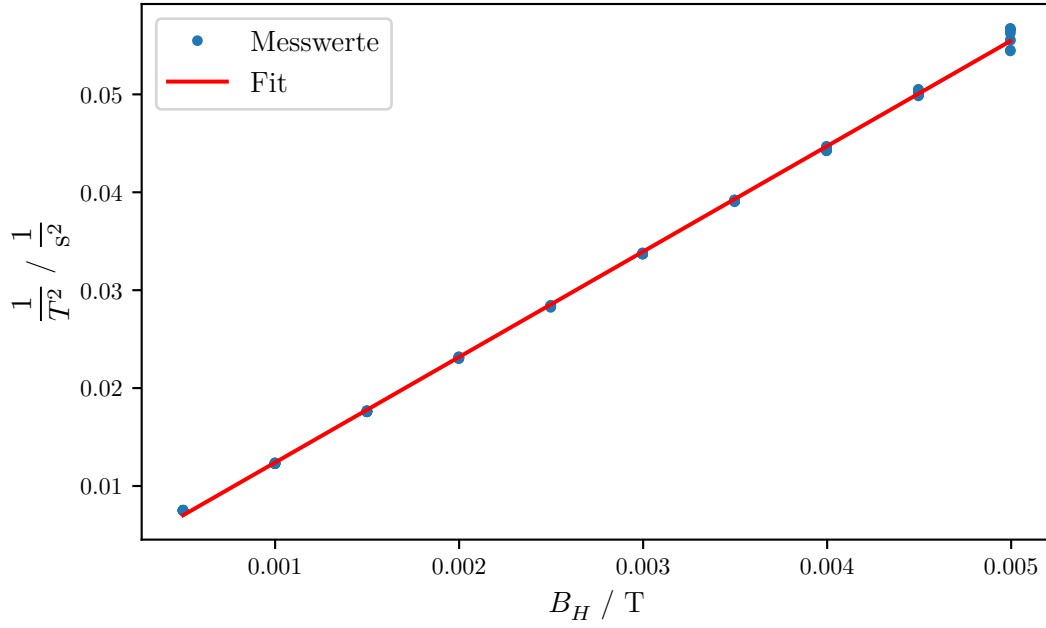


Abbildung 5: Plot und Fit der Periodendauern.

Das Gesamtträgheitsmoment θ ergibt sich nach Addition der Trägheitsmomente der Kugel θ_K , welches sich nach (10) berechnet, und des Trägheitsmomentes der Halterung θ_H , welches an der Apparatur abgelesen wird. Damit folgt der Zusammenhang

$$\theta = \theta_H + \theta_K = \theta_H + \frac{2}{5}m_K R_K^2. \quad (23)$$

Der zugehörige Fehler nach Gauß ergibt sich zu

$$\Delta\theta = \frac{2}{5}\sqrt{\left(R_K^2 \cdot \Delta m_K\right)^2 + \left(2m_K R_K \cdot \Delta R_K\right)^2} = 0.001 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2. \quad (24)$$

Der angegebene Wert für das Trägheitsmoment der Halterung ist

$$\theta_H = 22.5 \cdot 10^{-7} \text{kgm}^2.$$

Also ist

$$\theta = (1.555 \pm 0.001) \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2.$$

Das Verhältnis in (22) muss für alle B_H gelten, da das magnetische Moment m des Permanentmagneten nicht von dem äußeren Magnetfeld abhängt. Damit muss

$$m = 4\pi^2\theta a \quad (25)$$

gelten. Der Fehler nach Gauß berechnet sich zu

$$\Delta m = 4\pi^2 \sqrt{\left(\theta \cdot \Delta a\right)^2 + \left(a \cdot \Delta \theta\right)^2} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ Am}^2.$$

Somit ergibt sich

$$m = (6.6 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \text{ Am}^2.$$

5 Diskussion

Die aus den Messungen gewonnen Werte mit ihren relativen Fehlern lauten:

$$G = 1.4675 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \pm 0.08\%$$

$$\mu = -0.285 \pm 0.7\%$$

$$Q = 4.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \pm 0.4\%$$

$$m = 6.6 \cdot 10^{-3} \text{ Am}^2 \pm 2.7\%$$

Der errechnete Wert für G weicht von dem Literaturwert $G_{\text{Lit}} = 79.3 \text{ GPa}$ [1] um 185% ab. Der daraus errechnete Wert für μ ist entgegen der Literatur negativ. Wird der Literaturwert für G verwendet, so gilt $\mu_{\text{lit}} = 0.3241$ und $Q_{\text{lit}} = 199 \text{ GPa}$. Der Wert für Q ist nur 22.9 % des Literaturwertes.

In beiden Messreihen existiert eine gewisse Ungenauigkeit, da die Kugel und damit der Magnet nicht exakt ausgerichtet werden kann. In beiden Fällen ist natürlich das Erdmagnetfeld vorhanden. Diese Abweichung wird jedoch als gering eingeordnet und in der Auswertung nicht beachtet.

Ein Pendeln der Vorrichtung sorgt dafür, dass die Uhr frühzeitig stoppt oder zurücksetzt, da die Apparatur zur Zeitbestimmung sehr empfindlich ist. Dieses tritt schnell auf, wenn gegen den Tisch gestoßen wird oder Ähnliches, entsprechend konnte eine geringe Pendelbewegung nicht vermieden werden. Gerade gegen Ende der zweiten Messreihe werden die Amplituden der Torsionsschwingung sehr gering. Dadurch wird der Effekt, der selbst durch minimales Pendeln erzeugt wird, groß. Werte, bei deren Messung sich diese Eigenschaft aufgezeigt hat, werden nicht aufgenommen und in der Auswertung nicht betrachtet.

Mithilfe des Justierrades kann vorsichtig eine Schwingung mit geringer Amplitude angeregt werden. Dies funktioniert zuverlässig.

Alle Messwerte in einer Messreihe sind sehr ähnlich und daher ist der Fehler des Mittelwertes sehr gering, weshalb die endgültigen Messwerte auch mit einem geringen Fehler behaftet sind.

Da zur Längenmessung des Drahtes lediglich ein Maßband vorhanden ist und der Draht auch während dieser Messung in der Apparatur eingespannt ist, kann jenes nur ungefähr an den Draht gehalten werden, weshalb diese Messgröße mit einem Fehler belastet ist. Dieser kann allerdings auf weniger als 0.5 cm eingeordnet werden, was im Vergleich zu dem Messwert von 85 cm deutlich kleiner als 1 % ist. Dieser wird in der Rechnung nicht weiter beachtet.

Die Dicke des Drahtes wird an einem anderen gleichen Draht mit einer Mikrometerschraube gemessen. Eventuelle vorherige Messungen an diesem können diesen verformt haben, weshalb dieser eine andere Dicke haben könnte als der eigentliche Draht. Fehler bei der Bestimmung der Dicke des Drahtes gehen jedoch mit der vierten Potenz in den Wert für G und damit in den Wert für μ und Q ein. Damit kann die sehr große Abweichung von den Literaturwerten erklärt werden.

Die Mikrometerschraube selbst ist einfach am Nonus abzulesen und der Fehler von ihr ist als gering einzuordnen.

Literatur

- [1] LUMITOS AG. *Schubmodul*. 2018. URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Schubmodul.html>.
- [2] TU Dortmund. *V102 - Drehschwingungen*. 2018.