

V351

Fourieranalyse und Synthese

Robin Pelkner
robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser
joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 18.12.2018

Abgabe: 08.01.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
3.1 Vorbereitung - Bestimmung der Fourierkoeffizienten	4
3.1.1 Rechteckschwinung	4
3.1.2 Sägezahnschwingung	4
3.1.3 Dreieckschwingung	5
3.2 Fourieranalyse	5
3.3 Fouriersynthese	5
4 Auswertung	6
4.1 Fourier-Analyse	6
4.2 Fourier-Synthese	10
5 Diskussion	12
Literatur	13

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden verschiedene periodische Funktionen in ihre Fourierkoeffizienten zerlegt. Diese werden genutzt, um eine Fouriersynthese durchzuführen.

2 Theorie

Für eine periodische Funktion $f(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = f(t + T).$$

Für eine solche Funktion besagt das Fouriertheorem, dass sie in Terme von Sinus und Kosinus zerlegt werden kann. Dabei ist die Fourierreihe mit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) \right). \quad (1)$$

definiert. Diese Reihe ist gleichmäßig konvergent, wenn $f(t)$ eine periodische Funktion mit der Periodendauer T ist. Dann gilt für die Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) dt \quad (2)$$

und

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) dt \quad (3)$$

mit $k \in \mathbb{N}$.

Aus der Definition der Fourierreihe lassen sich ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz ν_1 erkennen. Diese sind die Frequenzen zu den jeweiligen Oberschwingungen. Des Weiteren gibt es in (1) nur Phasenverschiebungen von 0 , $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$. Werden die Amplituden a_k beziehungsweise b_k von einer periodischen Funktion gegen die zugehörigen Frequenzen aufgetragen ergibt sich ein Linienspektrum, während eine nicht periodische Funktion ein kontinuierliches Spektrum liefert. Eine Fourieranalyse lässt sich auch mit nicht stetigen periodischen Funktionen durchführen. Dabei entsteht im Graphen der Fourierreihe an den Unstetigkeitsstellen eine Überschwingung. Diese wird als Gibb'sches Phänomen bezeichnet. Die Größe bleibt selbst bei $k \rightarrow \infty$ konstant, jedoch wird die Breite des Überschwings geringer.

Die Fouriertransformation liefert dabei das Linienspektrum. Es gilt dabei

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt. \quad (4)$$

In der Praxis kann allerdings nicht über einen unendlichen Zeitraum integriert werden, weshalb diese Funktionen nicht periodisch sind. Dadurch entstehen kleine Nebenmaxima und es entstehen keine δ -Peaks, sondern endlich breite Linien an den entsprechenden Stellen.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitung - Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Zur Vorbereitung auf das Experiment sind die Fourierkoeffizienten von drei Schwingungsformen, einer Rechteck-, einer Sägezahn- und einer Dreieck, zu bestimmen. Dabei ist es von Vorteil die Schwingungen als gerade oder ungerade Funktionen zu definieren, so dass Koeffizienten wegfallen. Die Berechnung dieser erfolgt jeweils über Gleichung (2) und Gleichung (3), woraus sich dann nach Gleichung (1) jeweils die zugehörige Fourierreihe berechnet.

3.1.1 Rechteckschwingung

Die Rechteckschwingung wird als

$$g(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (5)$$

definiert. Die Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind

$$a_n = 0$$

und

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Die zugehörige Fourierreihe ist daher

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right), \quad (6)$$

wobei n nur ungerade Werte annimmt.

