

V353

## Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Robin Pelkner

robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser

joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.01.2019

Abgabe: 15.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Der Aufladevorgang . . . . .	3
2.2 Relaxationsverhalten bei angelegten Wechselspannungen . . . . .	4
2.3 Der RC-Schwingkreis als Integrator . . . . .	5
<b>3 Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1 Bestimmung der Zeitkonstante . . . . .	5
3.2 Bestimmung der frequenzabhängigen Amplitude und Phasendifferenz . . .	5
3.3 Überprüfung der Integratorfunktion des RC-Kreises . . . . .	6
<b>4 Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1 Aufladeprozess eines Kondensators . . . . .	6
4.2 Angelegtes Sinussignal mit variabler Frequenz . . . . .	7
4.3 Überprüfung der Integrationsfunktion des RC-Kreises . . . . .	11
<b>5 Diskussion</b>	<b>12</b>
<b>Literatur</b>	<b>13</b>

## 1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, einen RC-Schwingkreis, also einen Stromkreis, welcher im wesentlichen aus einem Kondensator und einem Widerstand besteht, auf sein Relaxationsverhalten hin zu untersuchen. Die Untersuchung beschäftigt sich mit der Bestimmung der Zeitkonstante und der Frequenzabhängigkeit (einer angelegten Wechselspannung) der Amplitude beziehungsweise Phasendifferenz. Anschließend soll der RC-Kreis auf seine Eigenschaft als Integrator hin untersucht werden.

## 2 Theorie

Bei der nicht-oszillatorischen Rückkehr eines vom Ruhezustand ausgelenkten Systems in den Selbigen kann es zu Relaxationserscheinungen kommen. Die Zeit, welche das System hierzu benötigt, wird als Relaxationszeit bezeichnet. Im Allgemeinen kann für eine physikalische Größe  $A$  die Änderungsgeschwindigkeit im Zeitpunkt  $t$  als

$$\frac{dA}{dt} = c(A(t) - A(\infty)) \quad (1)$$

angegeben werden, wobei  $A(\infty)$  den Endzustand bezeichnet. Daraus folgt mittels Integration vom Zeitpunkt  $t = 0$  bis  $t$

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot e^{ct}, \quad (2)$$

wobei  $c < 0$  gelten muss, damit  $A(t)$  beschränkt ist. Das Relaxationsverhalten wird im Versuch durch den Entlade - beziehungsweise Ladevorgang eines mit einem Widerstand verbundenen Kondensator verwirklicht.

### 2.1 Der Aufladevorgang

Die Spannung eines Kondensators lässt sich mit Hilfe der gespeicherten Ladung  $Q$  und der Kapazität  $C$  des Kondensator als

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

darstellen. Nach dem Ohm'schen Gesetz folgt, wenn der Kondensator über einen Widerstand verbunden ist, dass

$$I = \frac{U_C}{R}, \quad (4)$$

wobei  $I$  die Stromstärke ist. Hieraus folgt für die Änderung der Ladung pro Zeiteinheit:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t). \quad (5)$$

Da hier ein Aufladevorgang betrachtet wird, ist der Kondensator am Anfang ungeladen und am Ende ungeladen, also gelten

$$Q(0) = 0 \text{ und } Q(\infty) = CU_0$$

Mittels Gleichung (2) folgt daraus die Gleichung für den Aufladevorgang zu

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (6)$$

und damit

$$U(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad (7)$$

wobei  $RC$  die Zeitkonstante des Relaxationsvorganges ist.

## 2.2 Relaxationsverhalten bei angelegten Wechselspannungen

Durch das Anlegen einer Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (8)$$

bildet sich eine Phasenverschiebung zwischen der eingehenden Wechselspannung und der vom Kondensator ausgehenden Wechselspannung, welche sich mit zunehmender Frequenz verzögert. Mit dem Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \phi(\omega)) \quad (9)$$

wird die Kondensatorspannung  $U_C$  beschrieben, wobei  $\phi$  die Phasenverschiebung ist. Mit dem Zusammenhang

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}, \quad (10)$$

sowie dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz ergibt sich die Phasendifferenz  $\phi$  zu

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \quad (11)$$

Als Funktion der Periodendauer  $b$  und dem Abstand der Nulldurchläufe zweier phasenverschobener Spannungen  $a$ , ergibt sich die Phasendifferenz  $\phi$  zudem zu

