

V204

Wärmeleitfähigkeit von verschiedenen Metallen

Robin Pelkner
robin.pelkner@tu-dortmund.de

Joshua Althüser
joshua.althueser@tu-dortmund.de

Durchführung: 13.11.2018

Abgabe: 20.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	5
3.1 Die statische Methode	5
3.2 Die dynamische Variante - Angström-Messverfahren	6
4 Fehlerrechnung	6
5 Auswertung	7
5.1 Statische Methode	7
5.2 Dynamische Methode	9
6 Diskussion	11
Literatur	12

1 Zielsetzung

Mithilfe dieses Versuches soll die Wärmeleitfähigkeit von den Metallen Aluminium, Messing und Edelstahl untersucht werden. Die jeweiligen für das Material spezifischen Wärmeleitfähigkeiten werden ebenfalls bestimmt.

2 Theorie

Herrscht in einem Material eine Temperaturdifferenz an verschiedenen Stellen, so gibt es einen Wärmeausgleich. Dieser kann mittels Konvektion, Wärmestrahlung und Wärmeleitung stattfinden. In diesem Versuch liegt das Augenmerk auf der Wärmeleitung. Generell wird immer beobachtet, dass die Wärme von der wärmeren Stelle zu der kälteren fließt. Dabei hängt die transferierte Wärmemenge dQ von der Geometrie des Stabes sowie den Materialeigenschaften ab. Die besagte Wärmemenge lässt sich mittels

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

berechnen. Hier ist A die Querschnittsfläche des Stabes und κ die spezifische Wärmeleitfähigkeit. Das negative Vorzeichen ist eine Konvention bedingt durch den oben beschriebenen Fakt, dass die Wärme immer zur kälteren Stelle fließt. Mit dieser Formel lässt sich leicht die Formel für den Wärmestrom $\frac{dQ}{dt}$ zeigen:

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2)$$

Mithilfe der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial V} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (3)$$

und folgenden Beziehungen für ∂Q und \mathbf{j}

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \\ \partial Q &= mc \cdot \partial T \end{aligned}$$

lässt sich die eindimensionale Diffusionsgleichung herleiten:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4)$$

c ist hier die spezifische Wärmekapazität des Stoffes, ρ dessen Dichte und m die Masse des Körpers.

Wird der Körper periodisch aufgeheizt und abgekühlt, so lässt sich in diesem eine Temperaturwelle feststellen. Diese wird mittels

$$T(x, t) = T_0 \cdot \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) \cdot \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) \quad (5)$$

beschrieben. Dabei ist T_0 die Amplitude der Welle. Der Dämpfungsgrad wird durch die Exponentialfunktion beschrieben. Werden Amplitude an zwei verschiedenen Stellen

gemessen, lässt sich aus deren Verhältnis und der Frequenz der Welle die Dämpfung berechnen. Dazu wird folgende Formel für die Phasengeschwindigkeit der Welle benötigt:

$$v = \sqrt{\frac{2\omega\kappa}{\rho c}}. \quad (6)$$

Werden nun die Verhältnisse

$$\omega = \frac{2\pi}{t_{\text{Periode}}}$$

und

$$\phi = \frac{2\pi\Delta t}{t_{\text{Periode}}}$$

genutzt, wobei t_{Periode} die Periodendauer und ϕ die Phasenverschiebung ist, lässt sich die Formel

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)} \quad (7)$$

berechnen. A_{nah} und A_{fern} sind hier die beiden gemessenen Amplituden.