3.1.2 Sägezahnschwingung

Die Funktion, die die Sägezahnschwingung beschreibt lautet:

$$g(t) = \begin{cases} |t| & -T \leq t < T \\ 0 & t = T \end{cases}. \quad (7)$$

Die Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind

$$a_n = \frac{2T}{\pi n} \cos(\pi n)$$

und

$$b_n = 0.$$

Daher ist die zugehörige Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2T}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right). \quad (8)$$

3.1.3 Dreieckschwingung

Die Funktion zur Beschreibung der Dreieckschwingung ist definiert als

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{T} & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ \frac{2A}{T} & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad (9)$$

wobei A die Amplitude der Schwingung ist. Die Fourierkoeffizienten zu dieser Funktion sind

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{8A}{(\pi n)^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$b_n = 0.$$

Die dazugehörige Fourierreihe ist daher

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{8A}{(\pi n)^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right), \quad (10)$$

wobei n nur ungerade Werte annimmt.

3.2 Fourieranalyse

In diesem Versuchsteil wird ein Oszilloskop an einen Funktionsgenerator angeschlossen. Am Funktionsgenerator werden nacheinander eine Rechteck-, Dreieck- und Sägezahn-schwingung eingestellt. Das Oszilloskop führt eine Fourieranalyse durch und zeigt ein Frequenzspektrum. Mit dem Cursor werden die Amplituden abgelesen und anschließend notiert.

3.3 Fouriersynthese

Zunächst werden zwei Ausgänge eines Oberwellengenerator an das Oszilloskop angeschlossen, welches in den XY-Betrieb umgeschaltet wird. Die so entstehenden Lissajous-Figuren werden genutzt, um die beiden Signale phasengleich zu schalten. Diese Prozedur wird mit allen Ausgängen durchgeführt. Dabei werden die Amplituden maximal eingestellt, um genaue Einstellungen vornehmen zu können. Im Weiteren werden die Amplituden so eingestellt, dass sie dem Proportionalitätsfaktoren der zu synthesierenden Schwingungen passen. Dieser wird zuvor in der Vorbereitung berechnet. Für diese Konfiguration wird ein Voltmeter genutzt.

Das Oszilloskop wird nun erneut in den XT-Betrieb umgeschaltet und die einzelnen Oberwellen angeschlossen. Die Phase wird mithilfe von zwei Schaltern um 90° beziehungsweise 180° verschoben, bis die angezeigten Schwingungen die jeweils Gewünschte gut approximiert.

4 Auswertung

4.1 Fourier-Analyse

Die gemessenen Amplituden werden auf die Amplitude der ersten Oberwelle normiert. Gemessene Amplituden, sowie die Normierung dieser ist in Tabelle 1 für alle drei Schwingungsformen zu sehen. Die Normierungen werden doppellogarithmisch gegen die Nummer

Tabelle 1: Die gemessenen Amplituden der drei Schwingungen, sowie deren Normierung auf die erste Oberwelle.

n	Rechteck		Dreieck		n	Sägezahn	
	U_n / mV	$\frac{U_n}{U_1}$	U_n / mV	$\frac{U_n}{U_1}$		U_n / mV	$\frac{U_n}{U_1}$
1	2000	1.000	2800	1.000	1	2160	1.000
3	712	0.356	272	0.097	2	1030	0.477
5	432	0.216	102	0.036	3	656	0.304
7	288	0.144	50	0.018	4	552	0.256
9	216	0.108	28	0.010	5	448	0.207
11	200	0.100	22	0.008	6	384	0.178
13	168	0.084			7	312	0.144
15	144	0.072			8	264	0.122
17	112	0.056			9	248	0.115
19	104	0.052			10	232	0.107

der Oberwellen aufgetragen, worüber anschließend eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt wird. Dies ist nötig um die Genauigkeit der Messung hinsichtlich des Abfalls der Oberwellenamplituden zu überprüfen, da diese mit dem Faktor $\frac{1}{n}$ beziehungsweise $\frac{1}{n^2}$ bei der Dreieckschwinung abnehmen sollen, wie bereits in Unterabschnitt 3.1 ermittelt wurde. Durch eine doppellogarithmische Auftragung und anschließender Bestimmung der Steigung der Ausgleichsgeraden kann diese mit dem theoretischen Faktor von -1 bei der Rechteck - und Sägezahnschwinung und -2 bei der Dreieckschwinung verglichen werden. Bei allen Schwingungsformen wird eine Ausgleichsrechnung der Form

$$y = a \cdot x + b. \quad (11)$$

durchgeführt, wobei y die Normierung der Amplituden $\frac{U_n}{U_1}$ ist und x die Nummer der Oberwellen n . Die Steigung a der Ausgleichsgerade errechnet sich über