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi. \quad (12)$$

Hieraus lässt sich die Frequenzabhängigkeit der Phasendifferenz feststellen, sowie das Verschwinden der Phasendifferenz für niedrige Frequenzen beziehungsweise die Konvergenz der Phasendifferenz für hohe Frequenzen gegen  $\frac{\pi}{2}$ . Mit dem ebenfalls resultierenden Zusammenhang von Amplitude und Phasendifferenz

$$A(\omega) = -\frac{\sin(\phi)}{\omega RC} U_0, \quad (13)$$

ergibt sich die Amplitude  $A$  zu

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (14)$$

## 2.3 Der RC-Schwingkreis als Integrator

Der RC-Kreis hat die Eigenschaft unter gewissen Voraussetzungen eine zeitlich veränderliche Spannung  $U(t)$  zu integrieren. Aus dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz und Gleichung (10) folgt

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t). \quad (15)$$

Unter der Voraussetzung  $\omega \gg \frac{1}{RC}$ , ist  $|U_C| \ll |U_R|$  und  $|U_C| \ll |U|$ , sodass sich näherungsweise sagen lässt:

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \quad (16)$$

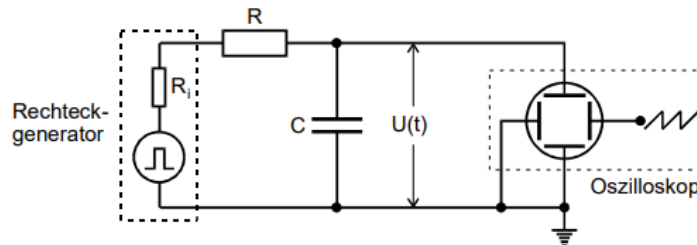
beziehungsweise

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (17)$$

## 3 Durchführung

### 3.1 Bestimmung der Zeitkonstante

Zur Bestimmung der Zeitkonstante wird die Schaltung aus Abbildung 1 verwendet. Die Auf- und Entladung des Kondensators wird hier, wie zu sehen, über eine Rechteckspannung verwirklicht. Die Aufladekurve wird auf einem digitalen Oszilloskop dargestellt. Anschließend werden mittels der Cursorfunktion des Oszilloskops mindestens 10 Zusammenhänge zwischen Zeitpunkt der Ladung und der dortigen Spannung auf dem Kondensator aufgenommen. Zu Beachten ist dabei die Position des Spannungsnullpunktes, welche auf dem Bildschirm bekannt sein muss.

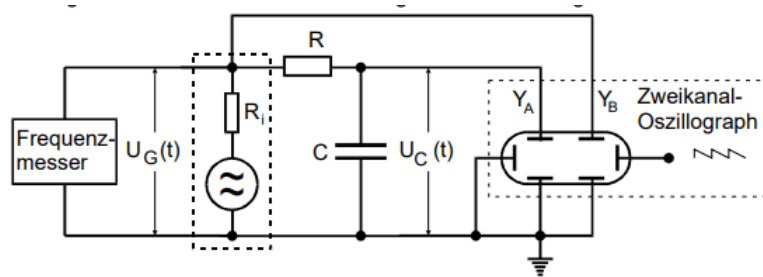


**Abbildung 1:** Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstante des Relaxationsvorgangs [1, S. 281].

### 3.2 Bestimmung der frequenzabhängigen Amplitude und Phasendifferenz

Zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung wird die Schaltung, welche in Abbildung 2 zu sehen ist, verwendet, wobei der zweite Kanal des Oszilloskops zunächst nicht benötigt wird. Mittels des Sinusgenerators lassen sich Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen erzeugen und auf die Schaltung ausgeben.

Das Oszilloskop zeigt dann wieder die Spannung des Kondensators an, dessen Amplitude mit der Cursorfunktion des Oszilloskops ausgemessen wird. Insgesamt werden pro Zehnerpotenz, im Bereich von 10 Hz – 10000 Hz, Messungen für zehn verschiedene Frequenzen durchgeführt. Die Bestimmung der Phasendifferenz der Kondensatorspannung erfolgt analog zur Messung der Amplituden. Dieses Mal werden beide Kanäle des Oszilloskops aus Abbildung 2 verwendet; der erste Kanal zeigt nun die Kondensatorspannung, während der zweite Kanal die Spannung des Generators wiedergibt. Der Abstand der Nulldurchgänge der beiden Kurven wird wieder mittels der Cursorfunktion ermittelt. Die verwendeten Frequenzen, in deren Abhängigkeit die Phasendifferenz gemessen wird, müssen für die anschließende Überprüfung des Integratorverhaltens die selben Werte sein, wie schon bei der Messung der Amplitude. Zu Beachten ist hierbei noch, dass beide Sinuskurven symmetrisch zur gleichen X-Achse liegen.