3 Durchführung

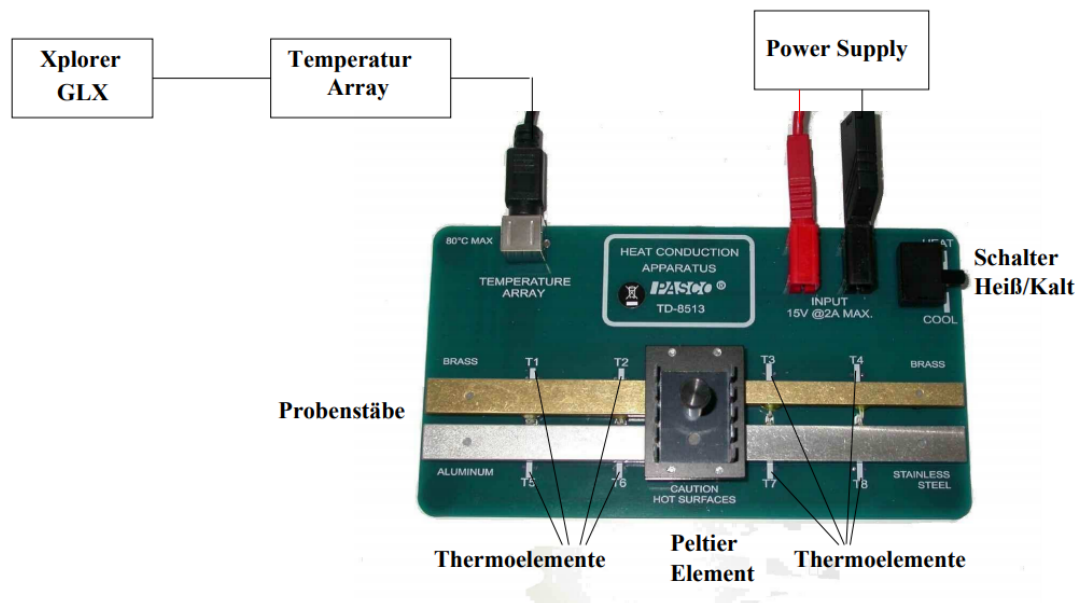


Abbildung 1: Versuchsaufbau ohne Isolierung.[1, S. 3]

Das Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 zu sehen. Es befinden sich vier rechteckige Stäbe auf einer Grundplatte. Diese bestehen aus Edelstahl, Aluminium und Messing. Es gibt zwei Messingstäbe, wovon einer eine größere Querschnittsfläche hat. Mittels eines Peltier-Elements werden diese Stäbe zeitgleich geheizt beziehungsweise gekühlt. Besagtes Element wird an eine Spannungsquelle angeschlossen.

An je zwei Stellen an den Stäben werden die Temperaturen gemessen und mithilfe eines "Temperatur Arrays" an einen Datenlogger übertragen. Mit diesem werden die Daten verrechnet und grafisch dargestellt.

Während der Versuchsdurchführung liegt immer eine Isolation auf den Stäben, um den Wärmeaustausch mit der Luft zu minimieren.

Nach Abschluss jeder einzelnen Messreihe werden die Isolationen entfernt und die Stäbe auf mindestens 30°C heruntergekühlt. Dazu wird der Schalter auf der Platte auf "COOL" gestellt.

Zunächst wird der Abstand zwischen den beiden Messstellen auf den Stäben gemessen.

3.1 Die statische Methode

Die Spannungszufuhr wird auf 5 V eingestellt. Am Datenlogger wird eine Abtastrate von 5 s eingestellt und die Temperaturen an den acht Stellen als Funktion der Zeit gemessen. Der Schalter auf der Platte wird auf "HEAT" gestellt. Zunächst wird diese Messung 700 s lang durchgeführt. Die gemessenen Werte werden als Funktion der Zeit grafisch dargestellt. Die Werte für T1, T4, T4 und T8 werden jeweils alle 140 s aufgenommen.

Mithilfe des Datenloggers werden die Temperaturdifferenzen von T7 und T8 sowie T2 und T1 als Funktion der Zeit geplottet.

3.2 Die dynamische Variante - Angström-Messverfahren

Die Spannungszufuhr wird auf 8 V eingestellt. Am Datenlogger wird die Abtastezeit auf 2 s eingestellt und die Temperaturen werden an den acht Stellen gemessen.

In dieser Messreihe wird der Schalter periodisch von "HEAT" auf "COOL" beziehungsweise umgekehrt gestellt.