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

und die Konstante b über

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}, \quad (13)$$

wobei N jeweils die Gesamtanzahl der verwendeten Oberwellen ist. Die Mittelwerte \bar{x} sind mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (14)$$

zu berechnen und haben den Fehler

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot (N-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (15)$$

Die aufgetragenen Werte aus Tabelle 1, sowie die Ausgleichsgerade zur Rechteckschwingung sind in Abbildung 1 zu sehen. Bei der Rechteckschwingung, sowie bei der Sägezahnsschwingung werden jeweils $N = 10$ Amplitudenverhältnisse eingebracht. Bei der Rechteckschwingung ist außerdem zu Beachten, dass, wie in Unterabschnitt 3.1 festgestellt, nur die ungeraden Koeffizienten einwirken, sodass hier die ersten zehn Amplitudenverhältnisse ungerader Oberwellennummer aufgetragen werden. Die Steigung der linearen Ausgleichsgerade zur Rechteckschwingung beträgt nach Gleichung (12)

$$a = (-1.002 \pm 0.021).$$

Bei der Sägezahnsschwingung sind die entsprechenden, aufgetragenen Werte aus Ta-

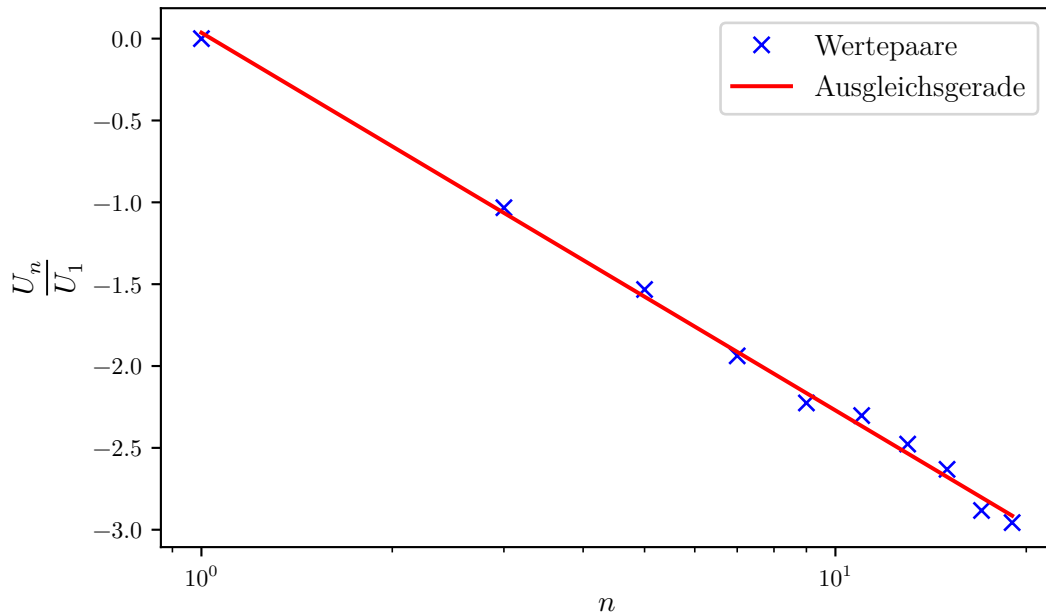


Abbildung 1: Normierungen der Amplituden der Rechteckschwingung doppellogarithmisch gegen die Nummer der Oberwellen aufgetragen mit zugehöriger Ausgleichsgerade.