**Abbildung 2:** Schaltung zur Bestimmung der Phasendifferenz und der Amplitude der Kondensatorspannung bei angelegter Wechselspannung und zur Überprüfung der Integratorfunktion des RC-Kreises [1, S. 282].

### 3.3 Überprüfung der Integratorfunktion des RC-Kreises

Hier wird wieder die Schaltung aus Abbildung 2 verwendet. Der Funktionengenerator wird nacheinander auf eine Rechteck-, Sinus- beziehungsweise Dreiecksspannung eingestellt. Auf dem Bildschirm sind nun die generierte Spannung, sowie die durch den RC-Kreis integrierte Spannung zu sehen. Zum späteren Vergleich werden die Anzeigen als Thermodrucke aufgenommen.

## 4 Auswertung

### 4.1 Aufladeprozess eines Kondensators

Die Messwerte, die während des Aufladeprozesses des Kondensators aufgenommen werden, werden in einem Plot aufgetragen. Dabei wird (7) umgeformt und logarithmisiert, um mittels linearer Regression eine Gerade der Form

$$\ln\left(1 - \frac{U_C}{U_0}\right) = -ax + b_1 \quad (18)$$

über die Messwerte zu legen. Dabei beträgt die Maximalspannung  $U_0 = 15,2\text{V}$ . Die gemessenen Daten sind in Tabelle 1 zu finden und der geplottete Graph in Abbildung 3.

**Tabelle 1:** Messwerte des Aufladevorgangs.

$t / \text{ms}$	$U / \text{V}$
0,28	2,0
0,40	3,2
0,48	4,0
0,64	5,2
0,76	6,2
0,88	7,0
1,04	8,0
1,24	9,0
1,36	9,6
1,52	10,2
1,84	11,2
2,04	12,0
2,20	12,4

Mittels Python 3.7.0 bestimmen sich folgende Werte für die Koeffizienten:

$$a = (800 \pm 8) \frac{1}{\text{s}}$$

$$b_1 = 0,08 \pm 0,01.$$

Mit der Relation

$$a = \frac{1}{RC}$$

folgt direkt

$$RC = (1,26 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

## 4.2 Angelegtes Sinussignal mit variabler Frequenz

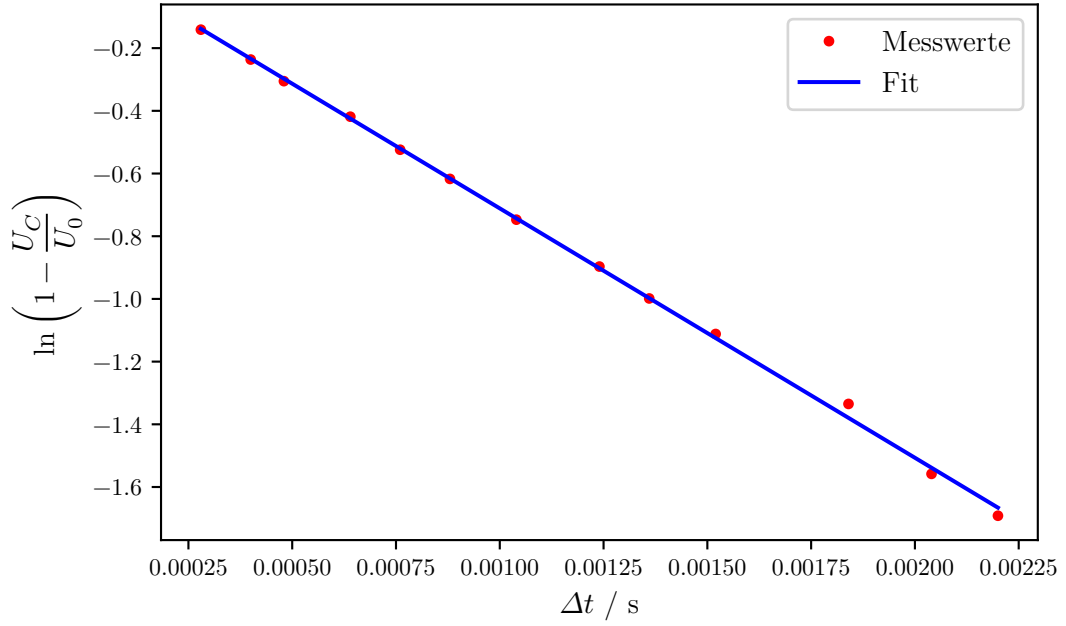
Die Messwerte, die während der Messung mit einem angelegtem Sinussignal aufgenommen werden, sind in Tabelle 2 zu sehen. Zur Verschaulichung werden diese Werte in zwei Diagrammen aufgetragen, wobei die  $\omega$ -Achsen jeweils logarithmisch skaliert sind.

