

V408

Geometrische Optik

Robin Pelkner
robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser
joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 18.06.2019

Abgabe: 25.06.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Methoden zur Bestimmung der Brennweite f	4
2.1.1 Methode nach Bessel	4
2.1.2 Methode nach Abbe	5
3 Durchführung	6
4 Auswertung	6
4.1 Verifizierung der Linsengleichung und des Abbildungsgesetzes	6
4.2 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel . .	7
4.3 Bestimmung der Brennweite und der Hauptebenen eines Linsensystems nach Abbe	10
5 Diskussion	12

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, die Brennweiten verschiedener Linsen zu bestimmen, wobei verschiedene Methoden anzuwenden sind. Des Weiteren sollen das Abbildungsgesetz, sowie die Linsengleichung verifiziert werden. Es wird ebenfalls die chromatische Abberation untersucht.

2 Theorie

Linsen bestehen im Allgemeinen aus einem Material, welches optisch dichter als die Umgebungsluft ist, das heißt einen höheren Brechungsindex aufweist als der von Luft. Dabei wird zwischen Sammellinsen und Zerstreuungslinsen unterschieden. Bei Sammellinsen werden wie in Abbildung 1a zu sehen parallele Strahlen im Brennpunkt gebündelt und es entsteht ein reelles Bild. Die Brennweite f und die Bildweite b sind dabei positive Werte. Im Gegensatz dazu sind bei Zerstreuungslinsen, wie in Abbildung 1b zu sehen, die Brennweite f und Bildweite b negativ, sodass ein virtuelles Bild entsteht. Dies gilt allerdings nur für dünne Linsen. Bei dicken Linsen lässt sich die Brechung nicht mehr auf die Mittelebene der Linse reduzieren; stattdessen werden, wie in Abbildung 1c dargestellt, zwei Hauptebenen eingeführt. Bei der Bildkonstruktion sind, wie in den Abbildungen zu

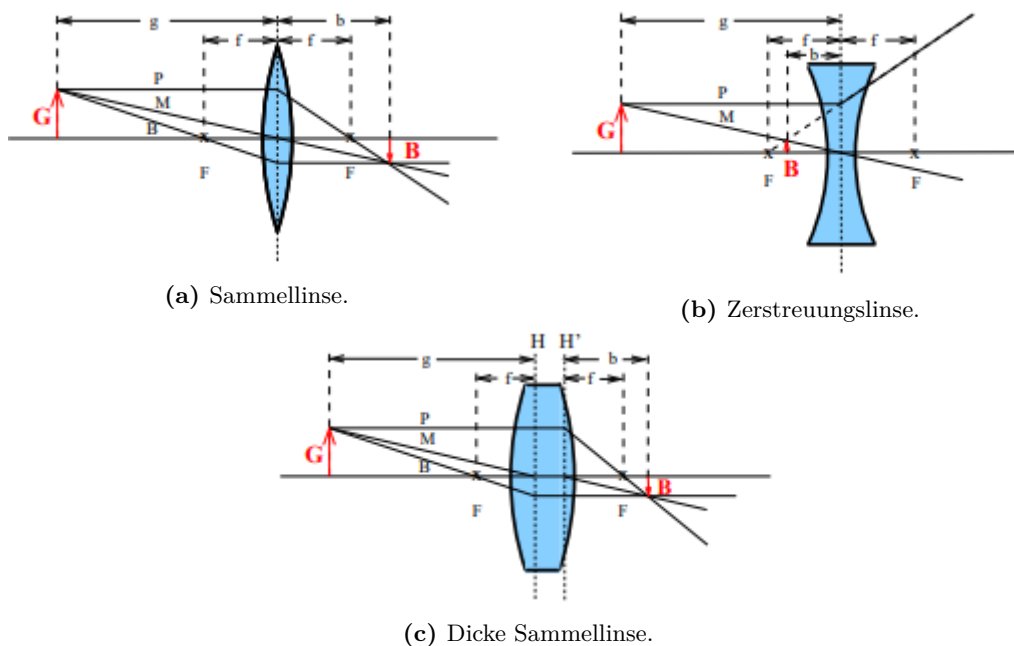


Abbildung 1: Schematische Darstellung verschiedener Linsensysteme.