Für die erste Messreihe beträgt die Periodendauer 80 s; der Schalter wird also alle 40 s umgeschaltet. Diese Reihe wird für die Dauer von zehn Perioden durchgeführt. Die erhaltenen Daten von T1, T2 und T5, T6 werden aufgenommen und mithilfe des Datenloggers geplottet.

Die nächste Messreihe wird mit einer Periodendauer von 200 s durchgeführt. Es werden solange Daten aufgenommen, bis mindestens eines der Thermoelemente eine Temperatur von 80°C anzeigt. Die Temperaturverläufe von Edelstahl werden erneut mittels des Datenloggers grafisch dargestellt.

4 Fehlerrechnung

Wenn fehlerhafte Größen in Rechnungen verwendet werden, so muss der neue Fehler mittels der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet werden. Der neue Fehler ist dann

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=0}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}, \quad (8)$$

wobei f die zu errechnende Größe bezeichnet und die x_i die fehlerbehafteten Größen, von denen f abhängt. Wenn Mittelwerte zu bestimmen sind, errechnen sich diese durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (9)$$

Der zum Mittelwert gehörige Fehler ist

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot (N-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (10)$$

Lineare Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b. \quad (11)$$

Die dazugehörigen Parameter a und b sind mittels

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

und

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} \quad (13)$$

zu berechnen.

5 Auswertung

5.1 Statische Methode

Die Graphen, welche die Temperaturverläufe der vier Stäbe an den Thermoelementen, welche weiter vom Peltierelement entfernt sind, darstellen finden sich im Anhang als Graphik 1 und 2. Anzumerken sei, dass die für diese Messreihe relevanten Daten, erst ab der Markierung zu betrachten sind. Die vorherigen Daten stellen Messschwierigkeiten dar, welche für die Ergebnisse allerdings keine Auswirkungen haben. Alle Graphen zeigen einen zuerst exponentiellen Anstieg, der aber mit zunehmender Zeit deutlich abflacht. Auffällig ist die Messung des Thermoelements T_8 , also dem des Edelstahls. Die Temperatur steigt hier im Vergleich zu den anderen Verläufen deutlich langsamer und erreicht in der Messperiode auch deutlich geringere Temperaturen (ca. 37°C), als die anderen Thermoelemente (ca. $46\text{--}52^\circ\text{C}$). Die nach 700s gemessenen Temperaturen der äußeren Thermoelemente

$$T_1 = 321.80\text{K}$$

$$T_4 = 319.06\text{K}$$

$$T_5 = 324.31\text{K}$$

$$T_8 = 310.10\text{K}$$

dienen dem qualitativen Vergleich der Wärmeleitfähigkeit der unterschiedlichen Materialien. Wie zu sehen weist das Thermoelement T_5 die höchste Temperatur auf. Da die Messung mit ungefähr gleichen Temperaturen an allen Stäben gestartet wurde, lässt sich schließen, dass Aluminium von allen drei Materialien die höchste Wärmeleitfähigkeit hat. Zur Bestimmung des Wärmestroms werden die gemessenen Temperaturen, welche in Tabelle 2 dargestellt sind, verwendet. Die Berechnung erfolgt dann über Gleichung (2), wobei ∂T die Änderung der Temperatur am jeweiligen Stab, das heißt die Temperaturdifferenz der beiden Thermoelemente am Stab, darstellt, κ die Wärmeleitfähigkeit des Material, A die Querschnittsfläche des Stabes und Δx der Abstand zwischen den Thermoelementen ist. Die Werte für A sind der Versuchsanleitung [1, S. 2] und die Werte für κ der Literatur [2] entnommen. Der Abstand Δx ist gemessen worden und beträgt bei allen vier Stäben $\Delta x = 0.032\text{m}$. Die verwendeten Werte für A und κ sind in Tabelle 1 zu sehen. Damit ergeben sich nach Gleichung (2) für den Wärmestrom die Werte welche in Tabelle 3 zu sehen sind. Im Folgenden werden die Temperaturdifferenzen des breiten Messingstabes, also $T_2 - T_1$, und die des Edelstahlstabes, also $T_7 - T_8$ betrachtet. Die zugehörigen Graphen finden sich jeweils in Grafik 3 und 4 im Anhang, wobei auch bei diesen Graphiken erst die Daten ab der Markierung zu berücksichtigen sind. Wie zu sehen ist steigen die Kurven zunächst stark an, durchlaufen ein Maximum und flachen danach

Tabelle 1: Wärmeleitfähigkeit κ und Querschnitt A verschiedener Materialien.