Zunächst wird das Amplitudenverhältnis  $\frac{U_C}{U_0}$  gegen die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  aufgetragen. Darüber wird ein Fit der Form

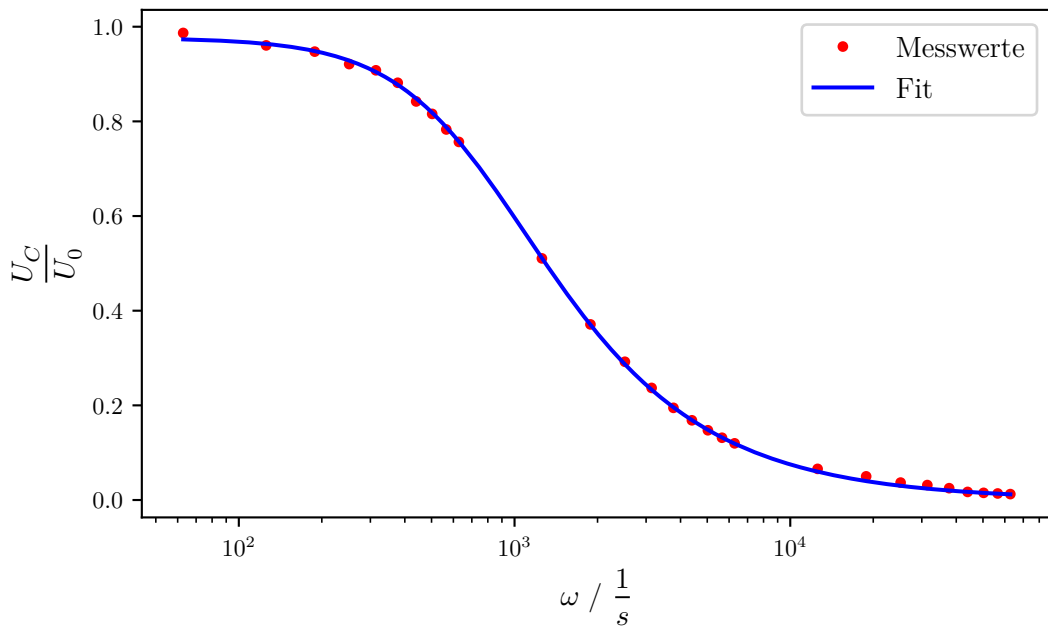
$$\frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{b_2 + \omega^2 \cdot (RC)^2}} \quad (19)$$

gelegt. Dieser Plot ist in Abbildung 4 zu sehen.

Nach dieser Methode berechnet sich die Zeitkonstante mittels Python 3.7.0 als



**Abbildung 3:** Plot der Messdaten des Aufladevorgangs.



**Abbildung 4:** Plot der Messdaten der Amplitude in Frequenzabhängigkeit.



**Tabelle 2:** Daten der Messung der Amplitude und Phasenverschiebung bei verschiedenen Frequenzen.

$f / \text{Hz}$	$U / \text{V}$	$a / \mu\text{s}$
10	15,0	−8600
20	14,6	−1200
30	14,4	40
40	14,0	600
50	13,8	860
60	13,4	940
70	12,8	900
80	12,4	940
90	11,9	960
100	11,5	960
200	7,76	760
300	5,64	620
400	4,44	500
500	3,60	420
600	2,96	360
700	2,56	310
800	2,24	280
900	2,00	250
1000	1,82	230
2000	1,00	120
3000	0,76	82
4000	0,56	61
5000	0,48	49
6000	0,38	41
7000	0,26	35
8000	0,23	31
9000	0,21	29
10 000	0,19	25