sehen, drei verschiedene Strahlen relevant. Erstens verläuft der sogenannte Parallelstrahl parallel zur optischen Achse und wird von der Linse so gebrochen, dass er durch den Brennpunkt läuft. Zweitens läuft der Mittelpunktstrahl vom Objekt zum Mittelpunkt

der Linse und verändert seine Richtung nicht. Drittens verläuft der Brennpunktstrahl durch den Brennpunkt zur Linse und wird dort so gebrochen, dass er sich danach parallel zur optischen Achse ausbreitet.

Über die Strahlensätze lässt sich das Abbildungsgesetz

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (1)$$

herleiten, wobei V der Abbildungsmaßstab, B die Bildgröße, G die Gegenstandsgröße, b die Bildweite und g die Gegenstandsweite bezeichnet. Mittels Gleichung (1) lässt sich des Weiteren für dünne Linsen die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (2)$$

herleiten, wobei f die Brennweite ist.

Generell gilt die Näherung bei dünnen Linsen, dass die Brechung nur an der Mittelebene der Linse stattfindet, nur für achsennahe Strahlen. Für achsenferne Strahlen können Abbildungsfehler auftreten, da diese stärker gebrochen werden. Dieser Effekt wird sphärische Abberation genannt und kann dafür sorgen, dass sich kein scharfes Bild erzeugen lässt, da der Brennpunkt achsenferner Strahlen näher an der Linse liegt, als der von achsennahen Strahlen. Dies lässt sich aber zum Beispiel durch Verwendung einer Irisblende vermeiden, da diese die achsenfernen Strahlen ausblendet. Ein weiterer Abbildungsfehler ist die sogenannte chromatische Abberation. Dieser entsteht dadurch, dass der Brennpunkt von blauem Licht näher an der Linse liegt, als der Brennpunkt von rotem Licht. Das führt dazu, dass das blaue Licht stärker gebrochen wird als rotes Licht.

2.1 Methoden zur Bestimmung der Brennweite f

In diesem Versuch werden zwei verschiedene Methoden zur Bestimmung von Brennweiten angewandt.

2.1.1 Methode nach Bessel

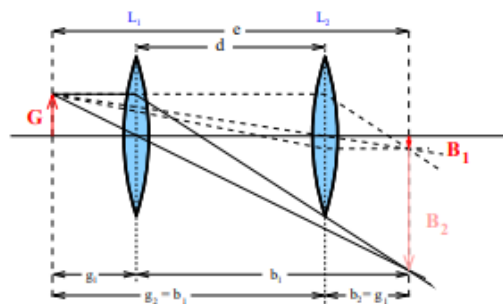


Abbildung 2: Schematische Darstellung zur Bestimmung der Brennweite nach der Methode von Bessel.

Bei der Methode nach Bessel wird der Abstand e zwischen einem Gegenstand und Schirm konstant gehalten (siehe Abbildung 2). Dieser sollte dabei mindestens viermal so groß wie die Brennweite f der Linse sein. Die zu untersuchende Linse wird zwischen dem Gegenstand und dem Schirm bewegt und auf die zwei Positionen eingestellt, an denen ein scharfes Bild entsteht. Zu beiden Positionen werden die Bildweite b beziehungsweise Gegenstandsweite g notiert, wobei hier eine Symmetrie vorliegt, sodass

$$b_1 = g_2 \qquad b_2 = g_1$$

gilt. Mit dem Zusammenhang $e = b_1 + g_1 = b_2 + g_2$ und $d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2$ kann die Brennweite f zu

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4 \cdot e} \quad (3)$$

bestimmen.