belle 1, sowie die zugehörige Ausgleichsgerade in Abbildung 2 zu sehen. Die Steigung der Ausgleichsgerade beträgt mit Gleichung (12)

$$a = (-0.966 \pm 0.021).$$

Statt einer Anzahl von $N = 10$ Oberwellen, liegen hier lediglich $N = 6$ Oberwellen vor

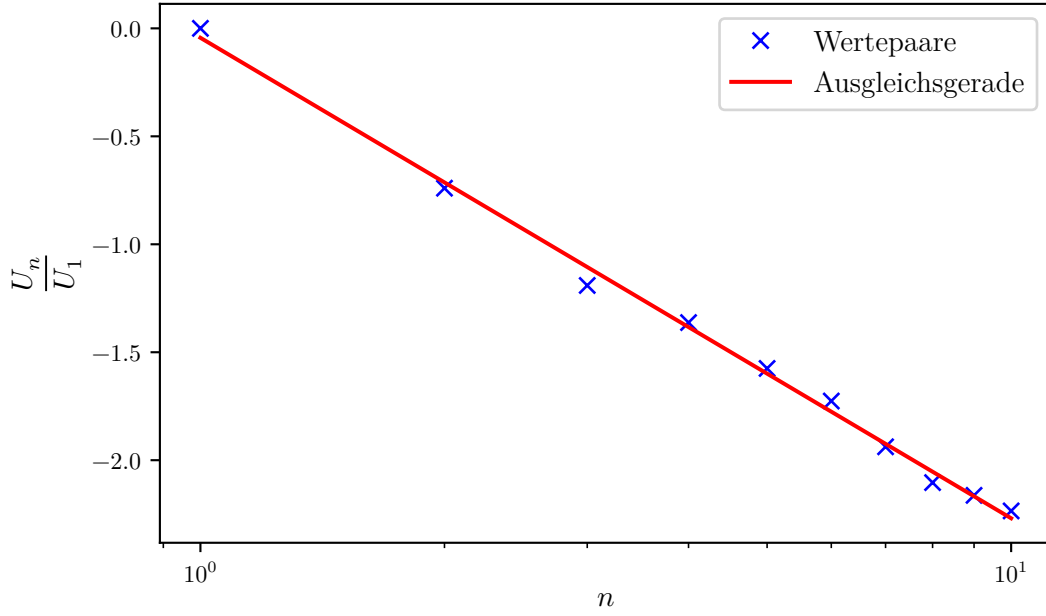


Abbildung 2: Normierungen der Amplituden der Sägezahnschwinung doppellogarithmisch gegen die Nummer der Oberwellen aufgetragen mit zugehöriger Ausgleichsgerade.

(siehe Abschnitt 5), wobei auch hier wieder nur Oberwellen ungerader Nummer einwirken. Die Werte werden entsprechend wieder aus Tabelle 1 entnommen und doppellogarithmisch gegen die Anzahl der Oberwellen aufgetragen, worüber wieder eine Ausgleichsgerade gebildet wird. Dies ist in Abbildung 3 zu sehen. Die Steigung der Ausgleichsgerade beträgt