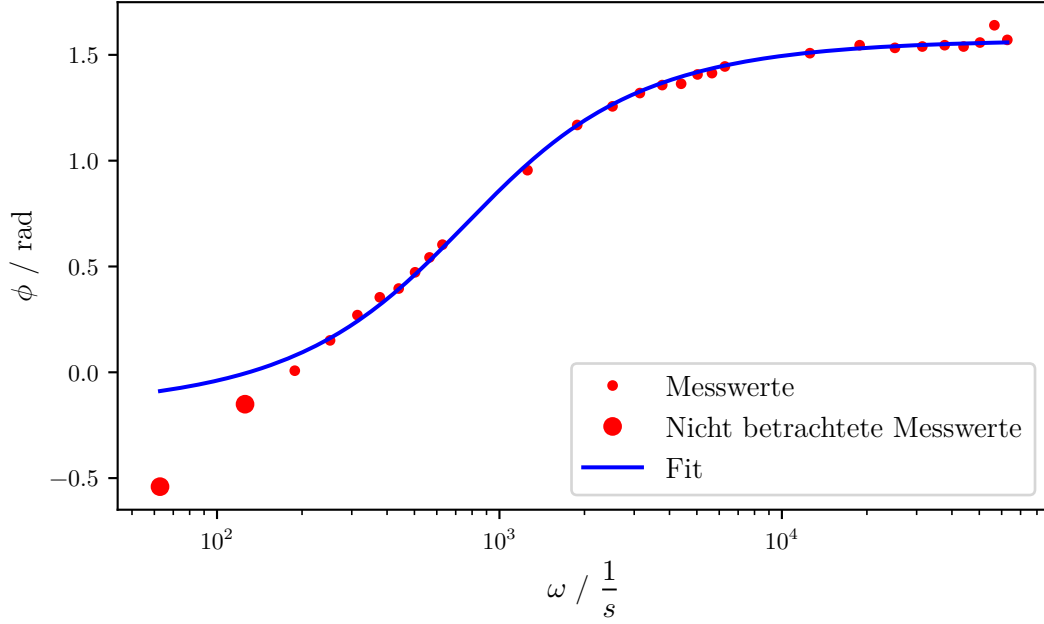
$$RC = (1,36 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}\text{s}$$

$$b_2 = 1,049 \pm 0,006.$$

Um die Phasenverschiebung mittels der Daten in Tabelle 2 zu errechnen wird (12) verwendet. Diese Daten werden ebenfalls geplottet und über diese wird ein Fit der Form

$$\phi = \arctan(-RC \cdot \omega + b_3) \quad (20)$$

gelegt. Das resultierende Diagramm ist in Abbildung 5 zu finden.



**Abbildung 5:** Plot der Messdaten der Phasenverschiebung in Frequenzabhängigkeit.

Ebenfalls mittels Python 3.7.0 ermittelt sich die Koeffizienten mit dieser Methode als

$$RC = (1,33 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}\text{s}$$

$$b_3 = -0,17 \pm 0,02.$$

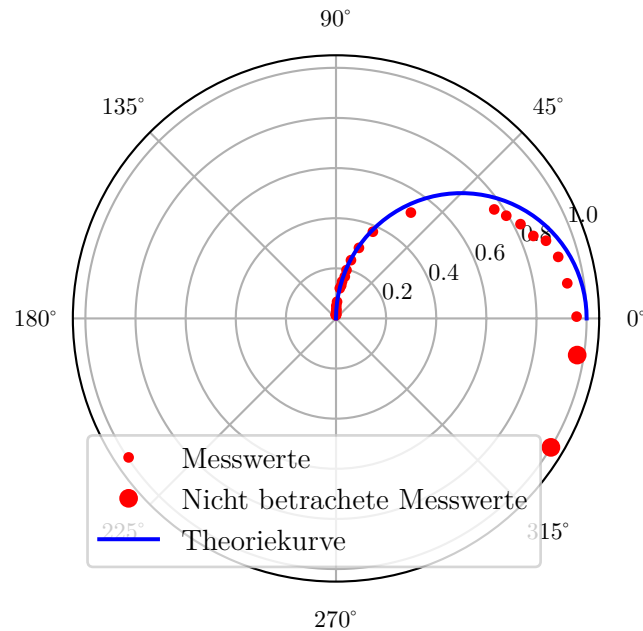
Mittels der Daten in Tabelle 2 wird ebenfalls ein Polarplot erstellt. Dabei wird das Amplitudenverhältnis  $\frac{U_C}{U_0}$  radial aufgetragen und die Phasenverschiebung als Winkel. Zur Bestimmung der Ausgleichsfunktion wird zunächst (11) umgekehrt. Dadurch entsteht

$$\omega(\phi) = -\frac{\tan(\phi)}{RC}. \quad (21)$$

Dies wird in (13) eingesetzt und es entsteht die Ausgleichsfunktion

$$A(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\tan(\phi)} = \cos(\phi). \quad (22)$$

Der damit entstehende Plot ist in Abbildung 6 zu sehen.