2.1.2 Methode nach Abbe

Mit der Methode von Abbe lässt sich die Brennweite eines Linsensystems beziehungsweise einer dicken Linse, wie in Abbildung 3 zu sehen, bestimmen. Hierzu wird die Bildbeziehungsweise Gegenstandsweite b und g relativ zu den Hauptebenen H und H' bestimmt. Da diese jedoch nicht bekannt sind wird ein beliebiger Punkt A festgelegt, zu dem b' und g' gut messbar sind. Es gelten demnach die Relationen

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (4)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (5)$$

wobei V der Abbildungsmaßstab ist und h und h' die Lage der Hauptebenen bezeichnet.

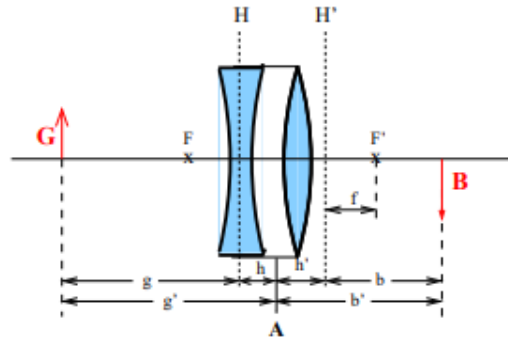


Abbildung 3: Schematische Darstellung zur Bestimmung der Brennweite nach der Methode von Abbe.

3 Durchführung

Im ersten Versuchsteil soll sowohl das Abbildungsgesetz, als auch die Linsengleichung verifiziert werden. Dazu werden auf einer optischen Bank eine Lichtquelle (hier: eine Halogenlampe), der Gegenstand "Pearl L", eine zu untersuchende dünne Linse, sowie ein Schirm positioniert. Es werden nun die Abmessungen des Gegenstandes G und die Gegenstandsweite g bestimmt. Der Schirm wird so verschoben, dass ein scharfes Bild abgebildet wird. Es werden die Bildgröße B und die Bildweite b notiert. Die Gegenstandsweite g wird nun verändert und die zugehörige Bildgröße B beziehungsweise Bildweite b nach erneutem Einstellen des Schirmes notiert. So wird die Messung insgesamt zehnmal durchgeführt.

In einem weiteren Versuchsteil wird die Brennweite f mittels der Methode von Bessel, wie in Abschnitt 2 beschrieben, bestimmt. Hierzu werden Schirm und Gegenstand in einem festen Abstand e voneinander aufgestellt. Dieser Abstand wird notiert. Nun werden die beiden Positionen der Linse bestimmt, an denen das Bild am Schirm scharf erscheint. Die entsprechenden Gegenstandsweiten g und Bildweiten b werden für beide Positionen notiert. Es werden insgesamt zehn Messungen für verschiedene Abstände e durchgeführt. Zur Untersuchung der chromatischen Abberation wird die Methode von Bessel analog zum vorherigen Versuchsteil verwendet. Hierbei werden nun zu je fünf verschiedenen Abständen e die Messung für einen blauen beziehungsweise roten Filter, welcher vor dem Gegenstand befestigt wird, durchgeführt und die Werte der Gegenstandsweite g und Bildweite b für die jeweiligen beiden Positionen notiert.

Im letzten Versuchsteil wird die Methode von Abbe, wie sie in Abschnitt 2 beschrieben wird, verwendet. Hierbei werden eine Sammellinse und eine Zerstreuungslinse nahe zusammen gestellt, dass sich die Füße der Apparaturen berühren. Zu beachten ist, dass die Sammellinse eine Brennweite von $f = 100$ und die Zerstreuungslinse eine Brennweite von $f = -100$ hat. Vom Schirm aus gesehen befindet sich die Sammellinse vor der Zerstreuungslinse, wie es in Abbildung 3 dargestellt ist. Beim Verschieben der Linsen muss der Abstand zwischen den Linsen konstant bleiben. Sie werden nun so verschoben, dass sich ein scharfes Bild auf dem Schirm ergibt. Es wird ein Punkt A bei einer der Linsen festgelegt von dem aus die Bildweite b' und die Gegenstandsweite g' bestimmt werden. Der Punkt A befindet sich in dieser Messung in der Mittelebene der Sammellinse. Des Weiteren wird die Bildgröße B gemessen. Diese Messung wird für zehn verschiedene Schirmpositionen durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Verifizierung der Linsengleichung und des Abbildungsgesetzes

Zunächst werden die Linsengleichung (2) und das Abbildungsgesetz (1) verifiziert. Die hierzu verwendeten Daten sind in Tabelle 1 zu finden. Dabei ist $V_1 = \frac{B}{G}$ und $V_2 = \frac{b}{g}$. Die Gegenstandsweite ist dabei im gesamten Versuch $G = 3$ cm.