$$a = (-2.041 \pm 0.037).$$

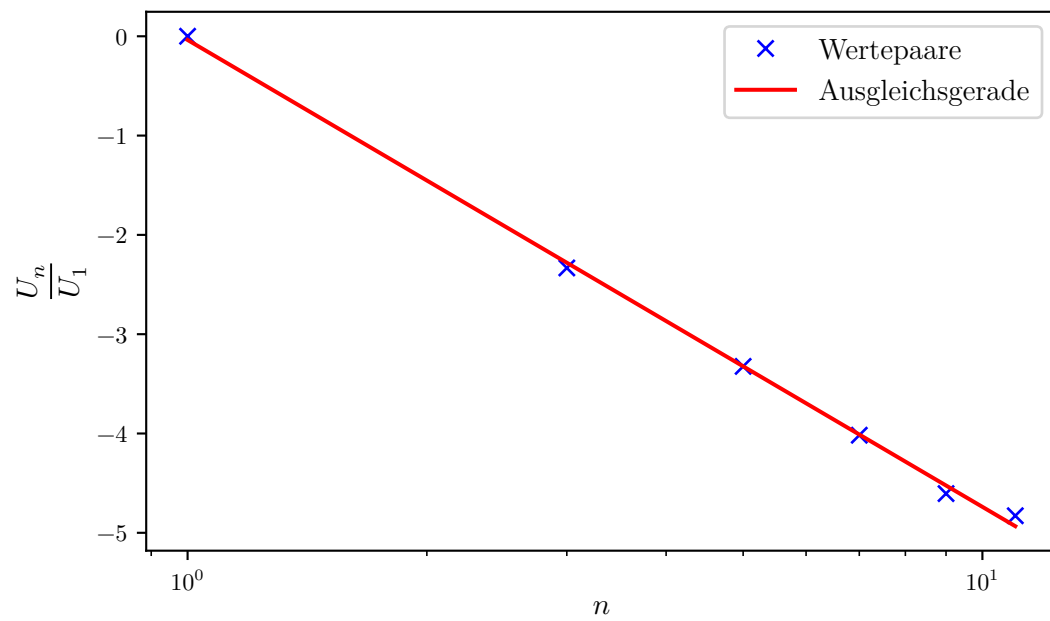


Abbildung 3: Normierungen der Amplituden der Dreieckschwinung doppellogarithmisch gegen die Nummer der Oberwellen aufgetragen mit zugehöriger Ausgleichsgerade.

4.2 Fourier-Synthese

Die zur Fouriersynthese verwendeten Amplituden sind in Tabelle 2 zu sehen. Bei der

Tabelle 2: Eingestellte Amplituden zur Fouriersynthese zu den drei Schwingungsformen.

Nummer der Oberwelle	Eingestellte Amplituden U / mV	
	Rechteck und Sägezahn	Dreieck
1	709.00	712.0
2	354.50	178.0
3	236.30	79.1
4	177.25	44.5
5	141.80	
6	118.16	
7	101.28	
8	88.625	
9	78.80	
10	70.90	

Synthese der Rechteckschwingung werden die entsprechenden Werte aus Tabelle 2 entnommen, wobei in die Rechteckschwingung nur Oberwellen mit ungerader Nummer einwirken; Oberwellen mit gerader Nummer sind bei der Rechteckschwingung zu vernachlässigen. Die synthetisierte Funktion ist in Abbildung 4 dargestellt. Diese lässt sich gut als Darstellung einer Rechteckfunktion identifizieren, wobei an den Extrema der Rechteckfunktion weitere kleinere Minima und Maxima zu erkennen sind. Des Weiteren treten diese kleineren Minima und Maxima nicht konstant auf einer Höhe auf, sondern sind in ihrer Höhe an den Maxima der Rechteckfunktion leicht fallend und an den Minima der Rechteckfunktion leicht steigend.

Bei der Synthese der Sägezahnschwingung werden dieselben Koeffizienten wie bei der Synthese der Rechteckschwingung verwendet, da die Koeffizienten beider Schwingungsformen mit dem selben Faktor $\frac{1}{n}$ abfallen. Hier wirken allerdings alle entsprechende Werte aus Tabelle 2 ein. Die synthetisierte Sägezahnfunktion ist in Abbildung 5 zu sehen. Auch die Sägezahnschwingung ist eindeutig zu erkennen. An der linken Flanke der Amplituden sind deutliche Nebenschwingungen auszumachen, welche teilweise sehr flach ausfallen, aber auch steilere Nebenamplituden auftreten. Die rechte Flanke, ist sehr steil fallend, aber dennoch Ungenauigkeiten in Form von kleineren Nebenschwingungen unterworfen. Zur Synthese der Dreieckschwingung werden die entsprechenden Amplituden (von Oberwellen ungerader Nummer) aus Tabelle 2 verwendet. Die so synthetisierte Dreieckschwingung ist in Abbildung 6 zu sehen. Die dargestellte Schwingung ist als Dreieckschwingung auszumachen. An der linken Flanke tritt eine Nebenamplitude auf, welche den Eindruck eines Knicks in der Flanke vermittelt. Die rechte Flanke ist von solchen Ungenauigkeiten nicht betroffen, scheint aber dennoch nicht gerade zu verlaufen, sondern einen leicht kurvenförmigen Verlauf zu nehmen.