Material	$\kappa/\frac{W}{mK}$	A/m^2
Messing, breit	113	$4.8 \cdot 10^{-5}$
Messing, schmal	113	$2.8 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	235	$4.8 \cdot 10^{-5}$
Edelstahl	20	$4.8 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2: Die verwendeten Temperaturen der Thermoelemente.

t/s	$T_1/^{\circ}C$	$T_2/^{\circ}C$	$T_3/^{\circ}C$	$T_4/^{\circ}C$	$T_5/^{\circ}C$	$T_6/^{\circ}C$	$T_7/^{\circ}C$	$T_8/^{\circ}C$
140	36,12	40,57	40,94	35,53	41,07	43,70	38,30	26,44
280	41,93	44,81	44,19	40,11	45,49	47,46	41,34	30,34
420	44,87	47,33	46,33	42,52	47,74	49,36	43,43	32,97
560	46,89	49,23	48,08	44,30	49,55	51,13	45,27	35,04
700	48,65	50,95	49,67	45,91	51,16	52,71	46,99	36,95

Tabelle 3: Temperaturdifferenzen und Wärmestrom der Stäbe.

t/s	Messing, breit		Messing, schmal		Aluminium		Edelstahl	
	$T_2 - T_1/K$	$\frac{\partial Q}{\partial t}/W$	$T_3 - T_4/K$	$\frac{\partial Q}{\partial t}/W$	$T_6 - T_5/K$	$\frac{\partial Q}{\partial t}/W$	$T_7 - T_8/K$	$\frac{\partial Q}{\partial t}/W$
140	4.45	-0.75	5.41	-0.53	2.63	-0.93	11.86	-0.36
280	2.88	-0.49	4.08	-0.40	1.97	-0.69	11.00	-0.33
420	2.46	-0.42	3.81	-0.38	1.62	-0.57	10.46	-0.31
560	2.34	-0.40	3.78	-0.37	1.58	-0.56	10.23	-0.31
700	2.30	-0.39	3.76	-0.37	1.55	-0.55	10.04	-0.30

ab und scheinen dann gegen einen Wert zu konvergieren. Zu Bemerkem ist hier allerdings, dass sich die beiden Grafiken gar nicht unterscheiden, womit unter Berücksichtigung der Werte aus Tabelle 3, bei denen ein großer Unterschied zwischen den Differenzen festzustellen ist, festzustellen ist, dass beim Erstellen der Grafiken ein grober Fehler unterlaufen ist. Näheres wird hierzu in der Diskussion weiter erklärt.

5.2 Dynamische Methode

Mittels der sogenannten Angström-Methode wird im folgenden die Wärmeleitfähigkeit κ für die drei Materialien bestimmt. Hierzu wurden zunächst die Temperaturwellen der beiden Thermolemente des jeweiligen Stabes gegeneinander aufgetragen und die Amplituden A_1, A_2 und die Phasendifferenz Δt durch diese Graphen bestimmt. Die Temperaturwellen für Messing ist in Grafik 5, die für Aluminium in Grafik 6 und die für Edelstahl in Grafik 7 im Anhang zu sehen. Der hellere Graph stellt in Grafik 5 und 6 die Messung des weiter entfernten Thermolements dar, der dunklere Graph den des Näheren. Die Belegung ist in Grafik 7 umgekehrt. Aus den abgelesenen Amplitudenverhältnissen und Phasendifferenzen wird mittels Gleichung (9) der Mittelwert bestimmt, dessen Fehler sich mit Gleichung (10) errechnet. Im Falle des Messingstabes sind die hierzu verwendeten Werte in Tabelle 5 zu sehen welche der Grafik 5 entnommen sind. Die für die Berechnung notwendigen Materialkonstanten sind in Tabelle 4 dargestellt. Somit ergeben sich für die Mittelwerte:

$$\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} = 2.46 \pm 0.13$$

$$\Delta t = (15.4 \pm 0.7)\text{s}$$

Nach Gleichung (7) errechnet sich die Wärmeleitfähigkeit κ , der zugehörige Fehler mittels Gleichung (8) und ist somit