Die mittlere Abweichung der Differenzen von V_1 und V_2 ergibt sich zu

Tabelle 1: Daten der Messung zur Vschnittpunkt-zoomerifizierung der Linsengleichung.

g / cm	b / cm	B / cm	V_1	V_2	$\frac{ V_1-V_2 }{V_1}$ / %	f / cm
18,0	22,0	3,5	1,1	1,2	4,8	9,90
19,0	20,4	3,1	1,0	1,1	3,9	9,84
21,8	18,2	2,5	0,8	0,8	0,2	9,92
23,0	17,5	2,2	0,7	0,8	3,8	9,94
24,0	16,7	1,9	0,6	0,7	9,9	9,85
26,0	15,8	1,8	0,6	0,6	1,3	9,83
28,0	15,3	1,5	0,5	0,5	9,3	9,89
30,0	14,6	1,4	0,5	0,5	4,3	9,82
32,0	14,1	1,2	0,4	0,4	10,2	9,79
34,0	13,7	1,2	0,4	0,4	1,7	9,77

$$\overline{\Delta V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|V_{1,i} - V_{2,i}|}{V_{1,i}} = (4,8 \pm 0,4) \%.$$

Die Brennweite der Linse kann einerseits bestimmt werden, indem über die Werte aus Tabelle 1 gemittelt wird. Andererseits können die b_i auf die y -Achse und die g_i auf die x -Achse gelegt werden. Anschließend werden die jeweiligen Wertepaare mit einer Geraden verbunden. Der Schnittpunkt dieser entspricht dann der Brennweite. Der so entstehende Plot ist in Abbildung 4 und Abbildung 5 zu sehen.

Damit ergibt sich für die Brennweite

$$f_{\text{Mittel}} = (9,854 \pm 0,009) \text{ cm}$$
$$f_{\text{Plot}} = (10 \pm 1) \text{ cm}.$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes berechnet sich dabei nach

$$\Delta f_{\text{Mittel}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (f_i - f_{\text{Mittel}})^2} \quad (6)$$

und die Abweichung des abgelesenen Wertes wird aus der Genauigkeit des Plots genommen.

4.2 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel

Zur Bestimmung der Brennweite nach Bessel werden die Daten in Tabelle 2 verwendet. Die Brennweiten f_i , welche sich zusätzlich zu den Messwerten in der Tabelle befinden, berechnen sich dabei nach Gleichung (3). Zur Berechnung von d wird der Mittelwert aus b_1 und g_2 beziehungsweise jener aus b_2 und g_1 verwendet.

Aus diesen Werten wird der Mittelwert gebildet, um einen Wert für f zu erhalten:

$$f = (9,815 \pm 0,008) \text{ cm}.$$

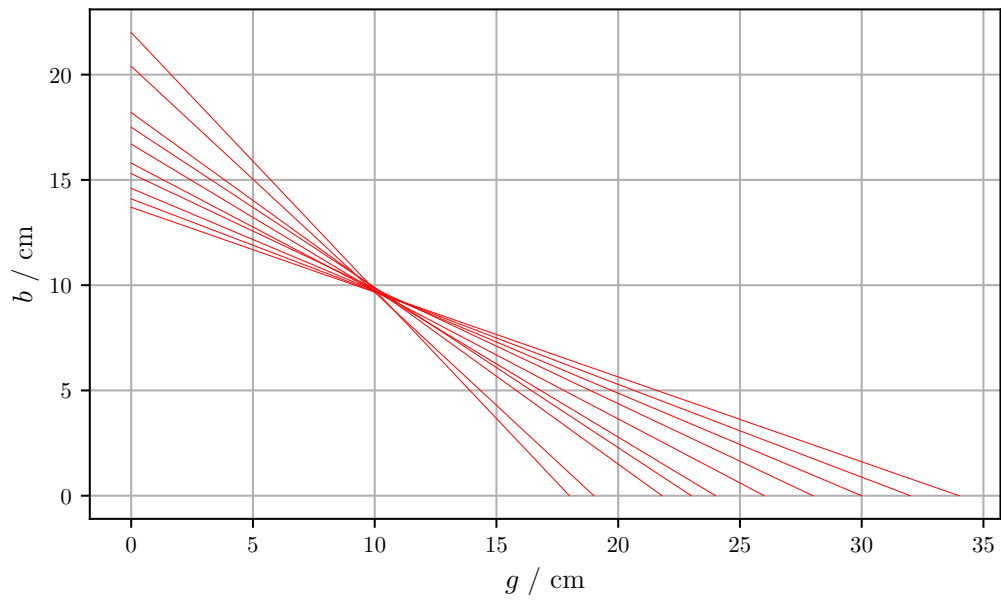


Abbildung 4: Plot der Messwerte von g und b jeweils auf den Achsen, wobei die einzelnen Wertepaare miteinander verbunden sind.

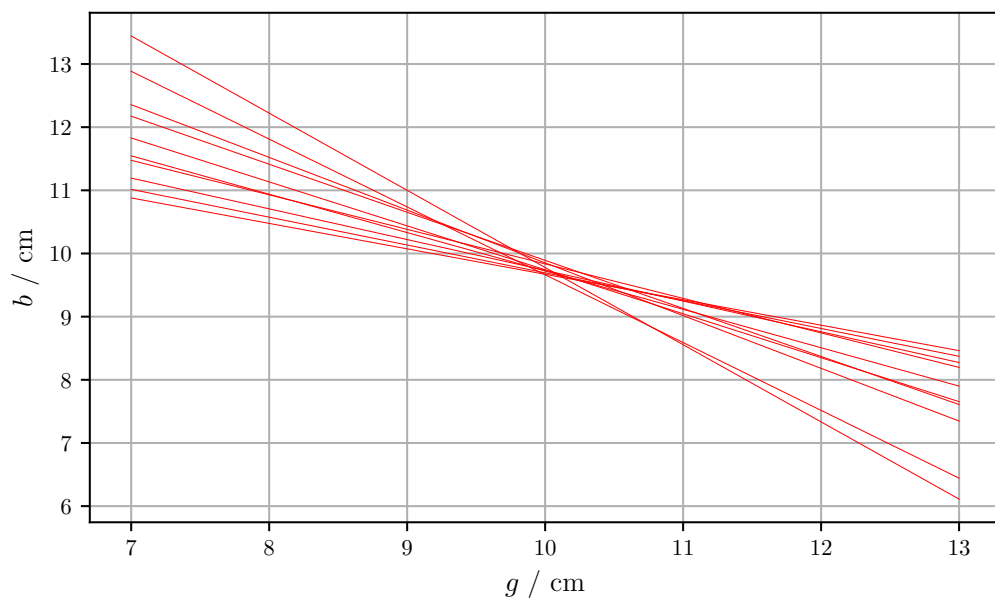


Abbildung 5: Abbildung 4 in einem kleineren Ausschnitt zum besseren Ablesen des Schnittpunktes der Geraden.