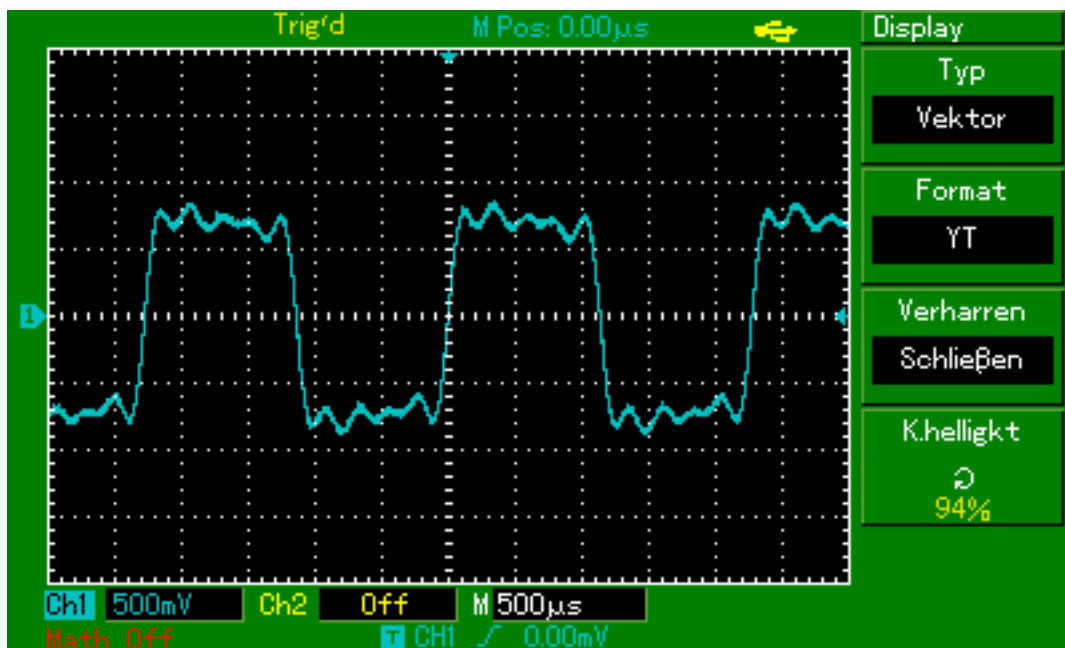


Abbildung 4: Synthetisierte Rechteckschwingung.