**Abbildung 6:** Das Amplitudenverhältnis in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung.

### 4.3 Überprüfung der Integrationsfunktion des RC-Kreises

Zunächst wird eine Sinusfunktion in den RC-Kreis gesendet. Es gilt

$$\int \sin(t) dt = \cos(t). \quad (23)$$

Dieses ist in Abbildung 7a zu sehen. Daraufhin wird eine Rechteckfunktion integriert. Dabei sei  $f(t)$  die Rechteckfunktion, womit

$$\int f(t) dt = \begin{cases} t & 0 \leq t < T \\ -t & T \leq t < 2T \end{cases} \quad (24)$$

gilt. Auch dies ist in Abbildung 7c zu sehen. Zuletzt wird ein Dreieckssignal integriert. Nun sei  $g(t)$  die Dreiecksfunktion. Damit gilt

$$\int g(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < T \\ -\frac{1}{2}t^2 & T \leq t < 2T \end{cases} \quad (25)$$

Diese Funktion wird ebenfalls von dem Oszilloskop dargestellt und ist in Abbildung 7b zu sehen.

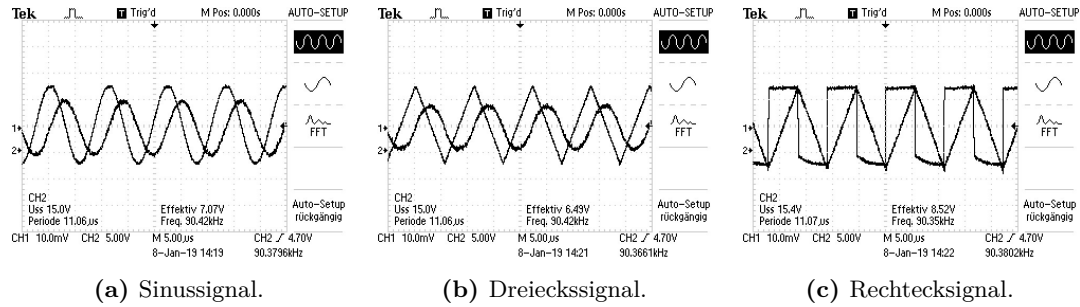


Abbildung 7: Graphen während der Integration.

## 5 Diskussion

Es werden mit den drei Methoden verschiedene Werte für die Zeitkonstante errechnet. Mit dem Aufladeprozess wird

$$RC = 1.26s \pm 0.8\%$$

bestimmt. Mit der Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz wird

$$RC = 1.36s \pm 1.5\%$$

und mittels der Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz wird

$$RC = 1.33s \pm 3.8\%$$

bestimmt. Da diese Werte alle nah beieinander liegen kann von einer im Allgemeinen guten Messung ausgegangen werden. Die Messwerte liegen auch, bis auf zwei bei der Phasenverschiebungsmessreihe, sehr nahe der Theoriekurven. In besagter Messreihe der Phasenverschiebung werden die Messwerte bei geringer Frequenz ungenau, was auch gut in dem Polarplot in Abbildung 6 zu sehen ist. Zunächst sind die Werte nahezu exakt auf der Theoriekurve während sie gegen Ende immer mehr Abweichen. Die nicht betrachteten Messwerte geben sogar eine Phasenverschiebung an, die nicht zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  liegt. Das Oszilloskop hat auch nur eine begrenzte Auflösung. Die dadurch entstehende Ungenauigkeit kann allerdings mithilfe der Cursor- und der Skalierungsfunktion gut vermindert werden.

Aufgrund des Innenwiderstandes des Funktionsgenerators existiert ein gewisser systematischer Fehler, der in der Auswertung allerdings nicht beachtet wird.

Die Integrationsfunktion des RC-Kreises ist gegeben, da die entstehenden Funktionen sehr genau den erwarteten entsprechen.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2019.