Tabelle 2: Daten der Messung zur Bestimmung der Brennweite einer Linse nach Bessel bei weißem Licht.

e / cm	g_1 / cm	b_1 / cm	g_2 / cm	b_2 / cm	d / cm	f / cm
40	17,9	22,1	23,0	17,0	5,1	9,84
42	15,9	26,1	26,2	15,8	10,3	9,87
44	14,9	29,1	29,0	15,0	14,1	9,87
46	12,4	31,6	32,0	14,0	18,6	9,62
48	14,1	33,9	34,4	13,6	20,3	9,85
50	13,6	36,4	36,5	13,5	22,9	9,88
52	13,4	38,6	40,1	11,9	26,7	9,57
54	13,1	40,9	41,1	12,9	28,0	9,87
56	13,0	43,0	43,3	12,6	30,4	9,89
58	12,8	45,2	45,5	12,5	32,7	9,89

Zur Bestimmung der chromatischen Abberation werden die Messdaten mit vorgesetztem Farbfilter betrachtet. Diese finden sich in Tabelle 3 und Tabelle 4.

Tabelle 3: Daten der Messung zur Bestimmung der Brennweite einer Linse nach Bessel bei rotem Licht.

e / cm	g_1 / cm	b_1 / cm	g_2 / cm	b_2 / cm	d / cm	f / cm
44	15,1	28,9	29,0	15,0	13,9	9,90
46	14,7	31,3	31,7	14,3	17,0	9,93
48	14,3	33,7	34,1	13,9	19,8	9,96
50	13,6	36,4	36,4	13,6	22,8	9,90
52	13,3	38,7	38,8	13,2	25,5	9,87

Tabelle 4: Daten der Messung zur Bestimmung der Brennweite einer Linse nach Bessel bei blauem Licht.

e / cm	g_1 / cm	b_1 / cm	g_2 / cm	b_2 / cm	d / cm	f / cm
44	15,2	28,8	28,1	15,9	12,9	10,05
46	14,6	31,4	31,5	14,5	16,9	9,95
48	14,4	33,6	34,3	13,7	19,9	9,94
50	13,7	36,3	36,7	13,3	23,0	9,86
52	13,6	38,4	38,9	13,1	25,3	9,93

Gemittelt ergeben sich die Brennweiten zu

$$f_{\text{Rot}} = (9,913 \pm 0,009) \text{ cm}$$

$$f_{\text{Blau}} = (9,943 \pm 0,005) \text{ cm.}$$

4.3 Bestimmung der Brennweite und der Hauptebenen eines Linsensystems nach Abbe

Tabelle 5: Daten der Messung zur Bestimmung der Brennweite und der Hauptebenen eines Linsensystems nach Abbe.

e / cm	g' / cm	b' / cm	B / cm	V
102,5	18,3	84,2	7,7	2,6
100,0	19,0	81,0	7,1	2,4
97,0	19,3	77,7	6,7	2,2
94,0	19,9	74,1	6,3	2,1
91,0	20,4	70,6	5,9	2,0
88,0	21,2	66,8	5,4	1,8
85,0	22,2	62,8	4,8	1,6
82,0	24,4	57,6	3,9	1,3
79,0	28,0	51,0	2,9	1,0
76,0	30,2	45,8	2,5	0,8

Zur Bestimmung der Position der Hauptebenen H und H' sowie der Brennweite des Linsensystems werden die Daten in Tabelle 5 genutzt. In zwei Plots werden jeweils die Daten g' gegen $1 + \frac{1}{V}$ beziehungsweise b' gegen $1 + V$ aufgetragen. Durch die Daten werden entsprechend Ausgleichsgeraden der Form

$$g' = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (7)$$

$$b' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (8)$$

gelegt. Dabei sind h und h' die Verschiebungen der Hauptebenen H beziehungsweise H' von dem gewählten Referenzpunkt A . Die entsprechenden Plots sind in Abbildung 6 und Abbildung 7 zu finden.