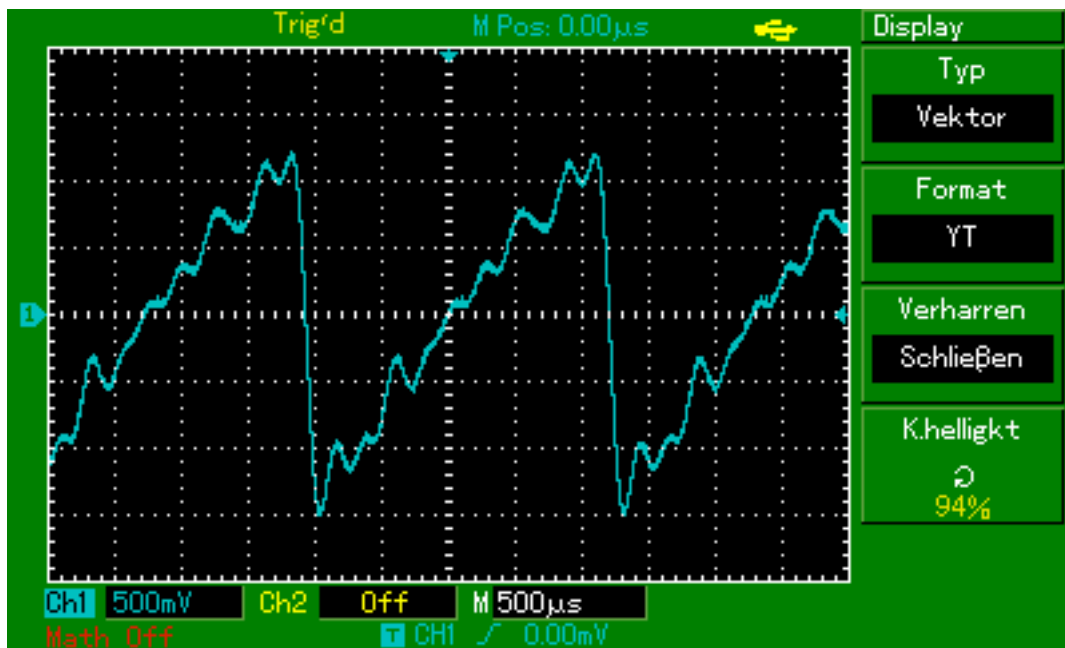


Abbildung 5: Synthetisierte Sägezahnschwingung.

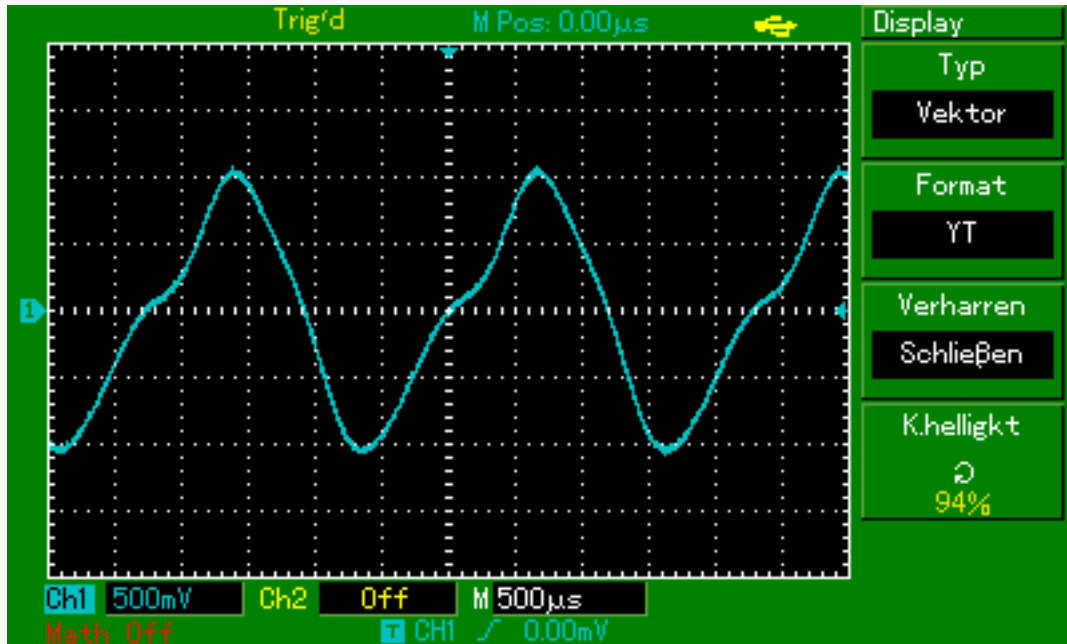


Abbildung 6: Synthetisierte Dreieckschwingung.