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\rho c(\Delta x)^2}{-2 \ln \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}}\right)^2 (dt)^2 + \left(\frac{\rho c(\Delta x)^2}{-2 \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \ln \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}}\right)^2 \left(d \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)^2}. \quad (14)$$

Für Messing ergibt sich damit eine Wärmeleitfähigkeit von

$$\kappa_{\text{Messing}} = (121 \pm 9) \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

Dieselbe Rechnung erfolgt analog für Aluminium. Unter Berücksichtigung der, der Grafik 6 entnommenen Werte, welche in Tabelle 6 aufgelistet sind, und den Materialkonstanten von Aluminium (siehe Tabelle 4) ergeben sich für Aluminium die Mittelwerte

$$\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} = 1.81 \pm 0.06$$

und

$$\Delta t = (10.7 \pm 0.7)\text{s}$$

und daher mittels Gleichung (7) und (14) die Wärmeleitfähigkeit von Aluminium

$$\kappa_{\text{Aluminium}} = (187 \pm 17) \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

Für die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Aluminium und Messing ist mit einer Temperaturwelle von 80s Periodendauer zu arbeiten, während für die folgende Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl eine Periodendauer von 200s notwendig ist; die Berechnung erfolgt dennoch komplett analog zu Aluminium und Messing. Mithilfe der Gleichungen (9) und (10) errechnet sich mit den Werten in Tabelle 7 und den Materialkonstanten die Mittelwerte

$$\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} = 4.00 \pm 0.15$$

$$\text{und} \quad \Delta t = (66.7 \pm 4.3)\text{s}$$

Somit ist die Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl nach Gleichung (7) und (14)

$$\kappa_{\text{Edelstahl}} = (17.7 \pm 1.2) \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

Tabelle 4: Dichte und spezifische Wärme der verwendeten Materialien [V204]

Material	Dichte $\rho / \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	spezifische Wärme $c / \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$
Messing	8520	385
Aluminium	2800	830
Edelstahl	8000	400

Tabelle 5: Die verwendeten Amplituden und Phasendifferenzen zu Messing.

A_{nah}/K	A_{fern}/K	$\Delta t/s$
8,0	5,4	17
7,4	3,4	14
7,6	3,2	19
7,6	3,2	17
7,2	2,8	14
7,0	2,8	14
6,8	2,6	17
6,8	2,6	17
6,6	2,2	11
6,4	2,2	14

Tabelle 6: Die verwendeten Amplituden und Phasendifferenzen zu Aluminium.

A_{nah}/K	A_{fern}/K	$\Delta t/s$
9,6	7,6	14
8,8	4,8	8
9,2	5,0	11
8,8	5,0	11
8,6	4,6	14
8,6	4,4	11
8,2	4,4	8
8,2	4,4	11
8,0	4,2	11
7,8	4,0	8

Tabelle 7: Die verwendeten Amplituden und Phasendifferenzen zu Edelstahl.