Mittels des Python 3.7.0 Paketes Curve Fit werden die Koeffizienten wie folgt bestimmt:

$$f_g = (14,6 \pm 0,2) \text{ cm}$$

$$f_b = (21,7 \pm 0,5) \text{ cm}$$

$$h = (-1,7 \pm 0,4) \text{ cm}$$

$$h' = (7 \pm 1) \text{ cm.}$$

Der Mittelwert für die Brennweite beträgt damit

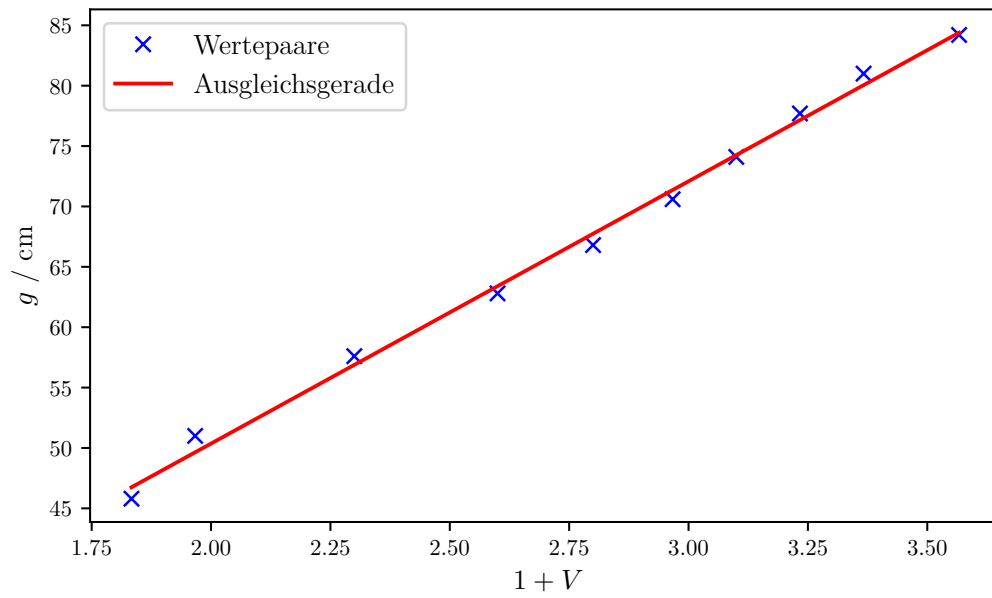


Abbildung 6: Plot und Fit der Messwerte zur Bestimmung der Brennweite und der Hauptebene H' .

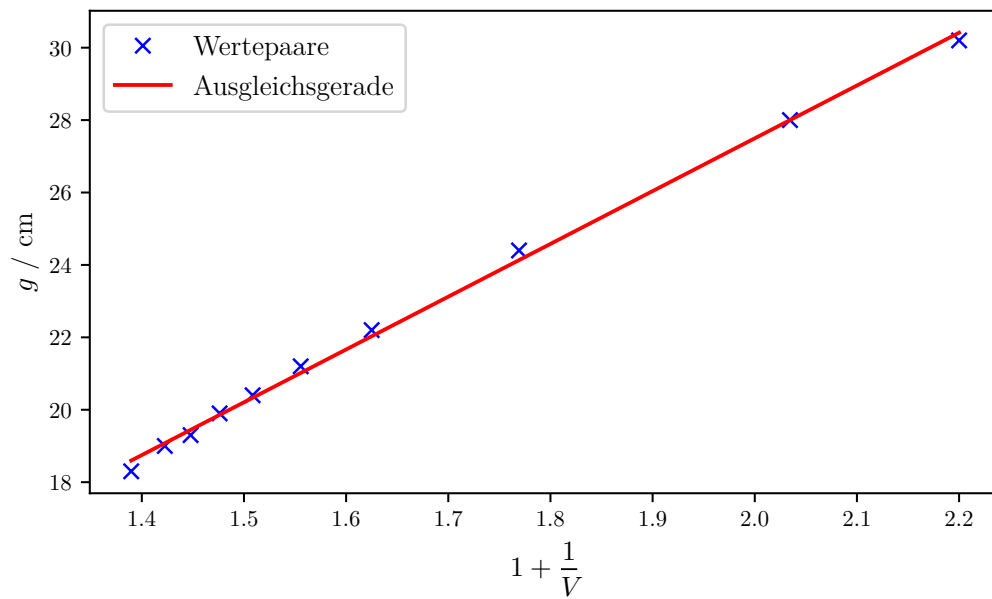


Abbildung 7: Plot und Fit der Messwerte zur Bestimmung der Brennweite und der Hauptebene H .

$$f_{\text{Mittel}} = (18,5 \pm 3) \text{ cm.}$$

Dabei wird der Fehler wie zuvor bereits nach (6) bestimmt.