5 Diskussion

Bei der Fourieranalyse sind die Steigungen der drei Ausgleichsgeraden näher zu betrachten, insbesondere ihr Vergleich zu den Theoriewerten. Bei der Rechteckschwingung, sowie bei der Sägezahnswingung soll eine Steigung der Ausgleichsgeraden von -1 ; bei der Dreieckschwingung eine Steigung von -2 . Die Steigungen der Geraden mit den relativen Abweichungen von den Theoriewerten sind:

$$a_{\text{Rechteck}} = (-1.002 \pm 0.021)$$

mit einer Abweichung von 0.2%,

$$a_{\text{Sägezahn}} = (-0.966 \pm 0.021)$$

mit einer Abweichung von -3.5% und

$$a_{\text{Dreieck}} = (-2.041 \pm 0.037)$$

mit einer Abweichung von 2.1% vom jeweiligen Theoriewert. Die relativen Abweichungen der Steigungen sind alle sehr gering, was auf eine allgemein sehr genaue Messung schließen lässt. Besonders die sehr geringe Abweichung bei der Rechteckschwingung sticht hierbei hervor. Da allerdings die Messung bei allen Schwingungen gleich durchgeführt wurde, ist davon auszugehen, dass es sich bei diesem sehr gutem Ergebnis lediglich um

eine zufällig bessere Messung handelt. Bei der Analyse der Dreieckschwingung konnten zudem nur sechs, statt wie bei den anderen Messungen zehn, Messwerte aufgenommen werden. Dies liegt vor allem daran, dass die Koeffizienten der Dreieckschwingung mit $\frac{1}{n^2}$ abfallen und daher wesentlich schneller sehr klein werden, als bei den anderen beiden Schwingungen, deren Koeffizienten bloß mit $\frac{1}{n}$ abfallen. Somit waren weitere Messwerte mit den verwendeten Messgeräten nicht mehr zuverlässig messbar; zur Messung weiterer Werte werden somit genauere Messgeräte erforderlich.

Bei der Fourier-Synthese traten verschiedenen Ungenauigkeiten im Zusammenhang mit dem verwendeten Oberwellengenerator auf. Bei diesem lag ein interner Wackelkontakt vor, was die genaue Justierung der Amplituden sehr erschwerte. Ganz genaues Einstellen war oftmals aufgrund dessen nicht möglich; die Abweichungen liegen aber im Rahmen. Lediglich bei der Dreieckschwingung traten, da hier früh sehr kleine Amplituden eingestellt werden müssen, größere Schwankungen auf, die aber auch nicht eindeutig bestimmbar sind. Dennoch fallen die synthetisierten Graphen wie zu erwarten aus. Das sogenannte Gibb'sche Phänomen ist bei der Rechteckschwingung, sowie bei der Sägezahnsschwingung deutlich an den verschiedenen Nebenamplituden zu erkennen. Dies tritt auf, da hier im Experiment mit einer endlichen Anzahl an Oberwellen gearbeitet wird. Erst bei unendlich vielen, einwirkenden Oberwellen verschwindet dieses Phänomen. Da dies im Experiment allerdings nicht umsetzbar ist, sind diese Phänomene zu erwarten. Bei der Rechteckschwingung sind diese Nebenamplituden sehr stark ausgeprägt, lassen aber dennoch auf die Form der Rechteckschwingung schließen. Die Unstetigkeitsstellen der Sägezahnsschwingung sind nur durch eine sehr steile rechte Flanke dargestellt, was das Gesamtbild der Synthese der Sägezahnsschwingung verfälscht. Dennoch lässt sich sagen, dass die Synthese der Rechteck- und Sägezahnsschwingung gut verlaufen ist. Da bei der Synthese der Dreieckschwingung nur zwei Oberwellen Verwendung fanden, ist das Ergebnis entsprechend ungenau. Die Nebenamplitude an den linken Flanken dieser führt zu einer starken Verfälschung dieser. Des Weiteren sind die Knickstellen an den Amplituden nicht so spitz, wie es bei einer Dreieckschwingung zu erwarten wäre. Die Synthese der Dreieckschwingung kann durch das Hinzufügen weiterer Oberwellen deutlich verbessert werden, wozu aber bessere Geräte von Nöten sind.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zur Fourier-Analyse und Synthese*. 2018.