A_{nah}/K	A_{fern}/K	$\Delta t/s$
14,4	3,8	74
12,6	3,2	67
12,0	2,8	59

6 Diskussion

Dieser Versuch hat viele potentielle Fehlerquellen. Zum Einen ist die Isolierung der Stäbe nicht perfekt, weshalb hier einige Wärme während des Versuches entweichen kann und das Ergebnis somit verfälscht. Außerdem ist anzumerken, dass die Messgeräte nur über eine bestimmte Abtastrate verfügen, was die Ergebnisse weiter ungenau macht, wenngleich dieser Faktor bei einer nur grafischen Auswertung kaum ins Gewicht fällt. Desweiteren wird die Messung durch verschiedenen Starttemperaturen der Thermoelemente verfälscht, welche bei einer solchen Messung nicht viel besser zu machen ist. Die Ergebnisse der grafischen Auswertung der Temperaturverläufe sind unter Betrachtung der Literaturwerte für die Wärmeleitfähigkeit κ , zu sehen in Tabelle 1, zu erwarten gewesen, besonders beim Vergleich der Steigungen der Graphen miteinander, welche alle von der jeweiligen Wärmeleitfähigkeit proportional abhängen. Das Ergebnis, dass Aluminium das am besten wärmeleitende Material ist, ist ebenfalls bezogen auf die Literaturwerte und im Vergleich mit den Graphen zu erwarten, anzumerken ist jedoch, dass sich mit dieser statischen Methode so nicht bestimmen lässt wie viel besser die Wärmeleitung in Aluminium tatsächlich ist im Vergleich zu den anderen Materialien. Konkrete Werte sind nach dieser Methode nicht zu bestimmen. Bei dem Vergleich der Differenzen der beiden jeweiligen Thermoelemente von dem breiten Messingstab ist hier ein grober Fehler unterlaufen. Die beiden gezeigten Graphen sind identisch, obwohl die Werte in Tabelle 3 nahelegen, dass die Differenzen des Edelstahlstabes wesentlich größer sein müssen, als die des Messingstabes.

Unter der Annahme, dass zumindest die Form des Graphen korrekt ist, ist anzunehmen, dass beide Verläufe zunächst steil ansteigen, ein Maximum durchlaufen und danach abflachen und konvergieren, wobei die Differenz des Edelstahlstabes gegen einen größeren Wert konvergiert. Dies lässt darauf schließen, dass sich die Wärme auf dem Edelstahlstab deutlich schlechter verteilt und Edelstahl somit eine deutlich geringere Wärmeleitfähigkeit als Messing haben muss.

Die Messung nach der dynamischen Methode ist neben den oben genannten Fehlern, weiteren Ungenauigkeiten unterworfen. Hinzu kommt einerseits die manuelle Erzeugung der Temperaturwelle durch Umlegen eines Schalters nach einer bestimmten Periodendauer, welche durch zeitliche Ungenauigkeiten und Grenzen der von Menschen machbaren Genauigkeiten verfälscht wird. Andererseits spielt die Funktionsweise des Peltierelements eine weitere Rolle, dessen COOL-Funktion schwächer ist und somit ein Ansteigen der Temperaturwelle zu Folge hat. Bei der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit κ ist die vorherige Bestimmung der Amplitudenverhältnisse und der Phasendifferenz der Temperaturwelle, welche grafisch vorgenommen wird und daher große Messungenauigkeiten hat, bedingt durch menschliche Genauigkeit und der Genauigkeit der Messinstrumente und der Grafiken selbst, welche, wie zuvor schon erwähnt, ebenfalls nicht genau sein können. Die errechneten Werte kommen trotz großen Fehlers nah an die Literaturwerte Tabelle 1 heran, obwohl der Wert für Aluminium schon etwas stärker abweicht. Dies ist wohl auf einen zufälligen Fehler zurückzuführen, da dieselbe Messung bei Messing einen vätergleichsweise sehr guten Wert ergibt. Bei Edelstahl ist noch anzumerken, dass die Messung bereits nach drei Perioden wegen Überhitzung eines Thermoelements abgebrochen werden musste, weshalb diese Messung trotz gutem Ergebnis, wohl deutlich weniger repräsentativ ist, als die anderen beiden Werte. Allgemein lässt sich nur eine geringe Repräsentativität für die berechneten Werte feststellen; hier müssten gegebenenfalls weitere Messreihen folgen um eine höhere Genauigkeit zu erzielen. Für alle Wärmeleitfähigkeiten lässt sich aber sagen, dass die Werte unter Berücksichtigung aller Fehlerquellen im Rahmen der Messgenauigkeit liegen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V204: Wärmeleitung von Metallen*. 2018.
- [2] H. Recknagel E. Schramek. *Wärmeleitfähigkeit von Metallen*. 2018. URL: https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php.