5 Diskussion

Im ersten Versuchsteil weichen die einzelnen Vergrößerungsmaßstäbe lediglich um 4,8% voneinander ab. Der Schnittpunkt der Geraden in den Plots ist jedoch in einem Bereich von circa (10 ± 1) cm verteilt. Die beiden für die Brennweite bestimmten Werte

$$\begin{aligned} f_{\text{Mittel}} &= (9,854 \pm 0,009) \text{ cm} \\ f_{\text{Plot}} &= (10 \pm 1) \text{ cm.} \end{aligned}$$

weichen nur sehr gering von dem Herstellerwert von 10 cm ab. Der rechnerisch bestimmte hat eine Abweichung von 1,5%. Der aus dem Plot abgelesene Wert hat im Mittel keine Abweichung, ist jedoch mit einem großen Fehler behaftet.

Bei der Methode nach Bessel werden folgende Werte bestimmt.

$$\begin{aligned} f_{\text{Weiß}} &= (9,815 \pm 0,008) \text{ cm} \\ f_{\text{Rot}} &= (9,913 \pm 0,009) \text{ cm} \\ f_{\text{Blau}} &= (9,943 \pm 0,005) \text{ cm.} \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Abweichung von dem Theoriewert bei weißen Licht mit 1,9% ebenfalls sehr gering ist. Die chromatische Abberation scheint lediglich einen geringen Beitrag zu haben, da sich beide Werte nur um 0,3% voneinander unterscheiden.

Es ist jedoch zu bemerken, dass insbesondere bei kleinen Bildgrößen und großen Bildweiten die Einstellung der Apparatur sehr schwierig ist. Aufgrund großer Distanzen ist das Licht auf dem Schirm kaum zu erkennen, ebenso lässt sich nur ungefähr definieren, wann genau die Abbildung scharf ist. Des Weiteren sind die Linsen nicht perfekt geformt, sodass es eine Abberation von achsenfernen Strahlen gibt, die das Ergebnis weiterhin verfälschen. Auch war der Raum, in dem der Versuch durchgeführt wurde mit externen Lichtquellen beleuchtet, wodurch das Licht des eigentlichen Versuches umso schwächer erscheint. Des Weiteren wird die Bildgröße mit einem Geodreieck vermessen, wodurch auch hier eine gewisse Ungenauigkeit entsteht. Mit diesen Ungenauigkeiten können die Abweichungen der Werte gut erklärt werden.

Die Ausgleichsgeraden bei der Methode nach Abbe nähern die Messwerte gut an. Es ist jedoch auffällig, dass sich die berechneten Brennweiten

$$\begin{aligned} f_g &= (14,6 \pm 0,2) \text{ cm} \\ f_b &= (21,7 \pm 0,5) \text{ cm} \end{aligned}$$

sehr stark voneinander unterscheiden. Dies lässt sich jedoch ebenfalls mit den oben genannten Ungenauigkeiten erklären. Der Abstand von Lichtquelle und Schirm ist in diesem Versuchsteil besonders groß, ebenso sind die entstehenden Bilder sehr klein, wodurch die Ungenauigkeiten umso größer werden.

Die angegebenen Werte der Linsen sind je $f_1 = 10$ cm und $f_2 = -10$ cm. Die Brennweite eines Systems zweier solcher dünner Linsen mit dem Abstand $d = 6$ cm beträgt

$$f = -\frac{f_1 \cdot f_2}{d} = 16,7 \text{ cm.}$$

Der Mittelwert der bestimmten Brennweiten

$$f_{\text{Mittel}} = (19 \pm 3) \text{ cm.}$$

weicht um 14% von dem Theoriewert ab. Auch diese Abweichung kann mit den oben genannten Ungenauigkeiten erklärt werden.